???-?????

集合

定义

集合(集)是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素(元)。通常用大写拉丁字母A, B, C……表示集合，用小写拉丁字母a, b, c……表示集合中的元素。 ## 集合与元素的关系 如果a是集合A的元素，就说a属于A，记作a∈A；如果a不是集合或的元素，就说a不属于A，记作a∉A。 ## 集合的种类 若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集。 ## 集合的表示法 ### 列举法 把集合的全体元素一一列举出来表示，例如，由元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的集合A，可表示成$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。 ### 描述法 若集合M是由具有某种性质P的元素x的全体所组成的，就可表示成$M = \{x|xP\}$。如集合B是方程$x^2 - 1 = 0$的解集，就可表示成$B = \{x|x^2 - 1 = 0\}$ ## 几种常见数集 对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上”*”来排除0的集，标上”+“来表示该数集内排除0与负数 - 全体非负整数(自然数) $N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ - 全体正整数 $N^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ - 全体整数 $\mathrm{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ - 全体有理数 $\mathbf{Q} = \left\{\frac{p}{q}|p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ pq\right\}$ - 全体实数 R

几种特殊集合

子集

设A、B是两个集合，如果集合A的元素都是集合B的元素，则称A是B的__子集__，记作$A \subset B$(读作A包含于B)，或$B \supset A$(读作B包含A)。 如果集合A与集合B互为子集，即$A \subset B$且$B \subset A$，则称集合A与集合B 相等，记作$A = B$，例如,设

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

则$A = B$

若$A \subset B$且$A \neq B$，即称A是B的__真子集__，记作$A \nsubseteq B$，例如，$N \leqq Z \leqq Q \leqq R$. ### 空集 不含任何元素的集合称为__空集__.例如

$$\{x|x \in \mathbf{R} x^2 + 1 = 0\}$$

是空集,因为适合条件$\{x^2 + 1 = 0\}$的实数是不存在的.空集记作$\varnothing$,且规定空集$\varnothing$是任何集合A的子集,即$\varnothing \subset A$.

集合的运算

并集

设A,B是两个集合,由所有属于A或者B的元素组成的集合,称为A与B的并集(简称并),记作$A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x|x \in Ax \in B\}$$

交集

由所有既属于A又属于B的元素组成的集合,称为A与B的交集(简称交),记作$A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x|x \in Ax \in B\}$$

差集

由所有属于A而不属于B的元素组成的集合,称为A与B的差集(简称差),记作$A\backslash B$,即

$$A\backslash B = \{x|x \in Ax \in B\}$$

全集和补集

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合I中进行,所研究的其它集合A都是I的子集,此时,我们称集合I为__全集__或__基本集__,称$I\backslash A$

运算法则

交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

证明:

$$(1) \quad x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in Ax \in B \Rightarrow x \in (B \cup A) \Rightarrow (A \cup B) \subset (B \cup A)$$

$$(2) \quad x \in (B \cup A) \Rightarrow x \in Bx \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow (B \cup A) \subset (A \cup B)$$

由相等的定义可知,

$$A \cup B = B \cup A$$

同理可证$A \cap B = B \cap A$

结合律

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

证明:

$(1)x (A B) C x A 且 x B 且 x C x A (B C) (A B) C A (B C) < /center >< center >(2)x A (B C) x A 且 x B 且 x C x (A B) C A (B C) (A B) C < /center > , < center >(A B) C=A (B C)$

同理可证$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

分配律

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

证明$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$:

1. 先证明 $x (A B) C $ 是 $(A \cup C) \cap (B \cup C)$的子集

$x (A B) C x A B 或 C $

$x A B 时 x A 且 x B x A C 且 x B C $

$ 当 x C 时 x C A 且 x C B x A C 且 x B C $

$\therefore (A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1. 再证明$(A \cup C) \cap (B \cup C)$ 是 $(A B) C $的子集

$x (A C) (B C) x A C 且 x B C $

$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$: - $ x C x (A B) C $ - $ x A B x (A B) C $

其它情况均无法满足$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

所有满足$(A \cup C) \cap (B \cup C)$ 的情况均能推出$x (A B) C $

$(A C) (B C)是 (A B) C $的子集

由 (1)和(2)得出$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

可以用类似的方法证明$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

对偶律

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^{\mathrm{C}} \cup B^c$

证明:

$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A x \notin B \Rightarrow x \in A^c x \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

直积(笛卡尔乘积)

设A, B是任意两个集合,在集合A中任意取一个元素x, 在集合B中任意取一个元素y, 组成一个有序对(x, y), 把这样的有序对作为新的元素, 它们全体组成的集合称为集合A与集合B的直积, 记为 $A \times B$ 即 $A \times B = \{(x, y)|x \in Ay \in B\}$ ## 区间 ### 有限区间

设a和b都是实数, 数集 称为__开区间__, 记作(a, b), 即

a和b称为开区间(a, b)的__端点__, 这里 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$.

数集$\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为__闭区间__, 记作$[a, b]$, 即

$[a, b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\}$

a和b也称为闭区间$[a, b]$的端点, 这里$a \in [a, b], b \in [a, b]$.

