1 问题分析

2 模型设计与计算

2.1 模型的基本假设

我们的目标是解出高压油管内部压力 p 与时间 t 的关系, 记作

$$p = p(t) \tag{1}$$

由条件可见，高压油管的内部体 V 不变，由 $\rho = \frac{m}{V}$ 可见，对高压油管内燃油密度造成影响的仅有高压油管内的燃油质量，用微分方程来表达就是

$$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\left(\frac{m}{V}\right) = \frac{\mathrm{d}m}{V} \tag{2}$$

首先我们考虑 $\mathrm{d}\rho$ 和 p 的关系。

根据注 1 给出的条件，燃油的压力与其密度具有正相关关系，其关系可以用微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = \frac{E}{\rho}\mathrm{d}\rho \\ p_0 = 100\,\mathrm{MPa}, \rho_0 = 0.850\,\mathrm{mg\,mm^{-3}} \\ E = E(p) \end{cases} \tag{3}$$

描述，其中 $E(p)$ 由附件 3 的数据给出，对附件 3 的数据用 MATLAB 作图并拟合得到方程，如图 Figure 1

$$E(p) = 0.0001p^3 - 0.001082p^2 + 5.474p + 1532 \quad (r^2 = 1.0000) \tag{4}$$

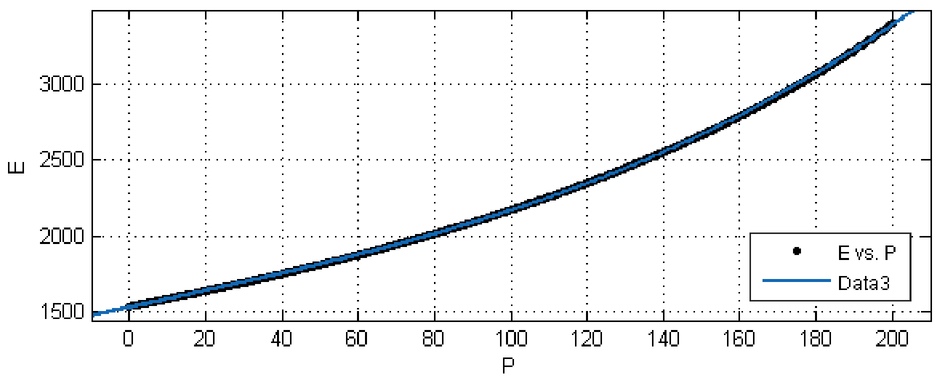

Figure 1. 燃油弹性模量 E 与压力 p 的非线性拟合结果

由以上的方程我们可以解出关系

$$\rho(p) = 0.850e^{\int_{100}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{E(p)}} \tag{5}$$

其次，我们再来考虑 $\mathrm{d}m$ 和 p 与 t 的关系。

$\mathrm{d}m$ 由进入和喷出两部分组成。喷出部分对 $\mathrm{d}m$ 的贡献是时间的函数。单位时间喷出的油量（体积）用函数 $Q_{out}(t)$ 表示，它的解析式在各个小题中有所不同，并且分段可微，所以喷出端造成的 $\mathrm{d}m$ 可以表述成

$$\mathrm{d}m_{out} = -\rho Q_{out}(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

进入部分对 $\mathrm{d}m$ 的贡献也是时间的函数。这个函数含有参数 T，在上面提及过，它描述了单向阀的开启时间。单位时间进入的油量（体积）用函数 $Q_{in}(t)$ 表示，它的解析式在各个小题中也有所不同，并且分段可微，所以喷出端造成的 $\mathrm{d}m$ 可以表述成

$$\mathrm{d}m_{in} = \rho Q_{in}(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

综上，联立方程 2、5、6、7，我们可以列出方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{E\mathrm{d}t} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} \tag{8}$$

方程 8就是我们对本题建立的基本数学模型。接下来的部分中，我们将根据 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式，对整个体系最佳 T 值的选择进行讨论。

2.2 问题 1

在问题 1 中 $Q_{out}(t)$ 的形式比较简单，它是由题目中图 Figure 2给出的

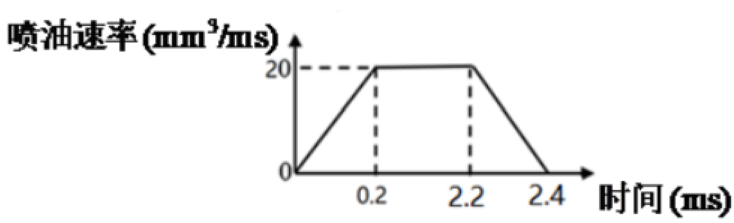

Figure 2. 问题 1 中的喷油速率

写成函数为

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} 100(t-100k) & 100k \le t \le 100k+0.2, k \in \mathbb{N} \\ 20 & 100k+0.2 \le t \le 100k+2.2, k \in \mathbb{N} \\ -100(t-100k)+240 & 100k+2.2 \le t \le 100k+2.4, k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{9}$$

