DOI:10.13587/j.cnki.jieem.1994.01.005

第8卷第1期 管理工程学报 No. 1 Vol. 8
1994年3月 Journal of Industrial Engineering/Engineering Management Mar. 1994

判断矩阵排序的 χ^2 方法*

王应明
(厦门大学系统科学系)
厦门 361005

傅国伟
(清华大学环境工程系)
北京 100084

摘 要

本文研究判断矩阵排序的 χ^2 方法及其算法实现，并给出一种与之相适应的一致性检验方法和应用实例。与最小二乘排序方法(LSM)相比，χ^2 排序方法算法简单、保序性能好，可得到与特征向量排序方法(EM)完全一致的排序结果，是一种较为实用而可靠的排序方法。

关键词： 判断矩阵 排序方法 χ^2 分布 一致性检验

1 引言

层次分析法作为规划、预测和决策工具，自七十年代中期问世以来，已在世界各国得到极为迅速的普及和推广，并在社会经济管理等各个领域得到极为广泛的应用。与此同时，有关层次分析法中的判断矩阵排序理论和方法也在不断发展，传统的单一的特征向量排序方法已不再满足理论的发展和应用的需要，大量的具有良好优越性能的最优化排序方法不断涌现。迄今为止，已有十多种排序方法被提出，其中，χ^2 排序方法就是众多排序方法中的一种。该方法不但保序性能好，而且算法比 LSM 排序方法简单。此外，χ^2 排序方法还具有许多特征向量排序方法 EM 所不具备的优良性质，如文献[1]所定义和论述的对称性和完全协调性等等。该方法最早由 *R. E. Jensen* 1984 年在其论文初稿[2]中提出，但由于牵涉到复杂的非线性求解，该方法至今一直未见发表，文献[3]也只是顺便提及而已，故而该方法一直鲜为人知，更没有能够引起人们的重视。本文拟对这种排序方法作进一步探讨，并给出一种较为简洁而实用的收敛性迭代算法和应用实例。

2 χ^2 方法排序原理和一致性检验

设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其排序向量为 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)^T$，并满足规范化约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \tag{1}$$

记向量空间 $D=\{W=(W_1,W_2,\cdots,W_n)^T \mid W_i>0,\ i=1,2,\cdots,n;\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1\}$，集合 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$。若 A 满足完全一致性条件

---

* 稿件收到日期： 1992-08-25

$$a_{ij} = a_{ik}/a_{jk} \qquad i,j,k \in \Omega \tag{2}$$

则称 A 为一致性判断矩阵。根据一致性判断矩阵特性，有

$$a_{ij} = W_i/W_j \qquad i,j \in \Omega \tag{3}$$

亦即

$$W_i = a_{ij}W_j \qquad i,j \in \Omega \tag{4}$$

将(4) 式代入(1) 式规范化约束条件，则由此可得一致性判断矩阵排序向量的精确解为

$$W^* = \left(1/\sum_{i=1}^{n} a_{i1}, 1/\sum_{i=1}^{n} a_{i2}, \cdots, 1/\sum_{i=1}^{n} a_{in}\right)^T \tag{5}$$

然而，众所周知，层次分析法中判断矩阵的获得一般都由专家给定，因此，判断矩阵的一致性必然要受到专家知识结构、判断水平和个人偏好等众多主观因素的影响，再加之判断事物本身的模糊性和不精确性，实际应用中的判断矩阵往往很难满足完全一致性条件(2) 式，故而(3) 式在通常情况下是不成立的。为此，引入偏差项 ε_{ij}，即令

$$\varepsilon_{ij} = a_{ij} - W_i/W_j \qquad i,j \in \Omega \tag{6}$$

同时构造偏差函数为

$$\begin{aligned} F(W) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - W_i/W_j)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} G(W) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(W_j/W_i)\varepsilon_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_{ij} - W_i/W_j)^2}{W_i/W_j} \end{aligned} \tag{8}$$

