Neuf fonctions usuelles

1 Fonctions circulaires : cos, sin, tan.

Proposition 1.

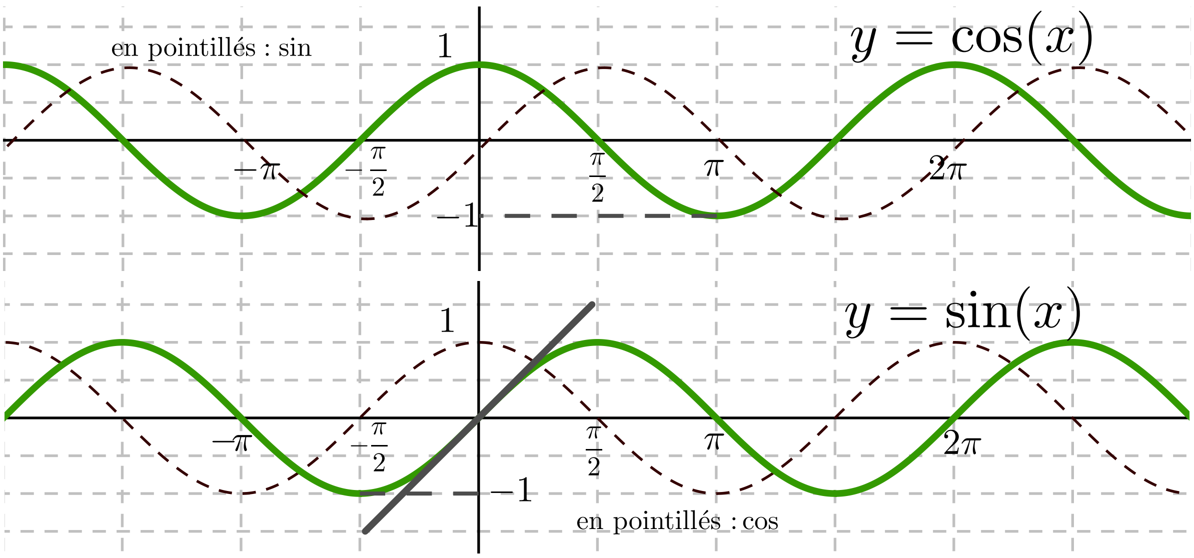
La fonction cos est paire, et la fonction sin impaire. Elles sont toutes deux 2π-périodiques.
Le graphe de sin se déduit de celui de cos par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Proposition 2.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées

$$\cos' = -\sin \qquad \text{et} \qquad \sin' = \cos .$$

Preuve : en annexe, à la fin.



Proposition 3.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x|.$$

Définition 4.

On appelle fonction **tangente** et on note tan la fonction définie par

$$\tan : \left\{ \begin{array}{ccl} D_{\tan} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right. \qquad \text{où} \quad D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'écriture de $D_{\tan}$ comme réunion d'intervalles disjoints de longueur π :

$$D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

Proposition 5.

Sur $D_{\tan}$, la fonction tangente est impaire et π-périodique.

La π-périodicité permet de réduire l'étude à un intervalle de longueur π, ce qui est le cas de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

