

1 问题分析

2 模型设计与计算

2.1 模型的基本假设

我们的目标是解出高压油管内部压力 p 与时间 t 的关系，这个关系包括一个参数 T ，描述力单向阀每次开启的时长。记作

$$p = p(t) \quad (1)$$

由条件可见，高压油管的内部体 V 不变，由 $\rho = \frac{m}{V}$ 可见，对高压油管内燃油密度造成影响的仅有高压油管内的燃油质量，用微分方程来表达就是

$$d\rho = d\left(\frac{m}{V}\right) = \frac{dm}{V} \quad (2)$$

首先我们考虑 $d\rho$ 和 p 的关系。

根据注 1 给出的条件，燃油的压力与其密度具有正相关关系，其关系可以用微分方程

$$\begin{cases} dp = \frac{E}{\rho} d\rho \\ p_0 = 100 \text{ MPa}, \rho_0 = 0.850 \text{ mg mm}^{-3} \\ E = E(p) \end{cases} \quad (3)$$

描述，其中 $E(p)$ 由附件 3 的数据给出，对附件 3 的数据用 MATLAB 作图并拟合得到方程，如图 Figure 1

$$E(p) = 0.0001p^3 - 0.001082p^2 + 5.474p + 1532 \quad (r^2 = 1.0000) \quad (4)$$

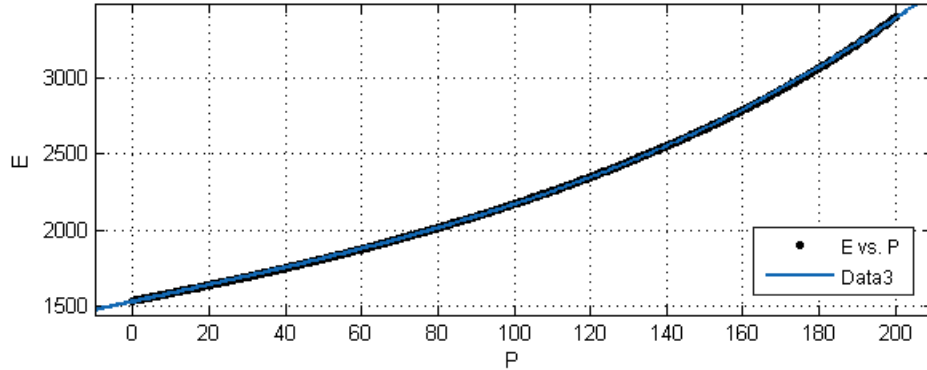


Figure 1. 燃油弹性模量 E 与压力 p 的非线性拟合结果

由以上的方程我们可以解出关系

$$\rho(p) = 0.850e^{\int_{100}^p \frac{dp}{E(p)}} \quad (5)$$

其次，我们再来考虑 dm 和 p 与 t 的关系。

dm 由进入和喷出两部分组成。喷出部分对 dm 的贡献是时间的函数。单位时间喷出的油量（体积）用函数 $Q_{out}(t)$ 表示，它的解析式在各个小题中有所不同，并且分段可微，所以喷出端造成的 dm 可以表述成

$$dm_{out} = -\rho Q_{out}(t)dt \quad (6)$$

进入部分对 dm 的贡献也是时间的函数。这个函数含有参数 T ，在上面提及过，它描述了单向阀的开启时间。单位时间进入的油量（体积）用函数 $Q_{in}(t)$ 表示，它的解析式在各个小题中也有所不同，并且分段可微，所以喷出端造成的 dm 可以表述成

$$dm_{in} = \rho Q_{in}(t) dt \quad (7)$$

综上，联立方程 2、5、6、7，我们可以列出方程

$$\frac{dp}{E dt} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} \quad (8)$$

方程 8 就是我们对本题建立的基本数学模型。接下来的部分中，我们将根据 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式，对整个体系最佳 T 值的选择进行讨论。

2.2 问题 1

在问题 1 中 $Q_{in}(t)$ 的形式比较简单，我们定义函数 $A = A(t)$ 来描述供油处入口的截面积，它的形式为

$$A(t) = \begin{cases} \left(\frac{1.4}{2}\right)^2 \pi \text{mm}^2 & k(T+10) \leq t \leq k(T+10) + T, k \in \mathbb{N} \\ 0 & k(T+10) + T \leq t \leq (k+1)(T+10), k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (9)$$

代入题目中给出的流量公式可得

$$Q_{in}(t) = CA(t) \sqrt{\frac{2(p_{high} - p)}{\rho}} \quad (10)$$

在问题 1 中 $Q_{out}(t)$ 的形式也比较简单，它是由题目中图 Figure 2 给出的

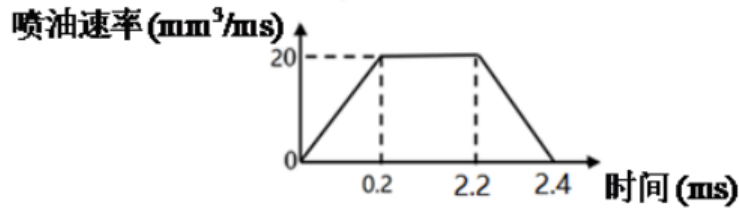


Figure 2. 问题 1 中的喷油速率

写成函数为

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} 100t & 100k \leq t \leq 100k + 0.2, k \in \mathbb{N} \\ 20 & 100k + 0.2 \leq t \leq 100k + 2.2, k \in \mathbb{N} \\ -100t + 240 & 100k + 2.2 \leq t \leq 100k + 2.4, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (11)$$

将 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式代入方程 8，发现所得方程是一阶常微分方程，所以尝试用差分法通过计算机进行数值解微分方程，取 $\Delta t = 0.01 \text{ ms}$ ，用 Wolfram Mathematica 计算并绘制出对应于不同 T 取值 $p-t$ 变化图 Figure 3

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{E(p_i) \Delta t} = \frac{1}{V_0} \left(CA(t_i) \sqrt{\frac{2(p_h - p_i)}{\rho_h}} - Q_{out}(t_i) \right) \quad (12)$$

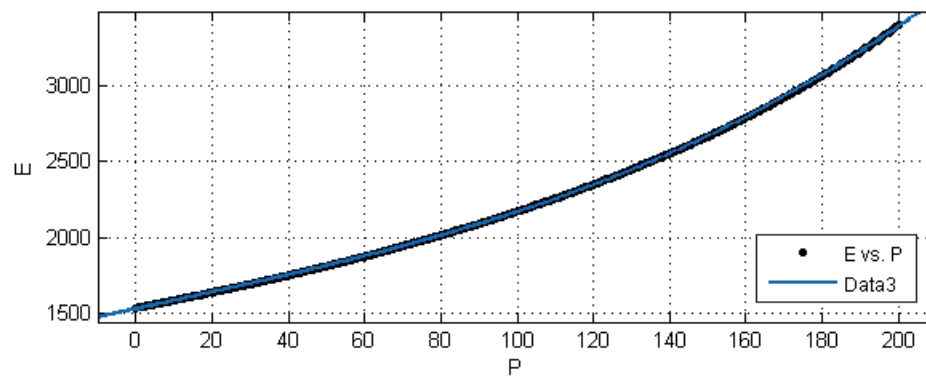


Figure 3. 差分方程数值模拟结果

利用二分法 C++ 程序可以解出精确到百分位的 T 值 $T =$