概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

15 November 2024

第十周概率论作业

1 第四章习题 6

Given the following probability distribution for the random variable X:

X	-2	0	2
$P(X)$	0.4	0.3	0.3

1. Calculate $E(X)$, $E(X^2)$, and $E(3X^2+5)$. 2. If $X \sim \pi(\lambda)$, find $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

解答 1.1: 6

1.

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

代入值计算：

$$E(X) = (-2) \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3 = -0.8 + 0 + 0.6 = -0.2$$

2.

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i)$$

代入值计算：

$$E(X^2) = (-2)^2 \cdot 0.4 + 0^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.3 = 4 \cdot 0.4 + 0 + 4 \cdot 0.3 = 1.6 + 0 + 1.2 = 2.8$$

3. 根据期望的线性性质，有：

$$E(3X^2 + 5) = 3E(X^2) + 5$$

代入 $E(X^2) = 2.8$：

$$E(3X^2 + 5) = 3 \cdot 2.8 + 5 = 8.4 + 5 = 13.4$$

2 第四章习题 7

7. (1) 设随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

求以下的数学期望：

(i) $Y = 2X$

(ii) $Y = e^{-2X}$

(2) 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且都服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布。

(i) 求 $U = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的数学期望。

(ii) 求 $V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的数学期望。

解答 2.1: 7

1. 计算 $Y = 2X$ 的数学期望：
由于 $Y = 2X$，我们有：

$$E(Y) = E(2X) = 2E(X)$$

对于参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布，期望值 $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1$。因此，

$$E(Y) = 2 \cdot 1 = 2$$

2. 计算 $Y = e^{-2X}$ 的数学期望：
要计算 $E(Y) = E(e^{-2X})$，我们可以这样求解：

$$E(e^{-2X}) = \int_0^\infty e^{-2x} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-2x} \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-3x}\, dx$$

计算该积分：

$$E(e^{-2X}) = \int_0^\infty e^{-3x}\, dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^\infty = \frac{1}{3}$$

第 (2) 问

1. 计算 $U = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的数学期望：
对于 $X_i \sim \text{Uniform}(0, 1)$，$U = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的累积分布函数（CDF）为：

$$P(U \leq u) = P(X_1 \leq u, X_2 \leq u, \ldots, X_n \leq u) = P(X_i \leq u)^n = u^n$$

因此，U 的概率密度函数（PDF）为：

$$f_U(u) = \frac{d}{du} P(U \leq u) = \frac{d}{du} u^n = nu^{n-1}, \quad 0 < u < 1$$

U 的数学期望为：

$$E(U) = \int_0^1 u \cdot f_U(u)\, du = \int_0^1 u \cdot nu^{n-1}\, du = n \int_0^1 u^n\, du$$

计算该积分：

$$E(U) = n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2. 计算 $V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的数学期望：
对于 $X_i \sim \text{Uniform}(0,1)$，$V = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ 的累积分布函数为：

$$P(V > v) = P(X_1 > v, X_2 > v, \ldots, X_n > v) = P(X_i > v)^n = (1-v)^n$$

因此，V 的概率密度函数为：

$$f_V(v) = \frac{d}{dv}(1-v)^n = -n(1-v)^{n-1}, \quad 0 < v < 1$$

V 的数学期望为：

$$E(V) = \int_0^1 v \cdot f_V(v)\, dv = \int_0^1 v \cdot n(1-v)^{n-1}\, dv$$

使用分部积分或 Beta 函数的已知结果，我们得到：

$$E(V) = \frac{1}{n+1}$$

3 第四章习题 9

9. (1) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \le y \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X^2+Y^2)$。

(2) 设随机变量 X, Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-(x+\frac{y}{y})}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$。

