

概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

21 October 2024

第五周概率论作业

1 第二章习题 2	1	1.2 第二章习题 2.2	1
1.1 第二章习题 2.1	1	2 补充习题 1	2

1 第二章习题 2

1.1 第二章习题 2.1

解答 1.1: 2.1

假设从袋中同时取出 3 只球，编号分别为 1, 2, 3, 4, 5。定义随机变量 X 表示取出的 3 只球中编号最大的号码。

- 当 $X = 3$ ，从 $\{1, 2, 3\}$ 中选择，其他两个数必须也在 $\{1, 2\}$ 中。从 1, 2 中选择另外两个数的组合数是 $\binom{2}{2} = 1$ 种。

$$P(X = 3) = \frac{1}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}.$$

- 当 $X = 4$ ，从 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中选择，剩下的两个数只能从 $\{1, 2, 3\}$ 中选择。其组合数是 $\binom{3}{2} = 3$ 种。

$$P(X = 4) = \frac{3}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.$$

- 当 $X = 5$ ，从 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中选择，剩下的两个数只能从 $\{1, 2, 3, 4\}$ 中选择。其组合数是 $\binom{4}{2} = 6$ 种。

$$P(X = 5) = \frac{6}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

因此，随机变量 X 的分布律为：

$$P(X = 3) = \frac{1}{10}, \quad P(X = 4) = \frac{3}{10}, \quad P(X = 5) = \frac{3}{5}.$$

1.2 第二章习题 2.2

将一颗骰子抛掷两次，定义随机变量 X 表示两次中得到的较小的点数，求 X 的分布律。



解答 1.2: 2.2

对于两次投掷骰子, 点数可能的取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6。假设第一次投掷结果为 a , 第二次投掷结果为 b , 则 $X = \min(a, b)$ 。计算每个可能的 X 值的概率。

随机变量 X 的分布律为:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{11}{36}, & P(X=2) &= \frac{9}{36}, & P(X=3) &= \frac{7}{36}, \\ P(X=4) &= \frac{5}{36}, & P(X=5) &= \frac{3}{36}, & P(X=6) &= \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

2 补充习题 1

补充习题 1: 设一个人一年内患感冒的次数服从参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布, 现有某种预防感冒的药物对 75% 的人有效 (能将泊松分布的参数减少为 $\lambda = 3$), 对另外的 25% 的人不起作用. 如果某人服用了此药, 一年内患了两次感冒, 那么该药对此人有效的可能性是多少?

解答 2.1: 补充习题 1

设事件 A 表示药物有效, 事件 B 表示一年内患两次感冒。由于感冒次数服从泊松分布。药物有效时, 感冒次数服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布, 则有:

$$P(B|A) = P(2, 3) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9e^{-3}}{2}$$

药物无效时, 感冒次数服从参数 $\lambda = 5$ 的泊松分布, 则有:

$$P(B|\neg A) = P(2, 5) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = \frac{25e^{-5}}{2}$$

故事件 B 的总体概率 $P(B)$ 为:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)$$

即:

$$P(B) = \left(\frac{9e^{-3}}{2} \cdot 0.75 \right) + \left(\frac{25e^{-5}}{2} \cdot 0.25 \right)$$

由贝叶斯定理得:

$$P(A|B) = \frac{\frac{9e^{-3}}{2} \cdot 0.75}{P(B)}$$

计算得:

$$P(A|B) \approx 0.889$$

即药物对该人有效的概率约为 88.9%。

