2000年10月　东北大学学报（自然科学版）　Oct. 2000
第21卷第5期　Journal of Northeastern University (Natural Science)　Vol. 21, No. 5

文章编号：1005-3026(2000)05-0573-03

一种用于模糊判断矩阵排序的 χ^2 方法

姜艳萍，樊治平
（东北大学 工商管理学院，辽宁 沈阳 110006）

摘　　要：根据决策者给出关于决策方案的一类模糊判断矩阵，提出了一种方案排序的 χ^2 方法。首先，给出了关于模糊判断矩阵及其完全一致性的概念；然后，建立了一个关于求解方案排序值的最优化模型，并讨论了求解优化模型的理论依据和算法，采用该方法可以直接得到每个方案的参考排序值，并使方案的排序结果最大程度地反映了决策者的偏好；最后给出了一个算例。

关　键　词：模糊判断矩阵；方案排序；算法
中图分类号：N 945.25；C 934　　文献标识码：A

对一个给定的有限方案集合进行方案排序或从中选择最优方案，是决策分析的一个重要过程。在这个问题中，为了得到方案排序结果，常常需要决策者提供的偏好信息。但是，由于决策问题的复杂性，决策者很难或无法给出所有方案的偏好信息，但却对两个方案的优劣容易作出判断。通常，决策者可以给出关于两两方案比较的偏好信息，它可由一个判断矩阵来构成，从判断矩阵中元素表示的方式来看，有两类：一类是 AHP (analytic hierarchy process)判断矩阵[1]；另一类是模糊判断矩阵[2~8]。目前，关于 AHP 判断矩阵的研究已有丰富的成果，而关于模糊判断矩阵的研究还不多见。本文则是研究在决策者给出一类模糊判断矩阵情况下的方案排序方法，这是基于文献[9, 10]研究 AHP 判断矩阵的思路，提出了一种方案排序的 χ^2 方法。该方法是通过建立一个最优化模型来得到方案的排序值，文中给出了求解最优化模型的理论分析及其算法。

1　模糊判断矩阵

考虑的问题是对一个有限的决策方案集或指标集 $X=\{x_i \mid i\in I, I=1, 2, \cdots, n, n\geqslant 2\}$ 进行排序，其中 x_i 表示第 i 个决策方案，在方案排序中，所采用的决策信息是决策者提供的关于决策方案的一种由实数值表示的模糊判断矩阵。下面给出关于模糊判断矩阵的一些描述[2~8]。

定义 1　称直积 $X\times X$ 上的一个模糊子集

$$\boldsymbol{P}: X\times X\rightarrow[0,1] \text{ 或 } \boldsymbol{P}=\sum_{(i,j)}\frac{\mu_P(x_i, x_j)}{(x_i, x_j)}$$

为 X 中的(二元)模糊关系。记 $p_{ij}=\mu_p(x_i, x_j)$，p_{ij} 表示方案 x_i 优于 x_j 的程度或 x_i 与 x_j 的相对重要性程度，具体规定：

(1) $p_{ij}=0.5$，表示 x_i 与 x_j 同样重要；

(2) $0\leqslant p_{ij}<0.5$，表示 x_j 比 x_i 重要，且 p_{ij} 越小，x_j 比 x_i 越重要；

(3) $0.5<p_{ij}\leqslant 1$，表示 x_i 比 x_j 重要，且 p_{ij} 越大，x_i 比 x_j 越重要。

定义 2　设二元对比矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，若满足下列性质：

(1) $p_{ii}=0.5$，$\forall i\in I$；

(2) $p_{ij}+p_{ji}=1$，$\forall i, j\in I$，$i\neq j$。

则称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为模糊判断矩阵。其中，性质(2)表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的元素具有互补性。

定义 3　对于模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，若对任意 i, j, k 均有

$$p_{ik}p_{kj}p_{ji}=p_{ki}p_{jk}p_{ij};\ i, j, k\in I;\ i\neq j\neq k \tag{1}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 具有完全一致性。

