

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА**

**Факультет вычислительной  
математики и кибернетики**

**А.В. Лотов, И.И. Поспелова**

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ  
ЗАДАЧИ  
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

**МОСКВА - 2008**

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

А.В. Лотов, И.И. ПОСПЕЛОВА

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ  
ЗАДАЧИ  
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

*Учебное пособие*

МОСКВА  
2008

УДК 519.858  
ББК 22.18

*Печатается при поддержке образовательной программы  
“Формирование системы инновационного обучения в МГУ”*

Р е ц е н з е н т ы:  
к.ф.-м.н. *Оленев Н.Н.*  
доцент, к.ф.-м.н. *Морозов В.В.*

**Лотов А.В., Поспелова И.И.**

**Многокритериальные задачи принятия решений:** Учебное пособие. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 197 с.  
ISBN

Предлагаемое учебное пособие написано в рамках создания магистерской программы “Математические модели сложных систем”. Учебное пособие посвящено теории многокритериальной оптимизации и методам поддержки принятия решений при нескольких критериях.

Учебное пособие в первую очередь предназначено для студентов-магистров ВМК МГУ, но может быть полезно всем, изучающим методы поддержки принятия решений при нескольких критериях.

Работа выполнена по программе государственной поддержки ведущих научных школ (коды проектов НШ-2982.2008.1 и НШ-693.2008.1) и при поддержке РФФИ (проект №07-01-00472).

УДК 519.858  
ББК 22.18

ISBN

© Лотов А.В., Поспелова И.И., 2008

## Содержание

Лекция 1. Предмет теории принятия решений	6
<b>Часть I. Принятие решений при нескольких критериях</b>	<b>15</b>
Лекция 2. Принятие решений при нескольких критериях. Роль человека в многокритериальных задачах принятия решений.	15
Лекция 3. Математическая формулировка задачи принятия решений при нескольких критериях. Оптимальность по Парето и Слейтеру	26
3.1. Математическая формулировка задачи принятия решений при единственном критерии . . . . .	26
3.2. Математическая формулировка задачи принятия решений при нескольких критериях . . . . .	27
3.3. Понятия доминирования по Парето и Слейтеру. Решение задачи принятия решений при нескольких критериях . . . . .	31
Лекция 4. Бинарные отношения как язык описания предпочтений	34
4.1. Основные понятия теории бинарных отношений . . . . .	35
4.2. Некоторые классы бинарных отношений и их свойства . . . . .	39
Лекция 5. Формулировка задачи многокритериальной оптимизации	44
5.1. Задача многокритериальной оптимизации . . . . .	44
5.2. Оптимальность по Парето и Слейтеру в задачах МКО . . . . .	46
5.3. Абсолютно оптимальное решение и идеальная точка . . . . .	49
<b>Часть II. Основы теории многокритериальной оптимизации</b>	<b>51</b>
Лекция 6. Свойства оптимальных решений в задачах МКО	51
6.1. Достаточные условия существования множества Парето и выполнения свойства фон Неймана-Моргенштерна . . . . .	51
6.2. Оболочка Эджворта-Парето и ее свойства . . . . .	52
6.3. Оптимальность по Джоффриону . . . . .	55
Лекция 7. Свертки критериев в задачах МКО	57
7.1. Общая теория сверток критериев . . . . .	57
7.2. Линейная свертка . . . . .	59
7.3. Свертка Гермейера . . . . .	59
7.4. Свертки на основе идеальной точки . . . . .	63

<b>Лекция 8. Условия оптимальности и устойчивости в задачах МКО</b>	<b>65</b>
8.1. Оптимальность в эффективно выпуклых задачах МКО . . . . .	65
8.2. Оптимальность в невыпуклых задачах МКО . . . . .	68
8.3. О понятии устойчивости в задачах МКО . . . . .	70
8.4. Устойчивость паретовой и слеитеровой границ . . . . .	73
8.5. Устойчивость множества достижимых критериальных векторов . . . . .	75
<b>Часть III. Методы многокритериальной оптимизации</b>	<b>78</b>
<b>Лекция 9. Общие вопросы построения методов МКО</b>	<b>78</b>
9.1. Сложность вопросов в многокритериальных методах . . . . .	78
9.2. Классификация методов . . . . .	81
9.3. Методы поиска решения без участия ЛПР . . . . .	82
<b>Лекция 10. Методы, учитывающие предпочтения ЛПР при построении решающего правила</b>	<b>84</b>
10.1. Функция полезности . . . . .	84
10.2. Аддитивные функции полезности . . . . .	86
10.3. Построение поверхностей безразличия в случае аддитивной структуры предпочтений . . . . .	88
10.4. Эвристические подходы к построению решающего правила . . . . .	91
<b>Лекция 11. Основные концепции итеративных методов</b>	<b>94</b>
11.1. Общее представление об итеративных методах . . . . .	94
11.2. Простейшие итеративные методы . . . . .	95
11.3. Метод Джофффриона-Дайера-Файнберга . . . . .	98
11.4. Структуризованные итеративные методы . . . . .	101
11.5. Понятие объективного (критериального) замещения . . . . .	102
<b>Лекция 12. Итеративные методы МКО</b>	<b>107</b>
12.1. Процедура Зайонца-Валлениуса . . . . .	107
12.2. Метод Штойера . . . . .	109
12.3. Методы с целевыми точками . . . . .	110
12.4. Метод STEM . . . . .	112
12.5. Методы, использующие визуализацию точек и кривых на паретовой границе . . . . .	115
12.6. Метод “Шаг по паретовой границе” . . . . .	118
<b>Часть IV. Методы информирования ЛПР о паретовой границе в задачах МКО</b>	<b>122</b>
<b>Лекция 13. Информирование ЛПР о паретовой границе в случае двух критериев</b>	<b>122</b>

13.1. Особенности двухкритериальных задач МКО . . . . .	122
13.2. Эффективность визуализации в двухкритериальных задачах . . . . .	126
<b>Лекция 14. Визуализация паретовой границы на основе полиэдральной аппроксимации ОЭП</b> . . . . .	<b>128</b>
14.1. Визуализация паретовой границы . . . . .	128
14.2. Неструктуризованная визуализация паретовой границы . . . . .	131
14.3. Пример визуализации паретовой границы . . . . .	134
<b>Лекция 15. Полиэдральная аппроксимация ОЭП в выпуклом случае</b> . . . . .	<b>139</b>
15.1. О полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел . . . . .	139
15.2. Метод уточнения оценок . . . . .	141
15.3. Построение выпуклой оболочки точки и многогранника . . . . .	143
<b>Лекция 16. Методы аппроксимации паретовой границы конечным числом точек</b> . . . . .	<b>145</b>
16.1. Основные подходы к построению методов точечной аппроксимации паретовой границы . . . . .	145
16.2. Статистическое оценивание качества аппроксимации ОЭП . . . . .	150
16.3. Гибридный метод аппроксимации ОЭП . . . . .	156
16.4. Использование параллельных вычислений . . . . .	159
<b>Лекция 17. Методы визуализации паретовой границы, аппроксимированной конечным числом точек</b> . . . . .	<b>161</b>
17.1. Метод параллельных отрезков . . . . .	161
17.2. Метод матрицы рассеивания . . . . .	164
17.3. Визуализация двумерных сечений ОЭП . . . . .	167
17.4. Метод разумных целей . . . . .	169
<b>Часть V. Методы поддержки выбора из малого числа альтернатив на основе парных сравнений</b> . . . . .	<b>176</b>
<b>Лекция 18. Методы анализа иерархий и ELECTRE</b> . . . . .	<b>176</b>
18.1. Метод анализа иерархий . . . . .	176
18.2. Метод ELECTRE . . . . .	178
18.3. Пример использования метода ELECTRE . . . . .	180
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ. Лабораторная работа по поддержке коллективного выбора решений в сети Интернет</b> . . . . .	<b>186</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>197</b>

## Лекция 1. Предмет теории принятия решений

### Основные положения

Под принятием решений понимают особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта из возможных действий. Однако слова “принятие решений” часто используются в значительно более широком смысле. Говорят, например, о принятии решений компьютером или роботом, принимающих решения в результате математических расчетов. В данном курсе лекций мы будем рассматривать только такие задачи, в которых принятие решений осуществляется человеком.

Как в жизни отдельного человека, так и в повседневной деятельности организаций или общества в целом, принятие решений является важнейшей составляющей, которая определяет их будущее. Человек выбирает профессию, друзей, партнера по браку, работу, место проживания и многое другое, причем вся его жизнь есть, по существу, последовательность решений. Руководители стран решают, как и с кем сотрудничать, проводить ли реформы и какие, что запрещать и что разрешать, и так далее. Описание этих решений составляет основное содержание учебников по истории.

При выборе решений главную роль играет анализ их последствий. К сожалению, для подавляющего большинства решений, принимаемых человеком, последствия нельзя точно рассчитать и оценить. Человек может лишь предположить, что определенный вариант решения приведет к определенному результату. Такое предположение, конечно, может оказаться ошибочным, потому что далеко не всегда удастся учесть все факторы, влияющие на результат принятого решения. Однако уступая компьютеру в скорости и точности вычислений, человек обладает уникальным умением быстро оценивать обстановку, выделять главное и отбрасывать второстепенное, соизмерять противоречивые оценки, восполнять неопределенность своими догадками. В то же время число ошибочных решений велико, а сила и глубина их отрицательного воздействия растет вместе с мощностью человеческого общества. В связи с этим возникает вопрос о средствах, которые могут помочь человеку в принятии решений. Сведения об одной важной группе таких средств, а именно о методах поддержки принятия решений при нескольких критериях, изложены в данном курсе лекций.

Методы поддержки человека в процессе принятия решений должны иметь теоретическую основу. Исследованием различных аспектов процесса принятия решений как отдельными людьми, так и группами лиц занимается *теория принятия решений*. Развитие этой теории способствует разработке

методов, которые могут оказать реальную помощь людям в процессе принятия решений. В настоящее время такие методы обычно реализуются в виде комплексов компьютерных программ, часто называемых *системами поддержки принятия решений* (СППР). Поскольку применение систем поддержки принятия решений является довольно трудоемким, эти методы и системы наиболее часто применяются в тех задачах, в которых затраты на разработку и освоение СППР окупают себя. К таким задачам относятся, например, задачи планирования деятельности корпораций, задачи конструирования сложных технических систем, задачи выбора вариантов эксплуатации дорогостоящего оборудования и т.д. С другой стороны, удешевление компьютеров и разработка массовых относительно простых графических средств делает использование систем поддержки выбора решений дешевым, доступным и наглядным, что позволяет использовать их и людьми в повседневной жизни. В качестве примера достаточно вспомнить ставшие общедоступными спутниковые средства ориентирования на местности.

Прежде всего надо подчеркнуть, что и теория принятия решений, и особенно методы, развиваемые на ее основе, — это прикладная дисциплина, которая не является строгой математической наукой типа теории оптимизации, а базируется в значительной степени на знаниях о людях, участвующих в процессе принятия решений. Поэтому понимание сущности процесса принятия решения и возможностей человека в этом процессе является основой для создания и анализа методов, предназначенных для поддержки лиц, принимающих решения.

Таким образом, основой теории принятия решений является модель человека, в связи с чем эта теория в значительной степени принадлежит к социально-психологическим дисциплинам, хотя, конечно, использует различные математические методы и содержит важные разделы, целиком относящиеся к области математики. Надо признать, что в настоящее время теория принятия решений является совокупностью концепций, зачастую не связанных между собой, а иногда и противоречащих друг другу. Такая ситуация объясняется тем, что теория принятия решений возникла, по крайней мере, из трех источников — экономической теории, психологии и инженерной практики. Эти источники принадлежат различным отраслям человеческого знания, поэтому отличаются и языком, и методами исследования. Рассмотрим эти три источника.

*Экономическая теория* объясняет и предсказывает экономическое поведение людей, т.е. поведение в области производства, обмена и потребления. Эта теория привнесла в теорию принятия решений такое базовое понятие, как функция полезности. Все же, к теории принятия решений экономи-



ческая теория имеет лишь косвенное отношение, так как ее задача — описание характерного поведения человека (а вовсе не его поддержка в процессе принятия решений). Поэтому экономическая теория использует простую модель разумного человека — ограниченного, но логичного существа (по сути, автомата), действия которого направлены на максимизацию функции полезности. Эта модель показала свою эффективность при анализе экономических проблем. В то же время, при разработке методов поддержки принятия решений человеком непосредственное использование такого подхода не слишком эффективно — функция полезности обычно заранее не известна, и, более того, ее существование часто вызывает сомнение.

*Психология*, т.е. наука о закономерностях, механизме и фактах психической жизни человека, изучает психику человека, в том числе и его поведение. Одной из целей психологии является построение адекватных моделей принятия решений человеком в различных ситуациях, так что простые априорные модели человеческого поведения (типа максимизации полезности) хотя и встречаются в психологических исследованиях, не определяют основные направления этих исследований. В настоящее время психология включает в себя совокупность различных конкурирующих моделей человека — от простейшей модели поведения в виде реакции на стимулы до сложнейших концепций ментальных (умственных) моделей, используемых человеком для предсказания реакции окружающего мира на его возможные действия. При этом часто учитывается социальная обусловленность предпочтений и привычек отдельного человека. Такие модели в той или иной степени являются обобщением результатов экспериментов с человеком и наблюдений над ним. Надо, однако, признать, что анализировать знания, добытые экспериментальной и теоретической психологией в рамках концепции ментальных моделей, значительно труднее, чем изучать простую математическую модель максимизации функции, поэтому концепция функции полезности также используется психологами.

*Инженерное направление* связано с практическим применением методов поддержки принятия решений. Систематическая разработка таких методов началась после второй мировой войны, а с появлением компьютеров началось создание компьютерных систем поддержки принятия решений. Для инженерного подхода главным является не теоретический результат, а работающая система, которая может быть успешно использована людьми при принятии решений. Начав с оптимизации простейших форм функции полезности, создатели СППР постепенно перешли к более сложным постановкам, в том числе и к таким, в которых выбор решения осуществляется человеком на основе нескольких критериев. В связи с широким распростра-

нением СППР они стали источником важного (часто негативного) опыта, который требует своего осмысления. Этим определяется усиление влияния инженерного направления на теорию принятия решений в настоящее время.

### **Люди в процессе принятия решений**

В процессе принятия решений люди могут играть разные роли. Человека, фактически осуществляющего выбор наилучшего варианта действий, принято называть *лицом, принимающим решения* (ЛПР). Наряду с ЛПР иногда выделяют как отдельную личность *владельца проблемы* — человека, который, по мнению окружающих, должен ее решать и несет ответственность за принятые решения. Далеко не всегда владелец проблемы является также и ЛПР. Конечно, история дает нам многочисленные примеры совмещения этих двух ролей. Но бывают ситуации, когда владелец проблемы является лишь одним из нескольких человек, принимающих участие в ее решении. Например, он может быть председателем коллективного органа, принимающего решения, вынужденным идти на компромиссы, чтобы достичь согласия.

Иногда личности ЛПР и владельца проблемы просто не совпадают. Например, некоторые руководители стремятся переложить принятие решений на других: глава фирмы полагается на своего заместителя, а президенты подписывают распоряжения, подготовленные сотрудниками их администраций. Таким образом, владелец проблемы и ЛПР могут быть как одной, так и разными личностями.

Еще одной ролью, которую может играть человек в процессе принятия решений, является роль участника *активной группы* — группы людей, имеющих общие интересы и старающихся оказать влияние на процесс выбора и его результат. Так, пытаясь повлиять на экономическую политику страны, одни активные группы организуют забастовки, другие — кампанию против политики правительства в печати, третьи выделяют финансовые средства для поддержки правительства и т.д.

Если решения принимаются малой группой, члены которой формально имеют равные права (жюри, комиссия), то человек является *членом группы, принимающей решения*. Главное в деятельности такой группы — достижение согласия при выработке совместных решений.

В процессе принятия решений человек может выступать в качестве *эксперта*, т.е. профессионала в той или иной области, к которому обращаются за оценками и рекомендациями люди, включенные в этот процесс. Так, при перестройке организации часто обращаются за советом к опытному администратору. Эксперты могут помочь руководителю предприятия в оценке

экономической эффективности выпуска новой продукции и т.д.

В процессе подготовки к принятию сложных (как правило, стратегических) решений иногда принимает участие *консультант по принятию решений*. Его роль сводится к разумной организации процесса принятия решений: помощи ЛПР и владельцу проблемы в правильной постановке задачи, выявлении позиций активных групп, организации работы с экспертами. Консультант (или аналитик) обычно не вносит свои предпочтения, оценки в принятие решений, он только помогает другим взвесить все “за” и “против” и выработать разумный компромисс. Среди аналитиков выделяют специалистов по математическим аспектам поддержки принятия решений. Они помогают участникам процесса принятия решений воспользоваться современными средствами анализа решений. Для того чтобы отличить таких специалистов от обычных аналитиков, их часто называют *исследователями операций*.

Кроме того, в принятии решений неявно участвует *окружение* лица, принимающего решение, и владельца проблемы (например, сотрудники той организации, от имени которой принимается решение). Обычно эта группа людей имеет общие взгляды, общие ценностные установки. Именно этой группе в первую очередь приходится объяснять логичность, разумность, обоснованность предлагаемых решений. В связи с этим, хотя ЛПР принимает индивидуальные решения, оно учитывает политику и предпочтения данной группы лиц.

На практике индивидуальные задачи принятия решений весьма распространены, поскольку влияние ЛПР велико даже в случае коллективного принятия решения. Несмотря на существование коллегий, правлений и советов, обычно есть центральная фигура, определяющая курс, тактику и стратегию действий на предстоящий период (ЛПР). От прозорливости этого лидера, его личных качеств зависит очень многое. Среди подобных качеств у успешных ЛПР обязательно умение договариваться с людьми, убеждать их в правильности и обоснованности своих действий. Аналогичная ситуация наблюдается в правительствах, политических партиях — всегда выдвигаются лидеры, которые принимают основные решения. Таким образом, проблемы индивидуального выбора являются в настоящее время наиболее практически важным классом задач принятия решений. Поэтому особое внимание в данном курсе лекций будет уделяться именно процессам принятия индивидуальных решений.

### **Альтернативы**

Принятие решения всегда предполагает выбор одного из возможных вариантов действий. Такие возможные варианты действий принято называть

*альтернативами*. Составление списка альтернатив или ограничений, выделяющих потенциально реализуемые альтернативы среди всевозможных, — неотъемлемая часть формализации проблемы принятия решений: для наличия задачи выбора решений необходимо иметь хотя бы две альтернативы.

Существенно различаются задачи принятия решений, в которых список альтернатив заранее задан, так что необходимо лишь выбрать лучшие из этого списка, и задачи, в которых заданы ограничения, а сами альтернативы пока не известны. В качестве примера задачи первого типа можно привести задачу выбора наиболее подходящего университета, автомобиля и т.д. К задаче второго типа относится, например, разработка правила выдачи кредитов в банке для организаций или частных лиц.

Когда альтернатив много (сотни и тысячи), ЛПР не может уделить достаточно времени и внимания для анализа каждой из них, поэтому возникает необходимость в средствах поддержки выбора решений. В подобных средствах может существовать потребность и тогда, когда число альтернатив невелико (скажем, до 20). В таких задачах, как, например, выбор трассы газопровода или плана развития города, число альтернатив, с рассмотрения которых начинается выбор, сравнительно немного. Но они не являются единственно возможными. Часто на их основе в процессе выбора возникают новые альтернативы. Первичные, основные, альтернативы не всегда устраивают участников процесса выбора. Однако они помогают понять, чего конкретно не хватает в рассматриваемых альтернативах при данной ситуации. Этот класс задач называют задачами с конструируемыми альтернативами.

### **Критерии выбора решения**

В современной теории принятия решений считается, что варианты решений характеризуются различными показателями их привлекательности для ЛПР. Эти показатели называют признаками, факторами, атрибутами или показателями качества. Все они служат критериями выбора решения. В подавляющем большинстве реальных задач имеется достаточно много критериев. Эти критерии могут быть независимыми или зависимыми.

Допустим, две сравниваемые альтернативы имеют различные оценки по первой группе критериев и одинаковые — по второй группе. В теории принятия решений критерии считаются зависимыми, если предпочтения ЛПР при сравнении альтернатив меняются в зависимости от значений одинаковых оценок по второй группе критериев. Предположим, что человек при покупке автомобиля учитывает три критерия: цену (чем меньше, тем лучше), размер (чем больше, тем лучше) и конструкцию коробки передач (автоматическая лучше механической). Пусть по третьему критерию сравниваемые

автомобили имеют одинаковую оценку. Тогда ЛПР предпочитает большую и сравнительно дешевую машину небольшой и более дорогой при автоматической коробке передач. Но его предпочтения могут измениться на противоположные при механической коробке передач из-за трудностей в вождении большой машины. В данном примере критерии являются зависимыми.

На сложность задач принятия решений влияет также число критериев. При небольшом числе критериев (скажем, при двух) задача сравнения двух альтернатив достаточно проста и прозрачна, значения критериев могут быть непосредственно сопоставлены и может быть выработана предпочтительная альтернатива. При большом числе критериев задача становится необозримой для ЛПР. К счастью, при большом числе критериев они обычно могут быть объединены в группы, имеющие конкретное смысловое значение. Такие группы критериев, как правило, независимы. Выявление структуры на множестве критериев делает процесс принятия решений значительно более осмысленным и эффективным.

Использование критериев выбора решения для оценки альтернатив требует определения градаций величин критериев: лучших, худших и промежуточных оценок. Другими словами, существуют шкалы оценок по критериям. В принятии решений различают шкалы непрерывных и дискретных оценок, шкалы количественных и качественных оценок. Так, для критерия “стоимость автомобиля” может быть использована непрерывная количественная шкала оценок (в денежных единицах). Для критерия “цвет автомобиля” должна быть использована качественная шкала. Существуют и другие, более тонкие классификации шкал.

### **Процесс принятия решений**

Процесс принятия решения не является одномоментным актом, очень часто это достаточно длинный и мучительный процесс. Обычно в нем выделяют три этапа: поиск информации и постановка задачи, построение множества альтернатив и выбор лучшей альтернативы. На первом этапе собирается вся доступная на момент принятия решения информация: фактические данные, мнения экспертов, строятся математические модели, проводятся социологические опросы, определяются взгляды на проблему со стороны активных групп, влияющих на ее решение, формируются критерии выбора решения и т.д. Второй этап связан с определением того, что можно, а чего нельзя делать в имеющейся ситуации, т.е. с определением реализуемых вариантов решения. И уже третий этап включает в себя сравнение альтернатив и выбор наилучшего варианта (или вариантов) решения.

Из трех перечисленных этапов процесса принятия решения наибольшее

внимание традиционно уделяется последнему этапу. За признанием важности поиска информации и формирования множества альтернатив следует понимание того, что эти этапы в высшей степени неформализованы. Способы прохождения этапов зависят не только от содержания задачи принятия решений, но и от опыта, привычек, личного стиля ЛПР и его окружения. Отметим, что выделение малого числа альтернатив из часто неопределенного числа возможных вариантов действия на втором этапе требует всестороннего анализа этих вариантов. При этом анализ большого числа вариантов может быть довольно грубым, но должен по возможности включать все такие варианты. На третьем этапе, наоборот, требуется тщательно проанализировать и сравнить лишь малое число альтернатив, уже сформулированных в явном виде. Такое представление о процессе принятия решений используется при разработке методов поддержки принятия решений. Учет многих критериев необходим на всех рассмотренных этапах. В дальнейшем мы встретимся с многокритериальными методами, предназначенными для поддержки выбора из большого (или бесконечного) числа возможных решений, и с многокритериальными методами, предназначенными для поддержки выбора из малого числа альтернатив.

Традиционно различают следующие основные задачи принятия решений.

1. *Упорядочение альтернатив.* Для ряда задач представляется вполне обоснованным требование определить порядок на множестве альтернатив. Так, члены семьи упорядочивают по степени необходимости будущие покупки, руководители фирм упорядочивают по прибыльности объекты капиталовложений и т.д.

2. *Распределение альтернатив по классам решений.* Такие задачи также часто встречаются в повседневной жизни. При покупке квартиры или дома люди обычно делят альтернативы на две группы: заслуживающие и не заслуживающие более подробного изучения, требующего затрат сил и средств. Точно так же люди часто распределяют по привлекательности для себя туристские маршруты и т.д.

3. *Выделение наилучшей альтернативы.* Эта задача считается одной из основных в принятии решений. Хорошо известны такие примеры как выбор одного предмета при покупке, выбор места работы, выбор проекта сложного технического устройства. Задачи выбора распространены в мире политических решений, где альтернатив бывает сравнительно немного, но они достаточно сложны для изучения и сравнения. Именно задачи выделения наилучшей альтернативы будут, в основном, рассматриваться в данном курсе лекций.

Отметим новые тенденции, наблюдающиеся в процессе совершенство-

вания методов поддержки принятия решений при многих критериях в последние годы. Новый импульс был получен в связи с развитием компьютерной графики, позволившей по-новому подойти к разработке методов поддержки принятия решений. Это связано с тем, что многокритериальные методы требуют активного участия ЛПР в процессе поиска предпочтительного решения, так что огромное значение имеет обеспечение легкости взаимодействия человека с компьютером в процессе их применения.

Визуализация информации означает трансформацию символьных данных в геометрические фигуры, которые помогают человеку при формировании ментального образа этих данных, что значительно облегчает взаимодействие ЛПР с компьютером. Визуализация информации в процессе человеко-машинного взаимодействия является характерной чертой новых компьютерных технологий, позволяющей облегчить процесс усвоения информации человеком и повысить эффективность этого процесса. Дело в том, что человеческое восприятие в значительной степени базируется на зрении (по некоторым оценкам, около половины нейронов человеческого мозга так или иначе связано со зрением), поэтому компьютерная визуализация является прямым путем к усвоению информации, а применение визуализации в рамках многокритериальных методов в значительной степени облегчает их использование.

Отметим еще одну функцию визуализации, важную в практике применения многокритериальных методов. Речь идет об интеллектуализации СППР, под которой понимается методика создания таких систем, которые могут использоваться лицом, принимающим решение, самостоятельно, без участия посредников. Дело в том, что сложность методов может потребовать в процессе их применения участия специалистов (зачастую авторов этих методов). Такое требование может оказаться неприемлемым для ЛПР в силу конфиденциальности данных, самого процесса принятия решений или его результатов. Использование визуализации в многокритериальных методах способствует их интеллектуализации, приводящей к исключению посторонних лиц из процесса принятия решений. Интеллектуальные компьютерные СППР должны обеспечивать простоту взаимодействия пользователя с ними и брать на себя функции посредников, в чем, бесспорно, может помочь компьютерная визуализация.

Совершенствование многокритериальных методов с середины 90-х годов XX века стимулируется развитием компьютерных сетей, потребовавших разработать такие методы поддержки принятия решений, которые могут быть использованы в сети Интернет, а также в других глобальных и локальных сетях.

## **Часть I. Принятие решений при нескольких критериях**

### **Лекция 2. Принятие решений при нескольких критериях. Роль человека в многокритериальных задачах принятия решений.**

Необходимо отметить, что в русском языке слову “решение” может придаваться различный смысл. С одной стороны, под решением может пониматься одна из возможных альтернатив (“допустимое решение”). С другой стороны, решением может иметься в виду процесс выбора (“принятие решения”). Далее, под решением часто понимают результат процесс выбора (“принятое решение”). Наконец, в математике под решением обычно имеют в виду решение некоторой математической задачи, скажем, “решение уравнения” или “решение задачи оптимизации”. В теории и методах поддержки принятия решений этот термин используется во всех упомянутых смыслах, поэтому ориентироваться приходится исходя из контекста.

#### **Принятие решений и математическое моделирование**

Прежде всего, рассмотрим вопрос о том, каким образом устанавливаются связи между альтернативами и значениями критериев для оценки этих альтернатив. Заметим, что в некоторых задачах эти связи заданы и представлены данными в каких-либо базах данных. Например, решение задачи выбора автомобиля основывается на параметрах продаваемых автомобилей, собранных в базах данных продавцов автомобилей. В других случаях такие связи не заданы и для их установления приходится использовать методы математического моделирования. Например, физик, описывающий уравнениями состояние газа использует его математическую модель. Менеджер, отвечающий за перевозку товаров с оптовых складов в магазины, также использует модель: он берет данные о наличии товаров на складах, о потребностях магазинов, о стоимости перевозок и составляет систему равенств и неравенств. Решая задачу минимизации затрат, менеджер определяет планы перевозок.

В приведенных примерах люди разрабатывают модель некоторого объекта, стремясь представить в математическом виде копию реального мира. С прагматической точки зрения целью создания математической модели является ее использование в решении задач, которые трудно, дорого или попросту невозможно решать на реальном объекте. В этом случае естественным



требованием к модели является ее адекватность решаемой задаче. С теоретической точки зрения, моделирование — способ изучения реальности. Мы изучаем внешний мир, создавая модели.

Необходимо подчеркнуть отличие модели, которую в приведенном выше примере строит менеджер, от моделей в физике. Экономическая модель описывает процессы, в которых важную роль играют люди: рабочие на заводах, продавцы в магазинах, водители грузовиков. Совершаемые ими действия и их результаты находят отражения в модели. Как мы знаем, в жизни человеческое поведение в значительной степени непредсказуемо и сложно для моделирования. Однако в нашем примере предполагается, что люди лишь выполняют действия, предписанные им производственной системой. Иначе говоря, люди в модели не имеют свободы поведения — такое предположение часто делается при построении моделей организаций и производственных систем.

#### **Классический метод исследования операций**

Математические модели, описывающие связь критериев с возможными решениями, активно используются в исследовании операций, под которым принято понимать применение математических, количественных методов для поиска решений в большинстве областей целенаправленной человеческой деятельности. Основными этапами решения любой задачи в исследовании операций являются:

- 1) построение модели операции;
- 2) выбор критерия оптимальности;
- 3) нахождение оптимального решения.

Для задач исследования операций характерны следующие особенности.

*Используемые модели носят объективный характер.* Построение математических моделей рассматривается в рамках исследования операций как средство отражения объективно существующей реальности. Когда модель, правильно отражающая действительность, построена, а критерий оптимальности сформулирован ЛПР, оптимальное решение может быть получено единственно возможным образом.

*Роль ЛПР сводится к указанию цели операции.* По заказу руководителя группа аналитиков исследует организацию, внешнюю среду и пытается построить адекватную модель. В этой работе роль ЛПР ограничивается формулировкой критерия оптимальности. В описании многочисленных случаев применения методов исследования операций подчеркивается, что группа аналитиков самостоятельно находит удачное решение. Хотя иногда руководитель дает дополнительную информацию, его роль при этом не отлича-

ется от роли любого сотрудника организации. Можно сказать, что руководитель сообщает цели операции и получает готовое решение. Все остальное делают аналитики-специалисты по исследованию операций (*исследователи операций*). Если проблема, требующая решения, ясна и критерий определен, то решение задачи оптимизации сразу показывает, насколько новое решение лучше старого.

Опишем две классические задачи исследования операций. Пусть имеется большая авиакомпания, перевозящая пассажиров по многочисленным маршрутам с использованием самолетов различных типов. Руководство компании должно решить какие самолеты и в каком количестве направить на обслуживание тех или иных маршрутов. Считается, что известны потоки пассажиров между разными городами и общее число имеющихся самолетов различного типа. Требуется распределить самолеты по маршрутам так, чтобы минимизировать расходы на их обслуживание.

Во второй задаче необходимо распределить заданное число работ среди исполнителей так, чтобы каждый исполнитель выполнял одну работу. Стоимость выполнения каждой из работ каждым исполнителем известна. Нужно распределить работы так, чтобы суммарная стоимость их выполнения была минимальной.

Словесному описанию каждой из этих двух задач соответствует строгая математическая постановка (математическая модель), которая в первом случае называется транспортной задачей, а для втором — задачей о назначениях.

### **Появление многокритериальности**

Традиционный подход исследования операций предполагает наличие единственного критерия оценки качества решения [4]. Однако расширение области применения методов исследования операций привело к тому, что аналитики стали сталкиваться с задачами, в которых существенным оказывается наличие нескольких критериев оценки качества решения. Рассмотрим, например, описанную выше транспортную задачу. Добавим к критерию величины расходов на обслуживание самолетов вполне естественные критерии прибыли и комфорта для пассажиров. Если есть три критерия, то необходимо согласовать их. Какое соотношение между оценками по критериям является наилучшим? Ответ на этот вопрос не определен условиями задачи. Нужна дополнительная информация, которая может быть получена только от руководства авиакомпании.

Обратимся теперь к задаче о назначениях. Возьмем часто встречающийся случай, когда работы неодинаковы по своей важности, а исполнители

различаются по качеству выполняемой работы. Тогда к приведенному выше критерию стоимости можно добавить критерий качественного выполнения наиболее важных работ. Если есть два критерия, по которым следует оценивать качество распределения исполнителей по работам, то их значения необходимо как-то согласовать. Какое отклонение от минимума стоимости оправдывает более качественное выполнение важных работ? Ответ на этот вопрос не вытекает из сформированной модели. Этот ответ вообще не может быть получен объективным образом. Информация о компромиссе может быть дана ЛПР на основе понимания ситуации.

Эти и многие им подобные задачи имеют следующую характерную особенность: модель, описывающая множество допустимых решений, объективна, но качество решения оценивается по многим критериям. Для выбора наилучшего варианта решения необходим компромисс между оценками по различным критериям. В условиях задачи отсутствует информация, позволяющая найти такой компромисс. Следовательно, он не может быть определен на основе объективных расчетов.

Анализ многих реальных практических проблем, с которыми сталкивались специалисты по исследованию операций, естественным образом привел к появлению класса многокритериальных задач.

### **Метод “стоимость-результат”**

Одним из первых подходов к принятию решений, используемый при двух критериях, является метод “стоимость-результат (выгода)”, по-английски “cost-benefit analysis”, разработанный в США в середине прошлого века для решения задач военного планирования. В дальнейшем метод нашел широкое применение в задачах выбора проектов и в других областях человеческой деятельности. Метод “стоимость-результат” состоит из трех основных этапов:

- 1) построения модели результативности (выгоды);
- 2) построения модели стоимости;
- 3) выбора решения на основе синтеза оценок стоимости и результата.

Пример типичной модели, используемой в методе “стоимость-результат” для анализа проектов улучшения качества воды в реке путем очистки стоков предприятий дан на рис. 2.1.

Модель состоит из двух частей — модели стоимости и модели результативности. Эти модели используются для выбора технологии очистки стоков. Модель стоимости представляет зависимость стоимости проекта от выбранной технологии, а модель результативности — зависимость качества воды в реке от выбранной технологии. Обе модели в данном случае мож-

но рассматривать как объективные: они строятся на базе фактических данных. Решение, однако, выбирается на основе субъективного суждения ЛПР, который определяет разумные соотношения значений стоимости и получаемого результата (качества воды).

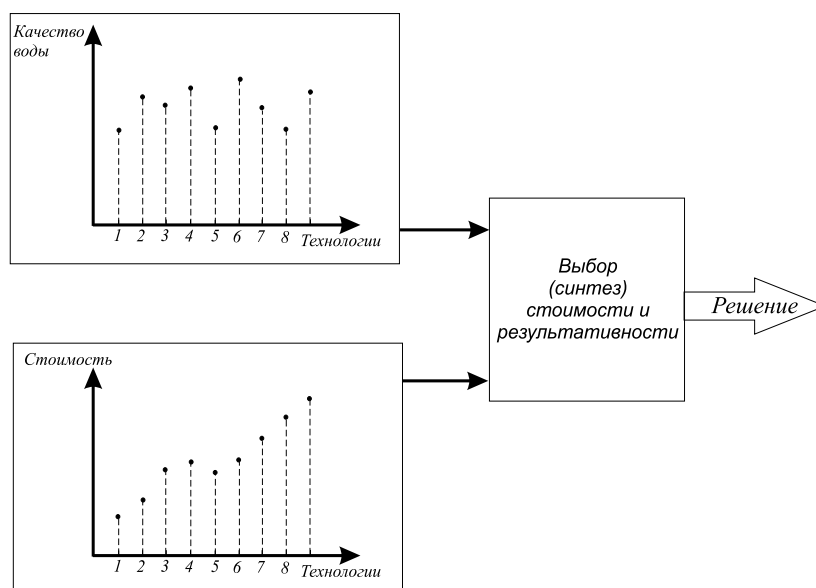


Рис. 2.1.

Основное отличие приведенной модели от типичных моделей исследования операций заключается в появлении субъективных суждений ЛПР при синтезе стоимости и получаемого результата. Иногда на этом этапе рекомендуется использовать один из двух основных подходов:

- 1) фиксированного результата при минимально возможной стоимости (при таком подходе выбирается “самая дешевая” альтернатива, приводящая к заданному результату);
- 2) фиксированной стоимости и максимально возможной результативности (случай бюджетных ограничений).

Смысл этих подходов ясен — перевод одного из критериев оценки альтернатив в ограничение. При этом, однако, сразу же возникает вопрос: как, на каком уровне установить ограничение на один из критериев. Объективный и единственный возможный ответ на этот вопрос в общем случае не вытекает из условий задачи. Ни требуемый результат, ни бюджетные ограни-

чения не устанавливаются обычно достаточно жестко. Очевидно, что при нескольких критериях этот же вопрос становится существенно сложнее. Когда аналитик сам переводит все критерии, кроме одного, в ограничения, он совершает действие, которое с точки зрения руководителя, ответственного за решение проблемы, ничем не оправдано.

В ряде случаев используют отношение двух указанных выше критериев. Однако не следует механически использовать отношение стоимости к результативности, поскольку оно может быть одним и тем же при разных абсолютных значениях числителя и знаменателя.

Разумный подход к синтезу стоимости и результативности приводит к построению так называемой эффективной (неулучшаемой) границы для этих критериев, которая представляет собой такие возможные точки в координатах стоимости и результативности, для которых отсутствуют достижимые возможные точки, лучшие их по одному критерию и не худшие по другому (точки A, B, C, D, E на рис. 2.2). Сравним две точки на эффективной границе. Вариант A менее дорогой, чем вариант B, но и дает худший результат. Вариант C более эффективный, чем вариант B, но и более дорогой. Сравнивая варианты, находящиеся на эффективной границе, ЛПР останавливается на одном из них и делает свой окончательный выбор.

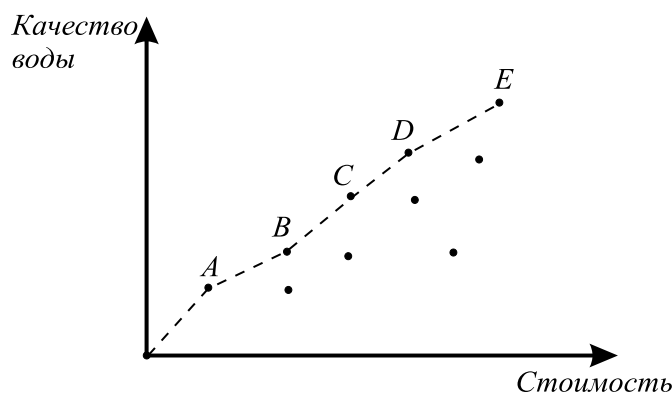


Рис. 2.2.

### Слабоструктуризованные проблемы

Подходы исследования операций и многокритериального принятия решений существенно различаются, так как они направлены на решение принципиально разных проблем принятия решений, существующих в окружаю-

щем нас реальном мире. Эти принципиальные различия стремились подчеркнуть авторы различных классификаций проблем принятия решений. Так, в известной классификации, предложенной в основополагающей статье лауреата

Нобелевской премии Г. Саймона и его коллеги А. Ньюэлла<sup>1)</sup>, выделяются так называемые хорошо и слабоструктуризованные проблемы.

*Хорошо структуризованные* (количественно сформулированные) проблемы — это те проблемы, в которых существенные зависимости выяснены настолько хорошо, что могут быть выражены в числах или символах, получающих в конце концов численные оценки. *Слабоструктуризованные* (смешанные) проблемы — это те проблемы, которые также содержат качественные элементы, причем качественные, малоизвестные и неопределенные стороны проблем имеют тенденцию доминировать.

Важно подчеркнуть, что в типичных задачах исследования операций объективно существует реальность, допускающая строгое количественное описание и определяющая существование единственного критерия качества. Изучение реальной ситуации может требовать большого труда и времени. Необходимая информация может быть дорогостоящей (например, требуются специальные исследования, чтобы определить значения ряда параметров). Однако при наличии средств и хорошей квалификации аналитиков имеются все возможности найти адекватное количественное описание проблемы, количественные связи между переменными и критерий качества. Таким образом, можно сказать, что типичные проблемы исследования операций являются хорошо структуризованными.

Существуют, однако, проблемы, в которых известен только перечень основных параметров, но количественные связи между ними установить нельзя (нет необходимой информации). Иногда ясно лишь, что изменение параметра в определенных пределах сказывается на решении. В таких случаях структура, понимаемая как совокупность связей между параметрами, не определена, и проблема называется неструктуризованной. Типичными неструктуризованными проблемами являются проблема выбора профессии, проблема выбора места работы, политические решения и многие другие проблемы выбора.

В многокритериальных задачах часть информации, необходимой для полного и однозначного определения требований к решению, принципиально отсутствует. Исследователь часто может определить основные переменные, установить связи между ними, т.е. построить модель, адекватно отражаю-

---

<sup>1)</sup>H.Simon, A.Newell Heuristic problem solving: the next advance in operations research // Operations Research, 1958, v.6.

щую ситуацию. Но предпочтительные сочетания критериев не могут быть определены на основе объективной информации, имеющейся в распоряжении исследователя. Такие проблемы являются слабоструктуризованными, так как здесь недостаток объективной информации принципиально неустраним на момент принятия решения. Появление многокритериальности привело к существенному изменению характера решаемой задачи и роли ЛПР. Основой для выработки решения стали субъективные предпочтения ЛПР. Они во многом определяют результат решения. Из наблюдателя и заказчика ЛПР превратился в главного участника процесса принятия решения. Решение теперь является субъективным, хотя в процессе решения используются объективные модели.

### **Задачи многокритериальной оптимизации**

Отметим, что, несмотря на сказанное, многокритериальные задачи выбора решения относят к задачам исследования операций в том случае, когда критерии независимы и задано направление улучшения значений критериев. Такие задачи принято называть задачами многокритериальной оптимизации. При этом в качестве решения такой задачи берется не субъективное решение ЛПР, а вся эффективная граница (и соответствующие решения). В этом случае субъективность исчезает, и мы опять возвращаемся к схеме исследования операций. Поэтому многокритериальную оптимизацию также относят к исследованию операций.

Теория многокритериальной оптимизации — это математическая дисциплина, базирующаяся на аксиомах выбора решения и изучающая следствия этих аксиом. Она является развитием теории обычной, однокритериальной, оптимизации. Теория многокритериальной оптимизации служит основой при разработке методов поддержки принятия решений в том случае, когда выбор решения осуществляется по нескольким критериям, однако не заменяет сами методы выбора решений. Это относится и к методам многокритериальной оптимизации, и к методам выбора из малого числа альтернатив.

В отличие от теории, именно в практике применения многокритериальных методов велика роль ЛПР. В реальной жизни в число лиц, участвующих в процессе принятия решений, входят люди, имеющие различные функции и возможности влиять на решение. Среди таких лиц обычно имеются люди, несущие ответственность за качество выбранного решения, но не имеющие времени, чтобы достаточно детально разобраться с ситуацией. Участие тех или иных лиц зависит от конкретной области, в которой используются решения. Например, при решении экологических проблем к решению пробле-

мы, в принципе, должны привлекаться все, кого затрагивает это решение. Список таких лиц составить очень трудно, а зачастую и невозможно. Таким образом, число лиц, участвующих в принятии решения, может быть неопределенным. В подобных случаях понятие ЛПР является полезной абстракцией, которая используется при построении и анализе методов поддержки принятия решений.