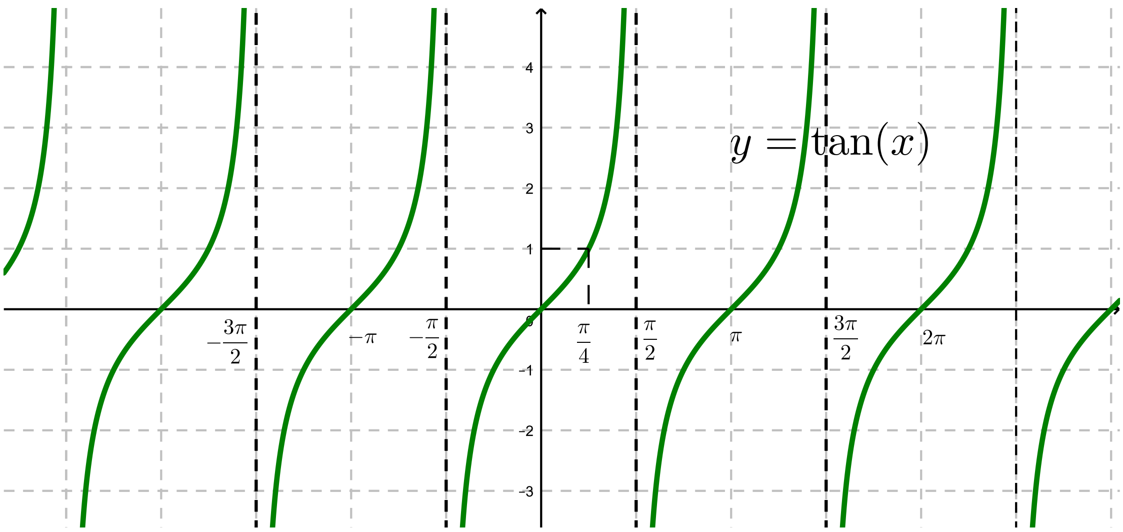
Proposition 6 (Valeurs et limites notables)**.**

$$\tan(0) = 0, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \qquad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2} \\ x>-\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$$

Proposition 7.

La fonction tangente est dérivable sur $D_{\tan}$ et

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$



Proposition 8 (Formules d'addition).

Pour tous réels a et b tels que les nombres ci-dessous ont un sens,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Corollaire 9 (Identités à savoir retrouver).

Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que a est un réel tel que $\frac{a}{2} \in D_{\tan}$. En notant $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$,

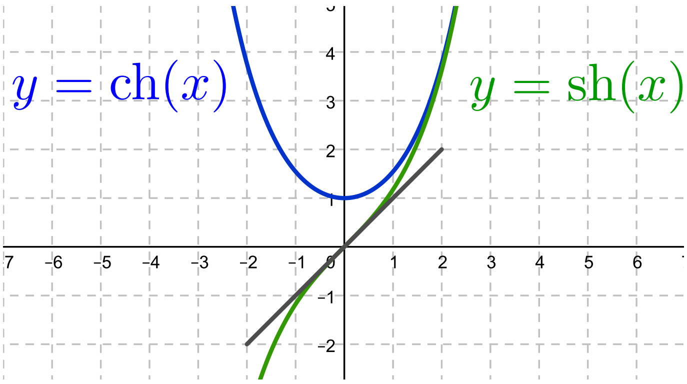
$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \text{et} \qquad \sin a = \frac{2t}{1+t^2}.$$

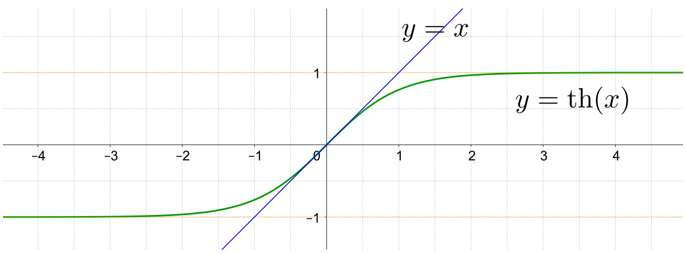
2 Fonctions hyperboliques ch, sh, th.

Définition 10.

Les fonctions **cosinus, sinus et tangente hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{sh} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{th} : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}.$$





Pourquoi *cosinus* et *sinus* ? Cela vient de l'analogie avec les formules d'Euler pour les "vrais" cos et sin :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Pourquoi *hyperbolique* ?
Pour les "vrais" cosinus et sinus, on a $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est un cercle.
Avec ch et sh, on va voir que $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$ et l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

est appelé une hyperbole en géométrie.

Proposition 11.

