概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

22 December 2024

第十一周概率论作业

1 第四章习题 21

解答 1.1: 21

已知随机变量 $X \sim U(0,2)$，表示矩形的长，矩形的周长为 20，因此矩形的宽为 $10-X$。矩形的面积 A 可表示为：

$$A = X(10-X).$$

1. 数学期望 $\mathbb{E}[A]$

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X(10-X)] = \int_0^2 x(10-x)f_X(x)\,dx,$$

其中 $f_X(x) = \frac{1}{2}$ 为均匀分布的概率密度函数。展开积分：

$$\mathbb{E}[A] = \int_0^2 \frac{1}{2}(10x - x^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 20 = \frac{8}{3}$$

2. 二阶矩 $\mathbb{E}[A^2]$

面积的二阶矩为：

$$\mathbb{E}[A^2] = \int_0^2 x^2(10-x)^2 f_X(x)\,dx.$$

展开 $(10-x)^2$ 并计算：

$$\mathbb{E}[A^2] = \frac{1}{2}\int_0^2 (100x^2 - 20x^3 + x^4)\,dx.$$

$$\mathbb{E}[A^2] = \frac{1448}{15} \approx 96.53.$$

3. 方差 $D(A)$

$$D(A) = \mathbb{E}[A^2] - (\mathbb{E}[A])^2.$$

$$D(A) = \frac{1448}{15} - \left(\frac{26}{3}\right)^2 = \frac{1448}{15} - \frac{676}{9} \approx 21.42.$$

2 第四章习题 24

解答 2.1: 24

已知每袋水泥质量 $X \sim N(50, 2.5^2)$，问卡车最多能装多少袋水泥，使得总质量超过 2000 kg 的概率不大于 0.05。

解题步骤

设卡车所装水泥的总质量为：

$$W = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

其中 $X_i \sim N(50, 2.5^2)$ 且相互独立，故：

$$W \sim N(50n, 2.5^2 n).$$

按题意要求：

$$P(W \geq 2000) \leq 0.05.$$

标准化 W：

$$P(W \geq 2000) = 1 - \Phi\left(\frac{2000 - 50n}{2.5\sqrt{n}}\right),$$

其中 $\Phi(z)$ 表示标准正态分布的累积分布函数。即：

$$\Phi\left(\frac{2000 - 50n}{2.5\sqrt{n}}\right) \geq 0.95.$$

$$\frac{2000 - 50n}{2.5\sqrt{n}} \geq 1.645.$$

$$\sqrt{n} \leq 6.2836.$$

因此，n 的最大整数为 39.

3 习题 25

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从 $U(0, 1)$。现计算以下量：

(1) 求 $\mathbb{E}(XY), \mathbb{E}(\frac{X}{Y}), \mathbb{E}(\ln(XY)), \mathbb{E}(|Y-X|)$

解答 3.1: 25(1)

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

由于 $\frac{X}{Y}$ 发散，故 $\mathbb{E}(\frac{X}{Y})$ 不存在。

$$\mathbb{E}[\ln(XY)] = \mathbb{E}[\ln(X)] + \mathbb{E}[\ln(Y)] = -1 + (-1) = -2.$$

$$\mathbb{E}(|Y-X|) = 2\int_0^1\int_x^1 (y-x)\,dy\,dx = \frac{2}{3}.$$

(2) 令 $A = XY$，$C = 2(X+Y)$，求 Cov(A, C) 和 ρ_{AC}

解答 3.2: 25(2)

$$\mathrm{Cov}(A,C) = \mathbb{E}(AC) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(C) = \frac{1}{6}.$$

$$D(A) = \frac{7}{144}, \quad D(C) = \frac{2}{3}.$$

$$\rho_{AC} = \frac{\mathrm{Cov}(A,C)}{\sqrt{D(A)D(C)}} = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

4 习题 26

解答 4.1: 26

已知：

$$X_1 \sim b\left(4, \frac{1}{2}\right), \quad X_2 \sim b\left(6, \frac{1}{3}\right), \quad X_3 \sim b\left(6, \frac{1}{3}\right).$$

1.

$$P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5) = P(X_1 = 2)\cdot P(X_2 = 2)\cdot P(X_3 = 5).$$

由二项分布：

$$P(X_1 = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(X_2 = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{240}{729},$$

$$P(X_3 = 5) = \binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{12}{729}.$$

故有：

$$P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 5) = \frac{3}{8}\cdot\frac{240}{729}\cdot\frac{12}{729} = 0.00203.$$

2. 计算 $\mathbb{E}(X_1X_2X_3)$：

$$\mathbb{E}(X_1X_2X_3) = \mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(X_2)\cdot\mathbb{E}(X_3).$$

由二项分布：

$$\mathbb{E}(X_1) = 2,\quad \mathbb{E}(X_2) = 2,\quad \mathbb{E}(X_3) = 2.$$

故有：

$$\mathbb{E}(X_1X_2X_3) = 2\cdot 2\cdot 2 = 8.$$

3. 计算 $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$：

$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = 2 - 2 = 0.$$

4. 计算 $\mathbb{E}(X_1 - 2X_2)$：

$$\mathbb{E}(X_1 - 2X_2) = \mathbb{E}(X_1) - 2\cdot\mathbb{E}(X_2) = 2 - 4 = -2.$$

