FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

75.12 - Análisis Numérico I

Trabajo Práctico Nº1

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Nombre	**Correo electrónico**	**Padrón**
Gonzalo Ávila Alterach	gonzaloavilaalterach@gmail.com	94950
Nicolás Mariano Fernandez Lema	nicolasfernandezlema@gmail.com	93410

Fecha de entrega: 16 de octubre

2º cuatrimestre de 2013

Resumen

En este problema, el sistema a resolver se trata de $Ax = b$, siendo A una matriz cuadrada tridiagonal, de dimensiones $(n-1)^2$.

El vector incógnita x a averiguar está formado por los elementos $(c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, ya que sabiendo su valor se pueden hallar el resto de los coeficientes de todos los polinomios. Debido a las ecuación 4 y la 7, se puede apreciar que la matriz A es tridiagonal, y sus elementos son lo siguientes:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{pmatrix}$$

Además, debido a que los datos de entrada utilizados la diferencia entre los θ_k consecutivos es constante, los h_k también lo son, y por lo tanto la matriz queda simétrica.

Los programas se desarrollaron para resolver matrices genéricas, sin tener en cuenta que los sistemas del problema a resolver son tridiagonales, por lo que es una resolución muy ineficiente: se esta utilizando más memoria que la necesaria y también se están multiplicando muchas veces ceros por ceros.

Radios espectrales

Utilizando la estimación dada, dividir el error relativo de una iteración respecto de la anterior, los radios espectrales son los siguientes:

Día 1

Iteración	ρ_J	ρ_{GS}
1	0.365217	0.262669
2	0.363875	0.280345
3	0.445632	0.291762
4	0.385874	0.288134
5	0.49069	0.263809
6	0.411277	0.317298
7	0.480461	
8	0.431252	

Día 2

Iteración	ρ_J	ρ_{GS}
1	0.336795	0.294195
2	0.31415	0.299836
3	0.482199	0.296196
4	0.397669	0.295461
5	0.475701	0.295959
6	0.442331	0.296806
7	0.462645	
8	0.464795	

Día 3

Iteración	ρ_J	ρ_{GS}
1	0.156788	0.250333
2	0.309514	0.255578
3	0.375905	0.247174
4	0.472542	0.245682
5	0.469129	0.302341
6	0.464291	0.283305
7	0.473524	

Día 4

Iteración	ρ_J	ρ_{GS}
1	0.237237	0.261134
2	0.430469	0.282262
3	0.387289	0.281608
4	0.486819	0.276875
5	0.432466	0.317498
6	0.485886	0.306247
7	0.461146	
8	0.476161	

Debido a que la matriz es tridiagonal, deberia cumplirse la propiedad $\rho_J^2 = \rho_{GS}$. Sin embargo, se observa que el ρ_{GS} es aproximadamente un 30 % mayor que lo esperado. Suponemos que esto se debe a que la estimación del radio espectral solamente sirve para ciertas matrices y condiciones particulares, y que es más precisa para iteraciones i más grandes.