### **Принятие решений человеком**

Важным аспектом проблемы участия человека в выборе наиболее предпочтительного решения является то, что для правильного конструирования методов поддержки принятия решений необходимо иметь хотя бы приблизительное представление о том, как человек принимает решения. Современное понимание человеческого поведения далеко продвинулось с начала XX века, когда наибольшее распространение имела простая психологическая концепция человека, основанная на схеме “стимул-реакция”. Согласно этой концепции, человек непосредственно реагирует на различные внешние воздействия (стимулы). Такое представление, однако, очень быстро показало свою ограниченность, поэтому были предложены более сложные теории, базирующиеся, в частности, на утверждении о том, что человек принимает решения на основе имеющейся у него целостной картины мира.

К сожалению, эти представления пока являются недостаточно конструктивными для их непосредственного применения в методах поддержки принятия решений, поэтому при разработке этих методов часто (но далеко не всегда!) используется более удобная концепция функции полезности (ценности), в рамках которой человек решает задачу максимизации некоторой функции, и нужно просто помочь ему найти решение этой задачи. При реализации такой концепции достаточно построить математическую модель ситуации и используемую функцию полезности, а также сформулировать ограничения на возможные решения. Многие психологи критикуют этот подход как упрощенный, утверждая, что человек не всегда способен осознать и, тем более, достаточно логично выразить свои предпочтения. Экспериментальные исследования подтверждают эту точку зрения. В связи с этим специалисты по принятию решений в последнее время все чаще обращаются к более сложным моделям человека, разработанным психологами. В частности, используется понятие концептуальной, или ментальной, модели окружающего мира, используемой человеком при прогнозировании последствий своих действий.

Один из подходов к построению ментальной модели основывается на



представлении о восприятии внешней среды человеком<sup>2)</sup>. Принято считать, что восприятие состоит из следующих этапов:

- восприятие внешней среды в ощущениях,
- преобразование ощущений в образы,
- создание логических представлений о мире.

С таким представлением о восприятии связана модель сознания человека, в которой выделяются уровень логического мышления, уровень образного мышления и подсознательный уровень (рис. 2.3). Экспериментально подтверждено, что все три уровня участвуют в принятии решений, причем влияние их может быть несогласованным. В таком случае реакция человека на вопросы может отклоняться от ожидаемых логичных ответов.

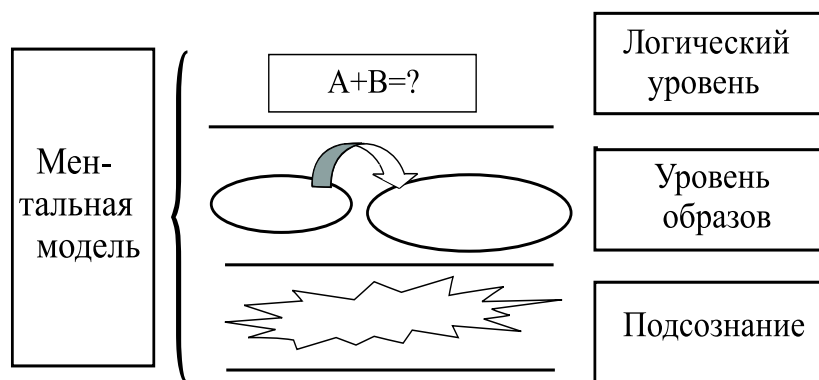


Рис. 2.3.

Приведем простой пример ответов на серию вопросов о том, какая из нескольких альтернатив лучше. Оказывается, что даже в случае двух критериев достаточно легко добиться нелогичных и противоречивых ответов. Пусть, например, имеются два критерия: один более существенный с точки зрения некоторого человека, а другой менее. Человеку сначала предлагается сравнить вариант А и вариант В, причем вариант А отличается от варианта В тем, что в нем существенный критерий незначительно хуже по отношению к А, а несущественный значительно лучше. В такой ситуации

<sup>2)</sup> Ломов Б.Ф. Методологические и теоретические проблемы психологии. Москва: Наука, 1984.

человек выбирает В. Далее предлагается сравнивать аналогичным образом полученные варианты С, D, ..., Е (ряд должен быть достаточно длинным). Затем человеку опять предлагают вариант А (о котором к этому времени он уже забыл), для которого существенный критерий после суммирования всех уступок уже значительно отличается от значения существенного критерия в варианте Е. Обычно человек выбирает вариант А. Таким образом, он демонстрирует непоследовательность своих предпочтений.

Описанный выше пример является одним из самых простых примеров, показывающих, что человек может быть не в состоянии строить логичные ответы даже в относительно простых ситуациях. Возникает вопрос о том, где пределы возможностей человека в переработке информации в более сложных ситуациях. Психологические исследования показали, что объем информации, который человек способен одновременно держать в так называемой быстрой памяти, составляет около 7 единиц. Так, если называть отдельные буквы, то человек запоминает в среднем 7 букв, если слова — 7 слов, если фразы — 7 фраз и т.д. Поэтому при принятии решений человек может оперировать лишь с небольшим числом альтернатив, и то только в том случае, если он воспринимает их как целое (например, если альтернатива — это автомобиль, а не столбец с техническими параметрами). Особенности человеческого сознания должны учитываться при конструировании систем поддержки принятия решений.

Необходимо также отметить склонность многих людей к упрощению задачи: вместо нескольких критериев они могут рассмотреть один или два, являющихся, согласно их точке зрения, наиболее важными, забыв об остальных критериях. Часто встречающимся способом поведения является произвольный выбор одного из возможных решений и дальнейшее стремление доказать, что выбранное решение является наилучшим. Многокритериальные методы должны помочь человеку избежать поверхностных решений и дать возможность всесторонне изучить всю совокупность возможных решений.

### Лекция 3. Математическая формулировка задачи принятия решений при нескольких критериях. Оптимальность по Парето и Слейтеру

Задача принятия решений при нескольких критериях выбора решения (или, по-другому, критериях оценки качества решения) является развитием задачи принятия решений при единственном критерии выбора, поэтому естественно ее математическую формулировку считать развитием формулировки задачи принятия решений при единственном критерии. По этой причине начнем формулировку задач принятия решений со случая единственного критерия.

#### 3.1. Математическая формулировка задачи принятия решений при единственном критерии

Рассмотрим некоторую удобную с математической точки зрения первичную совокупность, содержащую в себе те решения, которые можно использовать при поиске наиболее предпочтительного. Такую первичную совокупность принято называть *пространством решений*. Отметим, что некоторые из элементов пространства решений (задаваемого неоднозначно) могут являться не реализуемыми по тем или иным причинам. Например, наборы товаров, покупаемых потребителем, удобно считать векторами многомерного линейного пространства. Очевидно, что потребитель может приобрести далеко не всякий набор товаров — какие-то наборы не удовлетворяют его бюджетным ограничениям, а отрицательные покупки вообще не имеют смысла в случае потребителя. Кроме того, некоторые товары могут быть недоступными определенным потребителям.

Обозначим пространство решений через  $W$ . Те решения, которые могут быть использованы при поиске наиболее предпочтительного решения, образуют подмножество  $X$  пространства решений  $W$ . Такое множество  $X \subseteq W$  называется *множеством допустимых решений*. Множество  $X$  задается либо перечислением допустимых решений (это возможно только в случае их конечного числа), либо некоторым набором ограничений, позволяющим выделить бесконечную совокупность допустимых решений.

Пусть задана числовая функция  $f$ , значения которой описывают уровень предпочтительности решений. В этом случае естественно считать, что целью является увеличение значения функции  $f$ , которую принято называть

*критерием оптимизации.* Подчеркнем, что функция  $f$  представляет собой единственный критерий выбора решения, а выбор решения трактуется как поиск некоторого элемента из  $X$ , доставляющего максимум  $f$ . Таким образом, мы приходим к задаче однокритериальной (скалярной) оптимизации

$$f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X. \quad (3.1)$$

Описанная модель является самой простой с точки зрения формализации задачи выбора решения (о методах поиска решения такой задачи см. в [3], [14]). В общем случае и значение критерия, и множество допустимых решений могут зависеть от случайных факторов либо действий каких-либо других лиц, либо от изменения общей обстановки, в которой производится выбор решения [4]. В рамках данного курса мы не будем рассматривать эти вопросы и будем полагать, что множество  $X$  и критерий  $f$  заданы.

**Определение 3.1.** *Элемент  $x^* \in X$  называется решением скалярной задачи оптимизации (3.1), если  $f(x^*) \geq f(x)$  для всех  $x \in X$ .*

Отметим, что при некоторых простых предположениях в задаче скалярной оптимизации такое решение существует (например, достаточно потребовать непрерывность функции  $f$  и компактность  $X$ ). Если решение не единственно, т.е. несколько решений совпадают по значению критерия  $f$ , то можно выбрать любое из них. Численные методы обычно находят какое-то одно решение задачи оптимизации, которое и предлагается использовать.

Итак, если выбор решения лицом, принимающим решение (в исследовании операций его также называют оперирующей стороной), можно описать как стремление к увеличению (или уменьшению) некоторой заданной функции (единственного критерия выбора решения), то проблема выбора наилучшего способа действия сводится к задаче скалярной оптимизации, т.е. к математической задаче поиска допустимого решения, доставляющего критерию максимальное (минимальное) значение. Если же критериев оценки решения несколько, то приходим к задаче принятия решений при нескольких критериях.

### 3.2. Математическая формулировка задачи принятия решений при нескольких критериях

Пусть набор из  $m$  критериев выбора решения представляет собой совокупность функций  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , заданных на пространстве  $W$  (или, может быть, его некоторой части, включающей, однако, множество допустимых решений  $X$ ).

Отдельный критерий часто называют *частным критерием выбора*, а множества его возможных значений — *шкалой критерия*. Прежде всего отметим, что, в отличие от скалярного случая, критерии не обязательно принимают числовые значения. Например, в рассмотренной в лекции 1 задаче покупки автомобиля, наряду с количественными критериями типа цены, мощности, потребления бензина на 100 км и т.д., рассматриваются и качественные шкалы, например, цвета автомобиля (упорядоченные по предпочтительности), уровень комфорта и просто красота (красивый, приемлемый и некрасивый автомобили).

В задачах принятия решений при нескольких критериях имеет смысл, наряду с *пространством решений*  $W$ , рассматривать *критериальное пространство*  $W'$ , включающее в себя прямое произведение шкал критериев.

Таким образом, совокупность критериальных функций задает некоторое отображение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ , действующее из  $W$  в  $W'$ .

Отметим, что и в задаче скалярной оптимизации также можно рассмотреть критериальное пространство, но поскольку функция  $f$  является числовой, это пространство является числовой прямой  $\mathbb{R}^1$ , на которой понятие предпочтения сводится к простому понятию “больше”. В связи с особой простотой этого пространства специального внимания ему не уделяют.

В задачах выбора решения при нескольких критериях дело обстоит значительно сложнее. Однако и относительно нескольких (включая и нечисловые) критериев можно сделать предположения, близкие по смыслу к скалярному случаю. Наиболее важное из них состоит в том, что задача выбора является *критериальной*.

### **Критериальные задачи**

**Определение 3.2.** *Совокупность критериев называется полной, если она описывает все существенные интересы и предпочтения ЛПР. В этом случае задача принятия решения при нескольких критериях называется критериальной.*

В случае критериальной задачи качество решения полностью описывается соответствующими ему значениями критериев. Предположение о том, что задача выбора является критериальной, требуется для того, чтобы исследование в терминах критериального пространства имело смысл, а выбор точки в критериальном пространстве можно было бы связать с соответствующим решением. Благодаря этому, в критериальной задаче предпочтения ЛПР, выраженные в терминах элементов критериального простран-

ства, можно представить отношениями предпочтения между их прообразами в пространстве решений.

Надо отдавать себе отчет, что понятие критериальной задачи выбора решения является абстракцией, поскольку в реальности конкретное решение содержит значительно больше информации, чем соответствующая точка в пространстве критериев, так что выбор критериальной точки может быть только началом процесса поиска наиболее подходящего решения среди тех решений, которые связаны с этой критериальной точкой. Все же эта абстракция очень удобна и полезна, поскольку достаточно рассмотреть задачу выбора наиболее предпочтительных точек  $y = \varphi(x)$  критериального пространства  $W'$ , “забыв” временно о самих решениях  $x \in W$ . Обычно такая задача оказывается значительно проще, поскольку решение может характеризоваться тысячами параметров, а число критериев, с которыми эффективно может работать человек, не должно, как уже говорилось, слишком превышать семи.

Конечно, такой выбор может осуществляться не среди всевозможных точек  $y$  пространства  $W'$ , а лишь среди тех, которые могут быть реализованы с помощью допустимых решений  $x$ , т.е.  $x \in X$ . Поэтому в критериальных задачах выбора решений важнейшую роль играет множество тех критериальных точек, которые могут быть получены с использованием решений  $x$  из множества  $X$ .

**Определение 3.3.** Множество  $Y = \varphi(X) = \{y \mid y = \varphi(x), x \in X\}$  называют множеством достижимых значений критериев.

В критериальных задачах выбор на множестве  $Y$  можно использовать вместо выбора на множестве  $X$ .

### **Независимость критериев по предпочтению**

Важным условием, облегчающим анализ критериальных задач выбора, является независимость критериев по предпочтению. Смысл его состоит в том, что желательные (для ЛПР) изменения значений каждого из частных критериев (при неизменных значениях остальных критериев) не должны зависеть от конкретных значений остальных критериев. В реальности это не всегда так: после определения набора критериев может оказаться, что желательное изменение значения некоторого частного критерия зависит от значений остальных критериев. В лекции 1 мы уже привели пример с выбором автомобиля. Рассмотрим еще один пример взаимной зависимости критериев по предпочтению.

*Пример.* Визуальное восприятие жилой комнаты зависит от соотношения ее геометрических параметров — ширины, длины и высоты. При каж-

дом сочетании значений длины и ширины идеальная высота потолка разная. Высоту, меньшую идеальной, желательно увеличивать, большую — уменьшать. Таким образом, что направления изменения высоты зависят от длины и ширины комнаты.

Перейдем к строгому определению независимости критериев по предпочтению. Пусть в критериальном пространстве даны четыре набора значений критериев  $y$  (см. иллюстрацию для  $m = 2$  на рис. 3.1):

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \begin{cases} y_i = s \\ y_j = y'_j, \end{cases} & j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}, \\ y^{(2)} &= \begin{cases} y_i = s \\ y_j = y''_j, \end{cases} & j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}, \\ y^{(3)} &= \begin{cases} y_i = t \\ y_j = y'_j, \end{cases} & j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}, \\ y^{(4)} &= \begin{cases} y_i = t \\ y_j = y''_j, \end{cases} & j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Напомним, что значения критериев не обязательно должны быть числовыми, они могут быть и качественными; например, значение  $s$  может означать комфортный, а значение  $t$  — некомфортный.

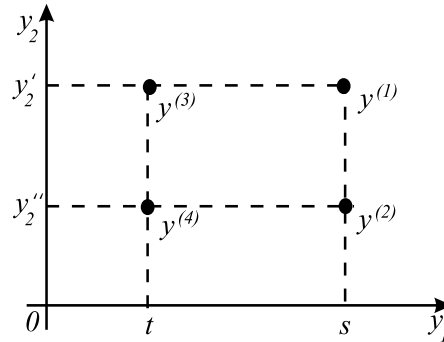


Рис. 3.1.

**Определение 3.4.** Критерий с номером  $i$  называют независимым по предпочтению от остальных критериев, если для всех значений  $s$  и  $t$  критерия  $i$  имеет место следующее свойство: из того, что  $y^{(1)}$  не

*хуже  $y^{(3)}$  для некоторого набора  $y'_j, j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ , следует, что  $y^{(2)}$  не хуже  $y^{(4)}$  для любого другого набора  $y''_j, j = \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ .*

В иллюстрации, приведенной на рис. 3.1, из совпадения  $y^{(1)}$  и  $y^{(3)}$  по значению частного критерия  $y_2$  следует, что при их сравнении учитывается только значение  $y_1$ . Так как  $s$  не хуже  $t$ , то  $y^{(1)}$  не хуже  $y^{(3)}$ . При этом, в случае независимости по предпочтению, для любого другого значения  $y_2$ , например,  $y_2 = y''_2$ , точка  $y^{(2)}$  также будет не хуже  $y^{(4)}$ .

#### **Сравнение значений частных критериев**

Наконец, в случае критериев, независимых по предпочтению, потребуем, чтобы для любой пары значений из шкалы каждого из частных критериев (скажем,  $y'_j$  и  $y''_j$ ) лицо, принимающее решение, было в состоянии сказать, что

- 1) либо одно значение лучше другого (утверждение о том, что  $y'_j$  лучше  $y''_j$ , обозначается как  $y'_j \succ y''_j$ );
- 2) либо эти значения равноценны (утверждение о том, что  $y'_j$  равноценно  $y''_j$ , обозначается как  $y'_j \approx y''_j$ ).

Например, покупатель может сообщить, что для него красный автомобиль лучше черного, а черный равноценен белому. При этом должно выполняться требование непротиворечивости утверждений о предпочтениях:

- 1) если  $y'_j \succ y''_j$  и  $y''_j \succ y'''_j$ , то  $y'_j \succ y'''_j$ ;
- 2) если  $y'_j \approx y''_j$  и  $y''_j \approx y'''_j$ , то  $y'_j \approx y'''_j$ .

Подчеркнем, что описанное предположение, называемое транзитивностью, является важным требованием к ЛПР.

### **3.3. Понятия доминирования по Парето и Слейтеру. Решение задачи принятия решений при нескольких критериях**

Рассмотрим критериальную задачу с независимыми по предпочтению критериями, в которой лицо, принимающее решение, смогло упорядочить по предпочтительности значения на шкалах всех частных критериев. Возникает вопрос о том, достаточно ли такой информации для выбора единственной наиболее предпочтительной критериальной точки (как это, например, было в задаче скалярной оптимизации). Ответ на этот вопрос отрицательный по следующей причине. Если в задаче скалярной максимизации решение  $x'$  более предпочтительно, чем решение  $x''$  в том и только том случае, когда  $f(x') > f(x'')$ , то в многокритериальных задачах ситуация иная — информации о предпочтениях недостаточно для того, чтобы понять, как ухудшение



значения одного критерия может быть компенсировано улучшением значения другого. Например, в задаче с выбором автомобиля после опроса покупателя о предпочтениях по всем шкалам по отдельности мы все равно не знаем, на сколько цена черного автомобиля должна быть ниже, чем красного, чтобы оба этих автомобиля были равноценны для покупателя. Отсутствие подобной информации — характерная черта многокритериальных задач принятия решений. Выяснение такой информации — весьма трудоемкий процесс, что будет показано в части III. Поэтому в многокритериальных задачах используют некоторые следующие из уже имеющейся информации условия того, что критериальная точка  $y'$  заведомо более предпочтительна для ЛПР, чем критериальная точка  $y''$ .

Далее рассматриваются две математические формализации понятия предпочтительности. Заметим, что для каждого частного критерия можно установить соотношения “лучше” или “равноценны” между любой парой его значений  $y'_j$  и  $y''_j$ , поэтому в дальнейшем будем использовать также соотношение “не хуже”, обозначаемое  $y'_j \succeq y''_j$ , которое означает, что либо  $y'_j \succ y''_j$ , либо  $y'_j \approx y''_j$ .

**Определение 3.5.** Будем говорить, что точка  $y' \in W'$  доминирует точку  $y'' \in W'$  по Парето и обозначать  $y' \succ_P y''$ , если для всех критериев  $j = \{1, \dots, t\}$  имеем  $y'_j \succeq y''_j$  и хотя бы для одного частного критерия  $i$  имеем  $y'_i \succ y''_i$ .

**Определение 3.6.** Будем говорить, что точка  $y' \in W'$  доминирует точку  $y'' \in W'$  по Слейтеру и обозначать  $y' \succ_S y''$ , если для всех критериев  $j = \{1, \dots, t\}$  выполнено  $y'_j \succ y''_j$ .

Отметим, что доминирование по Слейтеру в последнее время все чаще (особенно в англоязычных публикациях) довольно неудачно называют *слабым доминированием по Парето*.

**Определение 3.7.** Будем говорить, что точка  $y' \in W'$  равноценна точке  $y'' \in W'$  и обозначать  $y' \approx y''$ , если  $y'_j \approx y''_j$  для всех критериев  $j = \{1, \dots, t\}$ .

Доминирование по Парето и по Слейтеру позволяет определить понятие оптимального решения задачи выбора решений при нескольких критериях.

**Определение 3.8.** Критериальная точка  $y^0 \in Y$  называется оптимальной по Парето, если  $\{y \in Y \mid y \succ_P y^0\} = \emptyset$ .

Такая точка называется также недоминируемой (или неулучшаемой) по Парето (на  $Y$ ), а также парето-эффективной.

**Определение 3.9.** Критериальная точка  $y^0 \in Y$  называется оптимальной по Слейтеру, если  $\{y \in Y \mid y \succ_S y^0\} = \emptyset$ .

Такая точка называется также недоминируемой по Слейтеру (на  $Y$ ) или слабо эффективной.

Обратим внимание на то, что множество оптимальных элементов (и по Парето, и по Слейтеру) обычно состоит более чем из одной точки множества  $Y$ .

**Определение 3.10.** Множество критериальных точек, оптимальных по Парето на  $Y$ , называют множеством Парето в пространстве критериев, а также парето-оптимальным, парето-эффективным или недоминируемым множеством в пространстве критериев и обозначают  $P(Y)$ .

**Определение 3.11.** Множество критериальных точек, оптимальных по Слейтеру на  $Y$ , называют множеством Слейтера или слабо эффективным множеством<sup>1)</sup> в пространстве критериев и обозначают  $S(Y)$ .

Поскольку требования к точкам, оптимальным по Парето, жестче, чем к точкам, оптимальным по Слейтеру, то  $P(Y) \subseteq S(Y)$ .

Доминирование по Парето и по Слейтеру, а также отношение равноценности, определенные для пар точек критериального пространства, порождают соответствующие отношения и в пространстве решений:

$$x' \succ_P x'' \Leftrightarrow \varphi(x') \succ_P \varphi(x''),$$

$$x' \succ_S x'' \Leftrightarrow \varphi(x') \succ_S \varphi(x'').$$

$$x' \approx x'' \Leftrightarrow \varphi(x') \approx \varphi(x'').$$

Множества недоминируемых элементов множества  $X$  принято обозначать через  $P(X)$  и  $S(X)$ . Множество  $P(X)$  называют множеством *оптимальных по Парето, парето-эффективных* или *неулучшаемых* решений,  $S(X)$  — множеством *решений, оптимальных по Слейтеру*, а также множеством *слабо эффективных решений*<sup>2)</sup>.

**Определение 3.12.** Решением задачи выбора при нескольких критериях называют множество  $P(X)$ .

<sup>1)</sup> Иногда под слабо эффективным множеством понимают только  $S(Y) \setminus P(Y)$ .

<sup>2)</sup> Иногда под множеством слабо эффективных решений понимают только  $S(X) \setminus P(X)$ .

## Лекция 4. Бинарные отношения как язык описания предпочтений

Предпочтение человека в самом его простом, элементарном виде — это выражение того факта, что человек выбрал бы один из двух объектов, который, таким образом, и является для него более предпочтительным. Таким образом, предпочтения удобно выразить с помощью математического понятия, характеризующего соотношение между парами объектов. Таким является понятие *бинарного отношения*.

Бинарные отношения применяются для описания связей между парами элементов произвольного множества, порожденного объектами произвольной природы. Так, на множестве действительных чисел определены известные из школьного курса алгебры бинарные отношения “больше”, “равно”, “меньше”, “не больше”. На множестве событий с помощью бинарных отношений описывают отношения их предшествования (“раньше”, “позже”, “одновременно”), для совокупности подмножеств некоторого множества можно описать их взаимную принадлежность (“принадлежит”, “включает”) и т.д. В дальнейшем нас будут интересовать только бинарные отношения предпочтения, т.е. отношения типа “лучше”, “не хуже” и “равноценно (безразлично)”, заданные на пространстве решений или в критериальном пространстве.

В предыдущей лекции были рассмотрены понятия, на основе которых можно сформулировать, например, такие бинарные отношения предпочтения:

1а) бинарное отношение предпочтения “лучше” между парами значений числовой функции  $f$ , определяемое для  $y' = f(x')$  и  $y'' = f(x'')$ ,  $x', x'' \in X$ , как

$$y' \succ y'' \Leftrightarrow y' > y'';$$

1б) бинарное отношение предпочтения “безразлично”, задаваемое числовой функцией  $f$  и определяемое для  $y' = f(x')$  и  $y'' = f(x'')$ ,  $x', x'' \in X$ , как

$$y' \approx y'' \Leftrightarrow y' = y'';$$

2а) бинарное отношение предпочтения “лучше”, задаваемое числовой функцией  $f$  и определенное для  $x', x'' \in X$  как

$$x' \succ x'' \Leftrightarrow f(x') > f(x'');$$

2б) бинарное отношение предпочтения “безразлично”, задаваемое числовой функцией  $f$  и определенное для  $x', x'' \in X$  как

$$x' \approx x'' \Leftrightarrow f(x') = f(x'');$$

3а) бинарное отношение доминирования по Парето ( $\succ_P$ ) для пар точек в критериальном пространстве;

3б) бинарное отношение доминирования по Слейтеру ( $\succ_S$ ) для пар точек в критериальном пространстве;

3в) бинарное отношение равноценности ( $\approx$ ) между парами точек в критериальном пространстве.

4а) бинарное отношение доминирования по Парето ( $\succ_P$ ), определенное для пар точек в пространстве решений;

4б) бинарное отношение доминирования по Слейтеру ( $\succ_S$ ), определенное для пар точек в пространстве решений;

4в) бинарное отношение равноценности ( $\approx$ ), определенное для пар точек в пространстве решений.

В данной лекции эти примеры бинарных отношений сначала используются для иллюстрации общих понятий теории бинарных отношений. Затем язык бинарных отношений применяется для изучения свойств отношений предпочтения.

#### 4.1. Основные понятия теории бинарных отношений

Пусть  $G$  — непустое множество произвольной природы. В рассматриваемых нами примерах под множеством  $G$  будем понимать пространство решений  $W$  или критериальное пространство  $W'$ .

Рассмотрим прямое произведение  $G^2 = G \times G = \{(v, w) \mid v, w \in G\}$  и выделим некоторое подмножество  $\mathcal{R}$  множества  $G^2$ .

**Определение 4.1.** *Говорят, что пара  $(v, w)$  находится в бинарном отношении  $\mathcal{R}$ , и обозначают это как  $v\mathcal{R}w$ , если  $(v, w) \in \mathcal{R}$ .*

Часто вместо общего  $v\mathcal{R}w$  используют специфические обозначения, имеющие конкретный смысл, например,  $y' \succ y''$  для бинарного отношения 1а). Обратимся к примерам.

*Примеры.* Пусть для бинарного отношения 1а) множество  $G$  является отрезком  $[0, 1]$ , т.е. числовая функция  $f$  принимает значения от 0 до 1. Тогда подмножеством  $\mathcal{R}$  прямого произведения  $G \times G$  является часть прямоугольника  $[0, 1] \times [0, 1]$ , лежащая ниже диагонали неотрицательного ортанта (см. рис. 4.1 а).

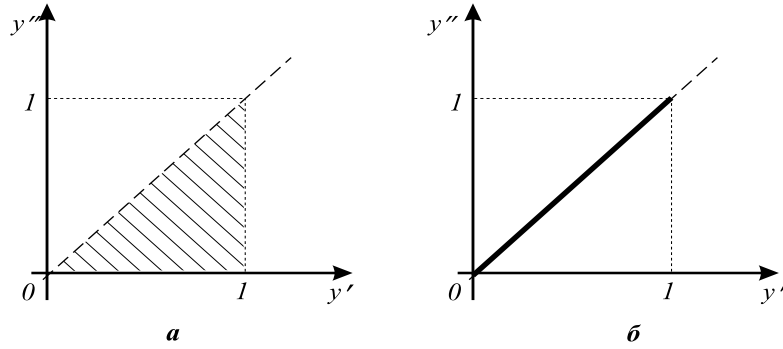


Рис. 4.1.

Для бинарного отношения 1б) в случае  $G = [0, 1]$  подмножеством  $\mathcal{R}$  является часть диагонали неотрицательного ортанта, пересекающаяся с прямоугольником  $[0, 1] \times [0, 1]$  (см. рис. 4.1 б).

Для других рассматриваемых примеров бинарного отношения подмножество  $\mathcal{R}$  не имеет такого наглядного геометрического представления. Часто подмножество  $\mathcal{R}$  задают с помощью указания (может быть, в неявном виде) тех элементов  $G$ , которые находятся в бинарном отношении. Например, для бинарного отношения 2а) для заданного решения  $x^0$  подмножество решений  $x$ , находящихся в бинарном отношении  $x \succ x^0$ , задается соотношением  $f(x) > f(x^0)$ .

Иногда в случае малого числа элементов пространства  $G$  бинарное отношение удается представить в виде графа, в котором элементы играют роль вершин графа, а бинарное отношение задается стрелками (направленными ребрами графа). Пример такого задания бинарного отношения будет приведен далее в лекции 18.

Поскольку бинарные отношения задаются множествами, к ним применимы все теоретико-множественные операции, в частности, можно рассматривать их объединение и пересечение. Можно также рассмотреть дополнение к бинарному отношению  $\mathcal{R}$ , которое определяется как  $\overline{\mathcal{R}} = G^2 \setminus \mathcal{R}$ , и операцию *сужения* бинарного отношения на  $G_1 \subset G$ , под которым понимается множество  $\mathcal{R}_{G_1} = \{(v, w) \mid (v, w) \in (\mathcal{R} \cap G_1^2)\}$ .

*Примеры.* Для бинарных отношений 1а) и 1б) их объединением является бинарное отношение между значениями числовой функции, которое имеет смысл “не хуже”:

$$y' \succeq y'' \Leftrightarrow y' \geq y'';$$

Аналогично, объединение бинарных отношений 2а) и 2б) имеет смысл “не

хуже” для пар решений:

$$x' \succeq x'' \Leftrightarrow f(x') \geq f(x'');$$

Можно также рассмотреть объединение доминирования по Парето и равноценности для точек критериального пространства  $W'$ , которое также имеет смысл “не хуже”. Такое бинарное отношение обозначается  $y' \succeq y''$ , оно имеет место для тех точек  $y', y'' \in W'$ , для которых  $y'_j \succeq y''_j$  при всех  $j = \{1, \dots, m\}$ . Аналогичным образом бинарное отношение “не хуже” вводится и для пар решений.

Бинарным отношениям могут быть присущи некоторые свойства, определяемые свойствами тех парных связей, которые моделируются с помощью бинарных отношений.

**Определение 4.2.** *Бинарное отношение  $\mathcal{R}$  на множестве  $G$  называется*

- *рефлексивным, если  $v\mathcal{R}v$  для любого  $v \in G$ ;*
- *иррефлексивным (антирефлексивным), если  $v\overline{\mathcal{R}}v$  для любого  $v \in G$ ;*
- *симметричным, если из того, что  $v\mathcal{R}w$ , следует  $w\mathcal{R}v$ ;*
- *асимметричным, если из того, что  $v\mathcal{R}w$ , следует  $w\overline{\mathcal{R}}v$ ;*
- *антисимметричным, если из того, что  $v\mathcal{R}w$ ,  $w\mathcal{R}v$ , следует  $v = w$ ;*
- *транзитивным, если из того, что  $v\mathcal{R}w$ ,  $w\mathcal{R}z$ , следует  $v\mathcal{R}z$ ;*
- *негатранзитивным, если  $\overline{\mathcal{R}}$  транзитивно;*
- *ацикличным, если из того, что  $v\mathcal{R}z_1$ ,  $z_1\mathcal{R}z_2$ ,  $\dots$ ,  $z_n\mathcal{R}w$ , где  $n$  — натуральное число, следует, что  $v$  не совпадает с  $w$ ;*
- *связным (полным), если для любых  $v, w \in G$  либо  $v\mathcal{R}w$ , либо  $w\mathcal{R}v$ , либо и то, и другое;*
- *слабо связным, если для любых  $v, w \in G$  таких, что  $v$  не совпадает с  $w$ , либо  $v\mathcal{R}w$ , либо  $v\overline{\mathcal{R}}w$ , либо и то, и другое;*

*Примеры.* Можно показать, что:

- бинарное отношение 1а) является иррефлексивным, асимметричным, транзитивным, ациклическим, слабо связным;
- бинарные отношения 1б) и 2б) являются рефлексивными, симметричными, транзитивными;
- объединение бинарных отношений 1а) и 1б), а также объединение бинарных отношений 2а) и 2б) является рефлексивным, транзитивным, связным;
- бинарное отношение 2а) является иррефлексивным, асимметричным, транзитивным, ациклическим;
- бинарные отношения 3а) (доминирование по Парето) и 4а) (доминирование по Парето в пространстве решений) являются иррефлексивными, асимметричными, транзитивными, ациклическими;
- бинарные отношения 3б) (доминирования по Слейтеру) и 4б) (доминирования по Слейтеру в пространстве решений) являются иррефлексивными, асимметричными, транзитивными, ациклическими;
- бинарные отношения 3в) и 4в) являются рефлексивными, симметричными, транзитивными;
- объединение бинарных отношений 3а) и 3в), а также объединение бинарных отношений 4а) и 4в) является рефлексивным, транзитивным;

Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

Следующие утверждения показывают, что свойства бинарных отношений из определения 4.2 не являются независимыми.

**Утверждение 4.1.** *Если бинарное отношение  $\mathcal{R}$  иррефлексивно и транзитивно, то оно асимметрично.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. пусть  $\mathcal{R}$  является иррефлексивным и транзитивным, но оно не асимметрично. По определению 4.2 отрицание асимметричности означает, что найдутся такие  $v, w \in G$ , что  $v\mathcal{R}w$  и  $w\mathcal{R}v$ . Тогда в силу транзитивности получаем, что  $v\mathcal{R}v$ , но это противоречит иррефлексивности.  $\square$

**Утверждение 4.2.** *Если бинарное отношение  $\mathcal{R}$  иррефлексивно и транзитивно, то оно ациклично.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. пусть  $\mathcal{R}$  является иррефлексивным и транзитивным, но оно не ациклично. По определению 4.2, отрицание ацикличности означает, что найдутся такой  $v \in G$  и такая последовательность  $z_1, z_2, \dots, z_n \in G$ , что  $v\mathcal{R}z_1, z_1\mathcal{R}z_2, \dots, z_n\mathcal{R}v$ . В силу транзитивности получаем, что  $v\mathcal{R}v$ , но это противоречит иррефлексивности.  $\square$

Могут быть доказаны и другие утверждения о связи свойств бинарных отношений. Далее мы рассмотрим некоторые классы бинарных отношений, наиболее часто используемые при принятии решений.

#### 4.2. Некоторые классы бинарных отношений и их свойства

Дадим основные определения.

**Определение 4.3.** *Бинарное отношение называется квазипорядком, если оно рефлексивно и транзитивно.*

**Определение 4.4.** *Бинарное отношение называется эквивалентностью, если оно рефлексивно, транзитивно, симметрично.*

**Определение 4.5.** *Бинарное отношение называется строгим порядком<sup>1)</sup>, если оно иррефлексивно и транзитивно.*

Из утверждений 4.1 и 4.2 следует, что отношение строгого порядка также является асимметричным и ациклическим.

Вспоминая свойства бинарных отношений предпочтения, рассматриваемых здесь нами в качестве примеров, мы можем утверждать, что бинарные отношения 1а), 2а), 3а), 3б), 4а) и 4в) являются бинарными отношениями строгого порядка. В то же время, бинарные отношения 1б), 2б), 3в) и 4в) являются бинарными отношениями эквивалентности, а объединения бинарных отношений 1а) и 1б), 2а) и 2б), 3а) и 3в), 4а) и 4в) являются бинарными отношениями квазипорядка. Таким образом, изучение общих свойств классов бинарных отношений дает возможность лучше понять свойства интересующих нас бинарных отношений предпочтения.

Начнем с того, что перечисленные выше бинарные отношения квазипорядка были получены нами в результате объединения двух бинарных отношений, одно из которых относилось к классу строгих порядков, а другое —

---

<sup>1)</sup>Иногда для этого отношения используются и другие названия, например, “частичный строгий порядок”.



к классу эквивалентностей. С другой стороны, легко проверить, что из бинарного отношения квазипорядка можно выделить бинарное отношение эквивалентности, взяв его симметричную часть. Оставшееся множество пар будет определять бинарное отношение строгого порядка.

### Свойства отношения эквивалентности

**Определение 4.6.** Совокупность множеств  $G_\alpha$ , где  $\alpha \in A$  ( $A$  — множество, не обязательно счетное), называется разбиением множества  $G$ , если

- 1)  $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ ,
- 2)  $G_\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in A$ ,
- 3)  $G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2} = \emptyset$  для  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in A$  таких, что  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого приводить не будем.

**Теорема 4.1.** 1. Пусть  $\mathcal{I}$  — бинарное отношение эквивалентности на  $G, G \neq \emptyset$ . Тогда существует такое разбиение множества  $G$ , что  $v\mathcal{I}w$  тогда и только тогда, когда найдется такое  $\alpha \in A$ , что  $v, w \in G_\alpha$ .

2. Пусть  $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ , — разбиение множества  $G$ . Бинарное отношение  $\mathcal{R}$  такое, что  $(v, w) \in \mathcal{R}$  тогда и только тогда, когда найдется такое  $\alpha \in A$ , что  $v \in G_\alpha, w \in G_\alpha$ , является бинарным отношением эквивалентности.

Таким образом, можно говорить, что отношение эквивалентности разбивает множество  $G$  на классы эквивалентности.

### Свойства бинарного отношения строгого порядка

Теперь изучим свойства бинарного отношения строгого порядка, которое обозначим через  $\mathcal{P}$ , на непустом подмножестве  $V$  множества определения бинарного отношения  $G$ .

**Определение 4.7.** Элемент  $v \in V$  называется  $\mathcal{P}$ -максимальным (или максимальным по  $\mathcal{P}$ ) на  $V$ , если  $w \overline{\mathcal{P}} v$  для  $\forall w \in V$ .

Обозначим через  $\text{Max}_{\mathcal{P}} V$  совокупность  $\mathcal{P}$ -максимальных элементов на  $V$ . Существуют и другие, эквивалентные, определения элемента, максимального по  $\mathcal{P}$  на  $V$ .

**Определение 4.8.** Элемент  $v \in V$  называется  $\mathcal{P}$ -максимальным на  $V$ , если  $\{w \in V \mid w\mathcal{P}v\} = \emptyset$ .

**Определение 4.9.** Элемент  $v \in V$  называется  $\mathcal{P}$ -максимальным на  $V$ , если из того, что  $w \in G$  и  $w\mathcal{P}v$  следует  $w \in G \setminus V$ .

Заметим, что в определениях 4.7–4.9 условие того, что  $w$  не совпадает с  $v$ , выполняется автоматически, так как отношение  $\mathcal{P}$  не является рефлексивным. Отметим одно важное свойство множеств максимальных элементов.

**Утверждение 4.3.** Пусть на  $V \subseteq G$  заданы отношения строгого порядка  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , причем  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ . Тогда  $\text{Max}_{\mathcal{P}_2} V \subseteq \text{Max}_{\mathcal{P}_1} V$ .

*Доказательство.* Пусть  $v^0 \in \text{Max}_{\mathcal{P}_2} V$ . Тогда  $\{w \in V \mid w\mathcal{P}_2 v^0\} = \emptyset$  по определению 4.8. Поскольку  $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ , то, значит, и  $\{w \in V \mid w\mathcal{P}_1 v^0\} = \emptyset$ , а это, в свою очередь, означает, что  $v^0 \in \text{Max}_{\mathcal{P}_1} V$ .  $\square$

**Определение 4.10.** Говорят, что отношение  $\mathcal{P}$  обладает свойством фон Неймана-Моргенштерна (НМ-свойством) на  $V^* \subseteq V$ , если для любого  $v \in V$  либо  $v \in V^*$ , либо найдется  $w \in V^*$  такой, что  $w\mathcal{P}v$ .

**Определение 4.11.** Если отношение  $\mathcal{P}$  обладает НМ-свойством на  $\text{Max}_{\mathcal{P}} V \subseteq V$ , то  $\text{Max}_{\mathcal{P}} V$  называется решением по фон Нейману-Моргенштерну (ядром по фон Нейману-Моргенштерну) для бинарного отношения  $\mathcal{P}$  на  $V$ .

Отметим, что для бинарных отношений доминирования по Парето и по Слейтеру определение максимальных элементов, данное в этой лекции, совпадает с данным в предыдущей лекции определением недоминируемых критерияльных точек и решений. В связи с этим определение и свойства множества максимальных элементов применимы для задачи принятия решения при многих критериях. В частности, важен вопрос о непустоте множества  $\text{Max}_{\mathcal{P}} V$  и о том, является ли оно решением по фон Нейману-Моргенштерну<sup>2)</sup>. Частичный ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

---

<sup>2)</sup>В работах по теории бинарных отношений строгого порядка также встречаются понятия “внутренней устойчивости” и “внешней устойчивости” (см., например, ([13])). Внутренняя устойчивость некоторого подмножества  $V^* \subseteq V$  означает, что  $V^*$  не содержит элементов, доминируемых по  $\mathcal{P}$  элементами  $V^*$ . Внешняя устойчивость некоторого подмножества  $V^* \subseteq V$  по отношению  $\mathcal{P}$  — это другое название того, что отношение  $\mathcal{P}$  обладает НМ-свойством на  $V^* \subseteq V$ .

**Утверждение 4.4.** Пусть  $V$  конечно. Тогда  $\text{Мах}_P V$  непусто и является решением по фон Нейману-Моргенштерну для отношения  $P$  на  $V$ .

*Доказательство.* Отметим прежде всего, что непустота  $\text{Мах}_P V$  следует из НМ-свойства  $P$  на  $\text{Мах}_P V \subseteq V$ , поэтому достаточно доказать НМ-свойство. Докажем его от противного, т.е. предположим, что отношение  $P$  не обладает НМ-свойством на  $\text{Мах}_P V$ . По определению 4.10 это означает, что существует  $w \in V$  такой, что  $w \notin \text{Мах}_P V$ , причем не существует  $v \in \text{Мах}_P V$ , для которого  $v P w$ . Значит, существует  $z^{(1)} \in V$ ,  $z^{(1)} \notin \text{Мах}_P V$ , такой, что  $z^{(1)} P w$ . Поскольку  $z^{(1)}$  не является  $P$ -максимальным на  $V$ , то существует такой  $z^{(2)} \in V$ , что  $z^{(2)} P z^{(1)}$ . Если бы  $z^{(2)} \in \text{Мах}_P V$ , то в силу транзитивности  $P$  имело бы место  $z^{(2)} P w$  для  $z^{(2)} \in \text{Мах}_P V$ , что противоречит предположению. Таким образом,  $z^{(2)} \in V \setminus \text{Мах}_P V$ . Рассуждая дальше аналогичным образом, получим бесконечную последовательность  $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)}, \dots$ , для которой  $z^{(1)} P w$ ,  $z^{(2)} P z^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $z^{(k)} P z^{(k-1)}$ ,  $\dots$ , причем  $z^{(l)} \in V \setminus \text{Мах}_P V$ ,  $l = 1, 2, \dots$

В силу ацикличности  $P$  в этой последовательности все элементы различны, что противоречит конечности  $V$ .  $\square$

Если множество  $V$  бесконечно, то условия того, что  $\text{Мах}_P V$  непусто и является решением по фон Нейману-Моргенштерну, оказываются более сложными. Они будут рассмотрены для бинарного отношения Парето в лекции 6.

### Отношения предпочтения в задачах скалярной оптимизации

Проиллюстрируем использование бинарных отношений на примере задачи скалярной оптимизации (3.1). Отметим, что на множестве действительных чисел  $\mathbb{R}^1$  имеет место естественный квазипорядок, из которого могут быть получены бинарные отношения 1а) и 1б), являющиеся строгим порядком и эквивалентностью соответственно. На их основе в пространстве решений  $W$  с помощью единственного критерия  $f$  удастся ввести строгий порядок 2а), эквивалентность 2б) и квазипорядок, являющийся объединением бинарных отношений 2а) и 2б).