类似地可说明:$[a, b) = \{x|a \leqslant x < b\}, (a, b] = \{x|a < x \leqslant b\}$

$[a, b)(a, b]$ 都称为__半开区间__

$b - a$称为__区间的长度__ ### 无限区间 $[a, +\infty) = \{x|x \geqslant a\}, (-\infty, b) = \{x|x < b\}$

邻域

以点a为中心的任何开区间称为点a的__邻域__,记作$U(a)$

设δ是任意一个正数,则开区间$(a-\delta, a+\delta)$就是点a的一个邻域, 这个邻域称为点a的, 记作$U(a, \delta)$, 点a称为这个__邻域的中心__, δ称为这个__邻域的半径__. 可写成

$U(a, \delta) = \{x||x - a| < \delta\}$

去心邻域

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,称为点a的去心δ邻域$U(a, \delta)$, 记作, 即

$U(a, \delta) = \{x|0 < |x - a| < \delta\}$

为了方便, 有时把开区间$(a - \delta, a)$称为a的左δ邻域, 把开区间$(a, a + \delta)$称为a的右δ邻域.

映射

设X, Y是两个非空集合,如果存在一个法则f, 使得对X中每个元素x, 按法则f,在Y中有唯一确定的元素y与之对应,则称f为从X到Y的映
记作

$f : X \to Y$

其中y称为元素x(在映射f下)的__像__, 并记作 $f(x)$, 即

$y = f(x)$

元素x称为元素y的__原像__; 集合X称为映射f的定义域, 记作D_f, 即 $D_f = X$; X中所有元素的像所组成的集合称为映射f的值域, 记作R_f或$f(X)$, 即

$$R_f = f(X) = \{f(x)|x \in X\}$$

- 映射必须具备三个要素
- 集合X, 即定义域$D_f = X$
- 集合Y, 即值域的范围: $R_f \subset Y$
- 对应法则f, 使对每个$x \in X$ 有唯一确定的$y = f(x)$ 与之对应
- 对于每个$x \in X$, 元素x的像y是唯一的; 而对每个$y \in R$, 元素y的原像x不一定是唯一的;映射f的值域R_f是Y的一个子集, 即$R_f \subset Y$, 不一定$R_f = Y$

满射 单射 双射

设f是从集合X到Y的映射, 若$R_f = Y$, 即Y中任一元素y都是X中某元素的像,则称f为X到Y上的映射或__满射__.
若对X中任意两个不同元素$x_1 \neq x_2$, 它们的像$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f为X到Y的__单射__;若映射f即是单射,
又是满射, 则称f为一一映射(或__双射__).

逆映射

设f是X到Y的单射, 则由定义, 对每个$y \in R_f$, 有唯一的$x \in X$, 适合$f(x) = y$. 于是, 我们可以定义一个R_f到X的新映射g, 即$g : R_f \to X$, 对每个$y \in R_f$, 规定$g(y) = x$, 这x满足$f(x) = y$. 这个映射g称为f的__逆映射__, 记作f^{-1}, 其定义域$D_{f^{-1}} = R$, 值域$R_{f^{-1}} = X$.

复合映射

设有两个映射

$$g : X \to Y_1, f : Y_2 \to Z$$

其中$Y_1 \subset Y_2$. 则由映射g和f可以定出一个从X到Z的对应法则,它将每个$x \in X$映射成$f[g(x)] \in Z$. 显然, 这个对应法则确定了一个从X到Z的映射, 这个映射称为映射g到f的复合映射, 记作$f \circ g$, 即

$fg: X Z < /center >< center >(fg)(x)= f[g(x)], x X $

函数

设数集$D \subset R$, 则称映射$f : D \to R$为定义在D上的函数, 通常简记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中x称为__自变量__，y称为__因变量__，D称为定义域，记作D_f，即$D_f = D$，函数值 $f(x)$的全体所构成的集合称为函数f的__值域__, 记作$R_f f(D)$, 即

$R_f = f(D) = \{y|y = f(x), x \in D\}$

f 为对应法则，$f(x)$为自变量x的函数值, 但通常习惯使用记号$f(x), x \in Dy = f(x), x \in D$来表示定义在D上的函数, 这时候应理解 为由它所确定的函数f.

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在R内, 因此构成函数的要素是：定义域D及对应法则f, 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

```
{\color{incolor}In [{\color{incolor}2}]:} \PY{k+kn}{import} \PY{n+nn}{sys}
        \PY{n}{sys}\PY{o}{.}\PY{n}{path}
```

```
{\color{outcolor}Out[{\color{outcolor}2}]:} ['/usr/lib/python36.zip',
         '/usr/lib/python3.6',
         '/usr/lib/python3.6/lib-dynload',
         '',
         '/home/learn/.local/lib/python3.6/site-packages',
         '/usr/local/lib/python3.6/dist-packages',
         '/home/learn/blog/src',
         '/usr/lib/python3/dist-packages',
         '/home/learn/.local/lib/python3.6/site-packages/IPython/extensions',
         '/home/learn/.ipython']
```

```
{\color{incolor}In [{\color{incolor} }]:}
```