概率论与数理统计

张梓卫 10235101526

24 December 2024

第十三周概率论作业

1 第七章习题 17

分别使用金球和铅球测定引力常数（以 $10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ 为单位），计算以下内容：

1. 用金球测定数据 $6.683, 6.681, 6.676, 6.678, 6.679, 6.672$ 的均值 μ 和置信水平为 0.9 的置信区间；
2. 用铅球测定数据 $6.661, 6.664, 6.667, 6.667, 6.664$ 的均值 μ 和置信水平为 0.9 的置信区间；
3. 分别计算两组数据的方差 σ^2 及其置信区间。

解答 1.1: 17

(1) 金球数据的均值 μ 和置信区间

数据量为 $n=6$，样本均值 $\bar{x}$ 和样本标准差 s 分别计算如下：

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{6.683+6.681+6.676+6.678+6.679+6.672}{6}=6.678$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=0.00387$$

置信水平为 0.9，自由度 $n-1=5$，查 t 分布表得 $t_{0.05,5}=2.015$。置信区间计算公式为：

$$\bar{x}\pm t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

代入得：

$$6.678\pm 2.015\cdot\frac{0.00387}{\sqrt{6}}=6.678\pm 0.003$$

即金球测定数据的置信区间为：

$$(6.675, 6.681)$$

(2) 铅球数据的均值 μ 和置信区间

与（1）同理，这里就把解题过程复制下来了。

数据量为 $n=5$，样本均值 $\bar{x}$ 和样本标准差 s 分别计算如下：

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{6.661+6.664+6.667+6.667+6.664}{5}=6.664$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=0.003$$

置信水平为 0.9，自由度 $n-1=4$，查 t 分布表得 $t_{0.05,4}=2.1318$。置信区间计算公式为：

$$\bar{x}\pm t_{\alpha/2}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$$

代入数据得：

$$6.664\pm 2.1318\cdot\frac{0.003}{\sqrt{5}}=6.664\pm 0.003$$

即铅球测定数据的置信区间为：

$$(6.661, 6.667)$$

(3) 两组数据方差的置信区间

根据题意，样本方差的置信区间计算公式为：

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$$

其中 $\chi^2_{1-\alpha/2}$ 和 $\chi^2_{\alpha/2}$ 为卡方分布的分位数。

金球：

$$\chi^2_{0.95}(5)=1.145,\quad \chi^2_{0.05}(5)=11.070$$

$$\begin{aligned}\text{方差置信区间}&=\left(\frac{(6-1)\cdot 0.00387^2}{11.070},\frac{(6-1)\cdot 0.00387^2}{1.145}\right)\\&=(6.8\times 10^{-6}, 6.5\times 10^{-5})\end{aligned}$$

铅球：

$$\chi^2_{0.95}(4)=0.711,\quad \chi^2_{0.05}(4)=9.488$$

$$\begin{aligned}\text{方差置信区间}&=\left(\frac{(5-1)\cdot 0.003^2}{9.488},\frac{(5-1)\cdot 0.003^2}{0.711}\right)\\&=(3.8\times 10^{-6}, 5.06\times 10^{-5})\end{aligned}$$

2 第七章习题 20

在第 17 题中，设用金球和用铅球测定时测定值总方差相等，求两个测定值总体均值差的置信水平为 0.9 的置信区间。

解答 2.1: 20

由于假设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，因此：

$$\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2), S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

根据公式，可得：

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\leq\frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\leq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right)=1-\alpha.$$

不等式整理后得：

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq\bar{X}_1-\bar{X}_2+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

即 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

代入数据计算

$$\bar{X}_1=6.678,\quad S_1=0.00387,\quad n_1=6;\bar{X}_2=6.664,\quad S_2=0.003,\quad n_2=5.$$

自由度：$n_1+n_2-2=6+5-2=9.$
查 t 分布表得 $t_{0.05}(9)=1.833$。
计算 S_W：

$$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{(6-1)\cdot 0.00387^2+(5-1)\cdot 0.003^2}{9}}=\sqrt{0.000012333}=0.00351.$$

