

**1. (2 балла) Для получения полного балла за задачу достаточно доказать эквивалентность любых четырёх условий, среди которых будут а) и б).** Пусть  $G$  — связный граф хотя бы на трёх вершинах. Здесь все циклы и пути подразумеваются **рёберно-простыми**. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- а) в графе  $G$  нет мостов;
- б) между любыми двумя вершинами есть два не пересекающихся по рёбрам пути;
- в) любые две вершины принадлежат некоторому циклу;
- г) любая вершина и любое ребро принадлежат некоторому циклу;
- д) любые два ребра принадлежат некоторому циклу;
- е) для любых двух вершин  $u, v$  и любого ребра  $e$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , проходящий через ребро  $e$ ;
- ё) для любых двух вершин  $u, v$  и любого ребра  $e$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , не проходящий через ребро  $e$ ;
- ж) для любых трёх вершин  $u, v, w$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , проходящий через  $w$ .

**2. (2 балла) Для получения полного балла за задачу достаточно доказать эквивалентность любых четырёх условий, среди которых будут а) и б).** Пусть  $G$  — связный граф хотя бы на трёх вершинах. Здесь все циклы и пути подразумеваются **вершинно-простыми**. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- а) в  $G$  нет точек сочленения;
- б) между любыми двумя вершинами есть два не пересекающихся по (промежуточным) вершинам пути;
- в) любые две вершины графа  $G$  принадлежат некоторому циклу;
- г) любая вершина и любое ребро принадлежат некоторому циклу;
- д) любые два ребра принадлежат некоторому циклу;
- е) для любых двух вершин  $u, v$  и любого ребра  $e$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , проходящий через ребро  $e$ ;
- ё) для любых трёх вершин  $u, v, w$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , проходящий через  $w$ ;
- ж) для любых трёх вершин  $u, v, w$  найдётся путь из  $u$  в  $v$ , не проходящий через  $w$ .

**3. (2 балла) Дан связный неориентированный граф. Нужно раскрасить все его рёбра таким образом, чтобы в любом вершинно-простом цикле цвета всех рёбер были попарно различны. Найдите минимальное необходимое число цветов. Асимптотика:  $O(n + m)$ .**

**4. (2 балла) Дан связный неориентированный граф  $G$ . Нужно ориентировать как можно больше его рёбер, так чтобы по-прежнему из каждой вершины был путь в каждую. Асимптотика:  $O(n + m)$ .**

**5. (1 балла) Пусть  $\varphi$  — формула в виде 2-КНФ с  $n$  переменными и  $m$  скобками. За  $O(n \cdot (n + m))$  определите для каждой переменной верно ли, что её значение одинаково во всех выполняющих наборах  $\varphi$ . Иными словами, обязательно ли значение переменной фиксировано, если  $\varphi = 1$ ?**