Вопросы, выносимые на экзамен по дисциплине
«Математическая логика и теория алгоритмов»

1. Оценка вычислительной сложности алгоритмов. Алгоритмы полиномиальной и экспоненциальной временной сложности.
2. Введение в анализ алгоритмов. Количественно-зависимые, параметрически-зависимые, количественно-параметрические по трудоемкости алгоритмы. Асимптотический анализ сложности алгоритмов, асимптотические оценки Θ , O , Ω .
3. Класс задач P (задачи с полиномиальной сложностью), NP (полиномиально проверяемые задачи). Проблема $P=NP?$ Класс NP - полных задач. Примеры NP - полных задач.
4. Конечный автомат как математическая модель устройства с конечной памятью. Входной и выходной алфавит, состояния конечного автомата, алфавит состояний; выходная и переходная функции. Способы описания конечных автоматов: диаграмма состояний (помеченный ориентированный граф); таблица состояний. Преимущества и недостатки каждого способа, связь между ними. Примеры. Виды автоматов. Примеры автоматов Мили, Мура.
5. Виды автоматов. Примеры автоматов Мили, Мура. Понятие о бесконечных, вероятностных автоматах. Задачи теории автоматов: задача анализа, задача синтеза, задача полноты, задача эквивалентных преобразований. Задача минимизации числа состояний автомата.
6. Машина Тьюринга. Входной/выходной алфавит, конечное множество внутренних состояний, выходная, переходная и управляющая функции. Основные различия между машиной Тьюринга и конечным автоматом. Задание машины Тьюринга в обозначениях Тьюринга. Теорема о построении машины Тьюринга, соответствующей заданному конечному автомату. Проблема останова машины Тьюринга.
7. Алгоритм, свойства алгоритмов. Алгоритмическая разрешимость, вычислительная сложность алгоритмов. Уточнения понятия алгоритма. Примитивные функции, операторы суперпозиции, примитивной рекурсии, минимизации. Примитивно рекурсивные, частично рекурсивные, общерекурсивные функции. Тезис Черча. Тезис Тьюринга.
8. Разрешимые множества. Перечислимые множества. Положения алгоритмической теории множеств. Разрешимые и неразрешимые проблемы, примеры разрешимых и неразрешимых проблем. Результат Черча о неразрешимости проблемы выяснения общезначимости формулы в логике предикатов. Результат Геделя о неполноте аксиоматических систем.
9. Формула. Формы записи операций (функций) — инфиксная, префиксная (прямая польская запись), постфиксная (обратная польская запись). Двойственная булева функция. Принцип двойственности. Дизъюнктивная нормальная, конъюнктивная нормальная формы. Совершенные дизъюнктивная нормальная, конъюнктивная нормальная формы. Запись

СДНФ, СКНФ по таблице истинности. Полная система булевых функций, критерий Поста. Некоторые булевы алгебры: дизъюнктивная алгебра, алгебра Вебба, алгебра Шеффера, импликативная алгебра, алгебра Жегалкина.

10. Условия определения аксиоматической (формальной) теории. Выражения, формулы, аксиомы, правила вывода формальной теории. Непосредственное следствие формул по правилу вывода; вывод формулы; теорема формальной теории. Разрешимая и неразрешимая формулы. Полнота аксиоматической теории. Требования непротиворечивости, независимости. Исчисление высказываний
11. Исчисление высказываний как аксиоматическая теория в дизъюнктивном базисе Буля. Связки, пропозициональные буквы. Формула и аксиомы исчисления высказываний. Правило вывода исчисления высказываний (*modus ponens*). Теорема о дедукции, правило силлогизма.
12. Функции k-значной логики и их задание с помощью таблицы истинности. Конечнозначная функция Вебба и конечнозначная алгебра Вебба. Конечнозначные алгебры Поста, Россера-Тьюкетта.
13. Предикат: n-местный (n=0, n>0), тождественно истинный, тождественно ложный, выполнимый. Область истинности предиката. Связь между n-местными предикатами и n-местными отношениями. Квантор всеобщности и квантор существования. Предикатная, предметная переменная. Исчисление предикатов. Алфавит логики предикатов. Элементарная формула (атомарная). Правила построения предикатных формул из элементарных формул.
14. Исчисление предикатов. Три правила вывода исчисления предикатов (*modus ponens*, $\forall$-правило и $\exists$-правило). Вывод формулы в исчислении предикатов. Теорема Геделя о полноте.
15. Автоматическое доказательство теорем. Получение префиксных, сколемовских нормальных форм, клаузальная форма. Метод резолюций.
16. Понятие производной от булевой функции первого порядка, k-го порядка, смешанной. Доказательство теоремы о представимости любой булевой функции на наборе нулей значениями своих производных. Расширения двузначной логики — k-значные логики. Таблица истинности функции k-значной логики. K-значный аналог дизъюнкции, конъюнкции, отрицания, функция Вебба.
17. Скулемовские функции, клаузальная форма. Метод резолюций в логике предикатов. Понятие о модальной логике. Нечеткие множества; понятие функции принадлежности (характеристической функции); основные операции.
18. Формализация логики высказываний как аксиоматической системы: аксиоматика Гильберта, другие виды аксиоматик. Правило подстановки. Правило modus ponens. Вывод производных правил: правило силлогизма, правило контрпозиции. Теорема о дедукции.
19. Классы функций: сохраняющих ноль, единицу, самодвойственных, линейных,