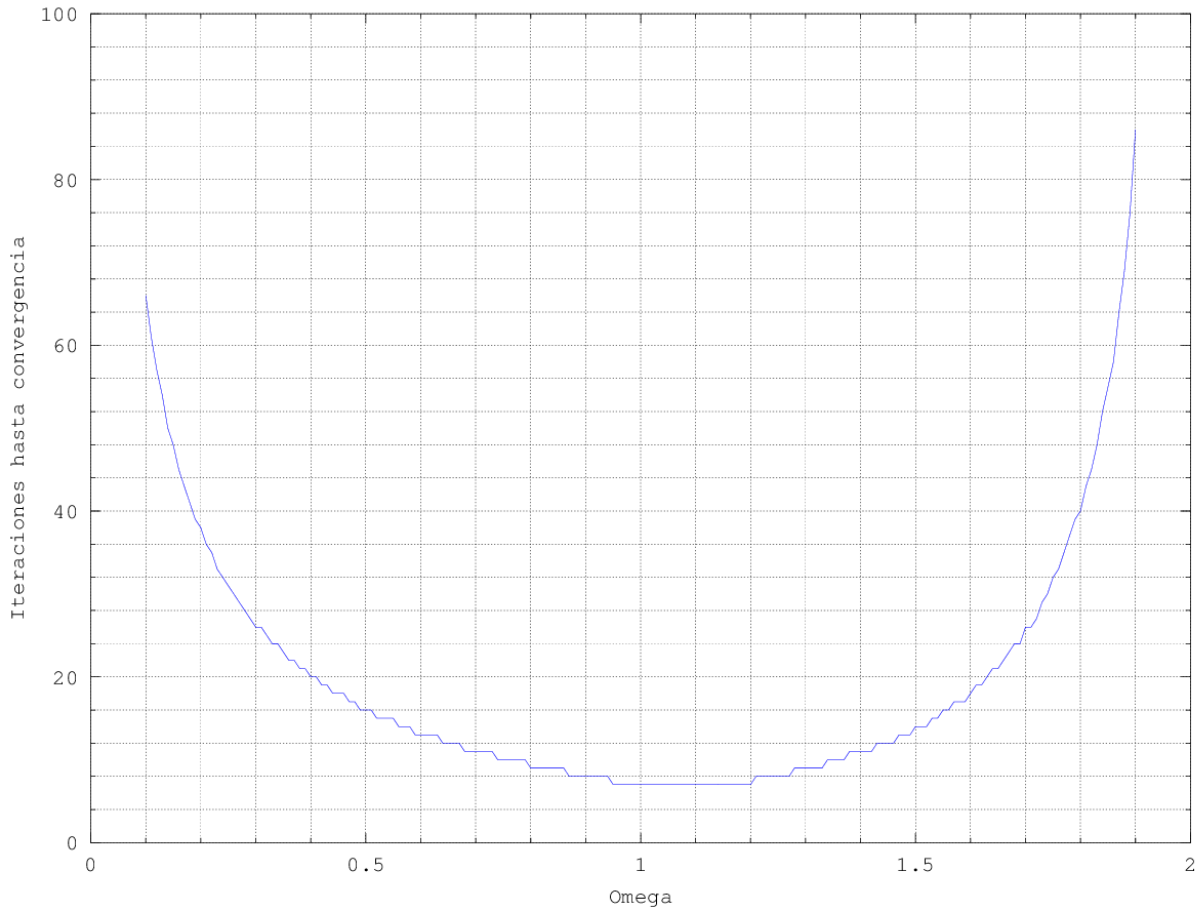
Se realizó un pequeño script en Octave (se incluye en el apéndice C) para calcular el radio espectral real de la matriz de la iteración de Jacobi y la de Gauss Seidel. Dichos radios hallados son aproximadamente 0,5 para la de Jacobi y 0,25 para la de Gauss Seidel. Observando los radios espectrales estimados, es posible ver que la estimación del ρ_J es bastante bueno (en las últimas iteraciones hay una diferencia pequeña entre lo esperado y lo calculado), mientras que la estimación del ρ_{GS} es muy distinta a la esperada. Esto explica por qué Gauss Seidel no esta convergiendo en la mitad de las iteraciones que Jacobi.

Sobre relajación sucesiva

Debido a que la matriz del sistema es tridiagonal, hay una fórmula para calcular el omega óptimo: $\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho_{TGS}}}$

Utilizando los valores obtenidos experimentalmente de la sección anterior ($\rho_{TGS} \approx 0,3$) se obtiene un omega óptimo de aproximadamente 1,089.

Para calcular el mejor valor de omega, se iteró para todo ω entre 0,1 y 1,9, guardando cuantas iteraciones hizo falta para llegar a la convergencia con RTOL $<$ 0,001.

