

# 最佳灾情巡视路线的数学模型

杨庭栋 李晓涛

(解放军后勤工程学院,重庆 400016)

指导教师 赵 静

**编者按** 本文力求运用数学概念和方法来严格处理涉及的各种对象;力求借助于几何直观和生活体验的启发作用,为计算机搜索制定行之有效的操作规则;在数值结果方面,粗估与精细化相结合,从而提供较为完备的数值描述.本文第四部分定理证明中有误,为版面计从略.欲窥全豹,试索原文.

**摘要** 本文将求最佳巡视路线问题转化为图论中求最佳推销员回路的问题,并用近似算法去寻求近似最优解.对分组问题定义了均衡度用以衡量分组的均衡性.对问题1和问题2先定出几个分组的准则进行初步分组,并用近似算法求每一组的近似最佳推销员回路,再根据均衡度进行微调,得到较优的均衡分组和每组的近似最佳推销员回路.对问题1得出总路程较短且各组尽可能均衡的路线,各组的巡视路程分别为216.4公里,191.1公里,192.3公里,总路程为599.8公里.对问题2,证明了应至少分为4组,并求出了分为4组时各组的较优巡视路线,各组的巡视时间分别为22.74小时,22.59小时,21.69小时,22.54小时.对问题3,求出完成巡视的最短时间为6.43小时,并用较为合理的分组的准则,分成22个组.对问题4,研究了在不影响分组的均衡条件下, $T$ , $t$ , $V$ 的允许变化范围,并得出了这三个变量的关系式,并由此对分三个组的情况进行了具体讨论.

## 一、问题重述(略)

## 二、模型的假设与符号说明(略)

## 三、模型的建立与分析

本问题要求在某县的乡(镇)、村公路网中,寻找从县政府所在地(图中O点)出发,走遍各乡(镇)、村,又回到县政府所在地,使总路程或时间最少.将公路网图中,每个乡(镇)或村看为图中的一个节点,各乡(镇)、村之间的公路看作图中对应节点间的边,各条公路的长度(或行驶时间)看作对应边上的权,所给公路网就转化为图论中的加权网络图,问题就转化为一个图论问题,即在给定的加权网络图中寻找从给定点O出发,行遍所有顶点至少一次再回到O点,使得总权(路程或时间)最小.

为了讨论方便,先给出图论中相关的一些定义.

**定义1** 经过图G的每个顶点正好一次的圈,称为G的哈米尔顿圈,简称H圈.

**定义2** 在加权图 $G = (V, E)$ 中

(1) 权最小的哈米顿圈称为最佳H圈;

(2) 经过每个顶点至少一次且权最小的闭通路称为最佳推销员回路.

由定义2可知,本问题是一个寻求最佳推销员回路的问题.最佳推销员回路的问题可转化为最佳H圈的问题.方法是由给定的图 $G = (V, E)$ 构造一个以 $V$ 为顶点集的完备图 $G' = (V, E')$ , $E'$ 中每条边 $(x, y)$ 的权等于顶点 $x$ 与 $y$ 在图 $G$ 中最短路径的权,即

$$\forall (x, y) \in E', \omega(x, y) = \min d_G(x, y).$$

在图论中有以下定理：

**定理 1** 加权图  $G$  的最佳推销员回路的权和  $G'$  的最佳  $H$  圈的权相同。

**定理 2** 在加权完备图中求最佳  $H$  圈的问题是  $NP$ —完全问题。

我们采用一种近似算法求出该问题的一个近似最优解，来代替最优解，算法如下：

**算法一** 求加权图  $G(V, E)$  的最佳推销员回路的近似算法：

1. 用图论软件包求出  $G$  中任意两个顶点间的最短路，构造出完备图  $G'(V, E')$ ；

$$\forall (x, y) \in E', \omega(x, y) = \min d_G(x, y),$$

2. 输入图  $G'$  的一个初始  $H$  圈；

3. 用对角线完全算法<sup>[2]</sup>产生一个初始  $H$  圈；

4. 随机搜索出  $G'$  中若干个  $H$  圈，例如 2000 个；

5. 对 2、3、4 步所得的每个  $H$  圈，用二边逐次修正法<sup>[2]</sup>进行优化，得到近似最佳  $H$  圈；

6. 在第 5 步求出的所有  $H$  圈中，找出权最小的一个，此即要找的最佳  $H$  圈的近似解。

此算法程序见附录(略)(由于二边逐次修正法的结果与初始圈有关，故本算法第 2、3、4 步分别用三种方法产生初始圈，以保证能得到较优的计算结果)。

**问题一** 若分为三组巡视，设计总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线。

此问题是多个推销员的最佳推销员回路问题，即在加权图  $G$  中求顶点集  $V$  的划分  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ，将  $G$  分成  $n$  个生成子图  $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_n]$  使得

(1) 顶点  $O \in V_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。

$$(2) \bigcup_{i=1}^n V_i = V(G).$$

$$(3) \frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)} \leq \alpha, \text{ 其中 } C_i \text{ 为 } V_i \text{ 的导出子图 } G[V_i] \text{ 中的最佳 } H \text{ 圈,}$$

$\omega(G_i)$  为  $C_i$  的权,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

$$(4) \sum_{i=1}^n \omega(C_i) = \min$$

$$\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|$$

**定义 3** 称  $\alpha_0 = \frac{\max_{i,j} |\omega(C_i) - \omega(C_j)|}{\max_i \omega(C_i)}$  为该分组的实际路程均衡度。 $\alpha$  为最大容许均衡度。显然  $0 \leq \alpha_0 \leq 1$ ,  $\alpha_0$  越小，说明分组的均衡性越好。取定一个  $\alpha$  后,  $\alpha_0$  与  $\alpha$  满足条件(3)的分组是一个均衡分组。条件(4)表示总巡视路程最短。

此问题包含两方面：第一，对顶点分组；第二，在每组中求最佳推销员回路，即为单个推销员的最佳推销员问题。我们只能去寻求一种较合理的划分准则，对图 1 进行初步划分后，求出各部分的近似最佳推销员回路的权，再进一步进行调整，使得各部分满足均衡性条件(3)。

从  $O$  点出发去其它点，要使路程较小应尽量走  $O$  点到该点的最短路。故用图论软件包求出  $O$  点到其余顶点的最短路，这些最短路构成一棵  $O$  为树根的树，将从  $O$  点出发的树枝称为干枝，见图 1，从图中可以看出，从  $O$  点出发到其它点共有 6 条干枝，它们的名称分别为①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥。

根据实际工作的经验及上述分析，在分组时应遵从以下准则：

**准则一** 尽量使同一干枝上及其分枝上的点分在同一组；

**准则二** 应将相邻的干枝上的点分在同一组;

**准则三** 尽量将长的干枝与短的干枝分在同一组。

由上述分组准则,我们找到两种分组形式如下:

分组一:(⑥,①),(②,③),(⑤,④);

分组二:(①,②),(③,④),(⑤,⑥);

显然分组一的方法极不均衡,故考虑分组二。

对分组二中每组顶点的生成子图,用算法一求出近似最优解及相应的巡视路线。使用算法一时在每个子图所构造的完备图中,取一个尽量包含图 1 中树上的边的  $H$  圈作为其第 2 步输入的初始圈。

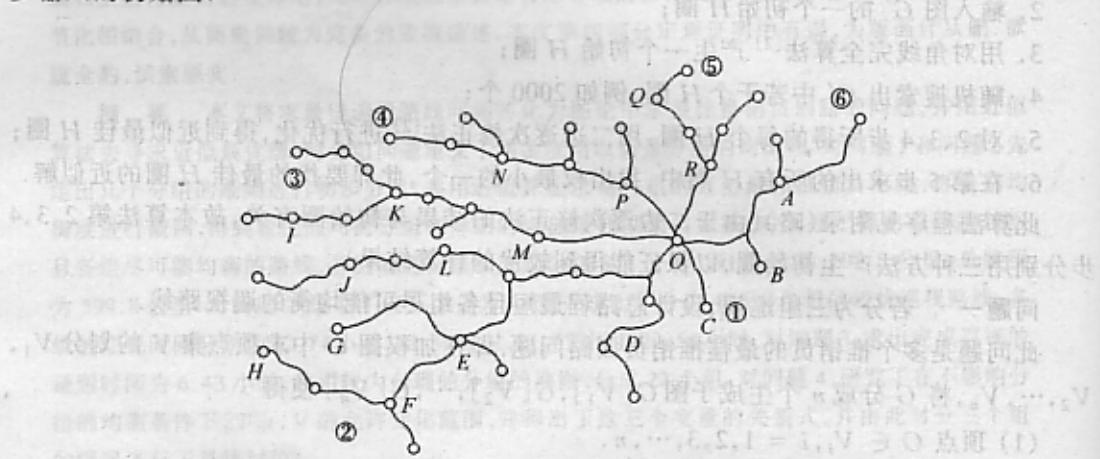


图 1  $O$  点到任意的最短路线图

分组二的近似解见表 1。

表 1 (单位:公里)

小组名称	路 线	总路线长度	路线的总长度
I	$O - P - 28 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 22 - 17 - 16 - I - 15 - I - 18 - K - 21 - 20 - 25 - M - O$	191.1	
II	$O - 2 - 5 - 6 - L - 19 - J - 11 - G - 13 - 14 - H - 12 - F - 10 - F - 9 - E - 7 - E - 8 - 4 - D - 3 - C - O$	241.9	
III	$O - R - 29 - Q - 30 - 32 - 31 - 33 - 35 - 34 - A - B - 1 - O$	125.5	558.5

因为该分级的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C_1) - \omega(C_2)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C_i)} = \frac{241.9 - 125.5}{241.9} = 54.2\%$$

所以此分法的均衡性很差。

为改善均衡性,将第 II 组中的顶点  $C, 2, 3, D, 4$  划归第 III 组,重新分组后的近似最优解见表 2,各组的近似最优巡视路线见图 2。

表 2 (单位:公里)

编号	路 线	路线长度	路线总长度
I	$O - P - 28 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 22 - 17 - 16 - I - 15 - I - 18 - K - 21 - 20 - 25 - M - O$	191.1	
II	$O - 2 - 5 - 6 - 7 - E - 8 - E - 9 - F - 10 - F - 12 - H - 14 - 13 - G - 11 - J - 19 - L - 6 - 5 - 2 - O$	216.4	
III	$O - R - 29 - Q - 30 - 32 - 31 - 33 - 35 - 34 - A - 1 - B - C - 3 - D - 4 - D - 3 - 2 - O$	192.3	599.8

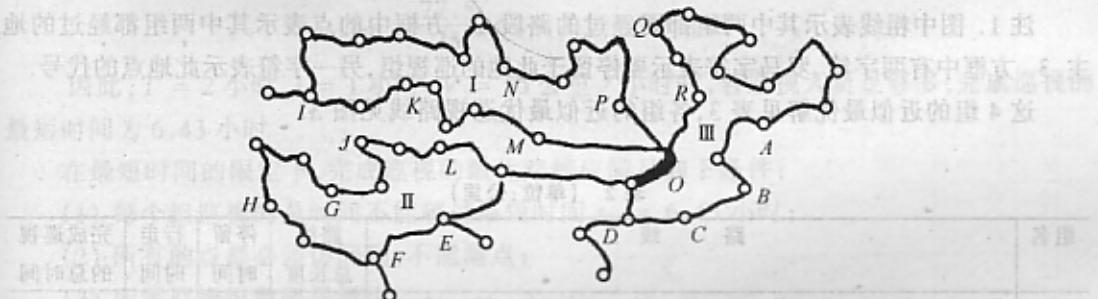


图 2 分为 3 组时各组的巡视路线图

注:图中粗线部分为 II 组与 III 组共同经过的路线

下面对此结果进行分析。因该分组的均衡度

$$\alpha_0 = \frac{\omega(C_1) + \omega(C_2)}{\max_{i=1,2,3} \omega(C_i)} = \frac{216.4 + 191.1}{216.4} = 11.69\%$$

所以这种分法的均衡性较好。若取最大容许的均衡度  $\alpha = 12\%$ , 则这是一个均衡分组。

用算法一算出整个网络图的近似最佳推销员巡回为  $O - C - 3 - 2 - 5 - D - 4 - 8 - E - 9 - F - 10 - F - 12 - H - 12 - G - 11 - J - 19 - L - 7 - 6 - M - N - 25 - 20 - 21 - K - 18 - J - 13 - 14 - 15 - I - 16 - 17 - 22 - 23 - 24 - 27 - 26 - P - 28 - Q - 30 - Q - 29 - R - 31 - 33 - 31 - 32 - 35 - 34 - A - B - O$ 。

总路长为 588.6 公里, 而表 2 中三组巡回的总路线长为 599.8 公里, 可以认为这样设计的分组方法和巡回路线能使总路线近似最短。

问题二 当巡视人员在各乡(镇)、村的停留时间一定, 汽车的行驶速度一定, 要在 24 小时内完成巡视, 至少要分几组及最佳的巡视路线。

由于  $T = 2$  小时,  $t = 1$  小时,  $V = 35$  公里 / 小时, 需访问的乡镇共有 17 个, 村共有 35 个, 计算出在乡(镇)及村的总停留时间为  $17 \times 2 + 35 = 69$  小时, 要在 24 小时内完成巡回, 考虑行走时间, 故至少要分 4 组。

由于该网络的乡(镇)、村分布较为均匀, 故有可能找出停留时间尽量均衡的分组, 当分 4 组时各组停留时间大约为  $\frac{69}{4} = 17.25$  小时, 则每组分配在路途上的时间大约为  $24 - 17.25 = 6.75$  小时, 而前面讨论过, 分三组时有个总路 599.8 公里的巡视路线, 分 4 组时的总路程

不会比 599.8 公里大太多,不妨以 599.8 公里来计算,路上时间约为  $\frac{599.8}{35} = 17$  小时,若平均分配给 4 个组,每个组约需  $\frac{17}{4} = 4.25$  小时  $< 6.75$  小时,故分成 4 组是可能办到的.

现在尝试将顶点分为 4 组. 分组的原则:除遵从前面准则一、二、三外,还应遵从以下准则:

#### 准则四 尽量使各组的停留时间相等.

用上述原则在图 1 上将图分为 4 组,同时计算各组的停留时间,然后用算法一算出各组的近似最佳推销员巡回,得出路线长度及行走时间,从而得出完成巡视的近似最佳时间. 用算法一计算时,初始圈的输入与分三组时同样处理.

注 1. 图中粗线表示其中两组都要经过的路段. 2. 方框中的点表示其中两组都经过的地主. 3. 方框中有两字符,罗马字符表示要停留于此地的巡视组,另一字符表示此地点的代号.

这 4 组的近似最优解见表 3,各组的近似最优巡视路线见图 3.

表 2 (单位:公里)

组名	路 线	路 线 总 长 度	停 留 时 间	行 走 时 间	完 成 巡 视 的 总 时 间
I	$O - 2 - 5 - 6 - 7 - E - 8 - E - 11 - G - 12 - H - 12 - F - 10 - F - 9 - E - 7 - 6 - 5 - 2 - O$	1995.8	17	5.59	22.59
II	$O - \bar{R} - 29 - Q - 30 - Q - 28 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 22 - 17 - 16 - 17 - \bar{K} - 22 - 23 - N - 26 - P - O$	199.2	16	5.69	21.69
III	$O - M - 25 - 20 - 21 - K - 18 - I - 15 - 14 - 13 - J - 19 - L - 6 - M - O$	159.1	18	4.54	22.54
IV	$O - R - A - 33 - 31 - 32 - 35 - 34 - B - 1 - C - D - 4 - \bar{D} - 3 - \bar{2} - O$	166	18	4.74	22.74

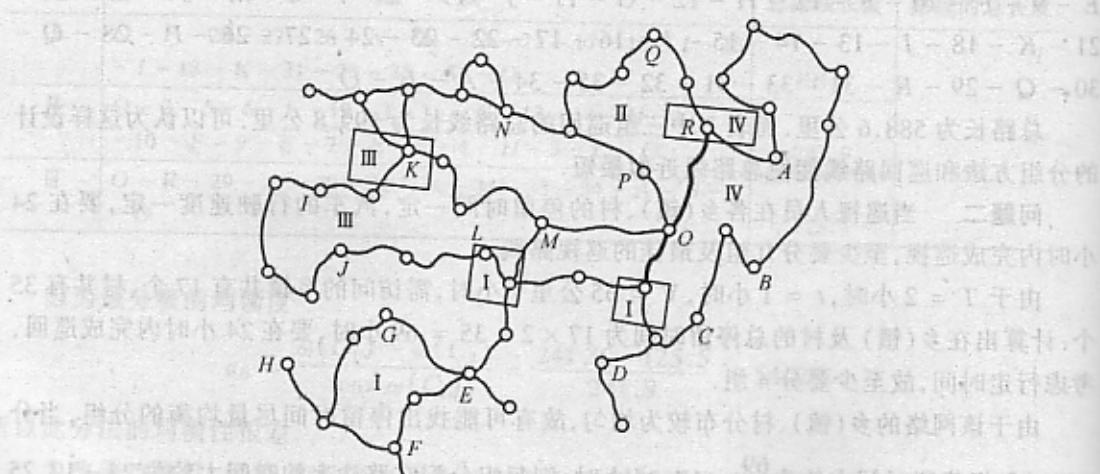


图 3 分为 4 组时各组的巡视路线图

表中符号说明:黑体表示前面经过并停留过,此次只经过不需停留;上加横线的表示此点只经过不停留.该分组实际均衡度

$$\alpha_0 = \frac{22.7 - 21.69}{22.74} = 4.62\%$$

可以看出,表 3 分组的均衡度很好,且完全满足 24 小时完成巡视的要求.