显然，偏差函数 $F(W)$ 和 $G(W)$ 总是愈小愈好，因此，合理的排序向量 W^* 应使 $F(W^*)$ 或 $G(W^*)$ 最小，由此导出的排序方法分别称为最小二乘排序方法(LSM) 和 χ^2 排序方法(CSM)，亦即

$$(LSM)\begin{cases} \min \quad F(W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - W_i/W_j)^2 & (9) \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 & (10) \end{cases}$$

$$(CSM)\begin{cases} \min \quad G(W) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_{ij} - W_i/W_j)^2}{W_i/W_j} & (11) \\ s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 & (12) \end{cases}$$

从偏差函数 $G(W)$ 的定义式可以看出，CSM 方法本质上是一种加权最小二乘排序方法。对于偏差函数 $G(W)$，有

定理 1　偏差函数 $G(W)$ 在 D 空间中有唯一最小值点 W^*，并且 W^* 是方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(1 + a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j} - (1 + a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i}\right] = 0 \qquad i \in \Omega \tag{13}$$

在 D 空间中的唯一解。

该定理的证明分为三步，第一步首先证明 W^* 在 D 空间中的存在性，第二步证明 W^* 满足方程组(13)，第三步证明 W^* 在 D 空间中的唯一性。关于存在性和唯一性证明仿文献[4-5]可得，为节省篇幅，此处仅证明对本文排序算法起重要和决定性作用的第二步。

事实上，由于 W^* 满足规范化约束条件(1)式，故作 $Lagrange$ 函数

$$L(W,\lambda)=G(W)+\lambda(\sum_{i=1}^{n}W_i-1) \tag{14}$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial W_i}=0$，得

$$\sum_{j=1}^{n}[2(a_{ji}-\frac{W_j}{W_i})(\frac{1}{W_i})+(a_{ji}-\frac{W_j}{W_i})^2\frac{1}{W_j}]-\sum_{j=1}^{n}[2(a_{ij}-\frac{W_i}{W_j})\frac{1}{W_i}+(a_{ij}-\frac{W_i}{W_j})^2\frac{W_j}{W_i}]+\lambda=0 \qquad i\in\Omega \tag{15}$$

上式两端同乘以 W_i，整理后有

$$\sum_{j=1}^{n}[(1+a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j}-(1+a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i}]+\lambda W_i=0 \qquad i\in\Omega \tag{16}$$

此式两端对 i 求和，有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(1+a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j}-(1+a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i}]+\lambda\sum_{i=1}^{n}W_i=0 \tag{17}$$

由此可导得 $\lambda=0$，于是，(16) 式等价于

$$\sum_{j=1}^{n}[(1+a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j}-(1+a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i}]=0 \qquad i\in\Omega \tag{18}$$

故 W^* 是方程组(13) 的解。

由于方程组(13) 是一组非线性方程，故为了求解 W^*，可按如下算法步骤进行迭代：

(1) 取定初始排序向量 $W(0)=(W_1(0),W_2(0),\cdots,W_n(0))^T\in D$，并给定迭代精度 ε，同时置 $k=0$，一般情况下，可取 $W(0)=\dfrac{1}{n}e$，其中：$e=(1,1,\cdots,1)^T$。

(2) 计算

$$\varepsilon_i(W(k))=\sum_{j=1}^{n}[(1+a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j}-(1+a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i} \qquad i\in\Omega$$

如果对所有 $i\in\Omega$，恒有 $|\varepsilon_i(W(k))|\leqslant\varepsilon$，则算法停止，$W^*=W(k)$；反之，执行第(3) 步。

(3) 确定 m 使 $|\varepsilon_m(W(k))|=\max\limits_{i\in\Omega}\{|\varepsilon_i(W(k))|\}$，

并令

$$\begin{cases}T(k)=[\sum\limits_{j\neq m}(1+a_{mj}^2)\dfrac{W_j(k)}{W_m(k)}/\sum\limits_{j\neq m}(1+a_{jm}^2)\dfrac{W_m(k)}{W_j(k)}]^{1/2} \\ X_i(k)=\begin{cases}T(k)W_m(k) & i=m\\ W_i(k) & i\neq m\end{cases} & i\in\Omega \\ W_i(k+1)=X_i(k)/\sum\limits_{j=1}^{n}X_j(k) & i\in\Omega\end{cases}$$

