# 概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

8 November 2024

## 第九周概率论作业



## 1 第三章习题 20

设 $X$ 和 $Y$ 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}ae^{-ax}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中 $a>0,\mu>0$ 是常数。引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当}X\le Y,\\ 0, & \text{当}X>Y\end{cases}$$

1. 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$。
2. 求 $Z$ 的分布律和分布函数。

**解答 1.1: 20**

**解:** 由于 $X$ 和 $Y$ 相互独立，$(X,Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mu a e^{-ax-\mu y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

1. 当 $y>0$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)=\begin{cases}ae^{-ax}, & x>0,\\ 0, & \text{其他情况}\end{cases}$$

2.

$$P(X\le Y)=\int_{G:x\le y}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{y}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\left[-\lambda e^{-ax-\mu y}\right]_{x=0}^{x=y}dy=\int_0^{\infty}-\lambda e^{-ay-\mu y}dy$$

$$= \int_0^{\infty} ae^{-(\lambda+\mu)y}dy = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

而且

$$P(X > Y) = 1 - P(X \le Y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

故 $Z$ 的分布律为

| $Z$ | $P_Z$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ |
| 1 | $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ |

$Z$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0 \le z < 1, \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

# 2 第二章习题 22

## 22. 设 $X$ 和 $Y$ 是两个相互独立的随机变量，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度。

**解答 2.1: 22**

**解**：利用公示：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

**因此，** $f_Z(z)$ 的定义如下：

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_0^1 f_X(x)e^{-(z-x)}dx$$

$$= \int_0^1 1 \cdot e^{-(z-x)}dx = \int_0^1 e^{-z+x}dx$$

**则有**：

$$f_Z(z) = \begin{cases} (1-e^{-z}), & 0 < z < 1, \\ 0, & z \le 0 \text{ 或} z \ge 1 \end{cases}$$

若利用公式

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

可以得出：

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_Y(z-x)dx$$

条件：

- 当 $0 < z < 1$ 时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \int_0^z f_X(x)dxdy = \int_0^z 1 \cdot dy = z$$

- 当 $z \ge 1$ 时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \int_0^z e^{-(z-x)}dx$$

得到：

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ 1 - (1 - e^{-1}), & z \ge 1 \end{cases}$$

## 3 第一章习题 23

某种商品周围的需求量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的。求 (1) 两周，(2) 三周的需求量的概率密度。

**解答 3.1: 23**

**解**：设某种商品在第 $i$ 周的需求量为 $X_i\,(i = 1, 2, 3)$，由题设 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，并且

$$f_{X_i}(t) = f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

(1) 记两周的需求量 $Z$，即 $Z = X_1 + X_2$，则 $Z$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} f(x)f(z-x)dx.$$

由 $f(t)$ 的定义，知

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)dx, & z > 0, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

计算 $f_Z(z)$ 时，上述积分的被积函数不等于零，于是

$$f_Z(z) = \int_0^z xe^{-(z-x)}e^{-x}dx = e^{-z}\int_0^z xe^{-2x}dx.$$

此时，可以利用分部积分法求解，得到

$$f_Z(z) = e^{-z}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^z = e^{-z}\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-2z}).$$

(2) 记三周的需求量 $W$，即 $W = Z + X_3$，因 $X_1, X_2, X_3$ 相互独立，故 $Z = X_1 + X_2$ 也相互独立，从而 $W$ 的概率密度为

$$f_W(u) = \int_0^{\infty} f_Z(z) f_{X_3}(u-z)dz.$$

由上述 $f_Z(z)$ 及 $f(t)$ 的定义，知

$$f_W(u) = \begin{cases} \int_0^u f_Z(z) f_{X_3}(u-z)dz, & u > 0, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

在计算时，上述积分的被积函数不等于零，因此 $W$ 的概率密度为

$$f_W(u) = \int_0^u \left[\frac{1}{2}e^{-z}(1-e^{-2z})\right] e^{-(u-z)}dz = e^{-u}\int_0^u \frac{1}{2}(1-e^{-2z})dz.$$

计算这个积分，得到：

$$f_W(u) = e^{-u}\left[\frac{u}{2} + \frac{1}{4}(1-e^{-2u})\right] = e^{-u}\cdot\frac{u}{2}, \quad u > 0.$$

# 4 第三章习题 30

设某种型号的电子元件的寿命（以 h 计）近似地服从正态分布 $N(160, 20^2)$，随机地选择 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 h 的概率。

**解**：以 $X_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ 记所选取的第 $i$ 只元件的寿命，由题设一只元件寿命小于 180 h 的概率为

$$P\{X_i \leq 180\} = P\left(\frac{X_i - 160}{20} \leq \frac{180-160}{20}\right) = \Phi\left(\frac{180-160}{20}\right) = \Phi(1) \approx 0.8413.$$

**解答 4.1: 30**

可认为 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 相互独立，故选取的 4 只元件没有一只寿命小于 180 h 的概率为

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{4}\{X_i > 180\}\right) = \prod_{i=1}^{4}(1 - P\{X_i \leq 180\}) = (1-0.8413)^4 \approx 0.000063.$$