Понятие решения задачи скалярной оптимизации, сформулированное в лекции 3, можно переформулировать на основе использования бинарного отношения квазипорядка следующим образом.

**Определение 4.12.** Элемент  $x^* \in X$  называется решением задачи скалярной оптимизации (3.1), если  $x^* \succeq x$  для всех  $x \in X$ .

Существование решения этой задачи базируется на полноте (связности) квазипорядка, следующей из того факта, что каждая пара действительных чисел связана отношением “не меньше”. Применение строгого порядка и построение максимальных элементов на множестве допустимых решений  $X$  также позволяет определить понятие решения задачи оптимизации.

**Определение 4.13.** *Элемент  $x^* \in X$  называется решением задачи скалярной оптимизации (3.1), если он является максимальным для бинарного отношения 2а).*

Это определение, однако, совпадает с определением, данным на основе квазипорядка. Действительно, из того, что элемент  $x^* \in X$  является максимальным для бинарного отношения 2а), следует, что не существует такого  $x' \in X$ , что  $f(x') > f(x^*)$ . Таким образом,  $f(x^*) \geq f(x)$  для всех  $x \in X$ , откуда  $x^* \succ x$  для  $x \in X$ . Аналогичным образом доказывается, что  $x^* \succ x$  для  $x \in X$  влечет максимальность  $x^*$  на  $X$  по бинарному отношению 2а). Такое совпадение определений объясняется полнотой бинарного отношения 2а), т.е. тем, что любая пара действительных чисел связана либо отношением “больше”, либо “не меньше”.

Если теперь рассмотреть бинарное отношение доминирования по Парето, то мы увидим, что оно не полно. Это означает, что не все элементы сравнимы между собой, поэтому определение решения, построенное аналогично определению 4.12 на основе квазипорядка, полученного в результате объединения доминирования по Парето и эквивалентности, часто не дает результата при решении задачи принятия решений при нескольких критериях. Простейший пример отсутствия точки  $x^*$  при нескольких критериях:  $X = \{(0, 1); (1, 0)\}$  и  $\varphi_i(x) = x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Эта пара допустимых точек не состоит в отношении “не хуже”, так что наилучшего решения в смысле квазипорядка не существует. Поэтому приходится использовать понятие максимальных элементов. Следующая лекция посвящена этому вопросу.

## Лекция 5. Формулировка задачи многокритериальной оптимизации

Среди задач принятия решений при нескольких критериях важное место занимают задачи многокритериальной оптимизации. Главной особенностью этих задач является то, что все критериальные функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  являются числовыми<sup>1)</sup>. В этом случае удастся провести более тонкий анализ свойств задачи и разработать эффективные методы ее решения. В данной лекции мы сначала сформулируем задачу многокритериальной оптимизации, а затем увидим, какие свойства имеют множества Парето и Слейтера в этом случае.

### 5.1. Задача многокритериальной оптимизации

Прежде всего отметим, что в рассматриваемой задаче должны выполняться сделанные в лекции 3 предположения о том, что задача является критериальной, критерии являются независимыми по предпочтению и ЛПР в состоянии сравнить любую пару значений на шкале каждого из частных критериев. Введем дополнительные предположения.

Первое предположение состоит в том, что критериальное пространство  $W'$  является  $m$ -мерным линейным пространством  $\mathbb{R}^m$ , т.е. частные критерии не только являются числовыми, но и наборы их значений можно складывать и умножать на число. Другими словами, предполагается, что набор значений критериев  $\varphi(x)$  является  $m$ -мерным вектором.

Вторым важным предположением, облегчающим анализ критериальных задач в случае числовых критериев, является предположение о монотонности значений критериев по предпочтению. В скалярном случае практически всегда используется предположение о том, что улучшению качества решения соответствует увеличение (или уменьшение) значения критерия. В процессе анализа задач с критериальными функциями  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , где  $m > 1$ , аналогичным образом, удобно предположение о том, что увеличение (или уменьшение) значения частного критерия (при постоянных значениях других критериев) предпочтительно для ЛПР. Такие частные критерии иногда называются монотонными по предпочтению, а отдельные компоненты  $\varphi_j, j = 1, \dots, m$ , вектор-функции  $\varphi$  — *целевыми функциями*.

---

<sup>1)</sup> Иногда также требуют, чтобы число возможных решений было бесконечно или чтобы множество допустимых решений задавалось с помощью конечной системы равенств и неравенств.

Если какой-то задаче свойство монотонности не имеет места (например, для здорового человека желательной является температура 36,6 градуса Цельсия, а отклонение от нее является нежелательным), вводят модифицированный критерий, который обладает свойством монотонности. Например, в случае с температурой новый критерий может характеризовать степень нежелательности отклонения температуры от 36,6 градуса (при этом отклонения в положительную и отрицательную стороны могут быть описаны разными функциями). Благодаря такой замене модифицированный критерий становится монотонным по предпочтению: желательным является уменьшение его значения. Аналогичным образом удастся поступить и с многими другими частными критериями, в первоначальной формулировке не имеющими монотонности по предпочтениям (о способах формирования критерия см. в [4]).

Итак, пусть все частные критерии монотонны. Для определенности предположим, что для ЛПР желательно увеличение значения каждого из частных критериев.

Рассмотрим задачу *многокритериальной максимизации*.

**Определение 5.1.** *Задачей многокритериальной максимизации называется задача выбора решения из некоторого множества  $X \subseteq W$ , которая удовлетворяет следующим требованиям:*

- *задача является критериальной;*
- *критерии независимы по предпочтению,*
- *отображение  $\varphi$  действует в  $\mathbb{R}^m$ ;*
- *частные критерии монотонны по предпочтению, причем для двух любых векторов  $y' \in \mathbb{R}^m$  и  $y'' \in \mathbb{R}^m$ , отличающихся значением только одного критерия (скажем,  $j$ -го), утверждение  $y' \succ y''$  эквивалентно  $y'_j > y''_j$ , а утверждение  $y' \approx y''$  эквивалентно  $y'_j = y''_j$ .*

Задачу многокритериальной максимизации часто записывают в следующем виде, аналогичном задаче скалярной оптимизации (3.1):

$$\varphi(x) \rightarrow \max, \quad x \in X$$

или

$$y \rightarrow \max, \quad y = \varphi(x), \quad x \in X \subseteq W, \quad \varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (5.1)$$

После того, как было дано определение задачи многокритериальной максимизации, можем определить понятие задачи многокритериальной оптимизации общего типа.

**Определение 5.2.** *Задача выбора решений с векторным критерием, принимающим значения из  $\mathbb{R}^m$ , называется задачей многокритериальной оптимизации, если она может быть сведена к задаче многокритериальной максимизации изменением знака некоторых критериев на противоположный.*

Это определение позволяет свести разнообразные задачи многокритериальной оптимизации (МКО) к задаче многокритериальной максимизации. Как это обычно бывает при нескольких критериях, задача (5.1), в отличие от (3.1), не дает единственной альтернативы в качестве своего решения. Поэтому обозначение (5.1) иногда вызывает несогласие у лиц, не знакомых с обозначениями теории принятия решений при нескольких критериях выбора.

## 5.2. Оптимальность по Парето и Слейтеру в задачах МКО

Поскольку в задаче многокритериальной оптимизации (5.1) критерии независимы по предпочтению и являются числовыми характеристиками, монотонными по предпочтению ЛПР, то для сравнения критериальных векторов можно использовать обычные алгебраические сравнения значений частных критериев. Поэтому в случае задач многокритериальной максимизации бинарные отношения доминирования по Парето и Слейтеру, а также эквивалентности, введенные в лекции 3, приобретают следующую более простую форму.

**Определение 5.3.** *Будем говорить, что критериальная точка  $y' \in \mathbb{R}^m$  доминирует критериальную точку  $y'' \in \mathbb{R}^m$  по Парето и обозначать  $y' \succ_P y''$ , если для всех критериев  $j = \{1, \dots, m\}$  имеем  $y'_j \geq y''_j$  и хотя бы для одного частного критерия  $y'_j > y''_j$ .*

**Определение 5.4.** *Будем говорить, что критериальная точка  $y' \in \mathbb{R}^m$  доминирует критериальную точку  $y'' \in \mathbb{R}^m$  по Слейтеру и обозначать  $y' \succ_S y''$ , если  $y'_j > y''_j$  для всех критериев  $j = \{1, \dots, m\}$ .*

**Определение 5.5.** *Будем говорить, что критериальная точка  $y' \in \mathbb{R}^m$  равноценна критериальной точке  $y'' \in \mathbb{R}^m$  и обозначать  $y' \approx y''$ , если для всех критериев  $j = \{1, \dots, m\}$  имеем  $y'_j = y''_j$ .*

Можно также рассмотреть квазипорядок “не хуже”, заданный на  $y' \in \mathbb{R}^m$  объединением бинарных отношений доминирования по Парето и равноценности (эквивалентности):

**Определение 5.6.** Будем говорить, что критериальная точка  $y' \in \mathbb{R}^m$  не хуже критериальной точки  $y'' \in \mathbb{R}^m$  и обозначать  $y' \succeq y''$ , если для всех критериев  $j = \{1, \dots, m\}$  имеем  $y'_j \geq y''_j$ .

Бинарные отношения в пространстве решений  $W$  вводятся через бинарные отношения доминирования и эквивалентности в пространстве критериев точно так же, как и в лекции 3.

Отметим, что для иллюстрации бинарного отношения в линейных пространствах удобно использовать понятие конуса<sup>2)</sup>. Так, пусть в  $\mathbb{R}^m$  задан непустой конус  $K$ , содержащий начало координат. Тогда строгий порядок можно ввести так:

$$y' \succ y \iff y' - y \in K \setminus \{0\},$$

а квазипорядок как

$$y' \succeq y \iff y' - y \in K.$$

Строгий порядок по Парето задается неотрицательным ортантом  $\mathbb{R}_+^m$ , а строгий порядок по Слейтеру — конусом  $\text{int } \mathbb{R}^m = \mathbb{R}_+^m \setminus \text{Fr } \mathbb{R}_+^m$ . Напомним, что через  $\text{int } V$  обозначается внутренность множества  $V$ , а через  $\text{Fr } V$  — граница множества  $V$ .

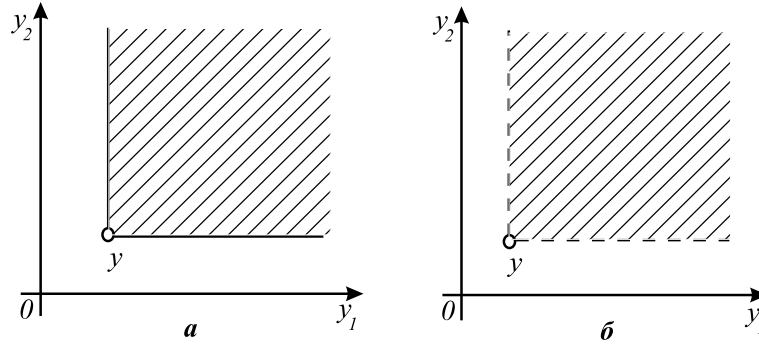


Рис. 5.1.

<sup>2)</sup> Множество  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  называется конусом, если  $\lambda v \in V$  для любого  $v \in V$  и любого числа  $\lambda > 0$ .



Если под конусом в  $\mathbb{R}^m$  понимать, наряду с обычным конусом с вершиной в точке 0, также и конус с вершиной в любой точке  $y \in \mathbb{R}^m$ , то множество векторов, доминирующих по Парето точку  $y \in \mathbb{R}^m$  (оно изображено на рис. 5.1 а), задается конусом  $y + \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$ .

На рис. 5.1 б изображено множество векторов, доминирующих точку  $y$  по Слейтеру. Заметим, что в отличие от рис. 5.1 а) векторы, принадлежащие границе этого множества, не доминируют  $y$ . Это множество можно представить в виде  $y + \mathbb{R}_+^m \setminus \text{Fr } \mathbb{R}_+^m$ .

Перейдем к рассмотрению понятия оптимального решения задачи МКО. Оно не отличается от понятия, введенного в лекции 3, т.е. решением задачи МКО является множество  $P(Y)$  оптимальных по Парето элементов  $Y$  и соответствующее ему множество  $P(X)$  в пространстве решений, которое вводится так же, как и в общем случае задачи принятия решений при нескольких критериях. Можно также рассмотреть и множество элементов  $Y$ , оптимальных по Слейтеру  $S(Y)$ , и соответствующее множество  $S(X)$  в пространстве решений.

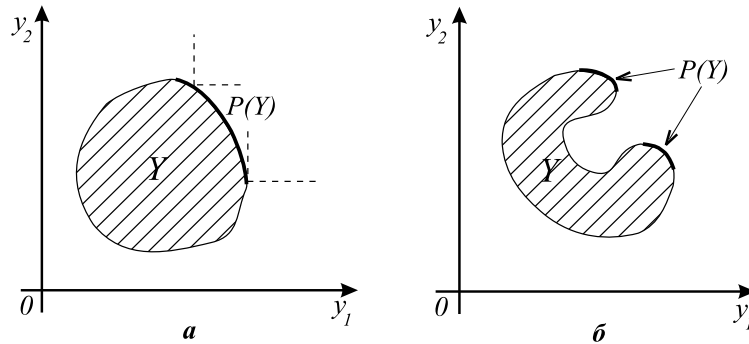


Рис. 5.2.

Принципиальным отличием задач МКО является возможность дать геометрическую интерпретацию множеств Парето и Слейтера в пространствах критериев: в задаче МКО множества  $P(Y)$  и  $S(Y)$  принадлежат границе множества  $Y$ . Поэтому в задачах МКО множества  $P(Y)$  часто называют *паретовой границей*, а множество  $S(Y)$  — *слабо-эффективной границей*. В двухкритериальном случае этот факт можно легко заметить на рисунке. Так, для того, чтобы определить, принадлежит ли данная точка  $y$  множеству  $P(Y)$ , достаточно выяснить, попадают ли другие точки множества  $Y$  в конус  $y + \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$  (см. рис. 5.2 а). Ясно, что таким свойством обладают только

точки границы множества  $Y$ . Обратим внимание на то, что даже у связных множеств  $Y$  множество Парето может быть несвязным (см. рис. 5.2 б).

Аналогичным образом можно мысленно выделить слабо-эффективную границу, только вместо конуса  $y + \mathbb{R}_+^m \setminus \{0\}$  надо использовать конус  $y + \mathbb{R}_+^m \setminus \text{Fr } \mathbb{R}_+^m$ .

В то же время, в пространстве решений дать простую графическую интерпретацию множеств  $P(X)$  и  $S(X)$ , как правило, удастся только в случае линейных задач (см., например, [15]), и то лишь при малой размерности пространства решений. В связи с этим в МКО большое внимание уделяется множествам  $P(Y)$  и  $S(Y)$ .

Итак, в двухкритериальном случае паретову границу можно легко изобразить на рисунке (как это сделано на рис. 5.2 а). Оказывается, и при большем числе критериев паретову границу можно представить в простом графическом виде. Этому вопросу посвящена часть IV.

### 5.3. Абсолютно оптимальное решение и идеальная точка

Рассмотрим подробнее вопрос о том, может ли квазипорядок “не хуже”, заданный на  $\mathbb{R}^m$  объединением бинарных отношений доминирования по Парето и равноценности (эквивалентности), быть каким-то образом использован для определения понятия решения хотя бы в некоторых случаях.

**Определение 5.7.** *Элемент  $x^* \in X$  называется абсолютно оптимальным, если  $\varphi(x^*) \succeq \varphi(x)$  для всех  $x \in X$ , или, что то же самое,  $\varphi(x^*) \geq \varphi(x)$  для всех  $x \in X$ .*

Как уже говорилось в предыдущей лекции, в общем многокритериальном случае обычно не существует такого элемента  $x^* \in X$ , что  $x^* \succeq x$  для всех  $x \in X$ . Это относится и к задачам МКО. Поэтому даже в случае непрерывных вектор-функций  $\varphi(x)$  и компактных множеств  $X$  абсолютно оптимальное решение обычно отсутствует. Действительно, для его существования требуется, чтобы максимум  $\varphi_i(x)$  на  $X$  для всех  $i = 1, \dots, m$  достигался в одной и той же точке  $x^*$ , что может встретиться лишь в исключительных случаях. Существование абсолютно оптимального решения означает отсутствие конфликта между критериями. В этом случае множество  $P(Y)$  состоит из единственной точки  $\varphi(x^*)$ , так что ЛПР остается лишь использовать решение  $x^*$ .

Таким образом, непосредственное использование квазипорядка непродуктивно. В то же время, никто не мешает нам рассмотреть максимальные

значения отдельных критериев сами по себе (они существуют, в частности, для непрерывных  $\varphi_i(x)$  и компактного множества  $X$ ).

**Определение 5.8.** Под идеальной точкой понимают такой вектор  $y^* \in \mathbb{R}^m$ , компоненты которого являются максимумами частных критериальных функций  $\varphi_i(x)$  по отдельности, т.е.  $y_i^* = \max_{x \in X} \varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Идеальная точка (вектор  $y^*$ ) является достижимой только в том случае, когда абсолютно оптимальное решение  $x^*$  существует.

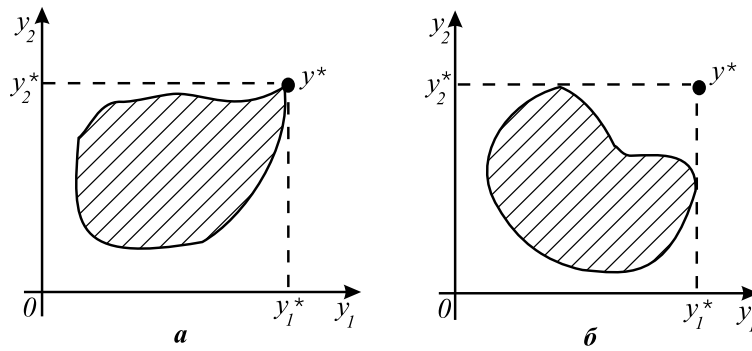


Рис. 5.3.

Именно потому, что наличие такого  $x^* \in X$  является исключением, идеальную точку  $y^*$  часто называют утопической. На рис. 5.3 для  $m = 2$  приведены примеры множеств  $Y$ , в которых вектор  $y^*$  является достижимым (рис. 5.3 а) и недостижимым (рис. 5.3 б).

## Часть II. Основы теории многокритериальной оптимизации

В этой части, состоящей из трех лекций, кратко описываются некоторые результаты теории многокритериальной оптимизации, являющейся основой методов поддержки принятия решений. При этом по-прежнему рассматривается частный случай задачи МКО, а именно задача многокритериальной максимизации (5.1).

### Лекция 6. Свойства оптимальных решений в задачах МКО

#### 6.1. Достаточные условия существования множества Парето и выполнения свойства фон Неймана-Моргенштерна

В случае конечного множества допустимых решений  $X$  и, значит, конечного множества достижимых критериальных векторов  $Y$ , из утверждения 4.4 для бинарного отношения строгого порядка следует, что множества максимальных элементов  $P(X)$  и  $P(Y)$  непусты и являются решениями по фон Нейману-Моргенштерну на  $X$  и  $Y$ , соответственно. В общем случае, однако, множества  $X$  и  $Y$  содержат бесконечное число элементов, поэтому для доказательства непустоты множества  $P(Y)$  и того, что оно является решением по фон Нейману-Моргенштерну, требуется выполнение определенных предположений.

Далее будем считать, что в  $\mathbb{R}^m$  задано скалярное произведение  $\langle y', y'' \rangle = \sum_{i=1}^m y'_i y''_i$  и соответствующие норма и расстояние.

**Теорема 6.1.** Пусть в задаче (5.1) множество  $Y$  непусто, причем для всех  $y \in Y$  множество  $Y \cap \{y + \mathbb{R}_+^m\}$  компактно. Тогда множество  $P(Y)$  непусто и является решением по фон Нейману-Моргенштерну.

*Доказательство.* Согласно определению решения по фон Нейману-Моргенштерну для доказательства того, что множество  $P(Y)$  является этим решением, требуется показать, что бинарное отношение Парето обладает НМ-свойством на  $P(Y) \subseteq Y$ , т.е. надо показать, что для любого  $y^0 \in Y$  либо  $y^0 \in P(Y)$ , либо существует  $y' \in P(Y)$  такой, что  $y' \geq y^0$ ,  $y' \neq y^0$ . Сформулированное утверждение эквивалентно тому, что для любого  $y^0 \in Y$

существует  $y' \in P(Y)$ , для которого  $y' \geq y^0$ . Докажем, что последнее утверждение выполняется. Из этого одновременно следует непустота  $P(Y)$ .

Пусть  $c \in \mathbb{R}^m$ ,  $c > 0$ . Рассмотрим задачу поиска  $\max_{y \in Y \cap \{y^0 + \mathbb{R}_+^m\}} \langle c, y \rangle$ .

Поскольку функция  $\langle c, y \rangle$  непрерывна, и по условию теоремы множество  $Y \cap \{y + \mathbb{R}_+^m\}$  компактно, то максимум достигается. Пусть  $\tilde{y}$  является точкой максимума, т.е.  $\langle c, \tilde{y} \rangle = \max_{y \in Y \cap \{y^0 + \mathbb{R}_+^m\}} \langle c, y \rangle$ . Поскольку  $\tilde{y} \in \{y^0 + \mathbb{R}_+^m\}$ , то

$\tilde{y} \geq y^0$ . Покажем, что  $\tilde{y} \in P(Y)$ . Пусть это не так, т.е. найдется  $\tilde{\tilde{y}} \in Y$  такой, что  $\tilde{\tilde{y}} \geq \tilde{y}$ ,  $\tilde{\tilde{y}} \neq \tilde{y}$ . Тогда в силу  $c > 0$  имеем  $\langle c, \tilde{\tilde{y}} \rangle > \langle c, \tilde{y} \rangle$ , причем  $\tilde{\tilde{y}} \in y^0 + \mathbb{R}_+^m$  и  $\tilde{\tilde{y}} \in Y$ . Получаем противоречие с тем, что  $\tilde{y}$  является решением задачи максимизации. Следовательно,  $\tilde{y} \in P(Y)$ .  $\square$

Следствием теоремы 6.1 является следующее простое утверждение.

**Теорема 6.2.** Пусть в задаче (5.1) множество  $Y$  непусто и компактно. Тогда множество  $P(Y)$  непусто и является решением по фон Нейману-Моргенштерну.

Отметим, что достаточным условием непустоты и компактности множества  $Y$  в задаче (5.1) являются непустота и компактность множества  $X$  и непрерывность отображения  $\varphi$ . Таким образом, достаточное условие существования решения задачи МКО совпадает с достаточным условием Вейерштрасса существования решения для задачи скалярной оптимизации.

Утверждение теоремы 6.1 не слишком конструктивно, поскольку возникает вопрос о том, как проверить компактность множества  $\{y + \mathbb{R}_+^m\}$  для каждой точки  $y \in Y$ . Более конструктивной является следующая теорема, утверждение которой может быть получено из теоремы 6.1.

**Теорема 6.3.** Пусть  $Y$  — непустое замкнутое множество, причем найдутся такие вектор  $\mu > 0$  и число  $\alpha$ , что для любого  $y \in Y$  выполняется  $\langle \mu, y \rangle \leq \alpha$ , т.е.  $Y \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle \mu, y \rangle \leq \alpha\}$ . Тогда множество  $P(Y)$  непусто и является решением по фон Нейману-Моргенштерну.

## 6.2. Оболочка Эджворта-Парето и ее свойства

**Определение 6.1.** Оболочкой Эджворта-Парето (ОЭП) множества  $Y$  называют множество

$$Y_P = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \leq \varphi(x), x \in X\} = Y + (-\mathbb{R}_+^m).$$

Из определения 6.1 сразу следует

**Лемма 6.1.** Пусть задано множество  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  и вектор  $y \in \mathbb{R}^m$ . Тогда для того, чтобы  $y \in Y_P$ , необходимо и достаточно, чтобы существовал  $y' \in Y$  такой, что  $y' \geq y$ .

Таким образом, оболочка Эджворта-Парето содержит все те точки  $\mathbb{R}^m$ , которые доминируются по Парето точками множества  $Y$ . ОЭП приведена на рис. 6.1, где она выделена штриховкой (для выпуклого случая на рис. 6.1 а и для невыпуклого случая на рис. 6.1 б).

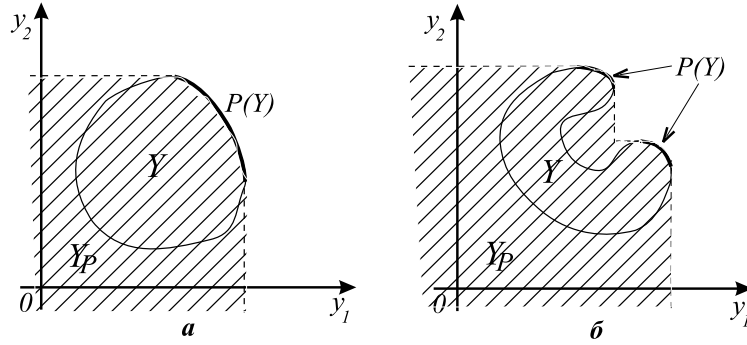


Рис. 6.1.

Как видно на рисунках, ОЭП имеет границу более простой формы, чем исходное множество достижимых критериальных векторов, но в то же время имеет недостаток — оно не ограничено. Роль ОЭП в задачах МКО поясняет следующее утверждение.

**Теорема 6.4.**  $P(Y_P) = P(Y)$ .

*Доказательство.* 1. Докажем, что  $P(Y) \subseteq P(Y_P)$ . Пусть это не так, т.е. существует  $y^0 \in P(Y)$  такой, что  $y^0 \notin P(Y_P)$ . Так как  $P(Y) \subseteq Y \subseteq Y_P$ , то  $y^0 \in Y_P$ . Поскольку  $y^0 \notin P(Y_P)$ , то найдется такой  $y' \in Y_P$ , что  $y' \geq y^0$ ,  $y' \neq y^0$ . По лемме 6.1 это значит, что существует  $y'' \in Y$  такой, что  $y'' \geq y'$  и, следовательно,  $y'' \geq y^0$ ,  $y'' \neq y^0$ . Поскольку  $y'' \in Y$  доминирует по Парето вектор  $y^0$ , то  $y^0 \notin P(Y)$ . Получили противоречие.

2. Докажем теперь обратное включение, т.е.  $P(Y_P) \subseteq P(Y)$ . Пусть  $y^0 \in P(Y_P)$ , но  $y^0 \notin P(Y)$ .

Если  $y^0 \in Y$ , то в силу  $y^0 \notin P(Y)$  существует  $y' \in Y$  такой, что  $y' \geq y^0$ ,  $y' \neq y^0$ . Так как  $Y \subseteq Y_P$ , то  $y' \in Y_P$ , откуда  $y^0 \notin P(Y_P)$ . Таким образом, мы пришли к противоречию.

Остается рассмотреть случай  $y^0 \notin Y$ . Так как  $y^0 \in P(Y_P)$ , то  $y^0 \in Y_P$ , значит, по лемме 6.1 найдется такой  $y'' \in Y \subseteq Y_P$ , что  $y'' \geq y^0$ . Но так как  $y^0 \notin Y$ , то  $y'' \neq y^0$ , поэтому  $y'' \in Y_P$  доминирует  $y^0 \in Y_P$ . Отсюда  $y^0 \notin P(Y_P)$ . Опять получено противоречие.  $\square$

Можно легко доказать и другие свойства ОЭП, например, следующее.

**Теорема 6.5.** *Если  $Y$  компактно, то  $Y_P$  замкнуто.*

*Доказательство.* Поскольку  $Y$  замкнуто и ограничено, а множество  $\mathbb{R}_+^m$  замкнуто, то утверждение теоремы сразу следует из замкнутости суммы двух замкнутых множеств, одно из которых ограничено [5], [8].  $\square$

Понятие ОЭП позволяет удобно сформулировать некоторые свойства задачи (5.1), а также является важным объектом в методах МКО (см. часть IV).

**Теорема 6.6.** *Справедливы следующие соотношения<sup>1)</sup>:*

1.  $S(Y) = S(Y_P) \cap Y$ ,
2.  $S(Y) = \text{Fr } Y_P \cap Y$ .

**Замечание 6.1.** *Заметим, что несмотря на внешнюю близость утверждений, они принципиально отличаются, поскольку для множества  $Y$ , не являющегося замкнутым,  $S(Y_P)$  и  $\text{Fr } Y_P$  не совпадают.*

*Доказательство.* 1. Покажем, что  $S(Y) \subseteq S(Y_P) \cap Y$ . Предположим, что это не так, т.е. существует такой вектор  $y^0 \in S(Y)$ , что  $y^0 \notin S(Y_P) \cap Y$ . Поскольку  $y^0 \in S(Y) \subseteq Y$ , то, значит,  $y^0 \notin S(Y_P)$ . В силу  $Y \subseteq Y_P$  имеем  $y^0 \in Y_P$ . Поскольку  $y^0 \notin S(Y_P)$ , то существует  $y' \in Y_P$  такой, что  $y' > y^0$ . Применяя лемму 6.1 для  $y'$ , получаем, что существует  $y'' \in Y$  такой, что  $y'' \geq y'$ , откуда,  $y'' > y^0$ , т.е.  $y^0 \notin S(Y)$ . Получили противоречие.

Покажем теперь, что  $S(Y_P) \cap Y \subseteq S(Y)$ . Пусть  $y^0 \in S(Y_P) \cap Y$ , но  $y^0 \notin S(Y)$ . Тогда найдется  $y' \in Y$  такой, что  $y' > y^0$ . Но так как  $Y \subseteq Y_P$ , то  $y' \in Y_P$ , следовательно,  $y^0 \notin S(Y_P)$ . Получили противоречие.

2. Покажем, что  $S(Y) \subseteq \text{Fr } Y_P \cap Y$ . Предположим, что это не верно, т.е. найдется такой  $y^0 \in S(Y)$ , что  $y^0 \notin \text{Fr } Y_P \cap Y$ . Поскольку  $y^0 \in S(Y) \subseteq Y$ , то, значит,  $y^0 \notin \text{Fr } Y_P$ . Так как  $y^0 \notin \text{Fr } Y_P$  и  $y^0 \in Y_P$ , то  $y^0 \in \text{int } Y_P$ , т.е. для некоторого  $\varepsilon > 0$  имеем  $U_\varepsilon(y^0) \subset Y_P$ , где  $U_\varepsilon(y^0)$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y^0$ .

<sup>1)</sup>Напомним, что через  $\text{Fr } Y$  обозначается граница множества  $Y \subset \mathbb{R}^m$ .

Следовательно, существует  $y' \in U_\varepsilon(y^0) \subset Y_P$  такой, что  $y' > y^0$ . Согласно лемме 6.1 найдется  $y'' \in Y$  такой, что  $y'' \geq y' > y^0$  и, следовательно,  $y^0 \notin S(Y)$ . Получили противоречие.

Покажем теперь, что  $\text{Fr } Y_P \cap Y \subseteq S(Y)$ . Пусть  $y^0 \in Y \cap \text{Fr } Y_P$ , но  $y^0 \notin S(Y)$ . Последнее означает, что существует  $y' \in Y$  такой, что  $y' > y^0$ . Следовательно, найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $y \in U_\varepsilon(y^0)$  также имеем  $y' > y$ , т.е.  $U_\varepsilon(y^0) \subset Y_P$ , откуда  $y^0 \in \text{int } Y_P$ . Это противоречит тому, что  $y^0 \in \text{Fr } Y_P$ .  $\square$

### 6.3. Оптимальность по Джоффриону

Рассмотрим простой пример задачи МКО. Пусть множество достижимых критериальных векторов уже построено и имеет вид  $Y = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (1 + y_1)^2 + y_2^2 \leq 1\}$  (см. рис. 6.2). Рассмотрим задачу многокритериальной максимизации  $y \rightarrow \max, y \in Y$ .

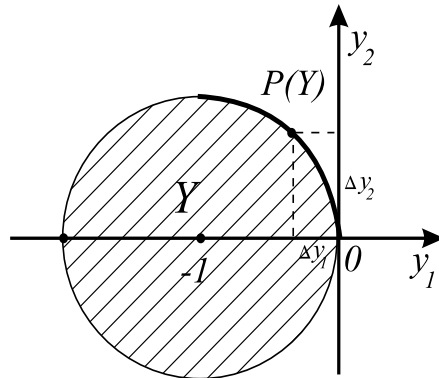


Рис. 6.2.

Множество критериальных точек, оптимальных по Парето, имеет вид  $P(Y) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y_1 \leq 0, y_2 = \sqrt{-y_1}\}$ . Как видно, точка  $(0, 0)$  принадлежит паретовой границе множества  $Y$ , в то же время, она качественно отличается от остальных точек. Производная функции  $y_2 = \sqrt{-y_1}$  во внутренних точках области задания  $-1 \leq y_1 \leq 0$  равна  $-1/(2\sqrt{-y_1})$ , и при стремлении  $y_1$  к нулю величина производной стремится к  $-\infty$ . Это означает, что переходя из точки  $(0, 0)$  в некоторую близкую к ней точку паретовой границы, ЛПР может увеличить значение второго критерия на некоторую величину  $\Delta y_2$  первого порядка малости, в то время как уменьшение значение



первого критерия  $\Delta y_1$  будет иметь второй порядок малости. Ясно, что точка  $(0, 0)$  менее предпочтительна для ЛПР, чем такая точка  $(\Delta y_1, \Delta y_2)$  (исключая патологический случай, когда критерий  $y_1$  несравнимо более важен для ЛПР, нежели критерий  $y_2$ ). Поэтому точка  $(0, 0)$  может быть исключена из рассмотрения. Для того чтобы при решении задачи МКО не рассматривать точки такого типа, вводится понятие оптимальности по Джоффриону.

**Определение 6.2.** Точка  $y^0 \in P(Y)$  называется *собственно эффективной (оптимальной по Джоффриону)*, если существует такое положительное число  $\theta(y^0)$ , что для всех точек  $y \in Y$  справедливо следующее: если  $y_i > y_i^0$ , то найдется такой номер  $j \in \{1, \dots, m\}$ , что  $y_j < y_j^0$ , причем

$$\frac{y_i - y_i^0}{y_j^0 - y_j} \leq \theta(y^0).$$

В приведенном выше примере для точки  $y^0 = (0, 0)$  такого  $\theta(y^0) > 0$  не существует. Поэтому точка  $y^0 = (0, 0)$  не является собственно эффективной. Совокупность точек, оптимальных по Джоффриону, принято обозначать через  $G(Y)$ . По определению,  $G(Y) \subseteq P(Y)$ . В то же время можно показать, что в условиях теоремы 6.3 выполнено включение  $P(Y) \subseteq \overline{G(Y)}$  (доказательство см. на стр. 145 книги [13]). Таким образом, в задачах, удовлетворяющих условию теоремы 6.3, множество  $G(Y)$  мало отличается от  $P(Y)$ .

## Лекция 7. Свертки критериев в задачах МКО

В лекции 5 в качестве решения задачи многокритериальной оптимизации были предложены множество  $P(X)$  и его образ в критериальном пространстве  $P(Y)$ . Важной проблемой является вопрос о характеристизации этих множеств на основе решения задачи скалярной оптимизации. Для решения этой проблемы, а также для нахождения отдельных точек этих множеств был предложен *метод сверток критериев*. Изначально он применялся в исследовании операций для формирования единого критерия выбора решения, отражающего интересы ЛПР в случае наличия нескольких конкурирующих критериев оценки решения. В настоящее время в теории МКО свертки критериев не связываются с интересами ЛПР. Они используются для того, чтобы сформулировать условия оптимальности, и применяются при разработке методов МКО.

### 7.1. Общая теория сверток критериев

Под сверткой критериев в МКО принято понимать любую числовую функцию критериев. Для установления свойств сверток критериев рассмотрим сначала свойства скалярных функций, неубывающих по бинарному отношению строгого порядка.

Пусть  $G$  — некоторое множество, на котором задано бинарное отношение строгого порядка  $\mathcal{P}$  и пусть  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Определение 7.1.** Пусть  $a, b \in G$ . Функция  $\psi$  называется *неубывающей по  $\mathcal{P}$* , если из  $a\mathcal{P}b$  следует  $\psi(a) \geq \psi(b)$ . Функция  $\psi$  называется *возрастающей по  $\mathcal{P}$* , если из  $a\mathcal{P}b$  следует  $\psi(a) > \psi(b)$ .

**Лемма 7.1 (Основная лемма).** Пусть  $A \subseteq G$ ,  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^1$  не убывает по  $\mathcal{P}$  и существует  $a^0 \in A$  такой, что  $\psi(a^0) = \max_{a \in A} \psi(a)$ . Для того чтобы  $a^0 \in \text{Мах}_{\mathcal{P}} A$ , достаточно выполнения одного из следующих условий:

- 1)  $\psi$  — возрастающая по  $\mathcal{P}$ ,
- 2)  $a^0$  — единственный элемент множества  $A$ , на котором достигается  $\max_{a \in A} \psi(a)$ .

*Доказательство.* 1. Предположим, что  $a^0 \notin \text{Max}_P A$ . Это значит, что существует  $a' \in A$  такой, что  $a' \mathcal{P} a^0$ , т.е. по определению 7.1 имеем  $\psi(a') > \psi(a^0)$ , но это противоречит тому, что  $\psi(a^0) = \max_{a \in A} \psi(a)$ .

2. Предположим, что  $a^0 \notin \text{Max}_P A$ . Это значит, что  $a' \mathcal{P} a^0$  для некоторого  $a' \in A$ . Тогда  $\psi(a') \geq \psi(a^0)$ . Поскольку  $a^0$  — единственный элемент множества  $A$ , на котором достигается  $\max_{a \in A} \psi(a)$ , то получили противоречие.  $\square$

*Следствия из основной леммы:* 1) если свертка критериев  $\psi(y)$  является возрастающей по бинарному отношению Парето (Слейтера) на множестве  $Y$ ,  $y^0 \in Y$  и  $\psi(y^0) = \max_{y \in Y} \psi(y)$ , то  $y^0 \in P(Y)$  ( $y^0 \in S(Y)$ );

2) если свертка критериев  $\psi(y)$  является неубывающей по бинарному отношению Парето на множестве  $Y$  и существует единственный  $y^0 \in Y$  такой, что  $\psi(y^0) = \max_{y \in Y} \psi(y)$ , тогда  $y^0 \in P(Y)$ .

Таким образом, если найти максимум некоторой функции свертки, возрастающей по бинарному отношению доминирования по Парето (или Слейтеру) на множестве  $Y$ , то можно определить недоминируемую по Парето (или Слейтеру) точку. Для того чтобы таким образом можно было найти все множество недоминируемых точек, функцию свертки задают в параметрическом виде. Далее, меняя параметры свертки, при выполнении определенных условий, можно получить все недоминируемое множество. Отметим сразу, что такое удастся далеко не всегда.

Обратим внимание на следующий факт. Поскольку множество  $Y$  в исходной формулировке задачи МКО не задано в явном виде и его построение требует существенных усилий (см. об этом в лекциях части III), то для определения такого  $y^0 \in Y$ , что  $\psi(y^0) = \max_{y \in Y} \psi(y)$ , сначала находится такой  $x^0 \in X$ , что  $\psi(\varphi(x^0)) = \max_{x \in X} \psi(\varphi(x))$ , а уже по  $x^0$  находится  $y^0 = \varphi(x^0)$ . Это замечание не меняет суть проблемы, так что в дальнейшем мы будем говорить о максимизации сверток в пространстве критериев.

Наиболее часто используемыми свертками критериев являются

1) *линейная свертка*  $\psi_c(y) = \sum_{i=1}^m c_i y_i = \langle c, y \rangle$ , где  $c_i \geq 0$  — параметры свертки,  $i = 1, \dots, m$ ;

2) *свертка Гермейера*  $\psi_G(y) = \min_i (y_i / a_i)$ , где  $a_i > 0$  — параметры свертки,  $i = 1, \dots, m$ ;

3) *свертки на основе отклонения от идеальной точки*  
 $\psi_\rho(y) = -\rho(y^*, y)$ , где  $y^*$  — идеальная точка,  $\rho(\cdot, \cdot)$  — расстояние в  $\mathbb{R}^m$ .

## 7.2. Линейная свертка

Легко проверяются следующие утверждения.

**Лемма 7.2.** *Линейная свертка  $\psi_c(y) = \langle c, y \rangle$  при  $c > 0$  является возрастающей по бинарным отношениям Парето и Слейтера.*

**Лемма 7.3.** *Линейная свертка  $\psi_c(y) = \langle c, y \rangle$  при  $c \geq 0, c \neq 0$ , является неубывающей по бинарному отношению Парето и возрастающей по бинарному отношению Слейтера.*

Из лемм 7.2 и 7.3 следуют утверждения о недоминируемости по Парето (Слейтеру) точки оптимума линейной свертки.

**Следствие 7.1 (из лемм (7.1), (7.2)).** *Пусть  $y^0 \in Y$ . Если  $\langle c, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$  при  $c > 0$ , то  $y^0 \in P(Y) \subseteq S(Y)$ .*

**Следствие 7.2 (из лемм (7.1), (7.3)).** *Пусть  $y^0 \in Y$ .*

- 1. Если  $\langle c, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$  при  $c \geq 0, c \neq 0$ , то  $y^0 \in S(Y)$ ;*
- 2. Если, кроме того, вектор  $y^0$  — единственная точка максимума  $\langle c, y \rangle$  на  $Y$  при данном  $c$ , то  $y^0 \in P(Y)$ .*

Сформулированные следствия являются достаточными условиями принадлежности точек  $y \in Y$  множествам Парето или Слейтера. Подчеркнем, однако, что эти условия не являются необходимыми — не все точки множеств Парето и Слейтера могут быть получены с помощью линейных сверток критериев. Для понимания этого факта достаточно рассмотреть множество с невыпуклой границей Парето (см. рис. 7.2 б в п. 7.4).

## 7.3. Свертка Гермейера

Свертку, предложенную Ю.Б. Гермейером [4], записывают в одной из двух форм:

$$\psi_G(y) = \min_i (y_i / a_i), \text{ где } a_i > 0 \text{ — параметры свертки, } i = 1, \dots, m,$$

$$\psi_G(y) = \min_i (\mu_i y_i), \text{ где } \mu_i > 0 \text{ — параметры свертки, } i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что переход от первой формы ко второй осуществляется заменой  $\mu_i = 1/a_i$ .

Рассмотрим свертку Гермейера в случае двух критериев  $(y_1, y_2)$ . Пусть (см. рис. 7.1) в точке  $A = (y_1^A, y_2^A)$  при некоторых значениях параметров выполняются равенства  $\mu_1 y_1^A = \mu_2 y_2^A = 1$ , т.е.  $y_1^A = 1/\mu_1, y_2^A = 1/\mu_2$ . Тогда

$\psi_G(y^A) = 1$ , и на лучах, параллельных осям координат, исходящих из точки  $A$ , имеем

- 1)  $\mu_1 y_1 \geq 1, \mu_2 y_2 = 1$  на горизонтальном луче,
- 2)  $\mu_1 y_1 = 1, \mu_2 y_2 \geq 1$  на вертикальном луче.

Отсюда получаем, что на этих лучах  $\psi_G(y) = 1$ . Таким образом, линии уровня свертки Гермейера совпадают с границами конуса  $\{y^A + \mathbb{R}_+^m\}$ . Аналогичным образом, линии уровня  $\psi_G = \gamma$  задаются вертикальными и горизонтальными лучами, выходящими из точки  $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ , где  $\mu_1 \hat{y}_1 = \gamma$ ,  $\mu_2 \hat{y}_2 = \gamma$ . Другими словами, линии уровня свертки Гермейера  $\psi_G(y) = \gamma$  образуют границы конуса  $\{\hat{y} + \mathbb{R}_+^m\}$ , где  $\hat{y} = \gamma y^A$ .

