我们用虚四元数表示点 p 的坐标，$p=(\varepsilon_p, 0)$

假设 q 代表的四元数为 $q=(\varepsilon_q, \eta_q)$

使用第5题的结论，则

$$p' = qpq^{-1} = q^+ p q^{-1} = q^+ q^{-1\oplus} p$$

代入 $$q^+ = \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix}$$

$$q^{-1} = q^* / \|q\|^2 = q^* = (-\varepsilon_q, \eta_q)$$

$$q^{-1\oplus} = \begin{bmatrix} \eta_q I - (-\varepsilon_q)^\wedge & -\varepsilon_q \\ -(-\varepsilon_q)^T & \eta_q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & -\varepsilon_q \\ \varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix}$$

则 $p' = q^+ q^{-1\oplus} p$

$$= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & -\varepsilon_q \\ \varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 + \varepsilon_q \varepsilon_q^T & (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)(-\varepsilon_q) + \varepsilon_q \eta_q \\ -\varepsilon_q^T (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge) + \eta_q \varepsilon_q^T & \varepsilon_q^T \varepsilon_q + \eta_q \eta_q \end{bmatrix}}_{= q^+ q^{-1\oplus}} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 \varepsilon_p + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p \\ \cancel{-\varepsilon_q^T \eta_q \varepsilon_p} - \underbrace{\varepsilon_q^T \varepsilon_q^\wedge}_{=0} \varepsilon_p + \cancel{\eta_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 \varepsilon_p + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以 p' 实部为零，必为虚四元数

所以从点 p 到点 p' 的旋转矩阵即为 $q^+ q^{-1\oplus}$ 的虚部

$$R = \mathrm{Im}(q^+ q^{-1\oplus}) = (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)^2 + \varepsilon_q \varepsilon_q^T$$