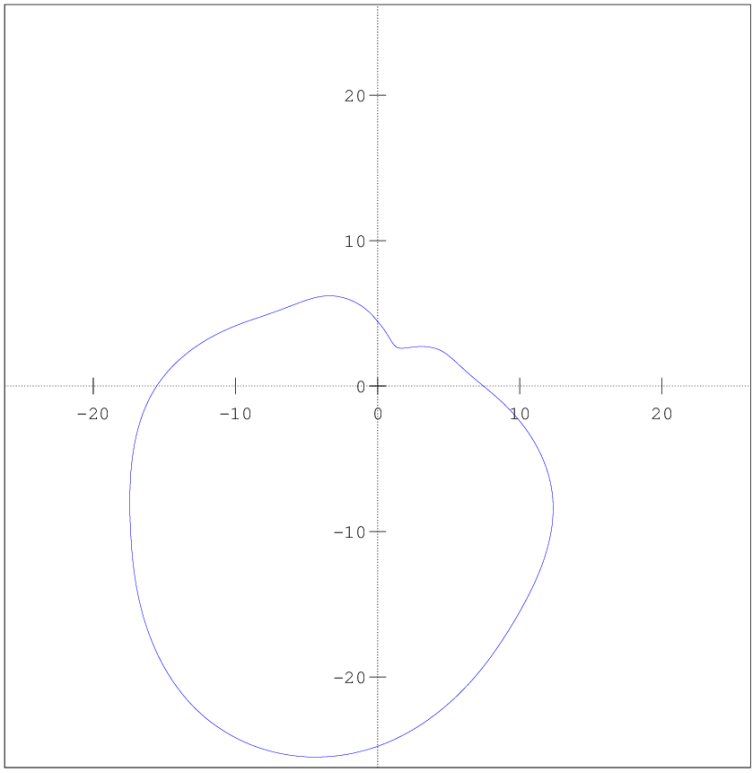


Se puede observar que el gráfico corresponde con lo esperado, habiendo un mínimo absoluto para $\omega \approx 1{,}1$.

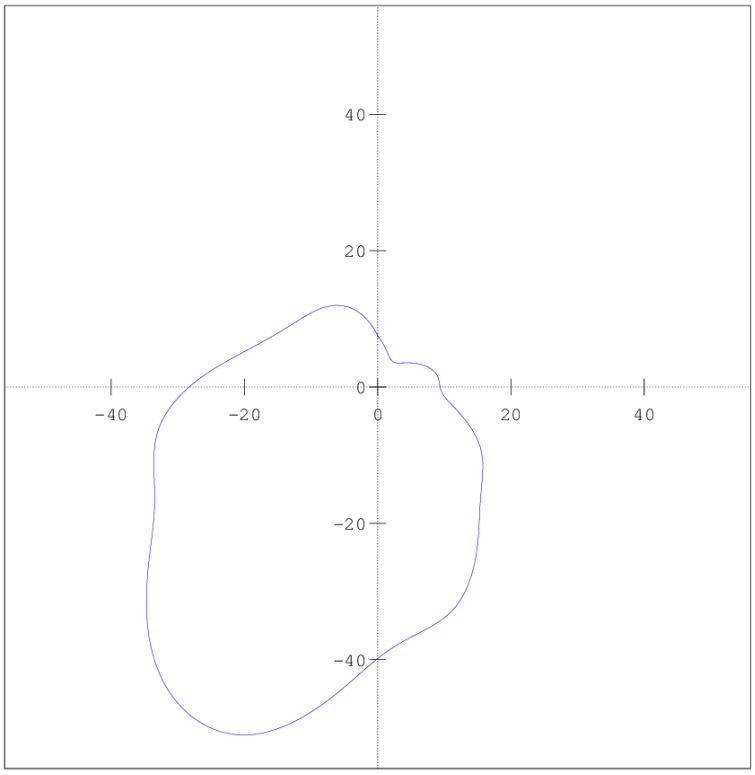
Gráfico de splines obtenidos

Se utilizó como referencia de 0^o el eje vertical, y ángulo aumentando en sentido horario. Para evitar tener una curva abierta, se repitió el primer punto. Debido a la no inclusión de condiciones para mantener continuidad de la derivada entre el principio y el final, es posible ver que en $\rho = 0^o$ la curva no es suave.

