

从控制论到计算机

前沿第四组

10 月 22 日

Outline

机构与变异度

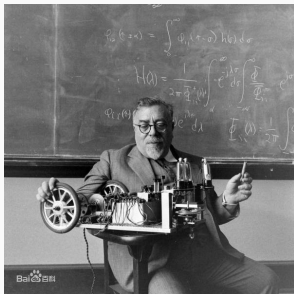
调节与控制

从控制论到计算机

机构与变异度

控制论

- 控制论的背景：起源于二战时期对飞机的防御和打击
- 控制论的诞生：1948 年，维纳的《控制论：或关于在动物和机器中控制和通信的科学》出版，标志着这个跨学科方向正式诞生。



1956 年，阿什比出版《控制论导论》，对控制论这个学科进行了更具一般性的总结和发展，明确提出控制论“本质上是关于机器的功能和行为”，“控制论将‘所有可能的机器’视为自己的研究题材”，正如几何学将所有可能的形状作为研究题材，而不是特定的圆球或方块。

我们的小组展示，通过这本《控制论导论》，对控制论进行一次管中窥豹。

前言

什么是控制论？

维纳：（关于）动物和机器中控制和通信的科学

Or: 它是研究这样一类系统的科学，在这类系统中能量无关紧要，而信息及控制却非常重要。

控制论的用处

- 一套统一的词汇和概念
- 对复杂的系统，控制论给出统一研究方法

基本定义

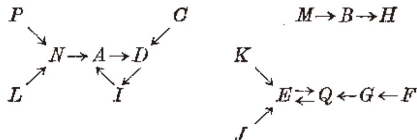
“我们认为某一事物所具有的种种性质，归根到底无非是给它的行为起些名字” -Horrick

- 差异
- 变换
- 封闭性
- 单值的
- 一一对应
- 多一变换

变换的表示

$T(n)$ 表示一个变换

研究一个原象在多次重复变换下的结果，用有向图的形式表示。



确定性机器

把行为与封闭单值变换相同的机器定义为确定性机器

我们不关心算子具体是什么，而只关心确定的变换，它只与变化的事实有关，而不涉及那些带有假设性的原因

机器与动态图所表示的变换完全对应时，则称变换是机器的标准表达式，机器是变换的具体化

任何现实的确定性机器或能动系统都对应一个封闭的单值变换

有输入的机器

对于同一种机器，从一种状态变到另一种状态的是机器的性能，而从一种变换到另一种变换的变化是性能的变化，这取决于输入的参数。这种机器称为有输入的机器或**变换器**。

耦合与反馈

耦合

将机器结合到一起，使每台机器对其他机器的影响只限于改变后者的输入，而不改变其性能（即变换）

将 P 与 Q 耦合，使 P 对 Q 有影响而 Q 对 P 无影响，称为 P 主制 Q

当 P 与 Q 相互影响时，称该系统有反馈

稳定性

不变量：平衡点（不动点），循环圈，稳定域

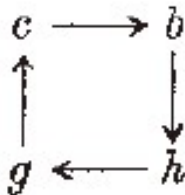
对一批状态說也会有这种现象，例如，設 T 是(不閉的)变换：

$$T: \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \\ \downarrow & & & & & & & \\ p & q & b & f & a & a & b & m \end{array}$$

它沒有平衡状态；但对 b 和 g 所組成的一批状态說，有这样特別的变换：

$$T: \begin{array}{cc} b & g \\ \downarrow & \\ g & b \end{array}$$

即是說， T 作用在这一批状态上并没有产生出新的状态。这样的一批状态对 T 来說是稳定的。



干扰，稳定平衡，不稳定平衡，随遇平衡

特大系统与黑箱

特大系统的概念黑箱的概念研究黑箱的方法：对黑箱进行不同的输入，记录黑箱的输出，变成一串含两个分量（输入、输出）的矢量表，称为登记表。

同构与同态

两个机器的标准表达式，如果存在一一变换，能将一个机器的状态（输入与输出）变为另一机器的状态，同时把一种表示式变为另一种表示式的，称两个机器同构。

同态：对于两个机器，存在多一变换，使得一个机器经过变换后与另一机器同构，则称较简单的那个机器是前者的同态象。

变异度

- 衡量机器可能状态的参数，常用对数表示；
- 状态是多种多样的，状态空间与基本事件空间类似；
- 矢量状态的变异度不会大于其每个分量的变异度之和；
对于单值变换的机器，变异度不会增加。