- La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} e^x & = & \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) \\ e^{-x} & = & \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) \end{cases}$
- Une formule de trigonométrie hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

- Des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1.$$

- Toutes les trois sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x), \quad \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

- Les tangentes aux courbes de sh et th en 0 sont d'équation $y = x$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{sh}(x) \geq x \quad \text{et} \quad \mathrm{th}(x) \leq x.$$

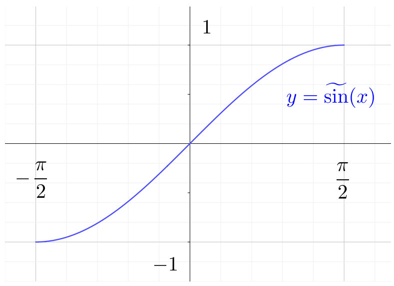
3 Fonctions circulaires réciproques : $\arcsin, \arccos, \arctan$.

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est (grossièrement) pas bijective. Par exemple, on pourra remarquer que 2 ne possède pas d'antécédent par sin, ou encore que 1 en possède une infinité.

En revanche, la fonction

$$\widetilde{\sin} : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{cases}$$

est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et $\widetilde{\sin}\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$.



Le théorème de la bijection continue légitime alors la définition ci-dessous.

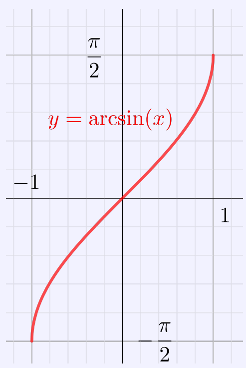
Définition 12.

On appelle fonction **arcsinus** et on note

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Pour tout y dans $[-1, 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique antécédent de y par sin dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Proposition 13.

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$ et elle est impaire.

Proposition 14.

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\arcsin(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin x) = x$$

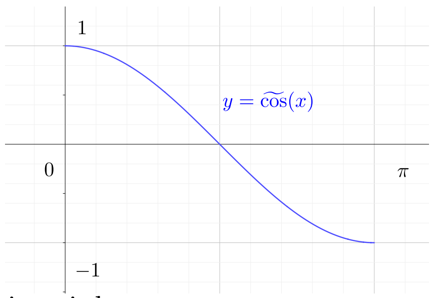
Exemple 15.

Que valent $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(\frac{1}{2})$? Et $\arcsin\left(\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$?

La fonction

$$\widetilde{\cos} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \right.$$

est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$,
et $\widetilde{\cos}\,([0,\pi]) = [-1,1]$.



Le théorème de la bijection continue légitime alors la définition ci-dessous

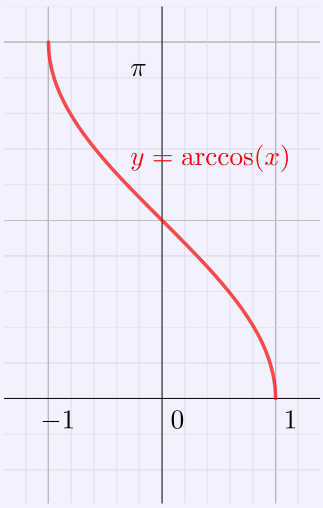
Définition 16.

On appelle fonction **arccosinus** et on note

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\cos} : [0,\pi] \to [-1,1]$.

Pour tout y dans $[-1,1]$, $\arccos(y)$ est l'unique antécédent de y par cos dans $[0,\pi]$.



Comme réciproque d'une fonction strictement décroissate, arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 17.

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arccos(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in [0,\pi] \quad \arccos(\cos x) = x$$

Exemple 18.

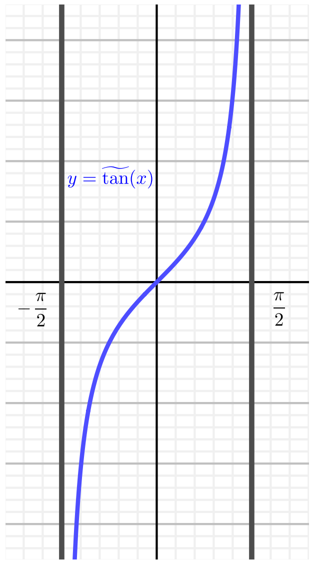
Que valent $\arccos(0)$, $\arccos(1)$, $\arccos(-1)$, $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})$? Et $\arccos\left(\cos(\frac{5\pi}{3})\right)$?