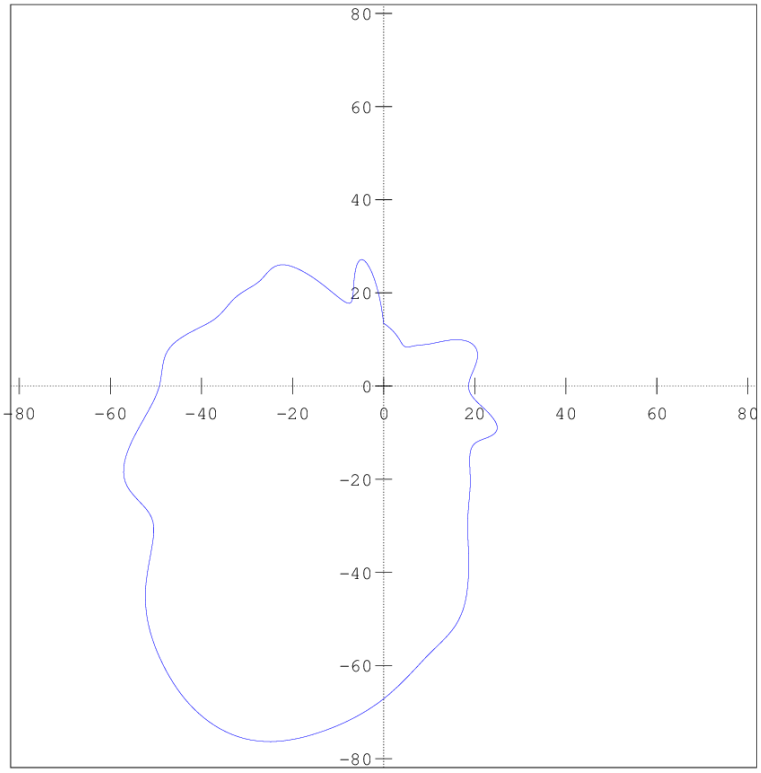
Día 1



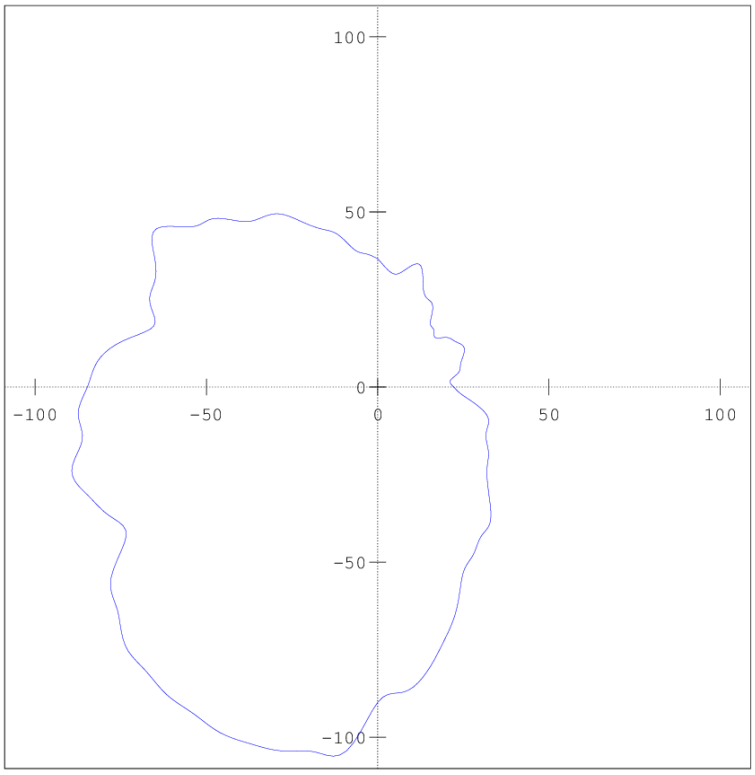
Día 2



Día 3


80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80

Día 4


100
50
0
-50
-100
-100
-50
0
50
100

Máxima velocidad de avance

La velocidad máxima de avance del fuego fue calculada observando la diferencia entre los radios de dos días consecutivos, y encontrando el ángulo para el cual el radio varía la mayor cantidad entre el primer y el último día (en módulo).

Para esto se hizo una tabla con los valores de dichos días (utilizando un muestreo cada 1^o), se calculó el módulo de la diferencia para cada ángulo y se encontró el mayor.

Esto es a los 205^o tuvo una diferencia en su radio de aproximadamente 83, con esto podemos decir que la maxima velocidad del incendio fue de 21 por dia. Su dirección es en el ángulo indicado, en nuestro gráfico seria al sudoeste, y hacia afuera.

Vivienda alcanzada por el fuego

Se busca saber si una vivienda en una posicion dada es alcanzada por el fuego. Para averiguar esto primero hay que ver en los cuatro días cuales fueron los radios del fuego en el ángulo de la casa: si siempre fueron menores entonces la casa no fue alcanzada por el fuego.

Si en algún día el radio del fuego es mayor al de la casa entonces la misma fue alcanzada por el fuego. Para saber en que tiempo fue alcanzada utilizamos una interpolacion lineal con los radios del fuego entre el dia que no fue alcanzada y el dia que fue alcanzada. Es decir, se asume que la velocidad del fuego es constante para un ángulo dado.

