概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

18 October 2024

第四周概率论作业

1 第二章习题 2 **1** | **2 补充习题 1** **2**

1 第一章习题 37

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝色球、2 只绿色球、2 只白色球, 第二只盒子中装有 2 只蓝色球、3 只绿色球、4 只白色球, 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

- (1) 求至少有一只蓝色球的概率.
- (2) 求有一只蓝色球、一只白色球的概率.
- (3) 已知至少有一只蓝色球, 求有一只蓝色球、一只白色球的概率

Problem 1：至少有一个蓝色球的概率

解答 1.1: 37(1)

从第一个盒子中取到蓝球的概率为

$$P(A_1) = \frac{3}{7}.$$

从第二个盒子中取到蓝球的概率为

$$P(A_2) = \frac{2}{9}.$$

两只盒子都没有蓝色球的概率为

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{4}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{4}{9}.$$

则至少有一个蓝色球的概率为

$$P(\text{至少有一个蓝色球}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Problem 2: 有一只蓝色球和一只白色球的概率

解答 1.2: 37(2)

此处求的是一只蓝色球和一只白色球的概率，可以有以下两种情况：- 第一只盒子取出蓝色球，第二只盒子取出白色球；- 第一只盒子取出白色球，第二只盒子取出蓝色球。
根据独立事件的乘法规则：

$$P(\text{蓝色，白色}) = P(\text{第一盒蓝色，第二盒白色}) + P(\text{第一盒白色，第二盒蓝色})$$

$$P(\text{第一盒蓝色，第二盒白色}) = P(A) \times \frac{4}{9} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{63} = \frac{4}{21}$$

$$P(\text{第一盒白色，第二盒蓝色}) = \frac{2}{7} \times P(B) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{63}$$

故一只蓝色球和一只白色球的概率为：

$$P(\text{蓝色，白色}) = \frac{4}{21} + \frac{4}{63} = \frac{12}{63} + \frac{4}{63} = \frac{16}{63}$$

Problem 3: 已知至少有一只蓝色球，求有一只蓝色球和一只白色球的概率

解答 1.3: 37(3)

至少有一个蓝色球的概率是：

$$P(\text{至少一个蓝色球}) = \frac{5}{9}.$$

根据条件概率公式有：

$$P(\text{一个蓝色球和一个白色球} \mid \text{至少一个蓝色球}) = \frac{\frac{16}{63}}{\frac{5}{9}} = \frac{16}{35}.$$

2 第一章习题 40

将 A, B, C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率是 α，而输出为其他某一字母的概率是 $\frac{1-\alpha}{2}$。输入字母串 $AAAA, BBBB, CCCC$ 之一，输入信道，输入 $AAAA, BBBB, CCCC$ 的概率分别为 p_1, p_2, p_3，且 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$。

已知输出为 $ABCA$，求输入的是 $AAAA$ 的概率。

解答 2.1: 40

设事件 $X = AAAA$ 表示输入的是 $AAAA$，事件 $Y = ABCA$ 表示输出为 $ABCA$。要求的是 $P(X|Y)$，根据贝叶斯公式：

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)}$$

首先计算条件概率 $P(Y|X)$，即在输入为 $AAAA$ 的条件下，输出为 $ABCA$ 的概率。对每个字母的传输过程：- 第一个字母 A 被正确传输的概率为 α；- 第二个字母 A 被错误传输为 B 的概率为 $\frac{1-\alpha}{2}$；-

第三个字母 A 被错误传输为 C 的概率为 $\frac{1-\alpha}{2}$; - 第四个字母 A 被正确传输的概率为 α。
因此：

$$P(Y|X) = \alpha \times \frac{1-\alpha}{2} \times \frac{1-\alpha}{2} \times \alpha = \alpha^2 \times \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$$

接着，$P(Y)$ 表示输出为 $ABCA$ 的总概率，可以用全概率公式计算：

$$P(Y) = P(Y|X)P(X) + P(Y|BBBB)P(BBBB) + P(Y|CCCC)P(CCCC)$$

对于输入为 $BBBB$ 和 $CCCC$ 的情况，类似地可以计算 $P(Y|BBBB)$ 和 $P(Y|CCCC)$。例如，对于输入为 $BBBB$:

$$P(Y|BBBB) = \frac{1-\alpha}{2} \times \alpha \times \frac{1-\alpha}{2} \times \frac{1-\alpha}{2}$$

同样，对于输入为 $CCCC$:

$$P(Y|CCCC) = \frac{1-\alpha}{2} \times \frac{1-\alpha}{2} \times \alpha \times \frac{1-\alpha}{2}$$

因此，总概率 $P(Y)$ 为：

$$P(Y) = \alpha^2 \times \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \times p_1 + \frac{1-\alpha}{2} \times \alpha \times \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \times p_2 + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3 \times \alpha \times p_3$$

代入贝叶斯公式，得到：

$$P(X|Y) = \frac{\alpha^2 \times \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 \times p_1}{P(Y)}$$

3 补充习题 1

甲乙两人轮流掷一颗骰子，甲先掷。每当某人掷出 1 点时，交给对方掷，否则此人继续掷。求第 n 次仍然由甲方掷骰子的概率。

解答

解答 3.1: 补充习题 1

甲（乙）掷到 1 点的概率为：

$$\frac{1}{6}$$

甲（乙）未掷到 1 点的概率为：

$$\frac{5}{6}$$

设第 k 次由甲掷的概率为 p_k，则乙掷的概率为 $1-p_k$。
第一次由甲掷，故第二次由甲掷的概率为：

$$p_2 = \frac{1}{6}$$

于是，第 $k+1$ 次由甲掷的概率为：

$$p_{k+1} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1-p_k) = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}p_k$$

即：

$$p_{k+1} = \frac{5}{6} - \frac{2}{3}(p_k)$$

因为：

$$p_2 = \frac{1}{6}\, p_{k+1} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right)$$

求得：

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$