點估計

1. 統計推論

統計推論：從母體中抽取樣本，並利用樣本資料之分析結果，推測母體的參數。

一旦抽出樣本，樣本特性可以利用 **敘述統計** 的方法來彙總說明。然而，我們關心的並不只是該組樣本資料，而是能否從該組樣本資料獲悉母體的一些特性。也就是說，樣本統計量可以作為推論母體特性的依據。

例6.1: 欲研究消費者更換手機之平均時間，隨機抽取36位消費者，其調查結果見課本（單位：月）。根據資料整理結果，可求得樣本平均數=16.33，樣本中位數=16.50，樣本標準差=4.29。

有關母體參數的推論，或涉及某種程度的不確定性，此乃因為推論是以樣本為依據，而非整個母體。因此，**有意義的統計推論必須能夠指出不確定性的程度，這與機率論有關**。

例子： 請以擲骰子為例，說明如何建立一個樣本平均數的抽樣分配，並且從此抽樣分配推論母體平均數。

～統計量的機率分配求取步驟如下：

- 由母體抽取樣本數為 n 之一組隨機樣本。
- 計算每組樣本統計量 (欲研究的統計量)的值。
- 將不同統計值列於一列，並對應其發生的相對次數。

～投擲一公正骰子2次，以X_1 表第一次所出現的結果，X_2 表第二次所出現的結果，令 $\bar{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$ ，試求$\bar{X}$的機率分配。

P149~P151

I. 統計推論的主要形式可分為：

- **參數估計** (parameter estimation)：母體參數的真實值通常為一未知的常數，而參數的估計目標即在於求得此未知真實質值的推測值，並判斷其正確性。
- **假設檢定**(hypothesis testing)：統計假設的檢定，其目標強調的是某樣本資料是否支持或不支持研究者對此參數真實值的預估（假設）。

II. 參數的估計方法可分成：

「估計」(estimation)是由母體抽出樣本，計算樣本統計量隨機變數的值，然後推估母體參數的真實值。

例：綠豆湯的甜度、濃稠度等

- **點估計** (point estimation)
- **區間估計** (interval estimation)

點估計 (point estimation) 係根據樣本資料求得一估計值，以推估未知的母體參數，這種統計方法稱為點估計。

區間估計 (interval estimation) 係根據樣本資料所求出的點估計值 (point estimate)，然後藉由點估計量抽樣分配的性質求出兩個數值而構成一區間，稱為區間估計值 (interval estimate)，並利用此一區間推估未知的母體參數的範圍，這種統計方法稱為區間估計。

- **點估計量（式）** 是一個公式，是一個統計量，是一個隨機變數，透過隨機樣本可以計算出來一個數值，稱為 **點估計值** 。
- 點估計只是一個數值，我們並不知道這樣的猜測有多準。
- 通常是透過區間估計所建構出的隨機區間，告訴我們估計的準確程度。
- 區間估計需要估計量的抽樣分配、估計量的標準誤與估計值。

2. 點估計

2-1 何謂點估計

假設從母體抽出一組隨機樣本，取得 n 個觀察值，代入統計量的估計式計算出某一數值，作為母體參數的估計值。

- 估計量(estimator)：用來推估母體參數統計量的估計式。
- 估計值(estimate)：將樣本資料代入估計量後所得的值。

常見的點估計與符號

	母體參數	點估計量	點估計值
平均數	μ	$\overline{X}$	$\overline{x}$
變異數	σ^2	S^2	s^2
標準差	σ	S	s
比例	P	$\overline{P}$	$\overline{p}$

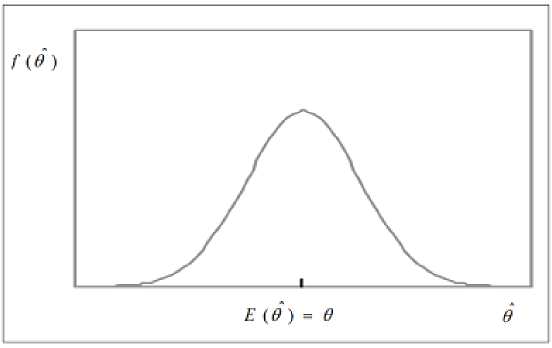
例6.2: P189

2-2. 點估計量的優劣準則

我們無法比較估計值的優劣，但可以比較估計量的優劣。優良的估計量應該具備的性質，包括不偏性、有效性、一致性與充分性。

(1) 不偏性(unbiase)：

若估計量$\hat{\theta}$抽樣分配的期望值等於母體參數值θ，則則稱$\hat{\theta}$為不偏估計式(unbiased estimator)，即 $E(\hat{\theta}) = \theta$，否則為偏誤估計式。



例6.3 P190

例6.4 p190

樣本變異數的估計式應為$\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$而不為$\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}$

$E(\hat{\theta}) = E(\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n})$

步驟一：上式中的分子

$\sum(X_i-\bar{X})^2 = \sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum X_i^2 - \sum 2X_i\bar{X} + \sum \bar{X}^2$
$= \sum X_i^2 - 2\sum n\bar{X}\bar{X} + \sum \bar{X}^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$

步驟二：重寫上式為

$E(\hat{\theta}) = E(\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}) = \frac{1}{n}E(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)$

此式中的$E(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)$可拆成下面兩項：

(1) $E(\sum X_i^2) = \sum E(X_i^2)$

因為$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

所以$E(X_i^2) = V(X_i) + E^2(X_i)$

因此 $\sum E(X_i^2)$= $\sum[V(X_i) + E^2(X_i)]$

亦即$\sum E(X_i^2) = n\sigma^2 + n\mu^2$

(2) $E(n\bar{X}^2)$=$nE(\bar{X}^2)$

因為$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

所以$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E^2(\bar{X})$

因此$E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

亦即$nE(\bar{X}^2)$=$\sigma^2 + n\mu^2$

～綜合(1)與(2)，可得$E(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)$= $\sum E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)$

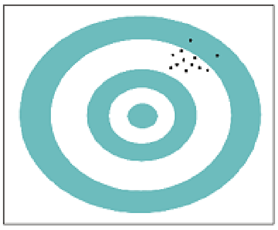
$= (n\sigma^2 + n\mu^2) - (\sigma^2 + n\mu^2)$