机器与变异度的传输

机器是信息传输的载体，信息传输伴随着变异度的改变。
例如，对下图的机器：

| ↓ | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>Q</i> | <i>C</i> | <i>C</i> | <i>A</i> | <i>B</i> |
| <i>R</i> | <i>A</i> | <i>C</i> | <i>B</i> | <i>B</i> |
| <i>S</i> | <i>B</i> | <i>D</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |

初始状态为 *A*，对 *QR* 编码得到 *CB*，对 *CB* 译码得到 *QR*；
但对 *BC* 就不能译码

多值变换下的变异度

推广单值变换的属性，使机器能从一个状态按照不同概率转移到其它状态, 变异度定义为事件的信息熵。

$$\text{变异度} := - \sum_i p_i \log p_i$$

可以看到，之前的变异度是在每个状态等可能出现时的特殊情况。

$$I_0 := - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$$

例：马尔可夫链

马尔可夫链

指一类事件，当前时刻要发生的事件只依赖于当前状态。

马氏链中，变异度定义为以信息熵按照稳定状态时各个状态的概率加权平均

| ↓ | 岸 | 水 | 石 |
|------|---------------|---------------|---------------|
| 岸 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 水 | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ |
| 石 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 熵： | 0.811 | 0.811 | 1.061 |
| 平衡比： | 0.449 | 0.429 | 0.122 |

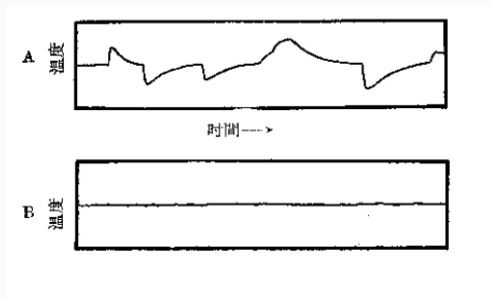
$$I = 0.811 * 0.449 + 1.061 * 0.429 + 1.061 * 0.122 = 0.842bit$$

以变异度为媒介，不同事物的不稳定程度可以相互比较

调节与控制

浅谈调节

- 调节作用堵塞了干扰源传向基本变量的变异度
- 例: 恒温淋浴设备



必须变异度

- D 和 R 进行游戏, R 在 D 之后做动作

| | | <i>R</i> | | |
|----------|---|----------|----------|----------|
| | | <i>α</i> | <i>β</i> | <i>γ</i> |
| <i>D</i> | 1 | <i>f</i> | <i>f</i> | <i>k</i> |
| | 2 | <i>k</i> | <i>c</i> | <i>f</i> |
| | 3 | <i>m</i> | <i>k</i> | <i>a</i> |
| | 4 | <i>b</i> | <i>b</i> | <i>b</i> |
| | 5 | <i>c</i> | <i>q</i> | <i>c</i> |
| | 6 | <i>h</i> | <i>h</i> | <i>m</i> |
| | 7 | <i>j</i> | <i>d</i> | <i>d</i> |
| | 8 | <i>a</i> | <i>p</i> | <i>j</i> |
| | 9 | <i>l</i> | <i>n</i> | <i>h</i> |

- 结局的变异度不能小于 $\frac{D\text{的变异度}}{R\text{的变异度}} = \frac{9}{3}$
- 只有变异度才能消灭变异度!

必须变异度率

- 若调节器 R 已给定, 则结局 E 的熵不小于干扰 D 的熵
- $H_R(E) \geq H_R(D)$
- 其他附加条件 (如噪声、复合干扰、调节的误差等) 都可以视作 R 的一部分

马尔可夫型机器

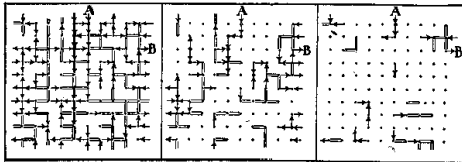
- 非确定性机器: 更加曲折但更加鲁棒地趋向平衡状态

| ↓ | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | 0.2 | 0.3 | 0.1 |
| <i>b</i> | 0.8 | 0.7 | 0.5 |
| <i>c</i> | · | · | 0.4 |

- 例: 捕蝇纸对于房间中苍蝇的作用

其他调节

- 特大系统: 系统 T 相对于调节器 R 来说很大, 怎么办?
- 1 约束



- 2 关注重复干扰的总结果
- 3 功率放大器

从控制论到计算机

控制科学（学科）& 计算机

控制科学和计算机是两门学科.