**问题三** 在  $T, t, V$  的假定下,巡视人员足够多,完成巡视的最短时间为多少,并给出此条件下的最佳路线.

我们发现从  $O$  点巡视  $H$  点的最短时间是所有最短时间中最长的,其距离为 77.5 公里,算出时间为

$$t_H = \frac{77.5}{35} \times 2 + 2 = 6.43 \text{ 小时},$$

因此,  $T = 2$  小时,  $t = 1$  小时,  $V = 35$  公里 / 小时时,若巡视人员足够多,完成巡视的最短时间为 6.43 小时.

在最短时间的限定下,完成巡视的最优路线应满足如下条件:

- (1) 每个组巡视的总时间不能超过最短时间  $t_H = 6.43$  小时;
- (2) 所有的点都必须访问到,不能漏点;
- (3) 所需巡视组数要尽量少.

在寻求最优路线时,从距离  $O$  点较远的一些点(如 12, 10, 15, 22 等点)开始搜索比较容易,因为到这些点的路线比较少.

具体方法如下:

**第一步** 依据图 1 算出从  $O$  点到每一个点的最短距离;

**第二步** 找出其中最大的一个,算出从  $O$  点沿最短路巡视所需的时间  $t_i$ ,并求  $\Delta t = t_H - t_i$ .

**第三步** 若  $\Delta t < 1$ ,则这一组只能访问这一点;

若  $\Delta t > 1$ ,则在余下的点中找到距离  $O$  点最远的点,根据条件看这一组能否巡视这一点.

**第四步** 若能巡视则算出  $\Delta t$ ,转到第三步;

**第五步** 若不能,则依次判断次远点、第三远点 …,满足总巡视时间不超过  $t_H$ ,就让这组巡视这一点,直到  $\Delta t < 1$ ,然后再从第二步开始.

通过以上方法,最后我们找到的最优解是 22 个组,如表 4.

**问题四** 巡视组数已定,要求尽快完成巡视,讨论  $T, t$  和  $V$  的改变对最佳巡视路线的影响.

要尽快完成巡视,就得要求每组完成巡视时间尽量均衡,因为总的完成巡视时间按最长的完成巡视时间计算.现在讨论在均衡允许的范围内已分成  $n$  组后,改变  $T, t, V$  对最佳巡视路线的影响.显然在分组不变的情况下,无论  $T, t, V$  如何改变,对每组内的最佳巡视路线是没有影响的,但可能会影响各组间的均衡性.因此该问题实际上是讨论  $T, t, V$  对分组的影响,即在不破坏原来分组均衡的条件下,  $T, t, V$  允许的最大变化范围.

在分  $n$  组的情况下,设

$S_i$ : 表示第  $i$  组的最佳推销员回路路线总长度;

表 4 (时间单位:小时)

编号	巡视路径	停留地点	所需时间	时间差
1	O-H-O	H	6.43	0
2	O-2-5-6-L-19-J-13-14-13-J-19-L-6-5-2-O	13,14	6.15	0.28
3	O-M-25-21-K-18-I-15-I-16-17-K-21-25-M-O	15,16	6.31	0.12
4	O-2-5-6-7-E-9-F-12-G-11-E-7-6-5-2-O	12,11	5.94	0.49
5	O-2-5-6-7-E-8-E-9-F-10-F-9-E-7-6-5-2-O	8,10	6.22	0.21
6	O-2-5-6-7-E-11-G-11-E-7-6-5-2-O	G	5.58	0.85
7	O-2-5-6-7-E-9-F-9-E-7-6-5-2-O	9,F	6.14	0.28
8	O-2-5-6-L-19-J-18-K-21-25-M-O	J,18	6.29	0.14
9	O-M-25-21-K-18-I-18-K-21-25-M-O	I	5.49	0.94
10	O-M-25-21-K-17-22-23-N-26-P-O	17,22,23	6.12	0.31
11	O-2-5-6-L-19-L-6-5-2-O	L,19	5.64	0.79
12	O-M-25-20-21-23-24-N-26-P-O	20,21,24	6.10	0.33
13	O-M-25-21-K-21-25-M-O	25,K	5.50	0.93
14	O-2-5-6-7-E-7-6-5-2-O	6,7,E	6.38	0.05
15	O-R-31-32-35-34-A-1-O	31,32,35,34	6.32	0.11
16	O-R-29-Q-30-Q-28-P-O	Q,30,28	6.11	0.32
17	O-P-26-27-26-N-26-P-O	26,27,N	6.32	0.20
18	O-2-3-D-4-D-3-2-O	3,D,4	5.99	0.44
19	O-1-A-33-31-R-29-R-O	A,33,29	5.97	0.46
20	O-2-5-M-O	2,5,M	5.40	1.03
21	O-1-B-C-O	1,B,C	5.98	0.45
22	O-P-O-R-O	P,R	5.32	1.11

$X_i$ : 表示第  $i$  组所要停留的乡镇的数目;

$Y_i$ : 表示第  $i$  组所要停留的村的数目;

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

显然, 当  $X_i = X_j$ ,  $Y_i = Y_j$ ,  $S_i = S_j$ ;  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  时, 即每组的乡(镇)数、村数、最佳巡回的长度均相等, 因而分组绝对均衡时, 即  $\alpha_0 = 0$ , 无论  $T, t, V$  如何改变都不会改变原来分组的均衡.

(一) 不影响分组的均衡时,  $T, t, V$  的最大允许变化范围的讨论:

对任意一个组  $i$ , 其完成巡视的时间

$$T_i = X_i T + Y_i t + \frac{S_i}{V}, i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

设均衡分组的最大允许时间均衡度为  $\alpha$ , 即

$$\frac{|T_i - T_j|}{\max_{i=1,2,\dots,n} T_i} \leq \alpha, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则有

$$|T_i - T_j| \leq \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$$

记  $\epsilon = \alpha \cdot \max_{i=1,2,\dots,n} T_i$ , 则  $\epsilon$  表示均衡分组所允许的最大时间误差, 称为最大允许时间误差. 则

$$\left| (X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \right| \leq \epsilon \quad (1)$$

由式(1)我们得到

$$(X_i - X_j) \cdot T + (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V} \leq \epsilon, \quad (2)$$

由式(2)可推出以下结果

1. 当  $X_i - X_j > 0$  时, 要保持原均衡分组不变,  $T$  必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{-\epsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\} \\ & \leq T \leq \max_{X_i - X_j > 0} \left\{ \frac{\epsilon - (Y_i - Y_j) \cdot t + \frac{S_i - S_j}{V}}{X_i - X_j} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. 当  $Y_i - Y_j > 0$  时, 要保持原均衡分组不变,  $t$  必须满足的条件为

$$\begin{aligned} & \max_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{-\epsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\} \\ & \leq t \leq \max_{Y_i - Y_j > 0} \left\{ \frac{\epsilon - (X_i - X_j) \cdot T - \frac{S_i - S_j}{V}}{Y_i - Y_j} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. 当  $S_i - S_j > 0$  时, 由(2)式得

$$(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \epsilon \leq \frac{S_i - S_j}{V} \leq \epsilon (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t$$

① 当  $0 \leq (X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t \leq \epsilon$  时, 有

$$V \geq \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\epsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \quad (5)$$

② 当  $(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t > \epsilon$  时, 有

$$\begin{aligned} & \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{\epsilon - (X_i - X_j) \cdot T - (Y_i - Y_j) \cdot t} \right\} \\ & \leq V \leq \max_{S_i - S_j > 0} \left\{ \frac{S_i - S_j}{(X_j - X_i) \cdot T + (Y_j - Y_i) \cdot t - \epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

由(3)~(6)式, 当  $T, t, V$  三个变量中任意两个变量无论如何变化, 都可计算出为保持均衡分组不变, 三个变量所允许的最大变化范围.

## (二) 分三组的实例讨论

现对分三组的情况进行讨论. 对问题一中所得的三个分组, 若考虑停留时间和行驶时间, 且取  $T = T_0 = 2$  小时,  $t = t_0 = 1$  小时,  $V = V_0 = 35$  公里/小时, 结果如表 5.

表 5 (路程单位:公里;时间单位:小时)

编号	$X_i$	$Y_i$	$S_i$	行驶时间	总时间
I	5	13	191.1	5.46	28.46
II	6	11	192.3	5.49	28.49
III	6	11	216.4	6.18	29.18

$$\text{实际均衡度为 } \alpha_0 = \frac{29.18 - 28.46}{29.18} = 2.5\%.$$

$$\text{实际时间误差为 } \epsilon_0 = 2.5\% \times 29.18 = 0.72 \text{ 小时.}$$

现分别规定均衡分组的最大允许均衡度  $\alpha = 2.5\%$  和  $\alpha = 5\%$ , 即最大容许的时间误差分别为  $\epsilon = 0.72$  小时和  $\epsilon = 1.44$  小时, 计算出  $T, t, V$  三个参量中固定任意两个时, 要不破坏原均衡分组, 另一个参量所容许的变化范围. 结果如下表:

表 6

	$t, V$ 不变	$T, V$ 不变	$T, t$ 不变
$\alpha = 2.5\%, \epsilon = 0.72$ 小时	$1.25 \leq T \leq 2$	$1 \leq t \leq 1.38$	$V \geq 35$
$\alpha = 5\%, \epsilon = 1.44$ 小时	$0.51 \leq T \leq 2.74$	$0.63 \leq t \leq 1.75$	$V \geq 17.3$

表上表可以看出:

(1) 当实际均衡度  $\alpha_0 = 2.5\%$  刚好等于最大容许均衡度  $\alpha = 2.5\%$  时, 要保持原均衡分组, 当

$t, V$  不变时,  $T$  只能减小, 且下界为 1.25 小时;  $T$  的上界为  $T_0 = 2$  小时;

$T, V$  不变时,  $t$  只能增大, 且上界为 1.38 小时;  $t$  的下界为  $t_0 = 1$ ;

$T, t$  不变时,  $V$  只能增大, 且无上界,  $V$  的下界为  $V_0 = 35$ .

(2) 当实际均衡度  $\alpha_0 = 2.5\%$  小于最大容许均衡度  $\alpha = 2.5\%$  时, 即  $\epsilon_0 < \epsilon$  时要保持原均衡分组, 当

$t, V$  不变时,  $T$  变化的下界为 0.51 小时, 上界为 2.74 小时;

$T, V$  不变时,  $t$  变化的下界为 0.63 小时, 上界为 1.75 小时;

$T, t$  不变时,  $V$  可以增大但无上界, 也可减小, 且下界为 17.3 公里 / 小时.

### (三) 对实例结果的分析.

上述实例的均衡分组有一个特点: 各组的停留时间相等, 即取  $T = T_0 = 2$  小时,  $t = t_0 = 1$  小时,  $V = V_0 = 35$  公里 / 小时时, 在表 5 的分组中

$$(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0, i, j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

**定义 4** 各组的停留时间相等的均衡分组称为停留时间相等的均衡分组. 由(7)式得

$$T_0 = -\frac{Y_i - Y_j}{X_i - X_j} \cdot t_0, X_i - X_j \neq 0, i, j = 1, 2, 3 \quad (8)$$

现讨论对停留时间相等的均衡分组,  $T, t, V$  的变化规律.

对停留时间相等的均衡分组, 分组的实际时间误差:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \max_{i,j} \left\{ \left| (X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 + \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} \\ &= \max_{i,j} \left\{ \left| \frac{S_i - S_j}{V_0} \right| \right\} = \frac{S_i - S_j}{V_0} \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $i'$  为使  $S_i$  最大的组的标号;  $j'$  为使  $S_j$  最小的组的标号。 (\*)

当  $T, t$  不变时, 即  $T = T_0, t = t_0$  时因  $(X_i - X_j) \cdot T_0 + (Y_i - Y_j) \cdot t_0 = 0 < \epsilon$ , 由式(6)知, 要保持平衡分组,  $V$  的下界应为

$$\begin{aligned} V_{\min} &= \max_{S_i - S_j > 0} \left| \frac{S_i - S_j}{\epsilon - (X_i - X_j) \cdot T_0 - (Y_i - Y_j) \cdot t_0} \right| \\ &= \max_{S_i - S_j > 0} \left| \frac{S_i - S_j}{\epsilon} \right| \\ &= \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\epsilon} \quad i', j' \text{ 的含义同} (*) \end{aligned}$$

① 取  $\epsilon = \epsilon_0$  时, 由(9)式得

$$V_{\max} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\epsilon} = V_0$$

②  $\epsilon > \epsilon_0$  时, 由(9)式得

$$V_{\min} = \frac{S_{i'} - S_{j'}}{\epsilon} < V_0$$

故有以下定理

**定理** 当取  $V = V_0, T = T_0, t = t_0$  时, 对图进行停留时间相等的均衡分组后, 设该分组的实际时间误差为  $\epsilon_0$ .

(1) 若取最大允许时间误差  $\epsilon = \epsilon_0$ , 当  $T, t$  不变时, 要使该均衡分组保持不变,  $V$  的下界为  $V_0$ , 即  $V$  只能增加不能减少;

(2) 若取最大允许时间误差  $\epsilon > \epsilon_0$ , 当  $T, t$  不变时, 要使该均衡分组保持不变,  $V$  的变化范围的下界小于  $V_0$ .