可得證$E(\hat{\theta}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

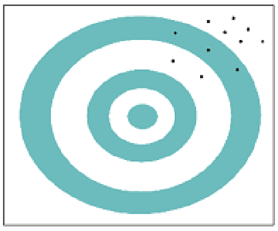
(2) 有效性(efficiency)：

在所有不偏估計量中，具有最小變異數之估計量稱為有效估計量(efficient estimator)。

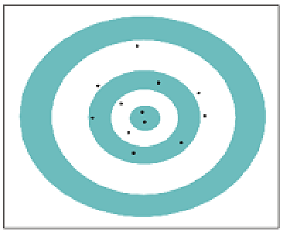
高偏差低變異



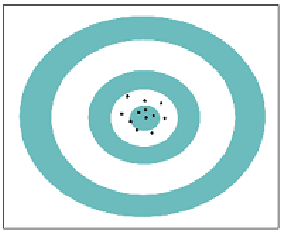
高偏差高變異

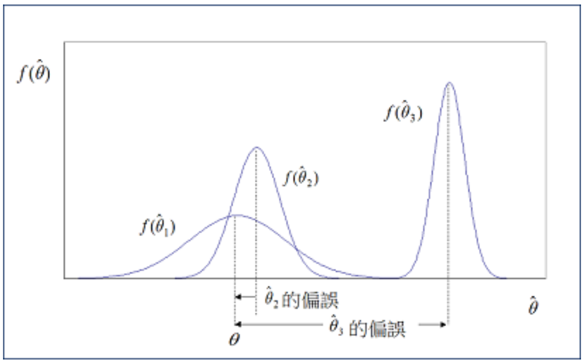


低偏差高變異



低偏差低變異

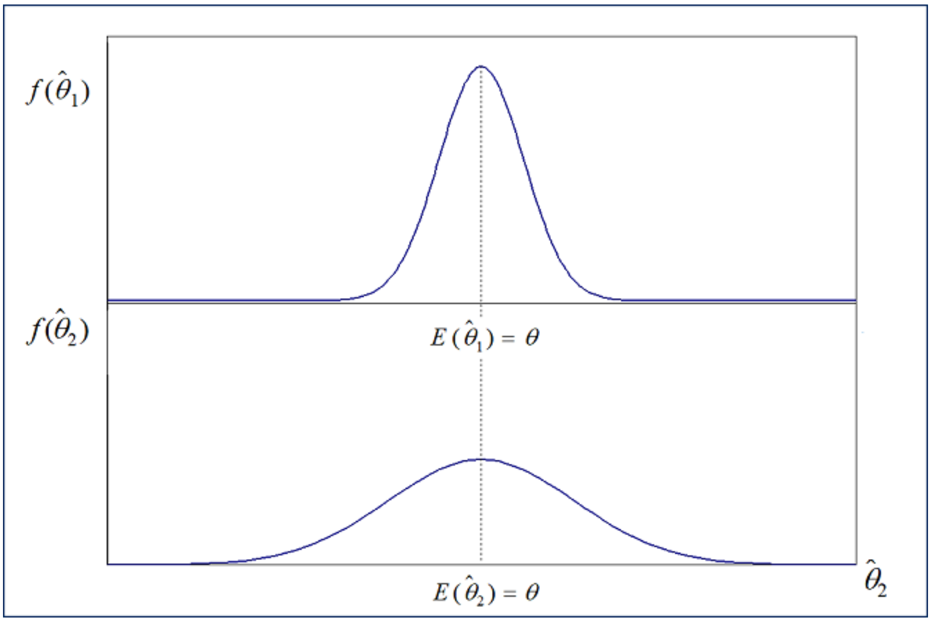


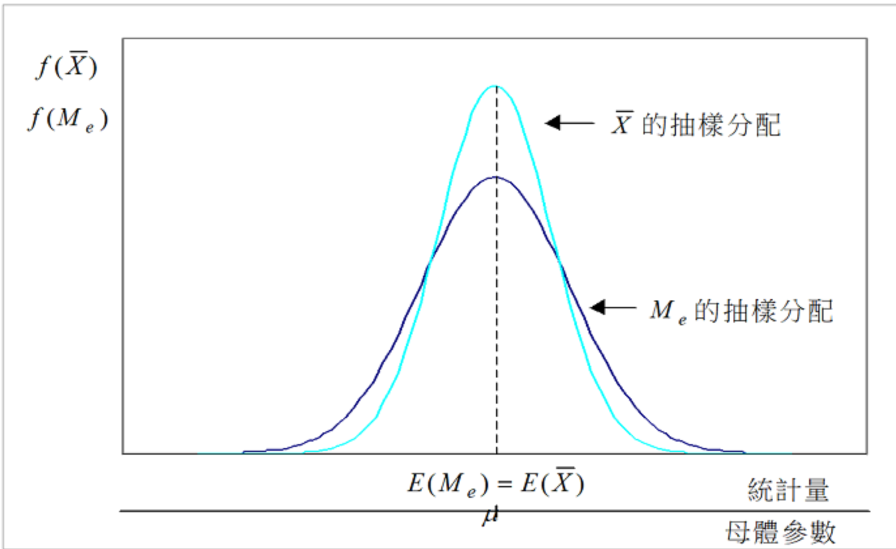


絕對有效性

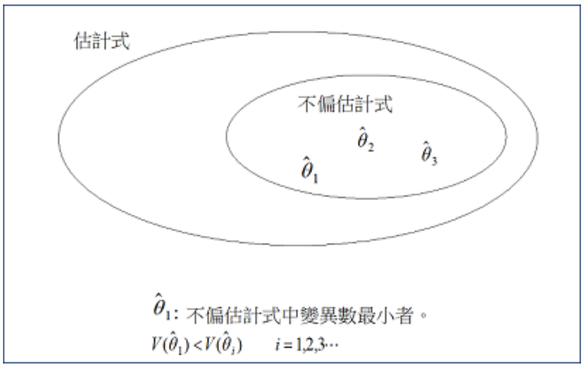
設$\hat{\theta}$為 θ之估計式，若$\hat{\theta}$的平均平方誤差$MSE(\hat{\theta}) = E$(\hat \theta - \theta)^2，為所有估計式中最小者，則稱$\hat{\theta}$在估計θ時具有絕對有效性。

相對有效性 設$\hat{\theta}$與$\hat{\hat{\theta}}$均為θ的不偏誤估計式，若$\frac{V(\theta)}{V(\hat{\hat{\theta}})} < 1$，則$\hat{\theta}$相對$\hat{\hat{\theta}}$為有效估計式。





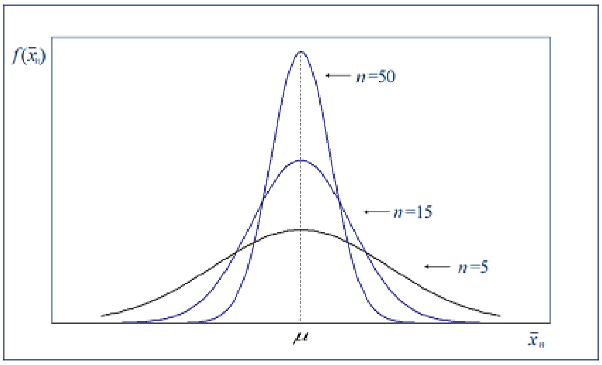
最小變異數的不偏估計式



例6.5：P191

(3) 一致性(consistency)

一個不偏估計式，當樣本數增大時，估計值與母體參數的差異會越來越小。當樣本數趨近無限大，差異會趨近0。 具有一致性的估計量 $\hat{\theta}$ 和參數 θ 之間差距會超過微小值 ϵ 的機率為0，即$lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|>\epsilon)=0$。



(4)充分性(sufficiency)

若一估計式在估計時充分利用樣本資料的訊息，亦即估計量$\hat{\theta}$含有母體參數θ之全部訊息，則稱$\hat{\theta}$為θ的充分估計式。

例：充分估計值，充分利用樣本數據對待估參數作出的估計值。如樣本平均數與標準差是由全部樣本值求出的，而中位數與全距則只是由部分樣本值求得的，故其不是母體平均數與母體標準差的充分估計值。

2-3. 點估計的方法 (Optional)

(1)動差法(Method of Moments) (2)最大概似估計法(Maximum Likelihood Estimation) (3)貝氏統計 (Bayesian Statistics) (4)無母數統計(Nonparametric Statistics) (5)數值趨近(Numerical Approximation) (6)模擬(Simulation)

3. 課程內容安排順序

Chapter 6 估計 + Chapter 7 假設檢定

(1)**推論方法**：點估計、區間估計、假設檢定 (2)**母體/樣本**：單一母體、兩母體 (3)**參數/統計量**：平均數、比例、變異數

參數估計

- 點估計
- 單一母體平均數的區間估計
- 兩母體平均數差的區間估計
- 單一母體比例的區間估計
- 兩母體比例差的區間估計
- 單一母體變異數的區間估計
- 兩母體變異數比的區間估計

假設檢定

- 單一母體平均數的假設檢定
- 雙母體平均數差的假設檢定
- 單一母體比例的假設檢定
- 雙母體比例差的假設檢定
- 單一母體變異數的假設檢定
- 雙母體變異數筆的假設檢定

補充參考： 電腦實例

Q: 請以擲骰子為例，說明如何建立一個樣本平均數的抽樣分配，並且利用此抽樣分配的點估計量推論母體平均數的值。

統計量：平均數

Step1: 母體平均數

$$\mu = \frac{(1+2+3+4+5+6)}{6} = 3.5$$

Step 2. 建立樣本平均數的抽樣分配

每個樣本的大小為10，亦即擲10次骰子計算一個樣本平均數的值$\bar{x}$，總共做1000次，亦即有10,000個樣本平均數隨機變數的值（擲10*1,000次骰子），由此做成一個樣本平均數的抽樣分配。經電腦運算後，可以得樣本平均數抽樣分配的期望值。若樣本大小夠大、抽樣次數夠多，則樣本平均數抽樣分配的期望值會非常接近母體平均數。

```
import numpy as np  #輸入需要使用的套件

dice = [1, 2, 3, 4, 5, 6]    # 建立串列
sample_size=10               # 樣本大小為10，即每回丟骰子10次
sampling_distribution = [ ] # 起初是空字串，最後為1000筆資料

for x in range(1000):
    sample = np.random.choice(dice, sample_size)#每回10次
    sample_mean = sample.mean()#每回計算樣本平均數
    # print("樣本平均數:", sample_mean)
    sampling_distribution.append(sample.mean())#累計的資料

print("樣本平均數抽樣分配:", sampling_distribution)
print("樣本平均數抽樣分配的期望值:",
sum(sampling_distribution)/1000.0)
```

```
# Question:每次抽樣時，個別樣本的平均數計算

import numpy as np
dice = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
size_range = [10, 100, 1000]
for sample_size in size_range:
    sample = np.random.choice(dice, sample_size)
    sample_mean = sample.mean()
    print(sample_size, "樣本平均數:", sample_mean)
```

統計量：比例

```python
# Question：每次抽樣時，個別樣本的比例計算

import random
population = (["臺灣閩南語"]*7330) + (["臺灣客家語"]*1200) + (["其他漢語方言"]*1300) + (["原住民語"]*170)
sample_size = 1000
sample = random.sample(population, sample_size)
for lang in set(sample):
    print(lang +"比例估計:", sample.count(lang)/sample_size)
```

區間估計

Case: Young Professional Magazine

Young Professional magazine was developed for a target audience of recent college graduates who are in their first 10 years in a business/professional career. In its two years of publication, the magazine has been fairly successful. Now the publisher is interested in **expanding the magazine's advertising base**. Potential advertisers continually ask about the demographics and interests of subscribers to Young Professional. To collect this information, the magazine commissioned a survey to develop a profile of its subscribers. The **survey results will be used to help the magazine choose articles of interest and provide advertisers with a profile of subscribers**. As a new employee of the magazine, you have been asked to help analyze the survey results.

Some of the survey questions follow:

1. What is your age?
2. Are you: Male__ **Female___**
3. Do you plan to make any real estate purchases in the next two years? Yes_ No_
4. What is the approximate total value of financial investments, exclusive of your home, owned by you or members of your household?
5. How many stock/bond/mutual fund transactions have you made in the past year?
6. Do you have broadband access to the Internet at home? Yes_ No_
7. Please indicate your total household income last year. __
8. Do you have children? Yes_ No_ The file entitled Professional contains the responses to these questions.

Table shows the portion of the file pertaining to the first five survey respondents.

Managerial Report

Prepare a managerial report summarizing the results of the survey. In addition to statistical summaries, discuss how the magazine might use these results to attract advertisers. You might also comment on how the survey results could be used by the magazine's editors to identify topics that would be of interest to readers. Your report should address the following issues, but do not limit your analysis to just these areas.

