

1 问题分析

2 模型设计与计算

2.1 模型的基本假设

我们的目标是解出高压油管内部压力 p 与时间 t 的关系, 记作

$$p = p(t) \quad (1)$$

由条件可见, 高压油管的内部体 V 不变, 由 $\rho = \frac{m}{V}$ 可见, 对高压油管内燃油密度造成影响的仅有高压油管内的燃油质量, 用微分方程来表达就是

$$d\rho = d\left(\frac{m}{V}\right) = \frac{dm}{V} \quad (2)$$

首先我们考虑 $d\rho$ 和 p 的关系。

根据注 1 给出的条件, 燃油的压力与其密度具有正相关关系, 其关系可以用微分方程

$$\begin{cases} dp = \frac{E}{\rho} d\rho \\ p_0 = 100 \text{ MPa}, \rho_0 = 0.850 \text{ mg mm}^{-3} \\ E = E(p) \end{cases} \quad (3)$$

描述, 其中 $E(p)$ 由附件 3 的数据给出, 对附件 3 的数据用 MATLAB 作图并拟合得到方程, 如图 Figure 1

$$E(p) = 0.0001p^3 - 0.001082p^2 + 5.474p + 1532 \quad (r^2 = 1.0000) \quad (4)$$

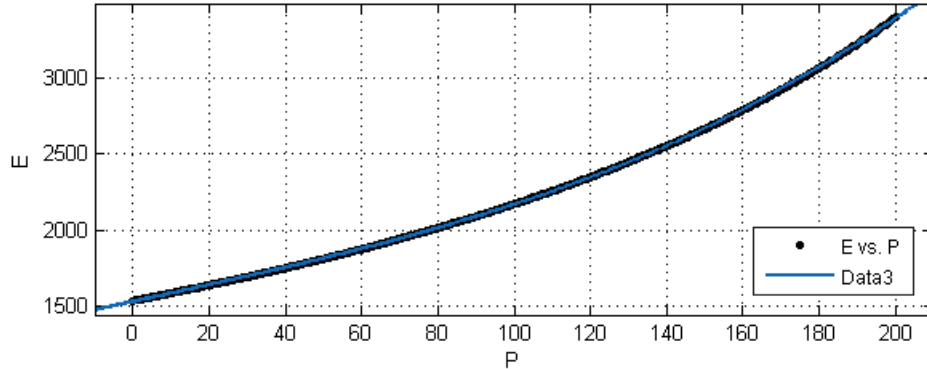


Figure 1. 燃油弹性模量 E 与压力 p 的非线性拟合结果

由以上的方程我们可以解出关系

$$\rho(p) = 0.850e^{\int_{100}^p \frac{dp}{E(p)}} \quad (5)$$

其次, 我们再来考虑 dm 和 p 与 t 的关系。

dm 由进入和喷出两部分组成。喷出部分对 dm 的贡献是时间的函数。单位时间喷出的油量 (体积) 用函数 $Q_{out}(t)$ 表示, 它的解析式在各个小题中有所不同, 并且分段可微, 所以喷出端造成的 dm 可以表述成

$$dm_{out} = -\rho Q_{out}(t)dt \quad (6)$$

进入部分对 dm 的贡献也是时间的函数。这个函数含有参数 T ，在上面提及过，它描述了单向阀的开启时间。单位时间进入的油量（体积）用函数 $Q_{in}(t)$ 表示，它的解析式在各个小题中也有所不同，并且分段可微，所以喷出端造成的 dm 可以表述成

$$dm_{in} = \rho Q_{in}(t) dt \quad (7)$$

综上，联立方程 2、5、6、7，我们可以列出方程

$$\frac{dp}{E dt} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} \quad (8)$$

方程 8 就是我们对本题建立的基本数学模型。接下来的部分中，我们将根据 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式，对整个体系最佳 T 值的选择进行讨论。

2.2 问题 1

在问题 1 中 $Q_{out}(t)$ 的形式比较简单，它是由题目中图 Figure 2 给出的

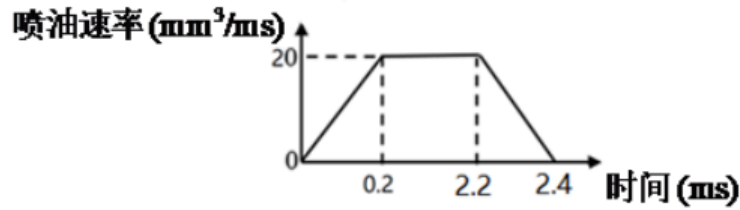


Figure 2. 问题 1 中的喷油速率

写成函数为

$$Q_{out}(t) = \begin{cases} 100(t - 100k) & 100k \leq t \leq 100k + 0.2, k \in \mathbb{N} \\ 20 & 100k + 0.2 \leq t \leq 100k + 2.2, k \in \mathbb{N} \\ -100(t - 100k) + 240 & 100k + 2.2 \leq t \leq 100k + 2.4, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (9)$$

