Домашняя работа №1

Шибаев Александр

Сентябрь 2022

1 Первая задача

Пусть $m = \log_2(n)$. Тогда $T(n) = T(2^m) = S(m) = 3S(\frac{m}{2}) + m$.

$$S(m) = 3S(\frac{m}{2}) + m$$

Получаем a = 3, b = 2 $\Rightarrow$ по Мастер-теореме:
При $\epsilon = \log_2(\frac{3}{2})$: $f(m) = O(m^{\log_2(3)-\log_2(\frac{3}{2})})$, т.к. $f(m) = m$.
А значит $S(m) = \Theta(m^{\log_2(3)})(n) = \Theta(m^{\log_2(3)}) = \Theta(3^{\log_2(log_2(n))})$.
Ответ: $T(n) = \Theta(3^{\log_2(log_2(n))})$**.**

2 Вторая задача

Докажем, что $T(n) = O(n\log_2^2 n)$ и $T(n) = \Omega(n\log_2^2 n)$
1. Предположим, что $T(n) = O(n\log_2^2 n) \Rightarrow \exists C_1 > 0 : T(n) \leq C_1 n\log_2^2 n$. Докажем по индукции:
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log_2(\frac{n}{2}) \leq 2C_1(\frac{n}{2})\log_2^2(\frac{n}{2}) + n\log_2 n \leq ?C_1 n\log_2^2 n$
$C_1\log_2^2(\frac{n}{2}) + \log_2 n \leq ?C_1 log_2^2(n)$
$C_1(log_2^2(n) - \log_2^2(\frac{n}{2})) \geq ?\log_2 n$
$C_1(\log_2(\frac{n^2}{2})) \geq ?\log_2 n$
$C_1(\log_2(n^2) - 1) \geq ?\log_2 n$ Тогда при $C_1 = 1 : 2\log_2(n) - 1 \geq log_2(n)$, что очевидно верно при $n \geq 2 \Rightarrow T(n) = O(n\log_2^2 n)$
2. Докажем теперь, что $T(n) = \Omega(n\log_2^2 n)$:
Предположим, что $T(n) = \Omega(n\log_2^2 n) \Rightarrow \exists C_2 > 0 : T(n) \geq C_2 n\log_2^2 n$. Докажем по индукции:
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\log_2(\frac{n}{2}) \geq 2C_1(\frac{n}{2})\log_2^2(\frac{n}{2}) + n\log_2 n \geq ?C_2 n\log_2^2 n$
$C_2\log_2^2(\frac{n}{2}) + \log_2(n) \geq ?C_2\log_2^2(n)$
$C_2(\log_2^2(n) - \log_2^2(\frac{n}{2})) \leq ?\log_2(n)$
$C_2\log_2(\frac{n^2}{2})) \leq ?\log_2(n)$
$C_2(\log_2(n^2) - 1) \leq ?\log_2 n$
$C_2(2\log_2 n - 1) \leq ?\log_2 n$ Тогда при $C_2 = \frac{1}{2} : \log_2(n) - \frac{1}{2} \leq \log_2(n)$, что очевидно верно при $n \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow T(n) = \Omega(n\log_2^2 n)$.
Итого мы доказали, что $T(n) = O(n\log_2^2 n)$ и $T(n) = \Omega(n\log_2^2 n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n\log_2^2 n)$
Ответ: $T(n) = \Theta(n\log_2^2 n)$**.**

3 Третья задача

Заведем два массива:

$$mins[n] : mins[i] = \min\{a[k]\}_{k=0}^{i-1}$$
$$maxs[n] : maxs[i] = \max\{a[k]\}_{k=n-i-1}^{n-1}$$

Для этого достаточно два раза пройти по массиву - для массива $mins$ слева направо и поддерживать минимум на префиксе, для $maxs$ справа налево и поддерживать максимум на суффиксе. Получаем предпосчет за $O(n)$. И тогда ответ: $\max\{maxs[n-i-1]-mins[i]\}_{i=0}^{n-1}$. Этот максимум мы очевидно считаем на n, поэтому итоговая ассимптотика $O(n)$.
Допустим, что таким способом мы не нашли ответ. А ответ $\{l, r\}$, тогда $a[r] - a[l]$ - максимальная. Т.е. если взять любые $i < l$ и $j > r$, то $a[j] - a[i] < a[r] - a[l]$. Значит $a[l]$ - минимум на префиксе $a[0]...a[l]$(иначе можно взять число $k < l : a[j] < a[l]$ на этом префиксе и получим
$a[r] - a[l] < a[r] - a[k]$ - противоречение. Аналогично $a[r]$ - максимум на суффиксе $a[l+1]...a[n-1]$. Поэтому $a[r] - a[l] = maxs[n-1-l] - mins[l]$. А значит при подсчете $\max\{maxs[n-i-1] - mins[i]\}_{i=0}^{n-1}$ мы не можем пропустить $maxs[n-1-l] - mins[l]$ $\Rightarrow$ предложенным способом мы найдем ответ.