En nuestro caso la casa estaba hubicada en las coordenadas (188,36º; 94,18). La misma fue alcanzada por el fuego entre los días 3 y 4, con radio de 73,942 y 106,11 respectivamente. Entonces el momento en que fue alcanzado por el fuego es: $t \approx (94,18 - 73,942)/(106,11 - 73,942) = 0,62903$. Expresado en días y horas, la casa fue alcanzada aproximadamente el día 3 a las 15 hs.

Conclusiones

El problema físico era analizar el frente de llama de un incendio, utilizando como datos mediciones discretas separadas un cierto ángulo entre si. El problema numérico era interpolar los datos para poder analizar la posición de las llamas entre dos mediciones. El método utilizado, los splines, en este caso la interpolación segmentaria cúbica plantea un sistema lineal para hallar los coeficientes de los polinomios.

En este caso, dicho sistema lineal se resolvió mediante métodos iterativos: Jacobi, Gauss Seidel y SOR. Como la matriz del sistema es simétrica, tridiagonal, diagonal dominante, la convergencia de dichos métodos esta garantizada.

Como se esperaba por ser tridiagonal, el método de Jacobi converge en más iteraciones que Gauss Seidel. Además, SOR permite mejorar la convergencia, forzando los valores. En este caso, debido a que el omega óptimo no está tan alejado del 1, no hay tanta diferencia en cuanto a iteraciones hasta la convergencia entre Gauss Seidel y SOR.

Los tipos de errores involucrados son los siguientes:

- Errores de entrada: son los que provienen de las incertezas en las mediciones de los radios del fuego.
- Errores de truncamiento: debido a que no se pueden hacer infinitas iteraciones de los métodos, las soluciones obtenidas no son las soluciones exactas.

- Errores de redondeo: es el error por trabajar en un una computadora, utilizando tipos de datos con precisión finita. Se manifiesta en cada operación pero en este problema es muchos órdenes de magnitud menor al error de truncamiento.
- Errores del modelo matemático: es el error causado por el modelo en sí, en este caso sería que la interpolación spline no aproxime correctamente al frente de llama entre dos mediciones.

A. Código (C++)

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>
#include <string.h>
#include <cstdlib>
#include <climits>
using namespace std;

#define PADRON1 0.94950
#define PADRON2 0.93410

double normaDos(double *x, int n){
    double suma = 0.0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        suma += (x[i] * x[i]);
    }
    return sqrt(suma);
}
double normaInf(double *x, int n){
    double maximo = 0.0;
    for(int i = 0; i < n; i++){
        maximo = max(maximo, abs(x[i]));
    }
    return maximo;
}

int cargarDatos(const char *archivo, double *&x, double *&y){
    int n;
    ifstream in(archivo);
    if(!in.is_open()) return -1;

    //Primera línea: cantidad de puntos
    in >> n;
    x = new double[n];
    y = new double[n];

    for(int i=0;i<n;i++){
        in >> x[i] >> y[i]; //Cada línea tiene un par (x,y)
        y[i] *= (PADRON1+PADRON2)/(2.0);
    }

    return n;
}

void prepararMatriz(double *a, double *h, int n){
    for(int y=0;y<n;y++)
    for(int x=0;x<n;x++){
        int valor = 0;

        if(x == y){
            valor = 2.0*(h[y]+h[y+1]);  //Diagonal
        }else if(x == y+1){
            valor = h[y+1];          //Arriba de la diagonal
        }else if(x == y-1){
            valor = h[y];            //Abajo de la diagonal
        }
        a[x+y*n] = valor;
    }
```