#### 四、模型的推广(略)

#### 五、优缺点分析

##### 优点

1. 本文提出的分组准则简便易行, 可操作性强, 且可逐步调整使分组达到均衡。
2. 用均衡度的概念定量的刻画了分组的均衡性。
3. 在用近似算法求近似最佳推销员回路时, 采取了三种不同的方法产生初始圈, 使得算法比较完善, 得到了误差很小的近似最优解。
4. 从理论上定量地讨论了  $V, T, t$  的变化对均衡分组灵敏度的影响, 得到了得好的结果。

##### 缺点(略)

- [1] 舒贤林, 余志才编著, 图论基础及应用。
- [2] 龚劬编, 图论与网络最优算法。
- [3] 费培之编著, 图和网络及其应用。

(一)

# 灾情巡视路线的设计

韦芳芳 杨兰兰 柏 瑞

(东南大学,南京 210018)

指导教师 杨廉峰

**编者按** 本文不仅提出了若干种确定初始巡视路线的方法,而且对路线的调整给出了一些准则和启发式算法,简捷、有效地解决了各个问题,行文简明、通畅。

**摘要** 本文建模的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分:首先生成一个可行的巡视路线,然后利用启发式算法对巡视路线进行调整优先。对可行路线的生成给出了三种方法,1. 采用直观判断,较为简单;2. 借鉴了求 Hamilton 圈的方法;3. 基于最小生成树,求出的路线总路程较短,为 553.6 公里。本文采用方法 3 得出的路线作为启发式算法的初始路线。

本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整,较好地解决了所提出的问题。对于问题 1,给出了均衡度的概念来衡量各组路线的均衡性。解为总路程 587.2 公里,均衡度 0.16;对于问题 2,采用点调整的规则求出用 4 组完成巡视所需的最短的时间 22.62 小时,对于问题 3,采用一种最短路线调整法求出在最短的时间 6.43 小时内,用 22 组就可以完成巡视。

## 问题重述与模型假设(略)

### 问题分析

问题要求对巡视的路线进行设计,同时必须考虑的因素包括总路程最短、组数的选择和各组巡视路线尽量均衡的条件下完成一次巡视需要的最短时间。按如下几点进行分析:

1. 关于总路程和组数的关系,我们引入定理一:当有  $i$  个组同时进行巡视时,必然存在一总路程最短的路线,记这时的总路程为  $d$ ,则对于  $j$  组的巡视若  $i \geq j$ ,有  $d_i \geq d_j$ 。(附录一)

2. 为了对各组之间的均衡度进行量化,引入距离均衡度的概念。距离均衡即要求各组巡视所经过的路程  $a_i$  尽量接近,由此定义均衡度来衡量这种接近程度,距离均衡度  $B = \frac{\max|a_i| - \min|a_i|}{a/n}$ ,在同等条件下,  $B$  越大,各组越不均衡。

3. 由 1 可知,要求总路程最短,在极限情况下为只有一组进行巡视,由定理 1 此时巡视总路程最短,但由于只有一组同时巡视时消耗时间较多,只有在人员较缺乏的情况下,采用一组巡视。在多组同时巡视时要求尽量均衡的情况下(问题一),本文定义只有满足均衡度  $B < 0.2$  的路线为可行路线。

4. 当  $n = 1$  时,该问题可以转化为“货郎担”问题为 NPC 问题,因此无法给出最优解,只能给出一种启发式算法,得到一个较优解。

本文建立的模型就是基于这种考虑首先给出一些初始路线,然后提出了一些启发式算法,按照一定的规则对初始路线进行优化。

## 模型准备

1. 问题2要求给出满足一定要求的最小分组数,因此必须知道总路程的一个下界。根据定理一,显然一组巡视时的最优路线是总路程的一个较好的下界,但由于一组巡视时的最优路线与“货郎担”问题是等价的,因而是不可解的,所以我们要用别的方法求出总行程的一个下界。注意到巡视路线必须走遍所有的乡、村,因此总路程必然大于公路图的最小生成树的权和。因此我们可以将该图的最小生成树的路程之和作为总路程的下界。本文用Prim算法求出了公路图的最小生成树,并求出最小生成树的总路程为422.7公里。

2 问题3要求给出完成巡视的最短时间,由于巡视人员足够多,显然这与距离O点(乡镇府)最远的乡、村有关。另外,在从一个村巡视完后到另一个村巡视时为了节约时间,要求按照最短路径行进。本文用Floyd算法求出了任意两点之间的最短路径,附录二(略)给出了所有点与O点之间的最短路径。

## 模型建立与求解

由问题分析可知,本文对该问题的求解分为两个步骤,即初始值的确定和利用启发式逐步法的求解。下面我们根据这种思路建立模型如下:

### 一、初始值的确定

对问题一,在极限情况下,由问题分析3可知,可以认为仅仅一组巡视,而另外两组不动,这时总路程最短,但这样均衡性极差。为转化问题,我们加入两个虚拟点代表县城,则求三组的问题可以转化为对55个点求一组的路线问题。对一组的路线的求解可化为“货郎担”问题,可通过经典的求“货郎担”问题的“近似”算法进行求解。但通过计算机的求解发现这三个县城点在整个路线中相邻很近,很难给出规则保证三个点在整个路线中的均衡性。因此考虑将该图分三个区域,分别对每个区域进行求解,则问题的关键就转化为如何对图进行区域划分。

### 方法一:直接判断法

对给出的图可以直观地进行分块,手工给出其初始解。很显然,由于县城位置偏向一边,则若分为三组,县城远离的一边分为两块的可能性比临近县城的一边大得多。这样可以得到手工给出的分为三组巡视的路线I如下:

I:  $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow P \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow O$ ;

II:  $O \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$ ;

III:  $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow L \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 12 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow C \rightarrow O$ .

各组所走的路程分别为(单位:公里): I:168 II:176.7 III:237.5.

各组所走路程总和为(单位:公里):582.2.可以求出其均衡度为0.34.

### 方法二:逐步加入法

该方法的思想为:任取最外围一点,以逆时针为搜索方向,假定搜索尽量走方向变化最小的路线即先加入本区域最外围的点,然后在内部逐步加入新的点。

最后得到本区域的所有点. 该方法首先必须确定巡视要分为几组, 并且规定各组必须经过县城即  $O$  点, 然后用上述方法确定各区域的范围. 以这种方法可以进行调整得到一总路程较短的初始化路线 2 如下:

- I:  $O \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow O$ ;
- II:  $O \rightarrow P \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow M \rightarrow O$ ;
- III:  $O \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow H \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow G \rightarrow 11 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow O$ .

各组所走的路程分别为(单位:公里) I: 136.5 II: 191.1 III: 232.1.

各组所走路程总和为(单位:公里) 559.7. 可以求出其均衡度为: 0.54.

### 方法三: 基于最小生成树的深度优先搜索法

(1) 根据逐步加入法所得的结果 559.7, 将它分为  $d_1, d_2, d_3$  满足  $d_1 < d_2 < d_3$ , 且  $d_1 + d_2 + d_3$  为初值, 再设  $S_1, S_2, S_3$  为实际每组的路程.

(2) 选择最小生成树中任一点为起点, 将该点与  $O$  点的最短路程赋值给  $S_1$  进行深度优先搜索,  $S_i = S_{i-1} + (\text{树上连续搜索两点之间的最短距离})$ , 若  $S_i + (\text{正在搜索点到 } O \text{ 点的最短距离}) > d_i$ , 则停止搜索.

(3) 在以上所找点中找到一条与  $O$  相连且距离在  $d_1$  限制范围内的一条至少过顶点一次的回路.

(4) 找到这条回路中所包括点(除  $O$  点外) 中最后搜索的点, 将此点作为寻找回路 2 的起点.

(5) 将  $d_1$  改为  $d_2$  和  $d_3$  重复(2)~(4).

(6) 找出 3 条回路后, 如已比 559.7 小或  $d_1, d_2, d_3$  不满足限制条件则退出, 否则以步长 5 改变  $d_1, d_2, d_3$  重复以上步骤.

根据这种方法可得到以下的路线 3:

- I:  $O \rightarrow P \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 21 \rightarrow K \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow I \rightarrow 18 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$ ;
- II:  $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow O$ ;
- III:  $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow E \rightarrow 11 \rightarrow G \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 12 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 9 \rightarrow E \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow C \rightarrow O$ .

各组所走的路程分别为(单位:公里): I: 212.2 II: 125.5 III: 215.9.

各组所走路程总和为(单位:公里): 553.6. 可以求出其均衡度为: 0.49.

## 二、启发式算法

以上求出的初始路线都是没有考虑均衡情况下的解, 均衡度不满足我们定义的要求, 因而可以采用一些启发式算法对初始路线进行调整, 从而减小均衡度即提高各组巡视路程的均衡程度以获得满足要求的较佳路线. 本文采用如下调整规则对初始化路线进行调整:

### 规则一、边界调整法

边界调整主要目标就是在边界对各区域进行调整, 以提高各组的均衡程度. 比较上述几种方法生成的初始路线, 这里主要对方法三的初始路线进行调整.

假设三区域 I、II 和 III 各自路程满足  $a_1 < a_2 < a_3$ , 我们对调整规定如下准则:

- (1) 为增强相邻区域的可调整性, 规定首先对相邻边界点较多的两区域进行调整。
- (2) 优先对  $a_i$  最小的区域 I 和  $a_i$  最大的区域 III 之间进行调整, 若区域之间的相邻点相对较少, 则通过第三个区域 II 进行 I、II 和 II、III 之间的调整。
- (3) 规定调整结束的标志为满足均衡度要求, 即

$$\max\{a_i\} - \min\{a_i\} < \frac{0.2 \times a}{n},$$

则距离均衡度  $B < 0.2$  满足要求。

根据以上准则, 其调整步骤如下:

- (1) 计算当前方案的均衡度, 如果满足准则(3), 退出; 否则, 转(2)。

- (2) 选择路程相差较大的两块区域, 通过规则(2)进行调整, 调整后转(3)。

- (3) 若调整超过一定的次数, 退出; 否则, 返回步骤(1)。

根据以上算法对方法三的初始路线 3 进行调整后得到的优化路线 4 如下:

I : OC → B → 34 → 35 → 32 → 30 → Q → 28 → 27 → 26 → P → 29 → R → 31 → 33 → A → 1 → O;

II : O → M → N → 24 → 23 → 21 → K → 22 → 17 → 16 → I → 15 → L → 18 → J → 19 → L → 20 → 25 → M → O;

III : O → 2 → 5 → 6 → 7 → E → 11 → G → 13 → 14 → H → 12 → F → 10 → F → 9 → E → 8 → 4 → D → 3 → 2 → O.

各组所走的路程分别为(单位:公里): I : 179 II : 197.7 III : 210.5. 总和为: 587.2.

可以求出其均衡度为 0.16, 满足要求, 则用本方法所调整的路线即为问题一的解。

## 规则二、转移点调整法

本方法主要用来对问题二进行求解。首先我们证明分三组不可能在 24 小时内完成巡视(略)。

由于分三组不可能在 24 小时内完成巡视, 接着我们试图寻找分四组完成巡视的路线。为使总耗时最短, 我们要尽量使各组停留时间均衡, 各组行驶路程也尽量均衡, 则采用同于问题一的解法, 可以得到一个分为四组的路线 5 如下:

I : O → 1 → B → 34 → 35 → 32 → 30 → Q → 28 → 29 → R → 31 → 33 → A → 1 → O;

II : O → P → 26 → 27 → 24 → N → 23 → 22 → 17 → 16 → 17 → K → 21 → 25 → M → O;

III : O → 2 → 5 → 6 → L → 20 → 19 → J → 18 → I → 15 → 14 → H → 14 → 13 → J → 19 → L → 6 → 5 → 2 → O; IV : O → C → 3 → D → 4 → 8 → E → 9 → F → 10 → F → 12 → G → 11 → E → 7 → D → 3 → 2 → O.

各组所走的路程分别为(单位:公里): I : 142.5 II : 152.1 III : 194.6 IV : 189.2.

各组所需的时间分别为(单位:小时): I : 21.07 II : 21.34 III : 22.56 IV : 23.40.

各组所走路程总和为(单位:公里): 678.4. 总共所需的时间为(单位:小时): 23.40 可以求出其均衡度为 0.3.

若要求完成巡视所需时间尽量短, 则要对上面所求出的路线 5 进行调整。分析路线 5 的

数据可知,各组的时间相差很近,所以不能较大幅度地对路线 5 进行调整,而采用转移点的规则,即通过 II 和 III 来降低初始路线中时间较长的组的时间、加长初始路线中时间较短的组的时间,每组的点数变化不超过 I. 假设四个区域 I、II、III 和 IV 满足  $T_4 > T_2(T_3) > T_1$ ,  $T_i$  为调整后的时间,则一次调整的规则如下:

本次调整的状态变化为: I 中增加来自 II、III 或 IV 中的一点, IV 中减少一点至 I、II 或 III, II 和 III 中只增加或减少一点.

规定达到调整精度要求时  $\max\{T_i\} - \min\{T_i\} < 2$ .

(1) 如满足  $T_1 < T_4$  转(2), 否则转(3).

(2) 若满足  $T_1 < T_{2(3)}$  则转(4), 否则转(3).

(3) 返回本次调整前的状态,若调整次数大于规定次数或达到精度要求,退出,否则转(1).

(4) 若调整次数大于规定次数或达到精度要求,退出,否则转(1).

采用上述方法,对路线 5 进行调整 1 次就可以满足调整的要求,得到一优化路线 6 如下:

I :  $O \rightarrow 1 \rightarrow B \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 32 \rightarrow 30 \rightarrow Q \rightarrow 28 \rightarrow 27 \rightarrow 28 \rightarrow Q \rightarrow 29 \rightarrow R \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow A \rightarrow 1 \rightarrow O$ ;

II :  $O \rightarrow P \rightarrow 26 \rightarrow N \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 22 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 17 \rightarrow K \rightarrow 21 \rightarrow 20 \rightarrow 25 \rightarrow M \rightarrow O$ ;

III :  $O \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow L \rightarrow 19 \rightarrow J \rightarrow 18 \rightarrow I \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow H \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow J \rightarrow 19 \rightarrow L \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$ ;

IV :  $O \rightarrow C \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow E \rightarrow 9 \rightarrow F \rightarrow 10 \rightarrow F \rightarrow 12 \rightarrow G \rightarrow 11 \rightarrow E \rightarrow 7 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow O$ .

各组所走的路程分别为(单位:公里): I : 158.3 II : 143.6 III : 196.6 IV : 189.2.

各组所需的时间分别为(单位:小时): I : 22.52 II : 21.10 III : 22.62 IV : 22.40.

各组所走路程总和为(单位:公里): 687.7. 总共所需的时间为(单位:小时) 22.62. 可以求出其均衡度为 0.31.

则问题二的解为:至少分四组在 24 小时内可以完成巡视. 若要求路程较短, 巡视路线为路线 5; 若灾情较为严重, 要求时间较短, 则巡视路线为路线 6.

### 规则三、最短路调整法

该方法利用求出的最短路进行求解, 较好地解决了问题三. 根据附录二的到 O 点的各点的最短路, 可以得出一个最短路的排序, 设为  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$ , 该方法的思想是首先确定最长的一个最短路  $d_k$  所需的时间即所求的最短时间, 然后以此为上限, 逐次考虑  $d_{k-1}, d_{k-2}, \dots$ , 在每一最短路中尽量在时间限制范围内多巡视几点. 由附录二可知最长的最短路路程为 77.5 公里, 计算出最短时间为 6.43 小时, 则具体求解方法如下:

**方法一** 按上述从大到小的顺序考虑每个尚未巡视过的节点, 若当前考虑的点为  $i$ , 则当巡视完点  $i$  后, 沿最短路径原路返回 O 点. 若时间允许, 则可顺便巡视该路径上的点. 优先考虑巡视最短路径上的乡及最短路径的上的距 O 点较远的点. 在该路上可以在最短时间限制内尽量多巡视一些地方, 则对于问题 3, 在 6.43 小时之内, 需要 24 组完成巡视, 各组的巡视路线见附录三(1) 略.

方法一在处理离 O 点较近的点时, 在上述规则下容易产生浪费, 则考虑对方法一进行

改进。

**方法二** 仍然按最短路的排序进行考虑, 不断加入新的点。但巡视某一点  $i$  后, 如果时间充裕, 并不按  $i$  点到  $O$  点的最短路径返回, 而是先到  $j$  点巡视, 然后再返回  $O$  点。定义  $dis(i, j)$  为  $i$  点和  $j$  点之间的距离, 则对于下一节点  $j$  应满足:

(1)  $dis(i, j)$  应尽量小; (2)  $dis(O, j)$  应尽量大; (3)  $j$  点尚未巡视过; (4)  $j$  点返回  $O$  点总共所花的时间  $< 6.43$  小时。

为了满足条件(1)及(2), 我们选择  $dis(O, j) - dis(i, j)$  最大的点作为  $j$  点。

由此规则对问题 3 进行求解, 可得到在 6.43 小时这内需要 22 组完成巡视, 各组的巡视路线见附录三(2)(略)。

对于问题 3, 完成巡视的最短时间为 6.43 小时; 在最短时间限制下, 可以考虑以最少的巡视组数(人员数)来确定方案的优劣, 因而我们给出问题 3 的解为在最短时间 6.43 小时内用 22 组巡视人员来完成巡视, 其巡视路线见附录三(2)(表)。

### 模型分析

在问题 4 中, 我们定义每组的巡视时间  $t_i (i = 1, 2, 3)$ , 则表达式如下:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{d_1}{v} + x_1 \cdot T + y_1 \cdot t \\ t_2 = \frac{d_2}{v} + x_2 \cdot T + y_2 \cdot t \\ t_3 = \frac{d_3}{v} + x_3 \cdot T + y_3 \cdot t \end{cases}$$

其中  $x_i, y_i$  分别为第  $i$  组巡视的乡数和村数,  $t_{\max} = \max[t_1, t_2, t_3]$  即为整体所花的时间,  $t_{\min} = \min[t_1, t_2, t_3]$ 。

为了满足尽快完成任务, 则  $t_{\max}$  应尽量少, 也即  $t_1, t_2, t_3$  应越均衡, 这样总体耗时减少。

我们定义  $\alpha = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\sum t_i / 3}$ ,  $\alpha$  称为相对时间均衡度, 当我们取不同的  $\alpha$  值,  $T, t, V$  改变对最佳巡视路线的影响结果是不同的, 以路线 4 为例分析如下, 路线 4:

$$d_1 = 179, \quad x_1 = 6, \quad y_1 = 11,$$

$$d_2 = 197.7, \quad x_2 = 6, \quad y_2 = 11,$$

$$d_3 = 210.5, \quad x_3 = 5, \quad y_3 = 13.$$

当取  $T = 2, t = 1, V = 35$  时

$$\begin{cases} t_1 = 28.11, \\ t_2 = 28.64, \\ t_3 = 29.01, \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{29.01 - 28.11}{\frac{29.01 + 28.64 + 28.11}{3}} = 0.03$$

假设参数  $T, t, V$  改变时, 最佳巡视路线不变, 考察  $\alpha$  是否满足一定的均衡度, 如果不满足均衡度, 则假设不成立, 最佳巡视路线需要改变。

当取  $T = 0, t = 0, V = 35$  时

$$\begin{cases} t_1 = 5.1 \\ t_2 = 5.65 \\ t_3 = 6.00 \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{6.0 - 5.11}{6.0 + 5.1 + 5.65} = 0.16.$$

若取  $\alpha < 20\%$ , 则以上两种  $T, t$  和  $V$  条件下, 路线 4 都可以作为最佳路线; 若取  $\alpha < 15\%$ , 在参数为  $T = 2, t = 1, V = 35$  时的路线不能作为参数改变为  $T = 0, t = 0, V = 35$  时的最佳路线, 所以  $T = 0, t = 0, V = 35$  条件下的最佳路线发生了改变.