本文要解决的问题是：依据决策者给定的判断矩阵 $\boldsymbol{P}$，如何进行方案的排序。

2　方案排序的 χ^2 方法

假设决策者针对方案集 X 给出的偏好信息是模糊判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，并记向量空间 $D=\left\{\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}} \mid w_j>0, j\in I;\ \sum_{j=1}^{n}w_j=1\right\}$，则 D 中的向量 $\boldsymbol{w}$ 称为方案的排序

收稿日期：2000-04-05
基金项目：辽宁省自然科学基金项目(00102003)和国家教育部高等学校骨干教师资助计划项目(教技司[2000]65)
作者简介：姜艳萍(1968－)，女，辽宁沈阳人，东北大学博士研究生；樊治平(1961－)，男，江苏镇江人，东北大学教授，博士生导师。

向量。根据判断矩阵定义,若判断矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足完全一致性条件,则下列式子成立:

$$p_{ij}=w_i\backslash(w_i+w_j),\quad i,j\in I \tag{2}$$

然而,由于受判断决策者知识水平和个人偏好的影响,以及判断事物的模糊性和不确定性,判断矩阵往往很难满足完全一致性条件。因而,式(1)在通常情况下是不成立的。为此,引入下列偏差函数:

$$F(\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[p_{ij}-\dfrac{w_i}{w_i+w_j}\right]^2}{\dfrac{w_i}{w_i+w_j}},\ \boldsymbol{w}\in D \tag{3}$$

显然,总是希望偏差函数 $F(\boldsymbol{w})$愈小愈好。因此,仿文献[9],导出的模糊判断矩阵排序方法称为 χ^2 方法,即可以建立下列最优化模型。

$$\min F(\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[p_{ij}-\dfrac{w_i}{w_i+w_j}\right]^2}{\dfrac{w_i}{w_i+w_j}} \tag{4a}$$

$$\text{s.t.}\sum_{i=1}^{n}w_i=1 \tag{4b}$$

对于偏差函数 $F(\boldsymbol{w})$,有下面的结论。

定理1 偏差函数 $F(\boldsymbol{w})$在 D 中有唯一的最小值点$\boldsymbol{w}^*$,并且 $\boldsymbol{w}^*$是方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_j}p_{ji}^2-\frac{w_j}{w_i}p_{ij}^2\right]=0,\quad i\in I \tag{5}$$

在 D 中的唯一解。

证明 第一步证明 $\boldsymbol{w}^*$在 D 空间中的存在性。对任意 $\boldsymbol{w}\in D$,有 $F(\boldsymbol{w})\geqslant 0$,令 $a=\inf\{F(\boldsymbol{w}):\boldsymbol{w}\in D\}$,有向量序列$\{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{k})\}\subset D$,使得

$$a=\lim_{k\to\infty}F(w(k)) \tag{6}$$

序列$\{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{k})\}$是有界的,因而有收敛子列$\{\boldsymbol{w}(k_i)\}$,设 $\boldsymbol{w}^*=(w_1^*,w_2^*,\cdots,w_n^*)^{\mathrm{T}}=\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{w}(k_i)$,显然 $w_i^*\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^*=1$,于是 $\boldsymbol{w}^*$至少有一个分量大于0。不妨设 $w_i^*>0$,若 $w_j^*=0$,那么

$$F(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{k}_i))>\left(p_{1j}-\frac{w_1(k_i)}{w_j(k_i)}\right)^2\to+\infty$$

这与式(6)矛盾,所以向量 $\boldsymbol{w}^*>0$,即 $\boldsymbol{w}^*\in D$,并且 $\boldsymbol{w}^*$是 $F(\boldsymbol{w})$在 D 中的最小值点。

第二步证明 $\boldsymbol{w}^*$满足方程(5)。构造 Lagrange 函数

$$L(\boldsymbol{w},\lambda)=F(\boldsymbol{w})+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left[p_{ij}-\dfrac{w_i}{w_i+w_j}\right]^2}{\dfrac{w_i}{w_i+w_j}}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right) \tag{7}$$

其中,λ 为 Lagrange 乘子。令 $\partial L/\partial w_i=0$,得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{p_{ji}^2}{w_j}-\frac{p_{ij}^2w_j}{w_i^2}\right]+\lambda=0 \tag{8}$$

