Jindong_Shi
2021-10-04

第三节课习题

2. 群的性质

2.1 {ℤ, +} 是否为群 (其中ℤ为整数集)

{ℤ, +} 构成群, 因为

满足封闭性: 整数的和仍为整数

满足结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$

存在幺元 0 为整数: 满足 $a + 0 = 0 + a$

存在逆 $a^{-1} = -a$ 为整数: 满足 $a + a^{-1} = 0$

2.2 {ℕ, +} 是否为群 (其中ℕ为自然数集)

{ℕ, +} 不构成群, 因为虽然

满足封闭性: 自然数的和仍为自然数

满足结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$

存在幺元 0 为自然数: 满足 $a + 0 = 0 + a$

但是

不存在逆 $a^{-1} = -a$ 为自然数: 满足 $a + a^{-1} = 0$。若 $a>0$, 则 $a^{-1}<0$ 必不为自然数

2.3 解释什么是阿贝尔群。并说明矩阵及乘法构成的群是否为阿贝尔群。

阿贝尔群也称为交换群或可交换群，它既满足群的性质，其元素的运算又不依赖它们的顺序(满足交换律)。

矩阵及乘法构成群，但不构成阿贝尔群，因为矩阵乘法依赖于矩阵相乘的顺序。

3. 验证向量叉乘的李代数性质

对于向量 $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, 标量 $a, b \in \mathbb{R}$, 有李括号$[X, Y] = X \times Y$, 那么该向量及叉乘构成李代数，因为满足下面 4 个条件:

满足封闭性: 因为 $X \times Y$ 的结果仍为 3x1 的矩阵 ($\in \mathbb{R}^3$)

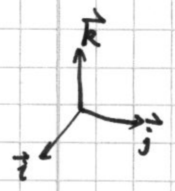
满足双线性: $(aX + bY) \times Z = a(X \times Z) + b(Y \times Z)$, 以及 $Z \times (aX + bY) = a(Z \times X) + b(Z \times Y)$, 因为叉乘本身满足加法分配律，且可将标量作为乘法因子提出

满足自反性: $\forall X \in \mathbb{R}^3$, 满足 $X \times X = 0$

满足雅可比等价: : $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, 满足 $X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) = 0$，证明如下(参考[1]):

先证明三重积展开(或拉格朗日公式)：$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$，$X\times(Y\times Z) = Y(X\cdot Z) - Z(X\cdot Y)$

证：先计算 $X\times(Y\times Z)$ 的 $\vec{i}$ 分量



$$
\begin{aligned}
(X\times(Y\times Z))_{\vec{i}} &= \left[(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})\times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\right]_{\vec{i}} \\
&= \left[(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})\times\left[\vec{i}\,(y_2z_3 - y_3z_2) - \vec{j}\,(y_1z_3 - y_3z_1) + \vec{k}\,(y_1z_2 - y_2z_1)\right]\right]_{\vec{i}} \\
&= x_2(y_1z_2 - y_2z_1) + x_3(y_1z_3 - y_3z_1) \\
&= y_1(x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_2y_2 + x_3y_3) \\
&= y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\
&= y_1(X\cdot Z) - z_1(X\cdot Y)
\end{aligned}
$$

同理：

$$(X\times(Y\times Z))_{\vec{j}} = y_2(X\cdot Z) - z_2(X\cdot Y)$$

$$(X\times(Y\times Z))_{\vec{k}} = y_3(X\cdot Z) - z_3(X\cdot Y)$$

所以：

$$X\times(Y\times Z) = Y(X\cdot Z) - Z(X\cdot Y) \qquad (I)$$

同理，我们有：

$$Y\times(Z\times X) = Z(Y\cdot X) - X(Y\cdot Z) \qquad (II)$$

$$Z\times(X\times Y) = X(Y\cdot Z) - Y(Z\cdot X) \qquad (III)$$

将等式 (I) (II) (III) 相加，得

$$
\begin{aligned}
X\times(Y\times Z) + Y\times(Z\times X) + Z\times(X\times Y) &= Y(X\cdot Z) - Z(X\cdot Y) + Z(Y\cdot X) - X(Y\cdot Z) + X(Y\cdot Z) - Y(Z\cdot \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 证明叉乘的雅可比恒等式成立