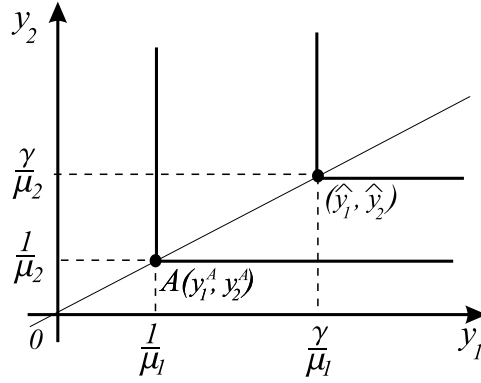


Рис. 7.1.

В общем случае  $m$  критериев поверхности уровня задаются границами конуса  $\{\hat{y} + \mathbb{R}_+^m\}$ , где  $\hat{y}$  — любая точка, удовлетворяющая соотношению  $\mu_i \hat{y}_i = \gamma, i = 1, \dots, m, \gamma \geq 0$ . Таким образом, поверхности уровня свертки Гермейера являются границами конуса точек, доминирующих вершину конуса. Благодаря этому свертка Гермейера обладает замечательными свойствами, которые доказаны ниже.

**Лемма 7.4.** *Свертка Гермейера является возрастающей по бинарному отношению Слейтера и неубывающей по бинарному отношению Парето.*

*Доказательство.* Докажем, что свертка Гермейера является возрастающей по бинарному отношению Слейтера. Рассмотрим векторы  $y', y'' \in \mathbb{R}^m$  такие, что  $y'' > y'$ . Тогда справедливо представление  $y'' = y' + e$ , где  $e =$

$(e_1, \dots, e_m)$ ,  $e_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . В силу этого выполнены следующие равенства и неравенство:  $\psi_G(y'') = \min_i(\mu_i y''_i) = \min_i(\mu_i(y'_i + e_i)) \geq \min_i(\mu_i y'_i) + \min_i(\mu_i e_i)$ . Поскольку  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $\min_i(\mu_i e_i) > 0$ , поэтому  $\psi_G(y'') > \min_i(\mu_i y'_i) = \psi_G(y')$ .

Докажем, что свертка Гермейера является неубывающей по бинарному отношению Парето. Рассмотрим векторы  $y', y'' \in \mathbb{R}^m$  такие, что  $y'' \geq y'$ ,  $y'' \neq y'$ . Тогда  $y'' = y' + e$ , где  $e = (e_1, \dots, e_m)$ ,  $e_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $e \neq 0$ . Отсюда  $\psi_G(y'') = \min_i(\mu_i y''_i) = \min_i(\mu_i(y'_i + e_i)) \geq \min_i(\mu_i y'_i) + \min_i(\mu_i e_i)$ . Поскольку  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $\min_i(\mu_i e_i) \geq 0$ , значит  $\psi_G(y'') \geq \min_i(\mu_i y'_i) = \psi_G(y')$ .  $\square$

Из этой леммы и леммы 7.1 сразу следует, что если  $y^0$  — точка максимума  $\psi_G(y)$  на  $Y$ , то  $y^0 \in S(Y)$ ; если к тому же  $y^0$  — единственная точка максимума, то  $y^0 \in P(Y)$ .

**Лемма 7.5.** Пусть  $y^0 \in Y$ ,  $y^0 > 0$ . Тогда если  $y^0 \in S(Y)$ , то найдется такой набор параметров  $\mu_i^0$ ,  $\mu_i^0 > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , что  $\psi_G(y^0) = \max_{y \in Y} \psi_G(y)$ , где  $\psi_G(y^0) = \min_i \mu_i^0 y_i^0$ .

Заметим, что условие  $y^0 > 0$  может быть удовлетворено с помощью переноса начала координат, так что это требование не ограничивает возможности применения леммы.

*Доказательство.* Из того, что  $y^0 \in S(Y)$ , следует, что не существует такого  $y \in Y$ , что  $y > y^0$ . Другими словами, для любого  $y \in Y$  найдется координата  $i_0$  такая, что  $y_{i_0} \leq y_{i_0}^0$ . Тогда  $\min_i \frac{y_i}{y_i^0} \leq \frac{y_{i_0}}{y_{i_0}^0} \leq 1$ . Следовательно, для функции  $\psi_G(y)$  с параметрами  $\mu_i^0$  такими, что  $\mu_i^0 = \frac{1}{y_i^0}$ ,  $i = 1, \dots, m$  имеем  $\psi_G(y) = \min_i \frac{y_i}{y_i^0} \leq 1$ . В то же время,  $\psi_G(y_0) = 1$ . Отсюда следует, что  $y_0$  является точкой максимума свертки  $\psi_G(y)$  с параметрами  $\mu_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

Следствием лемм 7.4 и 7.5 является следующая теорема.

**Теорема 7.1 (Гермейер).** Пусть  $y^0 \in Y$ ,  $y^0 > 0$ . Включение  $y^0 \in S(Y)$  верно тогда и только тогда, когда существует набор параметров

$\mu_i^0 > 0, i = 1, \dots, m$ , при котором  $\psi_G(y^0) = \max_{y \in Y} \psi_G(y)$ , где  $\psi_G(y) = \min_i \mu_i^0 y_i$ .

Теорема Гермейера показывает, что свертка  $\psi_G(y)$ , в отличие от линейной свертки, позволяет сформулировать не только достаточное, но и необходимое условие принадлежности критериальной точки множеству Слейтера: каждая точка множества Слейтера (в том числе и точка множества Парето) может быть найдена как максимум  $\psi_G(y)$  при соответствующим образом подобранном наборе параметров  $\mu_i > 0$ . Для лучшего понимания аппарата свертки изобразим линии уровня линейной свертки и свертки Гермейера в точках паретовой границы двух множеств (см. рис. 7.2). Видно, что если множество является выпуклым (рис. 7.2 а), то в любой точке его паретовой границы с помощью любой из рассматриваемых сверток можно провести линию уровня, которая будет соответствовать максимальному допустимому значению свертки. Если же множество невыпукло (рис. 7.2 б), то это можно будет сделать с помощью свертки Гермейера и нельзя с помощью линейной — линия уровня может оказаться только локально максимальной, как, например, в точке  $y_0$ .

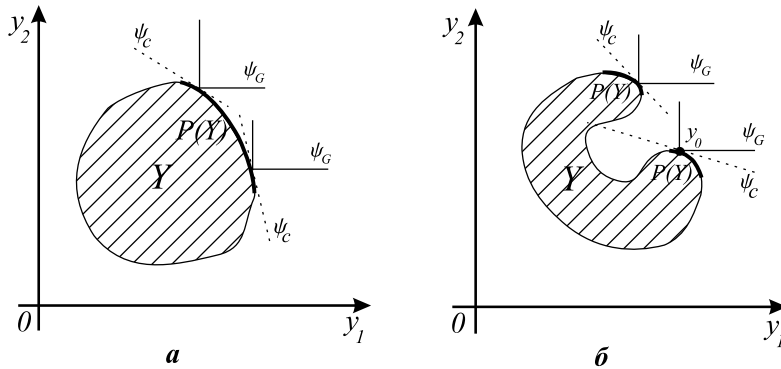


Рис. 7.2.

Может оказаться, что решением является некоторое множество, содержащее более одной точки. Тогда интересующая нас точка множества Слейтера будет принадлежать этому множеству.

#### Коррекция свертки критериев

На практике, когда ЛПР интересуют только паретовские точки, можно рассмотреть свертку  $\psi_\varepsilon(y) = \psi(y) + \varepsilon \langle c, y \rangle$ , где  $\psi(y)$  — некоторая свертка,

не убывающая по бинарному отношению Парето,  $c = (1, 1, \dots, 1)$ ,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Благодаря этой небольшой коррекции, свертка  $\psi_\varepsilon(y)$  становится возрастающей по бинарному отношению Парето. Например, взяв свертку  $\psi_G^\varepsilon(y) = \psi_G(y) + \varepsilon \langle c, y \rangle$ , получим свертку, максимум которой может достигаться только в точках паретовой границы. Недостатком такого подхода является то, что из-за возмущающего действия коррекции  $\varepsilon \langle c, y \rangle$  не все точки  $P(Y)$  могут быть получены.

#### 7.4. Свертки на основе идеальной точки

Свертка на основе использования идеальной точки  $y^*$  имеет вид

$$\psi_\rho(y) = -\rho(y^*, y),$$

где  $\rho(\cdot, \cdot)$  — некоторая метрика в  $\mathbb{R}^m$ . При этом, если, как это обычно бывает, идеальная точка не достижима, то  $\psi_\rho(y) < 0$  для всех векторов  $y \in Y$ . При построении этой свертки могут быть использованы различные метрики. Наиболее часто используется чебышевская метрика

$$\rho(y^*, y) = \max_i |y_i^* - y_i|$$

или взвешенная чебышевская метрика

$$\rho(y^*, y) = \max_i \{\lambda_i |y_i^* - y_i|\},$$

где  $\lambda_i > 0$ . Может быть выбрана и любая другая метрика. При использовании чебышевской метрики свертка называется *чебышевской* и обозначается через  $\psi_T(y)$ . Ясно, что она близка по своему смыслу к свертке Гермейера.

Заметим, что поскольку  $y_i \leq y_i^*$  для  $y \in Y$ , то при минимизации свертки по  $y \in Y$  взвешенную чебышевскую метрику можно записать в более простом виде:  $\psi_T(y) = \max_i [\lambda_i (y_i^* - y_i)]$ . Эта свертка, как легко доказать аналогично леммам 7.4 и 7.5, является возрастающей по бинарному отношению Слейтера и неубывающей по бинарному отношению Парето. Отсюда следует, что точка  $y^0$  минимума  $\psi_T(y)$  на  $Y$  принадлежит  $S(Y)$ , а в случае единственности —  $P(Y)$  (на рис. 7.3 представлены линии уровня функции  $\psi_T(y)$ ).



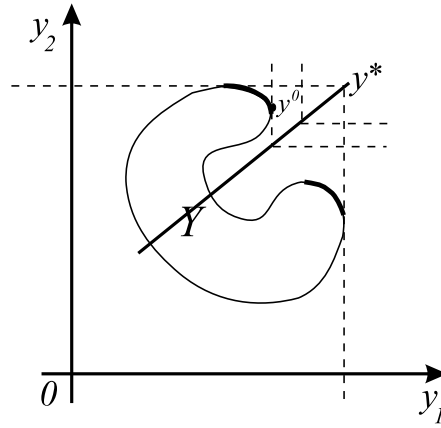


Рис. 7.3.

В то же время, не всякая точка множества  $P(Y)$  (или  $S(Y)$ ) может быть найдена на основе минимизации функции  $\psi_T(y)$  при конечных весах  $\lambda_i$ . Например, для приближения решения  $y^0$  задачи минимизации  $\psi_T(y)$  на  $Y$  к наилучшему значению по  $i$ -му критерию требуется устремить  $\lambda_i$  к бесконечности. Поэтому для полного описания  $P(Y)$  и  $S(Y)$  свертку  $\psi_T(y)$  требуется несколько преобразовать, используя вместо  $y^*$  точку  $y^{**}$ ,  $y_i^{**} = y_i^* + \delta$ ,  $i = 1, \dots, m$ , где  $\delta$  — малое положительное число. Тогда для того, чтобы  $y^0 \in S(Y)$ , необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой набор  $\lambda_i^0 > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , при котором  $y^0$  — решение задачи

$$\min_{y \in Y} \psi_T(y), \quad \text{где} \quad \psi_T(y) = \max_i [\lambda_i^0 (y_i^{**} - y_i)].$$

## Лекция 8. Условия оптимальности и устойчивости в задачах МКО

Условия оптимальности критериальных точек и устойчивости их совокупностей играют важную роль в теории многокритериальной оптимизации. Условия оптимальности обычно строятся для линейной свертки. Причинами этого являются наличие экономической интерпретации параметров линейной свертки как цен (оценок) частных критериев, а также возможность построения теории двойственности на основе использования линейных свертки критериев.

### 8.1. Оптимальность в эффективно выпуклых задачах МКО

**Определение 8.1.** *Задача многокритериальной оптимизации (5.1) называется эффективно выпуклой, если ее оболочка Эджворта-Парето выпукла.*

Множество  $Y$  в этом случае также иногда называют *эффективно выпуклым*. Рассмотрим достаточные условия эффективной выпуклости.

**Определение 8.2.** *Вектор-функция  $\varphi$  называется вогнутой на выпуклом множестве  $X$ , если для любых  $x', x'' \in X$  и  $\lambda \in [0, 1]$  справедливо неравенство  $\varphi(\lambda x' + (1 - \lambda)x'') \geq \lambda \varphi(x') + (1 - \lambda)\varphi(x'')$ .*

**Лемма 8.1 (Карлин).** *Пусть множество  $X$  выпукло и вектор-функция  $\varphi$  вогнута. Тогда множество  $Y_P$  является выпуклым.*

*Доказательство.* Пусть  $y', y'' \in Y_P$ . Требуется доказать, что  $y^\lambda = \lambda y' + (1 - \lambda)y'' \in Y_P$  при любом  $\lambda \in [0, 1]$ . Из леммы 6.1 следует, что существуют такие  $x', x'' \in X$ , что  $\varphi(x') \geq y'$ ,  $\varphi(x'') \geq y''$ , откуда  $y^\lambda \leq \lambda \varphi(x') + (1 - \lambda)\varphi(x'')$ . Выпуклость множества  $X$  означает, что  $x^\lambda = \lambda x' + (1 - \lambda)x'' \in X$  для любого  $\lambda \in [0, 1]$ , поэтому  $\varphi(x^\lambda) \in Y$ . В силу вогнутости  $\varphi$  имеем  $\varphi(x^\lambda) \geq \lambda \varphi(x') + (1 - \lambda)\varphi(x'') \geq y^\lambda$ , откуда по лемме 6.1 получаем, что  $y^\lambda \in Y_P$ .  $\square$

В дальнейшем нам потребуется известная из курса теории оптимизации (см., например, гл. 4 книги [3]) теорема об отделимости множеств (теорема об опорной гиперплоскости).

**Теорема 8.1.** Пусть множество  $Z \subset R^m$  выпукло. Тогда любая граничная точка  $y^0$  множества  $Z$  отделима от  $Z$ , т.е. найдется такой вектор  $c$ ,  $\|c\| \neq 0$ , что  $\langle c, y^0 \rangle \geq \langle c, y \rangle$  для  $y \in Z$ .

Докажем одно полезное свойство множества  $Y_P$ .

**Лемма 8.2.** Пусть множество  $Y$  компактно. Тогда для любого  $c \geq 0$  выполнено равенство  $\max_{y \in Y_P} \langle c, y \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 6.1 из того, что  $y \in Y_P$  следует, что существует  $y' \in Y$  такой, что  $y' \geq y$ . Тогда для любого  $c \geq 0$  имеет место неравенство  $\max_{y \in Y} \langle c, y \rangle \geq \max_{y \in Y_P} \langle c, y \rangle$ . С другой стороны, из того, что  $Y \subseteq Y_P$  следует неравенство в обратную сторону:  $\max_{y \in Y} \langle c, y \rangle \leq \max_{y \in Y_P} \langle c, y \rangle$ . Таким образом, утверждение леммы доказано.  $\square$

**Теорема 8.2 (По-лунг Ю).** Пусть задача МКО эффективно выпукла. Пусть  $y^0 \in Y$ . Тогда для того, чтобы  $y^0 \in S(Y)$ , необходимо и достаточно существование такого  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ , что  $\langle c, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$ .

Мы докажем теорему для случая, когда  $Y$  компактно (в общем случае доказательство приведено в [13]).

*Доказательство.* Достаточность была доказана нами при рассмотрении линейных сверток (см. следствие 7.1). Докажем необходимость. Пусть  $y^0 \in S(Y)$ . Согласно теореме 6.6 имеем  $S(Y) = \text{Fr } Y_P \cap Y$ , поэтому  $y^0 \in \text{Fr } Y_P$ . Из выпуклости  $Y_P$  и того, что  $y^0 \in Y_P$ , с помощью теоремы об отделимости получаем, что найдется вектор  $c$ ,  $\|c\| \neq 0$ , такой, что  $\langle c, y^0 \rangle = \max_{y \in Y_P} \langle c, y \rangle$ .

Докажем, что все координаты вектора  $c$  неотрицательны. Предположим противное, т.е. пусть  $c_{i_0} < 0$  для некоторого  $i_0$ . По определению  $Y_P$ , при  $c_{i_0} < 0$  это множество содержит все точки вида  $\tilde{y} = y^0 + t(0, \dots, c_{i_0}, \dots, 0)$ , где  $t \geq 0$ . Но тогда величина  $\langle c, y \rangle$  не ограничена сверху на  $Y_P$ . Получили противоречие с теоремой об отделимости, поэтому  $c_i \geq 0$  для всех  $i$ .

Поскольку по лемме 8.2 имеем  $\max_{y \in Y_P} \langle c, y \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$ , то  $\langle c, y^0 \rangle = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$ , где  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ . Теорема доказана.  $\square$

Из теоремы По-лунг Ю и леммы Карлина следует свойство слейтеровских решений.

**Теорема 8.3.** Пусть  $X$  выпукло,  $\varphi$  вогнута,  $x^0 \in X$ . Тогда для того, чтобы  $x^0 \in S(X)$  необходимо и достаточно существование такого  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ , что  $\langle c, \varphi(x^0) \rangle = \max_{x \in X} \langle c, \varphi(x) \rangle$ .

Отметим, что если в теореме 8.2 использовать условие  $c > 0$  вместо  $c \geq 0$ , то заменить множество Слейтера на множество Парето нельзя. Приведем пример для случая  $m = 2$  (см. рис. 8.1). Здесь точка  $(0, 0)$  является парето-оптимальной, а единственное опорное направление в этой точке определяет вектор  $c = (1, 0)$ .

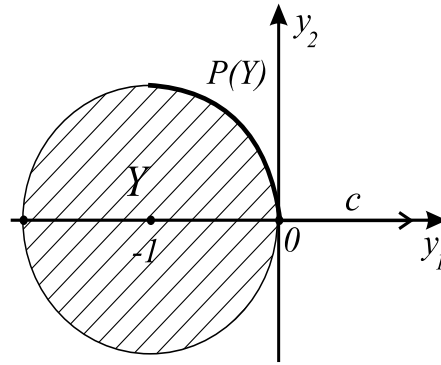


Рис. 8.1.

Однако использование строгого неравенства  $c > 0$  отнюдь не бессмысленно — оно дает возможность описать множество Джоффриона.

**Теорема 8.4 (Джоффрион).** Пусть  $X$  — выпуклое множество, вектор-функция  $\varphi$  вогнута,  $x^0 \in X$ . Тогда для того, чтобы  $\varphi(x^0) \in G(Y)$ , необходимо и достаточно существование такого  $c > 0$ , что  $\varphi(x^0) = \max_{x \in X} \langle c, \varphi(x) \rangle$ .

Доказательство теоремы можно найти в [13], и здесь мы его приводить не будем.

Укажем еще одно важное следствие леммы Карлина и теоремы По-лунг Ю. Рассмотрим задачу (5.1), в которой

$$X = \{x \in D | g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, J\}, \quad (8.1)$$

где  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Пусть, для начала,  $m = 1$ . В полученной однокритериальной задаче оптимизации максимизируемый критерий будем обозначать че-

рез  $f(x)$ . Для этой задачи известно следующее утверждение (см., например, гл. 4 книги [3]).

**Теорема 8.5 (Кун, Таккер).** Пусть функции  $f(x), g_1(x), \dots, g_J(x)$  вогнуты на выпуклом множестве  $D$  и существует точка  $\tilde{x} \in D$ , в которой выполнено условие  $g_j(\tilde{x}) > 0, j = 1, \dots, J$  (условие Слейтера). Тогда для того, чтобы точка  $x^0$  была решением задачи  $\max_{x \in X} f(x)$ , необходимо и достаточно существование такого вектора  $\lambda^0, \lambda^0 \in \mathbb{R}_+^J$ , что точка  $(x^0, \lambda^0)$  на множестве  $D \times \mathbb{R}_+^J$  является седловой точкой функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^J \lambda_i g_i(x),$$

т.е.  $L(x, \lambda^0) \leq L(x^0, \lambda^0) \leq L(x^0, \lambda)$  при  $x \in D$  и  $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, J$ .

Из теорем Ю и Куна-Таккера, а также леммы Карлина сразу получаем следующее утверждение для задачи МКО с множеством  $X$ , задаваемым (8.1).

**Теорема 8.6.** Пусть множество  $D$  выпукло, функции  $\varphi_i(x), i = 1, \dots, m, g_j(x), j = 1, \dots, J$ , вогнуты и для множества  $X$  выполнено условие Слейтера. Тогда для того, чтобы  $x^0 \in S(X)$ , необходимо и достаточно существование таких векторов  $c \geq 0, c \neq 0$ , и  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^J$ , что точка  $(x^0, \lambda^0)$  является седловой точкой функции Лагранжа

$$L = \langle c, \varphi(x) \rangle + \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x)$$

на множестве  $D \times \mathbb{R}_+^J$ .

## 8.2. Оптимальность в невыпуклых задачах МКО

Требование эффективной выпуклости упрощает исследование задачи МКО, но в то же время сильно ограничивает класс решаемых задач. Перейдем к изучению невыпуклого случая. Рассмотрим задачу (5.1) с множеством  $X$ , имеющим вид (8.1), без предположений о выпуклости  $D$  и вогнутости рассматриваемых функций. В этом случае, по-прежнему, действуют достаточные условия оптимальности, полученные из свойств сверток критериев

в лекции 7. Сформулируем необходимые условия, которые существенно отличаются от условий выпуклого случая.

Далее нам потребуется теорема Мощкина об альтернативе [13], которая следует из леммы Фаркаша — основного утверждения теории линейных неравенств [14]. Мы будем использовать теорему Мощкина в упрощенной форме:

либо система  $A\mu > 0$  имеет решение, либо имеет решение система  $uA = 0$ , где  $u \geq 0$ ,  $u \neq 0$ .

Введем обозначение  $J(x^0) = \{j \in \{1, \dots, J\} \mid g_j(x^0) = 0\}$ .

**Теорема 8.7 (Да Кунья, Полак, Джоффрион).** Пусть  $x^0 \in \text{int } D$ , функции  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $g_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , дифференцируемы в точке  $x^0$  и выполняется следующее условие регулярности: существует  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , для которого  $\langle \text{grad } g_j(x^0), \hat{x} \rangle > 0$  для любого  $j \in J(x^0)$ . Тогда из того, что  $x^0 \in S(X)$  следует, что существуют такие  $c \geq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lambda^0 \in \mathbb{R}_+^J$ , что

$$\sum_{i=1}^m c_i \text{grad } \varphi_i(x^0) + \sum_{j=1}^J \lambda_j \text{grad } g_j(x^0) = 0.$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{cases} \langle \text{grad } \varphi_i(x^0), x \rangle > 0, & i = 1, \dots, m, \\ \langle \text{grad } g_j(x^0), x \rangle > 0, & j \in J(x^0), \end{cases} \quad (8.2)$$

и покажем, что она не имеет решения. Предположим противное, т.е. пусть существует  $\hat{x}$  — решение системы (8.2). Рассмотрим множество точек  $x_\varepsilon = x^0 + \varepsilon \hat{x}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Заметим, что так как  $x^0 \in \text{int } D$ , то  $x_\varepsilon \in D$  при достаточно малых  $\varepsilon$ . В силу дифференцируемости функций  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , в точке  $x^0$ , приращение каждой из них можно представить в виде  $\varphi_i(x_\varepsilon) - \varphi_i(x^0) = \varepsilon \langle \text{grad } \varphi_i(x^0), \hat{x} \rangle + o(\varepsilon)$ . Так как первое неравенство в системе (8.2) строгое, то при достаточно малых  $\varepsilon$

$$\varphi_i(x_\varepsilon) > \varphi_i(x^0). \quad (8.3)$$

Аналогично, в силу дифференцируемости функций  $g_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , в точке  $x^0$  можно записать  $g_j(x_\varepsilon) - g_j(x^0) = \varepsilon \langle \text{grad } g_j(x^0), \hat{x} \rangle + o(\varepsilon)$ . Так как второе неравенство в системе (8.2) строгое, то при достаточно малых  $\varepsilon$  получим, что

$$g_j(x_\varepsilon) > g_j(x^0) = 0 \quad \text{для } j \in J(x^0). \quad (8.4)$$

В силу непрерывности функций  $g_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, J$ , при достаточно малых  $\varepsilon$

$$g_j(x_\varepsilon) > 0 \quad \text{для} \quad j \notin J(x^0). \quad (8.5)$$

Но тогда неравенства (8.3)–(8.5) означают, что  $x_\varepsilon \in X$  и  $x_\varepsilon \succ_S x_0$ , что противоречит тому, что  $x^0 \in S(X)$ . Следовательно, система (8.2) решения не имеет. Отсюда по теореме Моцкина об альтернативе должна существовать такая пара  $(v, w) \geq 0$ ,  $(v, w) \neq 0$ ,  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $w = (w_j \mid j \in J(x^0))$ , что

$$\sum_{i=1}^m v_i \operatorname{grad} \varphi_i(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} w_j \operatorname{grad} g_j(x^0) = 0.$$

Предположим, что  $v = 0$ , тогда  $\sum_{j \in J(x^0)} w_j \operatorname{grad} g_j(x^0) = 0$ ,  $w \geq 0$ ,  $w \neq 0$ .

Умножив последнее равенство на вектор  $\tilde{x}$  из условия регулярности, получим, что  $\sum_{j \in J(x^0)} w_j \langle \operatorname{grad} g_j(x^0), \tilde{x} \rangle = 0$ . Но тогда  $w_j = 0$ ,  $j \in J(x^0)$ , что

противоречит требованию  $(v, w) \neq 0$ , поскольку  $v = 0$ . Поэтому  $v \neq 0$ . Положив  $c = v$  и

$$\lambda_j^0 = \begin{cases} w_j, & j \in J(x^0), \\ 0, & j \notin J(x^0), \end{cases}$$

получим утверждение теоремы.  $\square$

**Замечание 8.1.** Результат теоремы 8.7 представляет собой локальное необходимое условие слабой эффективности. Оно принципиально отличается от глобального необходимого условия, полученного в теоремах 8.3 и 8.5. Используемая здесь линейная свертка  $\langle c, y \rangle$  может не иметь в точке  $x_0$  глобального максимума на  $X$  (см. точку  $y^0$  на рис. 7.2 б).

### 8.3. О понятии устойчивости в задачах МКО

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости множеств  $Y$ ,  $Y_P$ ,  $P(Y)$ ,  $S(Y)$  по отношению к возмущениям множества  $X$  и отображения  $\varphi(x)$  в задаче многокритериальной оптимизации (5.1), которую перепишем еще раз

$$y \rightarrow \max, \quad y = \varphi(x), \quad x \in X \subset W.$$

Будем считать, что в  $\mathbb{R}^m$  задана метрика  $\rho_y(y, y')$ . В этом случае можно ввести понятие устойчивости интересующих нас множеств: решение некоторой

задачи принято называть *устойчивым*, если оно непрерывно зависит от исходных данных задачи. Исследование устойчивости важно как с точки зрения постановки задачи (должен быть смысл в построении множества, которое существенно меняется при малом изменении исходных данных), так и с вычислительной точки зрения, поскольку использование компьютера связано с ошибками округления, которые в случае неустойчивости могут привести к существенному отклонению аппроксимации от аппроксимируемого множества.

Для того чтобы сформулировать понятие устойчивости, будем считать, что множество допустимых решений  $X$  и отображение  $\varphi(x)$  зависят от набора параметров  $u$ , принадлежащих пространству  $U$ . Будем считать, что задано отображение, ставящее в соответствие каждому набору параметров  $u \in U$  множество  $X(u)$ . Вместо функции  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  рассмотрим функцию  $\hat{\varphi} : W \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Таким образом, задача многокритериальной оптимизации, зависящая от параметров, имеет вид

$$y \rightarrow \max, \quad y = \hat{\varphi}(x, u), \quad x \in X(u), \quad u \in U.$$

Интересующие нас множества  $Y, Y_P, P(Y), S(Y)$  теперь зависят от набора параметров  $u$ , обозначим их  $Y(u), Y_P(u), P(Y(u)), S(Y(u))$ . Пусть в пространстве  $U$  введена метрика, с помощью которой можно определить понятие окрестности точки  $u \in U$ . Тогда исследование устойчивости — это анализ непрерывности зависимости указанных множеств от параметров в окрестности некоторой точки  $\hat{u} \in \text{int } U$ , такой что

$$X = X(\hat{u}), \quad \varphi(x) = \hat{\varphi}(x, \hat{u}).$$

Таким образом, точка  $\hat{u}$  задает невозмущенную задачу МКО. Поскольку  $X(u), Y(u)$  и  $Y_P(u)$  задаются многозначными точечно-множественными отображениями, для изучения устойчивости необходимо определить понятие непрерывности многозначного отображения.

Рассмотрим отображение  $F : R^p \rightarrow 2^{R^q}$ , где  $R^p$  — линейное метрическое пространство, а  $2^{R^q}$  — пространство подмножеств пространства  $R^q$ . Пусть в  $R^q$  и  $R^p$  заданы, соответственно, метрики  $\rho_q(\cdot, \cdot)$  и  $\rho_p(\cdot, \cdot)$ .

**Определение 8.3.** Отображение  $F$  называется *полунепрерывным сверху* в точке  $\hat{x} \in R^p$ , если для любой последовательности  $\{x^k\}$  такой, что  $x^k \rightarrow \hat{x}$  и любой такой последовательности  $\{y^k\}, y^k \in F(x^k)$ , что  $y^k \rightarrow \hat{y}$ , имеем  $\hat{y} \in F(\hat{x})$ .

**Определение 8.4.** Отображение  $F$  называется *полунепрерывным снизу* в точке  $\hat{x} \in R^p$ , если из того, что  $x^k \rightarrow \hat{x}$  и  $\hat{y} \in F(\hat{x})$ , следует,



что найдется такая последовательность  $\{y^k\}$ , что  $y^k \in F(x^k)$  при достаточно больших  $k$  и  $y^k \rightarrow \hat{y}$ .

**Определение 8.5.** *Отображение  $F$  называется непрерывным в точке  $\hat{x} \in \mathbb{R}^p$ , если оно полунепрерывно сверху и снизу в этой точке.*

Понятие непрерывности многозначного отображения может быть дано с помощью метрики Хаусдорфа, которая определяет расстояние между подмножествами  $A_1, A_2$  метрического пространства  $\mathbb{R}^m$ :

$$h_y(A_1, A_2) = \max\left\{\sup_{y \in A_1} \rho_y(y, A_2), \sup_{y \in A_2} \rho_y(y, A_1)\right\},$$

$$\text{где } \rho_y(y, A) = \inf_{y' \in A} \rho_y(y, y'), A = A_1, A_2.$$

**Определение 8.6.** *Отображение  $F$  называется непрерывным в метрике Хаусдорфа, если*

$$h_y(F(x), F(\hat{x})) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \hat{x}.$$

**Замечание 8.2.** *Хотя определение непрерывности многозначного отображения  $F$  отличается от определения непрерывности в метрике Хаусдорфа, в случае компактных множеств в конечномерных пространствах эти определения совпадают.*

Для того чтобы были ясны особенности проблемы устойчивости в задаче МКО, рассмотрим устойчивость задачи скалярной оптимизации

$$y = f(x) \rightarrow \max, \quad x \in X.$$

Ее возмущение имеет вид

$$y = \hat{f}(x, u) \rightarrow \max, \quad x \in X(u), \quad u \in U.$$

По-прежнему предполагаем, что  $U$  — метрическое пространство и  $\hat{u} \in \text{int } U$ .

Введем обозначения  $W(u) = \max_{x \in X(u)} \hat{f}(x, u)$  и

$$M(u) = \{x \in X(u) | \hat{f}(x, u) = W(u)\}.$$

Имеют место следующие утверждения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Теоремы 8.8–8.11 были доказаны, например, в книге Sawaragi Y., Nakayama H., Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization. Academic Press, 1985.

**Теорема 8.8.** Пусть отображение  $X(u)$  непрерывно в точке  $\hat{u} \in \text{int } U$ , множества  $X(u)$  замкнуты и равномерно ограничены в некоторой окрестности  $\hat{u}$ . Пусть функция  $\hat{f}(x, u)$  непрерывна в некоторой окрестности  $X(\hat{u}) \times \hat{u}$ . Тогда функция  $W(u)$  непрерывна в точке  $\hat{u}$ .

**Теорема 8.9.** Пусть отображение  $X(u)$  непрерывно в точке  $\hat{u} \in \text{int } U$ . Пусть функция  $\hat{f}(x, u)$  непрерывна в некоторой окрестности  $X(\hat{u}) \times \hat{u}$ . Тогда отображение  $M(u)$  полунепрерывно сверху в точке  $\hat{u}$ .

#### 8.4. Устойчивость паретовой и слейтеровой границ

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости множеств  $P(Y)$  и  $S(Y)$ .

**Теорема 8.10.** Пусть множество  $Y(\hat{u})$  непусто и отображение  $Y(u)$  непрерывно в точке  $\hat{u} \in \text{int } U$ . Пусть  $P(Y(\hat{u})) = S(Y(\hat{u}))$ . Тогда отображение  $P(Y(u))$  полунепрерывно сверху в точке  $\hat{u}$ .

*Доказательство.* Доказательство основано на определении непрерывности многозначного отображения. Пусть имеются последовательности  $\{u^k\}$  и  $\{y^k\}$  такие, что  $u^k \rightarrow \hat{u} \in \text{int } U$  и  $y^k \in P(Y(u^k))$ , причем  $y^k \rightarrow \hat{y}$ . Требуется доказать, что  $\hat{y} \in P(Y(\hat{u}))$ . Сразу заметим, что из непрерывности  $Y(u)$  следует, что  $\hat{y} \in Y(\hat{u})$ .

Докажем, что  $\hat{y} \in P(Y(\hat{u}))$ . Предположим противное, т.е. пусть  $\hat{y} \notin P(Y(\hat{u}))$ . По условию  $P(Y(\hat{u})) = S(Y(\hat{u}))$ , поэтому  $\hat{y} \notin S(Y(\hat{u}))$ . Следовательно, найдется такая точка  $y' \in Y(\hat{u})$ , что  $y' > \hat{y}$ . Но отображение  $Y(u)$  непрерывно (в том числе и полунепрерывно снизу) в точке  $\hat{u}$ , поэтому найдется такая последовательность  $\{\bar{y}^k\}$ , что  $\bar{y}^k \in Y(u^k)$  и  $\bar{y}^k \rightarrow y'$ . Так как  $y' > \hat{y}$ , то для достаточно больших  $k$  будет выполняться  $\bar{y}^k > y^k$ . С другой стороны,  $y^k \in P(Y(u^k))$ . Получили противоречие, так как точки  $\bar{y}^k \in Y$  доминируют паретовские точки. Значит, сделанное предположение неверно и  $\hat{y} \in P(Y(\hat{u}))$ .  $\square$

**Замечание 8.3.** Для широких классов возмущений, встречающихся на практике, требование  $P(Y(\hat{u})) = S(Y(\hat{u}))$  является необходимым условием для полунепрерывности сверху многозначного отображения.

**Теорема 8.11.** Пусть множество  $Y(\hat{u})$  непусто и отображение  $Y(u)$  непрерывно в точке  $\hat{u} \in \text{int } U$ . Пусть множества  $Y(u)$  замкнуты и равномерно ограничены в некоторой окрестности точки  $\hat{u}$ . Тогда отображение  $P(Y(u))$  полунепрерывно снизу в точке  $\hat{u}$ .

*Доказательство.* Пусть заданы последовательность  $\{u^k\}$ ,  $u^k \rightarrow \hat{u}$ , и точка  $\hat{y} \in P(Y(\hat{u}))$ . Поскольку отображение  $Y(u)$  непрерывно (и тем самым полунепрерывно снизу), существует такая последовательность  $\{\tilde{y}^k\}$ , что  $\tilde{y}^k \in Y(u^k)$  и  $\tilde{y}^k \rightarrow \hat{y}$ .

Поскольку множества  $Y(u)$  компактны в некоторой окрестности  $\hat{u}$ , то из теоремы 6.2 о непустоте множества  $P(Y)$  и НМ-свойстве паретова строгого порядка на  $P(Y) \in Y$  следует, что при достаточно больших  $k$ , таких что множества  $Y(u^k)$  компактны, существуют точки  $\{\bar{y}^k\} \in P(Y(u^k))$ , удовлетворяющие соотношению  $\bar{y}^k \geq \tilde{y}^k$ .

Поскольку множества  $Y(u)$  равномерно ограничены, последовательность  $\bar{y}^k$  ограничена, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к подпоследовательностям, в силу полунепрерывности сверху отображения  $Y(u)$  получим, что  $\bar{y}^k \rightarrow y' \in Y(\hat{u})$ . Перейдя к пределу, получим, что  $y' \geq \hat{y}$ . Поскольку  $\hat{y} \in P(Y)$ , то  $y' = \hat{y}$ . Таким образом, построена последовательность точек  $\{\bar{y}^k\}$ ,  $\bar{y}^k \in P(Y(u^k))$ , сходящихся к  $\hat{y}$ . Из определения полунепрерывности следует утверждение теоремы.  $\square$

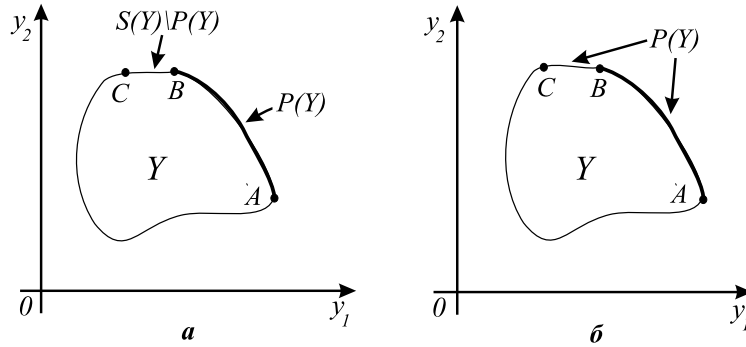


Рис. 8.2.

Проиллюстрируем доказанный результат на примере двухкритериальной задачи. Пусть невозмущенное множество  $Y$  имеет вид, представленный на рис. 8.2 а. Для этого множества невозмущенная граница Парето задается кривой  $AB$ , а невозмущенная граница Слейтера — кривой  $ABC$ . На рисунке видно, что эти кривые не совпадают. Если возникнет небольшое возмущение точки  $C$ , обе границы могут существенно измениться: если точка  $C$  сдвинется внутрь множества  $Y$ , паретовская граница останется без изменения, а слейтеровская совпадет с паретовской границей — кривой  $AB$ . Если же точка  $C$  сдвинется вне множества  $Y$ , слейтеровская граница немного

изменится, а паретовская граница станет совпадать со слейтеровской границей — кривой  $ABC$  (см. рис. 8.2 б). Ясно, что совпадение паретовской и слейтеровской границ необходимо для устойчивости этих границ по отношению к возмущению точки  $C$ .

Условия непрерывной зависимости множества достижимых критериальных векторов  $Y(u)$  по отношению к параметрам оказываются значительно проще, чем для оптимальных множеств.

### 8.5. Устойчивость множества достижимых критериальных векторов

Итак, рассматриваются метрические пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^m$  и  $U$ . Прежде всего, сформулируем аналог теорем 8.10 и 8.11.

**Теорема 8.12.** Пусть  $X(\hat{u})$  непусто и компактно. Пусть отображение  $X(u)$  непрерывно в точке  $\hat{u} \in \text{int } U$ , а функция  $\hat{\varphi}(x, u)$  непрерывна в некоторой окрестности  $X(\hat{u}) \times \hat{u}$ . Тогда отображение  $Y(u)$  непрерывно в  $\hat{u}$ .

Доказательство этого утверждения следует сразу из определений полунепрерывности сверху и снизу многозначного отображения  $Y(u)$  в точке  $\hat{u}$ .

Как видим, в этой теореме не требуется выполнения каких-либо специфических условий непрерывности  $Y(u)$  (ср. с теоремой 8.9). Для того чтобы получить количественную оценку возмущения множества  $Y$ , рассмотрим случай непрерывной по Липшицу функции  $\hat{\varphi}(x, u)$ , т.е. предположим, что найдутся такие числа  $K_x > 0$  и  $K_u > 0$ , что в некоторой окрестности  $O_\varepsilon(\hat{u})$  точки  $\hat{u} \in \text{int } U$  имеет место

$$\rho_y(\hat{\varphi}(x', u), \varphi(x'', u)) \leq K_x \rho_x(x', x'')$$

и в некоторой окрестности  $X(\hat{u})$  имеет место

$$\rho_y(\hat{\varphi}(x, u'), \varphi(x, u'')) \leq K_u \rho_u(u', u'').$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_y(Y(u), Y(\hat{u})) &= h_y(\hat{\varphi}(X(u), u), \hat{\varphi}(X(\hat{u}), \hat{u})) \leq \\ &\leq h_y(\hat{\varphi}(X(u), u), \hat{\varphi}(X(\hat{u}), u)) + h_y(\hat{\varphi}(X(\hat{u}), u), \hat{\varphi}(X(\hat{u}), \hat{u})) \leq \\ &\leq K_x h_x(X(u), X(\hat{u})) + K_u \rho_u(u, \hat{u}), \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим случай линейных критериев, т.е.  $\varphi(x, u) = W(u)x$ . Тогда

$$Y(u) = \{u \in \mathbb{R}^m | y = W(u)x, x \in X(u)\}.$$

Оценим расстояние между множеством  $Y(u)$  и невозмущенным множеством  $Y(\hat{u})$ :

$$h_y(Y(u), Y(\hat{u})) \leq \|W(u)\| \cdot h_x(X(u), X(\hat{u})) + \sup_{X(\hat{u})} \|x\| \|W(u) - W(\hat{u})\|.$$

Таким образом, линейность критериев позволяет дать более точную оценку возмущения. Сразу видно, что для того, чтобы малое возмущение матрицы  $W(\hat{u})$  не приводило к сильным возмущениям  $Y(\hat{u})$ , требуется ограниченность множества  $X$ .

Изучим вопрос устойчивости множества  $X$ . Рассмотрим в качестве примера один конкретный тип множества  $X$ . Пусть  $X = C \cap X_A$ , где  $X_A = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ , в котором возмущаются матрица  $A$  и вектор  $b$ , а  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  — компактное выпуклое множество  $\mathbb{R}^n$ , которое не подвергается возмущению.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 8.13.** Пусть существует такой вектор  $x^* \in C$ , что  $x^* \in \text{int } X_A$ . Тогда множество  $X$  зависит непрерывно от элементов матрицы  $A$  и вектора  $b$ .

Заметим, что в этом случае имеет место количественная оценка возмущений многогранного множества  $X$ , которая позволяет дать количественную оценку возмущения множества  $Y$ . Этот вопрос, однако, лежит за пределами нашего курса<sup>2)</sup>.

Рассмотрим теперь вопрос о возмущении множества  $Y_P$ . Как легко заметить, если конус  $\mathbb{R}_+^m$  не возмущается (что легко проконтролировать в вычислительных алгоритмах), то имеет место оценка

$$h(Y_P(u), Y_P(\hat{u})) \leq h(Y(u), Y(\hat{u})).$$

Таким образом, из устойчивости множества достижимых критериальных векторов следует устойчивость и его оболочки Эджворта-Парето.

<sup>2)</sup> А.В. Лотов Об оценке устойчивости и числе обусловленности множества решений системы линейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т.24, №12, 1984.