在隔壁，研究控制科学的学科是「自动化」。

Figure 1: 清华大学自动化专业本科课程

数学与自然科学必修课程

- 微积分A
- 线性代数
- 复变函数引论
- 随机数学与统计
- 数值分析与算法
- 大学物理B

学科基础课程

- 计算机语言及程序设计
- 电路原理
- 工程图学基础

主要的专业主修课程

- 数字电子技术基础
- 模拟电子技术基础
- 电子技术实验
- 数据结构
- 计算机网络与应用
- 信号与系统分析
- 运筹学
- 人工智能基础
- 模式识别与机器学习
- 自动控制理论
- 过程控制
- 电能变换原理与系统

- 智能传感与检测技术

有代表性的专业选修课程

- 智能机器人
- 数字图象处理
- 系统工程导论
- 智能网联系统导论
- 工业智能系统
- 导航、制导与控制
- 生物信息学概论
- 交叉项目综合训练A

此外，学校和院系均设置了大量选修课程，学生可在全校自由选课。

「控制论」与「控制理论」是一回事吗？

控制论 & 控制理论

「控制论」与「控制理论」是一回事吗？

控制论 (Cybernetics) 与控制理论 (Control Theory) 是两个不同的概念。

控制论将控制系统作为一个在整体概念进行研究，而控制理论着重于信息因素，研究系统中各部分的相互作用以及系统的结构。

控制论 & 控制理论

「控制论」与「控制理论」是一回事吗？

控制论 (Cybernetics) 与控制理论 (Control Theory) 是两个不同的概念。

控制论将控制系统作为一个在整体概念进行研究，而控制理论着重于信息因素，研究系统中各部分的相互作用以及系统的结构。

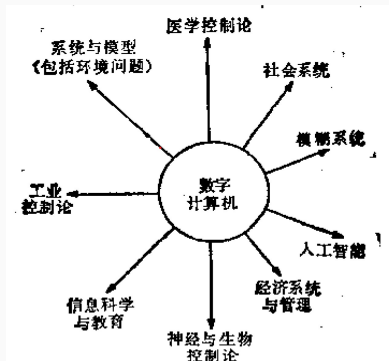
控制论和计算机的关系

为什么控制论和计算机有关系？

控制论和计算机的关系

为什么控制论和计算机有关系？

- 计算机 → 控制论：新方向，新思路。
- 控制（理）论 → 计算机：并行、动态分支预测、可编程控制器



强化学习 & 最优控制

强化学习和控制理论有着很深的联系。

强化学习 & 最优控制

强化学习和控制理论有着很深的联系。

- 都是研究利用过去的信息来强化未来操纵的动态系统。

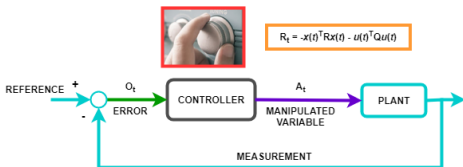
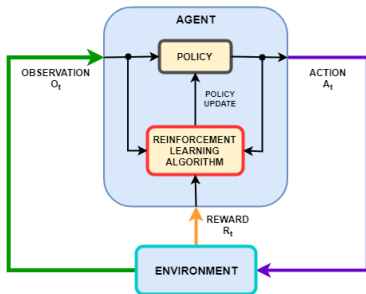
强化学习 & 最优控制

强化学习和控制理论有着很深的联系。

- 都是研究利用过去的信息来强化未来操纵的动态系统。
- 目的都是设计一个系统，其能够使用高度结构化的感知信息，做出规划和控制以适应环境变化，同时在遇到新场景时做好保障。因此，可以使用强化学习的思想和算法来解决控制系统的问题。

强化学习 & 最优控制

(上图是强化学习，下图是控制器，线的颜色相同的部分是对应的关系)



强化学习 & 最优控制

以最基本的线性二次型控制器为例：¹

Introduction

➤ Reinforcement Learning

$$\min/\max E[\sum_{t=0}^N R_t(x_t, u_t)]$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } x_{t+1} &= f_t(x_t, u_t, e_t) \\ u_t &= \pi_t(\tau_t) \end{aligned}$$

R_t is the **cost (reward)**

f_t is the **state-transition function**

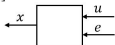
$\tau_t = (u_1, \dots, u_{t-1}, x_0, \dots, x_t)$ is the **trajectory***