4 推导 SE(3) 的指数映射

设 $\xi = [\rho, \phi]^T \in se(3)$，则它的指数映射为：

$$
\begin{aligned}
\exp(\xi^\wedge) &= I + \xi^\wedge + \frac{1}{2!}\xi^\wedge\xi^\wedge + \frac{1}{3!}\xi^\wedge\xi^\wedge\xi^\wedge + \frac{1}{4!}\xi^\wedge\xi^\wedge\xi^\wedge\xi^\wedge + \cdots \\
&= I + \begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge\phi^\wedge & \phi^\wedge\rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge\phi^\wedge\phi^\wedge & \phi^\wedge\phi^\wedge\rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix}\phi^\wedge\phi^\wedge\phi^\wedge\phi^\wedge & \phi^\wedge\phi^\wedge\phi^\wedge\rho \\ 0^T & 0\end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n\rho \\ 0^T & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

接着证明左雅可比：

令 $\phi = \theta a$，那么：

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n &= I + \frac{1}{2!}\theta a + \frac{1}{3!}\theta^2 a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{4!}\theta^3 a^\wedge a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{5!}\theta^4 (a^\wedge)^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

代入 $a^\wedge a^\wedge = aa^T - I$ 和 $a^\wedge a^\wedge a^\wedge = -a^\wedge$

$$
\begin{aligned}
&= aa^T - a^\wedge a^\wedge + \frac{1}{2!}\theta a^\wedge + \frac{1}{3!}\theta^2 a^\wedge a^\wedge - \frac{1}{4!}\theta^3 a^\wedge - \frac{1}{5!}\theta^4 (a^\wedge)^2 + \cdots \\
&= aa^T + \left(\frac{1}{2!}\theta - \frac{1}{4!}\theta^3 + \frac{1}{6!}\theta^5 - \cdots\right) a^\wedge - \left(1 - \frac{1}{3!}\theta^2 + \frac{1}{5!}\theta^4 - \cdots\right) a^\wedge a^\wedge \\
&= aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge - \frac{\sin\theta}{\theta} a^\wedge a^\wedge \\
&= aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge - \frac{\sin\theta}{\theta}(aa^T - I) \\
&= \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) aa^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge \\
&\triangleq J
\end{aligned}
$$

所以：

$$
\exp(\xi^\wedge) \triangleq \begin{bmatrix} R & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}
$$

5. 伴随

1) 证明SO(3)伴随的性质：$R\exp(p^\wedge)R^T=\exp((Rp)^\wedge)$，此时称 $Ad(R)=R$

证：首先证明 $\forall a\in\mathbb{R}^3$，$Ra^\wedge R^T=(Ra)^\wedge$

该等式右边 $=(Ra)^\wedge$

$$=(Ra)^\wedge\underbrace{RR^T}_{=I}$$

$$=(Ra)\times RR^T$$

对于叉乘，我们有 $(Ra)\times(Rb)=R(a\times b)$，代入

$$=R(a\times R^T)$$

$$=Ra^\wedge R^T$$

= 等式左边

接着证明 $R\exp(p^\wedge)R^T=\exp((Rp)^\wedge)$

该等式右边 $=\exp((Rp)^\wedge)$

代入之前证的结论：$Ra^\wedge R^T=(Ra)^\wedge$

$$=\exp(Rp^\wedge R^T)$$

幂级数展开

$$=1+Rp^\wedge R^T+\frac{1}{2!}(Rp^\wedge R^T)^2+\frac{1}{3!}(Rp^\wedge R^T)^3+\cdots$$

代入 $R^TR=I$

$$=1+Rp^\wedge R^T+\frac{1}{2!}R(p^\wedge)^2R^T+\frac{1}{3!}R(p^\wedge)^3R^T+\cdots$$

$$=R\exp(p^\wedge)R^T$$

= 等式左边

此时称 $Ad(R)=R$

2) 证明SE(3)伴随的性质：$T\exp(\xi^\wedge)T^{-1}=\exp((Ad(T)\xi)^\wedge)$，其中 $Ad(T)=\begin{bmatrix}R & t^\wedge R\\ 0 & R\end{bmatrix}$