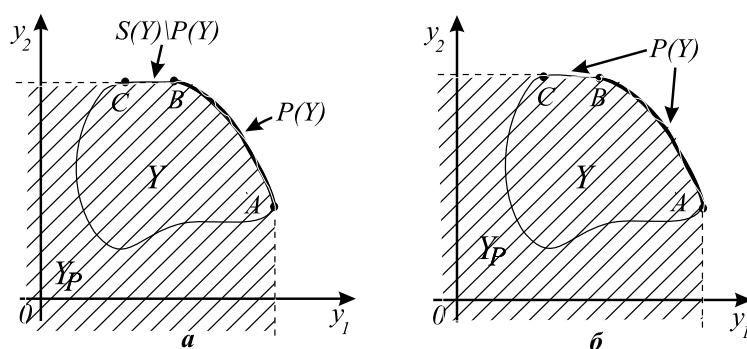


Рис. 8.3.

Вернемся к рассмотрению примера неустойчивости паретовой и слейтеровской границ, данного на рис. 8.2. На рис. 8.3 можно увидеть следствия такого же возмущения точки  $C$ , что и на рис. 8.2. Как ясно из рис. 8.3, малые возмущения точки  $C$  изменяют ОЭП в малой степени, так что имеет место доказанная выше устойчивость ОЭП. Поскольку непрерывная зависимость множества  $X$  от возмущений параметров его описания является естественным требованием в задачах оптимизации, скалярной или многокритериальной, приведенный результат показывает, что множества  $Y$  и  $Y_P$  в рассматриваемом случае являются устойчивыми при выполнении естественных предположений. Отсюда, кстати, следует и устойчивость идеальной точки.

Оказывается, что несовпадение паретовой и слейтеровой границ часто встречается на практике, так что они часто являются неустойчивыми. Доказать факт совпадения границ (если он имеет место) можно, однако это требует огромных вычислительных затрат. При этом наиболее сложна ситуация, когда в линейных задачах некоторые паретовские грани близки к слейтеровским. Таким образом, аппроксимация множеств  $Y$  и  $Y_P$  является вычислительном смысле более естественной задачей, чем аппроксимация множеств  $P(Y)$  и  $S(Y)$ , для решения которых приходится использовать сложные методы регуляризации задачи аппроксимации этих множеств<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup> Н.М. Попов Об аппроксимации множества Парето методом сверток // Вестник Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн., №2, 1982.

### **Часть III. Методы многокритериальной оптимизации**

#### **Лекция 9. Общие вопросы построения методов МКО**

Теория многокритериальной оптимизации служит основой при разработке методов поддержки принятия решений в том случае, когда выбор решения осуществляется по нескольким критериям. Сами по себе теоремы МКО не являются средствами для поддержки принятия решений; для построения многокритериальных методов необходимы дополнительные исследования, осуществляемые в рамках теории принятия решений. Более того, понятие решения задачи МКО в теории и методах МКО являются различными.

В теории МКО в качестве решения принято рассматривать недоминируемое множество в пространстве критериев или парето-эффективное множество в пространстве решений. В многокритериальных методах под решением задачи МКО понимается единственная точка парето-эффективного множества, предпочтительная для лица, принимающего решение. Хотя иногда в методах МКО требуется найти малое число решений, интересных с точки зрения ЛПР, в дальнейших рассуждениях в данной лекции ограничимся случаем единственного решения. Поскольку все точки недоминируемого множества в пространстве критериев или парето-эффективного множества в пространстве решений равноценны с точки зрения теории МКО, главную роль в многокритериальных методах поддержки принятия решений играет ЛПР — именно на основе учета предпочтений ЛПР находится то единственное парето-эффективное решение, которое считается результатом процесса выбора.

Методы поддержки принятия решений предназначены для того, чтобы помочь ЛПР в выборе наиболее предпочтительного парето-эффективного решения. В связи с этим возникает вопрос о том, какую информацию о предпочтениях человек может сообщать достаточно уверенно, так что ответ будет осознанным и при повторном опросе им не будет высказано мнение, противоречащее первоначальному.

##### **9.1. Сложность вопросов в многокритериальных методах**

Рассмотрим вопрос о том, какая информация может потребоваться от ЛПР в процедурах поддержки принятия решений при нескольких критери-

ях. Эти процедуры могут потребовать от ЛПР осуществить некоторые операции, которые можно разбить на следующие три основные группы: операции с критериями, с их значениями и с группами альтернатив. Эксперименты и наблюдения за высказываниями ЛПР позволили оценить сложность для человека [9] таких операций. Под сложностью в этом исследовании имеется в виду не сложность выбора (выбор между двумя альтернативными решениями, каждое из которых имеет определенные преимущества, всегда сложен), а неспособность человека осуществлять операцию логично и стабильно. *Сложной* операцией (сложным вопросом) считается такая операция, в процессе выполнения которой человек часто дает недостоверные или противоречивые ответы. Операция, в результате выполнения которой человек обычно дает логичные непротиворечивые ответы, причем при повторении эксперимента не меняет своего мнения, называется *допустимой*.

В исследовании [9] используются следующие обозначения:

С — сложная операция;

Д — допустимая операция;

МР — операция, допустимая при малой размерности задачи;

НД — операция, неопределенно допустимая (недостаточно исследована, но имеющиеся данные позволяют надеяться на ее допустимость);

НС — операция, неопределенно сложная (недостаточно исследована, но имеющиеся данные говорят о том, что она скорее всего сложная).

В следующем ниже списке под сравнением значений критериев или альтернатив имеется в виду указание, какое из значений (или какая из альтернатив) является более предпочтительным. В результате проведенных экспериментов получены, в частности, следующие результаты:

- операции с критериями:
  - назначение весов критериев — С,
  - упорядочивание критериев по важности — НД,
  - декомпозиция, т.е. разбиение критериев на подкритерии — МР;
- операции со значениями критериев:
  - сравнение различных значений одного критерия — Д,
  - построение функции полезности по одному критерию — С,
  - назначение удовлетворительных значений по одному критерию — НД;
- операции с альтернативами:
  - сравнение двух альтернатив, описываемых двумя критериями — Д,



- сравнение двух многокритериальных альтернатив — МР,
- выбор из группы альтернатив — С,
- назначение целевой точки — С,
- выбор критерия, значения которого хотелось бы улучшить, уступая по другому критерию — Д,
- определение в количественном виде увеличения значения одного критерия, компенсирующее уменьшение значения другого — Д (однократно), НС (множественно);
- сравнение альтернатив целостным образом:
  - сравнение двух альтернатив целостным образом — НД,
  - сравнение многих альтернатив — С.

Проведенный анализ сложности операций позволяет оценить реализуемость на практике многокритериальных методов поддержки принятия решений, предлагаемых различными специалистами.

Надо заметить, однако, что приведенные оценки сложности операций являются довольно условными. Это особенно касается недостаточно исследованных операций. Так, операция упорядочивания критериев по важности, которая в [10] охарактеризована как неопределенно допустимая, может вызвать затруднения, поскольку важность критериев обычно определяется ЛПР на основе их недостаточного уровня в текущем состоянии, а не стратегической важностью. Приведем пример. Известно, что в целом наиболее важным показателем деятельности фирмы является ее прибыльность. В то же время, для руководителя фирмы, только входящей в рынок, занимаемая фирмой доля рынка представляется значительно важнее прибыли, хотя такая инверсия важности характерна лишь в краткосрочном аспекте. Это может привести к выбору ошибочных решений при использовании методов, опирающихся на упорядочивание критериев по важности. В то же время, разбиение критериев на классы (скажем, важные и не очень) является, судя по всему, вполне доступной операцией.

Условность оценок сложности операции связана также с тем, что в них не учитываются многие условия эксперимента, в частности, фактор времени. Так, например, сравнение двух альтернатив, различающихся между собой по многим показателям, может быть успешно осуществлено, если для этого затратить достаточное время. Это становится ясно, если вспомнить первый метод многокритериального анализа альтернатив, который был предложен

знаменитым американским ученым и политическим деятелем Б. Франклином<sup>1)</sup> в 1772 году.

Б. Франклин отдавал себе отчет в том, что основная трудность анализа возможного решения связана с ограниченностью человеческой памяти. Он предложил простой способ — постепенно, по мере осознания, занести достоинства и недостатки некоторого решения на лист бумаги. Далее он предложил вычеркивать компенсирующие друг друга свойства решения и принять его, если оно будет иметь некомпенсированные преимущества. Крайне важно, что Б. Франклин подчеркивал необходимость затратить несколько дней на эту процедуру. Такое требование понятно с точки зрения концепции трехуровневой ментальной модели (см. лекцию 1) — это время требуется для того, чтобы все уровни ментальной модели пришли к консенсусу. Ясно, что и выбор из небольшого числа многокритериальных альтернатив также должен осуществляться в течение нескольких дней. А для решения проблемы выбора из большого числа многомерных альтернатив может потребоваться несколько месяцев. Так что в приведенных оценках сложности операций недостает указания на затраченное время (по-видимому, на обдумывание давалось не более нескольких минут). К сожалению, задача анализа влияния затрачиваемого времени на надежность результатов выбора психологами пока не изучена.

## 9.2. Классификация методов

К настоящему моменту разработано несколько тысяч различных методов поддержки принятия решений при нескольких критериях, и естественно существуют различные подходы к их классификации. Как уже говорилось, в данной части курса лекций рассматриваются методы многокритериальной оптимизации, поэтому ограничимся классификацией этих методов. Точнее говоря, рассматриваются методы, предназначенные для нахождения предпочтительного парето-эффективного решения в случае большого или бесконечного множества допустимых решений  $X \subseteq W$ , заданного совокупностью математических соотношений, и критериями  $y \in \mathbb{R}^m$ , связанными с решениями заданной вектор функцией  $y = \varphi(x)$ . При этом будем, для определенности, рассматривать задачу многокритериальной максимизации.

Наиболее важный из способов классификации — по роли ЛПР. В этом случае методы поддержки принятия решений в задачах МКО принято классифицировать следующим образом:

---

<sup>1)</sup>Перевод письма Б. Франклина приведен на стр. 105 книги [10].

1. методы поиска решения без участия ЛПР,
2. методы, использующие предпочтения ЛПР для построения правила выбора единственного или небольшого числа парето-эффективных решений,
3. интерактивные (итеративные) процедуры решения задачи с участием ЛПР,
4. методы, основанные на аппроксимации паретовой границы и информировании ЛПР о ней в том или ином виде; далее ЛПР указывает наиболее предпочтительную критериальную точку на паретовой границе; по этой критериальной точке находят предпочтительное решение.

Методы первых двух групп основываются на построении *решающего правила*, т.е. правила нахождения одного или нескольких решений из допустимого множества. Отличие первой группы методов от второй состоит в том, что в первой группе решающее правило строится без участия ЛПР, а в методах второй группы используется информация о предпочтениях ЛПР.

В данной лекции мы кратко рассматриваем методы поиска решения без участия ЛПР. Остальные группы методов будут подробно рассмотрены далее.

### 9.3. Методы поиска решения без участия ЛПР

Методы поиска решения без участия ЛПР строятся на основе использования либо некоторой аксиоматики, либо эвристических принципов. В эвристических подходах обычно предлагается выбрать скалярный критерий оптимизации, не привлекая ЛПР к решению этой проблемы. Обоснование выбора критерия оптимизации базируется на более или менее логичном содержательном объяснении того, почему в качестве него выбирается та или иная функция. Далее на основе оптимизации этой функции находится одно из допустимых решений и предъявляется ЛПР как наиболее подходящее. Если ЛПР соглашается с найденным решением, оно считается наилучшим.

Встречаются, например, такие скалярные критерии, как

$$1) U(y) = \sum_i y_i,$$

$$2) U(y) = \min_i y_i,$$

$$3) U(y) = \sum_i \ln y_i,$$

- 4)  $U(y) = -\rho(y, y^*)$ , где  $\rho(y', y'')$  — каким-то образом определенное расстояние между критериальными точками  $y'$  и  $y''$ .

Эти функции обычно используются в том случае, когда критерии задачи имеют одинаковую размерность. В противном случае величины  $y_i$  требуется предварительно сделать безразмерными. Это обычно делается с помощью следующей замены:

$$\bar{y}_i = \frac{y_i - y_i^{min}}{y_i^* - y_i^{min}},$$

где  $y^*$  — идеальная точка,  $y_i^{min}$  — минимальное приемлемое значение по  $i$ -му критерию. Часто в качестве  $y_i^{min}$  берется наихудшее значение  $y_i$  на множествах  $Y$  или  $P(Y)$ .

Отметим, что такие способы замены предпочтений ЛПР на некоторые искусственные конструкции обычно используются в случае отсутствия ЛПР или его нежелании (или невозможности по каким-то причинам) принимать участие в выборе решения. В любом случае этот способ реализует произвол эксперта, предлагающего критерий оптимизации.

Альтернативный подход состоит в использовании какой-либо системы аксиом. При этом ЛПР, если он имеется, должен понять эти аксиомы и согласиться с ними.

Надо отметить, что методы принятия решений без участия ЛПР не подходят для использования в системах поддержки принятия решений, поскольку устраняют ЛПР из этого процесса. В то же время, такие методы могут быть приемлемы для ЛПР, не желающего нести ответственность за негативные последствия принимаемого решения.

Перейдем к рассмотрению остальных групп методов поиска решения в задачах МКО, в которых роль ЛПР существенна.

## Лекция 10. Методы, учитывающие предпочтения ЛПР при построении решающего правила

Наиболее распространенным подходом к построению решающего правила на основе предпочтений ЛПР является построение функции полезности (ценности), полностью отражающей предпочтения ЛПР по отношению к величинам частных критериев. В таком случае поиск решения сводится к нахождению допустимого решения, которое максимизирует значение функции полезности. В данной лекции мы сначала кратко изложим основы теории функций полезности, а затем перейдем к вопросу об ее построении на основе взаимодействия с ЛПР.

### 10.1. Функция полезности

В связи с простотой формулировки задачи скалярной оптимизации внимание исследователей давно привлекал вопрос о том, когда бинарные отношения предпочтения  $x' \succ x''$  и  $x' \succeq x''$ , заданные на парах элементов множества  $G$ , можно описать с помощью числовой функции, определенной на элементах множества  $G$ .

**Определение 10.1.** Числовая функция  $u(x)$ , определенная на множестве  $G$ , называется функцией полезности, соответствующей бинарному отношению предпочтения  $\succ$  (или  $\succeq$ ), если  $x' \succ x'' \Leftrightarrow u(x') > u(x'')$  (или  $x' \succeq x'' \Leftrightarrow u(x') \geq u(x'')$ ).

Условия существования функции полезности, соответствующей бинарному отношению  $\succ$ , заданному на конечном множестве  $G$ , дает следующая теорема, доказанная в конце XIX века.

**Теорема 10.1.** Для существования функции полезности  $u(x)$ , соответствующей бинарному отношению строгого порядка, заданному на конечном множестве  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы строгий порядок был негатранзитивен.

Заметим, что достаточным условием негатранзитивности строгого порядка является его слабая связность. Таким образом, для слабо связанных отношений строгого порядка, заданных на конечных множествах, функция полезности, соответствующая этому отношению, существует. Немецкий математик Г. Кантор обобщил это утверждение на множества бесконечного числа элементов, используя при этом одно трудно проверяемое условие, на

котором мы останавливаться не будем. Более удобное условие предложил французский экономист Ж. Дебре в середине XX века.

Пусть, для простоты,  $G$  принадлежит конечномерному линейному пространству  $\mathbb{R}^m$  с некоторой метрикой. Пусть на множестве  $G$  задано бинарное отношение квазипорядка  $\succeq$  и порожденное им отношение строгого порядка  $\succ$ . Дополнительно потребуем, чтобы отношение  $\succeq$  обладало свойством непрерывности.

**Определение 10.2.** *Отношение предпочтения  $\succeq$  называется непрерывным на  $G$ , если множество  $\{(x, y) | x \succ y\}$  является открытым подмножеством  $G^2$ .*

Содержательно это определение означает следующее: если элемент  $x^0$  строго предпочтительнее элемента  $y^0$  ( $x^0 \succ y^0$ ), то при малом изменении каждого из этих элементов отношение строгого предпочтения сохраняется, т.е. если  $x$  и  $y$  близки соответственно к  $x^0$  и  $y^0$ , то  $x \succ y$ .

**Замечание 10.1.** *Проверка условия непрерывности из определения 10.2 может быть затруднительна. Более удобным с практической точки зрения является следующее, эквивалентное, определение: отношение предпочтения  $\succeq$  называется непрерывным на  $G$ , если*  
 1) *множество  $\{y | x \succ y\}$  открыто в  $G$  при любом  $x \in G$ ,*  
 2) *множество  $\{x | x \succ y\}$  открыто в  $G$  при любом  $y \in G$ .*

Несмотря на то, что предположение о непрерывности отношения предпочтения кажется весьма естественным, нетрудно указать довольно простое и часто используемое бинарное отношение, не удовлетворяющее этому требованию. Оно называется *лексикографическим отношением предпочтения* и определяется следующим образом:  $x \succeq y$ , если  $x_1 > y_1$ , либо если существует  $1 < p < t$  такой, что  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_p = y_p, x_{p+1} > y_{p+1}$ . Отсутствие непрерывности у такого отношения предпочтения показывается следующим пример.

*Пример.* Пусть  $G = \mathbb{R}^2$  и элементы  $x', x'' \in \mathbb{R}^2$  таковы, что  $x'_1 = x''_1$  и  $x'_2 > x''_2$ . Согласно определению лексикографического отношения предпочтения в этом случае  $x' \succeq x''$ . Как нетрудно видеть, множество  $\{x | x' \succ x\}$  необязательно открыто в  $\mathbb{R}^2$ , поскольку в любой окрестности точки  $x'$  найдутся такие точки  $x$ , что  $x_1 < x'_1$ . Рассмотрим, например,  $x' = (0, 0.001)$ ,  $x'' = (0, 0)$ . Ясно, что  $x' \succeq x''$ , но для точки  $x = (-0.0001, 0.001)$ , находящейся в достаточно малой окрестности  $x'$ , это отношение уже не выполнено.

Условие непрерывности отношения предпочтения является необходимым для того, чтобы его можно было представить с помощью функции полез-

ности. Существование функции полезности, соответствующей отношению квазипорядка  $\succeq$ , утверждает теорема Дебре (см. [1]). В упрощенном виде для рассматриваемого нами случая  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  она имеет следующий вид.

**Теорема 10.2.** *Если множество  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  связно, а квазипорядок  $\succeq$  является связным и непрерывным на  $G$ , то существует такая непрерывная функция полезности  $u(x)$ , что  $x' \succeq x'' \Leftrightarrow u(x') \geq u(x'')$ .*

Для частичных бинарных отношений, для которых не существует функций полезности, соответствующих этим отношениям, представляет интерес ответ на вопрос о существовании таких функций полезности  $u(x)$ , что из  $x' \succeq x''$  следует  $u(x') \geq u(x'')$ . Оказывается, что всякое бинарное отношение может быть пополнено до связного, поэтому поставленный вопрос сводится к свойствам связных отношений.

Сложность использования аппарата функций полезности в МКО состоит в том, что изучаемые бинарные отношения предпочтения, которые отражают высказывания ЛПР о своих предпочтениях, обычно не являются связными, что приводит к неоднозначности функции полезности. Из-за этого выбранная каким-либо образом функция полезности несвязного бинарного отношения может не отражать интересов ЛПР. В частности, она может противоречить новой информации о предпочтениях, которая будет получена от ЛПР в дальнейшем. В связи с этим в многокритериальных методах, использующих аппарат функций полезности, обычно ограничивают класс применяемых функций. Так, как правило, функции полезности выбирают в классе монотонно возрастающих вогнутых функций.

Теоретически наиболее разработаны и практически наиболее важны в МКО методы, использующие функции полезности от значений частных критериев, имеющие аддитивную структуру, т.е. функции вида  $U(y) = \sum_i U_i(y_i)$ .

## 10.2. Аддитивные функции полезности

Отметим прежде всего, что при использовании функции полезности главную роль играют не сама функция полезности, а определяемые ею *поверхности безразличия*, т.е. решения уравнения  $U(y) = \text{const}$ . При  $m = 2$  решения уравнения  $U(y) = \text{const}$  называются *кривыми безразличия*. Для того чтобы понять роль поверхностей безразличия, достаточно вспомнить геометрическую интерпретацию решения задачи  $\max_{y \in Y} U(y)$  — это такая точка  $y^* \in Y$ , через которую проходит линия  $U(y) = \text{const}$  с наибольшим значением константы. Поверхности безразличия не меняются при следующем

преобразовании функции полезности. Пусть  $U(y)$  — функция полезности на  $\mathbb{R}^m$ ,  $f(t)$  — строго возрастающая функция на  $\mathbb{R}^1$ . Тогда функция полезности  $\tilde{U}(y) = f(U(y))$  имеет те же поверхности безразличия, что и функция  $U(y)$ . Функции полезности, приводящие к одной и той же картине поверхностей безразличия, принято называть *стратегически эквивалентными*. В связи с этим вопрос об аддитивности функции полезности состоит в том, могут ли отношения предпочтения ЛПР быть представлены в аддитивном виде.

*Пример.* Пусть  $U(y) = A \prod_{i=1}^m y_i^{\alpha_i}$ ,  $A > 0$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Если  $f(t) = \ln(t)$ , то  $\tilde{U}(y) = \ln U(y)$ . Тогда  $\tilde{U}(y) = \ln A + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln y_i$ . Функции  $U(y)$  и  $\tilde{U}(y)$  стратегически эквивалентны. Таким образом, предпочтение, задаваемое мультипликативной функцией, может быть представлено в аддитивном виде.

Оказывается, что для представления в виде аддитивной функции полезности предпочтения должны удовлетворять довольно жестким ограничениям. Рассмотрим сначала случай  $m = 2$ , когда кривые безразличия можно изобразить на плоскости. Пусть  $U(y_1, y_2)$  непрерывно дифференцируема. Тогда уравнение кривой безразличия  $U(y_1, y_2) = \text{const}$  имеет вид  $\frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 = 0$ . Пусть  $\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{\partial U}{\partial y_2} / \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\lambda$ . Величина  $\lambda$  называется *предельной нормой замещения* (см. [7]).

Пусть структура предпочтения аддитивна, т.е. в произвольной точке  $Z$  с координатами  $(y_1, y_2)$  для функции полезности справедливо представление  $U(Z) = U_1(y_1) + U_2(y_2)$ . Тогда  $\lambda_Z = U'_2(y_2)/U'_1(y_1)$ . Таким образом, для касательных к кривым безразличия в точках  $A, B, C$  и  $D$ , изображенных на рис. 10.1, должно выполняться следующее соотношение:

$$\lambda_D = \frac{U'_2(y_2^1)}{U'_1(y_1^1)} = \frac{U'_2(y_2^1)}{U'_1(y_1^0)} \cdot \frac{U'_1(y_1^0)}{U'_2(y_2^0)} \cdot \frac{U'_2(y_2^0)}{U'_1(y_1^1)} = \frac{\lambda_B \lambda_C}{\lambda_A}.$$

Получили, что необходимым условием аддитивности функции полезности при  $m = 2$  является выполнение равенства

$$\lambda_A \lambda_D = \lambda_B \lambda_C$$

для любых точек  $A, B, C$  и  $D$ . Как можно показать, оно является и достаточным.



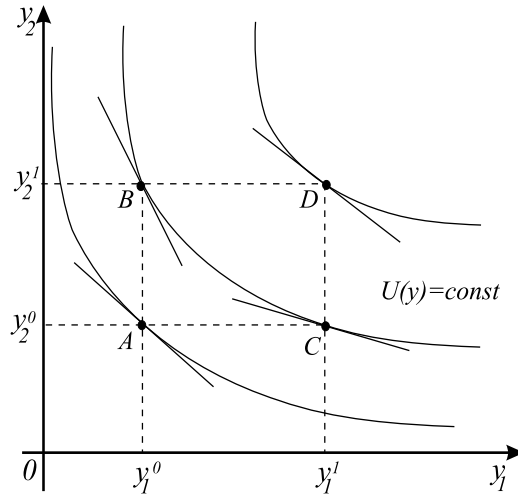


Рис. 10.1.

Рассмотрим случай  $m = 3$ . Развивая идеи определения 3.4, будем называть пару критериев  $(y_1, y_2)$  *независимой по предпочтению* от критерия  $y_3$ , если верна импликация  $(y_1', y_2', y_3^*) \succ (y_1'', y_2'', y_3^*) \Rightarrow (y_1', y_2', y_3) \succ (y_1'', y_2'', y_3)$  при любых значениях  $y_3^*$  и  $y_3$ , т.е. структура предпочтения в пространстве  $(y_1, y_2)$  не зависит от  $y_3$ . Если все три пары критериев  $(y_1, y_2)$ ,  $(y_2, y_3)$  и  $(y_1, y_3)$  независимы по предпочтению от значения третьего критерия, то структура предпочтения аддитивна.

При  $m > 3$  аддитивность структуры предпочтений имеет место, если любые наборы критериев независимы по предпочтению от остальных критериев, не вошедших в эти наборы. Как видим, проверка этих условий весьма затруднительна.

### 10.3. Построение поверхностей безразличия в случае аддитивной структуры предпочтений

Для аддитивной структуры предпочтений строить поверхности безразличия гораздо проще, чем в общем случае. Рассмотрим процедуру построения кривых безразличия для аддитивной структуры предпочтений в случае двух критериев, т.е. будем предполагать, что предпочтения ЛПР могут быть описаны не известной нам функцией полезности

$$U(y) = U_1(y_1) + U_2(y_2), y \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку функция полезности не является однозначно определенной, прежде всего требуется указать точку нулевой полезности и единицу измерения. Для этого ЛПР определяет минимально допустимые значения критериев  $y^{min} = (y_1^{min}, y_2^{min})$ , для которых считается, что

$$U(y^{min}) = U_1(y_1^{min}) = U_2(y_2^{min}) = 0.$$

Затем определяется значение  $y_1^1$ , при котором отклонение от минимального является существенным для ЛПР. Если положить  $U_1(y_1^1) = 1$ , то будет задан масштаб для значений функции полезности.

Далее от ЛПР требуется указать значение второго критерия  $y_2^1$  таким образом, чтобы точка  $(y_1^{min}, y_2^1)$  была равноценна точке  $(y_1^1, y_2^{min})$  (см. рис. 10.2).

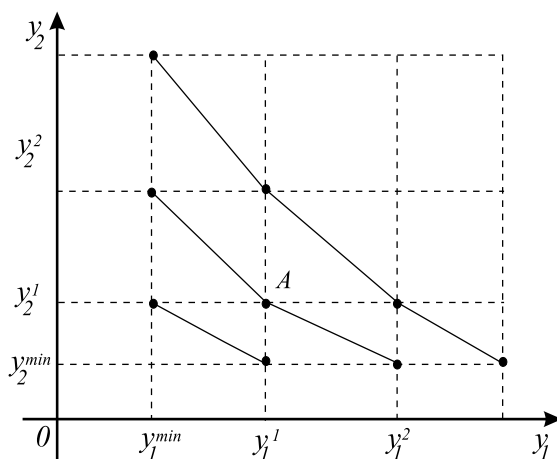


Рис. 10.2.

Этот вопрос непрост, поэтому для облегчения получения ответа на него обычно предлагается процедура, основанная на постепенном уточнении положения равноценной точки. Сначала задается начальное достаточно большое значение второго критерия  $y_2^{max}$  и выясняется, действительно ли ЛПР предпочитает точку  $(y_1^{min}, y_2^{max})$  точке  $(y_1^1, y_2^{min})$ . Если это не так, то  $y_2^{max}$  увеличивается до тех пор, пока это требование не будет выполнено (если такое  $y_2^{max}$  найти не удастся, требуется уменьшить величину  $y_1^1$ ). Далее отрезок  $[y_2^{min}, y_2^{max}]$  делится точкой  $y_2^*$  на две части (например, пополам), после чего ЛПР отвечает на вопрос о том, что предпочтительнее, точка  $(y_1^{min}, y_2^*)$

или точка  $(y_1^1, y_2^{min})$ . Если ЛПР выбирает точку  $(y_1^{min}, y_2^*)$ , то процедура деления продолжается на отрезке  $[y_2^{min}, y_2^*]$ . В противном случае точка, равноценная  $(y_1^1, y_2^{min})$ , находится на отрезке  $[y_2^*, y_2^{max}]$ , и этот отрезок делится на части. Деление повторяется до тех пор, пока отрезок не станет достаточно мал или ЛПР не скажет, что полученная точка  $(y_1^{min}, y_2^1)$  равноценна  $(y_1^1, y_2^{min})$ .

После того, как найдена точка  $(y_1^{min}, y_2^1)$ , равноценная точке  $(y_1^1, y_2^{min})$ , полагаем  $U_2(y_2^1) = 1$  и, соединяя эти точки отрезком прямой, получаем первую аппроксимацию кривой безразличия. Это означает, что мы предполагаем, что не только в крайних точках, но и на всем отрезке имеем  $U(y) = 1$ .

Очевидно, что в силу аддитивности в точке  $y^1 = (y_1^1, y_2^1)$  выполнено равенство  $U(y^1) = U_1(y_1^1) + U_2(y_2^1) = 1 + 1 = 2$ , т.е. в точке  $A$  на рис. 10.2 полезность равна 2. На следующем шаге нужно увеличить значения каждого из критериев таким образом, чтобы новые полученные точки  $(y_1^2, y_2^{min})$  и  $(y_1^{min}, y_2^2)$  (см. рис. 10.2) были равноценны точке  $A = (y_1^1, y_2^1)$ . Снова используется описанная выше процедура деления отрезка, после чего соединяем равноценные точки и получаем следующую аппроксимацию кривой безразличия. Построение остальных линий осуществляется аналогично.

Процедуру построения аддитивной функции полезности можно считать сложной для человека, так как операции сравнения критериальных точек осуществляется большое число раз. В результате этого человек, которому задаются вопросы о равноценности критериальных точек, может ошибаться в своих оценках или давать противоречивые ответы, что можно проверить в процессе проведения процедуры. Заметим, что для проверки аддитивности предпочтений условие  $\lambda_A \lambda_D = \lambda_B \lambda_C$  нужно проверять для всевозможных прямоугольников на критериальной плоскости.

Когда описанная процедура переносится на многомерный случай, она становится значительно сложнее. Уже на первом шаге число точек единичной полезности равно размерности пространства, а поверхность безразличия представляет собой грань симплекса. Соответственно возрастает сложность алгоритма, усугубляемая отсутствием графической поддержки. При этом вероятность ошибки ЛПР возрастает многократно, тем более что при  $m \geq 3$  условия независимости по предпочтениям имеют качественный вид и проверить их практически невозможно.

Отметим, что для того, чтобы избежать построения линий уровня, иногда

предлагают строить аддитивную функцию полезности в виде

$$U(y) = \sum_{i=1}^m c_i U_i(y_i), \quad (10.1)$$

где  $c_i$  — положительные веса, задаваемые ЛПР,  $U_i(y_i)$  — функции, также задаваемые ЛПР на основе непосредственного изображения этих одномерных функций. Заметим, что такой подход является необоснованным, поскольку аддитивность функции полезности еще не означает возможность использования формулы (10.1).

Действительно, рассмотрим аддитивное предпочтение, задаваемое функцией  $U(y) = \sqrt{y_1 y_2}$ ,  $y_1, y_2 > 0$ . Тогда ЛПР, быть может, и нарисует однокритериальные функции полезности  $U_1(y_1) = \sqrt{y_1}$  и  $U_2(y_2) = \sqrt{y_2}$ , но, положив в связи с одинаковой важностью  $c_1 = c_2 = 1$ , ЛПР получит функцию  $\hat{U}(y) = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$ , кривые безразличия которой не совпадают с кривыми безразличия настоящей функции  $U(y) = \sqrt{y_1 y_2}$ .

В связи со сложностью теоретически обоснованных процедур построения функции полезности (а описанная нами процедура является одной из наиболее простых), в практике многокритериальной оптимизации часто используются альтернативные методы построения решающего правила.

#### 10.4. Эвристические подходы к построению решающего правила

##### Целевой подход

Целевой подход основан на том, что лицо, принимающее решение, должно назначить цель — некоторую (обычно недостижимую) критериальную точку  $\hat{y}$ , отражающую его желания. В задачах многокритериальной максимизации рассматривается конус точек  $Z = \{z \in \mathbb{R}^m | z \geq \hat{y}\}$ , удовлетворяющих требованиям ЛПР. В качестве функции полезности используется функция  $U(y) = -\rho(y, Z)$ , где  $\rho(y, Z)$  — отклонение точки  $y$  от  $Z$ . Решающее правило состоит в выборе допустимого решения, минимизирующего  $\rho(y, Z)$  на множестве  $Y = \varphi(X)$ , т.е. решения, последствия которого наиболее близки к конусу точек, удовлетворяющих требованиям ЛПР, в смысле используемого понятия отклонения от конуса.

Достоинством подхода является его простота — от ЛПР требуется лишь один раз указать цель  $\hat{y}$ , после чего автоматически находится решение. С другой стороны, если последствия найденного решения далеки от цели (часто дело обстоит именно так в связи с тем, что ЛПР из-за отсутствия ком-

пьютерной поддержки в процессе назначения цели определяет ее без знания реальных возможностей), это может вызвать недовольство у ЛПР. Кроме того, если целевая точка сильно отклоняется от совокупности достижимых критериальных векторов, полученное решение больше зависит от того, какая функция  $\rho(y, Z)$  используется, чем от самой цели. В связи с тем, что ЛПР обычно не участвует в выборе этой функции (эта задача слишком сложна для человека, не имеющего математического образования), оптимальное решение определяется экспертом, выбравшем ту или иную функцию полезности.

Благодаря своей простоте целевой подход является наиболее распространенным методом МКО. Отметим, что эффективность целевого подхода можно повысить, если проинформировать ЛПР об идеальной точке.

### **Использование линейных функций полезности**

Зачастую исследователи вместо построения поверхностей безразличия сложных нелинейных функций полезности (или самих таких функций) пытаются ограничиться простой линейной сверткой критериев  $U(y) = \sum_i c_i y_i$ , коэффициенты  $c_i$  которой (веса критериев) должен указать ЛПР. Эта функция имеет существенные недостатки. Прежде всего, непонятно, почему предпочтения ЛПР должны выражаться в такой простой форме. Функции полезности, рассматриваемые в теории многокритериальной полезности, обычно вогнуты, и это отражает существо дела — веса, показывающие важность критериев, должны зависеть от значений самих критериев. При недостаточной величине одного из критериев его важность должна быть велика, а полезность такого несбалансированного набора не может быть большой. Скажем, недостаточную скорость самолета нельзя компенсировать его отличной маневренностью. В линейной же функции малое значение одного критерия *всегда* можно компенсировать избыточным значением другого.

Далее, как было показано в части II, линейные функции могут использоваться только для эффективно-выпуклых задач, в противном же случае часть недоминируемых точек не может быть получена на основе максимизации линейной функции. Из-за этого некоторые недоминируемые критериальные точки, быть может наиболее предпочтительные для ЛПР, остаются за рамками анализа.

Рассмотрим очень простой пример. Абитуриент осуществляет выбор одного из трех университетов, руководствуясь двумя критериями — качеством общежития и условиями занятия спортом. Пусть для первого университета (A1) значение первого критерия  $y_1$  равно 10, второго критерия  $y_2$  равно 1, для второго университета (A2)  $y_1$  и  $y_2$  равны 5, для третьего университета

(A3)  $y_1$  равен 1 и  $y_2$  равен 10. Таким образом, первый университет имеет отличное общежитие, но плохие условия занятия спортом, второй университет — удовлетворительное качество общежития и удовлетворительные условия занятия спортом, третий университет — плохое общежитие, но отличные условия занятия спортом. На рис. 10.3 в плоскости критериев изображены критериальные точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , соответствующие университетам A1, A2 и A3. Точки  $A_1$ ,  $A_3$  соединим отрезком прямой. Заметим, что точка  $A_2$  находится ниже прямой  $[A_1, A_3]$ .

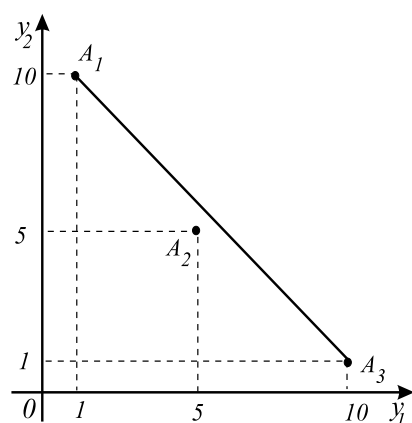


Рис. 10.3.

Рассмотрим линейную функцию полезности  $U(y) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ . Поскольку линии уровня линейной функции полезности представляют собой прямые, при любых положительных весах  $c_1, c_2$  решением могут быть только точки  $A_1$  или  $A_3$ . В то же время, поскольку точка  $A_2$  находится ниже прямой  $[A_1, A_3]$ , она не может быть получена как решение задачи выбора из трех точек на основе линейной функцией полезности критериев с положительными весами. Таким образом, университет со сбалансированным набором условий останется без рассмотрения, а ведь именно он мог оказаться наиболее предпочтительным для абитуриента.

Заметим, что часто требуется назначить веса для сравнения альтернатив, оценки которых в пространстве критериев являются близкими. В таком случае использование линейной функции полезности вполне разумно — веса соответствуют градиенту нелинейной функции полезности, который в силу непрерывности функции полезности меняется мало при малом изменении точки в пространстве критериев.

## Лекция 11. Основные концепции итеративных методов

### 11.1. Общее представление об итеративных методах

Итеративные человеко-машинные многокритериальные методы возникли в 60-х годах XX века. Они принципиально отличались от других многокритериальных методов того времени тем, что человеку было необходимо взаимодействовать с компьютерной программой (решающее правило можно построить и без использования компьютера). Методы такого типа получили название *интерактивных*, или *диалоговых*, процедур. Применение таких процедур показало, что их основная особенность состоит не в интерактивности (сейчас взаимодействие с компьютером — правило, а не исключение), а в *итеративности*, т.е. в том, что эти процедуры основаны на итерациях, в которых перемежаются действия человека и работа некоторой компьютерной программы, решающей вспомогательную задачу, обычно задачу оптимизации. Итеративная процедура строится таким образом, что человек анализирует результаты, полученные компьютером на очередной итерации, и высказывает свои предпочтения, которые реализуются в виде параметров задачи, решаемой на следующей итерации.

Рассмотрим задачу (5.1). В соответствии с общей теорией МКО, для поиска эффективного решения можно использовать некоторую свертку критериев, которая дает возможность для построения простейшей итерационной процедуры. Параметры этой свертки прямо или косвенно задаются ЛПР и передаются компьютеру для решения соответствующей задачи оптимизации.

Опишем эту процедуру формально. Пусть выбрана функция свертки  $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Тогда каждая итерация состоит из двух шагов — машинного и человеческого:

- 1) компьютер решает задачу поиска точки максимума функции свертки, т.е. такого  $\tilde{x} \in X$ , для которого  $\psi(\varphi(\tilde{x})) = \max_{x \in X} \psi(\varphi(x))$ , а также, возможно, рассчитывает некоторую вспомогательную информацию;
- 2) после анализа  $\varphi(\tilde{x})$  и вспомогательной информации ЛПР выражает свои предпочтения через изменение параметров функции свертки<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup>Заметим, что на втором шаге итерации ЛПР зачастую получает и само решение  $\tilde{x}$ . Это

Процедура продолжается до тех пор, пока человек не будет удовлетворен полученной критериальной точкой или не будет выполнено иное правило остановки.

Здесь приведена простейшая форма итерации, в некоторых методах ша- ги разбиты на части.

## 11.2. Простейшие итеративные методы

Рассмотрим итеративную процедуру, прежде всего приходящую в голову начинающим исследователям.

### Итеративное назначение весов в линейной свертке критериев

Итерации такой процедуры выглядят следующим образом.

**0-я итерация.** Находится идеальная точка  $y^*$  и выбираются произволь- ные значения весов, например,  $c_i^{(0)} \equiv 1, i = 1, \dots, m$ .

**(k+1)-я итерация.** Перед началом итерации должны быть заданы веса  $c_i^{(k)}$  для  $i = 1, \dots, m$ .

**шаг 1.** Компьютер решает задачу поиска  $\max_{x \in X} \sum_{i=1}^m c_i^{(k)} \varphi_i(x)$ , определяя точ- ку максимума  $x^{(k+1)}$  и значение  $\varphi(x^{(k+1)})$  критериального вектора в этой точке.

**шаг 2.** ЛПР сравнивает  $\varphi(x^{(k+1)})$ , идеальную точку  $y^*$  и, может быть, по- лученный на предыдущей итерации критериальный вектор  $\varphi(x^k)$ . Ес- ли критериальная точка удовлетворяет ЛПР, то процедура завершена. В противном случае ЛПР назначает новые веса  $c_i^{(k+1)}, i = 1, \dots, m$ , после чего итерация завершается и осуществляется переход к следу- ющей итерации.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнут результат, удовлетворяющий ЛПР.

Проанализируем этот метод. Заметим прежде всего, что критериальная точка  $\varphi(x^{(k+1)})$ , получаемая на  $(k+1)$ -й итерации, является оптимальной по Парето. Согласно исследованиям возможностей человека в процессе взаи- модействия с компьютером, человек способен указать в критериальной точ- ке, оптимальной по Парето, значения какого критерия он хотел бы увели- чить, а какого уменьшить. Однако в данной процедуре от него требуется зна-

---

связано с тем, что понятие критериальной задачи — некоторая абстракция, предположения которой в реальной жизни могут и не выполняться.



чительно больше — изменить веса. Это совсем другая задача, и она трудна для ЛПР, поскольку последствия изменения весов непредсказуемы. Например, ЛПР не может знать, на сколько нужно увеличить вес какого-либо критерия для того, чтобы значение критерия стало удовлетворительным. Таким образом, этот формально простой метод является сложным для ЛПР.

Рассмотрим еще один традиционный метод, нашедший свое применение в практических задачах.

### Лексикографический метод

**шаг 0.** На предварительном шаге ЛПР ранжирует частные критерии в порядке убывания их важности. Перенумеровав после этого критерии, можно считать, что первый критерий — самый важный.

**шаг 1.** Решается задача поиска

$$\max_{x \in X} \varphi_1(x)$$

и находится максимальное значение критерия  $\varphi_1(\tilde{x}^{(1)})$ .

**шаг 2.** Решается задача поиска

$$\max_{x \in X, \varphi_1(x) = \varphi_1(\tilde{x}^{(1)})} \varphi_2(x).$$

Найденное решение  $\tilde{x}^{(2)}$  максимизирует второй критерий, удовлетворяя при этом дополнительному ограничению, при выполнении которого достигается максимум по первому критерию.

**шаг k.** Решается задача поиска

$$\max_{x \in X, \varphi_1(x) = \varphi_1(\tilde{x}^{(1)}), \varphi_2(x) = \varphi_2(\tilde{x}^{(2)}), \dots, \varphi_{k-1}(x) = \varphi_{k-1}(\tilde{x}^{(k-1)})} \varphi_k(x).$$

Решение  $\tilde{x}^{(k)}$  максимизирует  $k$ -й критерий, одновременно удовлетворяя ограничениям на значения предыдущих критериев.

Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет максимизировано значение последнего из частных критериев, после чего процедура завершается.

Обратим внимание на то, что лексикографический метод не приводит к бесконечной итеративной процедуре, останавливающейся, когда полученный результат устраивает ЛПР. Наоборот, описанная процедура имеет заранее известное ограниченное число шагов, которое не превышает числа

частных критериев. Все же мы рассматриваем ее свойства в связи с тем, что неопытные исследователи прибегают к ней довольно часто. В лексикографическом методе зачастую возможностей выбора не остается уже после оптимизации по первому критерию, так что процесс сразу же останавливается. В этом случае задача многокритериальной оптимизации оказывается сведенной к однокритериальной задаче с наиболее важным критерием, причем значениями остальных критериев пренебрегается. Если же после оптимизации первого критерия и остается какая-то свобода действий, то ее может оказаться недостаточно для получения удовлетворительных значений остальных критериев.

