概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

25 October 2024

第七周概率论作业

1 第三章习题 2

(1) 盒子里装有 3 只黑球，2 只红球，2 只白球，在其中任选取 4 只球。以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数。求 X 和 Y 的联合分布律。

(2) 在 (1) 中求 $P(X > Y)$, $P(Y = 2X)$, $P(X + Y = 3)$, $P(X < 3 - Y)$。

解答 1.1: 2

1. 总共有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，从中取 4 只球。
黑球的取法：X 可能的取值为 $0, 1, 2, 3$。红球的取法：Y 可能的取值为 $0, 1, 2$。
X 和 Y 的联合分布律的每一项如下：

$$P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{2}{4-x-y}}{\binom{7}{4}}, \quad 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2.$$

联合分布律表如下：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
3	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{0}{35}$

(2) 计算概率如下：

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 3, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) \\ &= \frac{3}{35} + \frac{12}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} = \frac{19}{35} \end{aligned}$$

$$P(Y = 2X) = P(X = 1, Y = 2) = \frac{6}{35}$$

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=3) &= P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=0) \\
&= \frac{6}{35}+\frac{12}{35}+\frac{2}{35}=\frac{20}{35}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
P(X<3-Y)=P(X+Y<3) \\
=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0) \\
=\frac{1}{35}+\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{10}{35}
\end{gathered}
$$

2 第三章习题 3

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$
f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2,\ 2<y<4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

(1) 确定常数 k。

(2) 求 $P(X<1,Y<3)$。

(3) 求 $P(X<1.5)$。

(4) 求 $P(X+Y\leq 4)$。

解答 2.1: 3

(1) 由概率密度函数的积分为 1 确定常数 k：

$$
\int_0^2\int_2^4 k(6-x-y)\,dy\,dx=1.
$$

计算得 $k=\frac{1}{8}$。

(2) 计算 $P(X<1,Y<3)$：

$$
P(X<1,Y<3)=\int_0^1\int_2^3 k(6-x-y)\,dy\,dx.
$$

可得结果为 $\frac{3}{8}$

(3) 计算 $P(X<1.5)$：

$$
P(X<1.5)=\int_0^{1.5}\int_2^4 k(6-x-y)\,dy\,dx.
$$

可得结果为 $\frac{27}{32}$

(4) 计算 $P(X+Y\leq 4)$：

$$
P(X+Y\leq 4)=\int_0^2\int_2^{4-x} k(6-x-y)\,dy\,dx.
$$

结果为 $\frac{2}{3}$

3 补充习题 1

三个人朋友去喝咖啡，他们决定用抛硬币的方式确定谁付账：如果有人抛币的结果与其他人不同，就有他买单；如果三个人抛币的结果一致，则重新抛币。求如下事件的概率：

(1) 第二轮确定由谁买单；(2) 第三轮还没有确定谁买单。

解答 3.1: 补充习题 1

设三个人抛硬币的结果为 $\{H, T\}$，其中 H 表示正面，T 表示反面。
每个人抛硬币的结果有两种可能，总共有 $2^3 = 8$ 种可能结果。我们根据抛币的规则来分析：
当三个人的结果不同时，即两个人结果一样，另一个不同，那么立即确定谁买单。此时可能的情况有：

$$\{H, H, T\}, \{H, T, H\}, \{T, H, H\}, \{T, T, H\}, \{T, H, T\}, \{H, T, T\}$$

总共 6 种情况。
当三个人的结果完全一致，即 $\{H, H, H\}$ 或者 $\{T, T, T\}$ 时，重新抛币，这有 2 种可能。
因此，(1) 在第二轮确定由谁买单的概率为第一次三个人结果不一致的概率，即：

$$P_1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

(2) 在第三轮还没有确定谁买单的概率是第一次和第二次抛币结果都一致的概率，即：

$$P_2 = \left(\frac{2}{8}\right) \times \left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

4 补充习题 2

某地区漏税比例 X 服从参数为 $\alpha = 2, \beta = 9$ 的 Beta 分布，求此比例小于 10% 的概率。

解答 4.1: 补充习题 2

Beta 分布的概率密度函数为：

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < x < 1$$

其中 $B(\alpha, \beta)$ 是 Beta 函数。
题目中 $X \sim \text{Beta}(2, 9)$，因此我们要求 $P(X < 0.1)$。这个概率可以通过 Beta 累积分布函数计算：

$$P(X < 0.1) = F(0.1; 2, 9)$$

使用 Beta 分布的累积分布函数的数值计算工具可以得到：

$$P(X < 0.1) \approx 0.374$$