概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

20 September 2024

第二周概率论作业

1 第二章习题 10、11、12

1.1 习题 10

在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母, 从中任意连抽 7 张, 求其排列结果为 ability 的概率.

解答 1.1: 1

从 11 张卡中抽 7 张，总排列数为：

$$A(11,7) = \frac{11!}{(11-7)!} = \frac{11!}{4!}$$

”ability” 单词中，”i” 出现两次, 而”b” 也有两种取的方法，故概率就是从 11 张卡片中抽出字母”ability” 的可能数除以总可能数，表示为：

$$P(\text{ability}) = \frac{\text{A(ability)}}{A(11,7)} = \frac{C(2,1)\cdot C(2,1)}{\frac{11!}{4!}} = \frac{4}{A(11,7)}$$

1.2 习题 11

将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去, 求杯子中球的最大个数分别为 1,2,3 的概率.

解答 1.2: 2

- 3 只球随机放入 4 个杯子中去，共 4^3 种放法。
- 当 3 只球放在同一个杯中才可能发送最大个数为 3 的情况。有 4 个杯子可以选择，即：

$$P(A_3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}.$$

- 每个杯子最多放一只球时，杯子中最大的球个数为 1。

$$P(A_1) = \frac{A(4,3)}{4^3} = \frac{3}{8}.$$

- 由于杯子内球的最大个数只能为 1，2，3，故：

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

1.3 习题 12

50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上, 其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解答 1.3: 3

考虑铆钉的排列顺序，因为铆钉是被逐个分配到位置的。
30 个位置需要从 50 个铆钉中随机选择铆钉来填充。每个位置被分配到弱铆钉的概率为：

$$p = \frac{3}{50}$$

铆钉是随机分配的，每个位置被分配到弱铆钉的概率为 $\frac{3}{50}$。
要使某一个特定的部件的 3 个位置都被分配到弱铆钉，概率为：

$$P_{\text{单个部件}} = \left(\frac{3}{50}\right) \times \left(\frac{2}{49}\right) \times \left(\frac{1}{48}\right)$$

（假设没有放回，每次选一个弱铆钉的概率依次减少）
但是，由于任意一个部件都可能满足条件，我们需要将这个概率乘以部件的数量：

$$P = 10 \times P_{\text{单个部件}} = 10 \times \left(\frac{3}{50} \times \frac{2}{49} \times \frac{1}{48}\right)$$

$$P = 10 \times \left(\frac{3 \times 2 \times 1}{50 \times 49 \times 48}\right) = 10 \times \left(\frac{6}{117600}\right) = \frac{60}{117600} = \frac{1}{1960}$$

2 附加题

2.1 附加题 1

甲、乙两船停靠同一码头, 各自独立地到达, 且每艘船在一昼夜间 (24 小时) 到达是等可能的. 若甲船需停泊 1 小时, 乙船需停泊 2 小时, 且该码头只能停泊一艘船. 求任何一艘船都不需要等候码头空出的概率.

解答 2.1: 5

设甲船到达时间为 X，乙船到达时间为 Y，则 X 和 Y 是两个独立的均匀分布在区间 $[0, 24]$ 上的随机变量。
甲船停泊 1 小时，所以甲船占用码头的时间段是 $[X, X+1]$。

乙船停泊 2 小时，所以乙船占用码头的时间段是 $[Y, Y+2]$。
为了让任何一艘船都不需要等待，甲船的停泊时间和乙船的停泊时间段不能重叠，即要满足：

$$[X, X+1] \cap [Y, Y+2] = \emptyset$$

甲船在乙船停泊之前到达且离开：

$$X+1 \leq Y$$

$$\frac{1}{2} \times 23 \times 23 = 264.5$$

乙船在甲船停泊之前到达且离开:

$$Y+2 \leq X$$

$$\frac{1}{2} \times 22 \times 22 = 242$$

因此，任意一艘船都不需要等待的概率为：

$$P = \frac{264.5 + 242}{24 \times 24} = \frac{506.5}{576} \approx 0.879$$

在平面画上间隔为 d 的等距平行线, 向平面任意投掷一个边长为 a, b, c (均小于) 的三角形, 求其与平行线相交的概率.

解答 2.2: 6