Задача ранжирования критериев по важности далеко не проста для ЛПР — это уже обсуждалось ранее. Кроме того, лексикографическая процедура, вообще говоря, некорректна с вычислительной точки зрения, поскольку малые возмущения параметров исходной задачи могут привести к серьезной ошибке в результатах. Хотя и были разработаны устойчивые вычислительные методы<sup>2)</sup> решения этой задачи, использование лексикографической процедуры в случае неустойчивости к исходным данным требует особого внимания ЛПР. Теоретической основой лексикографического метода является упоминавшийся ранее лексикографический порядок, задаваемый на множестве векторов. Являясь полным, он, тем не менее, не обладает свойством непрерывности, что может привести к неожиданным последствиям.

Развитием лексикографической процедуры является метод уступок.

### **Метод уступок**

Опишем несколько первых шагов метода уступок.

**шаг 0.** На предварительном шаге ЛПР ранжирует частные критерии вектор-функции  $\varphi(x)$  в порядке убывания их важности. Перенумеровав после этого критерии, можно считать, что первый критерий — самый важный.

**шаг 1.** Решается задача поиска  $\max_{x \in X} \varphi_1(x)$  и находится точка  $\tilde{x}^{(1)}$ , наилучшая по первому критерию.

**шаг 2.** ЛПР назначает уступку  $\Delta_1$  по первому критерию.

**шаг 3.** Решается задача поиска  $\max_{x \in X, \varphi_1(x) \geq \varphi_1(\tilde{x}^{(1)}) - \Delta_1} \varphi_2(x)$ . Решение  $\tilde{x}^{(2)}$  максимизирует второй критерий, удовлетворяя дополнительному ограничению, при выполнении которого уступка по первому критерию ограничена ЛПР.

---

<sup>2)</sup> В.В. Федоров. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

Далее делается уступка по второму критерию и т.д., пока не дойдем до последнего критерия. После этого можно вернуться к уступке по первому критерию и т.д. до тех пор, пока не будет получено решение, удовлетворяющее ЛПР.

Отметим, что метод уступок при нулевых уступках совпадает с лексикографическим методом решения задач МКО. В дополнение к умению ранжировать критерии, метод уступок требует от ЛПР ответов на сложные вопросы о величине уступки, которую требуется назначать, не имея информации о последствиях этого шага. В то же время, концепция ограничений, накладываемых на значения критериев, используемая в этом методе, оказалась весьма полезной и удобной. Были предложены альтернативные методы, базирующиеся на применении ограничений. В следующей лекции будет рассмотрен метод STEM, в котором назначение ограничений на значения критериев реализуется в виде, более простом для ЛПР.

Рассмотрим еще один, более сложный метод.

### 11.3. Метод Джоффриона-Дайера-Файнберга

Метод Джоффриона-Дайера-Файнберга (GDF) основан на использовании идеи известного метода Фрэнка-Вулфа (см., например, [15]) решения выпуклых задач оптимизации, состоящего в следующем (см. рис. 11.1). Пусть на выпуклом множестве  $X \subset \mathbb{R}^n$  нужно найти максимум достаточно гладкой вогнутой скалярной функции  $f(x)$ .

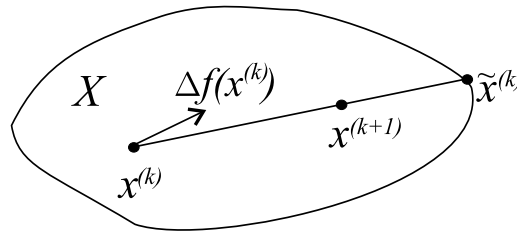


Рис. 11.1.

Пусть точка  $x^{(k)}$  — текущее приближение к решению задачи оптимизации. Находим  $\text{grad } f(x^{(k)})$  и решаем вспомогательную задачу

$$\max_{x \in X} \langle \text{grad } f(x^{(k)}), x \rangle ,$$

заменяя тем самым задачу максимизации нелинейной функции задачей максимизации линейной функции на выпуклом множестве. Пусть максимум достигается в точке  $\tilde{x}^{(k)}$ . Соединяем точки  $x^{(k)}$  и  $\tilde{x}^{(k)}$  отрезком прямой и ищем  $\max_{x \in [x^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}]} f(x)$ . Полученная в результате точка максимума  $x^{(k+1)}$  рассматривается как новое приближение. Далее переходим к новой итерации. Преимущество этого метода состоит в том, что он довольно быстро сходится.

Перейдем к задаче многокритериальной оптимизации (5.1). Предположим, что функции  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , вогнуты и дифференцируемы, а у ЛПР имеется (в голове) вогнутая дифференцируемая функция полезности  $U(y)$ . Проблема состоит в том, чтобы найти  $\max_{x \in X} U(\varphi(x))$ , где функция  $U(y)$  не известна исследователю. В методе Джоффриона-Дайера-Файнберга предлагается для решения этой задачи применить итеративную процедуру, основанную на методе Фрэнка-Вулфа, не строя функцию полезности во всем пространстве в явном виде.

Пусть  $x^{(k)}$  — текущая точка. Найдем  $\text{grad } U(\varphi(x))|_{x=x^{(k)}}$ . Отметим, что  $\frac{\partial U}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$  для дифференцируемых функций  $U(y)$  и  $\varphi(x)$ . Производные  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$  можно рассчитать, так как функции  $\varphi_i(x)$  заданы, а  $\frac{\partial U}{\partial y_i}$  можно найти, используя процедуру аппроксимации поверхности безразличия функции полезности в точке  $y^{(k)} = \varphi(x^{(k)})$  критериального пространства точно так же, как это делалось при построении функции полезности во всем пространстве критериев в предыдущей лекции.

Перед началом  $(k+1)$ -й итерации должны быть заданы  $x^{(k)}$  и  $y^{(k)} = \varphi(x^{(k)})$ .

#### **(k+1)-я итерация**

**шаг 1.** ЛПР строит  $\text{grad } U(y^{(k)})$  — градиент функции полезности в точке  $y^{(k)}$ .

**шаг 2.** Компьютер ищет  $\tilde{x}^{(k)}$  как решение задачи

$$\max_{x \in X} \langle \text{grad } U(\varphi(x^{(k)})), x \rangle$$

(при этом  $\text{grad } U(\varphi(x^{(k)}))$  находится как градиент суперпозиции функций).

На экране компьютера изображается график, на оси абсцисс которого изображен отрезок  $[x^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}]$ , параметризованный переменной  $t$  так,

что  $t = 0$  в точке  $x^{(k)}$  и  $t = 1$  в точке  $\tilde{x}^{(k)}$ ; по оси ординат откладываются функции  $\varphi_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$  (см. рис. 11.2).

**шаг 3.** ЛПР указывает предпочтительную точку  $t^*$ , которая интерпретируется как точка максимума функции  $U(t)$  на отрезке  $[x^{(k)}, \tilde{x}^{(k)}]$ . Точка  $x^{(k+1)} = t^* \tilde{x}^{(k)} + (1 - t^*) x^{(k)}$  считается результатом итерации.

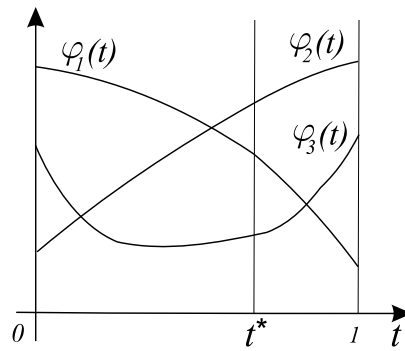


Рис. 11.2.

Процедура считается завершенной, если ЛПР указывает точку  $t^* = 0$ , т.е. отказывается передвинуть решение из текущей точки.

Таким образом, в методе Джоффриона-Дайера-Файнберга человек решает две задачи: строит градиент функции полезности и указывает максимум функции полезности на отрезке. Обе эти задачи являются сложными для человека в том случае, когда число критериев превышает два. Процедура построения градиента функции полезности, основанная на многократном попарном сравнении критериальных уступок, выглядит особенно сложной, если учесть необходимость применять такую процедуру на каждой итерации. Также сложным является одномерный выбор, когда человек обязан указать лучшую среди бесконечного числа многокритериальных альтернатив (хотя, конечно, он значительно упрощается благодаря графике). Можно сказать, что в этом методе ЛПР рассматривается как автомат, способный измерять величину и градиент функции полезности. Таким образом, в данной процедуре ЛПР не определяет напрямую параметры задачи оптимизации (например, веса или уступки), а отвечает на вопросы о своих предпочтениях. Это является большим достоинством метода Джоффриона-Дайера-Файнберга. Понимание достоинств и недостатков методов, описанных вы-

ше, позволило выработать фундаментальное понятие теории итеративных процедур — понятие *структуризованных методов*.

#### 11.4. Структуризованные итеративные методы

К структуризованным итеративным методам относят методы, в которых ЛПР отвечает на вопросы о своих предпочтениях. К таким вопросам может, например, относиться вопрос о том, какой из нескольких критериальных векторов более предпочтителен. Другой тип вопросов о предпочтениях — это вопросы о том, значения какого критерия ЛПР желает увеличить, а какого можно уменьшить.

Методы, в которых человеку прямо задаются вопросы о параметрах задачи оптимизации, получили название *неструктуризованных методов*. К ним, в частности, относятся описанные выше методы назначения весов и метод уступок.

В целях анализа качества структуризованных итеративных методов была сформулирована система требований, которым эти методы, вообще говоря, должны удовлетворять. В рамках этих требований предполагается, что ЛПР имеет функцию полезности  $U(y)$ , не известную исследователю. Обозначим через  $\tilde{x}$  предпочтительную для ЛПР точку на множестве  $X$ , т.е. решение задачи  $\max_{x \in X} U(\varphi(x))$ . Желательно, чтобы структуризованные итеративные методы имели следующие свойства:

- 1) сходимость процесса к предпочтительной точке при разумном поведении ЛПР (если ответы даются безошибочно в соответствии с функцией полезности), т.е.  $x^{(k)} \rightarrow \tilde{x}$ , где  $x^{(k)}$  — решения, получаемые на соответствующих итерациях;
- 2) сходимость должна быть достаточно быстрой;
- 3) ЛПР должен иметь право на ошибку, т.е. в случае неправильного ответа ЛПР должна существовать возможность в дальнейшем исправить последствия ошибки своими правильными действиями. У ЛПР должна быть возможность найти решение  $\tilde{x}$  даже в случае многократных ошибок. Ошибки могут замедлять работу процедуры, но решение должно быть получено в соответствии с предпочтениями ЛПР;
- 4) вопросы, задаваемые ЛПР, должны быть простыми.

Проанализируем процедуру Джоффриона-Дайера-Файнберга. Она является структуризованной, поскольку человек отвечает на вопросы, связанные с его предпочтениями относительно альтернативных вариантов решения. Если ЛПР действует в соответствии со своей полезностью, эта процедура обеспечивает сходимость к предпочтительному решению. Так как метод Фрэнка-Вулфа быстро находит точку, близкую к оптимальной, метод Джоффриона-Дайера-Файнберга сходится быстро. Выполняется и требование о праве на ошибку. Единственный недостаток метода — сложность вопросов, задаваемых ЛПР. Именно поэтому метод не нашел широкого применения.

### 11.5. Понятие объективного (критериального) замещения

В процессе большинства структуризованных итеративных методов ЛПР приходится сравнивать по предпочтительности различные критериальные точки. Если одна точка не доминирует другую, эта операция может представлять довольно сложную проблему. В некоторых методах требуется указать, значение какого из критериев следовало бы увеличить в первую очередь. Итеративные методы должны предоставлять информацию для поддержки ЛПР в поиске ответов на эти вопросы.

В качестве формального показателя, который может быть использован при сравнении двух критериальных точек, используется *объективное (критериальное) замещение*<sup>3)</sup> между этими точками.

Начнем рассмотрение понятия объективного замещения между двумя критериальными точками  $y^1 = \varphi(x^1)$  и  $y^2 = \varphi(x^2)$  для случая двух критериев. В том случае, когда  $\varphi_2(x^1) \neq \varphi_2(x^2)$ , критериальное замещение между двумя критериальными точками (или между решениями  $x^1$  и  $x^2$  по рассматриваемой паре критериев) определяется как

$$\Lambda = \frac{\varphi_1(x^2) - \varphi_1(x^1)}{\varphi_2(x^2) - \varphi_2(x^1)},$$

или, в терминах значений критериев

$$\Lambda = \frac{y_1^2 - y_1^1}{y_2^2 - y_2^1}.$$

---

<sup>3)</sup>По-английски — objective tradeoff, что может быть переведено и как критериальное, и как объективное (т.е. не зависящее от предпочтений) замещение. Последний перевод особенно ярко подчеркивает отличие от замещения, задаваемого поверхностью безразличия функции полезности.

В рассматриваемом случае двух критериев величина  $\Lambda$  положительна только тогда, когда одно из решений доминирует другое по Слейтеру. Если доминирование по Парето между точками отсутствует (например, оба решения  $x^1$  and  $x^2$  являются Парето-эффективными), то величина  $\Lambda$  отрицательна, поскольку увеличение значения одного из критериев при переходе от первого решения ко второму должно приводить к уменьшению значения другого критерия. На рис. 11.3 изображены две недоминируемые критериальные точки  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$ ; величина критериального замещения задается отношением разностей соответствующих координат.

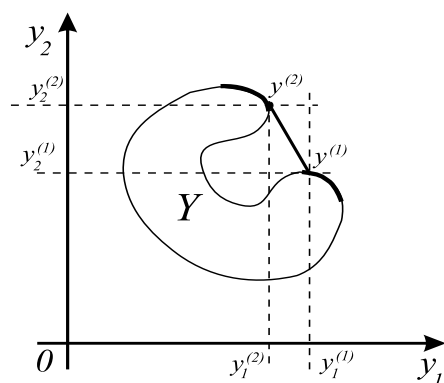


Рис. 11.3.

Для того чтобы оценить критериальное замещение между двумя любыми критериальными точками, достаточно взглянуть на рисунок и сравнить разности координатных величин. Оценка величины замещения исключительно полезна в процессе обдумывания ответа на вопрос о том, какая из критериальных точек более предпочтительна.

Кроме критериального замещения между двумя произвольными допустимыми критериальными точками или решениями, часто рассматривается норма критериального замещения, определенная только на паретовой границе. Пусть в недоминируемой точке  $y^0$  паретова граница является гладкой, т.е. в этой точке существует единственная касательная к границе. Тогда можно рассмотреть *норму критериального замещения* в точке  $y^0$ , определяемую как

$$\lambda = \frac{\partial y_2}{\partial y_1}(y^0),$$



где производная берется вдоль паретовской границы в рассматриваемой точке (см. рис. 11.4).

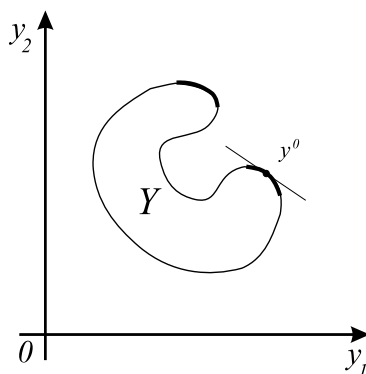


Рис. 11.4.

Ясно, что величина нормы критериального замещения в точке  $y^0$  отрицательна. Норма критериального замещения показывает, на сколько нужно ухудшить значение одного из критериев для улучшения значения другого при малом смещении из изучаемой точки вдоль паретовой границы. Важно, что эту величину в любой точке паретовой границы легко оценить, просто глядя на рисунок этой границы. В случае негладкой паретовой границы можно рассмотреть конус касательных в изучаемой точке. Этот конус также может быть оценен человеком при рассмотрении рисунка границы.

Рассмотрим теперь вопрос о понятии критериального замещения в случае более чем двух критериев. Перенесение введенных выше понятий на многокритериальный случай может быть осуществлено несколькими способами. Так, под *частичным критериальным замещением* для двух различных решений  $x^{(1)}$  и  $x^{(2)}$  по двум различным частным критериям  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ , где индексы  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $m$ , понимается величина

$$\Lambda_{i,j}^p = \frac{\varphi_i(x^2) - \varphi_i(x^1)}{\varphi_j(x^2) - \varphi_j(x^1)},$$

(конечно, при  $\varphi_j(x^2) - \varphi_j(x^1) \neq 0$ ). Эту величину также называют *частичным критериальным замещением для двух критериальных точек*  $y^1 = \varphi(x^1)$  и  $y^2 = \varphi(x^2)$  по частным критериям  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ , записывая ее

при этом в эквивалентном виде

$$\Lambda_{i,j}^p = \frac{y_i^2 - y_i^1}{y_j^2 - y_j^1}.$$

Подчеркнем, что при этом вопрос об остальных критериальных величинах даже не ставится — они могут не совпадать и принимать разнообразные значения. По этой причине частичное критериальное замещение несет мало информации о задаче. Отметим, что даже для парето-эффективных решений, в отличие от случая двух критериев, величина  $\Lambda_{i,j}^p$  может быть положительной (за счет уменьшения значений других критериев, оставшихся вне рассмотрения).

В связи со сказанным более полезной величиной является *полное критериальное замещение*, которое обозначается  $\Lambda_{i,j}^t$  для критериев  $i, j$  и определяется теми же формулами, что и частичное, но при этом дополнительно выдвигается требование равенства значений остальных критериев в сравниваемых точках, т.е.  $\varphi_l(x^1) = \varphi_l(x^2)$  для всех  $l \neq i, j$ . Таким образом, полное критериальное замещение определено не для всех решений, а только для тех, для которых все значения критериев, кроме двух, равны. Рассматривая полное критериальное замещение с точки зрения критериальных точек, заметим, что выдвигаемое требование означает, что сравниваемые точки должны лежать в одном и том же двумерном сечении множества достижимых критериальных векторов  $Y$ , причем плоскость сечения должна быть параллельна плоскости координат  $(i, j)$ . Полное критериальное замещение можно рассчитать для всех точек этого сечения, причем оно имеет свойства, близкие к критериальному замещению для двухкритериальных задач: для точек, между которыми нет доминирования по Слейтеру, величина  $\Lambda_{i,j}^t$  отрицательна. Эту величину легко оценить на основе изображения двумерного сечения множества  $Y$ , причем знание этой величины облегчает ЛПР выбор между двумя такими точками.

Рассмотрим теперь вопрос о перенесении нормы замещения на случай с  $m$  критериями. Норма замещения превращается в норму замещения для двух критериев  $i$  и  $j$ , которая в точке гладкости  $y^0$  паретовой границы имеет вид

$$\lambda_{i,j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j}(y^0),$$

где частная производная берется вдоль паретовой границы двумерного сечения. Эта величина может быть также оценена на основе изображения паретовой границы сечения; она помогает понять, имеет ли смысл смешаться

из точки  $y^0$  вдоль паретовой границы сечения, меняя значения выбранных критериев (при фиксированных значениях остальных критериев).

Обсудим роль критериальных замещений в уже рассмотренных итеративных методах. Хотя в методе итеративного назначения весов в линейной свертке критериев сами веса представляют информацию о нормах критериальных замещений для всех пар критериев в получаемой критериальной точке, это, однако, не облегчает задачу ЛПР по модификации весов. В методе уступок информация о замещениях, как правило, не предоставляется, хотя она могла бы помочь ЛПР в выборе уступок. Наконец, в процедуре Джоффриона-Дайера-Файнберга при построении градиента функции полезности строится не объективное замещение, а градиент полезности. Как мы увидим в дальнейшем, возможность по-настоящему эффективно использовать объективные замещения в процессе выбора решения дает визуализация двумерных сечений множества достижимых критериальных векторов  $Y$ .

## Лекция 12. Итеративные методы МКО

В этой лекции рассмотрено несколько итеративных методов МКО, заложивших основы применения и дальнейшего совершенствования этого направления. Итеративные методы, как правило, строятся с использованием

- градиентов,
- весовых коэффициентов,
- ограничений,
- целевых точек,
- двумерных сечений.

Методы, основанные на этих приемах, могут быть как структуризованными, так и неструктуризованными. Мы уже рассмотрели структуризованный метод, основанный на использовании градиентов (описанный в предыдущей лекции метод Джоффриона-Дайера-Файнберга), и неструктуризованные методы назначения весов и уступок. Перейдем к описанию других основополагающих методов.

### 12.1. Процедура Зайонца-Валлениуса

Данный метод представляет собой структуризованную процедуру, основанную на работе с весовыми коэффициентами. Как уже говорилось, человеку трудно непосредственно назначить веса критериев. Метод Зайонца-Валлениуса — это, по существу, попытка задать человеку вопросы о предпочтениях таким образом, чтобы на основе полученной информации можно было скорректировать веса.

Рассматривается линейная задача МКО

$$y \rightarrow \max, \quad y = Cx, \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}. \quad (12.1)$$

Предполагается, что функция полезности ЛПР также линейна, т.е.  $U(y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$ ,  $\lambda_i > 0$ , где  $\lambda_i$  — неизвестные веса, не зависящие от  $y$ . Веса  $\lambda_i$  нормированы, т.е.  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Таким образом, незнание весовых коэффициентов является в данном подходе единственной причиной неопределенности решения.

Считается, что перед очередной итерацией известен конус, которому принадлежит вектор весов  $\lambda$ . Задача итерации заключается в том, чтобы сузить

этот конус. Для сужения конуса используется информация о предпочтениях ЛПР при сравнении точек в критериальном пространстве.

На начальной итерации полагается  $\Lambda^{(0)} = \text{int } \mathbb{R}_+^m$ . Перед  $(k+1)$ -й итерацией известен конус  $\Lambda^{(k)} \subset \Lambda^{(0)}$ . Итерация состоит из следующих шагов.

#### (k+1)-я итерация

**шаг 1.** Выбирается произвольный вектор  $\lambda^{(k)} \in \Lambda^{(k)}$  и решается задача линейного программирования:  $\max_{x \in X} \langle \lambda^{(k)}, Cx \rangle$ . Помимо нахождения точки  $\tilde{x}^{(k)}$ , оптимальной для данного вектора  $\lambda^{(k)}$ , определяются вершины  $x^{(k,p)}$ ,  $p = 1, \dots, P^{(k)}$ , соседние с  $\tilde{x}^{(k)}$ .

**шаг 2.** ЛПР отвечает на вопросы о том, что предпочтительнее,  $\varphi(\tilde{x}^{(k)})$  или  $\varphi(x^{(k,p)})$  для всех  $p = 1, \dots, P^{(k)}$ . ЛПР может ответить “лучше”, “хуже”, “эквивалентны”. В соответствии с этими ответами формируются дополнительные ограничения на вектор  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ :

если  $\varphi(\tilde{x}^{(k)}) \succ \varphi(x^{(k,p)})$ , то  $\langle \lambda, \varphi(\tilde{x}^{(k)}) \rangle > \langle \lambda, \varphi(x^{(k,p)}) \rangle$ ,

если  $\varphi(\tilde{x}^{(k)}) \prec \varphi(x^{(k,p)})$ , то  $\langle \lambda, \varphi(\tilde{x}^{(k)}) \rangle < \langle \lambda, \varphi(x^{(k,p)}) \rangle$ ,

если  $\varphi(\tilde{x}^{(k)}) \sim \varphi(x^{(k,p)})$ , то  $\langle \lambda, \varphi(\tilde{x}^{(k)}) \rangle = \langle \lambda, \varphi(x^{(k,p)}) \rangle$ .

Неравенства порождают систему ограничений  $D^{(k)}\lambda > 0$ , а равенства — систему  $D_0^{(k)}\lambda = 0$ .

**шаг 3.** Конус сужается:  $\Lambda^{(k+1)} = \Lambda^{(k)} \cap \{\lambda | D^{(k)}\lambda > 0\} \cap \{\lambda | D_0^{(k)}\lambda = 0\}$ .

В методе используется следующее правило остановки. Если все соседние вершины множества  $X$  оказались хуже, чем  $\tilde{x}^{(k)}$ , то в силу линейности задачи это означает, что найдена оптимальная вершина.

К сожалению, при использовании метода остановка часто происходит раньше, в момент, когда  $\Lambda^{(k+1)}$  становится пустым (это означает, что человек давал противоречивые ответы). Для исключения этого недостатка авторы процедуры сначала устранили условие эквивалентности как наиболее чувствительное к ошибкам. Этого оказалось недостаточно. Тогда, прежде чем предлагать сравнение точек, авторы стали проверять, не может ли привести задаваемый вопрос к противоречию. Устранив вопросы, которые помогают контролировать правильность предположения о линейности функции полезности и непротиворечивость ЛПР, авторы сделали процедуру работоспособной.

Анализ метода. Если человек не дает противоречивых ответов (или порождающие их вопросы исключаются), то процедура работает нормально,

и метод довольно быстро сходится к предпочтительной точке. Вопросы являются сложными, так как происходит многократное сравнение двух многомерных альтернатив. Заметим, что при этом у ЛПР нет права на ошибку.

Несмотря на свои недостатки и ограниченность области применения (требуется линейность функции полезности!), процедура оказала большое влияние на развитие методов МКО.

## 12.2. Метод Штойера

Как и в предыдущем методе, рассматривается линейная многокритериальная задача, однако линейность функции полезности не обязательна. Линейная свертка используется в методе лишь для аппроксимации предпочтений.

Предполагается, что перед началом  $(k + 1)$ -й итерации известны такие величины  $p_i^{(k)}, q_i^{(k)}$ , что  $\lambda_i \in [p_i^{(k)}, q_i^{(k)}], i = 1, \dots, m$ .

### (k+1)-я итерация.

**шаг 1.** Генерируется большое число точек  $\lambda^{(l)} = (\lambda_1^{(l)}, \dots, \lambda_m^{(l)}), l = 1, \dots, N$  ( $N$  имеет порядок  $50m$ ), равномерно распределенных на  $[p^{(k)}, q^{(k)}]$ , где

$$p^{(k)} = (p_1^{(k)}, \dots, p_m^{(k)}), q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_m^{(k)}).$$

Точки нормируются так, чтобы  $\sum_{i=1}^m \lambda_i^{(l)} = 1, l = 1, \dots, N$ .

**шаг 2.** Происходит фильтрация точек так, чтобы осталось порядка  $L = 3m$  точек  $\tilde{\lambda}^{(l)}, l = 1, \dots, L$ , достаточно хорошо представляющих множество  $[p^{(k)}, q^{(k)}]$ .

**шаг 3.** Решаются задачи  $\max_{x \in X} \langle \tilde{\lambda}^{(l)}, Cx \rangle$  для всех  $\tilde{\lambda}^{(l)}, l = 1, \dots, L$ , в результате чего определяются соответствующие точки максимума  $\tilde{x}^{(k,l)}$ .

**шаг 4.** Рассматривая векторы  $\varphi(\tilde{x}^{(k,l)}), l = 1, \dots, L$ , ЛПР выбирает наиболее предпочтительную из точек  $\tilde{x}^{(k,l)}, l = 1, \dots, L$ , и соответствующий вектор  $\tilde{\lambda}^{(l)}$ , который обозначается через  $\lambda^{(k+1)}$ .

**шаг 5.** Строится новый параллелограмм  $[p^{(k+1)}, q^{(k+1)}]$ , где

$$p^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)} - \frac{r^k}{2}, q^{(k+1)} = \lambda^{(k+1)} + \frac{r^k}{2}.$$

Здесь  $r \in (0, 1)$  — число, характеризующее скорость сжатия параллелограмма (задается заранее).

Анализ метода. Явный недостаток метода состоит в том, что сжатие параллелограмма происходит со скоростью, не зависящей от ответов ЛПР, поэтому процедура может и не сойтись к наиболее предпочтительному решению (при слишком быстром сжатии оно может быть просто отсечено). Однако если сходимости имеет место, то при быстром сжатии она достаточно быстрая. С правом на ошибку ситуация не очень ясна, так как какую-то ошибку можно исправить, а какую-то нет (много зависит от скорости сжатия параллелограмма). Вопросы непростые, поскольку ЛПР нужно выбирать из  $3m$  многокритериальных альтернатив (причем достаточно много раз).

#### **Метод Штойера-Чу для нелинейных задач**

Метод предназначен для решения нелинейных задач МКО и использует идеи метода Штойера. В нелинейном случае предлагается использовать чебышевские свертки, связанные с идеальной точкой. Так что метод Штойера-Чу отличается от метода Штойера только тем, что вместо линейной функции с весами используется функция Чебышева

$$\rho_\lambda(y, y^*) = \max_{i=1, \dots, m} (\lambda_i |y_i^* - y_i|).$$

При этом сохраняются все недостатки метода Штойера и добавляются новые, связанные с нелинейностью задачи.

### **12.3. Методы с целевыми точками**

Эти методы, предназначенные для общего случая множества  $X$  и вектор-функции  $\varphi$ , основаны на минимизации некоторого расстояния от точек множества  $Y = \varphi(X)$  до целевых множеств  $Z = \hat{y} + \mathbb{R}_+^m$ .

#### **Метод 1.**

На нулевой итерации в качестве целевой берется идеальная точка, т.е.  $\hat{y}^{(0)} = y^*$ . Перед  $(k+1)$ -й итерацией целевая точка  $\hat{y}^{(k)}$  должна быть определена.

#### **(k+1)-я итерация.**

**шаг 1.** Компьютер ищет точку  $\tilde{x}^{(k)}$ , являющуюся решением задачи

$$\min_{x \in X} \rho(\varphi(x), Z^{(k)}), \quad \text{где} \quad Z^{(k)} = \hat{y}^{(k)} + \mathbb{R}_+^m.$$

**шаг 2.** ЛПР сравнивает  $\varphi(\tilde{x}^{(k)})$ ,  $\hat{y}^{(k)}$  и  $y^*$ , после чего назначает новую целевую точку  $\hat{y}^{(k+1)}$ .

Если ЛПР не устраивает значение  $j$ -й координаты вектора  $\varphi(\tilde{x}^{(k)})$ , то ему при назначении целевой точки рекомендуется увеличить значение соответствующей координаты  $\hat{y}^{(k+1)}$ .

### Метод 2.

В этом методе применяется свертка

$$\rho_{\mu}(y, y^*) = \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{y_i^* - y_i}{y_i^* - y_i^{\min}},$$

где величины  $y_i^{\min}$  могут быть выбраны различными способами, скажем,  $y_i^{\min} = \min_{y \in Y} y_i$ , или  $y_i^{\min} = \min_{y \in P(Y)} y_i$ , или величины  $y_i^{\min}$  могут быть назначены ЛПР.

На нулевой итерации используются исходные веса  $\mu_i^{(0)} \equiv 1$ . Перед  $(k+1)$ -й итерацией должны быть известны решение  $\tilde{x}^{(k-1)}$  задачи поиска  $\min_{x \in X} \rho_{\mu}(\varphi(x), y^*)$ , полученное на предыдущей итерации, и новый  $(k)$ -й вариант весов  $\mu_i^{(k)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , свертки  $\rho_{\mu}(y, y^*)$ .

### (k+1)-я итерация.

**шаг 1.** Минимизируется расстояние  $\rho_{\mu}$  с весами  $\mu_i^{(k)}$  от точек множества  $Y$  до идеальной точки  $y^*$ , т.е. находится точка  $\tilde{x}^{(k)}$ , являющаяся решением задачи  $\min_{x \in X} \rho_{\mu}(\varphi(x), y^*)$ .

**шаг 2.** ЛПР сравнивает  $\varphi(\tilde{x}^{(k-1)})$ ,  $\varphi(\tilde{x}^{(k)})$  и  $y^*$ , после чего назначает новые веса  $\mu_i^{(k+1)}$  свертки  $\rho_{\mu}(y, y^*)$ .

Проанализируем эти два метода. Обе описанные процедуры не структуризованы, поэтому говорить о сходимости не приходится. Отметим, однако, что эти методы обладают положительным свойством — человек имеет право на ошибку. В то же время, назначение целей и весов не являются простыми задачами, поэтому на практике ЛПР обычно предпочитает однократно назначить целевую точку. При этом метод вырождается в рассмотренный ранее эвристический метод задания предпочтения в форме назначения целевой точки.

Отметим, что существует модификация первого метода — назначение многих целевых точек.



#### 12.4. Метод STEM

Метод STEM (STEP Method) был разработан в конце 60-х годов XX века группой исследователей, которая включала будущего академика РАН О.И. Ларичева (1934-2003) и троих французских специалистов — Р. Бенаяюна, Ж. Монгольфье и Ж. Терни. Метод STEM нашел многочисленных последователей, которые модифицировали его различным образом. Сначала мы рассмотрим вариант, близкий к тому, который был предложен первоначально, а потом поговорим о его одной модификации.

Рассматривается задача МКО общего типа (5.1). Идея метода STEM состоит в том, чтобы задавать ЛПР как можно более простые вопросы относительно его предпочтений. Ответы на эти вопросы используются для модификации критериальных ограничений, которые на  $(k + 1)$ -й итерации задаются вектором  $l^{(k)}$ . Этот процесс, однако, должен осуществляться в форме, более удобной для ЛПР, чем в методе уступок.

Предполагается, что выполнено техническое ограничение на идеальную точку  $y^* > 0$ . В результате  $k$ -й итерации алгоритма должны быть определены  $l^{(k)}$  и  $J^{(k)}$ , где  $l^{(k)} = (l_1^k, \dots, l_m^k)$  — вектор критериальных ограничений, используемых на  $(k + 1)$ -й итерации, а  $J^{(k)} \subseteq \{1, \dots, m\}$  — множество тех номеров критериев, для которых уровень  $l_j^{(k)}$  является удовлетворительным. На начальной итерации алгоритма полагается  $l^{(0)} = -L$ , где  $L$  — большое число,  $J^{(0)} = \emptyset$ .

На  $(k + 1)$ -й итерации осуществляется следующая последовательность действий.

##### (k+1)-я итерация

**шаг 1.** С помощью компьютера решается серия задач оптимизации

$$\max_{x \in X} \left\{ \varphi_i(x) \mid \varphi_j(x) \geq l_j^{(k)}, j = 1, \dots, m \right\}, i = 1, \dots, m,$$

и находятся соответствующие точки максимума  $x^{(k,i)}$ . Заметим, что на первой итерации, когда  $l^{(0)} = -L$ , находится идеальная точка  $y^*$ . На основе векторов  $\varphi(x^{(k,i)})$  с учетом  $J^{(k)}$  некоторым образом рассчитываются веса  $\lambda_i^{(k)}$  (предложено несколько вариантов расчета весов, см., например, [10]) и находится  $x^{(k)}$  — решение задачи оптимизации

$$\max_{x \in X, \varphi_j(x) \geq l_j^{(k)}, j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} \varphi_i(x),$$

являющееся эффективным по Слейтеру решением задачи МКО. На этом первый шаг завершается.

**шаг 2.** ЛПР передается информация о  $\varphi(x^{(k)})$ ,  $J^{(k)}$ ,  $l^{(k)}$  и  $y^*$ , на основе которой от ЛПР требуется усилить ограничения и, может быть, расширить множество номеров критериев, значения которых являются удовлетворительными. Пусть критерий в  $\varphi(x^{(k)})$ , значение которого ЛПР не устраивает более всего, имеет номер  $i^*$ . Тогда

$$l^{(k+1)} = \begin{cases} l^{(k)}, & i \neq i^* \\ l_{i^*}^{(k)} + \Delta, & i = i^*, \end{cases}$$

где  $\Delta$  — некоторое положительное число, которое определяет ЛПР. Далее, по желанию ЛПР можно расширить множество  $J^{(k+1)}$ . Итерация окончена.

Рассмотрим этот метод с точки зрения четырех требований к итеративным методам.

1. Анализ сходимости невозможен, так как нет информации, определяющей выбор  $\Delta$ . Более того, выбор  $\Delta$  — неструктуризованный элемент метода. Эта величина может оказаться слишком большой, в результате чего наиболее предпочтительное решение будет отсечено.
2. Нет права на ошибку — отсеченное наиболее предпочтительное решение вернуть невозможно.
3. Вопросы типа классификации критериев, задаваемые ЛПР, просты. Это и есть основное достоинство метода, особенно учитывая то, что это был первый метод, в котором внимание уделялось именно простоте вопросов. В то же время, процедура содержит и сложные вопросы о назначении  $\Delta$ .

### Модификация метода STEM

Профессор Корнелльского университета (США) Д.П. Лаукс, известный специалист в области поддержки принятия решений в сфере водного хозяйства, заметил, что постоянное сужение множества допустимых значений критериев — недостаток метода STEM, и предложил его модификацию, не имеющую этого недостатка. В модифицированном методе на исходной итерации наряду с идеальной точкой  $y^*$  определяется некоторое парето-эффективное решение  $x^0$  и соответствующий недоминируемый критериальный вектор, который сравнивается ЛПР с идеальной точкой. Если лицо,

принимающее решение, не удовлетворено решением, то от него требуется указать, значение какого критерия  $y_{i^*}$  не удовлетворительно в наибольшей степени и по каким критериям  $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$  можно идти на уступки, а также и сами величины уступок  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ , на которые можно пойти для увеличения значения  $y_{i^*}$ . Далее в результате решения задачи

$$y_{i^*} \rightarrow \max, \quad x \in X, \quad \varphi_{j_l}(x) \geq \varphi_{j_l}(x^0) - \Delta_l, \quad l = 1, \dots, k,$$

компьютер рассчитывает новое решение  $x^{(1)}$  и новую недоминируемую по Слейтеру критериальную точку  $\varphi(x^{(1)})$ , после чего ЛПР следует либо согласиться с таким изменением решения, либо отказаться от него. Далее ЛПР снова определяет наименее удовлетворительный критерий, возможные уступки и т.д. Таким образом, исключается один из главных недостатков метода STEM — отсутствие права на ошибку.

Поскольку в модифицированном методе назначаемые величины уступок являются, по существу, пробными, не окончательными, это делает их назначение не столь ответственным и, следовательно, более простым шагом. Таким образом, был разработан метод, относительно простой для ЛПР и применимый на практике. Этот метод можно также рассматривать как модификацию метода уступок.

Примером применения этого метода служит разработка водохозяйственной системы в одной из стран Африки, осуществленная Д.П. Лауксом еще в 70-х гг. XX века. Лица, принимающие решение, находились в этой африканской стране, а суперкомпьютер, который мог решать соответствующую задачу оптимизации — в Корнелльском университете. Поскольку компьютерные сети в то время отсутствовали, передача данных, необходимых для формулировки очередной задачи оптимизации, осуществлялась по обычному телефону. Лица, принимающие решения, получив от Д.П. Лаукса парето-эффективное решение и соответствующие значения критериев, анализировали их и формировали критериальные уступки, которые передавались в Корнелльский университет по телефону. Д.П. Лаукс вводил данные в компьютер, решал задачу оптимизации и передавал ЛПР новое парето-эффективное решение и значения критериев. В результате за несколько итераций было найдено решение, удовлетворившее лиц, принимающих решения.

Недостатком метода является его неструктуризованность, состоящая в необходимости назначать величины уступок, причем практически вслепую, без знания их последствий. Можно, конечно, рассчитать и предоставить лицу, принимающему решения, дополнительную информацию в виде норм критериального замещения в текущей точке, но эта локальная информация не

поможет ЛПР, желающему выбирать достаточно существенные уступки для того, чтобы быстро улучшать решение. Из неструктуризованности следует, что нет гарантии сходимости метода к решению, наиболее предпочтительному для ЛПР. При применении этого метода ЛПР может удовлетвориться некоторым найденным решением только потому, что не удалось обнаружить более предпочтительного.

### **12.5. Методы, использующие визуализацию точек и кривых на паретовой границе**

В последние годы все большее распространение получает идея о том, что многокритериальную информацию нужно предоставлять человеку в графическом виде. До начала массового использования персональных компьютеров это направление сдерживалось сложностью вывода информации. С появлением персональных компьютеров технические проблемы исчезли, поэтому, начиная с 80-х годов прошлого века, стало быстро развиваться новое направление итеративных процедур, связанное с визуализацией информации. Рассмотрим некоторые из итеративных процедур, использующих визуализацию точек и кривых, расположенных на паретовой границе. В них изучается стандартная общая задача многокритериальной максимизации (5.1).

#### **Метод проектирования на паретову границу**

Этот метод использует идеи визуализации значений критериев вдоль некоторой кривой в пространстве критериев, предложенные в методе Джоффриона-Дайера-Файнберга (GDF). В отличие от метода GDF, направление увеличения полезности проектируется на паретову границу, а затем ЛПР указывает предпочтительную точку на этой проекции. Из метода GDF взяты способы определения градиента функции полезности и поддержки выбора наиболее предпочтительной критериальной точки на одномерной кривой.

Пусть уже известен градиент функции полезности в текущей недоминируемой критериальной точке  $y^{(k)} = \varphi(x^{(k)})$ . Рассмотрим точку  $\tilde{y}^{(k)} = \varphi(\tilde{x}^{(k)})$ , которая является решением задачи максимизации линейной функции, заданной направлением градиента функции полезности. Далее, в отличие от метода GDF, отрезок  $[y^{(k)}, \tilde{y}^{(k)}]$  проектируется на паретову границу. Для двумерного случая эта операция показана на рис. 12.1

Далее компьютер изображает график изменения критериальных величин вдоль линии проекции, параметром которой является переменная  $t$ . Он аналогичен графику, используемому в методе GDF (см. рис. 11.2), за исключением того, что теперь все точки графика являются недоминируемы-

ми. Благодаря этому ЛПР получает информацию только о недоминируемых точках (многие считают, что демонстрация доминируемых критериальных точек только дезориентирует ЛПР).

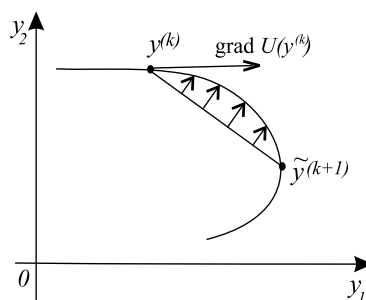


Рис. 12.1.

Как и в методе GDF, ЛПР выбирает  $t^*$  — такое значение параметра  $t$ , при котором достигается наилучшее сочетание значений критериев. Это сочетание критериев и берется в качестве  $y^{(k+1)}$ .

О недостатках и достоинствах этого метода в рамках четырех требований, сформулированных выше, можно сказать то же самое, что и о методе GDF — определение градиента функции полезности является крайне сложной задачей. Метод обладает и другим недостатком метода GDF — нахождение  $t^*$  является выбором единственной из бесконечного числа многомерных альтернатив, а многократное решение такой задачи слишком сложно для ЛПР. Требования права на ошибку и быстрой сходимости метода выполняются. Отметим, что задача построения проекции отрезка, лежащего внутри множества достижимых критериальных векторов, является зачастую некорректно поставленной вычислительной проблемой.

#### Методы Корхонена-Лааксо и “Бег по множеству Парето”

Метод Корхонена-Лааксо близок к методу, описанному выше, но отличается от него некоторыми важными характеристиками. Главное отличие метода Корхонена-Лааксо состоит в том, что в нем обходятся трудности, связанные с построением градиента функции полезности. Для этого вместо градиента используется другое направление в критериальном пространстве, которое строится на основе идей целевого программирования.

Перед началом  $(k + 1)$ -й итерации должна быть задана точка  $y^{(k)} \in P(Y)$ .

**(k+1)-я итерация**

**шаг 1.** ЛПР задает целевую точку  $\hat{y}^{(k)}$ .

**шаг 2.** Точки  $\hat{y}^{(k)}$  и  $y^{(k)}$  соединяются отрезком прямой, который проектируется на паретову границу; после этого изображается рисунок, аналогичный рис. 11.2.

**шаг 3.** ЛПР выбирает  $t^*$ , и, следовательно,  $y^{(k+1)}$ .

Обсуждая недостатки и достоинства этого метода, можно сказать, что авторам удалось избежать самой сложной проблемы предыдущего метода, поскольку теперь не нужно строить градиент функции полезности. В остальном метод сохраняет свою сложность для ЛПР — решение задачи выбора  $t^*$  сложно для ЛПР. К тому же приходится многократно решать сложную задачу назначения целевой точки. Достоинства метода (как и метода GDF) — быстрая сходимость при правильных действиях ЛПР и наличие у ЛПР права на ошибку. Важно, что поскольку  $y^{(k)} \in P(Y)$ , а целевая точка  $\hat{y}^{(k)}$  находится вне множества достижимых критериальных векторов, то обычно (но не всегда!) отрезок  $[\hat{y}^{(k)}, y^{(k)}]$  также находится вне множества достижимых критериальных векторов. Поэтому в эффективно-выпуклом случае его проектирование на паретову границу является стандартной вычислительной задачей, поставленной корректно.