证：首先证明 $\forall x\in\mathbb{R}^6$，$Tx^\wedge T^{-1}=(Ad(T)x)^\wedge$

该等式右边 $=(Ad(T)x)^\wedge$

$$=\left(\begin{bmatrix}R & t^\wedge R\\ 0 & R\end{bmatrix}x\right)^\wedge$$

设 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，其中 $x_1,x_2\in\mathbb{R}^3$

$$=\begin{bmatrix}Rx_1+t^\wedge Rx_2\\ Rx_2\end{bmatrix}^\wedge$$

对于任意 6×1 的矩阵 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$，其中 $a_1,a_2\in\mathbb{R}^3$，有定义反对称矩阵 $a^\wedge=\begin{bmatrix}a_2^\wedge & a_1\\ 0^T & 0\end{bmatrix}$

代入

$$=\begin{bmatrix}(Rx_2)^\wedge & Rx_1+t^\wedge Rx_2\\ 0^T & 0\end{bmatrix}$$

该等式左边 $= T x^\wedge T^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^\wedge & x_1 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R x_2^\wedge & R x_1 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R x_2^\wedge R^T & R x_1 - R x_2^\wedge R^T t \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

代入 $-R x_2^\wedge R^T t = -(R x_2)^\wedge t = t^\wedge R x_2$

$$= \begin{bmatrix} (R x_2)^\wedge & R x_1 + t^\wedge R x_2 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

证明等式左边=右边：$T x^\wedge T^{-1} = (Ad(T) x)^\wedge$

接着证明：$T \exp(\xi^\wedge) T^{-1} = \exp((Ad(T)\xi)^\wedge)$

该等式右边 $= \exp((Ad(T)\xi)^\wedge)$

代入之前证明的结论：$T x^\wedge T^{-1} = (Ad(T) x)^\wedge$

$= \exp(T \xi^\wedge T^{-1})$

幂级数展开

$$= I + T\xi^\wedge T^{-1} + \frac{1}{2!}(T\xi^\wedge T^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(T\xi^\wedge T^{-1})^3 + \dots$$

$$= I + T\xi^\wedge T^{-1} + \frac{1}{2!} T(\xi^\wedge)^2 T^{-1} + \frac{1}{3!} T(\xi^\wedge)^3 T^{-1} + \dots$$

$$= T\left(I + \xi^\wedge + \frac{1}{2!}(\xi^\wedge)^2 + \frac{1}{3!}(\xi^\wedge)^3 + \dots\right) T^{-1}$$

$$= T \exp(\xi^\wedge) T^{-1}$$

= 等式左边

证明等式成立

6.常见函数的求导应用

1) 求旋转点对旋转的导数 $\frac{\partial(Rp)}{\partial R}$ （注意：实际上不能以矩阵微分为定义导数！）

通过左扰动的方式：（左乘小量，令其李代数 φ 为0）

$$\frac{\partial(Rp)}{\partial R} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\varphi^\wedge)\exp(\phi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi}$$

$$\approx \lim_{\varphi\to 0}\frac{(1+\varphi^\wedge)\exp(\phi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi^\wedge Rp}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-(Rp)^\wedge\varphi}{\varphi}$$

$$= -(Rp)^\wedge$$

通过右扰动的方式：（右乘小量，令其李代数为0）

$$\frac{\partial(Rp)}{\partial R} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\phi^\wedge)\exp(\varphi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi}$$

$$\approx \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\phi^\wedge)(1+\varphi^\wedge)p-\exp(\phi^\wedge)p}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{R\varphi^\wedge p}{\varphi}$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{-Rp^\wedge\varphi}{\varphi}$$

$$= -Rp^\wedge$$

2) 求复合旋转的李代数对其中一个旋转 R_1 的导数. （以下求导均使用左雅可比）

① 通过左扰动：（左乘小量，令其李代数 φ_1 为0）

$$\frac{\partial\ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1} = \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(\exp(\varphi_1^\wedge)R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}$$

利用BCH的左雅可比展开形式

$$= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(R_1R_2)^\vee+J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\varphi_1-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}$$

$$= J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}$$

② 通过右扰动：(右乘小量，令其李代数 φ_1 为 0)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_1} &= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(R_1\exp(\varphi_1^\wedge)R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}\\
&= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(R_1\exp(\varphi_1^\wedge)R_1^T R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}\\
&= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(\exp((R_1\varphi_1)^\wedge)R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}\\
&= \lim_{\varphi_1\to 0}\frac{\ln(R_1R_2)^\vee+J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1\varphi_1-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_1}\\
&= J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1
\end{aligned}
$$