从以上分析可得,  $T, t$  和  $V$  的改变对最佳路线的影响不但与  $T, t$  和  $V$  改变方式有关, 而与最佳路线均衡度的精度要求有关, 所以我们不能笼统地认为  $T, t$  和  $V$  的改变对最佳路线有影响, 但我们可以进行局部分析.

(1) 若要使  $T_j, t_j, V_j$  最佳路线在一定均衡度条件下是稳定的, 即从  $T_j, t_j, V_j$  变到  $T_k, t_k, V_k$  后最佳路线不变,  $T_k, t_k, V_k$  应满足何条件? 则对于一条具体的对应  $T_j, t_j, V_j$  最佳路线, 我们可确定  $x_i, y_i, d_i (i = 1, 2, 3)$  及均衡度, 保持最佳路线不变, 即  $x_i, y_i, d_i (i = 1, 2, 3)$  不变, 对于  $T_k, t_k, V_k$ , 计算  $\alpha$ , 则  $\alpha = f(T_k, t_k, V_k)$ , 若满足均衡度要求  $\alpha$ , 即  $f(T_k, t_k, V_k) < \alpha$  时则认为在参数变为  $T_k, t_k, V_k$  时, 最佳线路不变.

(2) 若  $T = 0, t = 0$ , 则从 (\*) 可以很简单地得到  $V$  的任意变化都不改变最佳路线.

(3) 要求出  $T, t, V$  的任意变化对最佳巡视路线的影响, 可以进行大量的  $T, t, V$  下的最佳路线的模拟, 再通过分析得到对最佳路线的影响.

以分析即为对问题 4 的讨论.

### 模型评价及改进

本文所建模型的主要思想是将巡视路线的设计分为两个部分: 首先生成一个可行的巡视路线, 然后利用启发式算法对巡视路线进行优化. 在初始值的生成中本文给出了三种方法, 方法一直观地进行了判断, 较为简单; 方法二借鉴了求 Hamilton 圈的方法; 方法三则基于最小生成树, 求出的路线总路程较短, 方法较为有效, 本文就采用该方法求得的路线作为后面启发式算法的初始路线.

基于生成的初始巡视路线, 本文提出了一系列启发式算法并采用一定的调整规则对初始路线进行了调整, 较好地解决了所提出的问题. 由于问题考虑的因素太多, 因此针对不同的要求就要给出不同的调整规则, 采用不同的启发式算法.

规则一、二和三就是分别针对问题 1、2 和 3 而提出的, 在问题 1、2 和 3 中的组数、 $T, t, V$  等条件发生变化时, 对问题仍然适用. 模型的分析则分析了  $T, t$  和  $V$  的变化对最佳路线的影响.

以上模型均建立在将区域分为几个区域的基础之上, 而本文在模型建立中提出了一种添加虚拟点来将求多组路线问题转化为一组路线的问题的思想, 如果能够找出一种准则, 使三个代表县城点之间的距离尽量大, 则在最好的情况下, 将使两个县城点均分整个一条路线, 从而求出最均衡的三条路线; 并且在满足均衡度的条件下可以降低均衡来求出较短路程的路线. 这种改进将简化问题的求解, 并可以得到较好的解.

### 附录一

**定理一** 当有  $i$  个组同时进行巡视时, 必然存在一总路程最短的路线, 记这时的总路

程为  $d$ , 则对于  $j$  组的巡视若  $i \geq j$ , 有  $d_i \geq d_j$ . 证明(略).

### 附录二(略)

### 附录三

说明 巡视路线中经过乡(镇)时, 时间增加 2 小时; 经过村庄时, 时间增加 1 小时. 由于行驶的速度为 35 公里 / 小时, 则在经过乡(镇)巡视可以等效于在路程中增加 70 公里, 同理经过村庄巡视则增加 35 公里. 下面的巡视路线中折算的路程即基于此思想.

(1) 在最短时间内用 24 组人员巡视的路线(略).

(2) 在最短时间内用 22 组人员巡视的路线.

组号称	巡视点	巡视路线	路程(公里)
1	H	O → H → O	225
2	14, 13	O → 14 → 13 → O	215.4
3	15, 16	O → 15 → 16 → O	220.8
4	12, 11	O → 12 → 11 → O	207.8
5	0, 8	O → 10 → 8 → O	217.8
6	G	O → G → O	195.4
7	I	O → I → O	192.2
8	F, 9	O → F → 9 → O	215.2
9	J, 18	O → J → 18 → O	220.4
10	17, 22, 23	O → 17 → 22 → 23 → O	214.2
11	19, L	O → 19 → L → O	197.4
12	24, K	O → 24 → K → O	215.1
13	E, 7, 6	O → E → 7 → 6 → O	223.4
14	21, 20, 25	O → 21 → 20 → 25 → O	190.8
15	35, 34, A	O → 35 → 34 → A → O	212
16	30, Q, 28	O → 30 → Q → 28 → O	213.9
17	4, D, 5	O → 4 → D → 5 → O	216.4
18	N, 26, 27	O → N → 26 → 27 → O	217.8
19	32, 31, 33	O → 32 → 31 → 33 → O	174.3
20	P, 29, R	O → P → 29 → R → O	221.1
21	2, 3, M	O → 2 → 3 → M → O	198.3
22	1, B, C	O → 1 → B → C → O	209.4

# 灾情巡视路线寻优模型

罗卢杨 龙继东 唐小军

(成都电子科技大学,成都 610054)

指导教师 徐全智

**编者按** 本文对模型的叙述清晰、简明、有特色,提出了一系列策略对巡视路线进行有效的调整。

**摘要** 本文讨论了灾情巡视路线的优化问题,并总结出一些在这类图中求最优回路的有效法则。文中首先将乡村公路示意图转化为赋权连通图,并通过最小生成树分解法将原权图分为若干子图,分析并给出在这些子图中寻找最佳回路的若干原则:扩环策略、增环策略、依据这些原则,求得不同条件下的巡视路线。

当巡视人员分为组时,在要求总路程最短且尽可能均衡的条件下各组巡视路程分别为:206.8km,219.5km,159.3km。当要求在24小时完成巡视,至少需分4组,巡视完成时间为:22.3小时。当巡视人员足够多时,完成巡视的最短时间为6.43小时,巡视人员需分22组。

## 一、问题重述(略)

## 二、问题分析

如果巡视人员只分一组,巡视路线是指巡视人员从县政府O出发,沿乡村公路遍历各乡镇、村,最后回到县政府。把该问题抽象为图论的赋权连通图问题,即有一权无向连通图 $G(V, E)$ , $O \in V$ ,两村之间公路的长度,即为该无向图的边权 $\omega(e)$ ,寻找一条最佳的路线,即在图 $G(V, E)$ 中,找到一条包含O的回路,它至少经过所有的顶点E一次,使总路程(总时间)最小。这是一个一般推销员问题(general salesman problem)<sup>[1]</sup>。

如果巡视人员分成若干组,每组考察一部分区域,且所有乡村都考察到。如果能把这些乡村分块,即图 $G(V, E)$ 中把图分为若干个连通的子图 $G_i$ ,每个子图 $G_i$ 中寻找一条包含O的回路 $L_i$ ,则对每个子图 $G_i$ 而言,化为一般推销员问题。

完成巡视的时间应是各组巡视时间中最长的时间。故为使巡视效率高,应尽量使各组巡视时间接近,反映在图 $G$ 分块时应尽量均衡。

## 三、变量及符号说明

$G(V, E)$ :赋权连通图; $G_i$ : $G(V, E)$ 的第*i*个子图; $L_i$ :子图 $G_i$ 中的最佳回路;

$\omega(e)$ :边 $e$ 的边权; $\omega(v)$ :点 $v$ 的点权; $l_i$ : $L_i$ 的各边权之和;

$e_i$ : $L_i$ 的各点权之和; $T$ :巡视中在每个乡镇停留时间;

$t$ :巡视中在每个村的停留时间; $\bar{V}$ :汽车行驶速度。

为叙述方便起见,我们在文中不加说明的使用上述变量或符号的变形形式,它们的含义可通过上下文确定。

图中一个三端点的边长  $t$ ; 且  $\omega(e)$  表示该边权值,  $\omega(v)$  表示权值  $t$

#### 四、条件假设(略)

图中乡、村所在地  $v_0$  表示县政府所在地,  $e_i \in E(G)$  对应示意图中的公路, 边权  $\omega(e_i)$  对应示意图中的公路长度, 点权  $\omega(v_i) = \begin{cases} T \times \bar{V}, v_i \text{ 代表乡镇,} \\ t \times \bar{V}, v_i \text{ 代表村} \end{cases}$ , 其中  $\bar{V}$  表示车速.

#### 五、模型的建立

把乡村公路示意图抽象为一赋权连通图  $G(V, E)$ , 在权图  $G$  中,  $v_i \in V(G)$  对应示意图中乡、村所在地,  $v_0$  表示县政府所在地,  $e_i \in E(G)$  对应示意图中的公路, 边权  $\omega(e_i)$  对应示意图中的公路长度, 点权  $\omega(v_i) = \begin{cases} T \times \bar{V}, v_i \text{ 代表乡镇,} \\ t \times \bar{V}, v_i \text{ 代表村} \end{cases}$ , 其中  $\bar{V}$  表示车速.

建立的数学模型如下:

$$\forall e \in E(G), \exists \omega(e) \in N, \exists v \in V(G), \exists \omega(v) \in \{\bar{V} \times T, \bar{V} \times t\}, v_0 \in V(G),$$

求  $G$  中回路  $L_1, L_2, \dots, L_k (k > 1)$ , 使得满足:

$$(1) v_0 \in V(L_i), i = 1, 2, \dots, k; \quad (2) \bigcup_{i=1}^k V(L_i) = V(G);$$

$$(3) \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) = \min(\text{目标为总距离最短}); \text{ 或 } \max_{1 \leq i \leq k} \left\{ \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e) + \sum_{v \in V(L_i)} \omega(v) \right\} = \min(\text{目标为巡视时间最短})$$

六、模型的求解

**问题 1** 现要分三组巡视, 则需把图  $G$  分成三个子图  $G_i (i = 1, 2, 3)$ , 在每个子图  $G_i$  中寻找最佳回路  $L_i (i = 1, 2, 3)$ .

因为最小生成树能包含图  $G$  中所有顶点  $E$ , 而且最小树的边权是相邻两顶点之间的距离, 它描述了顶点之间的相近程度, 故可考虑利用最小生成树初步分块.

根据最小生成树求解 Kruskal 算法<sup>[1]</sup>, 我们找到图的最小生成树如图 1:

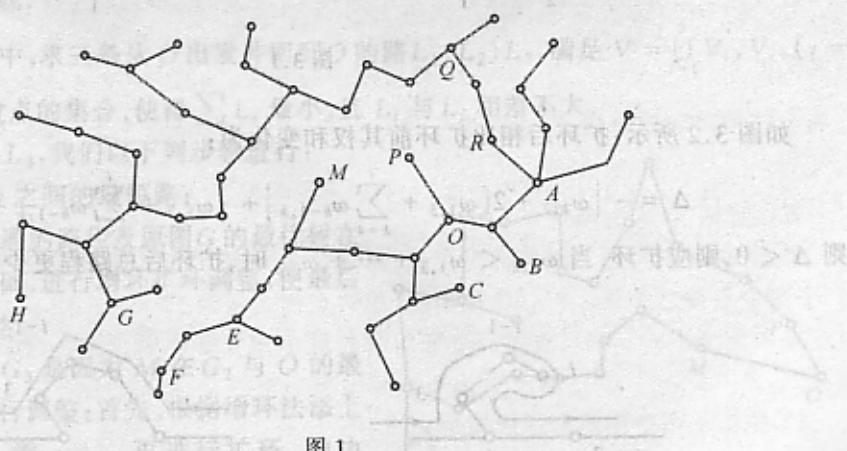


图 1

现要对已得到的最小生成树  $T$  分解, 以获得三个子图  $G$ , 使得分解结果尽量均衡. 由于在最小生成树上, 边权接近, 可略认为均衡即各子图包含的顶点数接近, 故各子图包含的顶点尽量接近  $[(35 + 17)/3] = 17$  个. 故有以下分解原则:

最小生成树分解原则:

- (i) 分解点为  $O$  点或尽可能接近  $O$  点; (ii) 分解所得的三个子图  $G_i$  所包含的顶点数尽可能接近 17 个; (iii) 尽量使分解所得的子图  $G_i$  为连通图; (iv) 尽量使子图  $G_i$  与点  $O$  最短路上的点在该子图内, 尽量使各子图的点在子图内部形成环路.

根据以上分解原则, 我们得到分解结果如图 2 所示.

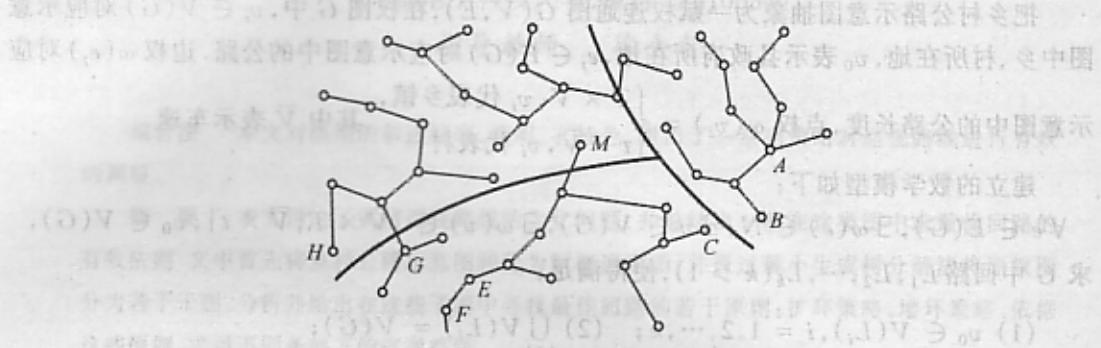


图 2

从而根据最小生成树的分解方法把图  $G(V, E)$  划分为三个子图  $G_i, i = 1, 2, 3$ , 分别在  $G_i$  中寻找最佳巡视路线. 现给出几个在寻找最优回路的有效优化规则:

### 1 扩环策略:

如果在图  $G$  中的路径  $C_i$  中, 有孤立的枝存在, 如图 3.1 所示代表 1, 2, 3 三个顶点, 若  $\omega_{1,2} + \omega_{1,3} > \omega_{2,3}$ , 则应考虑扩环. 扩环策略还可扩展到多个顶点的情况:

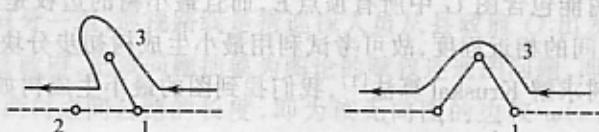


图 3.1

如图 3.2 所示: 扩环后相比扩环前其权和变化为:

$$\Delta = - \left\{ \omega_{1,2} + 2 \left[ \omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k} \right] + \left\{ \omega_{1,3} + \sum_{k=4}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{1,2} \right\} \right\}$$

则  $\Delta < 0$ , 则应扩环. 当  $\omega_{1,2} < \omega_{1,3} + \dots + \omega_{i-2,i}$  时, 扩环后总路程更少, 可进扩环调整.



