5. 旋转的表达

1. 设有旋转矩阵R，证明 $R^TR=I$ 且 $\det R=+1$

证：根据第2讲PPT第10页，若坐标系 (e_1,e_2,e_3) 发生了旋转，变成 (e_1',e_2',e_3')，向量a不动，则有

$$[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=[e_1',e_2',e_3']\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1^T\\e_2^T\\e_3^T\end{bmatrix}[e_1',e_2',e_3']\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}e_1^Te_1' & e_1^Te_2' & e_1^Te_3'\\ e_2^Te_1' & e_2^Te_2' & e_2^Te_3'\\ e_3^Te_1' & e_3^Te_2' & e_3^Te_3'\end{bmatrix}}_{\triangleq R}\begin{bmatrix}a_1'\\a_2'\\a_3'\end{bmatrix}$$

其中R为旋转矩阵，计算 R^TR：

$$R^TR=\begin{bmatrix}e_1'^Te_1 & e_1'^Te_2 & e_1'^Te_3\\ e_2'^Te_1 & e_2'^Te_2 & e_2'^Te_3\\ e_3'^Te_1 & e_3'^Te_2 & e_3'^Te_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1^Te_1' & e_1^Te_2' & e_1^Te_3'\\ e_2^Te_1' & e_2^Te_2' & e_2^Te_3'\\ e_3^Te_1' & e_3^Te_2' & e_3^Te_3'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e_1'^T\underbrace{(e_1e_1^T+e_2e_2^T+e_3e_3^T)}_{=I}e_1' & e_1'^T\underbrace{(e_1e_1^T+e_2e_2^T+e_3e_3^T)}_{=I}e_2' & e_1'^T\underbrace{(e_1e_1^T+e_2e_2^T+e_3e_3^T)}_{=I}e_3'\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由于 $\det(R^TR)=\det(R)^2=1$

$$\Longrightarrow \det(R)=\pm1$$

我们选择 $\det R=1$ 保证我们有一个有效旋转 （当 $\det C=-1$ 时，C被称为假旋转或反射旋转）

2. 四元 $q=(\varepsilon,\eta)$，虚部 ε 为3×1的列向量，实部 η 为标量

3. 证明 $q_1q_2=q_1^+q_2$：（假设 $q_1=(\varepsilon_1,\eta_1)$，$q_2=(\varepsilon_2,\eta_2)$）

等式左边（根据四元数乘法的定义），有 $q_1q_2=\begin{bmatrix}\eta_1\varepsilon_2+\eta_2\varepsilon_1+\varepsilon_1^\wedge\varepsilon_2\\ \eta_1\eta_2-\varepsilon_1^T\varepsilon_2\end{bmatrix}$

等式右边 $q_1^+q_2=\begin{bmatrix}\eta_1 I+\varepsilon_1^\wedge & \varepsilon_1\\ -\varepsilon_1^T & \eta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_2\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\varepsilon_2+\varepsilon_1^\wedge\varepsilon_2+\eta_2\varepsilon_1\\ -\varepsilon_1^T\varepsilon_2+\eta_1\eta_2\end{bmatrix}$

等式左边=右边，得证

证明 $q_1q_2=q_2^\oplus q_1$：

等式右边 $q_2^\oplus q_1=\begin{bmatrix}\eta_2 I-\varepsilon_2^\wedge & \varepsilon_2\\ -\varepsilon_2^T & \eta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \eta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_2\varepsilon_1-\varepsilon_2^\wedge\varepsilon_1+\eta_1\varepsilon_2\\ -\varepsilon_2^T\varepsilon_1+\eta_1\eta_2\end{bmatrix}$

$-\varepsilon_2^\wedge\varepsilon_1=\varepsilon_1^\wedge\varepsilon_2$

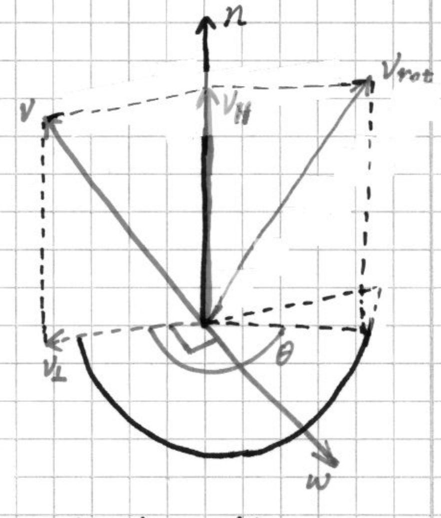
$$=\begin{bmatrix}\eta_2\varepsilon_1+\varepsilon_1^\wedge\varepsilon_2+\eta_1\varepsilon_2\\ -\varepsilon_2^T\varepsilon_1+\eta_1\eta_2\end{bmatrix}$$

