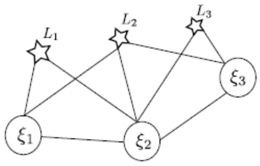
Jindong_Shi
2022-01-01

第 13 节课习题

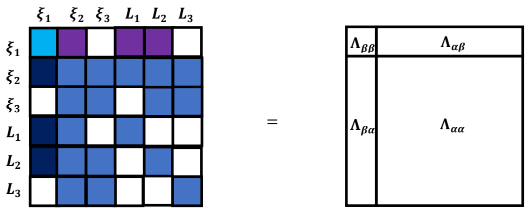
1.

某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。



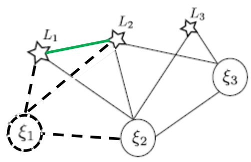
1) 绘制上述系统的信息矩阵 Λ

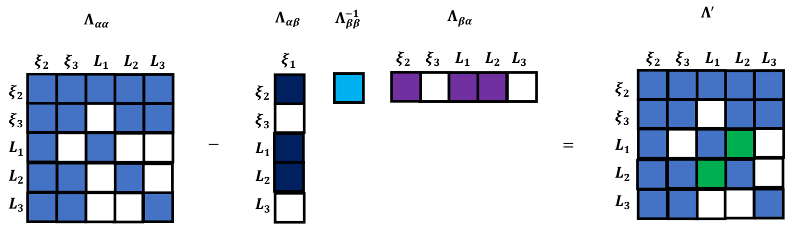
我们总共有 9 个观测量和 6 个状态量，所以雅可比 J 维度为 9x6, 信息矩阵 $J^TW^{-1}J$ 维度为 6x6。
首先信息矩阵对角线上的元素不为空。
观测包括第i个姿态观测到j个路标点，以及第i个姿态与其相邻姿态之间的运动约束观测，如 IMU 或者轮速计约束。其中$i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}$。
信息矩阵内下标为$(i, i+1)$和$(i+1, i)$的元素不为空，因为第i个姿态和第$i+1$个姿态之间存在约束。
信息矩阵内下标为$(i, 3+j)$和$(3+j, i)$的矩阵块不为空，当第i个姿态可以观测到j个路标点。
可绘制出信息矩阵 Λ如下:



2) 绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 Λ'

当姿态ξ_1被 marg 之后，可以将原来的信息矩阵分成对应的四个矩阵块$\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\beta}$，$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}$，$\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\alpha}$，$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\alpha}$
利用边缘化公式 $\boldsymbol{\Lambda}' = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\alpha} - \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\beta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\alpha}$ 可绘制出姿态ξ_1被 marg 之后的信息矩阵$\boldsymbol{\Lambda}'$如下:





我们发现路标点 L_1 和 L_2 之间本来独立，但是姿态ξ_1被 marg 之后，L_1 和 L_2 之间彼此相关，导致信息矩阵变得更加稠密。

2. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系

文献[1]证明了对于任意高斯随机变量构成的矩阵，它的信息矩阵 H 等于协方差的逆:

Consider a Gaussian random vector $\boldsymbol{\theta}$ with mean $\boldsymbol{\theta}^{\star}$ and covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$ so its joint probability density function (PDF) is given by:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{N_\theta}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^{\star})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^{\star})\right] \tag{A.1}$$

The objective function can be defined as its negative logarithm:

$$J(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\ln p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_\theta}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}| + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^{\star})^T \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}^{\star}) \tag{A.2}$$

which is a quadratic function of the components in $\boldsymbol{\theta}$. By taking partial differentiations with respect to θ_l and $\theta_{l'}$, the (l, l') component of the Hessian matrix can be obtained:

$$\mathcal{H}^{(l,l')}(\boldsymbol{\theta}^{\star}) = \left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l \partial\theta_{l'}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}} = (\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1})^{(l,l')} \tag{A.3}$$

so the Hessian matrix is equal to the inverse of the covariance matrix:

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^{\star}) = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} \tag{A.4}$$

以上就是文献中给出的证明。我们有任意高斯变量矩阵θ，假设其均值为θ^*。对高斯变量矩阵的概率密度函数$p(\theta)$取负对数作为 objective function，令负对数最小化的θ取值就可以令该取值处的概率密度最大。我们求取该 objective function 对θ的二次导数，就是 Hessian 矩阵。求二次导后，我们发现信息矩阵 H 正好就是协方差的逆。由于求得的 H 矩阵不包含θ，说明信息矩阵与均值θ^*无关。