在问题 1 中 $Q_{in}(t)$ 的形式也比较简单，它包括一个参数 T，描述力单向阀每次开启的时长。我们定义 $0-1$ 变量 $\lambda = \lambda(t)$ 来描述供油处入口的截面积，它的形式为

$$\lambda = \begin{cases} 1 & k(T+10) \le t \le k(T+10)+T, k \in \mathbb{N} \\ 0 & k(T+10)+T \le t \le (k+1)(T+10), k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{10}$$

代入题目中给出的流量公式可得

$$Q_{in}(t) = \lambda CA\sqrt{\frac{2(p_h - p)}{\rho_h}} \tag{11}$$

将 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式代入方程 8，发现所得方程是一阶常微分方程，所以尝试用差分法通过计算机进行数值解微分方程，取 $\Delta t = 0.01\,\mathrm{ms}$，用 Wolfram Mathematica 计算并绘制出对应于不同 T 取值 $p-t$ 变化图 Figure 3

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{E(p_i)\Delta t} = \frac{1}{V_0}\left(\lambda CA\sqrt{\frac{2\left(p_h - p_i\right)}{\rho_h}} - Q_{out}(t_i)\right) \tag{12}$$

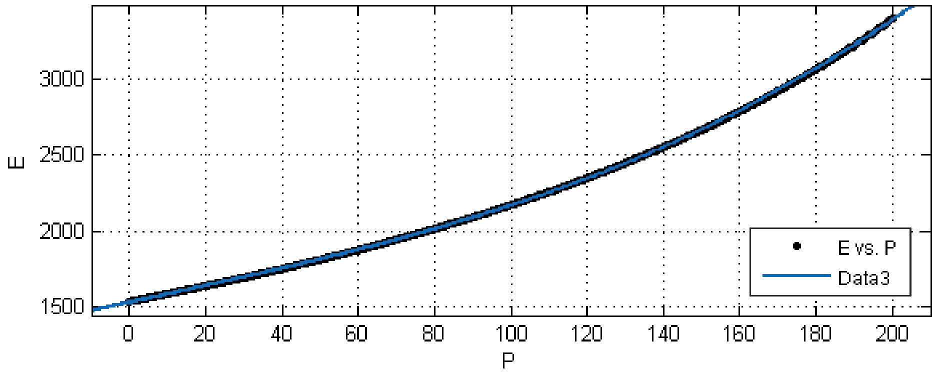

Figure 3. 差分方程数值模拟结果

利用二分法计算程序可以得到精确到千分位的单向阀开启时长 $T = 0.290\,\mathrm{ms}$。

对于将油管内的压力从100 MPa提高到150 MPa的情况，我们可以用同样的差分方程，分别模拟起始压力与2 s、5 s和10 s后的压力差别为50 MPa时的情况，同样通过二分法可以找出最佳的精确到千分位的单向阀开启时长 $T_{2s} = 0.886\,\mathrm{ms}$、$T_{5s} = 0.713\,\mathrm{ms}$ 和 $T_{10s} = 0.703\,\mathrm{ms}$。

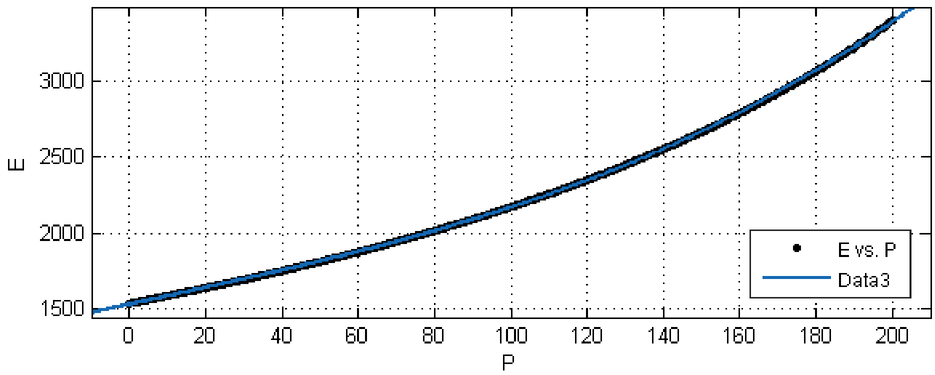

Figure 4. 调整过程中的压力周期变化

而进过该段时间后，维持150 MPa所需要的单向阀开启时长为 $T_{150} = 0.701\,\mathrm{ms}$。图 Figure 4展示了其中一个调整过程中的压力对时间的变化图像。

