概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

13 September 2024

第一周概率论作业

1 第一章习题 1、3、4

1.1 习题 1

1. 写出下列随机试验的样本空间 S:

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数 (设以百分制记分)。

解答 1.1: 1

样本空间 S 是从 0 到 100 的所有可能分数组成的集合。

$$S = [0, 100]$$

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数。

解答 1.2: 2

样本空间 S 是所有可能的生产件数，因为必须生产 10 件正品，所以最少生产 10 件，最多可以无限生产。

$$S = \{10, 11, 12, \ldots, n, n = +\infty\}$$

(3) 对某工厂生产的产品进行检查，合格的记上“正品”，不合格的记上“次品”，如连续查出了 2 件次品就停止检查，若检查了 4 件产品就停止检查，记录检查的结果。样本空间 S 是所有可能的检查结果。假设“正品”记为 P，“次品”记为 F，

解答 1.3: 3

样本空间可以包含如下元素：

$$S = \{PPPP, PPPF, PPFP, PFPP, FPFP, FPPF, PFPF, PPFF, PFF, FPF, FF\}$$

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的坐标。

解答 1.4: 4

样本空间 S 是单位圆内的所有点的坐标，坐标形式为 (x,y)，其中满足：

$$x^2+y^2\leq 1$$

即：

$$S=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$$

1.2 习题 3

1. 已知 A,B,C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率。

求 A、B、C 至少有一个发生的概率，即计算三个事件的并集概率：

解答 1.5: 5

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

其中，由于 $ABC\subset AB$，故 $P(ABC)<=P(AB)=0$, 由于 $P(ABC)>=0$, 故 $P(ABC)=0$。则所求 $P(ABC)=\frac{5}{8}$.

2. 已知 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3},P(C)=\frac{1}{5},P(AB)=\frac{1}{10},P(AC)=\frac{1}{15},P(BC)=\frac{1}{20},P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B,A\cup B\cup C,\overline{AB}C,\overline{A}B\cup C$ 的概率。

解答 1.6: 6

解答：

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cup B)=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$
$$=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A\cup B\cup C)=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap(\overline{S}-C))=P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{16}{60}-\frac{9}{60}=\frac{7}{60}$$

$$p = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

$$p = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(C) - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

$$p = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} - \frac{7}{60} = \frac{7}{20}$$

(3) 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$，(i) 若 A, B 互不相容，求 $P(AB^c)$，(ii) 若 $P(AB) = \frac{1}{8}$，求 $P(AB^c)$。

解答 1.7: 7

不妨设 Ω 为全集.
(i) $P(AB) = P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}$
(ii)$P(AB) = P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

1.3 习题 4

(1) 证明 $\overline{AB} = \overline{A}B$ 等价于 $A = B$：

解答 1.8: 8

因为 $\overline{AB}$ 表示 A 和 B 都不发生的事件，且 $\overline{A}B$ 表示 A 不发生但 B 发生的事件。

$$\overline{AB} = \overline{A}B \implies A = B$$

根据集合的性质，这说明 A 与 B 是相同的事件。

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率：

解答 1.9: 9

设事件 A 或事件 B 发生但不同时发生的概率为：

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$$

根据集合间的基本概率公式，可以得出：

$$P(A\text{ 恰有一个发生}) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

证毕。

2 附加题

- 补充习题 1: 设 A, B, C 为三个事件。已知 $P(A) = a, P(B) = 2a, P(C) = 3a, P(AB) = P(AC) = P(BC) = b$。证明：$a \leq \frac{1}{4}, b \leq \frac{1}{4}$。
- 补充习题 2: 证明 $|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$。

2.1 附加题 1

PROVE:

因为 $AB \subseteq A$，则 $P(AB) \leq P(A)$，即 $b \leq a$。

由于 $1 \geq P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = 5a - b \geq 4a$，则 $a \leq \frac{1}{4}$。

由 $b \leq a$ 且 $a \leq \frac{1}{4}$，得 $b \leq \frac{1}{4}$。

■

2.2 附加题 2

PROVE:

设 $P(A) \geq P(B)$，则

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(B) - P(B)P(B) = P(B)[1 - P(B)] \leq (\frac{[P(B) + 1 - P(B)]}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

■