图 3.2

### 2 增环策略:

若环路上某顶点处长出两条枝, 且存在可使两枝成环的边, 可考虑增环. 增环前后其权

和变化为

$$\Delta = \omega_{i,i+1} - \left( \sum_{k=2}^i \omega_{k-1,k} + \omega_{j,2} \right)$$

若  $\Delta < 0$ , 则应增环. 当  $\omega_{i,i+1} < \omega_{2,3} + \dots + \omega_{j,2}$  时, 增环后总路程更少, 可进行增环环调整.

我们对图 4 进行分析, 发现扩环策略条件完全满足, 故这两种策略完全适用.

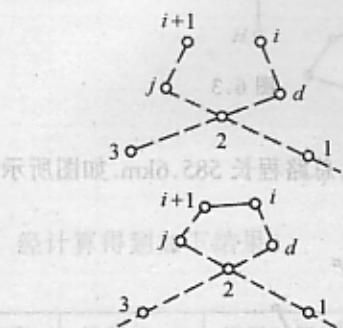


图 4

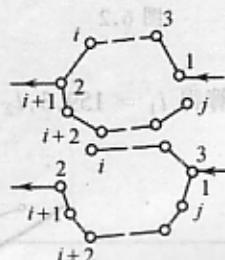


图 5

### 3 换枝策略:

若环路上某顶点长出一条枝, 而该枝末梢同环路中另一顶点距离接近, 可考虑换枝. 如图 5 所示, 若

$$\omega_{1,3} + \dots + \omega_{i,2} + 2(\omega_{2,i+1} + \dots + \omega_{j-1,j}) > \omega_{1,j} + \dots + \omega_{i+1,2} + 2(\omega_{1,3} + \omega_{i-1,i})$$

则应考虑换枝. 换枝的结果是使被重复的路减少.

根据以上的优化策略及分块结果, 在  $G_i, i = 1, 2, 3$ , 中分别寻找一条从  $O$  出发, 遍历  $V$  并回到  $O$  的最短路线.

在图  $G(V, E)$  中, 求三条从  $O$  出发并回到  $O$  的路  $L_1, L_2, L_3$ , 满足  $V = \bigcup_{i=1}^3 V_i, V_i, (i = 1, 2, 3)$  为  $L_i$  中经过点的集合, 使得  $\sum L_i$  最小, 且  $L_i$  与  $L_j$  相差不大.

为求出  $L_1, L_2, L_3$ , 我们以下列步骤进行:

1. 作出  $G$  与  $O$  之间的最短路;

2. 以  $O$  与  $G$  连通的路径及原图  $G$  的最优树在  $G_i$  中保留的边为基础, 进行增环扩环调整, 使最后尽可能形成一个环路.

12, G, 11 归入  $G_3$  是因为  $M$  在  $G_2$  与  $O$  的最短路上. 现对  $G_2$  进行调整: 首先, 根据增环法添上  $e_{2,16}$ , 根据对换法, 添  $e_{17,K}$ , 再进行扩环, 加边  $e_{21,23}$ , 去边  $e_{21,25}$ ; 加边  $e_{23,N}$ , 去边  $e_{24,N}$ , 得到图 6.1. 同样, 根据这些法则对  $G_1, G_3$  调整, 分别可得到图 6.2 和图 6.3.

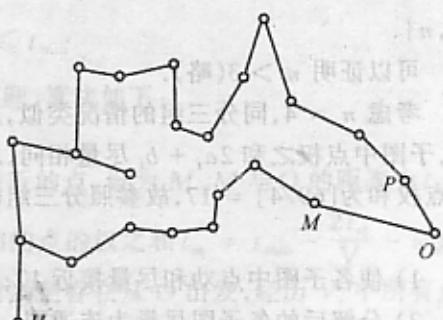


图 6.1

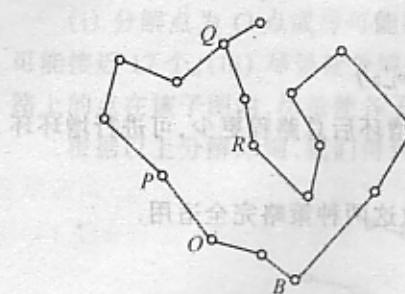


图 6.2

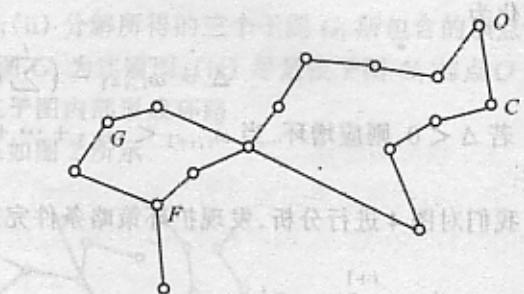


图 6.3

再由图计算得  $l_1 = 159.3, l_2 = 206.8, l_3 = 219.5$  (KM), 总路程长 585.6km. 如图所示.

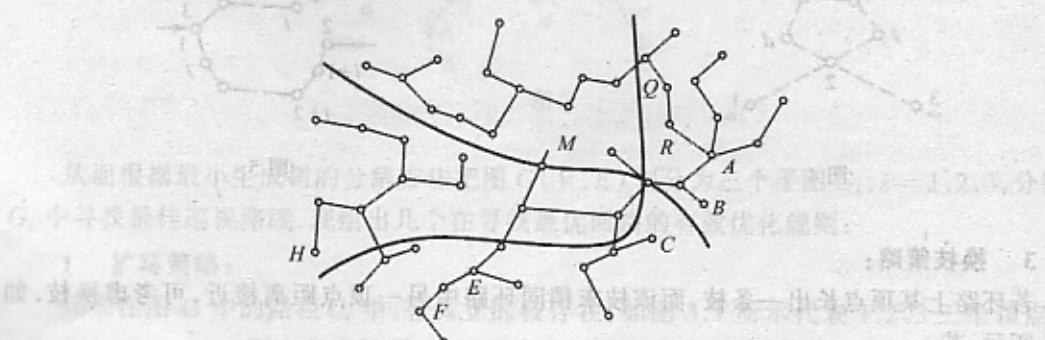


图 7

### 问题 2 (限时巡视的最佳路线)

若分成  $n$  组巡视人员, 其各自所走的路径  $L_i$ , 回路  $L_i$  中边权  $\omega(e_i)$ , 点权  $\omega(v_i)$ , 则有  $L_i = \sum_{e \in E(L_i)} \omega(e_i)$ , 点权和  $e_i = \sum_{v \in L_i} \omega(v_i) = (2a_i + b_i) \times 35$ , 其中  $a_i$  为乡相对应的点的数目,

$b_i$  为与村相对应的数目, 巡视至少应分的组数  $n: n = \min\{n \mid \frac{L_i}{35} + 2a_i + b_i < 24\}, |i = 1, \dots, n|\}$ .

可以证明  $n > 3$  (略).

考虑  $n = 4$ , 同分三组的情况类似, 用最优树分解方法把图  $G$  分成子图  $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 子图中点权之和  $2a_i + b_i$  尽量相同, 总的点权之和为  $17 \times 2 + 35 = 69$ , 故平均每个子图中点权和为  $[69/4] = 17$ , 故参照分三组时的最小树分解原则, 分成 4 组时最小树分解原则为:

- 1) 使各子图中点权和尽量接近 17;
- 2) 分解后的各子图尽量为连通图;
- 3) 分解点为  $O$  或尽量接近  $O$ ;
- 4) 生成的子图容易形成圈或接近圈. 为使尽量均衡, 大致划分如图所示:

通过增环、扩环、换枝等策略, 对各子图内部调整而寻找最佳巡视回路, 其结果如图 8 所示:

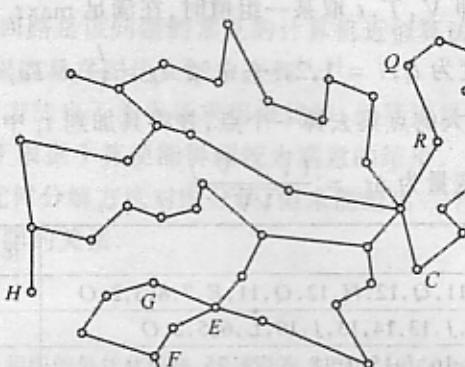


图 8

经计算得到如下结果：

组数	路程(km)	巡视时间(h)	巡视路线
1	140.1	22.0	O, C, B, 1, A, 34, 35, 33, 31, 32, 30, 29, R, O
2	154.3	21.4	O, P, 28, 27, 26, N, 23, 22, 17, 16, K, 21, 25, M, O
3	185	22.3	O, M, 25, 21, K, 18, I, 15, 14, H, 14, 13, J, 19, 20, L, 6, 5, 2, O
4	182	21.1	O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 12, F, 10, 9, E, 8, 4, D, 3, C, O

完成巡视的最长时间为  $t_{\min} = 22.3$  小时. 其中路线重合部分的点, 播 K, 21, 25, M 为二组巡视视. 6, 5, 1 由三组巡视.

**问题 3** 巡视人员足够多, 到并没汽车也足够多, 甚至每个村、镇都可分配一组巡视员, 这些组的完成时间中最长的即为完成巡视的时间下限  $t_{\min}$ , 从最短生成树上可以看出, H 离 O 距离  $l_{O,H}$  最长, 且 H 的权最大 = 2, 故巡视 H 的那组所花的时间为完成整个巡视的时间下限,  $t_{\min} = \frac{2l_{O,H}}{V} + \omega H = 6.43$ , 因此, 需解决的问题是

$$\min n$$

$$\text{s.t. } \frac{2l_i}{35} + 2a_i + b_i \leq t_{\min}$$

我们给出一种算法, 按此算法可比较好地解决这个问题. 算法如下:

- 1) 令  $i = 0$ .
- 2) 选最短路树形图中未被标号的点中离点 O 最近的点, 设为 M, M 与 O 的距离为  $l_m$ , 设第  $i$  个巡视点集  $V_i = \{M\}$ , 计算  $V$  最多还可增加的点的权之和  $l_m = t_{\min} - \frac{2l_m}{V} - \omega_m$ .
- 3) 尽可能使并入  $V_i$  的点的权之和为  $[l'_m]$ , 同时满足存在从 O 出发, 经历  $V_i$  中所有点并回到 O 点的路  $L_i$ , 使  $\frac{l_i}{V} + Ta_i + tb_i \leq tb_i \leq t_{\min}$ ,  $l_i$  为  $L_i$  的长度,  $a_i, b_i$  分别为中权为 T,  $b$  的点的个数. 若同时存在几种并入方式, 先取并入的点到 O 距离之和最大的那一种.
- 4) 在图中把中含有的点标上号, 若还有点未标号, 令  $i = i + 1$  转(2), 否则, 停止. 通过这种算法, 得到应分为 22 组, 结果见表.

**问题 4** 设某种情况下, 即  $\bar{V}, T, t$  取某一组值时, 在满足  $\max t_i$  取最小值的条件下的点集为  $V_i$ , 对应路为  $L_i$ , 其长度为  $l_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 令  $t_i = \frac{l_i}{\bar{V}} + Ta_i + tb_i$ , 此时应满足  $t_i$ ,  $t_j$  相差不大, 否则, 可将  $t_i$  中最大的点集去掉一个点, 并将其加到  $t_i$  中最上的点集中去.

当  $\bar{V}$  改变  $\Delta\bar{V}$  时,  $t_i$  的改变量为  $\Delta t_i = \frac{(\bar{V} - \bar{V}')}{\bar{V}\bar{V}'}$ .

分组	巡视路线	花费时间(h)	路程(km)
$ H $	$O, 2, 3, 8, 7, E, 11, Q, 12, H, 12, Q, 11, E, 7, 8, 3, 2, O$	6.43	155
$ 14, 13 $	$O, 2, 5, 6, L, 19, J, 13, 14, 13, J, 19, L, 6, 5, 2, O$	6.15	145.4
$ 15, 16 $	$O, 26, N, 23, 22, 16, I, 15, I, 18, K, 21, 25, M, O$	6.37	153
$ 12, 11 $	$O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 12, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O$	5.93	137.6
$ 10, 18 $	$O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 10, F, 9, E, 8, E, 7, 6, 5, 2, O$	6.21	147.4
$ G $	$O, 2, 5, 6, 7, E, 11, G, 11, E, 7, 6, 5, 2, O$	5.58	125.4
$ I $	$O, M, 25, 21, K, 18, I, 18, K, 21, 25, M, O$	5.49	122.2
$ F, 9 $	$O, 2, 5, 6, 7, E, 9, F, 9, E, 7, 6, 5, 2, O$	6.17	111.2
$ J, 18 $	$O, 2, 5, 6, L, 19, J, 18, K, 21, 25, M, O$	6.29	115.4
$ 17, 22, 20 $	$O, P, 26, N, 33, 22, 17, K, 21, 20, 25, M, O$	6.31	115.8
$ 19, K $	$O, M, 25, 21, K, 21, 20, 19, L, 6, 5, 2, O$	6.18	111.2
$ 24, 23, 21 $	$O, P, 26, N, 24, 23, 21, 25, M, O$	5.79	97.9
$ E, 7, 6 $	$O, 2, 5, 6, 7, E, 7, 6, 5, 2, O$	6.38	83.4
$ L, 5, 25 $	$O, M, 25, 20, L, 6, 5, 2, O$	6.36	82.8
$ 30, Q, 32 $	$O, R, 31, 32, 30, Q, 29, R, O$	6.17	76.2
$ 35, 34, 33, 31 $	$O, I, A, 34, 35, 33, 31, R, O$	6.42	84.7
$ 4, D, 3 $	$O, 2, 3, D, 4, D, 3, C, 1, A, 1, O$	5.99	69.8
$ N, 27, 28 $	$O, P, 26, N, 26, 27, 28, P, O$	6.27	79.5
$ 29, P, R $	$O, R, 29, P, O$	6.32	46.1
$ 31, 2, C $	$O, R, 31, R, O, C, 3, 2, O$	6.22	77.6
$ 26, M $	$O, M, N, 26, P, O$	4.86	65.1
$ B, A $	$O, 1, B, A, 1, O$	5.15	40.4

由于  $l_i$  的不同,  $\Delta t_i$  也不同, 当  $\bar{V}$  变化很大时, 可能使  $t_i$  相差很大, 从而需要重新调整巡视路线. 现在  $n = 3, V = 35, T = 2, t = 1$  讨论变动对路线的影响.

首先, 从 1 中所得的三条巡视路线及对应巡视点集开始, 将  $t_i$  最大的点集中调整一个到  $t_i$  最小的点集中去, 直到  $\max t_i$  不再减小为止, 我们得到三条路线, 对应长度分别为 194.205.3、206.8, 各巡视点中权为 1、2 的点的个数分别为:  $a_1 = 6, b_1 = 11, a_2 = 5, b_2 = 13, a_3 = 6, b_3 = 11$ .

当  $T$  增加时, 对应时间分别为  $t_1 = 6\Delta T + 28.5, t_2 = 5\Delta T + 28.9, t_3 = 6\Delta T + 28.9$ , 当  $\Delta T > 3.4$  时, 可将  $V_3$  中的点  $H$  调入  $V_2$  中, 此时对应的时间为  $t'_1 = 6\Delta T + 28.5, t'_2 = 5\Delta T + 31.5, t'_3 = 6\Delta T + 26.3$  均比  $\max\{t_1, t_2, t_3\} = t_3$  小, 故应改变巡视路线.

### 模型的评论及改进

1. 该问题实际上是一个一般推销员问题, 是已被论证的 NPC 问题, 至今仍无有效的算

法.求最优 Hamilton 回路是该问题的常见的计算机近似算法,它不能保证得到最优解,运算量很大,这种算法能很容易在图论文献中查到<sup>[1,2]</sup>.