1. Develop appropriate descriptive statistics to summarize the data.
2. Develop 95% confidence intervals for the mean age and household income of subscribers.
3. Develop 95% confidence intervals for the proportion of subscribers who have broadband access at home and the proportion of subscribers who have children.
4. Would *Young Professional* be a good advertising outlet for online brokers? Justify your conclusion with statistical data.
5. Would this magazine be a good place to advertise for companies selling educational software and computer games for young children?
6. Comment on the types of articles you believe would be of interest to readers of *Young Professional*.

個案問題:青年專家雜誌

《青年專家》(Young Professional)雜誌的目標讀者是畢業10年內、投身於商業／專業領域的年輕人。該雜誌已出版2年，相當成功。目前該雜誌發行者期望能擴大廣告刊登的成績。可能的廣告主不斷詢問《青年專家》雜誌訂戶的人口統計特性及個人興趣。為蒐集相關資料，雜誌進行調查以建立訂戶的資料檔案。調查結果將用於協助雜誌選擇刊登的文章，並提供廣告主餐參考。作為雜誌社的新進職員，你被要求協助分析調查結果。

某些調查問題如下：

1. 你的年紀？
2. 你的性別？男____ 女____
3. 未來兩年有購置不動產的計畫嗎？是____否____
4. 你及家庭成員擁有的金融投資大約多少？(不包含房子在內)
5. 去年的股票／債券／共同基金的交易次數是多少？
6. 家裡有頻寬上網嗎？是____ 否____
7. 去年家庭總收入是多少？ ________
8. 有小孩嗎？是____ 否____

在名為Professional的檔案裡，有以上調查的相關資料。

TABLE 8.6 PARTIAL SURVEY RESULTS FOR *YOUNG PROFESSIONAL* MAGAZINE

Age	Gender	Real Estate Purchases	Value of Investments($)	Number of Transactions	Broadband Access	Household Income($)	Children
38	Female	No	12200	4	Yes	75200	Yes
30	Male	No	12400	4	Yes	70300	Yes
41	Female	No	26800	5	Yes	48200	No
28	Female	Yes	19600	6	No	95300	No
31	Female	Yes	15100	5	No	73300	Yes
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

管理報告

準備管理報告，彙整調查的結果。除了統計的彙整外，請討論雜誌社如何運用這些結果吸引廣告主。你也可以評選雜誌編輯可以如何利用調查結果以推出更能吸引讀者的主題。報告應包含以下議題，但不以此為限。

1. 利用適當的敘述統計來彙總各項調查問題。
2. 求訂戶的年紀及家庭平均收入的95%信賴區間。
3. 建立家中有寬頻的訂戶比例95%信賴區間估計值，以及有小孩的訂戶比例的95%信賴區間。

4. 對經紀商而言，《青年專家》雜誌是理想的刊登廣告的媒體嗎？請以統計資料說明你的結果。
5. 對銷售教育軟體及兒童電腦遊戲的企業而言，《青年專家》雜誌是理想刊登廣告的媒體嗎？請以統計資料說明你的結果。
6. 說明你認為可以吸引《青年專家》雜誌讀者的類型文章。

念管理的人最需要具備的能力是問問題的能力，類似上面的問題是職場上的管理者想要知道答案的問題。

那如何求得這些問題的答案呢？

- 一個主管可以請下屬或唸統計、數學的同事去算出答案。（寫程式也是一樣。）
- 在公司中，主修商學或管理的人不一定是負責做出答案的人。又，唸統計數學的人不懂行銷，問不出這樣的問題，但你懂行銷。可是，若你不懂統計，你能問出真正好的問題嗎？
- 你不需要將統計學得和數學統計系一樣好，（也不需要將程式寫得和資管資工系一樣好）。 但是，**你要能夠有統計的觀念去問出在行銷上的好題目**。
- 因此，同學要會的是基本的統計觀念和理論。
- 許多同學把學統計的重心都放在『算出答案』，其實抽象的統計觀念才是最重要的，是問問題與和他人合作的基礎。
- 建議同學不要本末倒置，不是拿自己和念統計數學的人比（拿自己和資管資工的人比，拿自己和Google大神比），贏過他們才叫做把統計學念好，而是要能問出具統計觀念的專業問題。

---

1. 區間估計

對未知的母體參數估計出一個上下限的區間，並指出該區間包含母體參數的可靠度（機率）。

母體參數θ的區間估計值為：L<θ<U

區間估計(interval estimation) 係根據樣本資料所求出的**點估計值**(point estimate)，然後藉由點估計量抽樣分配的性質求出兩個數值而構成一區間，稱為**區間估計值**(interval estimate)，並利用此一區間推估未知的母體參數的範圍，這種統計方法稱為區間估計。

信賴區間

母體參數的信賴區間＝點估計量±抽樣誤差 (8-6)

信賴區間(confidence interval) 是在一個既定的信賴水準下所構成的一個區間，亦即由樣本統計量及抽樣誤差所構成一個包含上限與下限的區間。

假設從母體中抽出一組隨機樣本，母體參數為θ，估計此母體參數之統計量為 L 與 U 使得 $P(L < \theta < U) = 1 - \alpha$。

- 上下限L與U的範圍稱為θ的$(1-\alpha)100$信賴區間。
- L與U的大小由$\hat{\theta}$的點估計值與抽樣分配決定。

- **信賴係數(confidence coefficient)**，$(1-\alpha)$，是指信賴區間包含母體參數的信心程度(或稱可靠度，信賴度)。
- 信賴係數亦稱信賴度(degree of confidence)，或信賴水準(confidence level)。
- **誤差界線(margin of error)**：估計量與母體參數之間的差距，是參數點估計與參數之間的可容忍的最大誤差，通常以$e=|\hat{\theta}-\theta|$表示。
    - $L=\hat{\theta}-e$
    - $U=\hat{\theta}+e$

區間估計的步驟

- 步驟1：選擇點估計量
- 步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配
- 步驟3：導出母體參數的信賴區間
- 步驟4：計算母體參數的信賴區間值並做統計推論

---

2. 單一母體平均數μ的區間估計

方法（一）：樣本平均數的抽樣分配為常態分配：

步驟1:選擇較佳的點估計量

對於母體平均數的點估計而言，樣本平均數是變異數最小的不偏估計量。所以要做母體平均數的區間估計，會選擇樣本平均數此統計量進行推估。

步驟2:取得樣本統計量的抽樣分配

其次，要瞭解樣本平均數的抽樣分配，而常見的樣本平均數抽樣分配有常態分配與t分配兩種。

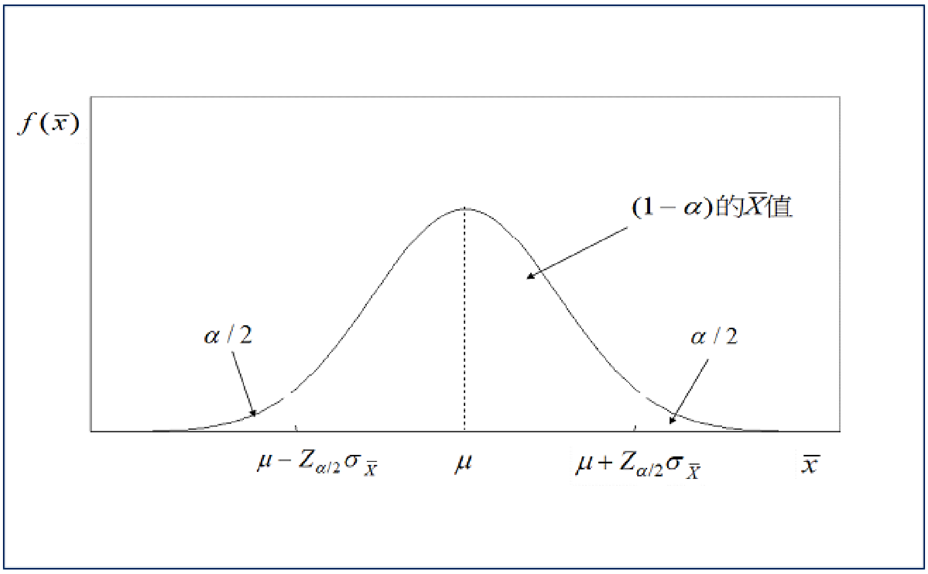
(1)樣本平均數的抽樣分配為常態分配：

- 當母體為常態分配時，無論樣本大小，樣本平均數$\bar{X}$的抽樣分配為常態分配，即$\bar{X}$ ~ $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 或 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ ~ $N(0,1)$。
- 當母體不為常態分配時，但在大樣本情況下，根據中央極限定理可得知樣本平均數的抽樣分配近似常態分配，即$\bar{X}$ ~ $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 或 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ ~ $N(0,1)$。

~ 若樣本平均數之分配為常態時，其期望值為μ，標準差為$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，$\bar{X}$ ~ $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$或 $z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$。

- $E(\bar{X})=\mu$，樣本平均數抽樣分配的期望值等於母體平均數。
- 母體平均數會落在信賴區間數值範圍的機率為1-α％。

步驟3:導出母體參數的信賴區間



$P(L < \mu < U) = 1 - \alpha$

常態分配標準化可得 $\Rightarrow 1-\alpha = P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}})$

$\Rightarrow 1-\alpha = P(-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}-\mu < Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\Rightarrow 1-\alpha = P(-\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\Rightarrow 1-\alpha = P(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

因此，μ的信賴區間為$(\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$。

Summary ：抽樣分配為常態時，母體平均數的信賴區間有三種情況

❍ 大樣本變異數已知，母體平均數的信賴區間

信賴水準$1-\alpha$下，以$\overline{X}$估計μ所得的信賴區間為：

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$$

$\overline{X} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$稱為信賴區間下限，$\overline{X} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}$稱為信賴區間上限。