两端同乘 w_i,得

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_j}p_{ji}^2-\frac{w_j}{w_i}p_{ij}^2\right]+\lambda w_i=0 \tag{9}$$

对 i 求和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_j}p_{ji}^2-\frac{w_j}{w_i}p_{ij}^2\right]+\lambda\sum_{i=1}^{n}w_i=0 \tag{10}$$

由此可得 $\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=0$,即得 $\lambda=0$,所以式(9)等价于式(5),故 $\boldsymbol{w}^*$是方程(5)的解。

第三步证明 $\boldsymbol{w}^*$在 D 空间中的唯一性。设 $\overline{\boldsymbol{w}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 是方程(5)两个不同的解,则有 k 使得

$$\frac{\overline{w}_k}{\widetilde{w}_k}=\max_i\left\{\frac{\overline{w}_i}{\widetilde{w}_i}\right\}$$

于是 $$\overline{w}_k\geqslant\frac{\overline{w}_i}{\widetilde{w}_i}\widetilde{w}_k$$

上式中至少有一个严格不等式成立,假设 $\overline{w}_k>\dfrac{\overline{w}_j}{\widetilde{w}_j}\widetilde{w}_k$,则有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{w}_k}{\overline{w}_j}p_{jk}^2>\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{w}_j\widetilde{w}_k}{\overline{w}_j\widetilde{w}_j}p_{jk}^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{\widetilde{w}_k}{\widetilde{w}_j}p_{jk}^2$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{w}_j}{\overline{w}_k}p_{kj}^2<\sum_{j=1}^{n}\frac{\overline{w}_j\widetilde{w}_j}{\overline{w}_j\widetilde{w}_k}p_{kj}^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{\widetilde{w}_j}{\widetilde{w}_k}p_{kj}^2$$

由于 $\overline{\boldsymbol{w}}$ 是方程(5)的解,即 $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\overline{w}_k}{\overline{w}_j}p_{jk}^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\overline{w}_j}{\overline{w}_k}p_{kj}^2$,故$\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\widetilde{w}_j}{\widetilde{w}_k}p_{kj}^2>\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\widetilde{w}_k}{\widetilde{w}_j}p_{jk}^2$,这与 $\widetilde{\boldsymbol{w}}$ 是方程(5)的解矛盾,所以方程(15)是唯一的。

由于方程(5)是一组非线性方程,所以为了求解 $\boldsymbol{w}^*$,可按如下算法步骤进行迭代[9]:

(1) 取初始排序向量 $\boldsymbol{w}(0)=(w_1(0),w_2(0),\cdots,w_n(0))^{\mathrm{T}}\in D$,给定迭代精度 ε,置 $k=0$。一般情况下,可取 $\boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{e}/n$,其中,$\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。

(2) 计算:$\varepsilon_i(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{k}))=\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\dfrac{w_i}{w_j}p_{ji}^2-\dfrac{w_j}{w_i}p_{ij}^2\right]$,$i\in I$,如果对所有 $i\in I$ 均有 $\varepsilon_i(\boldsymbol{w}(k))\leqslant\varepsilon$,则算法结束;否则转(3)。

(3) 确定 q,使得 $\varepsilon_q(\boldsymbol{w}(k))=\max\limits_{i\in I}\{|\varepsilon_i(\boldsymbol{w}(k))|\}$,并令

$$t(k)=\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n}p_{qj}^2\frac{w_j(k)}{w_q(k)}\Bigg\backslash\sum_{\substack{j=1\\ j\neq q}}^{n}p_{jq}^2\frac{w_q(k)}{w_j(k)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_i(k)=\begin{cases}t(k)w_q(k), & i=q\\ w_i(k), & i\neq q\end{cases}$$

$$w_i(k+1)=x_i(k)\Big\backslash\sum_{j=1}^{n}x_j(k),\ j\in I$$

(4) 令 $k=k+1$, 转(2)

关于上述算法的收敛性, 有下列定理。

定理 2　对任意 $\varepsilon>0$, 算法必在有限步内迭代收敛。

该定理的证明类似于文献[9], 这里不再赘述。

3　算　　例

假设某决策者针对决策方案集 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 提供的模糊判断矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7\\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4\\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9\\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}$$