4 Четвертая задача

Мы умеем прибавлять к отрезку константу. Заметим, что прибавить к отрезку арифметическую прогрессию вида $b + id \Leftrightarrow$ прибавить b к отрезку изходного массива и прибавить фиксированное число d к отрезку массива разностей. Ассимптотика такого решения очевидно $O(n+q)$

5 Пятая задача

Будем искать такой момент бинпоиском.
Давайте поддерживать инвариант $a[l] = 0$, $a[r] = 1$. Тогда $m = \frac{(r+l)}{2}$ и если $a[m] == 0$, то $l = m$, иначе $r = m$. И так мы действуем, пока $r - l\ != 1$. В конце получим $r = l + 1$ и $a[r] = 1$, $a[l] = 0$. Т.к. мы поддерживаем инвариант, то всегда на отрезке $[r, l]$ будет хотя бы 1 ноль и хотя бы 1 единица $\Rightarrow$ там точно есть два соседних различных элемента.
Ассимптотика очевидно $O(\log_2(n))$ т.к. это бинпоиск.

6 Шестая задача

Будем решать эту задачу аналогично задаче 3.

$$max_a[n] : max_a[i] = \max\{a[k]\}_{k=0}^{i-1}$$
$$max_b[n] : max_b[i] = \max\{b[k]\}_{k=m-i-1}^{m-1}$$

И тогда ответ - $\max\{max_a[n-i-1]+max_b[i]\}_{i=0}^{\min\{n,m\}}$ Предподсчет max_a и max_b за $O(n+m)$, и подсчет максимума за $O(\min\{n, m\}) \Rightarrow$ итоговая сложность - $O(n+m)$.
Доказательство работы такого алгоритма аналогично аналогичное доказательству алгоритма в задаче 3.

7 Седьмая задача

Пусть $i = 0, j = m - 1$. Тогда будем смотреть на сумму $a[i] + b[j]$:
- Если $a[i] + b[j] > k$: $j = j - 1$ т.к. нам нужно уменьшать сумму
- Если $a[i] + b[j] < k$: $i = i + 1$ т.к. нам нужно увеличивать сумму
- Если $a[i] + b[j] == k$: $j = j - 1$ т.к. нам нужно уменьшать сумму

Ассимптотика очевидно $O(n + m)$

8 Восьмая задача

Для удобства инвертируем исходную таблицу - нули сделаем единицами, а единицы нули. (Это можно сделать на этапе ввода таблицы). И будем теперь искать максимальный прямоугольник из единиц.
Исходная инвертированная таблица: $a[n][n]$
Заведем вспомогательную таблицу $heights[n][n]$: $heights[i][j]$ высота максимального столбца из единичек начинающийся в ячейке (i, j) т.е. если $height[i][j] = 3$, то $a[i][j] = a[i-1][j] = a[i-2][j] = 1$, а $height[i-3][j] = 0$, что идет выше нам не важно, главное, что $height[i-3][j] = 0$. Тогда таблица пересчитывается по следующей формуле:

$$heights[i][j] = (heights[i-1][j] + 1) * a[i][j]$$

Если $i == 0$, то $heights[i][j] = a[i][j]$. И весь предподсчет мы можем сделать за $O(n^2)$.
Мы умеем решать задачу по поиску максимального прямоугольника в гистограмме за $O(n)$. Так давайте считать, что основание - это i строчка в нашей таблице. Переберем все $i = 0...(n-1)$ и для каждой строчки найдем максимальный прямоугольник (т.к. максимальный прямоугольник, основание которого лежит на i-ой строчке., а сам прямоугольник лежит выше i-ой строчки. Таким образом мы и найдем максимальный прямоугольник из единиц во всей таблице: рассмотрим нижнее основание этого прямоугольника, оно лежит в строчке j, тогда когда мы будем на j-ой строчке(при работе нашего алгоритма), то мы найдем максимальный прямоугольник, среди всех прямоугольников, основания которых лежат на j-ой строчке. Если это не наш прямоугольник, то либо есть два прямоугольника с одинаковой площадью (тогда все норм), либо мы нашли прямоугольник с площадью, большей, чем максимальная - противоречие. Также очевидно, что мы рассматриваем только прямоугольники из единиц, т.е. неправильный прямоугольник мы не получим.
Итого мы перебираем все n строк и в каждой за $O(n)$ находим максимальный прямоугольник. $\Rightarrow$ общая ассимптотика $O(n^2)$.