解答 3.1: 9

根据期望的定义，$E(X)$ 的表达式为：

$$E(X) = \iint_D x f(x,y)\, dx\, dy,$$

其中区域 D 满足 $0 \le y \le x \le 1$。将密度函数 $f(x,y) = 12y^2$ 代入，得到：

$$E(X) = \int_0^1 \int_y^1 x \cdot 12y^2\, dx\, dy = \frac{4}{5}$$

同理，$E(Y)$, $E(XY)$ 的计算公式为：

$$E(Y) = \iint_D y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 y \cdot 12y^2\,dx\,dy = \frac{3}{5}$$

$$E(XY) = \iint_D xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 xy \cdot 12y^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}$$

使用期望的线性性质，$E(X^2+Y^2) = E(X^2) + E(Y^2)$，其中：

$$E(X^2) = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 x^2 \cdot 12y^2\,dx\,dy,$$

$$E(Y^2) = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 y^2 \cdot 12y^2\,dx\,dy.$$

代入相加可得：

$$E(X^2+Y^2) = E(X^2) + E(Y^2) = \frac{16}{15}$$

第 (2) 问

1. 对于联合密度函数 $f(x,y) = \frac{1}{y}e^{-(x+\frac{y}{y})}$，我们可以计算 $E(X)$：

$$E(X) = \int_0^\infty \int_0^\infty x f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}\,dx\,dy.$$

2. 与上同理

$$E(Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty y f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{x}{y})}\,dx\,dy.$$

3.

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty xy \cdot \frac{1}{y}e^{-(x+\frac{y}{y})}\,dx\,dy.$$

4 第四章习题 12

某车间生产的圆盘直径在区间 (a,b) 上服从均匀分布，试求圆盘面积的数学期望。

解答 4.1: 12

设圆盘的直径为随机变量 D，其在区间 (a,b) 上服从均匀分布。因此，概率密度函数 $f(D)$ 为：

$$f(D) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le D \le b.$$

圆盘的面积 A 可以表示为：

$$A = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}D^2.$$

则：

$$E(A) = E\left(\frac{\pi}{4}D^2\right) = \frac{\pi}{4}E(D^2).$$

因为 D 在 (a,b) 上均匀分布，所以：

$$E(D^2)=\int_a^b D^2\cdot f(D)\,dD=\int_a^b D^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dD.$$

计算该积分：

$$E(D^2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b D^2\,dD.$$

对 D^2 积分，得到：

$$\int D^2\,dD=\frac{D^3}{3},$$

因此，

$$E(D^2)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{D^3}{3}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

代入 $E(D^2)$ 的值，我们得到：

$$E(A)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{\pi(b^3-a^3)}{12(b-a)}.$$

通过分解 b^3-a^3 为 $(b-a)(b^2+ab+a^2)$，可以进一步简化：

$$E(A)=\frac{\pi}{12}(b^2+ab+a^2).$$

5 第四章习题 14

设随机变量 X_1,X_2 的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

解答 5.1: 14

1. 计算 $E(X_1+X_2)$：
根据期望的线性性质，$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$。
- X_1 服从指数分布，概率密度为 $f_1(x)=2e^{-2x}$，因此 X_1 的期望为：

$$E(X_1)=\int_0^\infty x\cdot 2e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}.$$

- X_2 也服从指数分布，概率密度为 $f_2(x)=4e^{-4x}$，因此 X_2 的期望为：

$$E(X_2)=\int_0^\infty x\cdot 4e^{-4x}\,dx=\frac{1}{4}.$$

所以，

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

2. 计算 $E(2X_1-3X_2^2)$：
根据期望的线性性质，$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)$。
- 已知 $E(X_1)=\frac{1}{2}$，所以 $2E(X_1)=2\times\frac{1}{2}=1$。
- 计算 $E(X_2^2)$。对于指数分布的 X_2（参数为 4），我们有：

$$E(X_2^2)=\int_0^{\infty}x^2\cdot 4e^{-4x}\,dx=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}.$$

所以，

$$E(2X_1-3X_2^2)=1-3\cdot\frac{1}{8}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}.$$

第 (2) 问

若 X_1 和 X_2 相互独立，则 $E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)$。
- 已知 $E(X_1)=\frac{1}{2}$ 和 $E(X_2)=\frac{1}{4}$。
因此，

$$E(X_1X_2)=E(X_1)\cdot E(X_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$