монотонных. Аналитическое выражение количества функций сохраняющих ноль, единицу, самодвойственных, линейных от n переменных. Понятие о замкнутости классов функций: сохраняющих ноль, единицу, самодвойственных, линейных, монотонных. Понятие полноты системы булевых. Критерий Поста. Примеры полных систем булевых функций: многочлены Жегалкина — доказательство полноты, выражения булевых функций в классе многочленов Жегалкина.

20. Понятие предикатной функции, область интерпретации переменных в предикатной функции. Логические операции с предикатами, формулы логики предикатов. Введение кванторов: кванторы всеобщности, существования. Примеры использования предикатов и кванторов для записи различных утверждений.

Примеры практических заданий, выносимых на экзамен

1. Дан черный ящик с тремя входами и одним выходом. На выходе черного ящика появляется сигнал «1», только если четное количество входных сигналов принимают значение «1». На элементной базе «ИЛИ-НЕ» (стрелка Пирса) постройте модель этого черного ящика
2. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие формулы: $x|(y\to z)$ и $(x|y)\to(x|z)$. Приведите данные формулы к СДНФ, СКНФ.
3. Является ли полной система булевых функций: $\{f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)\}$, где $f(x_1,x_2)=\overline{x_1}\oplus\overline{x_2}, f(x_1,x_2)=\overline{x_1}\vee x_2$.
4. Приведите к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов: $\overline{\forall x \exists y (P(x)\to Q(y))}$, $\forall x (P(x)\to \exists y Q(y))$
5. Оценить количество операций алгоритма. Дать асимптотическую оценку трудоемкости в виде О – оценки.

```
i:=0; m:=1;
repeat
  if not((m mod 3)=0) then i:=i+1;
  m:=m+1;
until i>N
```

6. Записать, введя необходимые предикаты, в виде формулы логики предикатов следующие утверждения: «Если человеку повезет с женой, он будет счастлив, иначе станет философом», «Друг моего друга — мой друг»
7. Выполнимы ли следующие формулы: $\exists x \forall y (Q(x,y)\wedge\overline{Q(x,y)})$, $\exists x \forall y (Q(x,y)\to\forall z R(x,y,z))$
8. Привести к скулемовской нормальной форме: $\exists x (P(x)\to(\forall y Q(x,y)\to\forall z R(x,z)))$
9. Построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции $f(x)=x+4$.

10. Докажите, что число самодвойственных функций от n переменных равно $2^{2^{n-1}}$

11. Найти производную $\frac{df}{dx}$ булевой функции $\overline{x \wedge ((y \vee x) \rightarrow x)}$

12. Найдите минимальную ДНФ с помощью карт Карно булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$, если $f(0,1,0) = f(1,0,0) = f(1,0,1) = 0$.

13. Найдите минимальную ДНФ с минимизирующих карт булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$, если $f(0,1,1) = f(1,0,0) = f(1,1,0) = 0$.

14. Оценить количество операций алгоритма. Дать асимптотическую оценку трудоемкости в виде O – оценки.

```
k:=0; i:=1;
while k<=N do
  begin
    i:=2*i;
    while k<=i do k:=k+1;
 end;
```

15. Построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции $f(x) = 4x$

16. Построить машину Тьюринга осуществляющей правый сдвиг единицы на ленте

17. Методом резолюций доказать выводимость из совокупности гипотез $\overline{X} \vee Z, Z \rightarrow Y, Y \rightarrow X$ утверждения $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$

18. Выразить $\wedge$, $\vee$ через $\neg$ и $\rightarrow$