```
59 }
60
61 //Resuelve Ax = b por SOR, Siendo n la dimensión
62 //w la constante de relajación (?) y rtol el error mínimo deseado
63 int sor(double *a, double *x, double *b, int n, double w, double rtol){
64     int it=0;
65     bool termino = false;
66     double *xError = new double[n];
67     double *r = new double[100]; // Para almacenar los errores relativos
68     while(!termino && it<100){
69         for(int nFila=0; nFila<n ;nFila++){
70             double suma = 0.0;
71             // sum desde j = 1 hasta n-1 de anj * xj
72             for(int j = 0; j < nFila; j++)
73                 suma += a[nFila*n+j] * x[j];
74             for(int j = nFila+1; j < n; j++)
75                 suma += a[nFila*n+j] * x[j];
76             xError[nFila] = x[nFila];
77             //Supongo que la diagonal no es cero
78             x[nFila] = w* ((b[nFila] - suma)/a[nFila*n+nFila]) + (1.0 - w)*x[nFila];
79             xError[nFila] = x[nFila] - xError[nFila];
80         }
81         // Calculo el error para saber si se termino de iterar
82         r[it] = normaInf(xError,n)/normaInf(x,n);
83         termino = r[it] <= rtol;
84
85         /*if(it != 0)
86             cout << "R_GSS[" << it << "]=" << r[it]/r[it-1] << endl;*/
87
88         it++;
89     }
90     delete []r;
91     delete []xError;
92     return it;
93 }
94 int jacobi(double *a, double *x, double *b, int n, double rtol){
95     int it=0;
96     bool termino = false;
97     double *xAnterior = x;
98     double *xActual = new double[n]; // Para cambiar los punteros entre si
99     double *xError = new double[n];
100    double *r = new double[100]; // Para almacenar los errores relativos
101    while(!termino && it<100){
102        for(int nFila=0; nFila<n ;nFila++){
103            double suma = 0.0;
104            // sum desde j = 1 hasta n-1 de anj * xj
105            for(int j = 0; j < nFila; j++)
106                suma += a[nFila*n+j] * xAnterior[j];
107            for(int j = nFila+1; j < n; j++)
108                suma += a[nFila*n+j] * xAnterior[j];
109
110            //Supongo que la diagonal no es cero
111            xActual[nFila] = (b[nFila] - suma)/a[nFila*n+nFila];
112            xError[nFila] = xActual[nFila] - xAnterior[nFila];
113        }
114        // Calculo el error para saber si se termino de iterar
115        r[it] = normaInf(xError,n)/normaInf(xActual,n);
116        termino = r[it] < rtol;
117        // Cambio los punteros de lugar para la proxima iteracion,
118        // sino x queda con el contenido correcto
```

```
119         x = xActual;
120         xActual = xAnterior;
121         xAnterior = x;
122 
123         if(it != 0)
124             cout << "R_J[" << it << "]=" << r[it]/r[it-1] << endl;
125 
126         it++;
127     }
128     delete []r;
129     delete []xError;
130     delete []xActual;
131     return it;
132 }
133 
134 //Dados los Ck, hk los pares de puntos y los h,
135 //imprime todos los polinomios con sus intervalos
136 void poly(double *c, double *x, double *y, double *h, int n){
137     ofstream outCSV("salida.csv");
138 
139     for(int k=0;k<n;k++){
140         double a = y[k];
141         double b = (y[k+1]-y[k])/h[k] - (h[k]/3.0) * (2.0*c[k]+c[k+1]);
142         double d = (c[k+1]-c[k])/(3.0*h[k]);
143 
144         cout << "y = "
145              << a << "+"
146              << b << "*(x-"<<x[k]<<")+"
147              << c[k] << "*(x-"<<x[k]<<")^2+"
148              << d << "*(x-"<<x[k]<<")^3"
149              << " {" << x[k] << ";" << x[k+1] << "}" << endl;
150 
151         for(int dx=0;dx<h[k];dx++){
152             //Imprimo los valores de los polinomios cada 1º
153             outCSV << dx+x[k] << "\t" << (a + b*dx + c[k]*dx*dx + d*dx*dx*dx) << endl;
154         }
155     }
156 }
157 void calcW(double *a, double *x, double *b, int n, double rtol){
158     ofstream outCSV("w-optimo.csv");
159     int maxIter = INT_MAX;
160     float maxIterW;
161     outCSV << "W\tIteraciones" << endl;
162     outCSV << "Jacobi\t" << jacobi(a,x,b,n,rtol) << endl;
163     for(int k=0;k<n;k++)
164         x[k] = 0;
165     for(float currentW = 0.1; currentW < 1.9; currentW = currentW + 0.01){
166         int currentIter = sor(a,x,b,n,currentW, rtol);
167         outCSV << currentW << "\t" << currentIter << endl;
168         if(currentIter < maxIter){
169             maxIter = currentIter;
170             maxIterW = currentW;
171         }
172         for(int k=0;k<n;k++)
173             x[k] = 0;
174     }
175     cout << "El w optimo es " << maxIterW << " con " << maxIter << " iteraciones" <<
         endl;
176 }
177 int main(int argc, char **args){
```