На основе идей этого метода Корхоненом и Валлениусом был предложен метод “Бег по множеству Парето” (Pareto Race), основная особенность которого состоит в том, что целевая точка  $\hat{y}$  меняется не от итерации к итерации, а непрерывно. Изменение точки  $\hat{y}$  происходит под воздействием ЛПР, имеющего возможность изменять положение точки, например, с помощью перемещения движков прокруток. Перемещение текущей точки  $y$  также осуществляется непрерывно: она перемещается по паретовой границе вдоль проекции  $[y, \hat{y}]$  со скоростью, задаваемой ЛПР. При этом ЛПР имеет возможность увеличивать и уменьшать скорость или даже приостанавливать процесс движения. Таким образом, в руках ЛПР оказывается средство управления точкой на паретовой границе, напоминающее управление автомобилем: направление задается положением точки  $\hat{y}$ , а скорость — непосредственно кнопками. Текущее положение задается столбчатой диаграммой, на которой отображаются относительные величины значений критериев.

Итак, метод “Бег по множеству Парето” позволяет свободно передвигаться по паретовой границе, последовательно получая точки этой границы. В то же время, в связи с ограниченностью памяти человека, у ЛПР отсутствует целостное представление о паретовой границе, в том числе о критериальных замещениях даже в той точке, в которой находится процесс. В

связи с этим ЛПР даже при явно осознаваемых предпочтениях может не понимать, имеет ли смысл перемещаться вдоль паретовой границы и в каком направлении. Для преодоления этой трудности был предложен метод “Шаг по паретовой границе” (Pareto Step), в рамках которого ЛПР получает графическое изображение паретовой границы для трех критериев (при некоторых ограничениях, наложенных на значения остальных) и переносит текущую точку в более предпочтительное положение.

## 12.6. Метод “Шаг по паретовой границе”

Метод “Шаг по паретовой границе” основан на визуализации двухкритериальных сечений паретовой границы. Этот итерационный метод предназначен для решения задачи многокритериальной оптимизации (5.1) в случае выпуклой оболочки Эджворта-Парето множества достижимых критериальных векторов. Для таких задач МКО возможна предварительная аппроксимация ОЭП многогранниками (вопрос об аппроксимации рассмотрен в части IV), которая позволяет быстро строить совокупности двухкритериальных сечений ОЭП, что и используется в данном методе. Вопрос о методах построения сечений выходит за пределы нашего курса лекций (см. [12]). Во всяком случае, имеется возможность быстро строить совокупности двухкритериальных сечений ОЭП и изображать их на экране компьютера. При этом границы двухкритериальных сечений ОЭП дают информацию о паретовой границе в многокритериальной задаче.

Простейший вариант метода основан на изображении единственного двухкритериального сечения ОЭП. Перед началом диалога с ЛПР должно быть построено многогранное множество, аппроксимирующее ОЭП, на основе которого быстро строятся двухкритериальные сечения ОЭП. Перед  $(k+1)$ -й итерацией требуется, чтобы был задан текущий вектор  $y^{(k)} \in P(Y)$ .

### **$(k+1)$ -я итерация**

**шаг 1.** ЛПР получает (в виде строки или диаграммы) текущий недоминируемый вектор

$$y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_i^{(k)}, \dots, y_j^{(k)}, \dots, y_m^{(k)})$$

и указывает критерий, значение которого он хочет увеличить в первую очередь, а также критерий, которым он готов пожертвовать. Пусть это критерии  $y_i$  и  $y_j$  соответственно.

**шаг 2.** ЛПР получает на экране компьютера сечение ОЭП в координатах  $y_i$  и  $y_j$ , проходящее через точку  $y^{(k)}$ . На паретовой границе этого сечения высвечивается текущая точка  $(y_i^{(k)}, y_j^{(k)})$  (см. 12.2). ЛПР предлагается указать на паретовой границе более предпочтительные значения  $y_i$  и  $y_j$ , которые обозначим через  $y_l^+, l = i, j$ . В результате осуществления этой операции оказывается задана новая недоминируемая точка  $y^{(k+1)}$ , определяемая следующим образом:

$$y_l^{(k+1)} = \begin{cases} y_l^{(k)}, l \neq i, j \\ y_l^+, l = i, j \end{cases}.$$

На этом итерация завершается.

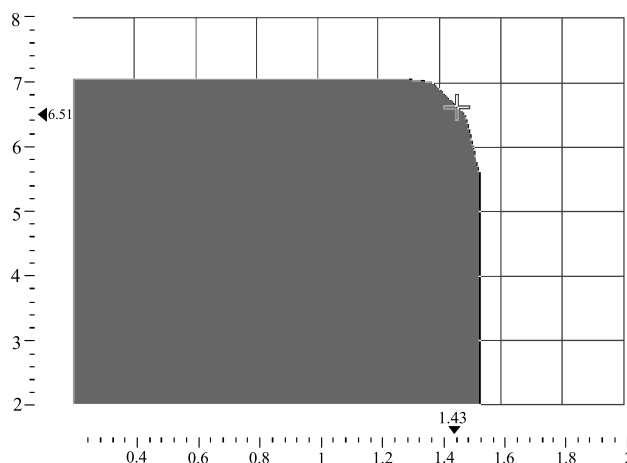


Рис. 12.2.

Отметим, что диалог с ЛПР идет исключительно в терминах критериальных точек с использованием уже аппроксимированной ОЭП. Решение рассчитывается только после нахождения наиболее предпочтительной критериальной точки, оптимальной по Парето.

Этот метод, предложенный в 1980-х годах Г.К. Каменевым и А.В. Лотовым, достаточно прост для ЛПР, поскольку от ЛПР требуется отвечать на простые вопросы и выбирать новую точку, изменяя значения только двух критериев. При этом выбор новой точки ЛПР поддерживается графической информацией о паретовой границе сечения, т.е. ЛПР может оценивать как норму критериального замещения в любой из точек границы, так и полное



критериальное замещение между любыми двумя точками сечения. Ясно, что ЛПР имеет право на ошибку. Доказана сходимость метода при гладкости паретовой границы и правильном поведении ЛПР, состоящем в выборе наиболее предпочтительной точки на паретовой границе сечения. Недостатком метода является его медленная сходимость.

Быстрый вариант метода. Для ускорения сходимости метода предлагается его усложнить — изображать на экране компьютера не одно сечение, а несколько, отличающихся значением некоторого третьего критерия, скажем,  $y_s$ . Такие изображения принято называть *картами решений*.

Тогда  $(k + 1)$ -я итерация метода принимает следующий вид:

**шаг 1.** ЛПР получает текущий недоминируемый вектор

$$y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_i^{(k)}, \dots, y_j^{(k)}, \dots, y_s^{(k)}, \dots, y_m^{(k)})$$

и выбирает три критерия, значения которых он хочет изменить. Пусть это  $y_i, y_j, y_s$ .

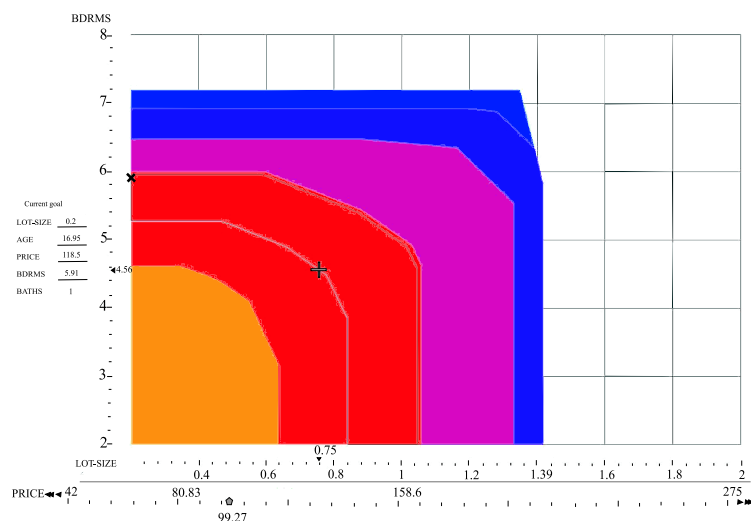


Рис. 12.3.

**шаг 2.** ЛПР получает на экране компьютера карту решений, причем критерии  $y_i, y_j$  расположены на осях, а значения критерия  $y_s$  задают сечения ОЭП (см. 12.3). Кроме неподвижных сечений, соответствующих

заданным значениям  $y_s$ , изображается подвижная граница, положение которой ЛПР определяет, назначая значение  $y_s$  с помощью прокрутки. Текущая точка высвечивается на границе подвижного сечения. ЛПР предлагается передвинуть границу в желаемое положение и выбрать точку  $y_l^+, l = i, l, s$ , на ней. В результате этого получается новая точка

$$y_l^{(k+1)} = \begin{cases} y_l^{(k)}, l \neq i, j, s, \\ y_l^+, l = i, l, s. \end{cases}$$

Этот метод, предложенный А.В. Лотовым и А.А. Кистановым, сходится быстрее, чем метод с единственным сечением, но решение задачи на каждой итерации является более сложным для ЛПР.

Сравним метод “Шаг по паретовой границе” с модификацией Лаукса метода STEM. В обоих методах ЛПР осуществляет допустимую операцию указания критерия, значение которого требуется улучшить, и критериев, значениями которых можно пожертвовать. Методы назначения уступок, однако, принципиально отличаются. Вместо назначения уступок вслепую и получения какого-то улучшения критерия в методе Лаукса, в методе “Шаг по паретовой границе” ЛПР указывает уступку и выигрыш одновременно, называя более предпочтительную точку на паретовой границе. Благодаря этому неструктуризованный метод Лаукса превращается в структуризованный метод.

Отметим, что метод “Шаг по паретовой границе” в связи с большим объемом информации, предоставляемой ЛПР, уже не может быть реализован с использованием только телефона. Поэтому он был реализован в сети Интернет. Благодаря разделению процесса аппроксимации ОЭП и диалогового выбора наиболее предпочтительной критериальной точки, метод удалось реализовать на основе использования клиент-серверной архитектуры. На сервере осуществляется аппроксимация ОЭП, после чего ЛПР получает по сети построенную аппроксимацию и апплет, написанный на языке программирования Java, который обеспечивает интерактивную реализацию метода “Шаг по паретовой границе” на компьютере ЛПР. Выбранная ЛПР наиболее предпочтительная критериальная точка, оптимальная по Парето, передается по сети на сервер, который рассчитывает решение и передает его обратно ЛПР.

## Часть IV. Методы информирования ЛПР о паретовой границе в задачах МКО

Основным недостатком большинства итерационных методов является отсутствие у ЛПР целостного представления о паретовой границе<sup>1)</sup>. В связи с этим ЛПР даже при явно осознаваемых предпочтениях может не понимать, куда и как имеет смысл перемещать текущее решение. Такого недостатка лишены методы, направленные на информирование ЛПР о паретовой границе в целом. В таких методах ЛПР сначала изучает паретову границу, не высказывая своих предпочтений, и только потом, после осознания потенциальных возможностей выбора и связи между возможными значениями критериев, выражает свои предпочтения — указывает предпочтительную точку паретовой границы. Если требуется, ЛПР может выбрать несколько “интересных” точек паретовой границы и получить несколько решений для дальнейшего детального анализа. Для реализации этого подхода требуется разработать методы аппроксимации паретовой границы и способы информирования ЛПР об этой границе. Начнем рассмотрение вопроса с двухкритериального случая.

### Лекция 13. Информирование ЛПР о паретовой границе в случае двух критериев

#### 13.1. Особенности двухкритериальных задач МКО

В двухкритериальном случае паретова граница может быть представлена в наглядном графическом виде на плоскости. Если двухкритериальная задача имеет конечное число возможных решений, то множество достижимых критериальных векторов представляет собой совокупность точек на плоскости, среди которых недоминируемые критериальные точки можно выделить визуально. Так, для множества критериальных точек, изображенного на рис. 13.1 а, можно легко указать недоминируемые точки (они выделены). В случае бесконечного числа решений можно аппроксимировать и изобразить множество  $Y = \varphi(X)$ , причем его паретову и слейтерову границы также можно достаточно легко выделить визуально (см. рис. 13.1 б, где изображено множество  $Y$  и выделена его паретова граница). В последнем

<sup>1)</sup>По существу, метод “Шаг по паретовой границе” является единственным итерационным методом, дающим более или менее целостное представление о паретовой границе.

случае можно также аппроксимировать и изобразить только паретову или слейтерову границу (помня при этом об их возможной неустойчивости).

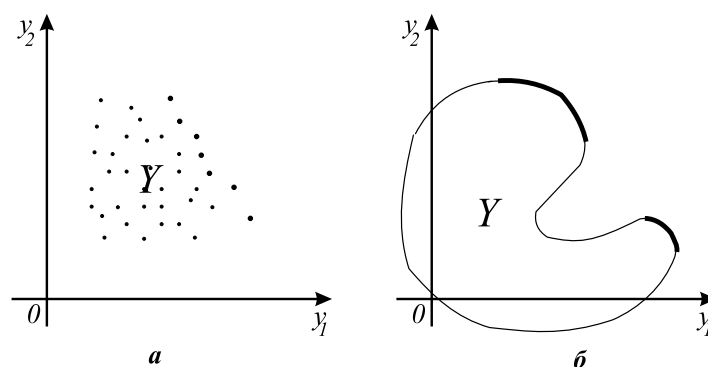


Рис. 13.1.

Рассмотрим первый из методов аппроксимации паретовой границы для случая двух критериев, предложенный известными американскими учеными С. Гассом и Т. Саати в 1955 году. Этот метод предназначен для линейных задач МКО (12.1). Отметим, что паретова граница для линейной задачи при  $m = 2$  есть ломаная, состоящая из конечного числа вершин, соединенных между собой ребрами. Чтобы ее найти, достаточно найти все недоминируемые вершины и соединить соседние отрезками прямой.

Для нахождения всех вершин С. Гасс и Т. Саати предложили решить задачу параметрического линейного программирования

$$\begin{aligned} (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &\rightarrow \max \\ y &= Cx, \quad Ax \leq b, \end{aligned}$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — параметры, такие что  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ .

Решение задачи параметрического линейного программирования состоит в последовательном поиске таких значений  $\lambda_1, \lambda_2$ , при которых происходит переход из вершины в вершину, а также в расчете новых вершин. Благодаря этому удастся ограничиться конечным числом значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вместо рассмотрения их всевозможных неотрицательных значений.

Решение задачи осуществляется следующим образом. Сначала решается задача оптимизации при  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = 0$  и находится  $y^{(1)} = \max_{x \in X} y_1$ . Затем определяется такое число  $\lambda_1 < 1$ , при котором оптимальное решение переходит в соседнюю вершину  $y^{(2)}$ , и находится эта вершина. Эту операцию можно легко осуществить в рамках симплекс-метода решения задач

линейного программирования. Далее находится меньшая величина  $\lambda_1$ , при которой осуществляется переход из  $y^{(2)}$  в некоторую соседнюю вершину, и так далее. Таким образом, последовательно находятся все недоминируемые вершины. Соседние вершины соединяются отрезками прямой. Раньше граница изображалась на бумаге, в настоящее время такая операция осуществляется на экране компьютера. ЛПР получает представление о возможных значениях критериев и, главное, о том, на какую величину требуется ухудшить значение одного из критериев для того, чтобы улучшить значение другого — норму критериального замещения. Кроме того, легко оценивается критериальное замещение для любых двух точек паретовой границы.

Описанный метод (как и другие методы аппроксимации паретовой границы двухкритериальном случае) нашли своих последователей, и в настоящее время их использование можно часто встретить в прикладных, особенно эколого-экономических, исследованиях.

В случае  $m > 2$  проблема является значительно более сложной. В большинстве случаев паретова граница аппроксимируется с помощью конечного числа критериальных точек, после чего остается либо передать ЛПР список этих точек, либо использовать какие-либо средства визуализации. До последнего времени составление списка аппроксимирующих критериальных точек, в отличие от двухкритериального случая, было основным средством общения с ЛПР. Недостаток такого подхода к информированию ЛПР состоит в том, что, во-первых, невозможно изучить список, включающий в себя многие тысячи недоминируемых вершин (а число вершин превосходит тысячи уже в самых простых задачах), и, во-вторых, для ЛПР важны не сами вершины, а форма границы, т.е. норма критериального замещения в точках паретовой границы, которая не может быть получена из такого списка. Как уже говорилось ранее, выбор из большого числа многокритериальных точек является слишком сложной задачей для ЛПР. Именно в связи с этим методы информирования о паретовой границе нашли свое применение, в основном, в двухкритериальном случае, когда паретову границу можно изобразить на экране компьютера.

Развитие современных методов компьютерной графики позволило разработать методы визуализации и для  $m > 2$ , сделав тем самым методы информирования ЛПР о паретовой границе мощным современным средством поддержки выбора решений в задачах с несколькими критериями, а также в переговорах. Прежде всего, обсудим вопрос о том, почему визуализация паретовой границы в многомерном случае может быть достаточно полезной при решении прикладных задач.

Визуализация, т.е. трансформация символьных данных в геометрические фигуры, может использоваться для поддержки ЛПР в процессе принятия решения с помощью формирования ментальной картины символьных данных. По оценке биологов, около половины нейронов человеческого мозга так или иначе связаны со зрением, поэтому визуализация играет важную роль в познании человеком окружающего мира. Визуализация на основе использования компьютерной графики показала свою эффективность в информировании людей о разнообразных проблемах. Вопрос состоит в том, может ли визуализация быть полезной при информировании ЛПР о паретовой границе множества достижимых критериальных векторов.

Мы уже говорили о важности временного фактора при выборе решения. Методы информирования ЛПР о паретовой границе, которые не требуют быстрого ответа на вопросы о предпочтительности того или иного решения, позволяют осуществлять анализ критериальных точек достаточно долго для того, чтобы ЛПР пришел к окончательному решению. При этом, однако, ЛПР должен помнить информацию о паретовой границе все это время. Как уже говорилось, человек может держать в быстрой памяти не более семи объектов одновременно. Отсюда следует, что ЛПР не может помнить сотни многокритериальных точек, аппроксимирующих паретову границу и думать при этом о выборе наилучшей из них. Эксперименты показывают, что зачастую ЛПР выбирает несколько критериальных точек (либо случайно, либо используя какое-то простое эвристическое правило) и сравнивает их в течение нескольких дней. Хотя в итоге какая-то из этих точек будет выбрана, такой подход приводит к исключению из рассмотрения большинства точек паретовой границы, среди которых могут оказаться точки, значительно более предпочтительные, чем выбранная точка.

Визуализация паретовой границы может изменить ситуацию. Однако для того, чтобы быть эффективной, визуализация должна быть: 1) простой, т.е. понятной без дополнительных разъяснений; 2) длящейся, т.е. изображение должно оставаться в голове человека в течение достаточно продолжительного времени; 3) полной, т.е. содержать всю требуемую информацию.

Если эти требования удовлетворяются, ЛПР может мысленно изучать паретову границу и выбирать наиболее предпочтительную точку в течение нескольких дней. Если какие-то детали изображения будут забыты, можно будет снова взглянуть на изображение паретовой границы. Как уже говорилось, визуализация используется в рамках таких процедур поддержки принятия решений в двухкритериальных задачах уже в течение длительного времени. В чем же состоят преимущества визуализации в двухкритериальных задачах?

### 13.2. Эффективность визуализации в двухкритериальных задачах

После работы Гасса и Саати аппроксимация и визуализация паретовой границы была использована во многих исследованиях задач МКО с двумя критериями. При этом иногда аппроксимировалось и изображалось множество достижимых критериальных векторов, поскольку его паретова граница легко различима в двухмерном случае.

Как уже говорилось в лекции 11, изображение паретовой границы дает возможность ЛПР оценить критериальное замещение между двумя любыми критериальными точками и норму критериального замещения в любой гладкой точке паретовой границы. Эта информация крайне важна для ЛПР, поскольку именно она дает возможность осознанно выбрать предпочтительную точку паретовой границы. Информация о замещениях дается в наглядной форме, которая достаточно проста, поскольку может быть понята немедленно. Если паретова граница не слишком сложна, она может оставаться в памяти ЛПР относительно долго. Наконец, в критериальных задачах паретова граница дает полную информацию о недоминируемых критериальных точках и критериальных замещениях. Таким образом, она удовлетворяет сформулированным выше требованиям, предъявляемым к эффективной визуализации. Поскольку визуализация паретовой границы может воздействовать на все уровни ментальной модели, она может эффективно поддерживать поиск наилучшей критериальной точки, который может оказаться и нелогичным с формальной точки зрения.

Таким образом, можно сделать следующие выводы из опыта визуализации паретовой границы в двухкритериальном случае:

1. визуализация паретовой границы удобна для ЛПР, поскольку удовлетворяет общим требованиям к эффективной визуализации;
2. на основе изображения паретовой границы легко оценить критериальное замещение между двумя любыми критериальными точками и норму критериального замещения в любой паретовой точке;
3. визуализация паретовой границы позволяет непосредственно на экране компьютера прямо указать предпочтительную точку.

Возникает вопрос о том, нельзя ли перенести достоинства двухкритериальной оптимизации на случай более чем двух критериев? При этом требуется, чтобы визуализация паретовой границы

1. была удобна для ЛПР, т.е. удовлетворяла общим требованиям к эффективной визуализации;

2. обеспечивала визуальную оценку критериальных замещений;
3. позволяла напрямую указать предпочтительную точку непосредственно на экране компьютера.

При этом возникает вопрос о том, какие критериальные замещения при более, чем двух критериях могут быть использованы для поддержки выбора наиболее предпочтительной критериальной точки. Напомним, что двухкритериальное замещение между точками порождает для критериев  $i, j$  частичное критериальное замещение  $\Lambda_{i,j}^p$  и полное критериальное замещение  $\Lambda_{i,j}^t$ . При этом в частичном замещении сравниваются решения по двум критериям, в то время как вопрос о значениях остальных критериев даже не рассматривается — они могут принимать разнообразные значения. Поэтому частичное критериальное замещение большого прикладного значения не имеет.

В отличие от него, полное критериальное замещение определено не для всех решений, а только для тех, для которых все значения критериев, кроме двух, равны. Таким образом, сравниваемые критериальные точки должны лежать в одном двумерном сечении множества достижимых критериальных векторов  $Y$ , причем плоскость сечения должна быть параллельна плоскости координат  $i, j$ . Знание  $\Lambda_{i,j}^t$  облегчает ЛПР выбор между двумя такими точками. В то же время, эту величину легко оценить на основе изображения двумерного сечения множества  $Y$ . Что касается нормы критериального замещения для критериев  $i, j$ , то, как уже говорилось в лекции 12, изображение двумерного сечения множества  $Y$  помогает оценить значение в каждой точке паретовой границы сечения.

Таким образом, двумерные сечения множества  $Y$  играют большую роль в оценке критериальных замещений в многомерном случае. Методы построения двумерных сечений паретовой границы и их визуализации рассмотрены в следующих лекциях данного курса. Отметим, что идея визуализации паретовой границы для задач многокритериальной оптимизации на основе ее двумерных сечений была впервые высказана в начале 1970-х годов. Сразу было ясно, что кроме визуализации критериальных замещений, двумерные сечения позволяют ЛПР прямо указать предпочтительную точку.



## Лекция 14. Визуализация паретовой границы на основе полиэдральной аппроксимации ОЭП

### 14.1. Визуализация паретовой границы

В этой лекции описывается визуализация паретовой границы для выпуклых задач МКО в случае более чем двух критериев на основе аппроксимации ОЭП. Эти методы, описанные подробно в книге [12], основываются на предварительной аппроксимации множества достижимых критерияльных векторов  $Y$  или его оболочки Эджворта-Парето  $Y_P$ . После аппроксимации одного из этих множеств, его паретова граница визуализируется с помощью изображения карт решений, т.е. специальным образом сформированных наборов двумерных сечений этого множества.

Дадим определение двумерного сечения некоторого множества  $Z$  пространства  $\mathbb{R}^m$ . Пусть нас интересует сечение множества  $Z$  плоскостью, проходящей через некоторую точку  $\hat{y} \in Z$  параллельно плоскости двух координат  $(u, v)$ . Каждую точку  $y \in \mathbb{R}^m$  можно представить в виде  $y = (u, v, w)$ , где  $u$  и  $v$  — значения в плоскости  $(u, v)$ , а  $w$  — совокупность значений остальных  $(m - 2)$ -х координат (мы не будем обращать внимание на порядок координат). Тогда  $\hat{y} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ , и двумерное сечение множества  $Z$  плоскостью, проходящей через точку  $\hat{y} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ , есть множество

$$G_{u,v}(Z, \hat{w}) = \{(u, v) | (u, v, \hat{w}) \in Z\}.$$

Таким образом, сечение заданного множества  $Z$ , параллельное плоскости некоторых двух координат  $(u, v)$ , определяется значениями координат из совокупности  $w$ . Меняя значения  $w$ , получаем различные параллельные сечения множества  $Z$ . Недоминируемые границы этих сечений дают в совокупности представление о паретовской границе множества  $Z$ .

Опыт визуализации различных наборов сечений множества  $Y$  (множества  $Y_P$ ) позволил сделать вывод о том, что для человека наиболее удобно рассматривать такие наборы, в которых от сечения к сечению меняется значение лишь одной из координат совокупности  $w$ . Набор параллельных двумерных сечений множества  $Y$  (множества  $Y_P$ ), в котором используется именно такое правило изменения координат совокупности  $w$ , принято называть *картой решений*.

Для того чтобы можно было визуализировать карты решений в интерактивном режиме (или проводить анимацию карт решений, что оказывается

весьма эффективным способом демонстрации паретовой границы), требуется рассчитывать и изображать сотни или даже тысячи сечений изучаемых множеств за время порядка десятка секунд. В связи с этим разумно заранее построить (аппроксимировать) множество  $Y$  или  $Y_P$  в каком-либо простом виде, удобном для быстрого расчета сечений. Решение задачи построения (аппроксимации) указанных множеств в явном виде является самой сложной частью описываемого подхода. В следующей лекции мы дадим краткое описание методов полиэдральной аппроксимации множеств  $Y$  или  $Y_P$  для выпуклых задач МКО, т.е. аппроксимация в виде множества решений системы линейных неравенств в критериальном пространстве. Наличие уже построенной аппроксимации позволяет быстро находить двумерные сечения изучаемых множеств.

Опишем возможность визуализации выпуклых множеств более подробно. Пусть множество  $Y$  (или  $Y_P$ ) уже аппроксимировано в виде системы линейных неравенств

$$\sum_{k=1}^m g_{lk} y_k \leq g_l, l = 1, \dots, L, \quad (14.1)$$

которая определяет в пространстве  $\mathbb{R}^m$  некоторое непустое множество. Для расчета двумерного сечения этого множества нужно фиксировать значения всех координат, кроме двух, скажем,  $y_i$  и  $y_j$ . Тогда двумерное сечение множества (14.1) в координатах  $(y_i, y_j)$  можно записать в виде системы

$$g_{li} y_i + g_{lj} y_j \leq g_l - \sum_{k \neq i, j} g_{lk} \hat{y}_k, l = 1, \dots, L,$$

где  $\hat{y}^k$  — заданные значения координат  $y_k$ ,  $k \neq i, j$ , обозначенные через  $\hat{w}$  в определении сечения, данном в начале лекции. Таким образом, в том случае, когда множество задано системой неравенств, сечение описывается совокупностью ограничений, получаемой умножением подматрицы, составленной из соответствующих столбцов матрицы системы (14.1) на вектор  $\hat{y}_k = (y_k, k \neq i, j)$ . Благодаря этому многие сотни сечений могут быть рассчитаны за секунды, что позволяет не только быстро изображать карты решений по заказу пользователя, но и осуществлять их анимацию.

Заметим, однако, что в этой процедуре имеется следующее неприятное свойство множества  $Y$ , которое мешает изучению паретовой границы. Дело в том, что не при всех наборах  $\hat{w}$  точки недоминируемой границы двумерного сечения

$$G_{u,v}(Y, \hat{w}) = \{(u, v) | (u, v, \hat{w}) \in Y\}$$

множества  $Y$  представляют паретову границу этого множества. Поэтому для того, чтобы понять, какие точки недоминируемой границы сечения соответствуют точкам паретовой границы множества  $Y$ , требуется изобразить и сравнить большое число параллельных сечений множества  $Y$ .

Сечения множества  $Y_P$  лишены этого недостатка, их связь с точками паретовой границы более проста. Прежде всего, заметим, что ОЭП обладает важным свойством:

$$G_{u,v}(Y_P, \hat{w}) \subseteq G_{u,v}(Y_P, \bar{w}) \quad \text{при} \quad \hat{w} \geq \bar{w}.$$

Благодаря этому сечения зависят от координат точки  $\hat{w}$  монотонно, в частности, границы сечений не пересекаются на картах решений.

Кроме того, имеет место одно важное свойство недоминируемых границ сечений множества  $Y_P$ .

**Лемма 14.1.** *Если точка  $(\hat{u}, \hat{v})$  принадлежит недоминируемой границе сечения  $G_{u,v}(Y_P, \hat{w})$ , а бинарное отношение Парето обладает НМ-свойством на  $P(Y) \subseteq Y$ , то найдется такой набор значений остальных критериев  $w' \geq \hat{w}$ , что  $(\hat{u}, \hat{v}, w') \in P(Y)$ .*

*Доказательство.* Согласно лемме 6.1, каждая точка  $Y_P$  либо принадлежит множеству  $Y$ , либо доминируется точкой множества  $Y$ , которую в силу НМ-свойства отношения Парето на  $P(Y) \subseteq Y$  можно считать недоминируемой. Рассмотрим такую точку  $(u', v', w') \in P(Y)$ , что  $u' \geq \hat{u}$ ,  $v' \geq \hat{v}$ ,  $w' \geq \hat{w}$ . Поскольку  $w' \geq \hat{w}$ , то  $G_{u,v}(Y_P, w') \subseteq G_{u,v}(Y_P, \hat{w})$ . Отсюда  $(u', v') \in G_{u,v}(Y_P, \hat{w})$ . Так как  $u' \geq \hat{u}$ ,  $v' \geq \hat{v}$ , а точка  $(\hat{u}, \hat{v})$  — недоминируемая точка  $G_{u,v}(Y_P, \hat{w})$ , то  $u' = \hat{u}$ ,  $v' = \hat{v}$ . Лемма доказана.  $\square$

Таким образом, недоминируемые точки сечения множества  $Y_P$  при любом  $w = \hat{w}$  порождаются точками  $P(Y)$  с  $w' \geq \hat{w}$ . Быть может, более удобно выглядит эквивалентное утверждение о том, что недоминируемые точки границы сечения множества  $Y_P$  при  $w = \hat{w}$  являются паретовскими в двухкритериальной задаче

$$(u, v) \rightarrow \max, \quad (u, v, w) = \varphi(x), \quad x \in X, \quad w \geq \hat{w},$$

т.е. недоминируемые точки сечения ОЭП характеризуют эффективное замещение между двумя рассматриваемыми критериями, в то время как на остальные наложено ограничение  $w \geq \hat{w}$ .

Приведенные факты объясняют, почему удобно рассматривать визуализацию множества  $Y_P$ , а не множества  $Y$ . В то же время надо помнить, что

есть много прикладных задач, в которых не очень ясно, действительно ли нужна максимизация какого-то критерия при любых значениях остальных критериев. В этом случае, который формально уже не относится к задаче многокритериальной оптимизации, но может быть интересен на практике, может быть полезной визуализация множества  $Y$ .

Итак, для того, чтобы задать двумерное сечение многомерного множества (в нашем случае множества  $Y_P$ ), надо выбрать пару критериев  $(u, v)$ , достижимые значения которых будут визуализироваться при заданных значениях остальных критериев  $w = \hat{w}$ . Такие два критерия называют *координатными* критериями. Для остальных (некоординатных) критериев  $w$  надо задать их значения  $\hat{w}$ . После этого для изображения границ двумерного сечения многогранного множества, аппроксимирующего множество  $Y_P$ , требуется рассчитать вершины сечения, а затем соединить их ребрами. При этом для визуализации карты решений требуется рассчитать и изобразить целую совокупность двумерных сечений ОЭП. Были разработаны алгоритмы, позволяющие изображать серии двумерных сечений многогранных множеств на экране персонального компьютера достаточно быстро [12]. Таким образом, вычислительные аспекты расчета серии сечений в целом решены. После выбора координатных критериев остается решить два вопроса: как выбрать совокупность наборов значений некоординатных критериев и как расположить получаемые сечения на экране.

#### 14.2. Неструктуризованная визуализация паретовой границы

Начнем с самого простого случая трех критериев. Тогда имеется лишь один некоординатный критерий и требуется задать совокупность значений этого критерия. При первом ознакомлении с множеством значения некоординатного критерия удобно распределить равномерно, что может быть сделано автоматически (на последующих стадиях анализа пользователь<sup>1)</sup> может задать и другую совокупность интересных для него значений некоординатного критерия). Рассмотрим вопрос о расположении сечений трехмерного множества на экране. В зависимости от цели исследования, сечения могут быть расположены одно рядом с другим или наложены одно на другое, т.е. в виде карт решений. Сечения могут быть изображены различными цветами либо различными штриховками. Связь между значениями третьего критерия, который в этом случае принято называть цветовым, и его цветом обычно указываются в палитре, расположенной около карты сечений. Наложение сечений в картах решений позволяет легко сравнивать сечения между собой — в силу монотонного расширения сечений ОЭП при ухудшении зна-

чения третьего критерия пользователь может легко понять, как изменение некоординатного критерия влияет на паретову границу. Примеры карт решений будут приведены далее в этой лекции.

Рассмотрим теперь случай четырех критериев. К некоординатным критериям теперь относятся два из них, и для того чтобы изобразить серию сечений, требуется задать совокупности значений обоих некоординатных критериев. Эти значения могут быть заданы сеткой в пространстве критериев, каждому узлу которой соответствует одно двумерное сечение. Выбор значений, так же как и в случае трех критериев, может быть осуществлен как автоматически, так и пользователем. Как и в случае трех критериев, двумерные сечения можно попытаться наложить одно на другое.

Как показывает опыт, такая картина обычно является очень сложной и мало информативной. Можно расположить сечения в виде двумерной матрицы, каждый элемент которой — окно, изображающее единственное сечение, соответствующее узлу сетки значений некоординатных критериев. Это, однако, также оказывается неудобным, поскольку затрудняет сравнение сечений. Самым удобным расположением сечений является расположение в ряд нескольких карт решений, каждая из которых соответствует некоторому фиксированному значению одного из некоординатных критериев (скажем, четвертого).

В случае пяти критериев каждая карта решений соответствует фиксированным значениям двух некоординатных критериев (скажем, четвертому и пятому), поэтому приходится рассматривать матрицу карт решений. Число карт решений в матрице может определяться пользователем, она зависит от его интересов (а также и от качества изображения).

Пользователь может легко изменить разбиение критериев на типы, т.е. выделить другие координатные и цветовой критерии, изменить значения некоординатных критериев, для которых строятся карты решений — компьютер быстро пересчитает сечения. Не представляет сложности и реализация сужения диапазона значений любого из критериев. Все эти возможности связаны с тем, что ОЭП аппроксимировано заранее в виде (14.1).

Заметим, что поскольку карту решений можно изобразить практически мгновенно, то возможно управление значениями некоординатных критериев (кроме цветового) с помощью такого широко распространенного элемента интерфейса как прокрутка. Пользователь может задать значение критерия, связанного с прокруткой, передвигая движок прокрутки. Если же совокупность значений такого критерия расположить равномерно, то процесс

---

<sup>1)</sup> При описании взаимодействий человека и компьютера под пользователем компьютерной программы мы понимаем ЛПР.

их перебора можно автоматизировать — значения могут последовательно перебираться компьютером, а соответствующие карты — визуализироваться. Если число заданных значений критерия прокрутки достаточно велико, то последовательная смена рисунков может создать иллюзию движения — анимационный эффект.

Рассмотрим возможности использования анимационного эффекта более подробно. Начнем с того, что его можно использовать уже при трех критериях: двух координатных критериях и одном некоординатном, связанном с прокруткой. Задав большое число равномерно расположенных значений некоординатного критерия, можно последовательно менять двумерные сечения его ОЭП. Если совокупность значений некоординатного критерия и скорость смены сечений выбрана разумно, то возникнет анимационный эффект, который позволяет пользователю изучить воздействие некоординатного критерия на достижимые значения координатных критериев. Такой способ визуализации совокупности сечений принято называть динамической визуализацией. В процессе динамической визуализации пользователь имеет возможность зафиксировать тот “кадр” (т.е. значение автоматически перебираемого критерия прокрутки), в котором изображено некоторое интересное для него сечение. Выбрав не слишком большое число таких кадров, можно получить ряд двумерных сечений, рассмотренный ранее. При этом выбор кадров уже будет отражать интересы пользователя.

В случае четырех и пяти критериев, используя одну или две прокрутки, можно реализовать динамическую визуализацию карты решений, ряда или матрицы двумерных сечений и т.д. Вопрос состоит только в том, за сколькими сечениями и рисунками способен одновременно следить пользователь.

Напрашивается сравнение динамической визуализации с видеоманитомом, с помощью которого исследователь просматривает заранее снятый фильм об изучаемом множестве, выбирая попутно наиболее понравившиеся ему кадры. Хотя с точки зрения пользователя такая аналогия вполне уместна, рассматриваемая методика отличается тем, что кадры не отрисованы заранее, они быстро рассчитываются в процессе просмотра на основе заранее проведенной предобработки — аппроксимации множества в виде (14.1). Благодаря этому, пользователь имеет свободный доступ к информации: в любой момент он может переключиться с какого-либо определенного “фильма” (скажем, о динамике данного двумерного сечения при изменении некоторого третьего критерия) на изучение связей других переменных, т.е. на другой “фильм”. Более того, ему оказывается легко доступен любой потенциально возможный (виртуальный) “фильм”, который может быть реализован благодаря заранее построенной аппроксимации ОЭП.

Если число критериев больше пяти, то использование прокруток позволяет осуществить динамическую визуализацию карты решений, расположив на прокрутках все критерии, кроме координатных и цветового. Можно также осуществить динамическую визуализацию матрицы карт решений. Для этого выделяют пять критериев, задающих матрицу карт решений, а остальные располагают на прокрутках и используют возможности анимации с помощью прокруток.

### 14.3. Пример визуализации паретовой границы

Приведем пример практического использования рассматриваемых методов визуализации паретовой границы в рамках системы поддержки принятия решений и переговоров, предназначенной для поиска эффективных стратегий улучшения качества воды в бассейне реки Ока<sup>2)</sup>. Визуализация паретовой границы позволяет специалистам осуществить целостный анализ проблемы качества воды в реке и указать на паретовой границе цели (предпочтительные сочетания значений критериев), являющиеся достижимыми и недоминируемыми с точки зрения соотношений используемой математической модели. На основе выбранной цели автоматически формируются стратегии использования капиталовложений.

Главная проблема для большинства областей в бассейне Оки — это загрязнение нефтепродуктами. Предположим, что ведутся переговоры между представителями Министерства природных ресурсов и руководством Московской и Нижегородской областей, которые являются в экономическом отношении наиболее развитыми областями бассейна. Пусть используются следующие критерии выбора решения:

- 1) максимальные концентрации нефтепродуктов в пределах Московской области  $z_{r45}$  (измеряется в ПДК — предельно допустимых концентрациях),
  - 2) максимальные концентрации нефтепродуктов в пределах Нижегородской области  $z_{r75}$  (измеряется в ПДК),
  - 3) общая стоимость проекта  $F$  (измеряется в миллиардах рублей),
  - 4) затраты, осуществляемые на территории Московской области  $F4$ ,
  - 5) затраты, осуществляемые на территории Нижегородской области  $F7$ .
- Обратим внимание на то, что в данном случае значения всех критериев надо минимизировать.

---

<sup>2)</sup> А.В. Лотов, В.А. Бушенков, О.Л. Черных Структура и опыт использования компьютерной системы поддержки поиска водохозяйственных стратегий // Научно-техническая информация, сер. 2. Информационные процессы и системы, №3, 1998.

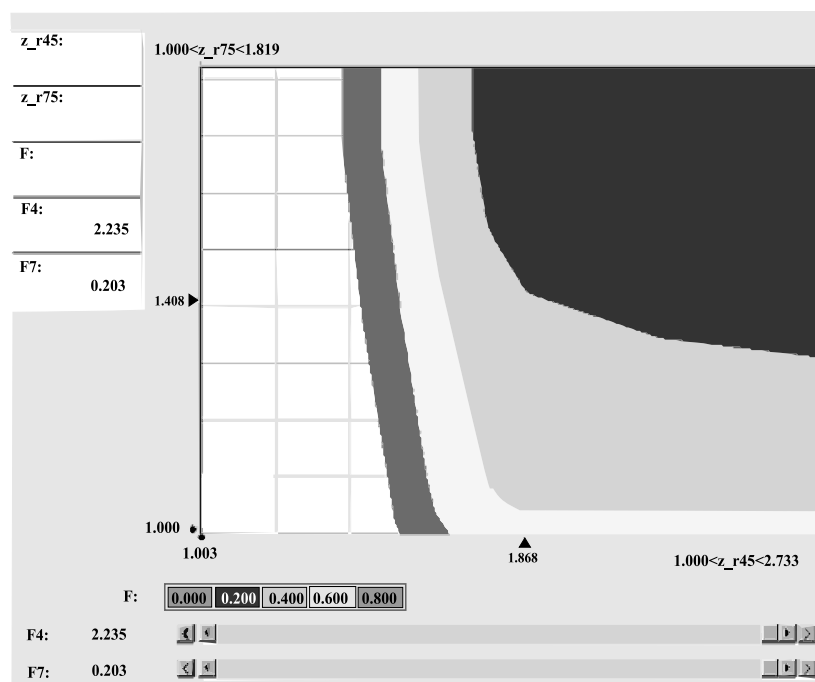


Рис. 14.1.

На рис. 14.1 приведенная черно-белая копия экрана для пяти критериев (на этой карте решений вместо различных цветов использованы оттенки серого). На осях отложены концентрации нефтепродуктов в Московской области ( $z_r45$ , по горизонтальной оси) и в Нижегородской области ( $z_r75$ , по вертикальной оси). Связь между оттенками серого и отображаемой ими общей стоимостью проекта дана в шкале, расположенной под картой решений. Как видно, стоимость проекта меняется от 0 до 0.800 миллиардов рублей с шагом в 200 миллионов рублей. Затраты, осуществляемые на территории Московской и Нижегородской областей, ограничены большими величинами (слайдеры расположены в крайней правой позиции), так что эти ограничения на рис. 14.1 не оказывают влияния на форму карты решений.

Для более точного анализа паретовой границы удобно использовать карты решений, на которых изображены только границы сечений. Во всяком случае, инженеры-водохозяйственники предпочитают использовать именно такой вариант карты решений. Для рассматриваемой задачи вариант с изоб-



ражением границ сечений приведен на рис. 14.2.

Для удобства ориентирования на карте решений, обратим внимание на то, что значения в левом нижнем углу карты для обеих областей равны 1 ПДК, в то время как в правом верхнем эти значения равны текущему загрязнению, то есть 2.73 ПДК для Московской области (показатель  $z_{r45}$ ) и 1.82 ПДК для Нижегородской области (показатель  $z_{r75}$ ). Сетка соответствует значениям 1.0, 1.2, и т.д. для горизонтальной оси и 1.0, 1.1, и т.д. для вертикальной оси.