在问题 1 中 $Q_{in}(t)$ 的形式也比较简单，它包括一个参数 T ，描述力单向阀每次开启的时长。我们定义 0-1 变量 $\lambda = \lambda(t)$ 来描述供油处入口的截面积，它的形式为

$$\lambda = \begin{cases} 1 & k(T + 10) \leq t \leq k(T + 10) + T, k \in \mathbb{N} \\ 0 & k(T + 10) + T \leq t \leq (k + 1)(T + 10), k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10)$$

代入题目中给出的流量公式可得

$$Q_{in}(t) = \lambda C A \sqrt{\frac{2(p_h - p)}{\rho_h}} \quad (11)$$

将 $Q_{in}(t)$ 和 $Q_{out}(t)$ 的具体形式代入方程 8，发现所得方程是一阶常微分方程，所以尝试用差分法通过计算机进行数值解微分方程，取 $\Delta t = 0.01$ ms，用 Wolfram Mathematica 计算并绘制出对应于不同 T 取值 $p-t$ 变化图 Figure 3

$$\frac{p_{i+1} - p_i}{E(p_i) \Delta t} = \frac{1}{V_0} \left(\lambda C A \sqrt{\frac{2(p_h - p_i)}{\rho_h}} - Q_{out}(t_i) \right) \quad (12)$$

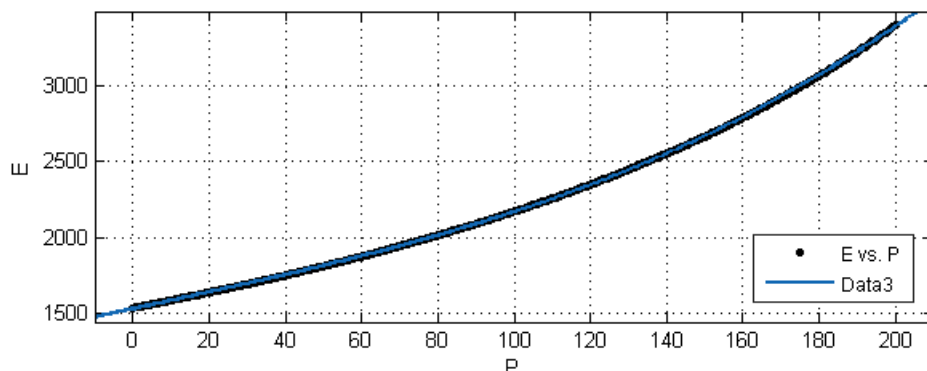


Figure 3. 差分方程数值模拟结果

利用二分法计算程序可以得到精确到千分位的单向阀开启时长 $T = 0.290 \text{ ms}$ 。

对于将油管内的压力从100 MPa提高到150 MPa的情况，我们可以用同样的差分方程，分别模拟起始压力与2 s、5 s和10 s后的压力差别为50 MPa时的情况，同样通过二分法可以找出最佳的精确到千分位的单向阀开启时长 $T_{2s} = 0.886 \text{ ms}$ 、 $T_{5s} = 0.713 \text{ ms}$ 和 $T_{10s} = 0.703 \text{ ms}$ 。