(4) 令 $k=k+1$，转(2)。

关于上述算法的收敛性，有

定理 2 对任意 $\varepsilon>0$，算法必在有限步内迭代收敛。

证:按照算法步骤(3),将 $W(k)$ 修改成 $W(k+1)$ 考察偏差函数 $G(W)$ 的变化过程。

设 $t>0$，　令 $r(t)=G(X(k))$

$$\begin{aligned}
&= G(W_1(k),\cdots,W_{m-1}(k),tW_m(k),W_{m+1}(k),\cdots,W_n(k)) \\
&= \sum_{j\neq m}\left(a_{mj}-\frac{tW_m(k)}{W_j(k)}\right)^2\frac{W_j(k)}{tW_m(k)}+\sum_{i\neq m}\left(a_{im}-\frac{W_i(k)}{tW_m(k)}\right)^2\frac{tW_m(k)}{W_i(k)}+ \\
&\quad \sum_{i\neq m}\sum_{j\neq m}\left(a_{ij}-\frac{W_i(k)}{W_j(k)}\right)^2\frac{W_j(k)}{W_i(k)}
\end{aligned} \tag{19}$$

记

$$\begin{cases}
h_0=\sum\limits_{i\neq m}\sum\limits_{j\neq m}\left(a_{ij}-\dfrac{W_i(k)}{W_j(k)}\right)^2\dfrac{W_j(k)}{W_i(k)}-2\sum\limits_{j\neq m}(a_{mj}+a_{jm}) \\
h_1=\sum\limits_{j\neq m}(1+a_{mj}^2)\dfrac{W_j(k)}{W_i(K)} \\
h_2=\sum\limits_{j\neq m}(1+a_{jm}^2)\dfrac{W_m(k)}{W_j(k)}
\end{cases} \tag{20}$$

则(19)式可表示为

$$r(t)=h_1/t+h_2/t+h_0 \tag{21}$$

令 $r'(t)=0$,得 $r(t)$ 函数的最小值点和最小值为

$$t^*=\sqrt{h_1/h_2}=\left[\sum_{j\neq m}(1+a_{mj}^2)\frac{W_j(k)}{W_i(k)}\Big/\sum_{j\neq m}(1+a_{jm}^2)\frac{W_m(k)}{W_j(k)}\right]^{1/2} \tag{22}$$

$$r(t^*)=2\sqrt{h_1h_2}+h_0 \tag{23}$$

若 $t^*=1$,则由(22)式可导得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(1+a_{mj}^2)\frac{W_j(k)}{W_m(k)}-(1+a_{jm}^2)\frac{W_m(k)}{W_j(k)}\right]=0 \tag{24}$$

由于 m 是使 $|\varepsilon_i(W(k))|$ 达到最大的下标变量,故对所有 $i\in\Omega$,此时恒有

$$\sum_{j=1}^{m}\left[(1+a_{ij}^2)\frac{W_j}{W_i}-(1+a_{ji}^2)\frac{W_i}{W_j}\right]=0 \qquad i\in\Omega \tag{25}$$

成立。根据定理1,算法已经收敛,$W^*=W(k)$;若 $t^*\neq 1$ 则有

$$\begin{aligned}
G(W(k))-G(X(k)) &= r(1)-r(t^*) \\
&= h_1+h_2-2\sqrt{h_1h_2}=(\sqrt{h_1}-\sqrt{h_2})^2>0
\end{aligned} \tag{26}$$

由于偏差函数 $G(W)$ 是齐次函数,故有 $G(X(k))=G(W(k+1))$,因此,(26)式表明,算法对任意 k,恒有

$$G(W(k+1))<G(W(k)) \tag{27}$$

成立,亦即,$\{G(W(k))\}$ 是单调下降序列,又由于 $G(W)$ 是非负函数,具有下确界,故而根据数学分析原理可知,单调下降的有界序列必然收敛。

定理3　对所有一致性判断矩阵,χ^2 排序方法(CSM)与特征向量排序方法(EM)具有相同的导出标度 W^*。

定理4　χ^2 排序方法 CSM 具有文献[1]所定义的置换不变性、相容性、对称性和完全协调 性等优良性质。

证明略

理想的判断矩阵应该满足完全一致性条件,若 A 不满足完全一致性条件,则 A 是非一致性判断矩阵。对于非一致性判断矩阵,为保证其排序结果的可信度和准确性,必须对其判断