另外由于 Hessian 矩阵包含了所有随机变量的条件信息(conditional information)，所以称它为信息矩阵。信息矩阵对角线上的元素代表了 objective function 在对应方向上的曲率。信息矩阵是条件概率的方差，而它的倒数，也就是协方差矩阵正好是随机变量之间的边际概率的方差。

论文中还给出了求取数值上的信息矩阵的方法:

the diagonal elements are given by:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(l,l)}(\boldsymbol{\theta}^{\star}) &= \left[\frac{\partial}{\partial\theta_l}\left(\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right)\right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}} \\
&\approx \frac{1}{\Delta\theta_l}\left[\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l/2} - \left.\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l/2}\right] \\
&\approx \frac{1}{\Delta\theta_l}\left[\frac{J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l)-J(\boldsymbol{\theta}^{\star})}{\Delta\theta_l} - \frac{J(\boldsymbol{\theta}^{\star})-J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l)}{\Delta\theta_l}\right] \\
&= \frac{J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l)-2J(\boldsymbol{\theta}^{\star})+J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l)}{(\Delta\theta_l)^2}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

where $\Delta\boldsymbol{\theta}_l$ is a vector with all elements being zero except the lth element equal to a properly selected step $\Delta\theta_l$ (> 0):

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_l = [0, \ldots, 0, \Delta\theta_l, 0, \ldots, 0]^T \tag{A.6}$$

Furthermore, the off-diagonal elements can be computed as follows:

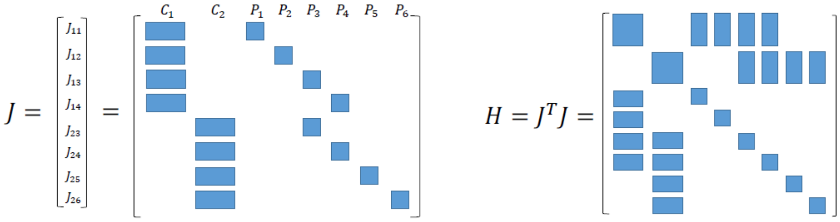
$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(l,l')}(\boldsymbol{\theta}^{\star}) &= \left[\frac{\partial}{\partial\theta_{l'}}\left(\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right)\right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}} \\
&\approx \frac{1}{2\Delta\theta_{l'}}\left[\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'}} - \left.\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'}}\right] \\
&\approx \frac{1}{2\Delta\theta_{l'}}\left[\frac{J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l+\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})-J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l+\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})}{2\Delta\theta_l}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l-\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})-J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l-\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})}{2\Delta\theta_l}\right] \\
&= \frac{1}{4\Delta\theta_l\Delta\theta_{l'}}[J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l+\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})-J(\boldsymbol{\theta}^{\star}+\Delta\boldsymbol{\theta}_l-\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'}) \\
&\qquad - J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l+\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})+J(\boldsymbol{\theta}^{\star}-\Delta\boldsymbol{\theta}_l-\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'})]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

where $\Delta\boldsymbol{\theta}_l$ and $\Delta\boldsymbol{\theta}_{l'}$ are vectors with zero elements except the lth and l'th elements equal to $\Delta\theta_l$ and $\Delta\theta_{l'}$, respectively.

Jindong_Shi
2022-01-01

3. 补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出奇异值

根据《视觉 SLAM 十四讲》，纯粹的视觉 SLAM 中相机姿态之间，以及路标点之间互相没有关联，只在相机姿态和路标点之间存在关联，信息矩阵 H 的稀疏性如下：



根据书中给出的公式, 我们最小化重投影误差之和来求出最佳的相机姿态和路标点:

$$\boldsymbol{\xi}^* = \arg\min_{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{u}_i - \frac{1}{s_i}\boldsymbol{K}\exp\left(\boldsymbol{\xi}^\wedge\right)\boldsymbol{P}_i\right\|_2^2 .$$

残差对姿态的 2x6 雅可比为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}} = \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0}\frac{\boldsymbol{e}\left(\delta\boldsymbol{\xi}\oplus\boldsymbol{\xi}\right)}{\delta\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}'}\frac{\partial \boldsymbol{P}'}{\partial \delta\boldsymbol{\xi}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{I}, -\boldsymbol{P}'^\wedge\right]$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} & -\frac{f_x X' Y'}{Z'^2} & f_x + \frac{f_x X^2}{Z'^2} & -\frac{f_x Y'}{Z'} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} & -f_y - \frac{f_y Y'^2}{Z'^2} & \frac{f_y X' Y'}{Z'^2} & \frac{f_y X'}{Z'} \end{bmatrix}$$

