概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

22 December 2024

第十三周概率论作业

1 第六章习题 2

解答 1.1: 2

已知总体 $X \sim N(12,4)$，从中随机抽取容量为 5 的样本 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5。

(1) 求样本均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率

样本均值：

$$\bar{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i, \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(12, \frac{4}{5}\right),$$

其标准差为：

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

目标概率为：

$$P(|\bar{X} - \mu| > 1).$$

$$P(|\bar{X} - \mu| > 1) = 2P\left(Z > \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

查正态分布表得：

$$P(Z > \frac{\sqrt{5}}{2}) = P(Z > 1.118) \approx 0.131.$$

$$P(|\bar{X} - \mu| > 1) = 2 \cdot 0.131 = 0.262.$$

(2) 求 $P\{\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) > 15\}$ 和 $P\{\min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) < 10\}$

1.

记 $Y = \max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$，则：

$$P(Y \leq 15) = [P(X \leq 15)]^5.$$

计算单个样本：

$$P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15-12}{2}\right) = P(Z \leq 1.5) \approx 0.9332.$$

$$P(Y \leq 15) = (0.9332)^5 \approx 0.705.$$

$$P(Y > 15) = 1 - P(Y \leq 15) = 1 - 0.705 = 0.295.$$

2.
记 $Z = \min(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$，则：

$$P(Z \geq 10) = [P(X \geq 10)]^5.$$

计算单个样本：

$$P(X \geq 10) = 1 - P(Z \leq \frac{10-12}{2}) = 1 - P(Z \leq -1) = 1 - 0.1587 = 0.8413.$$

$$P(Z \geq 10) = (0.8413)^5 \approx 0.418.$$

$$P(Z < 10) = 1 - P(Z \geq 10) = 1 - 0.418 = 0.582.$$

2 第六章习题 3

解答 2.1: 3

已知总体 $N(20, 3)$，抽取容量分别为 10 和 15 的两个独立样本，样本均值分别记为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$。

1. 样本均值的分布

$$\bar{X} \sim N\left(20, \frac{3}{10}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(20, \frac{3}{15}\right).$$

由于 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 独立，样本均值差的分布为：

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

所求概率为：

$$p = 2P\left(\bar{X} - \bar{Y} > 0.3\right).$$

$$P\left(\bar{X}-\bar{Y}>0.3\right)=P\left(Z>\frac{0.3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)=P(Z>0.42).$$

查正态分布表得：

$$P(Z>0.42)=1-P(Z\leq 0.42)\approx 1-0.6628=0.3372.$$

$$p=2\cdot 0.3372=0.6744.$$

3 第六章习题 4(2)

设样本 $X_1,X_2,\ldots,X_5$ 来自总体 $N(0,1)$，随机变量 Y 定义为：

$$Y=\frac{C(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}.$$

要求确定常数 C，使得 Y 服从 t 分布。

解答 3.1: 4(2)

1. X_1,X_2 是来自 $N(0,1)$ 的独立同分布随机变量，则：

$$X_1+X_2\sim N(0,2).$$

因此，$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$。
2. $X_3^2+X_4^2+X_5^2$ 是 3 个来自 $N(0,1)$ 的独立同分布随机变量平方和，因此：

$$X_3^2+X_4^2+X_5^2\sim\chi_3^2.$$

3. $\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}\sim\sqrt{\chi_3^2}$，即自由度为 3 的卡方分布的平方根。

2. 构造 t 分布

根据 t 分布的定义：

$$t=\frac{Z}{\sqrt{V/k}},\quad Z\sim N(0,1),\quad V\sim\chi_k^2,$$

其中 k 为自由度。
比较题目中的 Y 和 t 分布的形式，将 Y 写为：

$$Y=\frac{C(X_1+X_2)}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}.$$

当自由度为 3 时，可以得到：$C=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4 第六章习题 6

解答 4.1: 6

已知总体 $X \sim b(1,p)$，即 X 服从参数为 p 的伯努利分布。随机样本为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$。

(1) 求 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的分布律

由于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是从总体 X 中独立抽取的样本，且 $X_i \sim b(1,p)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$，因此每个样本的分布为：

$$P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, \quad x_i = 0 \text{ 或} 1.$$

由于样本是相互独立的，因此联合分布为：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

将每个样本的概率代入得：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}.$$

将幂次化简后得：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

(2) 求 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的分布律

由于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，且 $X_i \sim b(1,p)$，因此其和：

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p).$$

即：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

最终结果

1. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的联合分布为：

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

2. $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim b(n,p)$，其分布律为：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

3. 样本均值和样本方差的期望与方差为：

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = p, \quad D(\bar{X}) = \frac{p(1-p)}{n}, \quad \mathbb{E}(S^2) = p(1-p).$$

5 第六章习题 9

已知总体 $N(\mu, \sigma^2)$，样本容量 $n = 16$，样本方差记为 S^2，目标是：

1. 求 $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right)$。
2. 求 $D(S^2)$。

解答 5.1: 9

(1) 求 $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right)$

由样本方差的统计性质可知：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

其中自由度为 $n - 1 = 15$。
因此，有：

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right) = P\left(\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 15 \cdot 2.041\right) = P\left(\frac{15S^2}{\sigma^2} \leq 30.615\right).$$

定义变量：

$$Y = \frac{15S^2}{\sigma^2}, \quad Y \sim \chi^2(15).$$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right) = P\left(Y \leq 30.615\right).$$

查 χ^2 分布表得：

$$P(Y \leq 30.615) = 1 - P(Y > 30.615).$$

$$P(Y \leq 30.615) \approx 1 - 0.01 = 0.99.$$

$$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right) \approx 0.99.$$

(2) 求 $D(S^2)$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

记：

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}, \quad Y \sim \chi^2(15).$$

根据 χ^2 分布的性质，有：

$$D(Y) = 2 \cdot (n-1) = 2 \cdot 15 = 30.$$

结合 $Y = \frac{15S^2}{\sigma^2}$，得：

$$D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 30.$$

由方差的缩放性质：

$$D(S^2) = \frac{\sigma^4}{15^2} \cdot D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right).$$

$$D(S^2) = \frac{\sigma^4}{15^2} \cdot 30 = \frac{2\sigma^4}{15}.$$