❍ 大樣本變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X} - Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$稱為信賴區間下限，$\overline{X} + Z_{\alpha/2}S/\sqrt{n}$稱為信賴區間上限。

❍ 小樣本常態母體變異數已知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

步驟4:計算母體參數的信賴區間值並做統計推論

$\bar{X}-\mu$在$Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$距離內的機率為$1-\alpha$，表為$P(|\bar{X}-\mu|\leq Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=1-\alpha$

常見的雙尾Z值：

- 99%: $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.005}=2.33$
- 95%: $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$
- 90%: $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.05}=1.645$

例6.6:欲了解目前台灣地區社群網站使用者平均每月所花費的時間，根據過去經驗，每位使用者每月花費時間之標準差為5.2小時。今隨機抽查100位社群網站使用者每月所花費的時間，得平均數為23.3小時，標準差為5.5小時，試求目前台灣地區社群網站使用者平均每月花費時間之點估計值及其95%信賴區間，並計算此區間長度。

例6.7: 依例6.1之資料，推估消費者更換手機之平均時間的95%及90%信賴區間。

方法（二）：樣本平均數之抽樣分配為t分配

步驟1:選擇點估計量

對於母體平均數的點估計而言，樣本平均數是變異數最小的不偏估計量。所以要做母體平均數的區間估計，會選擇樣本平均數此統計量進行推估。

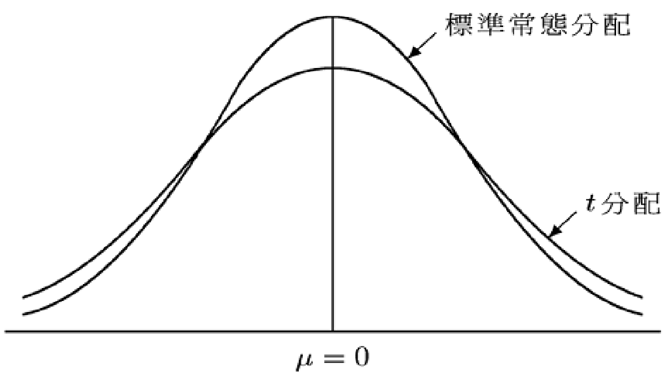
步驟2:取得樣本統計量的抽樣分配

其次，要瞭解樣本平均數的抽樣分配，而常見的樣本平均數抽樣分配有常態分配與t分配兩種。

(2)樣本平均數之抽樣分配為t分配

自常態母體$X\sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$隨機抽取樣本$X_1,X_2,...,X_n$，則統計量$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$為t分配。其性質如下：

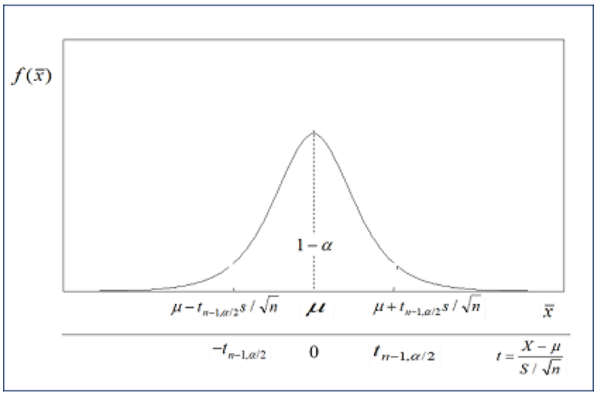
- t分配是一個以平均數0為中心的對稱分配，不同的自由度v有不同的t分配。
- t分配不與橫軸相交，t分配曲線下的總面積為1。
- t分配決定於自由度v，它是t分配唯一的參數。
- 自由度趨近於無窮大時$v->\infty$，t分配趨近於標準常態分配，即$t\sim N(0,1)$。若是$t\geq 30$，則以標準常態分配替代t分配。



由圖形可知，t 分配與標準常態分配同樣對稱於零，而 t 分配的圖形較標準常態分配矮胖，隨著自由度增加 (亦即樣本數增加)，t 分配會越來越趨近標準常態分配。

- t分配查表

步驟3：導出母體參數的信賴區間



$$1-\alpha=P(-t_{\alpha/2}(v)<T<t_{\alpha/2}(v))\Rightarrow 1-\alpha=P(-t_{\alpha/2}(v)<\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(v))$$
$$\Rightarrow 1-\alpha=P(-t_{\alpha/2}(v)S/\sqrt{n}<\bar{x}-\mu<t_{\alpha/2}(v))S/\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow 1-\alpha=P(-t_{\alpha/2}(v)S/\sqrt{n}<\bar{x}-\mu<t_{\alpha/2}(v))S/\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow 1-\alpha=P(\bar{x}-t_{\alpha/2}(v)S/\sqrt{n}<\mu<\bar{x}+t_{\alpha/2}(v))S/\sqrt{n}$$

Summary：抽樣分配為t分配時，母體平均數的信賴區間

❍ 小樣本常態母體變異數未知，母體平均數的信賴區間

$$\overline{X}\pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

為自由度$n-1$的t分配。

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做出統計推論

$\bar{X}-\mu$在$t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$距離內的機率為$1-\alpha$，表為$P(|\bar{X}-\mu|\leq t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}})=1-\alpha$

例6.9: 某製造省電燈泡商，欲了解其新品牌省電燈泡之平均壽命，故隨機取12個燈泡做實驗，觀察記錄其壽命(小時)如下：

```
15,000    15,100    15,000    15,200    15,500    15,400
15,600    15,500    15,300    15,200    15,300    15,400
```

根據過去經驗每個燈泡壽命是服從常態分配，試求此新品牌省電燈泡之平均壽命的點估計及90%信賴區間與區間長度？

再論信賴區間

(1)信賴區間的決定因素

a. 抽樣分配的標準差σ

若抽樣分配的標準差越大，則信賴區間長度越長，越不精確。

b. 樣本數n

樣本平均數的標準差為 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。當n愈大時，標準差愈小，區間長度也就愈小。

c. 點估計式的抽樣分配為何

抽樣分配不同，上下限取法就不同，因而影響區間長度。

d. 信賴係數α

信賴係數越大其區間長度將越大。

(2) 信賴區間的實際意義

與抽樣分配相較，每次抽出隨機樣本所構成的信賴區間，有的信賴區間包含參數θ，有的信賴區間則沒有包含參數 θ。

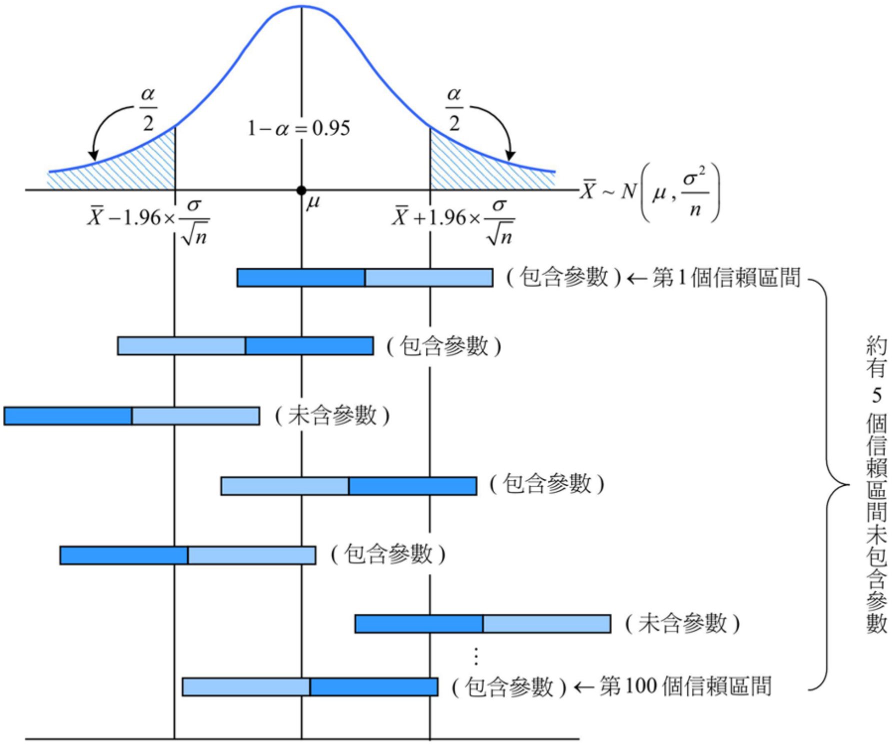


圖 8.1 母體平均數的 95% 信賴區間的解釋

~ 說明：假設抽出100組「 n 大小固定」的樣本

- 這100個信賴區間的信賴水準為0.95，則表示
    - 這100個信賴區間約有95個信賴區間包含了母體參數θ。
    - 這100個信賴區間約有5個信賴區間並未包含母體參數θ。

例：為了進一步瞭解信賴區間的意義， 我們模擬自常態母體，$\mu = 100$ 與 $\sigma = 4$，取出一組樣本數為 4 之隨機樣本，計算其母體平均數的 95% 信賴區間。一共重複進行試驗 25 次後，其結果如下：

樣本組別	樣本平均數	區間下限	區間上限	區間包含母體真實值 $\mu = 100$
1	99.39	98.81	99.97	否
2	99.84	33.16	166.52	是
3	99.75	44.80	154.70	是
4	102.05	35.54	168.56	是
5	102.49	99.02	105.96	是
6	100.26	64.60	135.92	是
7	100.63	−91.00	292.26	是
8	96.76	57.22	136.30	是
9	99.24	80.04	118.44	是
10	97.62	96.56	98.68	否
11	100.38	4.45	196.31	是
12	100.66	−33.49	234.81	是
13	97.71	8.29	187.12	是
14	97.59	−3.16	198.34	是
15	99.02	9.74	188.30	是
16	100.78	73.22	128.34	是
17	99.64	48.18	151.10	是
18	100.44	41.01	159.87	是
19	102.00	87.03	116.97	是
20	98.15	23.02	173.27	是
21	99.49	81.63	117.35	是
22	96.20	72.33	120.07	是
23	102.54	94.79	110.29	是
24	98.75	68.74	128.76	是
25	103.96	42.66	165.26	是