La fonction

$$\widetilde{\tan} : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array} \right.$$

est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
et $\widetilde{\tan}\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$.

Le théorème de la bijection continue légitime alors la définition ci-dessous



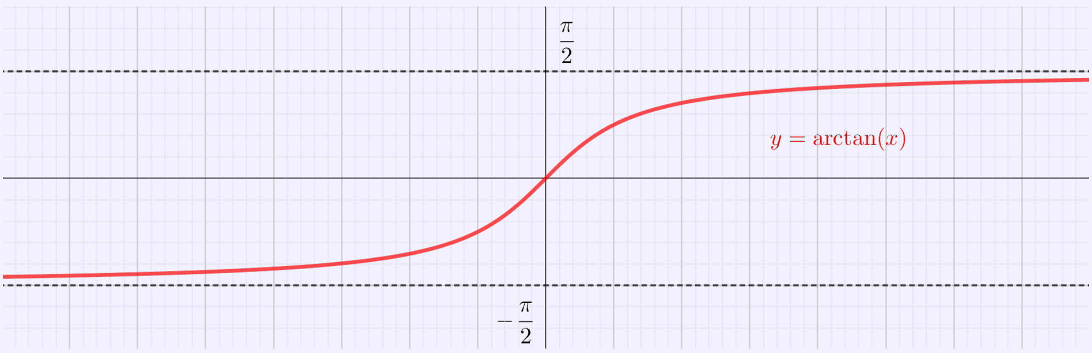
Définition 19.

On appelle fonction **arctangente** et on note

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

la réciproque de la bijection $\widetilde{\tan} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Pour tout y dans $\mathbb{R}$, $\arctan(y)$ est l'unique antécédent de y par tan dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Proposition 20.

La fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle est impaire.

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Proposition 21.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\arctan(x)) = x \qquad\qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \arctan(\tan x) = x$$

Exemple 22.

Que valent $\arctan(0)$? $\arctan(1)$? $\arctan(\sqrt{3})$? Et $\arctan(\tan(\pi))$?

Lemme 23.

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Proposition 24.

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Proposition 25 (Lien entre arccos et arcsin)**.**

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Proposition 26.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Annexe.

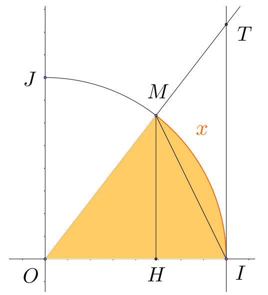
Preuve de la proposition 2 : on prouve que cos et sin sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées sont respectivement $-\sin$ et cos.

Lemme.

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Preuve. Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. On note $M = M(x)$ le point du cercle trigonométrique associé à x par enroulement. Notons $\mathcal{C}(x)$ la portion de disque délimitée par O, I et M (pleine sur la figure suivante). On lit sur la figure l'inégalité

$$Aire(OIM) \leq Aire\left(\mathcal{C}(x)\right) \leq Aire(OIT). \quad (\star)$$



• Le disque de rayon 1 est d'aire π donc le quart de disque $\mathcal{C}(\frac{\pi}{2})$ est d'aire $\frac{\pi}{4}$. Une règle de trois nous donne que $\mathcal{C}(x)$ est d'aire $\frac{x}{2}$.

• Le triangle OIM est de base $OI = 1$ et de hauteur $HM = \sin(x)$. On a donc $Aire(OIM) = \frac{1\times\sin(x)}{2}$.

• Le théorème de Thalès donne $\frac{IT}{HM} = \frac{OI}{OH}$ d'où $IT = \frac{HM\times OI}{OH} = \frac{\sin x}{\cos x}$. On a donc $Aire(OIT) = \frac{\tan x}{2}$.

