МФТИ
Алгоритмы и структуры данных, весна 2023
Домашнее задание №06. Динамическое программирование

**1.** (1 балл) На прямой дощечке вбито $n$ гвоздиков. Любые два гвоздика можно соединить ниточкой (но нельзя соединять гвоздик сам с собой). Требуется соединить некоторые пары гвоздиков ниточками так, чтобы к каждому гвоздику была привязана хотя бы одна ниточка, а суммарная длина всех ниточек была минимальна. Асимптотика: $O(n \log n)$.
**2.** (2 балла) Нужно перевезти $n$ объектов, стоящих в ряд, их веса равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Корабль за одну переправу может перевезти лишь грузов суммарного веса не больше $t$. В каждый момент времени грузить на корабль разрешается только первый или последний объект, который ещё не был погружен. Иными словами, за одну переправу можно перевезти некий префикс и некий суффикс необработанных объектов. За $O(n^2)$ определите минимальное число переправ корабля для перевозки всех объектов.
**3.** (3 балла) Предложите метод решения задачи о рюкзаке с восстановлением ответа, использующий $O(W\sqrt{n})$ памяти и $O(nW)$ времени. Здесь $n$ — число объектов, а $W$ — вместимость рюкзака.
**4.** (4 балла) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые положительные числа, причём $a_i \geqslant 2a_{i-1}$ для всех $i \geqslant 2$. Требуется найти количество способов представить число $W$ в виде суммы слагаемых из мультимножества $(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots, a_n, a_n)$, то есть каждое число можно брать не более двух раз. Порядок слагаемых в сумме не учитывается. Покажите, как можно найти ответ за $O(K \log K + F_{\log_2(W/K)})$ для произвольного $K$. Здесь $F_k$ — $k$-е число Фибоначчи. Найдите оптимальное значение $K$ и время работы для $W = 10^{18}$.
**5.** (3 балла) Задан массив $a(0), \ldots, a(2^n-1)$. Определим $a'(mask) = \sum\limits_{submask \subseteq mask} a(submask)$. Докажите, что следующий код решает эту задачу на месте (результат сохраняется в исходном массиве).

```
void magic(vector<int>& a) {
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int mask = 0; mask < (1 << n); ++mask)
            if (!bit(mask, i))
                a[mask + (1 << i)] += a[mask];
}
```

**6.** (1 балл) Пусть в задаче о рюкзаке предметы не имеют стоимостей, то есть характеризуются только весами. Нужно найти максимальный суммарный вес предметов, который можно уместить в рюкзак вместимости $W$. Решите задачу за $O(nW/w)$, где $w$ — длина машинного слова (обычно 32 или 64).
**7.** На гранях шестигранного кубика могут располагаться числа от 1 до $n$, повторы не запрещены. Два кубика считаются различными, если на кубиках различны мультимножества расположенных чисел. Скажем, что один кубик *превосходит* другой, если с вероятностью, строго большей $\frac{1}{2}$, при случайном равномерном бросании обоих кубиков на первом выпадает большее число. Назовём тройку кубиков *хорошей*, если первый кубик превосходит второй, второй превосходит третий, а третий превосходит первый. Определите число хороших упорядоченных троек кубиков за
а) (2 балла) $O(n)$;
б) (1 балл) $O(\log n)$;
в) (2 балла) $O(1)$.
**8.** (4 балла) Дан набор строк $s_1, \ldots, s_n$ из маленьких латинских букв суммарной длины $S = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|$. С каждой строкой ассоциирована стоимость $a_1, \ldots, a_n$. *Стоимостью* строки $t$ из маленьких латинских букв назовём $\sum\limits_{i=1}^{n} cnt(s_i, t) \cdot a_i$, где $cnt(s_i, t)$ — количество вхождений строки $s_i$ в строку $t$ (вхождения могут перекрываться). По числу $l$ найдите максимально возможную стоимость строки среди всех строк длины $l$. Асимптотика: $O(S^3 \log l)$.