電腦實例

Q: 請以擲骰子為例，說明如何建立一個樣本平均數的抽樣分配，並且利用此抽樣分配的估計量推論母體平均數值的區間範圍。

```
import numpy as np
dice = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
sample_size=100

#樣本平均數的抽樣分配
sampling_distribution = []
for x in range(1000):
    sample = np.random.choice(dice, sample_size)
    sample_mean = sample.mean()
    # print("樣本平均數:", sample_mean)
    sampling_distribution.append(sample.mean())

print("樣本平均數抽樣分配:", sampling_distribution)
print("樣本平均數抽樣分配的期望值:",
sum(sampling_distribution)/10000.0)
```

```

# 抽樣分配的特性
import math
sampling = np.random.choice(sampling_distribution,
sample_size)
sampling_mean = sampling.mean()
print("期望值:", sampling_mean)
sampling_stdev = sampling.std()
print("標準差:", sampling_stdev)
sampling_sigma = sampling_stdev/math.sqrt(sample_size-1)
print("標準誤:", sampling_sigma)

# 方法（一）：計算Z值與信賴區間
from scipy import stats

##Z值
z_critical = stats.norm.ppf(q=0.975)
print("Z分數:", z_critical)

##信賴區間（一）
margin_of_error = z_critical * sampling_sigma
confidence_interval = (sampling_mean - margin_of_error,
                       sampling_mean + margin_of_error)
print("帶公式計算信賴區間:",confidence_interval)

##信賴區間（二）
conf_int = stats.norm.interval(alpha=0.95,
                               loc=sampling_mean,
                               scale=sampling_sigma)
print("用套件計算信賴區間:",conf_int[0], conf_int[1])


# 方法（二）：計算t值與信賴區間
from scipy import stats

##t值
t_critical = stats.t.ppf(q=0.975,df=sample_size-1)
print("t分數:", t_critical)

##信賴區間（一）
margin_of_error = t_critical * sampling_sigma
confidence_interval = (sampling_mean - margin_of_error,
                       sampling_mean + margin_of_error)
print("帶公式計算信賴區間:",confidence_interval)

##信賴區間（二）
conf_int = stats.t.interval(alpha=0.95,
                            df=sample_size-1,
loc=sampling_mean,
                            scale=sampling_sigma)
print("用套件計算信賴區間:",conf_int[0], conf_int[1])
```

～進行區間估計，一般先對參數進行點估計，得到點估計值。然後用該點估計值加、減誤差幅度(margin of error)與信賴信數(confidence coefficient)的乘積而得到的兩個取值，則是信賴區間的兩個端點。

～Python中的stats模組中的t類別的unterval函數可用在母體變異數未知時進行區間估計，其形式為`interval(alpha, df, loc, scale)`，參數分別為信心水準、自由度、樣本平均數與標準差。常態則為`interval(alpha, loc, scale)`。

```
from scipy import stats
import numpy as np

x=[10.1,10,9.8, 10.5, 9.7, 10.1, 9.9, 10.2, 10.3, 9.9]

# Interval Estimation
# 用np.mean(x)求x的平均值
# 用stats.sem(x)求樣本平均數的標準誤（這比較簡單）

# 抽樣分配為t分配
stats.t.interval(0.95, len(x)-1, np.mean(x), stats.sem(x))

# 抽樣分配為常態分配
stats.norm.interval(0.95, np.mean(x), stats.sem(x))
```

3. 兩個母體平均數差的區間估計

獨立樣本

獨立樣本是指受測者被隨機地分為二群，其中一群指定處理1，而另一群指定處理2。觀察此兩種處理的反應，所得出的觀察值彼此不相關，因為它們來自不同且不相關的受測者。因此，每一組反應的觀察值可視為抽自不同的母體之樣本。此時，我們可對此兩母體分配之間的差異加以比較或進行統計推論。

相依樣本（成對樣本）

成對樣本是指受測者乃以成對抽取，因而每對中的各元素性質相近，而不同對的資料間性質不同。每對的其中一個元素使用處理1，而另一個則使用處理2>

(1)兩組獨立樣本的區間估計

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值

$$\text{母體參數的估計值} \pm \begin{pmatrix} z_{\frac{\alpha}{2}}\text{值} \\ \text{或} \\ t_{\frac{\alpha}{2}}\text{值} \end{pmatrix} \cdot (\text{估計的標準誤}) \qquad (10\text{-}10)$$

來自兩個母體之兩組獨立的隨機樣本，其資料結構與特性說明如下：

(1) 設 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$，係樣本大小為 n_1，且取自平均數 μ_1、標準差 σ_1 的母體 1 之隨機樣本。

(2) 設 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$，係樣本大小為 n_2，且取自平均數 μ_2、標準差 σ_2 的母體 2 之隨機樣本。

(3) 此兩組樣本為獨立的；換言之，在某種處理下所得出的反應觀察值與在另一種處理下所得出的反應觀察值，彼此不相關。

樣本	彙總統計量數
$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 取自母體 1	$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X}_1)^2}{n_1 - 1}$
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 取自母體 2	$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i,\ S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{X}_2)^2}{n_2 - 1}$

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

抽樣分配趨近常態分配

假設分別從二個常態母體$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 取出樣本數為 n_1 與 n_2 之二組獨立樣本，則樣本平均數之抽樣分配分別為$\bar{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1})$與$\bar{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2})$。此時，樣本平均數差之抽樣分配則為$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$。

- $\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = E(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = E(\bar{X}_1) - E(\bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$
- $\sigma^2_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = Var(\bar{X}_1-\bar{X}_2) = Var(\bar{X}_1) + Var(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
- $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

例6.10:欲研究名眾平均一週會花多少時間閱讀書籍，今隨機抽取家中裝設有線電視台與無裝設有線電視民眾250與180位，得其平均一週閱讀時間如下：

有線電視台	樣 本 數	平均數（小時）	標準差（小時）
有裝設	250	14.5	3.5
無裝設	180	20.8	3.8

試問有裝設與無裝設有線電視台民眾之平均一週閱讀時間差異之點估計為何？其98%信賴區間為何？

抽樣分配趨近t分配: 小樣本，母體為常態分配，變異數未知。

(1)變異數相等的區間估計

母體1與母體2皆為常態，而兩組隨機樣本皆為小樣本，且兩母體標準差皆為未知但相等($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$，但$\sigma$未知)，則

$\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$，其中$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

區間估計公式為$((\bar{X}_1-\bar{X}_2) - t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, (\bar{X}_1-\bar{X}_2) + t_{\alpha/2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$

步驟3：導出母體參數的信賴區間

機率求算的方法

$$1-\alpha = P(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})} < (\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2) < t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

樣本平均數差的信賴區間

$$((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_p\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})},(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_p\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})})$$

例6.11:調查服務於規模大小不同公司任職10年以上資深員工，每年休假天數是否有差異，在小公司隨機抽查15位資深員工，得平均年休假為 32天，標準差為7天，而在大公司隨機抽查 12 位資深員工，得平均數為 36天，標準差為 5 天，假設大小公司資深員工每年休假天數服從常態分配，且標準差相等下，試求大小公司資深員工平均年休假天數差之90%信賴區間？

(2)變異數不等的區間估計

母體 1 與 2 皆為常態，而兩組隨機樣本皆為小樣本，且 σ_1 與 σ_2 皆未知亦不相等，則統計量

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(df) \qquad (10\text{-}5)$$

為自由度 df 的 t 分配，其中

$$df=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1-1)}\right]+\left[\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2-1)}\right]} \qquad (10\text{-}6)$$

若自由度不是整數時，可以利用四捨五入法求算自由度。

步驟3：導出母體參數的信賴區間

機率求算的方法

$$1-\alpha = P(-t_{\frac{\alpha}{2}v} < \frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} < t_{\frac{\alpha}{2}v})$$

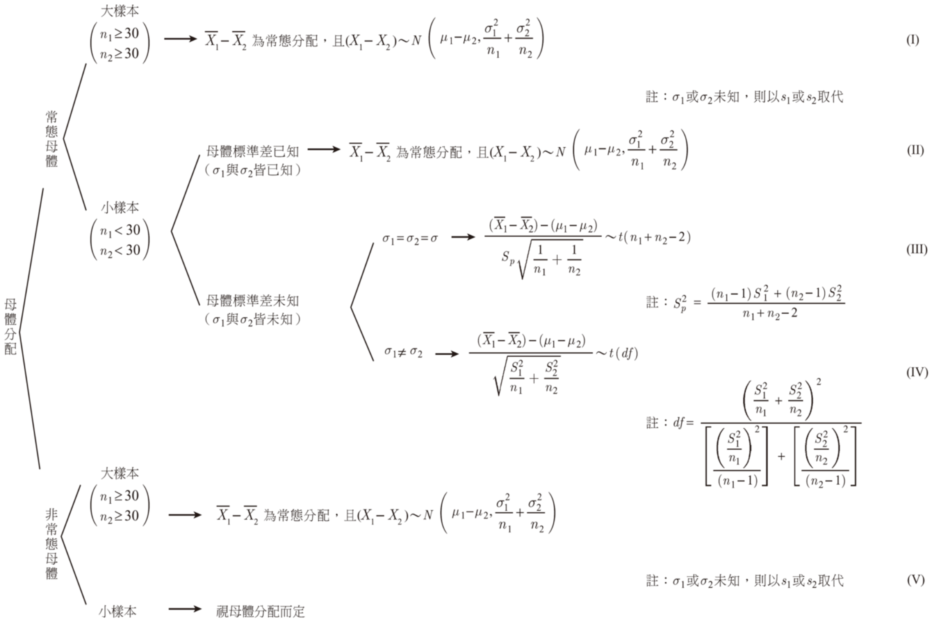
$$=P((\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{\frac{\alpha}{2}}(v)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{\frac{\alpha}{2}}(v)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}})$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