Les inégalités $(\star)$ donnent donc

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

ce qui fournit bien l'inégalité

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

$\square$

Preuve de la proposition 2.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. On va dériver la fonction sin en x c'est à dire s'intéresser au taux d'accroissement

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Il nous faut montrer que ce dernier a pour limite $\cos x$ lorsque h tend vers 0.

L'utilisation des formules d'addition amène, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h}.$$

Ainsi, la proposition est démontrée si on prouve

$$\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

La première limite découle du lemme précédent grâce au théorème des gendarmes.

Pour la seconde, on calcule

$$\frac{(1+\cos h)(1-\cos h)}{h} = \frac{1-\cos^2 h}{h} = \frac{\sin^2(h)}{h} = \sin h \times \frac{\sin h}{h},$$

d'où

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{\sin h}{1+\cos h} \times \frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{0}{2} \times 1 = 0.$$

On a donc bien

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x) \times 1 + 0 = \cos(x).$$

Ceci achève de démontrer que sin est dérivable en x, de dérivée $\cos x$.

• Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Ainsi, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos'(x) = (-1)\sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x).$$

$\square$

Exercices

Trigonométrie. Fonctions circulaires.

$\boxed{8.1}$ **[♦♦◇]**

1. Soit $f : x \mapsto \sin^2(x)\sin(2x)$. Déterminer son maximum sur $[0, \pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer pour tout réel x et tout entier $n \geq 1$, on a

$$\prod_{k=0}^{n} \sin(2^k x) \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

$\boxed{8.2}$ **[♦◇◇]** Calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$.

$\boxed{8.3}$ **[♦◇◇]** Résoudre

$$|\tan(x)| = 1.$$

Fonctions hyperboliques.

$\boxed{8.4}$ **[♦◇◇]** Trigonométrie hyperbolique.

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a
   (a) $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (b) $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$.
   (c) Trouver une identité pour $\mathrm{th}(a+b)$.
2. Pour x réel, on pose $t = \mathrm{th}(\frac{x}{2})$. Montrer que

$$(a)\ \mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2} \qquad (b)\ \mathrm{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \qquad (c)\ \mathrm{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$\boxed{8.5}$ **[♦◇◇]** Résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = 2$. Que dire des solutions ?

$\boxed{8.6}$ **[♦♦◇]** Soient a et b deux réels tels que $b \neq 0$. Résoudre l'équation

$$a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) = 0.$$

$\boxed{8.7}$ **[♦♦◇]**

1. Justifier que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Expliciter sa réciproque, puis calculer la dérivée de cette réciproque.
3. Retrouver le dernier résultat en appliquant le théorème de dérivation d'une réciproque.

$\boxed{8.8}$ **[♦♦♦]**

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque, qu'on notera argth.
2. De deux façons différentes, montrer que argth est dérivable sur son intervalle de définition et calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argth}\left(\dfrac{1+3\mathrm{th}x}{3+\mathrm{th}x}\right) = x + \ln\sqrt{2}$.

Fonctions circulaires réciproques.

$\boxed{\textbf{8.9}}$ **[♦◇◇]** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \ x - \dfrac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x$.

$\boxed{\textbf{8.10}}$ **[♦♦◇]** Montrer que

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\textbf{8.11}}$ **[♦♦◇]** Soit l'équation

$$\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

1. Justifier que l'équation admet une unique solution sur $[-1, 1]$.
2. Donner une expression de cette solution.

$\boxed{\textbf{8.12}}$ **[♦♦◇]** Dans cet exercice, on considère la fonction

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\operatorname{th}(x)\right)$$

1. Justifier soigneusement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et prouver que $f' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$.
2. Démontrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\textbf{8.13}}$ **[♦♦◇]** Soit

$$f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1, 1[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire une expression plus simple de la fonction f.
4. Retrouver ce résultat par une preuve directe.

$\boxed{\textbf{8.14}}$ **[♦♦♦]** Pour $a < x < b$, montrer que $\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} = \arctan\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$.