问题 1 结论 综上所述，将高压油管内的压力尽可能稳定在100 MPa左右，应该设置单向阀每次开启0.290 ms。如果要将高压油管内的压力从100 MPa增加到150 MPa, 且分别经过约2 s、5 s和10 s的调整之后稳定在150 MPa时的情况，对应时长内单向阀应分别先调整为开启 $T_{2s} = 0.886\,\mathrm{ms}$、$T_{5s} = 0.713\,\mathrm{ms}$ 和 $T_{10s} = 0.703\,\mathrm{ms}$，随后维持开启时长为 $T_{150} = 0.701\,\mathrm{ms}$，以维持150 MPa。

3 问题 2

问题 2 中 $Q_{out}(t)$ 的形式比较复杂。

首先我们定义等效面积函数 $B(t)$，用来描述针阀运动过程中喷油嘴喷孔的等效面积。

由简单的几何计算可知，它的形式如下。

$$B(t) = \pi \left(\left(\frac{d_B}{2} + h(t) \tan 9^\circ \right)^2 - \left(\frac{d_B}{2} \right)^2 \right) \tag{13}$$

但是，当针阀上升到一定高度时，等效面积函数值会超过喷嘴的面积，此时喷油能力转而由喷嘴的面积限制，为了不改变 $B(t)$ 的表达形式，我们定义了等效升程函数 $h(t)$，它表示针阀的等效升程，由题目附件 2 给出的数据拟合，并按照前述进行修正得到，其图形和拟合结果如下

$$h(t) = \begin{cases} \frac{0.5342(t-100k)^2-0.04835(t-100k)+0.000726}{(t-100k)^2-0.7362(t-100k)+0.1716} & 100k \le t \le 100k + 0.3309, k \in \mathbb{N} \\ 1.1532 & 100k \le t + 0.3309 \le 100k + 2.1213, k \in \mathbb{N} \\ \frac{0.5358(t-100k)^2-2.576(t-100k)+3.096}{(t-100k)^2-4.163(t-100k)+4.368} & 100k + 2.1213 \le t \le 100k + 2.45, k \in \mathbb{N} \\ 0 & 100k + 2.45 \le t \le 100(k+1), k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{14}$$