计算置信区间：

$$\bar{X}_1-\bar{X}_2=6.678-6.664=0.014.$$

$$\left(0.014\pm 1.833\cdot 0.00351\cdot\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}\right).$$

$$(0.014\pm 1.833\cdot 0.00351\cdot 0.6055).$$

所以，置信区间为：

$$(0.014-0.0039, 0.014+0.0039)=(0.010, 0.018).$$

3 第七章习题 23

设两位化验员 A 和 B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定，其测定值的样本方差依次为：

$$s_A^2 = 0.5419, \quad s_B^2 = 0.6065.$$

设 σ_A^2, σ_B^2 分别为 A, B 所测定的测定值总体的方差。设总体均为正态，且两样本独立。求方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解答 3.1: 23

$$n_1 = n_2 = 10, \quad s_A^2 = 0.5419, \quad s_B^2 = 0.6065,$$

$$1-\alpha = 0.95, \quad \alpha = 0.05, \quad \alpha/2 = 0.025.$$

统计量 $F = \frac{s_A^2}{s_B^2}$ 服从自由度为 (n_1-1, n_2-1) 的 F 分布。此处自由度为 $(9,9)$。
查 F 分布表得：$F_{0.025}(9,9) = 4.03, \quad F_{0.975}(9,9) = 0.2481.$
方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为：$(0.222, 3.601).$

4 第七章习题 24

在一批货物的容量为 100 的样本中，经检验发现有 16 只次品。

试求这批货物次品率的置信水平为 0.95 的置信区间。

解答 4.1: 24

本题是 $(0,1)$ 分布总体 X 的参数 p 的区间估计问题，样本容量为 $n = 100$。
是一个大样本，X 的分布律为：

$$f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是一个样本，由中心极限定理知，近似地有：

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1), \quad \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1).$$

从而可以得到：

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha.$$

在这里面满足以下条件：

$$a = n + z_{\alpha/2}^2, \quad b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2), \quad c = n\bar{X}^2.$$

$$n = 100, \quad \bar{X} = \frac{16}{100} = 0.16, \quad 1-\alpha = 0.95, \quad \alpha/2 = 0.025, \quad z_{0.025} = 1.96.$$

$$a = n + z_{\alpha/2}^2 = 100 + 1.96^2 = 100 + 3.8416 = 103.8416,$$

$$b = -(2n\bar{X} + z_{\alpha/2}^2) = -(2 \cdot 100 \cdot 0.16 + 1.96^2) = -(32 + 3.8416) = -35.8416,$$

$$c = n\bar{X}^2 = 100 \cdot 0.16^2 = 100 \cdot 0.0256 = 2.56.$$

计算 p_1 和 p_2：

$$p_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad p_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

先计算 $\sqrt{b^2 - 4ac}$：

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{221.7751} \approx 14.8933.$$

继续计算 p_1 和 p_2：

$$p_1 = \frac{-(-35.8416) - 14.8933}{2 \cdot 103.8416} = \frac{35.8416 - 14.8933}{207.6832} = \frac{20.9483}{207.6832} \approx 0.101.$$

$$p_2 = \frac{-(-35.8416) + 14.8933}{2 \cdot 103.8416} = \frac{35.8416 + 14.8933}{207.6832} = \frac{50.7349}{207.6832} \approx 0.244.$$

故货物次品率的置信水平为 0.95 的置信区间为：$(0.101, 0.244)$.

5 第七章习题 26

为研究某种汽车轮胎的磨损特性，随机地选择 16 只轮胎，每只轮胎行驶到磨坏为止，记录所有行驶的路程（以 km 计）如下：

$$41250,\ 40187,\ 43175,\ 41010,\ 39265,\ 41872,\ 42654,\ 41287,$$

$$38970,\ 40200,\ 42550,\ 41095,\ 40680,\ 43500,\ 39775,\ 40400.$$

假设这些数据来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，试求 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限。

解答 5.1: 26

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

整理得：

$$P\left(\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

因此，μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限为：

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha(n-1).$$

已知样本量 $n = 16$，样本均值 $\bar{X} = 41116.875$，
样本标准差 $S = 1346.842$，置信水平 $1 - \alpha = 0.95$，$\alpha = 0.05$。
查 t 分布表得 $t_{0.05}(15) = 1.7531$。
将数据代入公式，计算单侧置信下限：

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha(n-1).$$

$\frac{S}{\sqrt{n}}$：

$$\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1346.842}{\sqrt{16}} = \frac{1346.842}{4} = 336.7105.$$

下限：

$$\mu = 41116.875 - 336.7105 \cdot 1.7531 = 41116.875 - 590.4354 = 40526.4396.$$