Домашняя работа №7

Шибаев Александр Б05-222

Апрель 2023

1 Первая задача

1. б $\Rightarrow$ а
   Предположим противное. Пусть в графе есть мост. Пусть мост соединяет вершины u и v. По определению моста, удаление этого ребра из графа делает его несвязным, то есть, если удалить это ребро, то вершины u и v будут лежать в разных компонентах связности. Значит, что не не будет существовать ни одного пути из u в v. Но сколько тогда было путей между ними в исходном графе? Очевидно один путь, который состоял из самого моста. Значит, мы нашли две вершины, между которыми есть только один путь, что является противоречием, следовательно, а) верно.

2. в $\Rightarrow$ б
   Очевидно, что если у нас есть цикл между любыми двумя вершинами, то тогда мы можем разбить цикл на две "дуги"и таким образом построить два реберно-простых пути.

3. г $\Rightarrow$ в
   Рассмотрим две вершины a и b и докажем, что между ними есть цикл. Пусть c - соседняя вершина либо вершины b, либо вершины a, отличная от другой. Понятно, что такая найдется, поскольку граф связный и состоит минимум из трех вершин. Скажем, пусть такая вершина нашлась у b. Тогда имеет ребро $b - c$ и вершину a, которые принадлежат какому-то циклу, значит, a и b принадлежат какому-то циклу.

4. д $\Rightarrow$ г
   Точно так же как и в прошлом пункте дополним конструкцию так, чтобы получилась конструкция из условия - если у нас есть какое-то ребро и вершина, то проведем ребро из одиночной вершины. Понятно, что так всегда можно сделать, поскольку у вершины найдется какой-то сосед. Если один из соседей равен вершине из нашего ребра, то, очевидно, наша конструкция сама образует цикл длины 3, иначе у нас имеются два ребра, а между ними, исходя из пункта д), всегда есть цикл, значит, и между нашими вершинами тоже есть этот же самый цикл.

5. а $\Rightarrow$ д
   Рассмотрим два произвольных ребра $u - v$ и $u - v'$. Разобьем граф на два непересекающихся множества A и B, такие что $u \in A$, $v \in B$. Тогда у нас возможны две ситуации: наше ребро либо полностью лежит в компоненте A (либо в компоненте B), либо вершины $u - v'$ лежат в разных множествах. Поскольку граф связный, то мы можем попасть из любой вершины в любую. Значит, между u, u' и v, v' у нас есть пути. Тогда нетрудно понять, что если u' и v' принадлежат разным множествам, то цикл образуется очевидным образом - $u - u' - v' - v - u$, а иначе необходимо сказать,

что, поскольку в графе нет мостов, то между множествами A и B существует как минимум еще одно ребро, скажем, $u''\ \ v''$. Тогда сам цикл тоже предёявить довольно легко - это будет цикл $u - u' - v' - u'' - v'' - v - u$ либо $v - u' - v' - v'' - u'' - u - v$ в зависимости от того, в каком из множеств A или B лежит второе ребро

2 Вторая задача

1. а $\Rightarrow$ в
   Понятно, что если в графе нет точек сочленения, то и мостов в нем быть не может, поскольку вершины моста являются точками сочленения. Но если в графе нет мостов, то любые две вершины принадлежат некоторому циклу по доказанному в задаче 1.

2. в $\Rightarrow$ б
   Понятно, что если между двумя вершинами есть цикл, то можно рассмотреть две "ветки"этого цикла, которые не пересекаются. Тогда это и будут два не пересекающиеся по вершинам пути.

3. б $\Rightarrow$ г
   Из пункта б данной задачи очевидно следует пункт б задачи 1, из которой, в свою очередь, следует пункт г задачи 1, который совпадает с тем, что надо доказать.

4. г $\Rightarrow$ д
   См. предыдущую задачу.

5. д $\Rightarrow$ а
   Докажем от противного - пусть в графе есть какая-то точка сочленения. Тогда выберем два ребра, исходящие из этой точки. Поскольку искомая точка - точка сочленения, то тогда при удалении этой точки граф распадется на две компоненты связности, однако из этого следует, что не существует ни одного ребра между первой компонентной и второй, значит, между выбранными ребрами каждый цикл, который можно построить, будет проходить через точку сочленения дважды, однако тогда цикл не будет вершинно-простой, следовательно, мы получили противоречие.

3 Третья задача

Разобьем граф на компоненты реберной двусвязности. Получим дерево компонент. Докажем, что внутри каждой компоненты двусвязности все ребра должны быть покрашены в различные цвета. Почему это так? Пусть у нас есть два ребра, которые покрашены в один цвет, при этом они лежат в одной компоненте. Но что тогда можно сказать про циклы, проходящие через эти два ребра? Очевидно, что найдется хотя бы один такой цикл (по условию пункта д) задачи 1. Значит, ответ для одной компоненты двусвязности - это количество ребер в ней. При этом также очевидно, что ни один мост не содержится в цикле (действительно, пусть это так - тогда дерево компонент получится не деревом, а графом с циклом, значит, в нем можно выделить еще одну компоненту), значит, все мосты можно покрасить в один цвет. Таким образом становится ясно, что ответ $m - s + 1$, где s - количество мостов. Понятно, что количество мостов мы умеем искать за $O(n + m) \Rightarrow$ задача решается за $O(n + m)$.

4 Четвертая задача

Разобьем граф на компоненты реберной двусвязности. Получим дерево компонент. Докажем, что внутри всех компонент связности все ребра можно ориентировать. Выберем какую-то вершину, которая является вершиной моста, идущего от этой компоненты (или произвольную, если мостов нет). Построим гамильтонов цикл для этой компоненты. Почему это можно сделать? Докажем конструктивно: поскольку для любых двух вершин u, v и любого ребра e найдётся путь из u в v, проходящий через ребро e (пункт е) задачи 1), то на каждом шаге просто будем добавлять очередную вершину в цикл текущей компоненты, таким образом обойдя все вершины. Таким образом каждая компонента двусвязности будет содержать только ориентированные ребра, а все мосты останутся неориентированными. Понятно, что количество мостов мы умеем искать за $O(n + m) \Rightarrow$ задача решается за $O(n + m)$.

5 Пятая задача

Составим обычный граф для реализации $2-SAT$. Запустим из каждой вершины алгоритм $2 - SAT$, фиксируя переменную со значениями 0 и 1. Если оба раза достижима истина, то тогда значение не фиксировано, иначе - фиксировано. Асимптотика: $O(n * (n + m))$.