樣本平均數差的信賴區間

$$((\bar{X}_1-\bar{X}_2)-t_{\alpha/2,df}\sqrt{(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})},(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+t_{\alpha/2,df}\sqrt{(\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})})$$

Summary



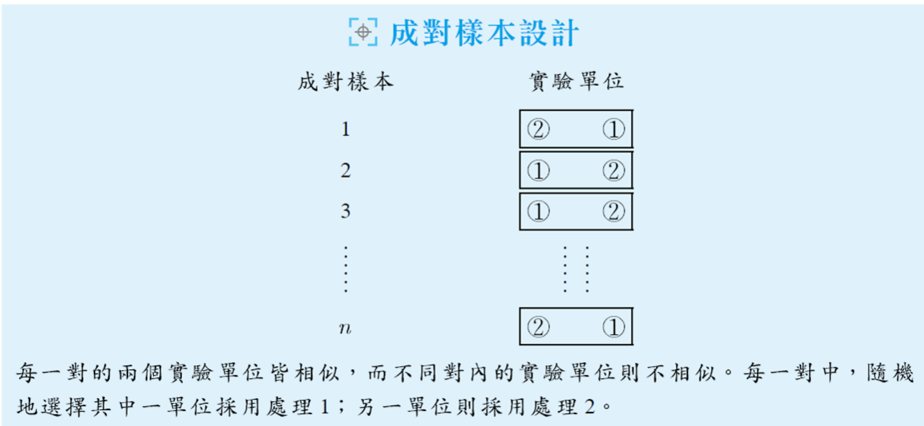
例6.12. 欲研究男女平均一週花在運動時數之差異性，故隨機調查 18 位男生和 14 位女生一週花在運動時數，結果如下：

性別	樣本數	平均數(分鐘)	標準差(分鐘)
男	18	88	40
女	14	36	16

假設男女平均一週花在運動時數服從常態分配，且兩者母體變異數不相等，試求男女平均一週花在運動時數差之95%信賴區間為何？

(2) 兩組相依樣本的區間估計

成對樣本



成對樣本	處理 1	處理 2	差異
1	X_1	Y_1	$D_1 = X_1 - Y_1$
2	X_2	Y_2	$D_2 = X_2 - Y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	X_n	Y_n	$D_n = X_n - Y_n$

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值 **步驟2**：取得樣本統計量的抽樣分配

抽樣分配有常態分配與t分配兩種。

步驟3：導出母體參數的信賴區間

- 常態分配

$(\bar{d} - z_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}}, \bar{d} + z_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}})$

- t分配

平均數差 μ_D 的推論（小樣本）

設 $D_i = X_i - Y_i$ 為取自 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 分配的一組隨機樣本，令：

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \text{，} S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n-1}}$$

則：

(1) $\overline{D}$ 的抽樣分配特性如下：

$$E(\overline{D}) = \mu_D \tag{10-15}$$

$$Var(\overline{D}) = \frac{S_D^2}{n} \text{ 或 } \sigma_{\overline{D}} = \frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{10-16}$$

$$\frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1) \tag{10-17}$$

(2) μ_D 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間為：

$$\left(\overline{D} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \overline{D} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{或 } \overline{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{10-18}$$

其中 $t_{\frac{\alpha}{2}}$ 依自由度 $df = n-1$ 而定。

(3) 利用下面的檢定統計量，檢定 $H_0: \mu_D = \mu_{D_0}$， $H_1: \mu_D \neq \mu_{D_0}$。

$$t = \frac{\overline{D} - \mu_{D_0}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \text{，} df = n-1 \tag{10-19}$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

成對樣本與獨立樣本之比較

	獨立樣本 $(n_1=n_2=n)$	成對樣本（n對）
估計的標準誤	$S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}$	$\frac{S_D}{\sqrt{n}}$
t的自由度	$2n-2$	$n-1$

例6.13.某人研究減肥藥之成效，隨機選出5人給予服用減肥藥，測定服藥前的體重為 xi 和服藥後三星期的體重為 yi，結果如下表，假定 μ1 和 μ2 分別表示服藥前後的平均體重 ，且服藥前後體重差異服從常態分配，試求 μ1-μ2 之 95%信賴區間？

---

4. 單一母體比例的估計

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值

假設母體成功的比例為p，失敗的比例為1-p。

- 樣本比例$\hat{p}=\frac{X}{n}$為母體比例p的最佳點估計量 。

無限母體：$$\begin{cases}\mu_{\overline{P}}=E(\overline{P})=P\\ \sigma^2_{\overline{P}}=Var(\overline{P})=\dfrac{P(1-P)}{n}\end{cases}\tag{7-6}$$

有限母體：$$\begin{cases}\mu_{\overline{P}}=E(\overline{P})=P\\ \sigma^2_{\overline{P}}=Var(\overline{P})=\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{P(1-P)}{n}\end{cases}\tag{7-7}$$

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

比例的抽樣分配為常態分配

- 假設從母體中隨機抽出一組隨機樣本 $X_1,X_2,\ldots,X_n,$，而每個隨機變數Xi均服從伯努利試驗(Bernoulli trial)。
- 若隨機變數X表示在n次試驗中成功的個數，則隨機變數$X=\sum X_i$服從二項分配(binomial distribution)，亦即
$X\sim B(n,p)$，$E(X)=np$，$Var(X)=np(1-p)$。
- 對於估計母體比例 p，可將隨機變數 X 轉成相對比例，此相對比例$\frac{X}{n}$稱為樣本比例，以$\hat{p}$表示之。
  - $E(\hat{p})=E(\frac{X}{n})=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}np=p$
  - $Var(\hat{p})=Var(\frac{X}{n})=\frac{1}{n^2}Var(X)=\frac{1}{n^2}np(1-p)=\frac{p(1-p)}{n}$
- 當樣本數夠大時，二項分配趨近於常態分配，抽樣分配可以改用常態分配進行推估。
  - $np\geq 5$，$n(1-p)\geq 5$時，樣本比例$\hat{p}$之抽樣分配為常態分配。

- $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$或 $z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

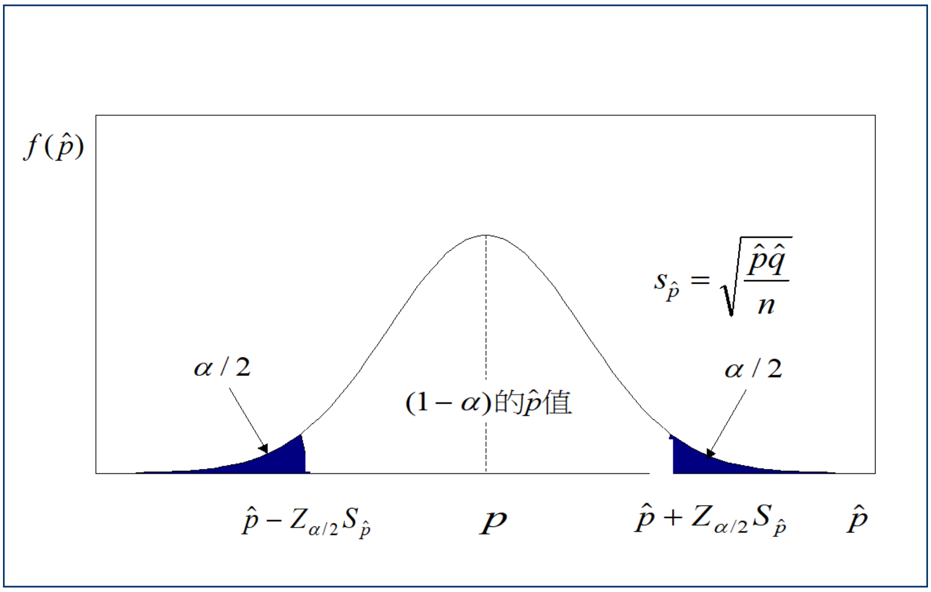
$\overline{P}$ 的抽樣分配

在大樣本的條件下，$\overline{P}$ 亦為一常態分配，$\overline{P} \sim N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$，亦即：

$$Z = \frac{\overline{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0, 1) \tag{7-8}$$

步驟3：導出母體參數的信賴區間

信賴區間之機率計算



母體比例p之100 (1-α)% 信賴區間為$(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$。

$$1-\alpha = P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) \Rightarrow 1-\alpha = P(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{\alpha/2})$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} - p < z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

$$\Rightarrow 1-\alpha = P(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

Summary: 樣本比例的區間估計

❍ 大樣本母體比例的信賴區間

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

❍ 大樣本母體比例的信賴區間（常用公式）

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$$

當小樣本（$n<30$）時，$\hat{p}$的抽樣分配分為兩種情況：

①無限母體

$$\hat{p} \sim 二項分配(p, \frac{pq}{n})$$

②有限母體

$$\hat{p} \sim 超幾何分配(p, \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1})$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

$\hat{p}-p$在$Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$距離內的機率為$1-\alpha$，表為$P(|\hat{p}-p| \leq Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}) = 1-\alpha$