等式左边=右边，得证

综上，四元数乘法可写成四元数的左手形式的复合算子+和右手形式的复合算子 相关的矩阵乘法形式

6. 罗德里格斯公式的证明

1. 证明 $R=\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta n^\wedge$



证：我们对向量 v 绕着方向 n 旋转角度 θ，得到旋转后的向量 v_{rot} （见右图）

则可以通过点积计算 v 在 n 方向上的平行分量 $v_{\parallel}$：

$$v_{\parallel}=(v\cdot n)n \qquad (1)$$

再通过叉乘得到与 n 正交的两个向量 $v_{\perp}$ 和 w：

$$w=n\times v$$

$$v_{\perp}=v-v_{\parallel}=v-(v\cdot n)n=-n\times w=-n\times(n\times v) \qquad (2)$$

从图中我们可以得到 v_{rot}：

$$v_{rot}=v_{\parallel}+\cos\theta v_{\perp}+\sin\theta w \qquad (3)$$

将(1)和(2)代入(3)，得到：

$$\begin{aligned}v_{rot}&=v_{\parallel}+\cos\theta(v-v_{\parallel})+\sin\theta n\times v\\&=\cos\theta v+(1-\cos\theta)v_{\parallel}+\sin\theta n\times v\\&=\cos\theta v+(1-\cos\theta)(n\cdot v)n+\sin\theta n\times v\\&=(\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta n^\wedge)v\end{aligned}$$

所以将 v 旋转到 v_{rot} 的旋转矩阵 R 为：

$$R=\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta n^\wedge$$

2. 使用罗德里格斯公式证明 $R^{-1}=R^T$

证：由 $R=\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta n^\wedge$

得 $R^T=\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T-\sin\theta n^\wedge$

利用反对称矩阵性质：$(n^\wedge)^T=-n^\wedge$

再计算

$$\begin{aligned}RR^T&=[\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T+\sin\theta n^\wedge][\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T-\sin\theta n^\wedge]\\&=[\cos\theta I+(1-\cos\theta)nn^T]^2-(\sin\theta n^\wedge)^2\\&=\cos^2\theta I+(1-\cos\theta)^2 n\underbrace{n^Tn}_{=1}n^T+2\cos\theta(1-\cos\theta)nn^T-\sin^2\theta n^\wedge n^\wedge\end{aligned}$$

代入 $nn^T-n^\wedge n^\wedge=1$

$$\begin{aligned}&=\cos^2\theta I+(1-\cos\theta)^2(1+n^\wedge n^\wedge)+2\cos\theta(1-\cos\theta)(1+n^\wedge n^\wedge)-\sin^2\theta n^\wedge n^\wedge\\&=\cos^2\theta I+(1-2\cos\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta)(1+n^\wedge n^\wedge)-\sin^2\theta n^\wedge n^\wedge\\&=\cos^2\theta\cdot I+\sin^2\theta(1+n^\wedge n^\wedge)-\sin^2\theta n^\wedge n^\wedge\\&=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cdot I\\&=1\end{aligned}$$

由此可证明 $R^{-1}=R^T$

7、四元数运算性质的验证（若 $p' = qpq^{-1}$，则 p' 必为虚四元数）

证：假设点 $p = (\varepsilon_p, 0)$，用虚四元数表示点 p 的坐标

假设 q 代表的四元数为 $q = (\varepsilon_q, \eta_q)$

使用第5题的结论，得

$$p' = qpq^{-1} = q^+ p q^{-1} = q^+ p^+ q^{-1} = q^+ q^{-1\oplus} p$$

代入 $q^+ = \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix}$

$$q^{-1} = q^*/\|q\|^2 = q^* = (-\varepsilon_q, \eta_q)$$

$$q^{-1\oplus} = \begin{bmatrix} \eta_q I - (-\varepsilon_q)^\wedge & -\varepsilon_q \\ -(-\varepsilon_q)^T & \eta_q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & -\varepsilon_q \\ \varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix}$$

则 $p' = q^+ q^{-1\oplus} p$

$$= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & -\varepsilon_q \\ \varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_q I + \varepsilon_q^\wedge & \varepsilon_q \\ -\varepsilon_q^T & \eta_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q \varepsilon_p + \varepsilon_q^\wedge \varepsilon_p \\ \varepsilon_q^T \varepsilon_p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)(\eta_q \varepsilon_p + \varepsilon_q^\wedge \varepsilon_p) + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p \\ \cancel{-\eta_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p} - \underbrace{\varepsilon_q^T \varepsilon_q^\wedge}_{=0} \varepsilon_p + \cancel{\eta_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\eta_q I + \varepsilon_q^\wedge)(\eta_q \varepsilon_p + \varepsilon_q^\wedge \varepsilon_p) + \varepsilon_q \varepsilon_q^T \varepsilon_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

故 p' 实部为零，p' 必定为虚四元数，从而可以导出旋转矩阵为 $R = Im(q^+ q^{-1\oplus})$