质量进行一致性检验。由于 χ^2 排序方法不直接求解判断矩阵的最大特征根，而是直接求解判断矩阵的最佳排序向量，故而传统的使用判断矩阵最大特征根进行的一致性检验方法必须变换为适用于排序向量进行一致性检验。经过变换[6]有

$$
\begin{aligned}
CI &= \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[a_{ij} \frac{W_j}{W_i} + a_{ji} \frac{W_i}{W_j} - 2 \right]
\end{aligned}
\tag{28}
$$

显然，根据此式进行一致性检验，无需计算判断矩阵最大特征根，故而该公式比特征根检验公式具有更广阔的适用范围，适用于判断矩阵所有排序方法。

3 应用举例

为检验 χ^2 方法的排序有效性，现举两例对三种排序方法 *EM*、*LSM* 和 *CSM* 的排序结果进行对比分析。

例 1 已知某判断矩阵及其相应的三种排序结果为：

G	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	ii *EM*	*LSM*	*CSM*
A	1	1/6	1/2	1/9	5	0.0893	0.0561	0.0713
B	6	1	2	1	5	0.3287	0.3100	0.3201
C	2	1/2	1	1	5	0.1983	0.1965	0.1970
D	9	1	1	1	5	0.3413	0.3824	0.3722
E	1/5	1/5	1/5	1/5	1	0.0424	0.0595	0.0393
	$RI = 1.12$					$CR = 0.1160$	$CR = 0.2326$	$CR = 0.1233$

例 2 对图 1 所示层次结构进行总排序

已知各层次的判断矩阵及其相应的排序结果如下页

例 1 取自文献[7]。*T. L. saaty* 教授曾用此例评价了对数最小二乘排序方法 *LLSM* 的保序性，并与 *EM* 排序方法进行了对比分析。从例 1 三种排序方法的结果可以看出，*LSM* 排序方法的保序性稍差，在 *A* 与 *E* 的优劣关系上与 *EM* 排序方法发生了倒序现象，而 *CSM* 排序方法则克服了 *LSM* 排序方法的不足，保序性较好，与 *EM* 排序方法取得了完全一致的排序结果，亦即，$D \succ B \succ C \succ A \succ E$.

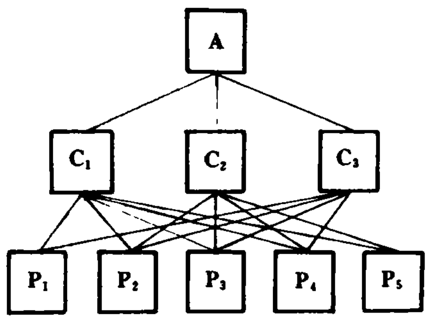

图 1

(1) 判断矩阵 $A-C$

A	C_1	C_2	C_3	W EM	LSM	CSM
C_1	1	1/5	1/3	0.1047	0.1161	0.1090
C_2	5	1	3	0.6370	0.6164	0.6291
C_3	3	1/3	1	0.2538	0.2675	0.2619
	$RI=0.58$			$CR=0.0332$	$CR=0.0413$	$CR=0.0344$

(2) 判断矩阵 C_1-P

C_1	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	W EM	LSM	CSM
P_1	1	3	5	4	7	0.4925	0.4470	0.4756
P_2	1/3	1	3	2	5	0.2306	0.2657	0.2376
P_3	1/5	1/3	1	1/2	3	0.0931	0.0935	0.0965
P_4	1/4	1/2	2	1	3	0.1369	0.1361	0.1397
P_5	1/7	1/5	1/3	1/3	1	0.0468	0.0577	0.0505
	$RI=1.12$					$CR=0.0283$	$CR=0.0427$	$CR=0.0299$