我们的策略改进方法也不能保证求得最优解,但接近最优解.并且所提出的策略能大幅度减少计算量,以至于根据手算便能得到较为满意的结果.

2. 我们利用最优树分解方法对图分块,但未能给出一个准确的原则定量地给出总路程最短同均衡性最好的制约关系.

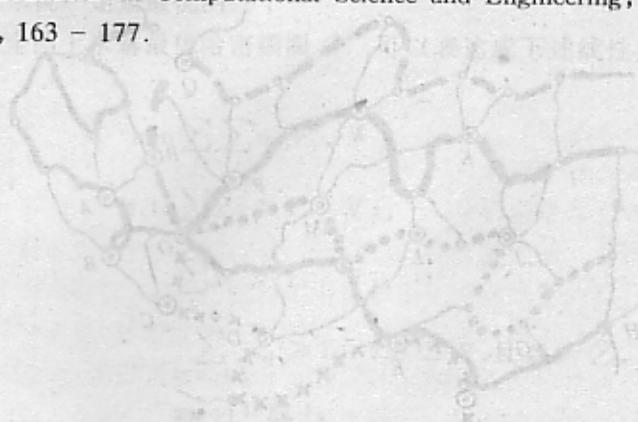
### 参 考 文 献

- [1] E.米涅卡[美],网络和图的最优化算法,中国铁道出版社,北京,1984.
- [2] 卢开澄,图论及应用,清华大学出版社,北京,1981.

在科学知识和工程实践的进展中,现在把计算看作是和理论以及实验同等重要而且必不可少的伙伴。数值模拟能使人们能研究复杂的系统和自然现象,如果要通过直接的实验来研究它们那将是费钱或危险、甚至是根本不可能的。对这种模拟中从未有过的高层次的细节和现实性的探求要求极大的计算能力,而且这种探求已经为计算机算法和系统结构中的重大突破提供了推动力。由于这些进展,计算科学家和工程师现在能够解决过去曾经认为是难以对付的大规模的问题。计算科学和工程 是与科学、工程、数学以及计算机科学有关的一个迅速发展的多学科交叉的领域。CSE 着重研制问题解决的方法以及解决科学和工程问题的强健的工具。我们相信 CSE 将对科学发现和工程设计的未来起到重要的 纵使不是支配的一作用。

旨在推进计算和应用数学(它们处于 CSE 的核心地位)的学会 SIAM 当然应该在这个学科的发育和发展中发挥作用。本报告的目的是试图确定 CSE 的核心领域和范围,从而为 CSE 的课程设置和研究生教学计划提供想法、建议和信息,并就 SIAM 能为此作出贡献的潜力提出建议。

Graduate Education in Computational Science and Engineering, SIAM Review, v. 43 (2001), no. 1, 163 – 177.



依此方法依次地探讨是必要的。求解真实中由着装和行为限制的巡回赛问题也是近似最优的。

## 灾情巡视的最佳路线

上海海运学院 周建平 潘海东 刘晓东 李海英  
丁颂康

### 一、关于问题的数学模型

本题给出了某县的道路交通网络图,要求的是在不同条件下,灾情巡视的最佳分组方案和路线。这是一类图上点的行遍性问题,也就是要用若干条闭链覆盖图上所有的顶点,并使某些指标达到最优。

点的行遍性问题在图论和组合最优化中分别称为哈密顿问题和旅行商问题,所谓哈密顿问题,就是研究图中是否存在经过所有顶点恰好一次的圈或路,这种圈或路(如果存在)分别称为哈密顿圈和哈密顿路,简称为 H-圈和 H-路。而旅行商问题通常是指在赋权图上经过所有顶点至少一次,且使总长度(即边权之和)达到最小的闭链。而本题所求的分组巡视的最佳路线,则与多旅行商问题(MTSP)类似,也就是  $m$  条经过同一点并覆盖所有其他顶点又使边权之和达到最小的闭链。

求解非完全图的多旅行商问题,通常所用的方法可分为两步。首先是利用任意两点间的最短路长度作为该两点间边的权构造一个完全图。这一点对于原图中没有边相连的点对尤为重要。容易证明,在此构造出来的完全图中,各边的权将自然满足三角不等式,即任意三点间,两边权之和不小于第三边的权;并且该完全图中的最优哈密顿圈与原图上的最优旅行商路线等价。第二步,以一点  $v$  为起终点(本题中的县城  $O$ )的多旅行商问题,可以采用将该点视作若干点  $v_1, v_2, \dots, v_k$  ( $k$  为旅行商人),并令  $w(u, v_j) = w(u, v)$ (对所有的点  $u \neq v$ )及  $w(v_i, v_j) = \infty$  ( $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k$ )的方法,再将前述的完全图拓展成增广完全图。然后,在该增广完全图上求最优哈密顿圈。通常情况下,这个最优哈密顿圈将经过  $v_1, v_2, \dots, v_n$  各一次,而这些点在圈上又不相邻。因此,它们将把这个圈分解成恰好  $k$  段,这  $k$  段形或以  $v$  作为起终点的闭链,分别对应  $k$  个旅行商的旅行路线,并且这些旅行路线对于总长度最短的目标来说一定是最优的。

在拓展完全图上求解最优哈密顿圈  $C^*$ ,可以表达成下述线性规划(更确切地讲是 0-1 规划)的形式:

$$\min \sum_{i} \sum_{j} w_{ij} x_{ij},$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} = 1, \quad \forall i,$$

$$\sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall j,$$

$$\sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset V, \text{ 且 } S \neq \emptyset,$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1,$$

其中  $w_{ij}$  就是点  $i$  和  $j$  间边的权,  $V$  是图的点集,而条件  $\sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \geq 1$  是为了保证取  $x_{ij} = 1$  的

边不形成小的圈,这里  $S$  是点集  $V$  任意的非空真子集. (\*) 式的最优解中  $x_{ij}=1$  的边  $(i,j)$  将构成最优哈密顿圈  $C^*$ .

值得注意的是,用(\*)式求得增广完全图上的最优解(也就是多旅行商问题的最优解),能使  $k$  条旅行路线的总路程达到最小,但是这  $k$  条路线的均衡性可能相当差.因此,当要求均衡性较好的解还需要做大量的调整工作.此外,哈密顿问题和旅行商问题都属 NP 完全类,也就是说,(\*)式问题的求解没有多项式时间算法.对于本题的规模(包括县城共有 53 个点,再加上构造增广完全图时添加的  $k-1$  个点),要想求得真正的最优解是不现实的.为此只能采用启发式算法,求得近似最优解.

单旅行商问题的近似算法,有如分枝定界、最小插入、最小生成树、对换调优、最近邻点,以及神经网络、模拟退火、遗传算法等方法.容易证明,单旅行的最优路线长度,必定是多旅行商最优路线总长度的下界.已知的一条原图的单旅行商最优路线的近似解为:  $O - P - 29 - R - 31 - 33 - A - 34 - 35 - 32 - 30 - Q - 28 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 21 - K - 22 - 17 - 16 - I - 15 - I - 18 - J - 19 - L - 20 - 25 - M - 6 - 7 - E - 11 - G - 13 - 14 - H - 12 - F - 10 - F - 9 - E - 8 - 4 - D - 5 - 2 - 3 - C - B - 1 - O$ , 其长度为 514 km.

在求本题的解之前,对原问题所给条件作一些适当的假设还是必要的.例如,公路不考虑等级差别,也不受灾情或交通情况的影响,各条公路段上汽车行驶速度可以认为是均匀的;各巡视组巡视的乡(镇)、村不受行政区划的影响,即某乡(镇)与隶属于它的村不一定分在同一组内;各巡视组保持统一行动,即不允许一个巡视组再分成若干小组等等.

## 二、关于问题的求解

本题的第一问,要求设计分三组巡视时,使总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线.

这里有两个目标.若记三组的巡视路线长度从小到大分别为  $C_1, C_2, C_3$ , 则该两目标的数学表达式为:

$$\min(C_1 + C_2 + C_3)$$

以及

$$\min(C_3 - C_1).$$

但是这两个目标又是相互矛盾的,也就是不可能同时达到最小.因此具体求解时,应两者兼顾,用多目标的方法处理.为简单起见,根据实际灾情巡视的背景,一种较为合理的考虑是转换成一个目标函数,即

$$\min C_3.$$

根据前面的分析,分组巡视路线的最优解,应当采用增广完全图上的单旅行商路线分段的方法求得.但是根据原题图的规模以及边的稀疏性,用这种方法处理反而将使问题变得更为复杂.而且考虑到均衡性要求需做的调整工作也将是大量的.因此,可以采用先适当进行点的分组,分别求出各组的单旅行商路线,然后在组间进行适当调整的方法求得近似解.

对于巡视组的划分,我们可以利用原图的最小生成树(所选择的都是权最小边).从县城出发的最短路生成树,或者原图的单旅行商路线等等子图作为依据,因为它们都是在某种指标下的最优解,而这类指标与原题的要求又相当接近.当然,也可以直接利用地理位置、射线扫描、对边界进行合理划分后向内扩展等直观方法作近似处理.

分组以后,由于规模较小,最优巡视路线的设计就变得较为简单.一般可借助现成软件

求出精确解来. 即便没有这类软件, 采用近似算法或者直接搜索也都能较容易地找出很好的近似最优解.

这里提供两种近似最优解的参考答案. 前者的总路程较短但均衡性较差; 后者的均衡性相当好但总路程稍长. 假如以  $\min C_3$  的目标来衡量, 后者是已知的最好答案.

#### 第一种方案:

第一组:  $O - C - B - 34 - 35 - 32 - 30 - Q - 28 - Q - 29 - R - 31 - 33 - A - 1 - O$ . 总路程为 153.1 km.

第二组:  $O - P - 26 - 27 - 26 - N - 24 - 23 - 21 - K - 22 - 17 - 16 - I - 15 - I - 18 - J - 19 - L - 20 - 25 - M - O$ . 总路程 210.5 km.

第三组:  $O - 2 - 3 - D - 4 - 8 - E - 9 - F - 10 - F - 12 - H - 14 - 13 - G - 11 - E - 7 - 6 - 5 - 2 - O$ . 总路程 210.5 km.

#### 第二种方案:

第一组:  $O - 1 - B - 34 - 35 - 32 - 31 - 33 - A - R - 29 - Q - 30 - Q - 28 - 27 - 24 - 23 - N - 26 - P - O$ . 总路程 197.6 km.

第二组:  $O - M - 25 - 20 - 21 - K - 22 - 17 - 16 - I - 13 - G - 11 - E - 8 - 4 - D - 3 - C - O$ . 总路程 200.4 km.

第三组:  $O - 2 - 5 - 6 - L - 19 - J - 18 - I - 15 - 14 - H - 12 - F - 10 - F - 9 - E - 7 - 6 - 5 - 2 - O$ . 总路程 203.5 km.

综观参赛队的答卷, 三组巡视总路程和各组路程的极差大体有以下关系: 总路程约在 540~550 公里时, 极差将达到 100 公里; 总路程在 570 公里左右时, 极差约为 50 公里; 而极差在 10 公里以内时, 总路程将略超过 600 公里.

### 三、有时间约束的最佳路线

本题的第二问是添加了巡视组停留时间  $T = 2$  小时,  $t = 1$  小时以及汽车行驶速度  $V = 35$  公里/小时的条件后, 要求在 24 小时内完成巡视的最少分组数以及相应的最佳巡视路线. 第三问则是在上述时间参数条件下, 尽可能在最短时间内完成巡视所需的最少组数以及相应的巡视方案. 尽管两问形式雷同, 但却蕴含着不同的数学内涵.

在前文中我们曾经提到, 原图的单旅行商路线长度是分组巡视总路程的下界. 而已知的单旅行商路线长度均在 500 公里以上. 因此各组花在汽车行驶上的时间之和将超过 14 小时 ( $35 \times 14 = 490 < 500$ ). 加上在各乡(镇)、村的停留时间  $m \cdot T + n \cdot t = 17 \times 2 + 35 \times 1 = 69$  小时(其中  $m$  为乡(镇)数,  $n$  为村数), 各组所需时间之和将大于 83 小时. 若分成三组, 就不可能在 24 小时内完成巡视. 于是, 所求的最小分组数为 4.

若记  $C_j$  为第  $j$  组的巡视路线长度,  $m_j, n_j$  分别为该组停留的乡(镇)和村数( $j = 1, 2, 3, 4$ ), 则各组所花费的时间  $h_j$  为:

$$h_j = 2m_j + n_j + C_j/V, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

和第一问的情况类似, 所谓最佳的要求仍然是两目标的. 即要求

$$\min(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

以及

假若我们仍然以后者作为主要目标来考虑,那么,乡村数的均衡性和各组路程的均衡性就依然是分组的主要依据。参照第一问解答的方法和所得的结果,并对各组的交界作适当的调整,用计算机搜索的方法容易得到较好的解。一个比较好的分组方案为:

第一组:  $O - C - 3 - D - 4 - 8 - E - 9 - F - 10 - (F - 9 - E) - 7 - 6 - 5 - 2 - O$ , 总路程  $C_1 = 158.8 \text{ km}$ ,  $m_1 = 4$ ,  $n_1 = 9$ ; 总巡视时间为  $h_1 = 21.54 \text{ 小时}$ 。

第二组:  $O - (2 - 5 - 6) - L - 19 - J - 13 - 14 - H - 12 - G - 11 - (J - 19) - 20 - 25 - M - O$ ,  $C_2 = 176.3 \text{ km}$ ,  $m_2 = 5$ ,  $n_2 = 7$ ;  $h_2 = 22.04 \text{ 小时}$ 。

第三组:  $O - (P) - 28 - 27 - 24 - 23 - 22 - 17 - 16 - I - 15 - (I) - 18 - K - 21 - (23) - N - 26 - (P) - O$ ,  $C_3 = 180.3 \text{ km}$ ,  $m_3 = 3$ ,  $n_3 = 11$ ;  $h_3 = 22.15 \text{ 小时}$ 。

第四组:  $O - 1 - B - 34 - 35 - 32 - 30 - Q - 29 - R - 31 - 33 - A - (1 - O) - P - O$ ,  $C_4 = 146.1 \text{ km}$ ,  $m_4 = 5$ ,  $n_4 = 8$ ;  $h_4 = 22.17 \text{ 小时}$ 。

(以上各组巡视路线中括号的点为只经过不停留的点)。各组的巡视时间均在 22 小时左右, 极差仅 0.23 小时, 以  $\min\{\max_j h_j\}$  为标准而言, 是已知的最好方案之一。一般来说, 较好的参赛文章都能得到分四组, 且四组巡视时间总和在 87~88 小时之间、偏差又较小的方案。

问题的第三问是在上述时间参数假设下, 如果有足够的巡视人员, 要求出完成巡视的最短时间, 并给出在最短时间限制下的最佳巡视路线。

事实上, 完成巡视的最短时间受到单独巡视离县城最远的乡(镇)所需时间的制约。采用图上述最短路经的 Dijkstra 算法, 可以求得从县城到各点的距离。离县城最远的乡为  $H$  点, 距离为 77.5 公里, 因此单独巡视该乡所需时间为  $h_H = \frac{77.5 \times 2}{35} + 2 = 6.43 \text{ 小时}$ 。(离县城最远的村为 14, 若单独巡视所需时间要小得多)。即使人员足够多, 分组再细, 完成巡视至少需要 6.43 小时。于是, 问题便成为在 6.43 小时内完成巡视所需的最少分组数和巡视方案。

容易验证, 要在 6.43 小时内完成巡视, 有些点(如  $I, J, H$ )只能单独作为一组, 时间不允许在别的乡村停留。而绝大部分乡村可以和其他乡村分在同一组内, 并在限定期限内完成巡视。

我们把能够放在同一组内巡视的乡村称为一个可行集。这种可行集是原图点集  $V$  的一个子集。显然, 原题所求的最少分组数便是点集的可行集最小覆盖问题。同旅行商问题一样, 子集覆盖问题也属 NP 完全类。因此, 求该问题的最优解也是在短时间内做不到的。采用计算机作近似搜索仍不失为较常用的办法。关于该问题的研究, 后面一篇发表的华东理工大学俞文魁教授的文章有详细讨论, 他的文章还证明了本题的最小覆盖数为 22。

参照点在图中从县城出发的最短路树上的位置, 采用就近归组的搜索方法, 容易得到最优解 22 组的分组方法及相应的巡视路线, 这里不一一列举了。

在阅卷中发现, 有个别的参赛队找到了一种分成 21 个组的方案, 并且指明尽管其中有两组的巡视时间超过了最短时间的要求, 但因为超出时间不长(小于 0.1 小时), 考虑到问题的实际背景, 用两个小组几分钟时间的代价换取了节省一个组的人力物力的效果。我们认为, 就数学建模竞赛的本意而言, 这些同学的构思是可取的。

#### 四、关于 $T, t, V$ 的讨论

本题第四问要求在巡视组数已定的情况下尽快完成巡视, 讨论参数  $T, t$  和  $V$  的改变

对最佳巡视路线的影响.

