МФТИ

Алгоритмы и структуры данных, весна 2023 Домашнее задание №09. Остовы, паросочетания, потоки

Всюду в этом листке (если не оговорено иное) n означает количество вершин в графе, а m — количество рёбер.

- **1.** (1 балл) За O(n+m) найдите произвольные $\frac{7}{8}n$ рёбер, которые можно дополнить до минимального остова.
- **2.** (3 балла) В двудольном графе вершины обеих долей пронумерованы последовательными целыми числами, начиная с единицы. Для каждой вершины i левой доли задан отрезок $[l_i, r_i]$. Это означает, что i соединена со всеми вершинами правой доли, номера которых попадают в отрезок $[l_i, r_i]$. Предложите алгоритм поиска максимального паросочетания в таком графе за $O(n \log n)$.
- 3. (3 балла) Докажите, что если G ациклический транзитивный орграф, то наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить все вершины G, равно размеру самого длинного пути в G.
- **4.** Игра в города на неориентированном графе G определяется следующим образом. Изначально фишка расположена в одной из вершин (назовём её стартовой). Игроки ходят по очереди, на каждом ходу нужно сдвинуть фишку вдоль любого исходящего ребра в вершину, в которой фишка ещё ни разу не была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
- а) (3 балла) Докажите, что первый выигрывает, если и только если стартовая вершина лежит во всех максимальных паросочетаниях.
- б) (2 балла) Пусть G двудольный. Как за $O(n^2m)$ для всех вершин сразу определить, является ли она выигрышной, если взять её в качестве стартовой? Как сделать то же за O(nm)?
- 5. (2 балла) Дан ориентированный граф. Найдите в нём (или определите, что так сделать нельзя) некоторое множество циклов, которые попарно не пересекаются, но покрывают всё множество вершин. Цикл из одной вершины не считается циклом (а из двух считается). Асимптотика: O(nm). Указание: раздвойте вершины.
- **6.** (2 балла) Пусть G двудольный граф. За суммарное время O(nm) определите для каждого ребра, верно ли, что оно
 - а) может;
 - б) обязано;
 - в) не может

лежать в максимальном паросочетании.

- 7. (4 балла) В прямоугольной таблице $n \times m$ некоторые клетки заблокированы. Определите, можно ли разбить оставшиеся клетки на циклические маршруты длины хотя бы 3 (соседними клетками считаются разделяющие сторону)? Все неудалённые клетки должны участвовать ровно в одном маршруте ровно один раз. Начало каждого маршрута должно совпадать с его концом. Выберите оптимальный алгоритм и оцените его асимптотику как можно точнее.
- 8. (2 балла) В графе G несколько коровок хотят попасть из вершины 1 в вершину n. Вершины графа (кроме 1-й и n-й) соответствуют кочкам в болоте, поэтому они весьма нестабильны. В целях безопасности каждую кочку может посетить не более одной коровы. Определите максимальное количество коровок, которые смогут переправиться через болото. Выберите оптимальный алгоритм и оцените его асимптотику как можно точнее.
- 9. (5 баллов) Мальчик Вася любит играть в игры и танцевать. В каждый из n ближайших дней он может выбрать, что он будет делать: играть или танцевать. Если он играет в i-й день, то он получается удовольствие a_i , а если танцует b_i . Мама Васи накладывает дополнительное ограничение: среди любых k подряд идущих дней должно быть хотя бы x дней, когда Вася играет, и хотя бы y дней, когда Вася танцует. Помогите Васе выполнить все требования, максимизировав удовольствие. Асимптотика: $O(n^3)$.