利用第5题的结论：$R\exp(p^\wedge)R^T=\exp((Rp)^\wedge)$

BCH 左雅可比展开

求复合旋转的李代数对旋转 R_2 的求导：

③ 通过左扰动：(左乘小量，令其李代数 φ_2 为 0)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2} &= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1\exp(\varphi_2^\wedge)R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1\exp(\varphi_2^\wedge)R_1^T R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(\exp((R_1\varphi_2)^\wedge)R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1R_2)^\vee+J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1\varphi_2-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1
\end{aligned}
$$

结果相等

④ 通过右扰动：(右乘小量，令其李代数 φ_2 为 0)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ln(R_1R_2)^\vee}{\partial R_2} &= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1R_2\exp(\varphi_2^\wedge))^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1R_2\exp(\varphi_2^\wedge)(R_1R_2)^T R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(\exp((R_1R_2\varphi_2)^\wedge)R_1R_2)^\vee-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= \lim_{\varphi_2\to 0}\frac{\ln(R_1R_2)^\vee+J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1R_2\varphi_2-\ln(R_1R_2)^\vee}{\varphi_2}\\
&= J_l(\ln(R_1R_2)^\vee)^{-1}\cdot R_1R_2
\end{aligned}
$$

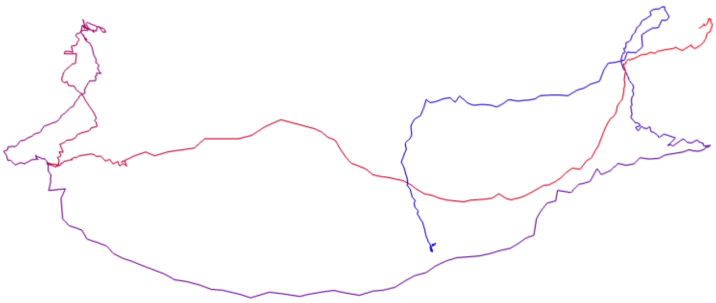
7. 轨迹的描绘

7.1 T_{WC}平移部分的物理意义是什么?

T_{WC}的平移部分指的是机器人坐标系原点指向世界坐标系原点的向量，它随着时间的变化其实就构成了机器人移动的轨迹。

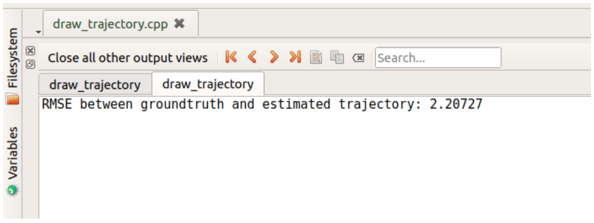
7.2 数据读取

源文件 draw_trajectory.cpp 和可执行文件位于文件夹 L3_code 内，绘制轨迹如下:
(轨迹开始为红色 glColor3f(1.0f, 0.0f, 0.0f)，轨迹末尾为蓝色 glColor3f(0.0f, 0.0f, 1.0f)) 。[2]



8. *轨迹的误差

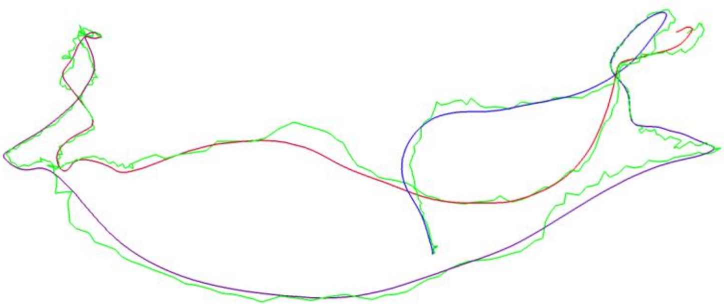
源文件 draw_trajectory.cpp 和可执行文件位于文件夹 L3_code 内, 运算结果为 2.20727, 见下图:



为了能同时显示两条轨迹，创建函数

```
void DrawDoubleTrajectory(vector<Sophus::SE3, Eigen::aligned_allocator<Sophus::SE3>> &,
                          vector<Sophus::SE3, Eigen::aligned_allocator<Sophus::SE3>> &);
```

轨迹绘制如下:



其中由红到蓝的曲线是真实轨迹 (ground-truth)，绿色曲线(glColor3f(0.0f, 1.0f, 0.0f))为估计轨迹 (estimated)。

参考文献:

[1] Triple product
https://en.wikipedia.org/wiki/Triple_product
[2] glColor3f 函数颜色
https://blog.csdn.net/Jcy8126/article/details/8241097