(3) 判断矩阵 C_2-P

C_2	P_2	P_3	P_4	P_6	W EM	LSM	CSM
P_2	1	1/7	1/3	1/5	0.0553	0.0675	0.0601
P_3	7	1	5	3	0.5650	0.5106	0.5461
P_4	3	1/5	1	1/3	0.1175	0.1110	0.1198
P_5	5	1/3	3	1	0.2622	0.3109	0.2739
	$RI=0.90$				$CR=0.0433$	$CR=0.0715$	$CR=0.0462$

(4) 判断矩阵 C_3-P

C_3	P_1	P_2	P_3	P_4	W EM	LSM	CSM
P_1	1	1	3	3	0.3750	0.3750	0.3750
P_2	1	1	3	3	0.3750	0.3750	0.3750
P_3	1/3	1/3	1	1	0.1250	0.1250	0.1250
P_4	1/3	1/3	1	1	0.1250	0.1250	0.1250
	$RI=0.90$				$CR=0$	$CR=0$	$CR=0$

层次总排序结果为：

	EM	LSM	CSM
P_1	0.1484	0.1522	0.1501
P_2	0.1562	0.1728	0.1619
P_3	0.4019	0.3590	0.3868
P_4	0.1215	0.1176	0.1234
P_5	0.1719	0.1983	0.1778
CI	0.0282	0.0452	0.0298
RI	0.9230	0.9255	0.9240
CR	0.0305	0.0489	0.0322

例2的层次总排序则再次证实了CSM排序方法的有效性，而且CSM排序方法的一致性指标较LSM排序方法有较大程度改善。显然，χ^2排序方法CSM是一种较为实用而可靠的排序方法。

4. 结束语

判断矩阵排序的χ^2方法有效地克服了LSM排序方法的不足，保序性能好，可得到与EM排序方法完全一致的排序结果，其计算时间与EM排序方法相当，由于χ^2排序方法较LSM排序方法算法简单、保序性好，故而是一种较LSM排序方法更可靠而实用的排序方法。本文给出的收敛性迭代算法则为χ^2排序方法的实际应用奠定了良好基础。

参考文献

〔1〕 贾兰香、陈宝谦. 层次分析决策方法排序问题的一般性质. 南开大学学报(自然科学)，1991，No. 2，19—28.

〔2〕 Jensen R E. Comparisons of Eigenvector, Least Squares, Chi Square, and Logarithmic Least Squares Methods of Scaling a Reciprocal Matrix. Trinity University, Working Paper No. 127. 1984

〔3〕 Blankmeyer E. Approaches to Consistency Adjustment. Journal of Optimization Theory and Applications, 54 (1987), 479-488.

〔4〕 陈宝谦. 层次分析的两种新排序方法. 系统工程学报，1990，No. 2，43—51

〔5〕 王莲芬、许树柏. 层次分析法引论. 中国人民大学出版社，1990年，187-195

〔6〕 王应明、徐南荣. 层次分析中的最小最大偏差排序方法. 决策与层次分析法. 1991，No. 1，28—34

〔7〕 Saaty T L. Eigenvector and Logarithmic Least Squares. European Journal of Operational Research, 48 (1990), 156-160

〔8〕 Vargas L G. An Overview of the Analytic Hierarchy Process and Its Applications. European Journal of Operational Research, 48(1990), 2-8

〔9〕 Zahedi F. The Analytic Hierarchy Process——A survey of the method and its applications. Interfaces, 16 (1986), 96-108

THE CHI-SQUARE PRIORITY METHOD OF COMPARISON MATRIX

Wang Yingming
(Xiamen University, Xiamen 361005 PRC)

Fu Guowei
(Tsinghua University, Beijing 100084 PRC)

Abstract

This paper studies the chi-square priority method of comparison matrix (CSM) and its algorithm realization and also gives a consistency checking method suitable for priorities and two examples. Compared with the least-square priority method (LSM), the chi-square priority method is a better and more reliable priority method, having a lot of good properties such as good rank preservation and simple algorithm, etc.

Key words: Comparison matrix; Priority method; Consistency check; Chi-square distribution

责任编辑 吴晓波