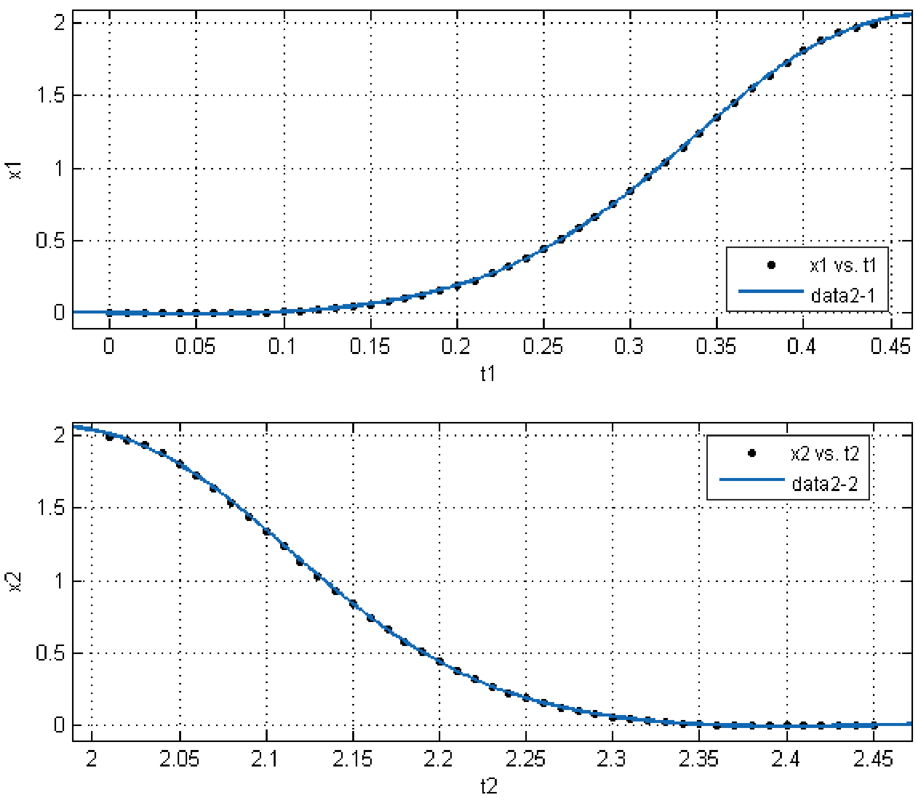

Figure 5. 针阀升程

由于高压油管内的油压远高于大气压，所以我们可以忽略喷油嘴外的压强，即 $\Delta p \approx p$，由此 $Q_{out}(t)$ 就可以被写成

$$Q_{out}(t) = CB\sqrt{\frac{2p}{\rho}} \tag{15}$$

再来看 Q_{in} 的表达形式，它形式上与上一题类似，如方程 16（以下下标为 h 的项均为油泵油缸的性质）

$$Q_{in}(t) = \delta CA\sqrt{\frac{2(p_h - p)}{\rho_h}} \tag{16}$$

其中 $0-1$ 变量 δ 定义如下

$$\delta = \begin{cases} 1 & p_h \geq p \\ 0 & p_h < p \end{cases} \tag{17}$$

下面我们来求油缸内压力 p_h 的表达式。油缸的体积可以表示为时间 t 的周期函数

$$V_h(t) = 20 + (R_{up} - R(\theta(t)))\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \tag{18}$$

其中 R_{up} 为凸轮位于上止点时的极径，由题目给出，为0.5 MPa，$R(\theta)$ 的表达式由题目附件 1 给出，$\theta(t)$ 的表达式如下，为了计算方便，我们把时刻 $t=0$ 的相位设置为下止点，也就是 $\theta=\pi$。

$$\theta(t) = \omega t + \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{N}, \theta(t) \geq 0 \tag{19}$$

当油泵活塞运行到下止点时，油泵吸慢了油，并不再把油返回低压油路，所以我们可以在油泵位于下止点时直接给定一个初值 $p_0 = 0.5\,\mathrm{MPa}$，对每一个周期都是这样。

考虑油泵油缸的质量守恒，可以得到下面的方程。

$$\frac{\mathrm{d}m_h}{\mathrm{d}t} = -Q_{in}\rho \tag{20}$$

又由密度的定义 $m_h = \rho_h V_h$ 微分得到

$$\mathrm{d}m_h = \rho_h \mathrm{d}V_h + V_h \mathrm{d}\rho_h \tag{21}$$

将方程 3、20、21联立，加入初值条件，可以整理得到

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}p_h}{E(p_h)\mathrm{d}t} = \frac{1}{V_h}\left(-Q_{in}\frac{\rho}{\rho_h} - \frac{\mathrm{d}V_h}{\mathrm{d}t}\right) \\ p_h(\frac{2k\pi}{\omega}) = 0.5, k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{22}$$

在高压油泵供油的过程中我们可以用方程 22去描述它的情况。这个方程的形式和刚才对高压油管的建模模型——方程 8形式很相似，也就是我们可以把高压油泵的油缸视作另一个高压油管，活塞对它的压缩可以视作 Q_{in}，而向高压油管供油可以视作 Q_{out}，当然此时 V 是变量，所以不可以直接代入。

同时，根据方程 8我们可以写出高压油管的方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{E\mathrm{d}t} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} \tag{23}$$

联立方程 23、22并使用和问题 1 中相似的差分方程计算

$$\begin{aligned} &\frac{p_{h\ i+1} - p_{h\ i}}{E(p_{h\ i})\Delta t} = \frac{1}{V_h(t_i)}\left(-\delta CA\sqrt{\frac{2\left(p_h - p_i\right)}{\rho_h}} - \frac{\mathrm{d}V_h}{\mathrm{d}t}\right) \\ &\frac{p_{i+1} - p_i}{E(p_i)\Delta t} = \frac{1}{V_0}\left(\delta CA\sqrt{\frac{2\left(p_h - p_i\right)}{\rho_h}} - Q_{out}(t_i)\right) \\ &p_h(\frac{2k\pi}{\omega}) = 0.5, k \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{24}$$