概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

20 December 2024

第十四周概率论作业

1 第七章习题 5

解答 1.1: 5

(1) 最大似然估计计算：
概率密度函数为：

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(t-c)}{\theta}}, & t \geq c, \\ 0, & t < c, \end{cases}$$

由题意，失效时间为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，因此似然函数为：

$$L(\theta, c) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(x_i-c)}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)}{\theta}}, \quad c \leq x_1.$$

取对数，得对数似然函数：

$$\ln L(\theta, c) = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)}{\theta}.$$

对 θ 和 c 分别求偏导并令其为 0：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)}{\theta^2} = 0,$$

解得：

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)}{n}.$$

似然函数在 $c = x_1$ 处取得最大值：

$$\hat{c} = x_1.$$

将 $\hat{c}$ 代入 $\hat{\theta}$，得：

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n x_1}{n} = \bar{x} - x_1.$$

故最大似然估计为：

$$\hat{c} = x_1, \quad \hat{\theta} = \bar{x} - x_1.$$

(2) 矩估计计算：
一阶矩为：

$$\mu_1 = \int_c^\infty t f(t) dt = \int_c^\infty t \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(t-c)}{\theta}} dt.$$

令 $u = \frac{t-c}{\theta}$，则 $t = \theta u + c$，代入得：

$$\mu_1 = \int_0^\infty (\theta u + c) e^{-u} du = c + \theta \Gamma(2) = c + \theta.$$

二阶矩为：

$$\mu_2 = \int_c^\infty t^2 f(t) dt = \int_c^\infty t^2 \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(t-c)}{\theta}} dt.$$

同样令 $u = \frac{t-c}{\theta}$，代入得：

$$\mu_2 = \int_0^\infty (\theta u + c)^2 e^{-u} du = \theta^2 \Gamma(3) + 2c\theta \Gamma(2) + c^2 \Gamma(1),$$

化简得：

$$\mu_2 = 2\theta^2 + 2c\theta + c^2.$$

由矩估计公式，结合样本的中心矩：

$$\mu_1 = \bar{x}, \quad \mu_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

可解得：

$$\theta = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}, \quad c = \mu_1 - \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}.$$

所以样本矩估计为：

$$\hat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad \hat{c} = \bar{x} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}.$$

2 第七章习题 9

解答 2.1: 9

(1) 验证 S_w^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量：
由定义，合并估计公式为：

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

由 $\mathbb{E}[S_1^2] = \mathbb{E}[S_2^2] = \sigma^2$ 得：

$$\mathbb{E}[S_w^2] = \mathbb{E}\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right].$$

将期望分配：

$$\mathbb{E}[S_w^2] = \frac{(n_1 - 1)\mathbb{E}[S_1^2] + (n_2 - 1)\mathbb{E}[S_2^2]}{n_1 + n_2 - 2}.$$

由 $\mathbb{E}[S_1^2] = \sigma^2$ 且 $\mathbb{E}[S_2^2] = \sigma^2$，代入得到：

$$\mathbb{E}[S_w^2] = \frac{(n_1-1)\sigma^2 + (n_2-1)\sigma^2}{n_1+n_2-2}.$$

化简得：

$$\mathbb{E}[S_w^2] = \sigma^2.$$

故 S_w^2 是总体方差 σ^2 的无偏估计量。

(2) 验证 $\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ 是总体均值 μ 的无偏估计量：

令：

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i},$$

其中 a_i 是常数，且 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$。

计算 $\mathbb{E}[\hat{\mu}]$：

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right].$$

将期望运算分配到求和内，得：

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}[X_i]}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

由于每个 X_i 的期望为 μ，即 $\mathbb{E}[X_i] = \mu$，所以：

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \mu}{\sum_{i=1}^n a_i}.$$

化简得：

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu.$$

因此 $\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sum_{i=1}^n a_i}$ 是总体均值 μ 的无偏估计量。

3 第七章习题 10

解答 3.1: 10

解答

(1) 确定常数 c，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量：

$$\mathbb{E}\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right] = c\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{E}[(X_{i+1}-X_i)^2].$$

$$\mathbb{E}[(X_{i+1}-X_i)^2] = \mathrm{Var}(X_{i+1}) + \mathrm{Var}(X_i) = 2\sigma^2,$$

因此：

$$\mathbb{E}\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right] = c\cdot 2\sigma^2(n-1).$$

令其等于 σ^2，即：

$$c \cdot 2\sigma^2(n-1) = \sigma^2.$$

$$c = \frac{1}{2(n-1)}.$$

(2) 确定常数 c，使 $\bar{X}^2 - cS^2$ 是 μ^2 的无偏估计量：
样本均值的平方的期望为：

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

样本方差的期望为：

$$\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2.$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2 - cS^2] = \mathbb{E}[\bar{X}^2] - c\mathbb{E}[S^2].$$

$$\mathbb{E}[\bar{X}^2 - cS^2] = \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) - c\sigma^2.$$

令其等于 μ^2，即：

$$\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - c\sigma^2 = \mu^2.$$

$$c = \frac{1}{n}.$$

4 第七章习题 13

解答 4.1: 13

(1) 证明 $\hat{\theta}^2 = (\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量：
已知 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，且 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) > 0$，因此：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta.$$

由平方的期望性质可得：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}[\hat{\theta}]^2.$$

将 $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$ 代入，得：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \theta^2.$$

显然，当 $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) > 0$ 时：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}^2] > \theta^2.$$

因此，$\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。
(2) 验证 $\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的最大似然估计量不是无偏估计量：

概率密度函数为：

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x \le \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对应的似然函数为：

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \theta \ge x_{(n)}, \\ 0, & \theta < x_{(n)}, \end{cases}$$

其中 $x_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$。
当 $\theta \ge x_{(n)}$ 时，$L(\theta)$ 随 θ 的增加而减小；当 $\theta < x_{(n)}$ 时，$L(\theta) = 0$。因此，$L(\theta)$ 在 $\theta = x_{(n)}$ 处取得最大值。
由此可得，$\hat{\theta} = x_{(n)}$ 是参数 θ 的最大似然估计量。
现在计算 $\mathbb{E}[\hat{\theta}]$：
累积分布函数为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{\theta}, & 0 \le x \le \theta, \\ 1, & x > \theta. \end{cases}$$

由最大值的分布性质，$\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的分布函数为：

$$F_{\hat{\theta}}(z) = [F(z)]^n = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, \quad 0 \le z \le \theta.$$

概率密度函数为：

$$f_{\hat{\theta}}(z) = \frac{d}{dz} F_{\hat{\theta}}(z) = n\frac{z^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 \le z \le \theta.$$

计算期望值：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \int_0^\theta z f_{\hat{\theta}}(z)\, dz = \int_0^\theta z \cdot n\frac{z^{n-1}}{\theta^n}\, dz.$$

化简得：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = n\int_0^\theta \frac{z^n}{\theta^n}\, dz = n \cdot \frac{1}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1}.$$

进一步化简：

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \frac{n}{n+1}\theta.$$

由于 $\mathbb{E}[\hat{\theta}] \ne \theta$，因此 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计量。