残差对路标点的 2x3 雅可比为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{P}} = -\begin{bmatrix} \frac{f_x}{Z'} & 0 & -\frac{f_x X'}{Z'^2} \\ 0 & \frac{f_y}{Z'} & -\frac{f_y Y'}{Z'^2} \end{bmatrix}\boldsymbol{R}.$$

该单目 SLAM 中我们总共有 10 个相机姿态 poseNums = 10，20 个路标点 featureNums = 20。代码中使用了内外 for 循坏，显然假设了每个相机姿态都观测到了所有路标点。另外假设每次观测的不确定度一致，导致权重矩阵 W 为单位阵。而且很显然，原代码中定义的残差为重投影的值减去观测值，所以代码中的 jacobian_Ti 和 jacobian_uv_Pc 的计算公式与以上书中的公式相差一个负号。

我们接下来根据公式补充信息矩阵 $H=J^TW^{-1}J$。首先信息矩阵 H 对角线上的矩阵块不为空，对应相机姿态和路标点的对角线上下标为$(i*6, i*6)$和$(\text{poseNums} *6+j*6, \text{poseNums} *6+j*6)$的矩阵块的维度分别为 6x6 和 3x3。
其次信息矩阵内非对角线，下标为$(i*6, \text{poseNums} *6+ j*3)$和$(\text{poseNums} *6+ j*3, i*6)$的维度 6x3 和 3x6 的矩阵块不为空，任意第i个姿态可以观测到第j个路标点。代码如下:

```cpp

// 随机数生成三维特征点
std::default_random_engine generator;
std::vector<Eigen::Vector3d> points;
for(int j = 0; j < featureNums; ++j)
{
    std::uniform_real_distribution<double> xy_rand( a: -4,  b: 4.0);
    std::uniform_real_distribution<double> z_rand( a: 8.,  b: 10.);
    double tx = xy_rand( &: generator);
    double ty = xy_rand( &: generator);
    double tz = z_rand( &: generator);

    Eigen::Vector3d Pw( x: tx,  y: ty,  z: tz);
    points.push_back(Pw);

    for (int i = 0; i < poseNums; ++i) {
        Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[i].Rwc.transpose();
        Eigen::Vector3d Pc = Rcw * (Pw - camera_pose[i].twc);

        double x = Pc.x();
        double y = Pc.y();
        double z = Pc.z();
        double z_2 = z * z;
        Eigen::Matrix<double,2,3> jacobian_uv_Pc;
        jacobian_uv_Pc<< fx/z, 0 , -x * fx/z_2,
                0, fy/z, -y * fy/z_2;
        Eigen::Matrix<double,2,3> jacobian_Pj = jacobian_uv_Pc * Rcw;
        Eigen::Matrix<double,2,6> jacobian_Ti;
        jacobian_Ti << -x* y * fx/z_2, (1+ x*x/z_2)*fx, -y/z*fx, fx/z, 0 , -x * fx/z_2,
                        -(1+y*y/z_2)*fy, x*y/z_2 * fy, x/z * fy, 0,fy/z, -y * fy/z_2;

        H.block( startRow: i*6, startCol: i*6, blockRows: 6, blockCols: 6) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Ti;
        H.block( startRow: poseNums*6+j*3,  startCol: poseNums*6+j*3,  blockRows: 3,  blockCols: 3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
        H.block( startRow: i*6,  startCol: poseNums*6+j*3,  blockRows: 6,  blockCols: 3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
        H.block( startRow: poseNums*6+j*3,  startCol: i*6,  blockRows: 3,  blockCols: 6) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
    }
}
```

代码输出信息矩阵的奇异值如下:

```
 0.00763381
 0.00734249
 0.00701361
 0.00634341
 0.00608493
 0.00547299
  0.0053236
 0.00520788
 0.00502341
  0.0048434
 0.00451083
  0.0042627
 0.00386223
 0.00351651
 0.00302963
 0.00253459
 0.00230246
 0.00172459
0.000422374
3.21708e-17
2.06732e-17
1.43188e-17
7.66992e-18
6.08423e-18
6.05715e-18
3.94363e-18

Process finished with exit code 0
```

我们发现奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7，因为单目 SLAM 中 7 自由度不可观，包括 6 自由度姿态 + 尺度。

参考文献:

[1] Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables, Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering, Ka-Veng Yuen