(2) 随机变量 X, Y 的计算

已知：

$$\mathbb{E}(X) = 3,\quad \mathbb{E}(Y) = 1,\quad D(X) = 4,\quad D(Y) = 9,\quad Z = 5X - Y + 15.$$

$$\mathbb{E}(Z) = 5\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) + 15 = 5\cdot 3 - 1 + 15 = 29.$$

2. 情况 (i)：X, Y 独立

$$D(Z) = D(5X - Y) = D(5X) + D(-Y) = 25D(X) + D(Y) = 25\cdot 4 + 9 = 109.$$

3. 情况 (ii)：X, Y 不相关

$$D(Z) = 109\quad (\text{与独立相同}).$$

4. 情况 (iii)：$\rho_{XY} = 0.25$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = 0.25\cdot\sqrt{4\cdot 9} = 1.5.$$

$$D(Z) = 25D(X) + D(Y) - 10\mathrm{Cov}(X, Y) = 100 + 9 - 15 = 94.$$

5 习题 27

解答 5.1: 27

(1) $X \sim U(0,1)$, $Y = X^2$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2},\quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

结论：X, Y 不相互独立，也不相互不相关。

(2) $X \sim U(-1,1)$, $Y = X^2$

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

结论：X, Y 不相互独立，但相互不相关。

(3) $X = \cos V$, $Y = \sin V$, $V \sim U(0, 2\pi)$

1. 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathbb{E}(Y)$：

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos v \, dv = 0, \quad \mathbb{E}(Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin v \, dv = 0.$$

2. 计算 $\mathbb{E}(XY)$：

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\sin V \cos V) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\sin(2V)).$$

由于 $\sin(2V)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上对称，故：

$$\mathbb{E}(\sin(2V)) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin(2V) \, dv = 0.$$

因此：

$$\mathbb{E}(XY) = 0.$$

3. 计算协方差：

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

结论：X 和 Y 不相互独立，但相互不相关。

(4) $f(x,y) = x + y$**,** $0 < x < 1, 0 < y < 1$

1. 计算边缘分布：

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y) \, dy = x + \frac{1}{2}, \quad f_Y(y) = \int_0^1 (x+y) \, dx = y + \frac{1}{2}.$$

2. 检查独立性：联合分布 $f(x,y)$ 与 $f_X(x)f_Y(y)$ 不相等，因此 X 和 Y 不独立。
3. 计算 $\mathbb{E}(X)$ 和 $\mathbb{E}(Y)$：

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{7}{12},$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y \left(y + \frac{1}{2}\right) dy = \frac{7}{12}.$$

4. 计算 $\mathbb{E}(XY)$：

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) \, dx \, dy = \frac{1}{3}.$$

5. 计算协方差：

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}.$$

结论：X 和 Y 不独立，且不不相关。

(5) $f(x,y) = 2y,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1$

1. 计算边缘分布：

$$f_X(x) = \int_0^1 2y\,dy = 1, \quad f_Y(y) = \int_0^1 2y\,dx = 2y.$$

2. 检查独立性：联合分布可分解为：

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

结论：X 和 Y 相互独立。

6 习题 34

解答 6.1: 34

(1) 求常数 a 使 $\mathbb{E}(W)$ 最小，并求最小值

$$W = (aX + 3Y)^2, \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0, \quad D(X) = 4, \quad D(Y) = 16, \quad \rho_{XY} = -0.5.$$

$$\mathbb{E}(W) = \mathrm{Var}(aX + 3Y).$$

由方差公式：

$$\mathrm{Var}(aX + 3Y) = a^2\mathrm{Var}(X) + 9\mathrm{Var}(Y) + 2a \cdot 3 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y).$$

$$\mathrm{Var}(X) = 4, \quad \mathrm{Var}(Y) = 16, \quad \mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = -4.$$

$$\mathrm{Var}(aX + 3Y) = 4a^2 + 144 - 24a.$$

令 $\mathbb{E}(W) = 4a^2 - 24a + 144$，求极小值，对其求导：

$$f'(a) = 8a - 24.$$

令 $f'(a) = 0$，得：$a = 3$.

$$\min \mathbb{E}(W) = 4(3)^2 - 24(3) + 144 = 108.$$

(2) 证明 $W = X - aY$ 与 $V = X + aY$ 相互独立

$$W = X - aY, \quad V = X + aY.$$

由协方差的线性性质：

$$\mathrm{Cov}(W, V) = \mathrm{Cov}(X - aY, X + aY) = \mathrm{Var}(X) - a^2\mathrm{Var}(Y).$$

当 $\mathrm{Cov}(W,V)=0$ 时：

$$\sigma_X^2 - a^2\sigma_Y^2 = 0.$$

$$a^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}.$$

因此，当 $a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$ 时，W 和 V 相互独立。

7 习题 36

解答 7.1: 36

已知每毫升正常男性成人血液中白细胞数 X 的分布满足：

$$\mathbb{E}(X)=\mu=7300, \quad \sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sigma=700.$$

目标：利用切比雪夫不等式估计白细胞数在 $5200\sim 9400$ 之间的概率 p。
将区间改写为关于均值 μ 和标准差 σ 的形式：

$$p = P(-2100 < X-7300 < 2100) = P(|X-\mu|<2100).$$

2. 估计

$$P(|X-\mu|<\epsilon) \ge 1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

在本题中，取 $\epsilon=2100$

$$1-\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = 1-\frac{700^2}{2100^2}.$$

$$\frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{700^2}{2100^2} = \frac{490000}{4410000} = \frac{1}{9}.$$

$$P(|X-\mu|<2100) \ge 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$