概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

1 November 2024

第八周概率论作业

1 第三章习题 4

设 X, Y 都是非负的连续型随机变量，它们相互独立。

1. 证明 $P(X<Y)=\int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x)\, dx$，其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度。
2. 设 X, Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $P(X<Y)$。

解答 1.1: 4

(1) 因为 X 和 Y 是相互独立的非负连续型随机变量，且 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度函数，因此：

$$P(X<Y)=\iint_{x<y} f_X(x) f_Y(y)\, dx\, dy$$

通过改变积分顺序，我们得到：

$$P(X<Y)=\int_0^{\infty} \int_0^{y} f_X(x)\, dx\, f_Y(y)\, dy=\int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(x)\, dx$$

(2) 已知 $f_X(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ 和 $f_Y(y)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$，根据 (1) 的结果，有：

$$P(X<Y)=\int_0^{\infty} F_X(x) f_Y(y)\, dx$$

将 $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$ 和 $f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$ 代入，得到：

$$P(X < Y) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\, dx$$

经过积分计算，结果为：

$$P(X < Y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

2 第三章习题 6

将一枚硬币掷 3 次，以 X 表示前 2 次中出现正面（H）的次数，以 Y 表示 3 次中出现正面的次数。求 X, Y 的联合分布律以及 (X, Y) 的边缘分布律。

解答 2.1: 6

样本空间如下，共有 8 种情况：

$$\{\text{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}\}$$

构建联合概率表如下：

$X\backslash Y$	0	1	2	3	边缘分布$P(Y=j)$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
边缘分布$P(X=i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	1

3 第三章习题 7

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 4.8y(2-x), & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求边缘概率密度。

解答 3.1: 7

由于 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$ 在区域 $G = \{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ 外取零，因此我们可以计算边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^x 4.8y(2-x)\, dy$$

$$= 4.8 \int_0^x y(2-x)\, dy = 2.4(2-x)x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

同理，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^1 4.8y(2-x)\,dx$$

$$= 4.8y\int_y^1 (2-x)\,dx = 2.4y(3-4y+y^2), \quad 0 \le y \le 1.$$

因此，边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2.4(2-x)x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

和

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2.4y(3-4y+y^2), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

4 第三章习题 9

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

1. 确定常数 c。
2. 求边缘概率密度。

解答 4.1: 9

(1) 确定常数 c

$$1 = \iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^1 cx^2y\,dy\,dx$$

计算内层积分：

$$= \int_0^1 cx^2 \int_{x^2}^1 y\,dy\,dx = \int_0^1 cx^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^1 dx$$

$$= \int_0^1 cx^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx = c\int_0^1 \frac{x^2}{2}(1-x^4)\,dx$$

$$= c\int_0^1 \frac{x^2}{2}-\frac{x^6}{2}\,dx = c\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^7}{14}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{14}\right)$$

$$= c\cdot\frac{4}{21} = 1 \Rightarrow c = \frac{21}{4}$$

(2) 求边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y\,dy$$

$$= \frac{21}{4}x^2\int_{x^2}^1 y\,dy = \frac{21}{4}x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^1$$

$$= \frac{21}{4}x^2 \cdot \frac{1-x^4}{2} = \frac{21}{8}x^2(1-x^4), \quad -1 \le x \le 1.$$

同理，

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2 y\,dx$$

$$= \frac{21}{4}y \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2\,dx = \frac{21}{4}y \cdot \frac{2y^{3/2}}{3} = \frac{7}{4}y^{5/2}, \quad 0 \le y \le 1.$$

因此，边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

和

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{4}y^{5/2}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

5 第三章习题 17

(1) 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-ax})y, & x \ge 0, 0 \le y \le 1, a > 0, \\ 1-e^{-ax}, & x \ge 0, y > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 X, Y 相互独立。

(2) 设随机变量 (X,Y) 具有分布律

$$P(X=x, Y=y) = p^2(1-p)^{x+y-2}, \quad 0 < p < 1, x, y\text{均为正整数},$$

问 X, Y 是否相互独立？

解答 5.1: 17

(1) $F_X(x) = F(x,\infty)$ 和 $F_Y(y) = F(\infty, y)$ 为

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因为对于所有 x, y，都有 $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$，故 X, Y 相互独立。

(2) $P(X=x)$ 的计算如下：

$$P(X=x)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x,Y=j)=p^2(1-p)^{x-1}\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^{j-1}$$

$$=p^2(1-p)^{x-1}\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=p(1-p)^{x-1},\quad x=1,2,\ldots,\text{其中}0<p<1.$$

同理，

$$P(Y=y)=p(1-p)^{y-1},\quad y=1,2,\ldots,\text{其中}0<p<1.$$

因为对于所有正整数 x,y 都有

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y),$$

故 X,Y 相互独立。

6 第三章习题 18

设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0.\end{cases}$$

1. 求 X 和 Y 的联合概率密度。
2. 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率。

解答 6.1: 18

因为 X 和 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的充要条件为其判别式 $4X^2-4Y\geq 0$，即 $X^2\geq Y$。所以

$$P(X^2\geq Y)=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-y/2}\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1\left[-e^{-y/2}\right]_0^{x^2}dx=\int_0^1\left(1-e^{-x^2/2}\right)dx$$

令 $u=x^2/2$，则积分结果为：

$$P(X^2\geq Y)=1-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 0.1445.$$

7 第三章习题 19

进行打靶，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定

- 点 A 落在区域 $D_1 = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$ 得 2 分；
- 点 A 落在 $D_2 = \{(x,y)|1 < x^2+y^2 \le 4\}$ 得 1 分；
- 点 A 落在 $D_3 = \{(x,y)|x^2+y^2 > 4\}$ 得 0 分。

以 Z 记打靶的得分，写出 X,Y 的联合概率密度，并求 Z 的分布律。

解答 7.1: 19

由题意知 X,Y 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

且 X 和 Y 相互独立，故 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty.$$

计算得分分布：

$$P(Z=2) = P((X,Y) \in D_1) = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = 1 - e^{-1/2}.$$

$$P(Z=1) = P((X,Y) \in D_2) = \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = e^{-1/2} - e^{-2}.$$

$$P(Z=0) = P((X,Y) \in D_3) = 1 - (1 - e^{-1/2}) - (e^{-1/2} - e^{-2}) = e^{-2}.$$

因此，Z 的分布律为

Z	0	1	2
$P(Z=z)$	e^{-2}	$e^{-1/2} - e^{-2}$	$1 - e^{-1/2}$