前面我们已经提到,要尽快完成巡视,即要求各组巡视时间的最大值也要最小.用数学式子表示就是:

$$\min \{ \max_j h_j \} = \min \left\{ \max_{1 \leq j \leq k} \left( m_j \times T + n_j \times t + \frac{C_j}{V} \right) \right\},$$

这里  $k$  是给定的分组数,  $m_j, n_j$  分别是第  $j$  组停留的乡(镇)数和村数,  $C_j$  是第  $j$  组巡视路线的长度( $j=1, 2, \dots, k$ ).

在上述  $h_j$  的表达式中,由于  $T$  和  $t$  的作用完全相仿,所以为简化讨论起见,对于任意给定的  $T$  和  $t$ ,不妨记  $p = T/t$ ,即  $T = pt$ .这里  $h_j$  可简记为:

$$h_j = (p \cdot m_j + n_j) \cdot t + \frac{C_j}{V}.$$

1. 若  $t$  增大而  $V$  不变.为了使  $h_j$  的最大值尽可能小,就要求  $pm_j + n_j$  的最大值尽可能小.但是当  $T$  和  $t$  的关系确定后,  $\sum_j (pm_j + n_j)$  是定值( $= p \cdot m + n$ ,其中  $m$  是全县的乡(镇)数 17,  $n$  是全县的村数 35),上述要求就成为各组停留乡村数(加权以后之和)尽可能均匀,用数学式子表示即为:

$$\lfloor \frac{pm + n}{k} \rfloor \leq pm_j + n_j \leq \lceil \frac{pm + n}{k} \rceil,$$

这里  $\lfloor a \rfloor$  和  $\lceil a \rceil$  分别表示数  $a$  的下整数和上整数.当然,在调整各组停留的乡村数使之达到均衡时,自然会给各组的路线及其长度带来影响,这时应当考虑进行适当调整.

2. 若  $t$  不变而  $V$  增大.这种情况下,在  $h_j$  中可能导致  $C_j/V$  起主导作用.那么,和 1 的结论类似,我们更应使  $C_j$  即各组的巡视路线尽可能均衡.诚然,因为  $\sum_j C_j$  不是常数,而且  $C_j$  的均衡性会带来  $\sum_j C_j$  的增大,这对于尽快完成巡视会带来负面影响.所以对具体情况应作具体分析,比如可以考虑  $h_j$  的前半部份  $(pm_j + n_j) \cdot t$  对均衡性的修正,对路程较长的组尽量考虑停留较少乡村.

至于  $t$  和  $V$  的交互作用,对于这样一个原本很难得到最优解的离散最优化问题来说,将变得更为复杂,这里就不再进一步讨论了.

# 多旅行商路线的几个问题\*

上海华东理工大学应用数学研究所

俞文锐

旅行商问题是运筹学中的一个典型问题,多旅行商问题是它的扩充,它可应用于车辆路线组织、作业调度等方面<sup>[1]</sup>,全国大学生数学建模竞赛98B题正是这样一类问题。一般来说,这类问题不存在好算法。由于实际要求的不同,这类问题中的目标函数与约束条件又可以有多种形式,这样,结合具体问题的特殊性,进行较为深入的讨论,仍然是可能的。

本文对98B题的几个较为深入的问题进行讨论,在1中,我们讨论无向图上最小Hamilton回路与最优旅行商路线的关系,指出二者何时相同、何时可能不相同的一些判断。在2中,针对98B中的目标函数的处理,讨论如何将双目标化为单目标的问题以及如何把点权化为边权的问题。我们在3中讨论,在给定的时间下,如何确定最小组数的问题。特别,98B题第三小题中,当给定时间限定为6.4286小时,可断言22组是最小组数,也就是说,21组是不可行的,对此,我们在4中介绍了集合覆盖问题,在5中讨论了有关98B题第三小题的性质,最后在6中给出证明。

为节省篇幅,我们对98B题不再复述,因为在本期杂志的若干文章中均有叙述。98B题的图形亦略,但有关数据列在附录中,以保持本文的完整性。

## 1 最小 Hamilton 回路与最优旅行商路线的关系

我们限于讨论无向图的情形。

给定一个连通图  $G = (V, E, w)$ , 其中  $V$  为顶点集,  $E$  为边集,  $w$  为定义在  $E$  上的权(非负)。 $G$  的一个 Hamilton 回路是顶点集上的一个循环排列  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1}$  ( $\sigma_{n+1} = \sigma_1$ ), 其中一切  $\sigma_i \sigma_{i+1} \in E$ ,  $w(\sigma)$  定义为  $\sigma$  上所有边权之和。当  $w(\sigma)$  达到最小,  $\sigma$  称为最小 Hamilton 回路。 $G$  的一个旅行商路线是顶点集  $V$  的可重复但不遗漏的一个循环排列, 多旅行商路线则是顶点集  $V$  的可重复但总体上不遗漏的多个循环排列, 其余有关概念类同于 Hamilton 回路。对于  $G$  为完全图的情形, 不难得到以下两个结论<sup>[2]</sup>。

**结论1** 如果完全图  $G = (V, E, w)$  的权不受限制, 那么存在例子使得:  $G$  的最小 Hamilton 回路不是  $G$  的最优旅行商路线。

**结论2** 如果完全图  $G = (V, E, w)$  的权满足三角形不等式:

$$\forall i, j, k \in V, \quad w_{i,k} \leqslant w_{i,j} + w_{j,k}, \quad (1)$$

那么  $G$  的最小 Hamilton 回路必是  $G$  的最优旅行商路线。

对于  $G$  为连通但不是完全图的情形, 容易注意到:  $G$  可能不存在 Hamilton 回路, 这时也就不存在最小 Hamilton 回路; 还可以想到:  $G$  的最优旅行商路线可到完全图  $G'$  上去找, 这个完全图  $G' = (V, E', w')$ , 其中边集  $E'$  包含  $V$  的一切点对, 而  $w'_{i,j}$  定义为  $G$  上顶点  $i$  与顶点  $j$  之间的距离(最短路长度), 它必定满足三角形不等式。

**结论3** 连通图  $G = (V, E, w)$  所相应的完全图  $G' = (V, E', w')$  的最小 Hamilton 回

\* “优化理论与算法”为国家自然科学基金资助项目。

路  $H'$ , 必定给出  $G$  的最优旅行商路线, 其中  $H'$  中的边用  $G$  中的最短路(其二端点与该边的二端点相同)来代替.

结论 3 具有直观解释, 它可用反证法加以证明.

从 98B 题的竞赛答案来看, 不少答卷提到上述结论 2 与结论 3, 但是在叙述结论 2 时, 一些答卷未指明这一结论只适用于完全图, 在叙述结论 3 时, 一些答卷也未强调  $G$  与  $G'$  的差别. 这样, 也就产生了一个疑问: 结论 2 能否推广到非完全图呢? 这时, 相应于三角形不等式(1)的条件要变为:

对任  $(i, k) \in E$  及从  $i$  至  $k$  的任一条路  $P$ ,

$$w_{i,k} \leq \sum_{j,l \in P} w_{j,l}, \quad (2)$$

也就是说, 对任  $(i, k) \in E$ ,  $w_{i,k}$  恰等于  $G = (V, E, w)$  中顶点  $i$  与  $k$  之间的最短路长. 对于上述疑问结论如下:

**结论 4** 有例子表明, 即使  $G = (V, E, w)$  满足(2)且存在 Hamilton 回路, 但  $G$  的最小 Hamilton 回路不是  $G$  的最优旅行商路线.

**证** 如图 1,  $G = (V, E, w)$ ,  $V$  由 10 个顶点组成, 而  $E$  由 13 条边组成, 权  $w_{i,j}$  分别标出在每一条边旁, 其中  $x$  大于 1. 显然, 对此图  $G$ , (2) 是成立的. 图  $G$  有唯一的 Hamilton 回路  $ABCDEFHGIJA$ , 其长度(即最小的 Hamilton 回路长度)为

$$l_1 = 8 + 4x. \quad (3)$$

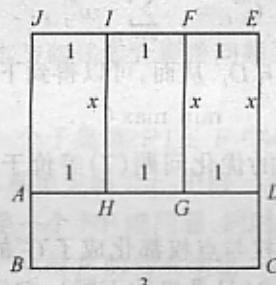


图 1

但图  $G$  的旅行商路线  $ABAHGDCDEFIJA$  的长度为

$$l_2 = 10 + 2x. \quad (4)$$

由于  $x > 1$ , 必有  $l_2 < l_1$ , 这样就得到了结论 4. 证毕

尚待研究的问题是, 对满足(2)且存在 Hamilton 回路的图, 再增加什么合理的条件, 可保证  $G$  的最小 Hamilton 回路必是最优旅行商路线呢?

## 2 关于目标函数的处理

在 98B 题第一小题中, 要求设计三组“总路程最短且各组尽可能均衡的巡视路线”. 以  $C_1, C_2, C_3$  表示三组巡视路线的长度, 上述要求可表示为如下双目标函数的优化:

$$\min(C_1 + C_2 + C_3), \quad \min(\max_{1 \leq i \leq 3} C_i - \min_{1 \leq i \leq 3} C_i).$$

从问题的实际背景出发, 可考虑替代为下列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 3} C_i. \quad (5)$$

它与上述双目标在含义上有一致的地方,但不尽相同.

在98B题第二小题中,容易确定最小组数为4(参见本文3).在98B题中已将35个村编号为从1到35,现再将17个乡的字母编号依次改为从36至52,将县城编号为53,引入点权(顶点上的权)如下:

$$v_i = 35 (1 \leq i \leq 35), \quad v_i = 70 (36 \leq i \leq 52), \quad v_{53} = 0, \quad (6)$$

其中已将在村与乡的巡视时间依照汽车行驶速度35公里/小时化成了公里数.以 $G = (V, E, w)$ 表示98B题的图,以 $G' = (V, E', w')$ 表示相应的完全图( $w'$ 表示任二点之间的距离),以 $H_1, H_2, H_3, H_4$ 表示 $G'$ 上的4个旅行商路线,其全体能覆盖 $V$ ,且每个 $H_i$ 均包含顶点53(县城).对 $i=1, 2, 3, 4$ ,令

$$G_i = \sum_{(j, k) \in H_i} w'_{j, k}, \quad D_i = \sum_{j \in H_i} v_j.$$

类似于(5),对98B题第二小题,可考虑 $G' = (V, E', w')$ 上的下列目标函数的优化:

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} (C_i + D_i). \quad (7)$$

但是,(7)与(5)的区别是明显的,(5)中的目标函数含有边权,而(7)中的目标函数兼含边权与点权.为了把(7)转换为与(5)相同的形式,引入另一完全图 $G'' = (V, E', w'')$ ,其中

$$\forall (j, k) \in E', \quad w''_{j, k} = w'_{j, k} + \frac{1}{2} v_j + \frac{1}{2} v_k. \quad (8)$$

易知,边权 $w''$ 仍满足三角形不等式.这样,对 $i=1, 2, 3, 4$ ,令

$$C''_i = \sum_{(j, k) \in H_i} w''_{j, k},$$

利用(8)容易证明,必成立 $C''_i = C_i + D_i$ .从而,可以得到下列优化问题

$$\min \max_{1 \leq i \leq 4} C''_i. \quad (9)$$

**结论5**  $G' = (V, E', w')$ 上的优化问题(7)等价于 $G'' = (V, E', w'')$ 上的优化问题(9),其中边权 $w''$ 由(8)给出.

结论5的意义在于, $G'$ 上的边权与点权都化成了 $G''$ 的边权,从而使第二小题的问题与第一小题的问题(5)成为相同的形式(只是组数不同),它们可采用相同的近似算法来处理.我们发现,在98B题的个别答卷,提到过把点权化为边权的思想,但要把这一思想明确地形成一个结论,还需联系到目标函数的具体形式,以上讨论了单目标函数 $\max C_i$ 的情形,对前述双目标的情形和下一节的最小组数的问题,讨论是类似的.

### 3 最小组数问题

给定长度约束,求解多旅行商路线的最小组数,是一个有实际意义的重要问题.98B题中第二小题与第三小题均涉及这样的问题.用2中的记号,它可以表示成如下形式:给定一个连通图 $G = (V, E, w)$ (98B题的相应数据见附录),求相应的完全图 $G' = (V, E', w')$ 上多旅行商路线 $H_i (i=1, 2, \dots, r)$ ,使其全体能覆盖 $V$ ,其每一个旅行商路线均含有顶点53(县城),且达到:

$$\min r \quad (10)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in H_i} v_j + \sum_{(j, l) \in H_i} w'_{j, l} \leq L, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (11)$$

其中 $v_j$ 为点权, $L$ 为给定的长度上限.

一般来说,求解最小组数问题(10)~(11),或者说,要确定最小组数 $r$ ,包括两个方面.

一方面,要构造  $G'$  的  $r$  个旅行商路线,满足相应的长度约束;另一方面,要证明  $r$  是组数的下界,即证明  $r-1$  组是不可行的.

对 98B 第二小题来说,问题(10)~(11)中的长度上界  $L$  为 840 公里,相应的时间上界为 24 小时.给出 4 组可行的旅行商路线是不困难的,多数答卷都能做到,但要证明 4 组是一个下界,不少答卷都做得不好,只有少数试卷给出了简洁的论证.以下是一个这样的论证.假如 3 组可行的旅行商路线能符合长度约束或相应的时间约束,由于从县城至所有点(村或乡)的距离的最大值为  $d=77.5$  公里,而  $2d$  是  $G$  的多旅行商问题的一个简单下界,这样,由(11)可得:

$$3.840 \geq \sum_{i=1}^{52} v_i + 2d = 69 \times 35 + 155 = 2570,$$

便得矛盾.

对于一般的长度上界  $L$ (相应的时间上界为  $T=L/35$ ),最小组数问题(10)~(11)的解答会是相当困难的,计算量也会很大.对 98B 第三小题来说,问题(10)~(11)中的长度上界  $L$  为 225 公里,它相当于时间上界 6.4286 小时.很多答卷给出 23 组可行的旅行商路线,不少答卷给出 22 组可行的旅行商路线,但 22 组是否为最小组数呢?对此,未发现有一个答卷能够给出正确的论证.当然,这与答卷时间有限也是有关的.我们将在 5 与 6 中证明下列结论.

**结论 6** 当  $L=225$  时,最小组数问题(10)~(11)具有下界  $r=22$ .

#### 4 集合覆盖问题及其下界

为证明结论 6 做准备,我们在本节叙述集合覆盖问题的概念及关于下界的一个结论.集合覆盖问题的提法如下:

给定集合  $N=\{1, 2, \dots, n\}$  的一个子集族  $F$ ,在  $F$  中寻找最小个数(称最小覆盖数)的子集族  $F' \subseteq F$ ,使得  $N$  的每一个元素至少属于  $F'$  中的一个子集.

在计算复杂性理论中,该问题是一个 NP 难问题.同时,对于一般情况,也很难得到什么结论.为了得到有用的结论,我们对  $N$  与  $F$  的形式做出一些限制.

**假设 1** 对任何  $S \in F$ ,  $S$  的子集亦属于  $F$ .

**假设 2** 记  $F_j$  为子集族  $F$  中元素个数为  $j$  的那些子集组成的族,假设成立

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4.$$

**假设 3** 设  $N = A \cup B$ ,记  $F_{j,l}$  为子集族  $F$  中  $A$  元素个数为  $j$ , $B$  元素个数为  $l$  的那些子集组成的族,假设成立

$$F_3 = F_{3,0} \cup F_{2,1} \cup F_{1,2}, \quad F_4 = F_{4,0} \cup F_{3,1}, \quad (12)$$

上述二个假设等价于

$$F_5 = \emptyset, \quad F_{0,3} = \emptyset, \quad F_{2,2} = F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset.$$

这表明,比起  $A$  中的元素来说, $B$  中的元素的“权”较重,从而, $F_3$  中没有 3 元素皆属于  $B$  的三点子集, $F_4$  也有类似的性质.