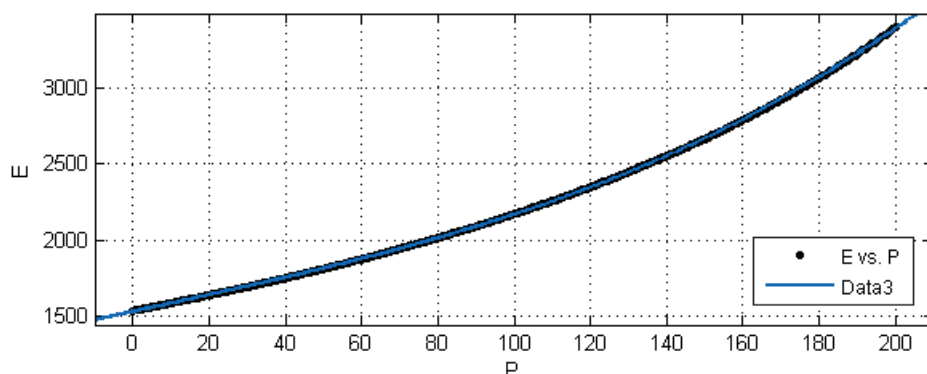


Figure 4. 调整过程中的压力周期变化

而进过该段时间后，维持150 MPa所需要的单向阀开启时长为 $T_{150} = 0.701 \text{ ms}$ 。图 Figure 4展示了其中一个调整过程中的压力对时间的变化图像。

问题 1 结论 综上所述，将高压油管内的压力尽可能稳定在100 MPa左右，应该设置单向阀每次开启0.290 ms。如果要将高压油管内的压力从100 MPa增加到150 MPa, 且分别经过约2 s、5 s和10 s的调整之后稳定在150 MPa时的情况，对应时长内单向阀应分别先调整为开启 $T_{2s} = 0.886 \text{ ms}$ 、 $T_{5s} = 0.713 \text{ ms}$ 和 $T_{10s} = 0.703 \text{ ms}$ ，随后维持开启时长为 $T_{150} = 0.701 \text{ ms}$ ，以维持150 MPa。

3 问题 2

问题 2 中 $Q_{out}(t)$ 的形式比较复杂。

首先我们定义等效面积函数 $B(t)$ ，用来描述针阀运动过程中喷油嘴喷孔的等效面积。

由简单的几何计算可知，它的形式如下。

$$B(t) = \pi \left(\left(\frac{d_B}{2} + h(t) \tan 9^\circ \right)^2 - \left(\frac{d_B}{2} \right)^2 \right) \quad (13)$$

但是，当针阀上升到一定高度时，等效面积函数值会超过喷嘴的面积，此时喷油能力转而由喷嘴的面积限制，为了不改变 $B(t)$ 的表达形式，我们定义了等效升程函数 $h(t)$ ，它表示针阀的等效升程，由题目附件 2 给出的数据拟合，并按照前述进行修正得到，其图形和拟合结果如下

$$h(t) = \begin{cases} \frac{0.5342(t-100k)^2 - 0.04835(t-100k) + 0.000726}{(t-100k)^2 - 0.7362(t-100k) + 0.1716} & 100k \leq t \leq 100k + 0.3309, k \in \mathbb{N} \\ 1.1532 & 100k \leq t + 0.3309 \leq 100k + 2.1213, k \in \mathbb{N} \\ \frac{0.5358(t-100k)^2 - 2.576(t-100k) + 3.096}{(t-100k)^2 - 4.163(t-100k) + 4.368} & 100k + 2.1213 \leq t \leq 100k + 2.45, k \in \mathbb{N} \\ 0 & 100k + 2.45 \leq t \leq 100(k+1), k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (14)$$