根据前面给出的算法, 若取初始排序向量为 $\boldsymbol{w}(0)=(0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^{\mathrm{T}}$, 经过 7 次迭代后可得到最优解为: $w_1^*=0.222$, $w_2^*=0.382$, $w_3^*=0.235$, $w_4^*=0.161$。即得到的方案排序值向量为 $\boldsymbol{w}^*=(0.222, 0.382, 0.235, 0.161)^{\mathrm{T}}$, 因此, 相应的方案排序结果为: $x_2\succ x_3\succ x_1\succ x_4$。

4　结　束　语

针对决策者给出关于决策方案的一类模糊判断矩阵, 本文提出了一种新的方案排序方法, 这是通过一个迭代算法求解最优化模型, 该方法的提出丰富了已有的方案排序方法[11~13]。可以看到, 本文给出的方法仅仅考虑的是由单个决策者提供的方案偏好信息, 但这不难推广到多个决策者给出偏好信息的群决策情形。

参考文献:

[1]　Satty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.

[2]　Orlorski S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy sets and systems, 1978, 1: 155—167.

[3]　Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy sets and systems, 1986, 18: 105—118.

[4]　Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy sets and systems, 1984, 12: 117—131.

[5]　Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97: 33—48.

[6]　姚敏。计算机模糊信息处理技术[M]。上海: 上海科学技术文献出版社, 1999。
(Yao M. The handling technology of computer on fuzzy information [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Document Press, 1999. 31—40.)

[7]　姚敏, 黄燕君。模糊决策方法研究[J]。系统工程理论与实践, 1999, 19(11): 61—64。
(Yao M, Huang Y J. Research on methodology of fuzzy decision making [J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 1999, 19(11): 61—64.)

[8]　王应明, 傅国伟。一种用于群组判断矩阵排序的 χ^2 方法[J]。决策与决策支持系统, 1992, 2(3): 48—55。
(Wang Y M, Fu G W. A chi-square priority method used for group comparison matrices[J]. Journal of Decision and Decision Support Systems, 1992, 2(3): 48—55.)

[9]　陈宝谦。层次分析的两种新排序方法[J]。系统工程学报, 1990, 5(2): 43—51。
(Chen B Q. Two new priority methods in analytic hierarchy process[J]. Journal of Systems Engineering, 1990, 5(2): 43—51.)

[10]　樊治平, 李洪燕。基于 Fuzzy 偏好关系的一种方案排序方法[J]。东北大学学报(自然科学版), 1999, 20(6): 651—653。
(Fan Z P, Li H Y. A ranking method for alternatives based on fuzzy preference relation[J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 1999, 20(6): 651—653.)

[11]　樊治平, 李洪燕, 胡国奋。一类 Fuzzy 判断矩阵及方案排序的目标规划方法[J]。东北大学学报(自然科学版), 2000, 21(1): 60—62。
(Fan Z P, Li H Y, Hu G F. Fuzzy judgement matrix and the goal programming method for ranking alternatives[J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2000, 21(1): 60—62.)

[12]　姜艳萍, 樊治平。基于模糊判断矩阵的一种方案排序方法[J]。东北大学学报(自然科学版), 2000, 21(4): 450—452。
(Jiang Y P, Fan Z P. A method for ranking alternatives based on fuzzy judgement matrix[J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2000, 21(4): 450—452.)

Chi-Square Ranking Method for the Fuzzy Judgement Matrix

JIANG Yan-ping, FAN Zhi-ping
(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110006, China)

Abstract: A Chi-Square method is presented for ranking alternatives based on a kind of fuzzy judgement matrix about the alternatives provided by the decision maker. Firstly, structure of fuzzy judgement matrix and its consistency are introduced. Then, an optimization model is constructed to obtain ranking values of the alternatives. The theory and the algorithms for solving the model are also discussed. The ranking values of alternatives can be obtained by the model and the rankings of alternatives can reflect the subjective preference of the decision maker accurately. Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: fuzzy judgement matrix; alternative ranking; algorithm

(*Received April* 5, 2000)