**结论 7** 若  $N$  的子集族  $F$  满足假设 1~3,设  $|N|=n$ , $|B|=b$ ,又  $F_{1,2} \cup F_{3,1}$  的最大分离子集数为  $q$ ,则集合覆盖问题的最小覆盖数  $r$  满足:

$$r \geq \lceil (n+b-q)/4 \rceil,$$

这里  $\lceil a \rceil$  表示取数  $a$  的上整数.

该结论的证明从略,有兴趣的读者可以自己研究.

该结论给出了最小覆盖数的一个下界,它特别适合于  $F_{1,2}$  与  $F_{3,1}$  所含子集个数较少的情形.此外,在有关假设满足时,另有两个明显的下界  $\lceil n/4 \rceil$  与  $\lceil b/2 \rceil$ .

### 5 合格组的一些性质

首先,简述一下2中提到过的顶点编号.顶点集  $N$  分为  $A$ (村)与  $B$ (乡),其中

$$A = \{1, 2, \dots, 35\}, \quad B = \{36, 37, \dots, 52\}$$

与最小组数问题(10)~(11)相一致,根据 98B 第三小题的要求,我们引入下列定义.

**定义 1**  $N = A \cup B$  的一个子集  $S$  称为合格组,如果

$$\sum_{j \in S} v_j + LTSP(S \cup \{53\}) \leq 225, \quad (13)$$

其中点权  $v_i$  由(6)给出,  $LTSP(\cdot)$  表示这些点的旅行商路线的最优长度.

这样,每个合格组确定了一个可行的旅行商路线,98B 题第三小题中的要求就是要确定寻找组数最少的合格组,使其全体能覆盖所有村与乡.

合格组的全体构成  $N$  的子集族  $F$ .如前,以  $F_j$  表点数为  $j$  的合格组的全体.经过计算与分析,我们得到:

$$|F_1| = 52, \quad (14)$$

$$|F_2| = 795, \quad (15)$$

$$|F_3| = 1354, \quad (16)$$

$$|F_4| = 58, \quad (17)$$

$$|F_5| = 0. \quad (18)$$

现对上述诸式作简要的说明如下.(13)右端 225 公里相当于时间上界 6.4286 小时,它恰是  $v_j + LTSP(\{j, 53\})$  对一切  $j$  的最大值,所以每一个点(村或乡)均是一个合格组,因此显然成立(14). (15)与(16)可通过穷举法算得.为了较快地确定  $F_4$ ,即确定一切 4 点合格组,可考虑  $F_3$  中哪些 3 点合格组可以扩充,例如,假如 3 点合格组  $|i, j, k|$  能扩充为 4 点合格组,它至少应满足

$$\sum_{j \in S} v_j + LTSP(S \cup \{53\}) \leq 190,$$

即它至少有松弛量 35 公里,相当于 1 小时.同时,假如它扩充为 4 点合格组  $|i, j, k, l|$ ,那么还应有  $|i, j, l| \in F_3, |i, k, l| \in F_3$ .这样,4 点合格组的候选者就少得多了,从而  $F_4$  可以较快地计算出来,便得(17).当然,以上  $F_2, F_3, F_4$  的计算都要借助于计算机来完成.

下面,我们证明(18).不然的话,设存在 5 点合格组  $S = |k_1, k_2, k_3, k_4, k_5|$ .由点权(6)及定义 1,  $S$  中至多一个点为  $B$  的点(乡).假如  $S$  中确一个点为  $B$  的点,  $S$  中点权之和为 210,于是对  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} LTSP(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2}(225 - 210) = 7.5, \quad (19)$$

其中  $w'(i, j) = w'_{i,j}$  表示点  $i$  与点  $j$  之间的距离.容易检验,满足(19)的只有一个点(点 1),不可能有 5 个点,便得矛盾.假如  $S$  中所有点为  $A$  的点,  $S$  中点权之和为 175,于是对  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,有

$$w'(k_i, 53) \leq \frac{1}{2} LTSP(S \cup \{53\}) \leq \frac{1}{2}(225 - 175) = 25. \quad (20)$$

同样,对  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5 (i \neq j)$ , 有

$$w'(k_i, k_j) \leq \frac{1}{2} LTSP(S \cup \{53\}) \leq 25. \quad (21)$$

容易检验,  $A$  中点满足(20)的有 9 个,其全体记为  $A^* = \{1, 2, 3, 5, 26, 28, 29, 31, 33\}$ , 也容易检验, 只有  $A^*$  中的点  $k_i = 1$ , 存在  $A^*$  中其他四个点  $k_j$  能满足(21). 但(21)要求这样的点  $k_i$  有 5 个, 所以亦得矛盾.

如前, 以  $F_{j,l}$  表示  $A$  中点数为  $j$ ,  $B$  中点数为  $l$  的合格组的全体. 用(18)的推理过程同样可证明

$$|F_{0,3}| = |F_{2,2}| = 0, \quad (22)$$

从而更有  $F_{1,3} = F_{0,4} = \emptyset$ . 由(13)所确定的合格组构成的子集族  $F$  满足假设 1, 是显然的.

(18)与(23)表明  $F$  满足假设 2~3. 根据计算,  $F_{1,2} \cup F_{3,1}$  包含下列 15 个合格组:

$$\{1, 36, 37\}, \{1, 36, 38\}, \{1, 36, 52\}, \{1, 37, 38\}, \{1, 37, 50\},$$

$$\{1, 37, 52\}, \{1, 38, 50\}, \{2, 37, 38\}, \{2, 38, 39\}, \{3, 37, 38\},$$

$$\{3, 38, 39\}, \{29, 50, 52\}, \{1, 2, 3, 37\}, \{1, 2, 3, 38\}, \{2, 3, 5, 38\}.$$

由于上述 15 个合格组只涉及 11 个点, 而上述每个合格组为 3 点或 4 点, 所以  $F_{1,2} \cup F_{3,1}$  至多有 3 个分离的合格组. 通过简单列举, 可知  $F_{1,2} \cup F_{3,1}$  的最大分离合格组个数为

$$q = 3. \quad (23)$$

## 6 结论 6 的证明

由  $|N| = 52, |B| = 17$  及(23), 根据结论 7 可算得复盖  $N$  的最小组数的一个下界为  $\lceil (|N| + |B| - q)/4 \rceil = \lceil 66/4 \rceil = 17$ , 但它与结论 6(22 组为下界)相去甚远. 因此, 我们还要讨论子集族  $F$  的更多性质, 以发掘与利用覆盖  $N$  的合格组的结构.

以  $F_j(k)$  表示  $F_j$  中含有点  $k$  的合格组的全体(也是子集族), 类似地引入记号  $F_{j,l}(k)$ . 对计算结果进行检验, 根据  $F_2(k) = \emptyset$  等要求可以发现  $N$  的下列子集:

$$B_1 = \{42, 43, 44\}, \quad A_1 = \{10, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$B_2 = \{41, 45, 46\}, \quad A_2 = \{8, 9, 11, 17, 18, 19, 22, 24\}.$$

它们分别具有下列性质:

$$\forall k \in B_1, \quad F_2(k) = \emptyset, \quad (24)$$

$$\forall k \in A_1, \quad F_{1,1}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (25)$$

$$\forall k \in B_2, \quad F_{0,2}(k) = \emptyset, \quad F_3(k) = \emptyset, \quad (26)$$

$$\forall k \in A_2, \quad F_{1,2}(k) = F_{2,1}(k) = \emptyset, \quad F_{3,0}(k) \neq \emptyset, \quad F_4(k) = \emptyset. \quad (27)$$

设  $T = \{S_1, S_2, \dots, S_r\}$  由  $r$  个合格组组成, 它能覆盖点集  $N = A \cup B$ . 由于满足假设 1, 可设不同合格组是互相分离的. 由性质(24),  $T$  必含有 3 个单点合格组, 不妨设

$$S_1 = \{42\}, \quad S_2 = \{43\}, \quad S_3 = \{44\}.$$

由性质(25)~(26), 覆盖  $A_1 \cup B_2$  的必是 2 点合格组. 进一步, 可以发现, 两点均在  $A_1 \cup B_2$  中的 2 点合格组只有 4 个, 更具体地说, 有

$$F'_2 = F_2 \cap (A_1 \cup B_2)^2 = \{\{12, 13\}, \{13, 14\}, \{13, 16\}, \{15, 16\}\}. \quad (28)$$

由(28)易知  $F'_2$  中分离的 2 点合格组至多有 2 个, 因此只可能有以下三个情形:

情形 1  $|T \cap F'_2| = 2$ ;

情形 2  $|T \cap F'_2| = 1$ ;

情形 3  $|T \cap F'_2| = 0$

以情形 1 来分析, 其他二情形的分析是类似的. 在情形 1,  $T \cap F'_2$  的两个 2 点合格组能覆盖  $A_1 \cup B_2$  中的 4 个点,  $T$  必还有 5 个合格组覆盖  $A_1 \cup B_2$  的另外 5 个点. 由于(25)~(26), 这 5 个合格组必定皆为 2 点合格组, 它们的全体亦覆盖  $A_1 \cup B_2$  之外的 5 个点  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$ , 且这 5 个点皆属于  $A$  (即不能属于  $B$ ). 现不妨设覆盖  $A_1 \cup B_2$  的 7 个 2 点合格组为  $S_4, S_5, \dots, S_{10}$ , 且令

$$T_1 = \{S_{11}, S_{12}, \dots, S_r\}, \quad (29)$$

$$N_1 = N \setminus (B_1 \cup A_1 \cup B_2 \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}). \quad (30)$$

于是,  $T_1$  覆盖  $N_1$ . 经计算可检验如下性质:  $A_2$  的任三点不能组成一个合格组, 即

$$F_3 \cap (A_2 \times A_2 \times A_2) = \emptyset. \quad (31)$$

由于  $|A_2| = 8, A'_2 = A_2 \setminus \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$  至少有 3 个点. 同时, (31) 保证这 3 个点至少属于两个合格组. 因此, 不妨设  $i_6 \in A'_2 \cap S_{11}, i_7 \in A'_2 \cap S_{12}$ . 由(27), 可分以下情形:

情形 1.1  $|S_{11}| = |S_{12}| = 3$ ;

情形 1.2  $|S_{11}| \leq 2$  或  $|S_{12}| \leq 2$ .

其实, 情形 1.2 又可分成若干情形. 现只分析情形 1.1, 因其他情形亦类似. 分析的整个思路可参见图 2. 不妨设

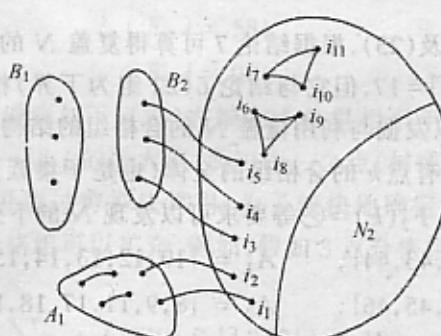


图 2

$$S_{11} = \{i_6, i_8, i_9\} \in F_{3,0}, S_{12} = \{i_7, i_{10}, i_{11}\} \in F_{3,0}.$$

接着(29)~(30), 令

$$T_2 = T_1 \setminus \{S_{11}, S_{12}\} = \{S_{13}, S_{14}, \dots, S_r\},$$

$$N_2 = N_1 \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\} = A' \cup B',$$

其中  $A' \subset A, B' \subset B$ . 实际上,

$$A' = A \setminus (A_1 \cup \{i_1, i_2, \dots, i_{11}\}),$$

$$B' = B \setminus (B_1 \cup B_2).$$

所以  $|A'| = 35 - 17 = 18$ ,

$$|B'| = 17 - 6 = 11, |N_2| = 29.$$

由于  $T_2$  覆盖  $N_2$ , 根据结论 7 与(22), 可得  $T_2$  中组数的下界如下:

$$r - 12 \geq \lceil (29 + 11 - 3) / 4 \rceil = \lceil 37 / 4 \rceil = 10$$

所以  $r \geq 22$ , 结论 6 证毕.

注 如果要校核上述证明中的计算是否正确, 实际上不必要算出  $F_2, F_3, F_4$  的全部合格组 (见(15)~(17)), 而只需校核对推理过程起作用的以下内容:(12),(23),(24)~(27)以及(31).

### 附录

98B 题的图形所相应的图  $G = (V, E, w)$  的有关数据如下, 以备必要时可复算.  $w(32, 33) = 19$  不满足三角形不等式(2), 该值被略去.

$w(53, 1) = 6,$	$w(53, 2) = 9.2,$	$w(53, 38) = 11.5,$	$w(53, 48) = 19.8,$
$w(53, 50) = 10.1,$	$w(53, 52) = 12.9,$	$w(1, 36) = 10.3,$	$w(1, 37) = 5.9,$
$w(1, 38) = 11.2,$	$w(2, 3) = 4.8,$	$w(2, 5) = 8.3,$	$w(3, 38) = 7.9,$
$w(3, 39) = 8.2,$	$w(4, 8) = 20.4,$	$w(4, 39) = 12.7,$	$w(5, 6) = 9.7,$
$w(5, 39) = 11.3,$	$w(5, 48) = 11.4,$	$w(6, 7) = 7.3,$	$w(6, 47) = 11.8,$
$w(6, 48) = 9.5,$	$w(7, 39) = 15.1,$	$w(7, 40) = 7.2,$	$w(7, 47) = 14.5,$
$w(8, 40) = 8,$	$w(9, 40) = 7.8,$	$w(9, 41) = 5.6,$	$w(10, 41) = 10.8,$
$w(11, 40) = 14.2,$	$w(11, 42) = 6.8,$	$w(11, 45) = 13.2,$	$w(12, 41) = 12.2,$
$w(12, 42) = 7.8,$	$w(12, 43) = 10.2,$	$w(13, 14) = 8.6,$	$w(13, 42) = 8.6,$
$w(13, 44) = 16.4,$	$w(13, 45) = 9.8,$	$w(14, 15) = 15,$	$w(14, 43) = 9.9,$
$w(15, 44) = 8.8,$	$w(16, 17) = 6.8,$	$w(16, 44) = 11.8,$	$w(17, 22) = 6.7,$
$w(17, 46) = 9.8,$	$w(18, 44) = 8.2,$	$w(18, 45) = 8.2,$	$w(18, 46) = 9.2,$
$w(19, 20) = 9.3,$	$w(19, 45) = 8.1,$	$w(19, 46) = 7.2,$	$w(20, 21) = 7.9,$
$w(20, 25) = 6.5,$	$w(20, 47) = 5.5,$	$w(21, 23) = 9.1,$	$w(21, 25) = 7.8,$
$w(21, 46) = 4.1,$	$w(22, 23) = 10,$	$w(22, 46) = 10.1,$	$w(23, 24) = 8.9,$
$w(23, 49) = 7.9,$	$w(24, 27) = 18.8,$	$w(24, 49) = 13.2,$	$w(25, 48) = 12,$
$w(25, 49) = 8.8,$	$w(26, 27) = 7.8,$	$w(26, 49) = 10.5,$	$w(26, 50) = 10.5,$
$w(27, 28) = 7.9,$	$w(28, 50) = 12.1,$	$w(28, 51) = 8.3,$	$w(29, 50) = 15.2,$
$w(29, 51) = 7.2,$	$w(29, 52) = 7.9,$	$w(30, 32) = 10.3,$	$w(30, 51) = 7.7,$
$w(31, 32) = 8.1,$	$w(31, 33) = 7.3,$	$w(31, 52) = 9.2,$	$w(32, 35) = 14.9,$
$w(33, 35) = 20.3,$	$w(33, 36) = 7.4,$	$w(34, 35) = 8.2,$	$w(34, 36) = 11.5,$
$w(34, 37) = 17.6,$	$w(36, 37) = 12.2,$	$w(36, 52) = 8.8,$	$w(37, 38) = 11,$
$w(44, 45) = 15.8,$	$w(48, 49) = 14.2,$		

### 参考文献

- [1] 杜端浦. 运筹图论. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994
- [2] E. L. Lawler, Lenstra J k, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys. The Traveling Salesman Problem. Wileys, Chichester, 1995