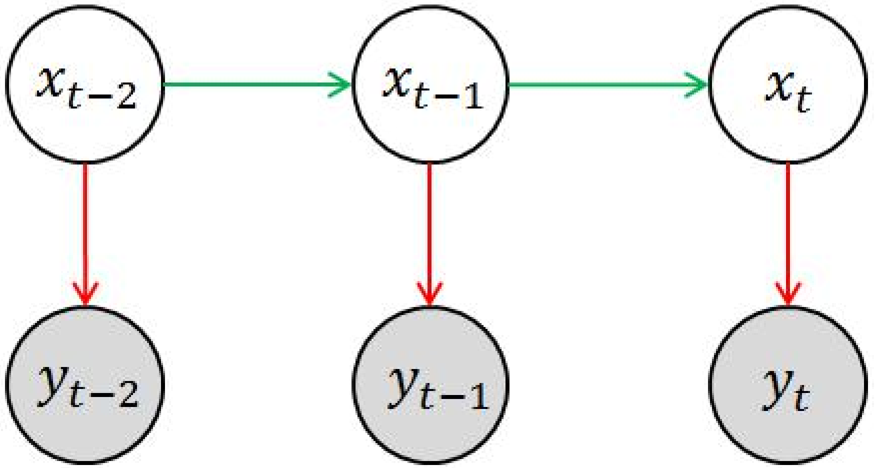
Kamlan Filter

想象你在黄昏时分看着一仅仅小鸟飞行穿过浓密的丛林。你仅仅能隐隐约约、断断续续地瞥见小鸟运动的闪现。你试图努力地猜测小鸟在哪里以及下一时刻它会出如今哪里，才不至于失去它的行踪。

或者再想象你是二战中的一名雷达操作员，正在跟踪一个微弱的游移目标。这个目标每隔10秒钟在屏幕上闪烁一次。

一、HMM



空白圆圈（xt-2, xt-1, xt）相当于是**隐变量**

涂有阴影的圆圈（yt-2, yt-1, yt）相当于是**观测变量**

你所观测到的物体状态（比如雷达中目标的位置或者速度）相当于是对其真实状态的一种预计（由于观测的过程中必定存在噪声），用数学语言来表述就是P(yt | xt)，这就是模型中的测量模型或测量概率（Measurement Probability）。

另外一方面，物体当前的（真实）状态应该与其上一个状态相关【马氏性】，即存在这样的一个分布P(xt | xt-1)，这就是模型中的转移模型或转移概率（Transition Probability)(一步转移概率)。当然，HMM中隐变量必须都是离散的，观测变量并无特殊要求。

所谓预计（estimate）就是依据测量得出的与状态X(t) 有关的数据Y(t) = h[X(t)] + V(t) 解算出X(t)的计算值$\hat{X}(t)$。$\hat{X}(t)$ 是Y(t)的函数。

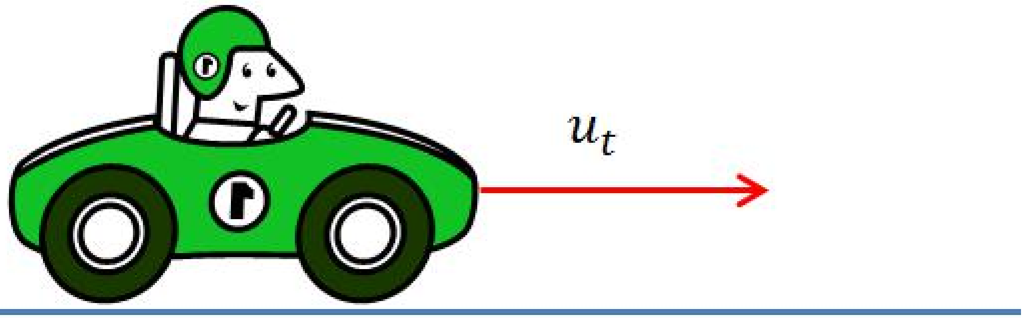
其中随机向量V(t) 为测量误差，$\hat{X}(t)$ 称为X的预计(estimate), Y 称为 X 的测量(measurement)。

$$cov(AX+a) = Acov(X)A^T$$

假如如今有一辆在路上做直线运动的小车（例如以下所看到的）
该小车在 t 时刻的状态能够用一个向量来表示，其中pt 表示他当前的位置，vt 表示该车当前的速度。
当然，司机还能够踩油门或者刹车来给车一个加速度ut。ut 相当于是一个对车的控制量。