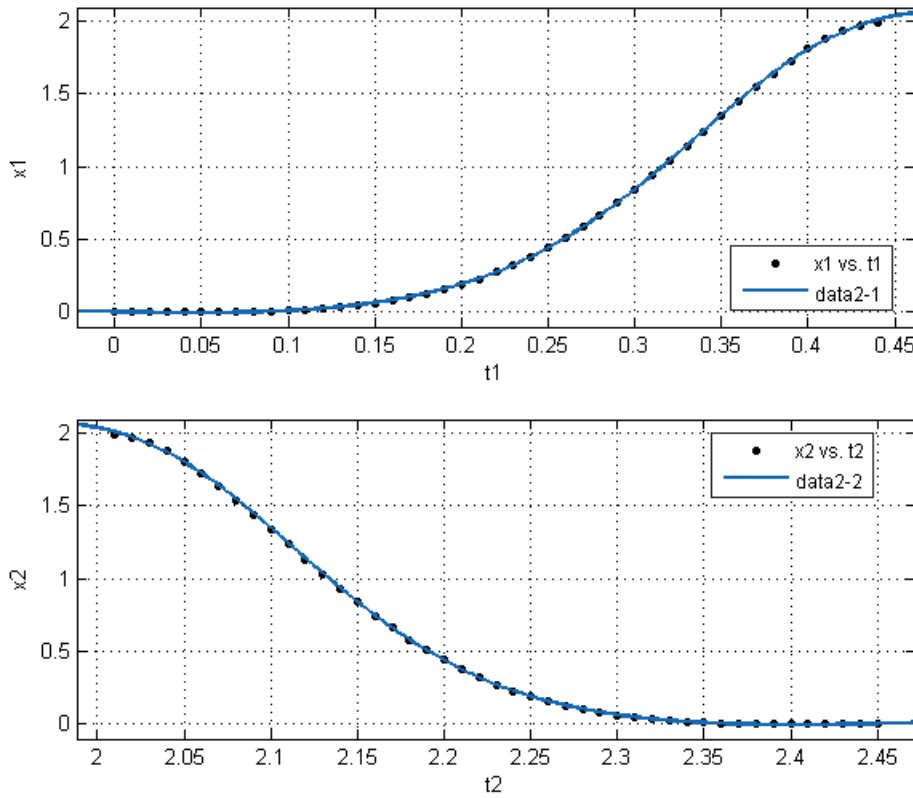


Figure 5. 针阀升程

由于高压油管内的油压远高于大气压，所以我们可以忽略喷油嘴外的压强，即 $\Delta p \approx p$ ，由此 $Q_{out}(t)$ 就可以被写成

$$Q_{out}(t) = CB \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (15)$$

再来看 Q_{in} 的表达形式，它形式上与上一题类似，如方程 16（以下下标为 h 的项均为油泵油缸的性质）

$$Q_{in}(t) = \delta CA \sqrt{\frac{2(p_h - p)}{\rho_h}} \quad (16)$$

其中 $0-1$ 变量 δ 定义如下

$$\delta = \begin{cases} 1 & p_h \geq p \\ 0 & p_h < p \end{cases} \quad (17)$$

下面我们来求油缸内压力 p_h 的表达式。油缸的体积可以表示为时间 t 的周期函数

$$V_h(t) = 20 + (R_{up} - R(\theta(t)))\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad (18)$$

其中 R_{up} 为油泵位于上止点时的内压，由题目给出，为 0.5 MPa ， $R(\theta)$ 的表达式由题目附件 1 给出， $\theta(t)$ 的表达式如下，为了计算方便，我们把时刻 $t = 0$ 的相位设置为下止点，也就是 $\theta = \pi$ 。

$$\theta(t) = \omega t + \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{N}, \theta(t) \geq 0 \quad (19)$$

当油泵活塞运行到下止点时，油泵吸慢了油，并不再把油返回低压油路，所以我们可以把油泵位于下止点时直接给定一个初值 $p_0 = 0.5 \text{ MPa}$ ，对每一个周期都是这样。

考虑油泵油缸的质量守恒，可以得到下面的方程。

$$\frac{dm_h}{dt} = -Q_{in}\rho \quad (20)$$

又由密度的定义 $m_h = \rho_h V_h$ 微分得到

$$dm_h = \rho_h dV_h + V_h d\rho_h \quad (21)$$

将方程 3、20、21 联立，加入初值条件，可以整理得到

$$\begin{cases} \frac{dp_h}{E(p_h)dt} = \frac{1}{V_h} \left(-Q_{in} \frac{\rho}{\rho_h} - \frac{dV_h}{dt} \right) \\ p_h\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) = 0.5, k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (22)$$

在高压油泵供油的过程中我们可以用方程 22 去描述它的情况。这个方程的形式和刚才对高压油管的建模模型——方程 8 形式很相似，也就是我们可以把高压油泵的油缸视作另一个高压油管，活塞对它的压缩可以视作 Q_{in} ，而向高压油管供油可以视作 Q_{out} ，当然此时 V 是变量，所以不可以直接代入。

同时，根据方程 8 我们可以写出高压油管的方程

$$\frac{dp}{E dt} = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{V} \quad (23)$$

联立方程 23、22 并使用和问题 1 中相似的差分方程计算

$$\begin{aligned} \frac{p_{h,i+1} - p_{h,i}}{E(p_{h,i})\Delta t} &= \frac{1}{V_h(t_i)} \left(-\delta C A \sqrt{\frac{2(p_h - p_i)}{\rho_h}} - \frac{dV_h}{dt} \right) \\ \frac{p_{i+1} - p_i}{E(p_i)\Delta t} &= \frac{1}{V_0} \left(\delta C A \sqrt{\frac{2(p_h - p_i)}{\rho_h}} - Q_{out}(t_i) \right) \\ p_h\left(\frac{2k\pi}{\omega}\right) &= 0.5, k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (24)$$