Lovász 局部引理

施朱鸣

12 月 18 日

Outline

用概率方法解决问题

Lovász 局部引理

用概率方法解决问题

概率工具

某事件发生的概率非零，则发生该事件的情形存在。

$$P(X) > 0 \Rightarrow \exists X$$

定理： $\forall p, q \geq 2$，存在 $R(p, q)$，使得 $\forall n \geq R(p, q)$，任意将完全图 K_n 的边进行红蓝染色，都会产生一个蓝色 K_p 或一个红色 K_q，这里的 $R(p, q)$ 称为 Ramsey 数

定理：如果 $C_n^k 2^{1-C_k^2} < 1$ 那么 $R(k,k) > n$

证明：随机地给 K_n 的每条边红蓝着色。

- 对任意 k 阶完全子图 S，S 单色这一事件记作 A_S，则 $P(A_S) = 2^{1-C_k^2}$
- $P(\cup_S A_S) \leq C_n^k 2^{1-C_k^2}$
- $P(\cap_S \bar{A}_S) \geq 1 - C_n^k 2^{1-C_k^2} > 0$
- 存在一种红蓝着色后的 K_n，其中存在既非全红也非全蓝的 k 阶完全子图
- 这样的 n 不够大，即 $n < R(k,k)$

Turan 定理

定理： $\forall G=(V,E), n=|V|, k=\frac{2|E|}{n}, \alpha(G)>\frac{n}{2k}$

证明：

- 以 p 的概率随机选取边生成子图 S
- S 的顶点数 $X=\sum_{v\in V}1_v \Rightarrow E(X)=np$
- S 的边数 $Y=\sum_{e\in E}1_e \Rightarrow E(Y)=p^2|E|=nk\frac{p^2}{2}$
- 在 S 中每条边上都删除一个顶点，剩下的图 S' 至少有 $X-Y$ 个顶点，且这些点之间没有边相连。$E(X-Y)=np-nk\frac{p^2}{2}$，当 $p=\frac{1}{k}$ 时取到最大值 $\frac{n}{2k}$
- $\exists S, |S|>\frac{n}{2k} \Rightarrow \alpha(G)>\frac{n}{2k}$

Lovász 局部引理

基本概念

- 条件概率：$P(B) > 0$ 时 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
- Bayes 定理：$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$
- 事件独立性：$P(AB) = P(A)P(B)$, 当 $P(B) > 0$ 时有 $P(A|B) = P(A)$

Lovász **局部引理：** 若事件序列 $\{A_i\}(1 \le i \le n)$ 满足以下条件：

- $\forall i, P(A_i) \le p$
- $\forall i$，A_i 与至多 d 个其他事件不独立
- $ep(d+1) \le 1$，其中 e 指自然对数

则 $P(\wedge_{i=1}^{n} \overline{A_i}) > 0$，即存在非 0 概率使得所有事件不发生

证明工具

公式：

$$P(\wedge_{i=1}^{n}\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j})$$

证明：当 n=1 时，等式显然成立

假设对于 $\forall k < n$，等式成立. 考虑 n

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j}) &= P(\overline{A_n})P(\overline{A_{n-1}}|\overline{A_n}) \prod_{i=1}^{n-2} P(\overline{A_i}| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j}) \\
&= P(\overline{A_n} \wedge \overline{A_{n-1}}) \prod_{i=1}^{n-2} P(\overline{A_i}| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j})
\end{aligned}$$

定义事件序列 $\{B_i\}$，当 $1 \le i \le n-2$ 时，$\overline{B_i} = \overline{A_i}$，此外 $\overline{B_{n-1}} = \overline{A_n} \wedge \overline{A_{n-1}}$ ，则

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i} | \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j}) &= \prod_{i=1}^{n-1} P(\overline{B_i} | \wedge_{j=i+1}^{n-1} \overline{B_j}) \\
\text{(由归纳假设)} &= P(\wedge_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}) \\
&= P(\wedge_{i=1}^{n} \overline{A_i})
\end{aligned}
$$

主命题

主命题：当满足洛瓦兹局部引理的条件时，

$$\forall S \forall i, P(A_i | \wedge_{j \in S} \overline{A_j}) \leq \frac{1}{d+1}$$

证明：用数学归纳法.

$S = \emptyset$ 时，命题显然成立.

设 $|S| < n$ 时命题成立，考虑 $|S| = n$

定义 $S_i = \{j | A_j \text{与} A_i \text{不独立}\}$，不妨设 $S_i \bigcap S = \{1, 2, ..., k\}$

主命题

令 $B = \wedge_{j\in S_i \bigcap S}\overline{A_j}, C = \wedge_{j\in \overline{S_i} \bigcap S}\overline{A_j}$，则

$$
\begin{aligned}
P(A_i|\wedge_{j\in S}\overline{A_j}) &= P(A_i|BC) \\
&= \frac{P(A_iBC)}{P(BC)} \\
&= \frac{P(A_iB|C)}{P(B|C)} \\
&\leq \frac{P(A_i|C)}{P(B|C)} \\
&= \frac{P(A_i)}{P(B|C)} \quad (A_i\text{与}C\text{独立})
\end{aligned}
$$

主命题

由乘法公式得

$$
\begin{aligned}
P(B|C) &= P(\wedge_{j\in S_i \bigcap S}\overline{A_j}|C) \\
&= \prod_{i=1}^{k} P(\overline{A_i}|\wedge_{j=i+1}^{k}\overline{A_j}C) \\
&= \prod_{i=1}^{k}(1 - P(A_i|\wedge_{j=i+1}^{k}\overline{A_j}C)) \\
&\geq (1 - \frac{1}{d+1})^k \quad (\text{由归纳假设} P(A_i|\wedge_{j=i+1}^{k}\overline{A_j}C)) \leq \frac{1}{d+1}) \\
&\geq (1 - \frac{1}{d+1})^d \geq e^{-1}
\end{aligned}
$$

由已知条件 $ep(d+1) \leq 1$，得

$$
P(A_i|\wedge_{j\in S}\overline{A_j}) \leq \frac{P(A_i)}{P(B|C)} \leq ep \leq \frac{1}{d+1}
$$

$(1-\frac{1}{d+1})^d \geq e^{-1}$

因为

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (1-\frac{j}{n}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (1-\frac{j}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (1-\frac{j}{n+1}) \\
&= (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}
\end{aligned}
$$

得 $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增. 我们已知 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

由 $(1-\frac{1}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n})^{-n}$，得 $(1-\frac{1}{d+1})^d \geq e^{-1}$

Lovász 局部引理证明

由乘法公式，得

$$P(\wedge_{i=1}^{n}\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j})]$$

由主命题，得，

$$\prod_{i=1}^{n}[1 - P(A_i| \wedge_{j=i+1}^{n} \overline{A_j})] \geq (1 - \frac{d}{d+1})^n > 0$$

致谢

致谢

祝大家期末顺利，谢谢聆听！