假设司机既没有踩油门也没有踩刹车，那么ut 就等于0，此时车就会做匀速直线运动。

$$x_t = \begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix}$$



假设我们已知上一时刻 t-1时小车的状态
如今来考虑当前时刻t 小车的状态。显然有:

$$p_t = p_{t-1} + v_{t-1} \times \Delta t + \frac{1}{2} u_t \times \Delta t^2$$

$$v_t = v_{t-1} + u_t \times \Delta t$$

上述两个公式中，输出变量都是输入变量的线性组合，这也就是称卡尔曼滤波器为线性滤波器的原因所在。

改写成矩阵形式:

$$\boxed{\begin{bmatrix} p_t \\ v_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{t-1} \\ v_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix} u_t}$$

记 $F_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_t = \begin{bmatrix} \Delta t^2/2 \\ \Delta t \end{bmatrix}$

卡尔曼滤波方程组中的第一条公式——状态预测公式。
F就是状态转移矩阵，表示怎样从上一状态来猜测当前状态。
B则是控制矩阵，表示控制量 u 怎样作用于当前状态。

$$\boxed{\hat{x}_t^- = F_t \hat{x}_{t-1} + B_t u_t}$$

等式左端部分的右上标“-”表示该状态是依据上一状态猜测而来的，稍后我们还将对其进行修正以得到最优预计。彼时才干够将“-”去掉。

$$\hat{x}_t^- = F_t \hat{x}_{t-1} + B_t u_t$$

系统中每一个时刻的不确定性都是通过协方差矩阵 Σ 来给出的。

并且这样的不确定性在每一个时刻间还会进行传递。
也就是说不仅当前物体的状态（比如位置或者速度）是会（在每一个时刻间）进行传递的，并且物体状态的不确定性也是会（在每一个时刻间）进行传递的。

这样的不确定性的传递就能够用状态转移矩阵来表示，即 $\Sigma_t^- = F \Sigma_{t-1} F^T$

预测模型本身也并不绝对准确的，所以我们要引入一个协方差矩阵 Q 来表示预测模型本身的噪声（也即是噪声在传递过程中的不确定性），则有 $\boxed{\Sigma_t^- = F \Sigma_{t-1} F^T + Q}$

这就是卡尔曼滤波方程组中的第二条公式，它表示不确定性在各个时刻间的传递关系。

前面我们所讨论的内容都是环绕小汽车的真实状态展开的，真实状态我们事实上是无法得知的，我们仅仅能通过观测值来对真实值进行预计

所以如今我们在路上布设了一个装置来测定小汽车的位置。观测到的值记为Y(t)。
并且从小汽车的真实状态到其观测状态另一个变换关系。这个变换关系我们记为h(•)。
并且这个h(•)还是一个线性函数。此时便有Y(t) = h[X(t)] + V(t)，V(t)表示观测的误差。
Yt= H xt + v

接下来要做的事情就是对前面得出的状态预计进行修正，具体而言就是利用以下这个式子

$$\boxed{\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t(y_t - H\hat{x}_t^-)}$$

$\hat{x}_t^-$ 是依据上一状态猜测而来的。那么它与“最优”预计值之间的差距如今就是等式右端加号右侧的部分。

$y_t - H\hat{x}_t^-$ 表示实际观察值与预估的观测值之间的残差。这个残差再乘以一个系数K就能够用来对预计值进行修正。

K称为卡尔曼系数，它也是一个矩阵，它是对残差的加权矩阵。有的资料上称其为滤波增益阵。

$$\boxed{K_t = \Sigma_t^- H^T (H \Sigma_t^- H^T + R)^{-1}}$$

滤波增益阵首先权衡预测状态协方差矩阵 Σ 和观测值矩阵R的大小。并以此来认为我们是更倾向于相信预测模型还是具体观测模型。

最后，还需对最优预计值的噪声分布进行更新。所使用的公式为

$$\Sigma_t = (I - K_t H)\Sigma_t^-$$

Predict

$$\hat{x}_t^- = F_t \hat{x}_{t-1} + B_t u_t$$

$$\Sigma_t^- = F \Sigma_{t-1} F^T + Q$$

Update

$$K_t = \Sigma_t^- H^T (H \Sigma_t^- H^T + R)^{-1}$$

$$\hat{x}_t = \hat{x}_t^- + K_t (y_t - H \hat{x}_t^-)$$

$$\Sigma_t = (I - K_t H) \Sigma_t^-$$

将这五个公式分成预测组和更新组。

预测组总是依据前一个状态来预计当前状态。更新组则依据观测信息来对预测信息进行修正。以期达到最优预计之目的。

two steps:

1. Prediction step: Estimate the current state of the process.
2. Measurement step: Use noisy observations to update its estimate by averaging the information from both steps in a way that weighs more certain estimates higher.