```
178     double *x=NULL, *y=NULL;
179     char* file;
180     if(strcmp(args[1],"-v") == 0){
181         cout << "Version 1.0";
182         return 1;
183     }
184     if(strcmp(args[1],"-h") == 0){
185         cout << "Comandos: " << endl;
186         cout << "-h: ayuda sobre los comandos" << endl;
187         cout << "-v: version del programa" << endl;
188         cout << "-sor [tol] [file] [w]: se utiliza el metodo sor con el w indicado
                sobre el archivo indicado con la tolerancia indicada" << endl;
189         cout << "-jcb [tol] [file]: se utiliza el metodo de jacobi sobre el archivo
                indicado con la tolerancia indicada" << endl;
190         cout << "-g-s [tol] [file]: se utiliza el metodo de gauss-seidel sobre el
                archivo indicado con la tolerancia indicada" << endl;
191         cout << "-calcW [tol] [file]: se calcula el w optimo para el archivo indicado
                con la tolerancia indicada" << endl;
192         return 1;
193     }
194     char* func;
195     float w = 0.0;
196     if(strcmp(args[1],"-jcb") == 0){
197         func = "jcb";
198     } else if((strcmp(args[1],"-g-s") == 0) || (strcmp(args[1],"-sor") == 0)){
199         if(strcmp(args[1],"-g-s") == 0){
200             w = 1.0;
201         } else {
202             w = strtof(args[4], NULL);
203         }
204         func = "sor";
205     } else if(strcmp(args[1],"-calcW") == 0) {
206         func = "calcW";
207     } else {
208         cerr << "No se selecciono un comando valido, intenta con -h" << endl;
209         return 1;
210     }
211     float tol = strtof(args[2], NULL);
212     file = args[3];
213     int n = cargarDatos(file, x, y)-1;
214     if(n<0){
215         cerr << "No se pudo abrir el archivo." << endl;
216         return 1;
217     }
218
219     //N es la cantidad de polinomios, no de puntos totales!
220     cout << "N = " << n << endl;
221
222     double *h = new double[n];
223     for(int k=0;k<n;k++)
224         h[k] = x[k+1] - x[k];
225
226     //Creo el sistema a resolver
227     double *aSist = new double[(n-1)*(n-1)];
228     double *xSist = new double[n+1];
229     double *bSist = new double[n-1];
230
231     //Semilla inicial para el SOR
232     for(int i=0;i<=n;i++)
233         xSist[i] = 0;
```

```
234
235     prepararMatriz(aSist, h, n-1);
236
237     //Preparo el B del sistema
238     for(int k=0;k<n-1;k++)
239         bSist[k] = (3.0/h[k+1]) * (y[k+2]-y[k+1]) - (3.0/h[k+1]) * (y[k+1]-y[k]);
240
241     //Resuelvo el sistema, teniendo en cuenta que xSist son los Ck, por lo que 'salteo'
            el primer elemento
242     if(strcmp(func,"calcW") == 0){
243         calcW(aSist,xSist+1,bSist,n-1, tol);
244     } else {
245         if(strcmp(func,"jcb") == 0){
246             cout << "Iteraciones jacobi: " << jacobi(aSist,xSist+1,bSist,n-1, tol) <<
                    endl;
247         } else if(strcmp(func,"sor") == 0){
248             cout << "Iteraciones SOR: " << sor(aSist,xSist+1,bSist,n-1,w,tol) << endl;
249         }
250         poly(xSist, x, y, h, n);
251     }
252     delete []aSist;
253     delete []xSist;
254     delete []bSist;
255     delete []x;
256     delete []y;
257     return 0;
258 }
```

B. Código para el calculo de W optimo (Octave/-MATLAB)

```
1  LARGO = 70;
2  VALOR = 5;
3
4  D = 4*VALOR*eye(LARGO);
5  U = -diag(VALOR*ones(1,LARGO-1),1);
6  L = -diag(VALOR*ones(1,LARGO-1),-1);
7
8  %GS
9  M = D-L-U;
10 autovalores_GS = eig(inv(D-L)*U);
11 radio_GS = max(abs(autovalores_GS))
12 wopt = 2/(1+sqrt(1-radio_GS))
13
14 %Jacobi
15 autovalores_J = eig(inv(D)*(L+U));
16 radio_J = max(abs(autovalores_J))
```