Домашняя работа №8

Шибаев Александр Б05-222

Апрель 2023

1 Первая задача

Давайте запустим Флойда, который посчитает всю динамику(это мы можем сделать с ассимптотикой $O(n^3)$). Тогда осталось понять что такое ответ. В динамике Флойда хранится минимальное расстояние между двумя вершинами, то в вершинах $dp[i][j]$ будут содержаться пути из вершины в саму себя, что и есть цикл. Поэтому нам нужен минимум по всем посчитанным динамикам. Ассимптотика очевидно $O(n^3)$

2 Вторая задача

Давайте заведем фиктивную вершину и соединим все остальные с этой ребрами весом 0. Запустим из этой фиктивной вершины алгоритм Форда-Беллмана. Теперь для каждой пары вершин из ребер проверим, равна ли разность между кратчайшими расстояниями от фиктивной вершины весу ребра между этими двумя вершинами. Очевидно, что если мы найдем хотя бы один такой случай, то мы нашли цикл между двумя вершинами, причем вес ребра, соединяющего эти две вершины равен минус сумме ребер на пути, соединяющем эти две вершины и не содержащем само ребро. Значит мы нашли цикл с суммой 0. Ассимптотика равна ассимтотике Форда-Беллмана, т.е. $O(n \cdot m)$

3 Третья задача

Будем решать бинпоиском по ответу: можем ли мы найти цикл со средним весом x?. Давайте во всем графе уменьшим вес ребер на x и с помощью например Флойда поймем, есть ли в графе отрицательный цикл. Ассимптотика: $O(\log(\frac{C}{\epsilon})$ - итераций бинпоиска и $O(n \cdot m)$ - поиск цикла $\Rightarrow$ O(n $\cdot$ $m \cdot \log(\frac{C}{\epsilon}))$

4 Четвертая задача

(а) В такой модификации работает Дейкстра - на этапе релаксации необходимо просто пересчитывать функцию перехода как максимум, и алгоритм будет работать корректно. Но Дейкстра работает только с положительными весами - поэтому давайте прибавим к каждому ребру inf, а из получившегося ответы вычтем inf. Таким образом мы нашли ответ за $O(m \cdot \log(n)$

(б) За $O(n + m)$ BFSом мы сможем проверить существование пути. Если его нет, то сразу выходим. Теперь воспользуемся алгоритмом Камерини, который строит миностов на $O(n + m)$, причем его максимальное ребро минимально. Давайте построим миностов на двух графах - сначала на графе без первой вершины, потом на графе без второй. Тогда мы узнаем значение миностова для каждого случая, и ответом будет максимальное из этих значений, т.к. путь существует и по выбору миностова алгоритм будет оптимальный.