75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2
2do. Cuatrimestre 2013

Integración numérica y resolución de problemas valores iniciales no lineales

Introducción:
Si un péndulo ideal es apartado de su posición de equilibrio y es soltado sin velocidad inicial adquiere un movimiento que puede ser descrito mediante el ángulo ϕ que forma la varilla del péndulo con la vertical del punto de sujeción. La evolución temporal de ϕ se obtiene integrando el siguiente problema no-lineal de valor inicial

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L} sen\phi = 0 \quad \text{con} \quad \phi_{(0)} = A \quad \text{y} \quad \left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{(0)} = 0 \qquad (1)$$

donde g =9.81 m/s^2, L es la longitud del péndulo en metros y A la amplitud angular. Dicho movimiento es periódico pudiendo calcularse su periodo (T) mediante la integral definida[1] :

$$T = 4\sqrt{L/g} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - sen^2(A/2)\ sen^2\varphi]^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad si \quad 0 \le A < \pi \qquad (2)$$

Cuando la amplitud de la oscilación es pequeña el periodo puede calcularse en forma aproximada mediante

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \ .$$

Datos: L=1 metro y A = π*[(c#+2)*100+g#]/1000 donde c# es el numero de curso y g# es el numero de grupo (de 2 dígitos).

Resolución :

1) Implementar la integración numérica de la formula (2) usando cualquiera de los métodos vistos en el curso de forma tal de asegurar un resultado con cinco dígitos significativos correctos.
2) Verificar la implementación anterior calculando el periodo T para amplitudes pequeñas
3) Implementar uno o más programas que permitan integrar el problema de valores iniciales no lineal (1) utilizando el Método de Runge-Kutta de orden 2 y 4.
4) Utilizando los datos proporcionados calcular el periodo T utilizando la integración numérica implementada en el punto 1). Este valor servirá como referencia para los puntos siguientes.
5) Integrar el problema de valores iniciales durante al menos 5 periodos utilizando distintos pasos de tiempo (que se identificarán como fracciones enteras del periodo previamente calculado) a los efectos de poder comparar el comportamiento de las soluciones numéricas obtenidas con los dos órdenes propuestos. En particular evaluar el error en amplitud comparando las soluciones con la amplitud inicial para tiempos iguales a múltiplos enteros del periodo y el error en fase comparando los instantes en que se observan máximos de amplitud con los múltiplos enteros del periodo.

[1] Brauer and Nohel, *The qualitative theory of ordinary differential equations*, 1969, Dover Publications, New York

6) Al momento de redactar las conclusiones es importante tener en cuenta que se trata de un problema físico conservativo y que el método numérico implementado no lo es. Otro punto importante es el análisis del efecto del orden sobre el esfuerzo computacional requerido para obtener resultados de precisión similar. Finalmente se piden comentarios acerca de la estabilidad del problema numérico para lo cual se sugiere aumentar el tamaño del paso para observar el fenómeno de inestabilidad.

Discretización directa de Problemas de Valores Iniciales de primer orden

$y'=f(t,y)$

R-K 2

$$q_1 = k\, f\,(u_n, t_n)$$

$$q_2 = k\, f\,(u_n + q_1, t_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + 1/2\,(q_1 + q_2)$$

RK-4

$$q_1 = k\, f\,(u_n, t_n)$$

$$q_2 = k\, f\,(u_n + 1/2\, q_1, t_{n+1/2})$$

$$q_3 = k\, f\,(u_n + 1/2\, q_2, t_{n+1/2})$$

$$q_4 = k\, f\,(u_n + q_3, t_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + 1/6\,(q_1 + 2\, q_2 + 2\, q_3 + q_4)$$