例6.16. 某市調公司隨機抽取 500 位民眾，詢問他們對明年股市獲利率是否會比今年高，結果有60%是持贊成看法，試求贊成明年獲利率高於今年之人數比例之95%信賴區間？

5. 樣本大小的決定

Question：在統計推論中，利用抽樣方法取得隨機樣本，樣本大小應如何決定？

(1)估計母體平均數所需的樣本數

對於母體平均數μ之估計量樣本平均數而言，當$\bar{X}$的抽樣分配為常態分配時，欲使估計誤差不超過某範圍之機率為$1-\alpha$，則其所需樣本數(取比它大的最小整數)為$n=[\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}]^2$。

$P(|\bar{X}-\mu| \leq e) = 1-\alpha$

$\Rightarrow P(|Z| \leq \frac{e}{\sigma/\sqrt{n}}) = 1-\alpha$

$\Rightarrow n = [\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{e}]^2$

Summary

❍ 估計誤差不超過d值

$$\overline{X}-\mu=Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq d$$

❍ 估計母體平均數時的樣本數

$$n\geq\frac{Z_{\alpha/2}^{2}\sigma^{2}}{d^{2}}$$

❍ 估計母體平均數時的樣本數(母體變異數未知)

$$n\geq\frac{Z_{\alpha/2}^{2}S^{2}}{d^{2}}$$

例6.18:根據過去經驗顯示，超商員工週薪之標準差為700元，若欲使估計全體速食店平均週薪μ的95%之誤差界限不超過100元，試問此時應抽多大的樣本？

(2) 估計母體比例所需的樣本數

對於母體比例 p 之估計量而言，大樣本的抽樣分配為常態分配時，亦即$\hat{P}\sim N(p,\frac{p(1-p)}{n})$。欲使估計誤差不超過 某個範圍 之機率為 $1-\alpha$，也就是說，$P(|\hat{P}-P|\leq e)=1-\alpha$，則其所需樣本數(取比它大的最小整數)為 $n=(\frac{z_{\alpha/2}}{e})^2p(1-p)$。

$$P(|\hat{P}-P|\leq e)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\leq\frac{e}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}})=1-\alpha$$

$$\Rightarrow e=Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\Rightarrow n=(\frac{z_{\alpha/2}}{e})^2p(1-p)$$

由上式決定樣本數 n時，可依下列三種情況處理：

- 母體比例 p 由以往經驗值代入計算，亦即 $n=(\frac{z_{\alpha/2}}{e})^2p(1-p)$
- 母體比例p直接用 p = 0.5代入計算，此法可使樣本數最大，亦即 $n=\frac{z_{\alpha/2}}{e}^2*1/4$
- 母體比例p由樣本比例$\hat{p}$代入計算，亦即$n=\frac{z_{\alpha/2}}{e}^2*\hat{p}(1-\hat{p})$。

Summary

樣本大小由「估計的最大容忍誤差」決定，亦即誤差界限 (margin of error)決定樣本數。

- 樣本數固定時，誤差界限與信賴水準成正比關係。
- 誤差界限固定時，樣本數與信賴水準成正比關係。
- 信賴水準固定時，樣本數與誤差界限成反比關係。

例:6.20. 某市調公司欲推估今年某縣市長施政滿意度。若此市調公司期望估計誤差不超過 0.05的機率為 0.90，請問在下面三種情況下，所需樣本數為何？(1)根據過去資料顯示，p大約為0.65。(2)先抽50人，得知支持者有30人。(3)不知道 p 。

6. 兩個母體比例差的區間估計

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

$\overline{P}_1-\overline{P}_2$ 的抽樣分配

$$E(\overline{P}_1-\overline{P}_2)=P_1-P_2 \tag{10-20}$$

$$\sigma_{\overline{P}_1-\overline{P}_2}=\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \tag{10-21}$$

其中，n_1 = 從母體 1 抽出的隨機樣本之樣本大小

n_2 = 從母體 2 抽出的隨機樣本之樣本大小

P_1、P_2 = 分別為母體 1 與 2 之母體比例（母體參數）

此外，當樣本為大樣本時（即 $n_1P_1, n_1(1-P_1)$ 與 $n_2P_2, n_2(1-P_2)$ 均大於 5），則 $\overline{P}_1-\overline{P}_2$ 的抽樣分配趨近於常態分配，亦即：

$$\overline{P}_1-\overline{P}_2 \sim N(P_1-P_2,\ \sigma^2_{\overline{P}_1-\overline{P}_2})$$

$$\text{或}\quad Z=\frac{(\overline{P}_1-\overline{P}_2)-(P_1-P_2)}{\sigma_{\overline{P}_1-\overline{P}_2}} \sim N(0,1) \tag{10-22}$$

步驟3：導出母體參數的信賴區間

$$(\text{點估計}) \pm (z_{\frac{\alpha}{2}}\text{值})(\text{估計標準誤})$$

$$(\overline{P}_1-\overline{P}_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{P}_1-\overline{P}_2} \tag{10-23}$$

$$\left((\overline{P}_1-\overline{P}_2)-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{P}_1-\overline{P}_2},\ (\overline{P}_1-\overline{P}_2)+z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\overline{P}_1-\overline{P}_2}\right)$$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

例6.17:某保險公司經理研究30歲以下與50歲以上民眾購買人壽保險比例之差異，假若隨機抽取300位30歲以下民眾，其中有120 位是有買人壽保險，另外隨機抽取 250位50歲以上民眾，其中175位有買人壽保險，試問 30 歲以下與 50 歲以上民眾有買保險比例差之 90% 信賴區間為何？

7.單一母體變異數（與標準差）的估計

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值

假設母體為常態分配，若自常態母體$N(\mu,\sigma^2)$ 抽取一組隨機樣本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，則可以用樣本變異數$S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}$推估母體變異數$\sigma^2$，其開根號S稱為樣本標準差。

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

(1)樣本變異數的抽樣分配為卡方分配

單一母體變異數與標準差的估計和卡方分配(chi-square distribution) 有關。

定義：若一組隨機樣本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 取自常態母體 $N(\mu,\sigma^2)$ ，則
$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$。 其中, 卡方分配的自由度為$v = n-1$ ，$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$,
$S^2 = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ 。

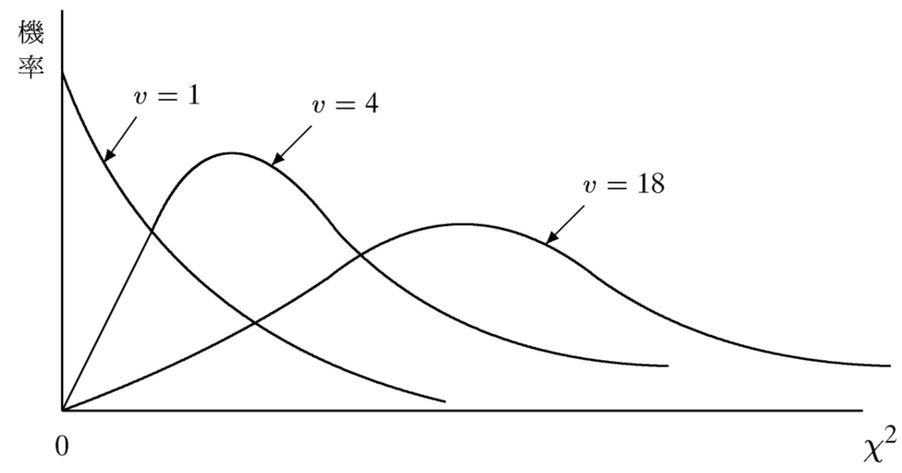
(2)樣本變異數抽樣分配的性質

設抽自任一母體的一組隨機樣本變異數為 S^2，若已知母體的變異數為σ^2，則抽樣分配具有如下的性質：

- S^2抽樣分配的期望值為σ^2，$E(S^2) = \sigma^2$。
- 若母體為常態分配，則S^2的變異數為 $Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$。
- 若母體為常態分配，則$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$為自由度n-1的卡方分配。

(3)卡方分配的性質

～不同自由度的卡方分配



- 卡方統計量的值皆大於0。卡方分配為右偏分配，並不是對稱型分配。自由度不同，卡方分配的圖形亦不同。
- 卡方分配只有一個參數為自由度v，其平均數與變異數為 $E(\chi^2) = v, Var(\chi^2) = 2v$。
- 當自由度增加，卡方分配越對稱；當自由度趨近於無窮大時，卡方分配會趨近於常態分配。
- 卡方分配的加法定理：二個獨立卡方隨機變數相加，所得的隨機變數亦為卡方隨機變數，其卡方分配的自由度為兩個卡方分配自由度之和。

步驟3：導出母體參數的信賴區間

當χ^2_α表示卡方分配，查表時卡方值滿足$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha(v))=\alpha$。 在相同自由度下，右尾$\alpha$值增加，對應的卡方值越小。

