

1. (5 баллов) В магазине  $n$  типов футболок,  $i$ -й тип имеет целочисленную стоимость  $1 \leq c_i \leq C$  и качество  $q_i$  (можно считать, что футболок каждого типа бесконечное число). В магазин приходят  $k$  покупателей,  $j$ -й из которых обладает целочисленной денежной суммой  $0 \leq b_j \leq C$ . Каждый покупатель придерживается следующей стратегии: пока есть деньги, купить самую дешёвую футболку среди тех футболок лучшего качества, которые он ещё не покупал (точнее, тип которых он ещё не покупал), но ещё может себе позволить. В конце всех покупок сообщите количество купленных футболок каждым покупателем. Асимптотика:  $O(n \log n + n \log k + k \log k \log C)$ .
2. (1 балл) Докажите, что не существует такой архитектуры (реализации) дерева поиска (основанного на сравнениях), в которой запрос добавления элемента осуществлялся бы за  $O(1)$  (пусть даже амортизированно).
3. (1 балл) Гарри и Волан-де-Морт попали в министерство магии, в котором находится бесконечно много комнат, занумерованных последовательными натуральными числами, начиная с 1. Происходит  $q$  действий: а) либо Волан-де-Морт уничтожает дверь, которая в данный момент имеет некоторый номер, тогда все комнаты с большими номерами уменьшают свои значения на единицу; б) либо Гарри Поттер смотрит на дверь с некоторым номером. На каждое действие второго типа выведите номер этой комнаты в исходной нумерации, до уничтожения каких-либо дверей. Асимптотика:  $O(q \log q)$ .
4. (2 балла) Собака находится в точке 0, а миски с едой расположены в точках  $1, 2, \dots, n$ . Известно, что содержимое миски в точке  $i$  можно съесть в момент времени  $t_i$  или в любой более поздний (еда должна остыть). Собака за одну секунду может переместиться вправо на одну позицию или остаться ждать в текущей позиции. Миски собака опустошает мгновенно. Определите максимальное возможное количество мисок, которые может съесть собака, если она ограничена  $T$  секундами. Асимптотика:  $O(n \log n)$ .