概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

21 October 2024

第六周概率论作业

1 第二章习题 21

设随机变量 X 的概率密度为

(1)

$$f(x)=\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right), & 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$, 并画出（2）中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形。

解答 1.1: 21

解:

由于概率密度函数 $f(x)$ 在 $x<1$ 和 $x>2$ 处等于零, 因此:

当 $x<1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dt=0;$$

当 $x\ge 2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=1-\int_{2}^{\infty}0dt=1;$$

当 $1\le x\le 2$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_{1}^{x}2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

对于 $1\le x\le 2$, 通过计算:

$$F(x)=2\left(x+\frac{1}{x}-2\right).$$

因此，分布函数 $F(x)$ 为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2\left(x + \frac{1}{x} - 2\right), & 1 \le x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(2) 概率密度 $f(x)$ 在 $x < 0$ 和 $x > 2$ 处等于零, 因此:
当 $x < 0$ 时, $F(x) = 0$; 当 $x \ge 2$ 时, $F(x) = 1$; 当 $0 \le x < 1$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} tdt = \frac{x^2}{2};$$

当 $1 \le x < 2$ 时,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2} - 1\right).$$

因此，分布函数 $F(x)$ 为：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

2 第二章习题 24

设顾客在某银行的窗口等候服务的时间 X（以分钟计）服从指数分布，其概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

若顾客在窗口等候服务，如果超过 10 分钟就离开。设一个月内该顾客需要去银行 5 次。以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开的次数。写出 Y 的分布律，并求 $P(Y \ge 1)$。

解答 2.1: 24

顾客在窗口等候服务超过 10 分钟的概率为：

$$p = \int_{10}^{\infty} f_X(x)dx = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}e^{-x/5}dx = e^{-2}.$$

即 Y 服从参数为 $n = 5, p = e^{-2}$ 的二项分布。即 $Y \sim \mathrm{B}(5, e^{-2})$。
Y 的分布律为：

$$P(Y = k) = C_5^k \times (e^{-2})^k (1 - e^{-2})^{5-k},$$

要求的概率 $P(Y \ge 1)$ 为：

$$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-2})^5 \approx 0.5167.$$

3 第二章习题 26

题目 26: 设 $X \sim N(3, 2^2)$.

(1) 求 $P\{2 < X < 5\}$, $P\{-4 < X < 10\}$, $P\{|X| > 2\}$, $P\{X > 3\}$。

(2) 确定 c，使得 $P(X > c) = P(X < c)$。

(3) 设 d 满足 $P(X > d) \geq 0.9$，问 d 至多为多少？

解答 3.1: 26

首先，随机变量 X 的正态分布为 $X \sim N(3, 2^2)$，即均值为 3，方差为 4。

$$Z = \frac{X-3}{2}, \quad Z \sim N(0,1).$$

1.

$$P(2 < X < 5) = P\left(\frac{2-3}{2} < Z < \frac{5-3}{2}\right) = P(-0.5 < Z < 1)$$

$$P(-0.5 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.5) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328.$$

2.

$$P(-4 < X < 10) = P\left(\frac{-4-3}{2} < Z < \frac{10-3}{2}\right) = P(-3.5 < Z < 3.5).$$

$$P(-3.5 < Z < 3.5) = \Phi(3.5) - \Phi(-3.5) = 0.9998 - 0.0002 = 0.9996.$$

3.

$$P(|X| > 2) = P(X > 2) + P(X < -2).$$

$$P(X > 2) = P\left(Z > \frac{2-3}{2}\right) = P(Z > -0.5) = 1 - \Phi(-0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915.$$

$$P(|X| > 2) = 0.6915.$$

4.

$$P(X > 3) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0.5.$$

(2)
X 是对称分布的，解得 $c = 3$。
(3)
显然我们需要寻找的为：

$$P\left(Z > \frac{d-3}{2}\right) = 0.9,$$

通过查表可得 $P(Z > 1.28) \approx 0.9$，所以：

$$\frac{d-3}{2} = 1.28, \quad d = 3 + 2 \times 1.28 = 5.56.$$

因此，$d \approx 5.56$。

4 第二章习题 29

一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从参数为 $\mu = 160$，$\sigma > 0$ 的正态分布。若要求 $P(120 < X < 200) \geq 0.80$，允许的 σ 最大为多少？

解答 4.1: 29

已知 $X \sim N(160, \sigma^2)$，现要求

$$P(120 < X < 200) = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.80.$$

即要求：

$$2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.80,$$

解得：

$$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9 = \Phi(1.282).$$

解不等式，σ 最大约为 31.20。

5 第二章习题 35

设随机变量 $X \sim N(0,1)$。
(1) 求 $Y = e^X$ 的概率密度。
(2) 求 $Y = 2X^2 + 1$ 的概率密度。
(3) 求 $Y = |X|$ 的概率密度。

解答 5.1: 35

(1) 由 $Y = e^X$，有 $X = \ln Y$。
此时，X 的概率密度为标准正态分布，即：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

根据变量变换公式，Y 的概率密度函数为：

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \left|\frac{d}{dy} \ln y\right|.$$

可得：

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y)^2/2} \cdot \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

故 $Y = e^X$ 的概率密度为：

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y)^2/2}, \quad y > 0.$$

(2) 使用变量变换法。令：

$$Y = 2X^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad X^2 = \frac{Y-1}{2}.$$

则 $X = \pm\sqrt{\frac{Y-1}{2}}$。

此时概率密度函数为：
$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y-1}} e^{-\frac{y-1}{2}}, \quad y \geq 1.$$
(3) 根据正态分布的对称性，则由：
$$P(Y \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = 2P(0 \leq X \leq y), \quad y \geq 0.$$
可得，Y 的概率密度为：
$$f_Y(y) = 2f_X(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad y \geq 0.$$

6 第二章习题 38

设电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 $9 \sim 11$ A 之间。若此电流通过 2Ω 的电阻，在其上消耗的功率为 $W = 2I^2$，求 W 的概率密度。

解答 6.1: 38