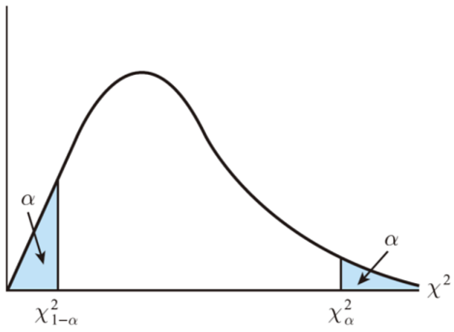
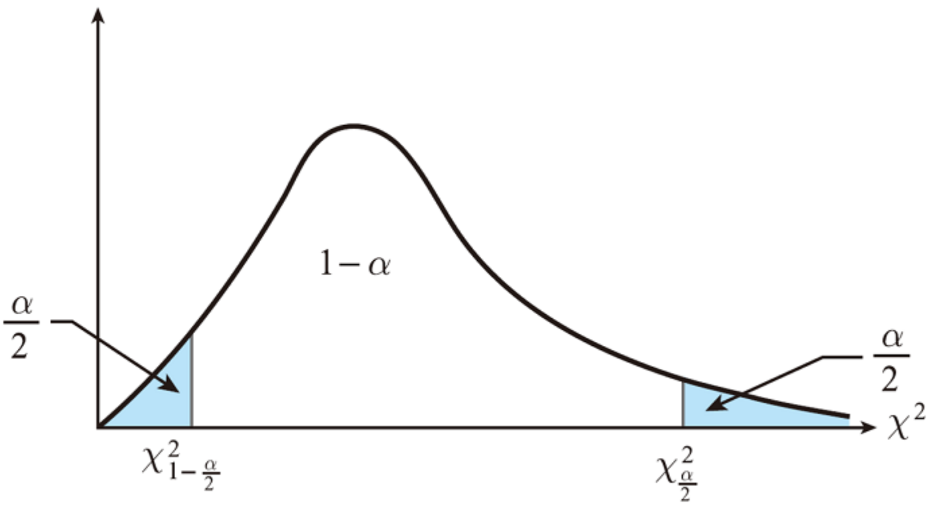


圖7.10　χ^2分配之機率密度曲線

表7.3　df=17，α=0.05及α=0.95之χ^2值的查表

df	α			
	$\cdots$	.95	$\cdots$	.05
$\vdots$		$\cdots$		$\vdots$
17	$\cdots$	8.67	$\cdots$	27.59

變異數信賴區間



$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$為一自由度$v$是$n-1$的卡方分配，利用$\chi^2_{n-1}$分配，可以求得$1-\alpha$機率的信賴區間。

$$1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2}(v) < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}(v))$$
$$\Rightarrow 1-\alpha = P(\chi^2_{1-\alpha/2}(v) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(v))$$
$$\Rightarrow 1-\alpha = P(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(v)}{(n-1)S^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{\chi^2_{\alpha/2}(v)}{(n-1)S^2}) \Rightarrow 1-\alpha = P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(v)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(v)}$$

(1)母體變異數σ^2之100(1-α)%信賴區間為 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha/2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}/2})$，亦即$(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha/2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}/2})$。 其中，$\chi_{\alpha/2}$與$\chi_{1-\alpha/2}$的自由度 $v=n-1$，左右尾面積分別為$\alpha/2$的卡方值。

(2)母體標準差σ之$100(1-\alpha)$ 信賴區間，由母體變異數開平方計算，$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha/2}} < \sigma < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}/2})$，亦即$(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}/2})$。

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

例6.14. 某公司由一批重量是服從常態的製品中隨機取10件，測量各件製品的重量(公斤)，以了解製品重量的變異。此10件製品重量分別為5.1, 4.7, 5.0, 4.9, 4.8, 5.3, 4.8, 5.1, 4.9, 5.2

試求(1)此公司製品重量變異數之點估計？(2)此公司製品重量變異數之90%信賴區間？(3)此公司製品重量標準差之95%信賴區間？

5. 兩個母體變異數比的區間估計

步驟1：選擇較佳的點估計量並計算點估計值

步驟2：取得樣本統計量的抽樣分配

- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$係自由度為$n-1$的卡方分配，亦即$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2$
- F分配是由兩個卡方分配之比所構成的，因此我們可做下面的推導：

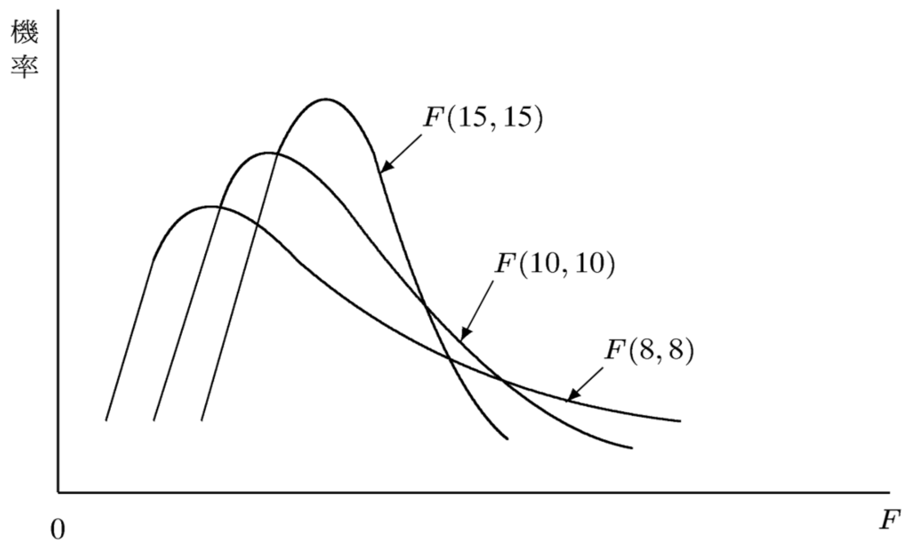
$$F=\frac{\frac{\chi_1^2}{df_1}}{\frac{\chi_2^2}{df_2}}=\frac{\frac{\left[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\right]}{n_1-1}}{\frac{\left[\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\right]}{n_1-1}}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2}$$

若 s_1^2 與 s_2^2 分別是從變異數為 σ_1^2 與 σ_2^2 的常態母體抽出，且樣本大小分別為 n_1 與 n_2 的二個獨立隨機樣本之變異數，則：

$$F=\frac{\frac{s_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{s_2^2}{\sigma_2^2}}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

為自由度 $df_1=n_1-1$，$df_2=n_2-1$ 的 F 分配。

F分配不為對稱分配，其F值大於0，且隨著不同的自由度，其分配圖形會有所不同。

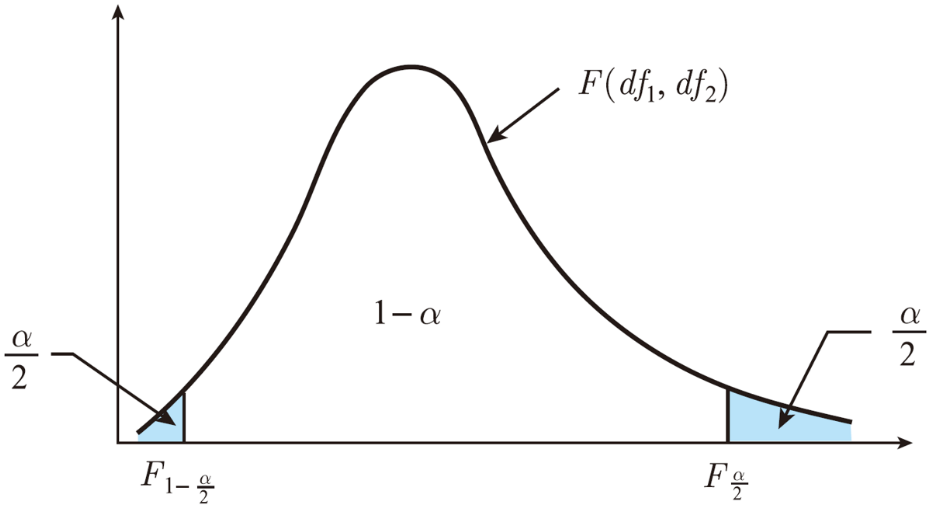


以 $F_\alpha(df_1, df_2)$ 表示自由度為 df_1, df_2 的 F_α 值，則：

$$F_{1-\alpha}(df_1, df_2)=\frac{1}{F_\alpha(df_2, df_1)} \quad (10\text{-}29)$$

步驟3：導出母體參數的信賴區間

兩母體變異數比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$之100(1-α)%的信賴區間



$$P\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2) < F < F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2) < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)}\right] = 1-\alpha$$

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)}\right) \tag{10-31}$$

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(df_1,\, df_2)},\ \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(df_2,\, df_1)\right) \tag{10-32}$$

$P[F_{1-\alpha/2}(df_1,df_2) < F < F_{\alpha/2}(df_1,df_2)] = 1-\alpha$

$\Rightarrow P[F_{1-\alpha/2}(df_1,df_2) < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\alpha/2}(df_1,df_2)] = 1-\alpha$

$\Rightarrow P[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df_1,df_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(df_1,df_2)}] = 1-\alpha$

信賴區間為$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df_1,df_2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(df_1,df_2)})$，或者是
$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(df_1,df_2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(df_2,df_1))$

步驟4：求出母體參數的信賴區間值並做統計推論

例6.15:假定在多益測驗(TOEIC)中，男生的成績X與女生的成績Y皆服從常態分配，今隨機抽取男女樣本資料如下：

男性成績 x_i	700	450	470	510	570	650
女性成績 y_i	630	590	680	420	530	

試求男生成績之變異數對女生成績變異數比的90%信賴區間？

Summary: 分配應用於估計母體參數

A. 標準常態分配可估計母體參數 - 平均數、比例

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計單一母體比例p
3. 估計兩母體平均數差$\mu_1 - \mu_2$
4. 估計兩母體比例差$p_1 - p_2$

B. t分配可估計母體參數 - 平均數

1. 估計單一母體平均數μ
2. 估計兩母體平均數差$\mu_1 - \mu_2$

C. 卡方分配可估計母體參數 - 變異數

1. 估計單一母體變異數σ^2或標準差σ。

D. F分配可估計母體參數 - 變異數比

1. 估計兩母體變異數比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$或標準差比$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$。