$\pi_t(\tau_t)$ is the **control policy**

➤ Linear Quadratic Regulator (LQR)

$$\min E[\sum_{t=0}^N x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t]$$

$$\text{s.t. } x_{t+1} = A x_t + B u_t + e_t$$



$$u_t = -K x_t = -R^{-1} B^T P x_t$$

Algebraic Riccati Equation (ARE)

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$$

➤ Unknown dynamics

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, e_t)$$



State-transition function f_t is **unknown (A or B)**

* **trajectory**: a sequence of states and control actions generated by a dynamic system

知乎 @佛系智能化

¹<https://www.zhihu.com/question/401591393/answer/1285670063>

控制论应用举例

接下来是控制论应用的一些例子。

网络控制

网络控制是一个很大的领域，涉及许多主题，包括路由、数据缓存和电源管理。这些控制问题的一些特点使它们非常具有挑战性：

网络控制

网络控制是一个很大的领域，涉及许多主题，包括路由、数据缓存和电源管理。这些控制问题的一些特点使它们非常具有挑战性：

- 系统的超大规模：Internet 可能是人类所建立的最大的反馈控制系统。
- 控制问题的分散化本质：必须快速做出局部决策，并且仅基于局部信息。
- 其它：比如对服务质量的不同要求等。

网络控制

网络控制是一个很大的领域，涉及许多主题，包括路由、数据缓存和电源管理。这些控制问题的一些特点使它们非常具有挑战性：

- 系统的超大规模：Internet 可能是人类所建立的最大的反馈控制系统。
- 控制问题的分散化本质：必须快速做出局部决策，并且仅基于局部信息。
- 其它：比如对服务质量的不同要求等。

网络控制下一阶段将涉及更多的物理环境和对网络控制的增加使用，需要通信、计算和控制的融合。

网络控制

网络控制是一个很大的领域，涉及许多主题，包括路由、数据缓存和电源管理。这些控制问题的一些特点使它们非常具有挑战性：

- 系统的超大规模：Internet 可能是人类所建立的最大的反馈控制系统。
- 控制问题的分散化本质：必须快速做出局部决策，并且仅基于局部信息。
- 其它：比如对服务质量的不同要求等。

网络控制下一阶段将涉及更多的物理环境和对网络控制的增加使用，需要通信、计算和控制的融合。

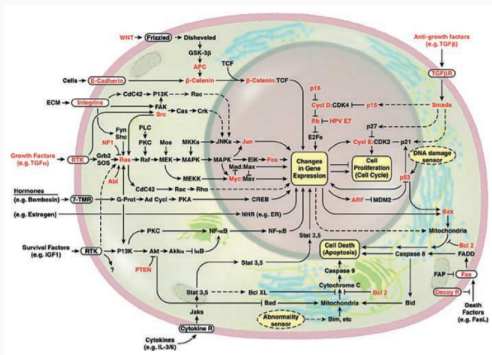
另一个可能的发展方向：目前的网络控制系统几乎普遍基于同步、定时系统来避免数据丢失，我们是否可以开发一个理论和实践控制系统，在一个分布式的、异步的、基于分组的环境中运行，这将在许多情景下更好地适应我们的需求。

生物控制

生物学正变得越来越容易被工程中常用的方法所使用：数学建模、系统理论、计算和合成的抽象方法。控制原理是生物工程中许多关键问题的核心，并将在该领域的未来发挥作用。下图就是一个生物控制网络逆向（并最终向前推进）工程。

生物控制

生物学正变得越来越容易被工程中常用的方法所使用：数学建模、系统理论、计算和合成的抽象方法。控制原理是生物工程中许多关键问题的核心，并将在该领域的未来发挥作用。下图就是一个生物控制网络逆向（并最终向前推进）工程。



致谢

致谢

我们的团队（排名不分先后）：

| | | |
|-----|-----|-----|
| 王泽州 | 金皓宇 | 陈齐治 |
| 陈思元 | 李鸿泽 | 赵晨琪 |
| 邓朝萌 | 谭开云 | 施朱鸣 |

感谢老师们和助教们的帮助！
祝大家期中顺利，谢谢聆听！



*2

²组长邮箱: shizhuming@pku.edu.cn

LaTeX 代码开源在<https://github.com/ShiZhuming/pku-cybernetics>