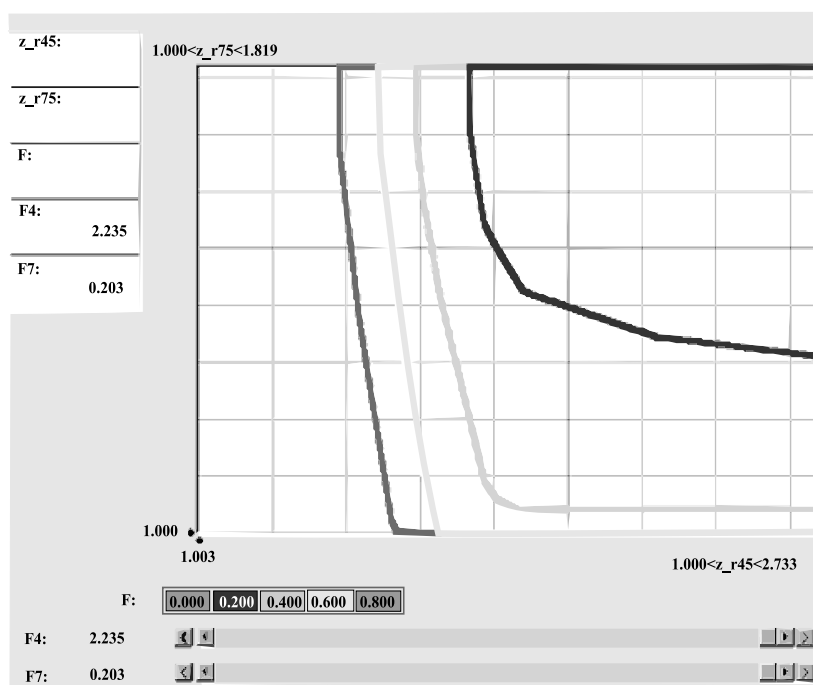


Рис. 14.2.

Как видно, форма эффективной границы сильно зависит от стоимости проекта. Рассмотрим границу сечения, связанную с ограничением на общую стоимость проекта в 200 миллионов рублей (самое темное сечение рис. 14.1). Для этой суммы недоминируемые сочетания загрязнений нефтепродуктами в Московской (показатель  $z_{r45}$ ) и Нижегородской (показатель  $z_{r75}$ ) областях образуют границу, при движении вдоль которой значения этих величин меняются. Загрязнение в Московской области может быть изменено

от максимального (текущего) в 2.73 ПДК до минимально возможного при этих затратах, которое составляет примерно 1.75 ПДК. Если выбрать минимально возможное (при данных затратах) загрязнение в Московской области, равное 1.75 ПДК, то загрязнение в Нижегородской области не может быть менее, чем 1.7 ПДК. Таким образом, использование 200 миллионов рублей в интересах Москвы может привести к тому, что загрязнение в Нижегородской области попутно упадет с максимального в примерно 1.8 ПДК до примерно 1.7 ПДК, но не до минимально возможного при таких затратах в 1.3 ПДК. На карте решений ясно видны не только минимальные значения критериев, но и вся недоминируемая граница для величин загрязнения нефтепродуктами в Московской и Нижегородской областях при рассматриваемых суммарных затратах не более 200 миллионов рублей. Часто такую границу называют кривой эффективного замещения (efficient tradeoff curve), поскольку она показывает, как уменьшение значения одного из критериев приводит к увеличению значения другого для парето-эффективных решений.

Недоминируемая граница для сечения, соответствующего 400 миллионам рублей, изображена более светлой линией. Как видно, эта сумма позволяет практически решить проблему загрязнения нефтепродуктами для Нижегородской области (до 1.05 ПДК), если, конечно, капиталовложения будут делаться в ее интересах. В то же время, минимальное загрязнение для Московской области при этих затратах (1.6 ПДК) достигается при значительной величине загрязнения в Нижегородской области (1.7 ПДК). К счастью для нижегородцев, кривая замещения между критериями крута в области минимального загрязнения для Московской области (увеличение загрязнения в Московской области на 0.2 ПДК приводит к уменьшению в загрязнении в Нижегородской области на 0.65 ПДК) — сравните точку с координатами ( $z_{r45} = 1.6$ ,  $z_{r75} = 1.7$ ) с точкой излома ( $z_{r45} = 1.8$ ,  $z_{r75} = 1.05$ ). В связи с этим, нижегородцы могут надеяться настоять на выборе на этой кривой зоны излома, характеризующей малым загрязнением в Нижегородской области, за счет уступок Москве по каким-либо другим вопросам.

Дальнейшее увеличение суммарных затрат на проект дает значительно меньший эффект — следующая кривая замещения (белый цвет на рис. 14.1 вместо желтого на цветной карте решений) отстоит от предыдущей всего примерно на 0.1–0.2 ПДК. Можно рассмотреть и более точные карты решений, уменьшив диапазон рассматриваемых величин. Можно оценить влияние ограничений, накладываемых на затраты, осуществляемые на территории Московской или Нижегородской областей, рассмотрев матрицу карт решений или применив компьютерную анимацию. Можно также выбрать

другие координатные критерии и рассмотреть проблему с иной точки зрения.

Всесторонне ознакомившись с состоянием проблемы, пользователь (ЛПР) может указать предпочтительное сочетание значений двух критериев  $(\hat{u}, \hat{v})$  прямо на предпочтительной недоминируемой границе одной из подходящих карт решений. Компьютер рассматривает вектор  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  в качестве целевой точки, после чего находит по ней парето-эффективное решение проблемы, приводящее к значениям критериев, близких к  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ . Поскольку целевая точка  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  является достижимой, такой метод выбора целевой точки получил название метода *достижимых целей*.

Подчеркнем, что при визуализации паретовой границы пользователь имеет полную свободу выбора двумерных сечений ОЭП, карт решений, их матриц и других средств визуализации. Этим данная процедура отличается от структуризованной итеративной процедуры “Шаг по паретовой границе”, описанной в предыдущей части курса лекций.

## Лекция 15. Полиэдральная аппроксимация ОЭП в выпуклом случае

В предыдущей лекции мы изучили возможности визуализации эффективного множества. Однако, как было сказано, для нее необходимо осуществить аппроксимацию ОЭП. В этой лекции рассматривается задача аппроксимации множества достижимых критериальных векторов или его ОЭП в том случае, когда эти множества выпуклы. При этом предполагается, что можно решить задачу максимизации линейной свертки критериев:

$$\langle c, y \rangle \rightarrow \max, \quad y = \varphi(x), \quad x \in X.$$

Такая задача может быть решена, например, для линейных многокритериальных задач при практически любой размерности пространства решений. В этом случае она сводится к расчету значения опорной функции множества  $Y = \varphi(X) \subset \mathbb{R}^m$  для направления  $c \in \mathbb{R}^m$ , т.е. вычисления функции  $g_Y(c) = \max_{y \in Y} \langle c, y \rangle$ . При расчете опорной функции будем считать, что  $\|c\| = 1$ .

### 15.1. О полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел

Напомним, что под *полиэдральной аппроксимацией* выпуклого множества понимают поиск таких матрицы  $G$  и вектора  $g$ , что множество решений системы  $Gy \leq g$  достаточно хорошо описывает аппроксимируемое множество. Интенсивная разработка методов полиэдральной аппроксимации выпуклых множеств связана с тем, что выпуклые множества часто встречаются в практических задачах. Например, множество достижимых критериальных векторов выпукло в линейных многокритериальных задачах, имеющих весьма широкое применение в экономических и экологических исследованиях. Кроме того, оболочка Эджворта-Парето выпукла в эффективно выпуклых задачах, часто встречающихся в экономических приложениях. Важно, что вопрос об аппроксимации выпуклых тел достаточно хорошо изучен теоретически. В частности, разработаны методы полиэдральной аппроксимации выпуклых компактных тел, оптимальные по скорости сходимости, простоте построенной аппроксимации и числу измерений характеристик аппроксимируемого множества.

Кроме возможности вычислить значение опорной функции, при полиэдральной аппроксимации удобно предположить, что аппроксимируемое множество компактно и телесно. Таким образом, можно рассмотреть вопрос о полиэдральной аппроксимации множеств достижимых критериальных векторов, являющихся многомерными выпуклыми компактными телами (ВКТ), для которых можно рассчитать значение опорной функции для любого нормированного вектора  $c \in \mathbb{R}^m$ . В дальнейшем мы будем рассматривать задачу аппроксимации ВКТ, абстрагируясь от того факта, что нас интересует задача многокритериальной оптимизации. Благодаря этому описываемая методика может быть применена для решения и других прикладных задач.

Аппроксимация ВКТ осуществляется на основе построения последовательностей аппроксимирующих многогранников с растущим числом вершин. Точнее говоря, далее рассматриваются итерационные методы аппроксимации многомерного ВКТ, под которыми понимаются такие методы построения последовательности телесных многогранников  $P^0, P^1, \dots, P^k, \dots$  с растущим числом вершин, в которых последующий многогранник строится на основе предыдущего с использованием расчетов опорной функции аппроксимируемого множества  $Y$ . При этом будем рассматривать такие методы, что

$$h(P^N, Y) \rightarrow 0,$$

где  $h(A_1, A_2)$  — метрика Хаусдорфа, определенная в лекции 8. Важным отличием рассматриваемых методов аппроксимации, основанных на построении последовательности многогранников, от методов приближенного описания с помощью отдельно взятых выпуклых тел, является возможность аппроксимации ВКТ с любой степенью точности. За это преимущество, однако, приходится платить дорогой ценой: как показывают практика и теоретические оценки, сложность описания аппроксимирующего многогранника быстро растет с увеличением точности аппроксимации и ростом размерности аппроксимируемого тела. Тем не менее, приходится идти на построение аппроксимирующих последовательностей в связи с тем, что в многокритериальных задачах, как мы видели на примере в предыдущей лекции, представляет интерес форма паретовой границы аппроксимируемого множества, а не только область, где это множество находится. Поэтому применение итерационных методов связано с необходимостью разработки методов, оптимальных с точки зрения сложности описания аппроксимирующих многогранников. Кроме того, поскольку каждое вычисление опорной функции аппроксимируемого тела может быть достаточно сложным и требовать больших затрат времени, представляют интерес методы, оптимальные с точки зрения числа вычислений опорной функции.

Такой подход разумен даже в том случае, когда аппроксимируемое множество само является многогранником, поскольку за небольшое число шагов может быть построен аппроксимирующий многогранник со значительно меньшим числом вершин.

Итерационные методы различаются способом построения последующего многогранника по предыдущему. Рассмотрим методы, использующие так называемую *схему восполнения*. В этой схеме используется построение внутренних аппроксимирующих многогранников, вершины которых должны принадлежать границе  $\text{Fr } Y$  аппроксимируемого тела  $Y$ .

Очередная  $(k + 1)$ -я итерация метода, основанного на схеме восполнения, состоит из двух шагов (предполагается, что уже построен многогранник  $P^k$ ).

#### **(k+1)-я итерация**

**шаг 1.** Некоторым образом выбирается точка  $\hat{y} \in \text{Fr } Y$ .

**шаг 2.** Строится  $P^{k+1} = \text{conv}\{\hat{y}, P^k\}$  в требуемом виде.

Конкретные методы, основанные на схеме восполнения, различаются способами решения на каждом шаге следующих задач:

- 1) способом выбора присоединяемой точки  $\hat{y} \in \text{Fr } Y$ ,
- 2) видом задания  $P^{k+1} = \text{conv}\{\hat{y}, P^k\}$  и способом его построения в требуемом виде.

Среди методов, основанных на схеме восполнения, можно выделить адаптивные (активные) методы, в которых при выборе точки  $\hat{y} \in \text{Fr } Y$  используется информация о многограннике  $P^k$ . В этом случае выбор  $\hat{y}$  адаптирован к форме  $Y$  в той мере, в какой  $P^k$  аппроксимирует  $Y$ . Адаптивные методы являются более эффективными, нежели неадаптивные (пассивные), основанные, как правило, на расчете опорной функции для некоторой априорной сетки на сфере направлений и не учитывающие конкретную форму аппроксимируемого тела. В качестве характерного примера адаптивных итерационных методов рассмотрим метод уточнения оценок, получивший наибольшее распространение к настоящему времени.

### **15.2. Метод уточнения оценок**

Метод уточнения оценок (УО) основан на схеме восполнения и использует тот факт, что аппроксимирующий многогранник может быть задан двумя способами: как выпуклая оболочка вершин и как множество решений

системы линейных неравенств. Для выбора присоединяемой точки  $\hat{y} \in \text{Fr } Y$  с учетом формы  $P^k$  в методе УО используется представление  $P^k$  в виде множества решений системы линейных неравенств. Для этого на шаге 2 метода восполнения решается достаточно сложная задача построения  $P^{k+1} = \text{conv}\{\hat{y}, P^k\}$  в виде системы линейных неравенств. Поскольку такая система линейных неравенств находится на основе вершин многогранников, в методе УО аппроксимирующий многогранник строится сразу в обеих возможных формах — в виде выпуклой оболочки и в виде пересечения полупространств, задаваемых неравенствами. Дадим более точное описание метода УО.

Перед началом  $(k + 1)$ -й итерации должен быть построен выпуклый телесный многогранник  $P^k$  с вершинами, принадлежащими границе аппроксимируемого тела  $Y$ . Многогранник  $P^k$  должен быть также задан в виде множества решений некоторой системы линейных неравенств. Обозначим через  $U(P^k)$  конечное множество единичных внешних нормалей к гиперграням многогранника  $P^k$ . Очевидно, что множество  $U(P^k)$  задано, поскольку многогранник  $P^k$  задан в виде множества решений системы линейных неравенств.

#### (k+1)-я итерация

**шаг 1.** В результате расчета  $(g_Y(u) - g_{P^k}(u))$  для всех  $u \in U(P^k)$  находится нормаль  $\hat{u} \in U(P^k)$ , на которой достигается  $\max_{u \in U(P^k)} (g_Y(u) - g_{P^k}(u))$ .

В качестве  $\hat{y}$  выбирается такая точка  $\text{Fr } Y$ , что  $\langle \hat{u}, \hat{y} \rangle = g_Y(\hat{u})$ .

**шаг 2.** На основе построения  $\text{conv}\{\hat{y}, P^k\}$  в виде множества решений системы линейных неравенств определяется  $U(P^{k+1})$ .

Метод УО проиллюстрирован на рис. 15.1, на котором изображены тело  $Y$ , многогранники  $P^k$  и  $P^{k+1}$ , а также внешний аппроксимирующий многогранник  $\hat{P}^{k+1}$ , получаемый попутно. Предполагается, что перед началом работы метода задан исходный выпуклый телесный многогранник  $P^0$  с вершинами, принадлежащими границе аппроксимируемого тела. Методы построения многогранника  $P^0$  здесь рассматриваться не будут.

Теоретическое исследование метода УО показало, что для тел, имеющих хотя бы одну точку гладкости, этот метод строит многогранники, последовательность которых оптимальна по порядку числа вершин. Были получены и более общие результаты о свойствах схем восполнения вообще и метода УО (см. [12]).

Алгоритмическая реализация метода УО основана на решении конечного числа задач выпуклой оптимизации (линейного программирования в слу-

чае линейных моделей) на шаге 1 и нахождении выпуклой оболочки многогранника  $P^k$  и точки  $\hat{y}$  на шаге 2. Если первая задача является хорошо изученной и для ее решения имеется стандартное программное обеспечение, то задача, решаемая на втором шаге, требует особого внимания.

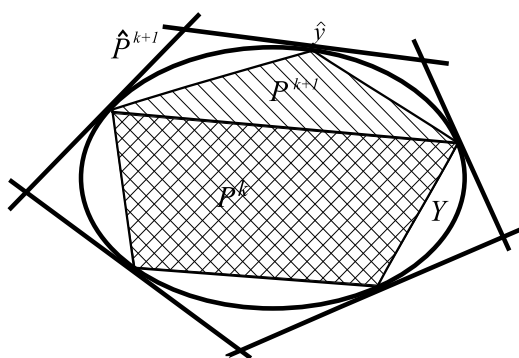


Рис. 15.1.

### 15.3. Построение выпуклой оболочки точки и многогранника

Рассмотрим второй шаг схемы восполнения, т.е. построение  $\text{conv}\{\hat{y}, P^k\}$ . Опишем на трехмерном примере общую схему решения этой задачи.

Пусть имеется многогранник ABCDEF, и требуется построить грани выпуклой оболочки этого многогранника и точки G (см. рис. 15.2 а). Нетрудно понять, что в эту новую выпуклую оболочку войдут все грани исходного многогранника, не видимые из точки G (т.е. ABCD, BCE, CDE, DEF и ADF), и не войдут грани, видимые из точки G (ABF и BEF, заштрихованные на рис. 15.2 а). Кроме того, выпуклая оболочка будет иметь новые грани. Этими новыми гранями являются грани минимального конуса с вершиной G, содержащего многогранник ABCDEF (см. рис. 15.2 б).

Каждая такая новая грань лежит в гиперплоскости, проходящей через ребро многогранника, лежащее на границе между видимой и невидимой (из точки G) частями поверхности многогранника. Эта граница состоит из ребер АВ, ВЕ, ЕF и FА. Таким образом, каждая новая грань выпуклой оболочки проходит через пересечение пары соседних граней многогранника, одна из которых видима, а другая — невидима из точки G. Например, новая грань ВЕG проходит через ребро ВЕ, которое является пересечением видимой грани ВЕF и невидимой грани BCE.



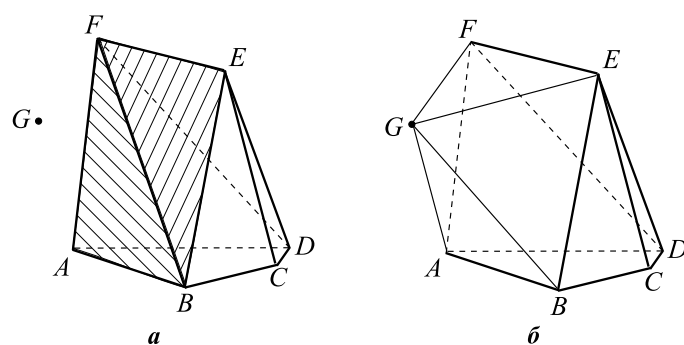


Рис. 15.2.

Описанная схема легко обобщается на случай пространства произвольной размерности  $m$ , если учесть, что граница между видимой и невидимой из точки  $G$  частями многогранника в  $\mathbb{R}^m$  состоит из граней размерности  $m - 2$ . Эта схема построения выпуклой оболочки многогранника и точки часто называется методом “под-над” (“beneath-beyond”).

Для реализации схемы “под-над” требуется решить три проблемы: 1) определить, является ли данная гипергрань видимой из присоединяемой точки; 2) определить, являются ли две гипер грани соседними; 3) преобразовать представление многогранника к новому виду. Способы решения перечисленных проблем зависят от формы представления многогранника и определяют конкретный вид метода.

Специфика метода уточнения оценок, требующая получить описание выпуклой оболочки в виде множества решений системы линейных неравенств, приводит к тому, что реализация схемы “под-над” в методе УО связана с использованием методов свертывания систем линейных неравенств. Мы не рассматриваем этот сложный вопрос в данном курсе (см. [12]).

Разработанные методы аппроксимации выпуклых тел многогранниками оказались надежным средством аппроксимации множества достижимых критериальных векторов в случае его выпуклости, ограниченности и разумной размерности пространства критериев (до семи-восьми).

Отметим, что метод УО может быть использован и для аппроксимации множества  $Y_P$ . Для этого достаточно взять в качестве исходного аппроксимирующего многогранного множества неположительный ортант с вершиной на паретовой границе. Далее все операции производятся без изменения. Все теоретические и экспериментальные утверждения также верны в этом случае.

## Лекция 16. Методы аппроксимации паретовой границы конечным числом точек

Рассмотрим методы аппроксимации паретовой границы конечным числом точек при бесконечном множестве  $X$ . Существует несколько основных подходов решения этой задачи, которые реализованы в виде многочисленных алгоритмов.

### 16.1. Основные подходы к построению методов точной аппроксимации паретовой границы

#### Подход на основе покрытие допустимого множества шарами

Прежде всего следует отметить теоретически наиболее обоснованный подход, основанный на покрытии множества  $X$  шарами переменного радиуса, расчете вектор-функции  $\varphi(x)$  в центрах шаров и выборе недоминируемых критериальных точек<sup>1)</sup>. Радиусы шаров покрытия определяются константами Липшица функций  $\varphi_i(x), i = 1, \dots, m$ . Большим достоинством этого подхода является то, что гарантируется приближенное построение границы Парето с заданной точностью. Точнее говоря, ОЭП системы получаемых точек принадлежит ОЭП множества достижимых критериальных векторов, а ОЭП множества точек, смещенных в направлении улучшения значений критериев на точность аппроксимации, гарантированно содержит в себе ОЭП множества достижимых критериальных векторов, в том числе его паретову границу. Ограниченность этих методов связана с тем, что они пригодны только в случае знания констант Липшица, которые часто либо не известны, либо известны весьма неточно. В частности, применение этого подхода невозможно при задании функций  $\varphi$  в виде вычислительного модуля типа черного ящика, когда оценка констант Липшица невозможна. Кроме того, при большой размерности пространства решений (порядка нескольких сотен) такой подход может потребовать огромного объема вычислений.

#### Подход на основе решения параметрической задачи скалярной оптимизации

Важное направление составляют методы, основанные на свертывании критериев в единственный критерий оптимизации, содержащий параметры.

<sup>1)</sup>Евтушенко Ю.Г., Потапов М.А. Методы численного решения многокритериальных задач. Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. С. 25-29.

В пространстве параметров задается сетка, а задача оптимизации единственного критерия решается при значениях параметров, определяемых узлами заданной сетки. Этот подход был реализован и использован в практических задачах, причем оказалось удобно брать в качестве свертки расстояние от идеальной точки<sup>2)</sup>. В простейшем случае решается задача

$$\rho_\lambda(y, y^*) \rightarrow \min, \quad y = \varphi(x), \quad x \in X.$$

В качестве функции  $\rho_\lambda(y, y^*)$  можно взять, например, взвешенную функцию Чебышева

$$\rho(y, y^*) = \max_{i=1, \dots, m} \lambda_i |y_i^* - y_i|.$$

На множестве неотрицательных весов  $\lambda_i$ , сумма которых равна единице, выбирается сетка и решается задача для всех точек сетки, в результате чего находится большое число недоминируемых точек. Хотя сами по себе подобные методы могут не требовать знания постоянных Липшица для используемых функций (как критериев, так и ограничений), точность аппроксимации методов такого типа оценивается с использованием постоянных Липшица. Полученные оценки показывают, что для достижения разумной точности аппроксимации требуется решить огромное число задач глобальной скалярной оптимизации нелинейных функций.

Другой реализацией оптимизационного подхода является метод ограничений. Проиллюстрируем задачу для  $m = 2$ . Пусть множество  $Y$  имеет вид, представленный на рис. 16.1. В методе предварительно находятся идеальная точка  $y^* = (y_1^*, y_2^*)$  и точка  $y^0 = (y_1^0, y_2^0) \in Y$ , в которой достигается максимум критерия  $y_1$ . Отрезок  $[y_2^0, y_2^*]$  разбивается на  $K$  частей и решается серия задач

$$y_1 \rightarrow \max \\ y = \varphi(x), \quad x \in X, \quad y_2 \geq a^i,$$

где  $a^i = y_2^0 + i(y_2^* - y_2^0)/K, i = 0, 1, \dots, K$ . Каждая задача дает точку  $S(Y)$ . Выбрав из списка критериальные точки, недоминируемые по Парето, можно составить список точек, аппроксимирующих паретову границу. В многомерном случае оптимизируется один критерий, а варьируются ограничения на все остальные критерии. При этом, однако, трудно заранее оценить диапазон значений критериев на паретовой границе и, значит, области варьирования критериев (эта задача поставлена некорректно в связи с возможной неустойчивостью паретовой границы).

<sup>2)</sup> Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В. Декомпозиция в задачах проектирования. Изв. АН СССР. Сер. Техн. Кибернетика. 1979. №2. С. 7-17, а также [15].

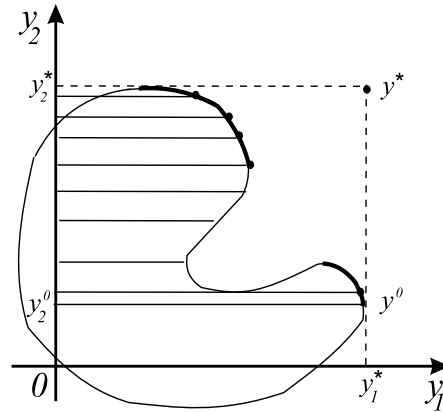


Рис. 16.1.

Отметим, что в обоих рассмотренных методах полученные точки могут представлять паретову границу очень неравномерно. Важно, что оба метода пригодны и в случае нелинейных невыпуклых моделей. При этом, однако, следует помнить, что в многоэкстремальных задачах решение даже одной задачи скалярной оптимизации (т.е. при фиксированных весах или ограничениях) может требовать больших вычислительных затрат.

#### Использование линейности задачи

К подходу на основе скалярной оптимизации близки методы, предложенные в 1970-х годах и распространяющие некоторые аспекты изложенного в лекции 13 двухкритериального метода Гасса и Саати на случай  $m > 2$  (см., например, [15]). Эти методы предназначены для линейных задач МКО типа (12.1), т.е.

$$y \rightarrow \max, \quad y = Fx, X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}.$$

Как уже говорилось, из теории сверток следует, что при решении скалярной задачи линейного программирования

$$\langle \lambda, y \rangle \rightarrow \max \tag{16.1}$$

$$y = Cx, \quad x \in X, \tag{16.2}$$

с заданным вектором  $\lambda > 0$  находится недоминируемая вершина паретовой границы. Меняя  $\lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda > 0$ , можно найти все недоминируемые вершины.

Можно легко сформулировать необходимое и достаточное условие недоминируемости вершины множества достижимых значений критериев, которое дает возможность ввести понятие эффективного базиса в пространстве решений. Для того чтобы найти все недоминируемые вершины, достаточно перебрать все эффективные базисы. Соответствующий метод может иметь следующие этапы:

- 1) находится произвольная недоминируемая вершина  $y^{(0)} \in P(Y)$  и соответствующий базис в пространстве решений,
- 2) выясняется, не были ли соседние (или другие) базисы рассмотрены ранее и являются ли они эффективными,
- 3) если обнаруживается эффективный базис, не рассмотренный ранее, то осуществляется переход в этот базис и находится соответствующая вершина.

В отличие от двумерного случая, здесь возникает неоднозначность выбора соседней вершины и проблема того, каким образом обойти все вершины. Эта задача является сложной с вычислительной стороны, особенно учитывая неизбежные ошибки округления. Мы не будем углубляться в эти вопросы, подробно рассмотренные в книге [15].

При  $m > 2$  вершины многогранного множества обычно расположены неравномерно, так что они даже могут не давать представления о значениях критериев на всей паретовой границе. Для того чтобы исправить недостатки метода, было предложено по найденным вершинам выяснить, какие из них лежат на одной грани, и выписать уравнения многомерных граней. Авторы такой идеи надеются, что благодаря этому ЛПР сможет получить более полную информацию о паретовой границе. С этим трудно согласиться — понимание паретовой границы, представленной в форме совокупности многомерных (скажем, четырехмерных) граней, чрезвычайно затруднительно даже для ЛПР, имеющего хорошее математическое образование. Даже в случае относительно малого числа вершин и граней (скажем, не более нескольких сотен) анализ такой информации практически невозможен.

### **Методы случайного поиска**

При решении практических задач часто используются методы, основанные на случайном поиске оптимальных решений. Эти методы используют расчет критериальных векторов в случайных точках и отбор среди них недо-

минируемых векторов<sup>3)</sup>. При этом множество, на котором происходит поиск, может модифицироваться в зависимости от полученных результатов или по заранее заданной схеме. Эти методы легко реализуемы, поэтому применяются для решения разнообразных задач проектирования технических систем. Хотя в таких методах оценка качества аппроксимации обычно не дается, сходимость процесса гарантируется при стремлении числа случайных точек к бесконечности.

### **Эволюционные методы**

Наконец, в последнее время широкое распространение получили генетические методы одновременного поиска многих точек, близких к границе Парето (см. [13]), основанные на модификации принципов генетической скалярной оптимизации. В этих методах оценки точности аппроксимации обычно также не даются, а методы сходятся при стремлении числа итераций к бесконечности.

### **Гибридные методы аппроксимации с оценкой качества полученной паретовой границы**

В последнее время все чаще встречаются гибридные методы аппроксимации паретовой границы, в которых интегрируются различные концепции методов, изложенных выше. При этом используются преимущества всех концепций. Далее более подробно опишем один гибридный метод, обладающий следующими свойствами:

- аппроксимируется ОЭП, а не паретова граница, что снимает проблему возможной неустойчивости;
- дается стохастическая оценка качества аппроксимации;
- математическая модель может быть задана в виде черного ящика (скажем, вычислительного модуля, свойства которого не могут быть изучены аналитически).

В данном методе (см. [2]) в качестве аппроксимирующих множеств предлагается использовать совокупность конусов с вершинами, близкими к границе Парето. Точнее говоря, аппроксимация ОЭП задается конечной совокупностью  $T$  точек множества  $Y$ , в какой-то степени близких к паретовой

---

<sup>3)</sup>Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.

границе. Рассмотрим задачу многокритериальной минимизации. Тогда множество

$$T^* = \cup \{y + \mathbb{R}_+^m : y \in T\}$$

задает внутреннюю аппроксимацию множества  $Y^*$ . На рис. 16.2 изображены идеальная точка  $y^*$ , паретова граница  $P(Y)$ , четыре точки ее аппроксимации, а также множество  $T^*$ , заданное объединением конусов с вершинами в этих точках. Заметим, что  $T^*$  является ОЭП совокупности точек из  $T$  (здесь рассматривается задача многокритериальной минимизации). Использование в качестве аппроксимации множества  $T^*$  позволяет осуществить аппроксимацию и визуализацию произвольной невыпуклой ОЭП.

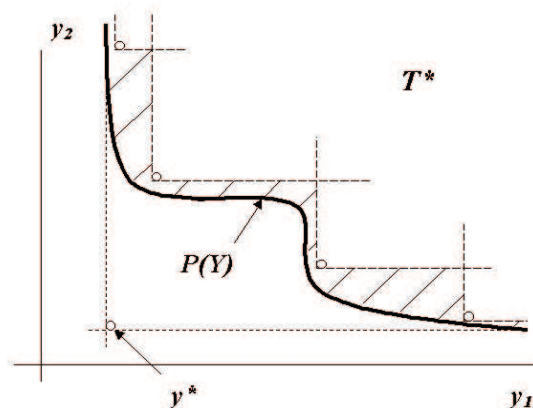


Рис. 16.2.

Важнейшая особенность описываемого метода — использование вероятностных оценок качества текущей аппроксимации. Именно это позволяет отказаться от использования постоянных Липшица для оценки качества аппроксимации. Поэтому начнем изложение с методов статистического оценивания качества текущей аппроксимации ОЭП, а только затем перейдем к методам аппроксимации и визуализации. В заключение кратко обсудим перспективы использования описанных методов в многопроцессорных системах.

#### 16.2. Статистическое оценивание качества аппроксимации ОЭП

Итак, начнем с вопроса об оценивании качества аппроксимации множества  $Y^*$  множеством  $T^*$ . Прежде всего, сформулируем требования к оценке

качества аппроксимации. Во-первых, эта оценка должна быть *монотонной*, т.е. если внутренняя аппроксимация  $T_2^*$  более точна, чем  $T_1^*$  для  $T_1^* \subset T_2^*$ , то оценка качества  $T_2^*$  должна быть выше, чем для  $T_1^*$ . Во-вторых, она должна быть *действительной*, т.е. различать хорошие и плохие аппроксимации. В-третьих, оценка должна быть *реализуема* в реальных задачах.

Для стохастической оценки качества аппроксимации используется величина полноты аппроксимации. Под *полнотой*  $\eta_T$  некоторой аппроксимации  $T^*$  множества  $Y^*$ , заданной базой  $T$ , будем понимать вероятность того, что из  $x \in X$  следует  $\varphi(x) \in T^*$ . Условие

$$\eta_T \geq \eta \quad (16.3)$$

означает, что в аппроксимации  $T^*$  представлена не менее чем  $\eta$ -я доля множества  $X$  (т.е. при достаточно больших  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ , множество  $T^*$  не очень бедно по сравнению с  $Y^*$ ). Задача оценки качества  $T^*$  может быть сформулирована как проверка выполнения условия (16.3) при достаточно большом числе  $\eta < 1$ .

Оценка полноты аппроксимации в методе проводится эмпирически, на основе генерирования случайных точек из  $X$ , поэтому такая проверка может гарантировать выполнение утверждения (16.3) только с определенной вероятностью  $\chi < 1$ . Таким образом, вместо (16.3) рассчитывается число  $\eta$ , для которого выполняется вероятностная оценка

$$P\{\eta_T > \eta\} \geq \chi, \quad (16.4)$$

где  $0 < \chi < 1$ . Вопрос состоит в том, как выбрать число  $N$  случайных точек  $x \in X$ , чтобы получить оценку типа (16.4) для заданного  $\chi$ . Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть используется выборка  $H_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ , состоящая из  $N$  случайных равномерно распределенных точек множества  $X$ . Пусть  $\eta_T^N = n/N$ , где  $n$  — число таких элементов выборки, для которых выполняется включение  $\varphi(x) \in T^*$ . Величина выборочной полноты аппроксимации  $\eta_T^N$  является несмещенной оценкой полноты аппроксимации  $\eta_T$ . Определение величины  $\eta$  и числа  $N$  случайных точек  $x \in X$ , достаточных для получения оценки (16.4), может быть основано на следующей теореме.

**Теорема 16.1.** *Имеет место следующая оценка:*

$$P\{\eta_T > \eta_T^N - \Delta(\chi, N)\} \geq \chi,$$

где

$$\Delta(\chi, N) = [\ln(1 - \chi)^{-1} / (2N)]^{1/2}. \quad (16.5)$$



Смысл этой теоремы состоит в том, что величина  $\eta$  отличается от  $\eta_T^N$  на величину  $\Delta(\chi, N)$ , связанную с величиной  $N$  согласно (16.5). Если задать положительную величину  $\Delta$ , то по заданному значению  $\chi$  можно найти число генерируемых точек, достаточное для получения требуемой точности — это минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$N(\Delta, \chi) \geq \ln(1 - \chi)^{-1} / (2\Delta^2). \quad (16.6)$$

Так, скажем, для  $\Delta = 0.1$  и  $\chi = 0.9$  формула (16.6) дает  $N = 126$ , а для  $\Delta = 0.01$  и  $\chi = 0.99$  получаем  $N = 23026$ . Таким образом, пользователь имеет широкие возможности варьирования этих величин в зависимости от продолжительности расчета величины критерияльного вектора. При этом для оценки качества аппроксимации наряду с интервальной оценкой полноты (16.4) можно просто использовать несмещенную оценку величины  $\eta_T$ , которой является выборочная полнота аппроксимации  $\eta_T^{(N)}$ . Другая полезная оценка — расстояние от совокупности  $\varphi(x)$ ,  $x \in H_N$ , до множества  $T^*$ .

Пусть теперь пространство  $\mathbb{R}^m$  нормированное,  $Q \subset \mathbb{R}^m$ . Сразу уточним, что расстояние между точками  $y^1$  и  $y^2$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$  в данном методе характеризуется метрикой

$$\rho(y^1, y^2) = \max_i \{\lambda_i |y_i^1 - y_i^2|\},$$

где  $\lambda_i$  — некоторые положительные веса. В этом случае шары пространства  $\mathbb{R}^m$  являются параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат. Для  $\varepsilon > 0$  через  $(Q)_\varepsilon$  обозначим открытую  $\varepsilon$ -окрестность этого множества. Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  можно определить величину  $\eta_T^N(\varepsilon)$ , равную доле точек  $x \in H_N$ , для которых  $\varphi(x) \in (T^*)_\varepsilon$ . Функцию  $\eta_T^N(\varepsilon)$  назовем функцией выборочной полноты аппроксимации. Она характеризует качество аппроксимации более полно, чем просто величина  $\eta_T^N = \eta_T^N(0)$ . Отметим, что функция  $\eta_T^N(\varepsilon)$  является монотонно неубывающей функцией  $\varepsilon$  и может быть легко рассчитана. Существует конечная величина  $\varepsilon_{max} = \min\{\varepsilon | \eta_T^N(\varepsilon) = 1\}$ , называемая радиусом полного покрытия. В качестве оценки качества аппроксимации  $T^*$  можно взять значения функции при различных  $\varepsilon$ , например  $\eta_T^N(0)$ , а также радиус полного покрытия.

При неформальном анализе качества аппроксимации пользователь может рассмотреть график функции  $\eta_T^N(\varepsilon)$  целиком. Величина  $\eta_T^N(\varepsilon)$  является несмещенной оценкой величины  $\eta_T(\varepsilon)$ , смысл которой состоит в том, что  $(1 - \eta_T(\varepsilon))$  — вероятность получения точки вне множества  $(T^*)_\varepsilon$  при генерировании случайных точек в множестве  $X$ . Таким образом, функция  $\eta_T^N(\varepsilon)$

показывает, каких усилий стоит улучшение аппроксимации ОЭП с помощью генерирования случайных точек.

Экспериментальное исследование описанной статистической оценки показало ее пригодность только в случае относительно малой размерности пространства решений  $\mathbb{R}^n$  и достаточно медленно меняющихся функций  $\varphi$ . В случае большой размерности пространства решений и (или) быстро меняющихся функций, когда множество эффективных решений имеет исключительно малую меру и не может быть найдено с помощью генерирования случайных точек, величина выборочной полноты аппроксимации оказывается неспособной различать точные и неточные аппроксимации (скажем, оказывается, что  $\eta_T^N(0) = 0$  как для точных, так и для неточных аппроксимаций), т.е. оценка не является действенной. В связи с этим в методе в случае достаточно больших размерностей пространства решений используется альтернативная оценка качества аппроксимации, развивающая описанные идеи, но в то же время действенная как в случае большой размерности вектора решений, так и в случае быстро меняющихся функций.

Как и прежде, сгенерируем выборку  $H_N$  из  $N$  случайных равномерно распределенных точек множества  $X$ , а затем применим отображение  $\Phi : X \rightarrow X$ , ставящее в соответствие случайной точке  $x \in X$  некоторую такую “улучшенную” точку  $x' \in X$ , что вектор  $\varphi(x')$  “более близок” к  $P(Y)$ , чем  $\varphi(x)$  (например<sup>4)</sup>,  $\varphi(x') \leq \varphi(x)$ ). Определим величину  $\eta_\Phi^N(\varepsilon)$ , равную доле точек  $x \in H_N$ , для которых  $\varphi(\Phi(x)) \in (T^*)_\varepsilon$ . Функция  $\eta_\Phi^N(\varepsilon)$ , называемая обобщенной выборочной полнотой, также характеризует качество аппроксимации, обладает свойством монотонности и может быть легко рассчитана. В том случае, когда корректно предположение о существовании вероятности

$$\eta_\Phi(\varepsilon) = P\{x \in X \Rightarrow \varphi(\Phi(x)) \in (T^*)_\varepsilon\}, \quad (16.7)$$

на основе  $\eta_\Phi^N(\varepsilon)$  можно построить доверительные интервалы для  $\eta_\Phi(\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon \geq 0$ .

Функция  $\eta_\Phi^N(\varepsilon)$ , являющаяся выборочной полнотой аппроксимации, используется также и сама по себе — она либо представляется пользователю в виде графика, либо просто происходит автоматическая проверка величины ее некоторых значений, скажем радиуса полного покрытия. Отметим, что величина  $1 - \eta_\Phi(\varepsilon)$ , где  $\eta_\Phi(\varepsilon)$  определяется по формуле (16.7), по-прежнему характеризует вероятность получения точек вне  $\varepsilon$ -окрестности множества  $T^*$  в описанном процессе, т.е. трудоемкость улучшения текущей аппроксимации. Примеры функций  $\eta_\Phi^N(\varepsilon)$  приведены на рис. 16.3.

<sup>4)</sup>Напомним, что рассматривается задача многокритериальной минимизации.

Реализация отображения  $\Phi$  может быть основана на различных идеях. Одним из наиболее эффективных подходов является решение задачи локальной однокритериальной оптимизации, где в качестве целевой функции берется некоторая свертка  $\psi(\varphi(x))$  векторного критерия  $\varphi(x)$ . Отметим, что свертка критериев оптимизации  $\psi(y)$  может быть выбрана в соответствии с возможностями и целями пользователя. В результате применения градиентной процедуры решения этой задачи находится локальный экстремум  $x' \in X$ , зависящий от начальной точки  $x^0 \in H_N$ . Полагаем  $x' = \Phi(x^0)$ .

Логически наиболее подходящей сверткой является расстояние от точки  $x'$  до множества  $T^*$ , величину которой следует максимизировать. Реализация такой идеи, однако, затруднительна из-за того, что множество  $T^*$  задается как объединение большого числа (нескольких сотен или даже тысяч) конусов. Поэтому на практике используются два альтернативных подхода. В рамках первого из них точка  $x' = \Phi(x^0)$  строится в результате решения задачи локальной минимизации свертки

$$\psi(y) = \max_j \{\lambda_j(\varphi_j(x) - \tilde{y}_j^*)\} + \delta \sum_{j=1}^m \varphi_j(x), \quad (16.8)$$

где  $\tilde{y}_j^*$  — текущая аппроксимация идеальной точки,  $\delta$  — малое число,  $\delta > 0$ . Величины  $\lambda_j$  определяются исходной точкой  $x^k \in H_N$ :

$$\lambda_j = [\varphi_j(x^k) - \tilde{y}_j^*]^{-1}, j = 1, 2, \dots, m,$$

при  $\varphi_j(x^k) > \tilde{y}_j^*$ . Благодаря индивидуальному выбору величин  $\lambda_j$  происходит движение текущей точки из  $\varphi(x^k)$  в направлении точки  $\tilde{y}_j^*$ , что способствует ее смещению в сторону границы Парето текущей аппроксимации.

В рамках второго метода точка  $x' = \Phi(x^0)$  строится в результате решения задачи локальной минимизации свертки

$$\psi(y) = -\min_j \{\lambda_j(y_j^0 - \varphi_j(x))\} + \delta \sum_{j=1}^m \varphi_j(x), \quad (16.9)$$

где  $y^0$  — некоторая такая точка, что  $y \leq y^0$  для всех  $y \in P(Y)$ ,  $\delta$  — малое число,  $\delta > 0$ . Величины  $\lambda_j$  также определяются (при  $\varphi_j(x^k) < y_j^0, j = 1, 2, \dots, m$ ) исходной точкой  $x^k \in H_N$ :

$$\lambda_j = [y_j^0 - \varphi_j(x^k)]^{-1}, j = 1, 2, \dots, m.$$

Благодаря индивидуальному выбору величин  $\lambda_i$  происходит движение текущей точки из  $\varphi(x^k)$  в направлении, противоположном  $y^0$ .

Подчеркнем, что поскольку в методах локальной оптимизации решение зависит от исходной точки  $x^0 \in X$ , при решении такой задачи находится локальный минимум  $x' = \Phi(x^0)$ . Заметим, что поверхности уровня сверток (16.8) и (16.9) совпадают с границей конусов доминирования в пространстве критериев, что обеспечивает улучшение (по Парето) качества решения в процессе минимизации свертки.

Надо, однако, отдавать себе отчет в том, что расчет одной критериальной точки  $x' = \Phi(x^0)$  может представлять собой весьма трудоемкую задачу, значительно более сложную, чем расчет  $\varphi(x)$ . Так, в рассмотренной далее задаче выбора оборудования для охлаждения стали ( $n = 325$ ) для решения одной задачи оптимизации в среднем требовалось около 2000 расчетов значения функции  $\varphi(x)$  (не считая расчета ее градиента). Поэтому при оценке обобщенной полноты аппроксимации приходится ограничиваться малым числом точек в выборке  $N$  и грубой оценкой величины  $\eta_{\Phi}(\varepsilon)$ . Эта грубая оценка, однако, крайне полезна, поскольку именно обобщенная полнота является наиболее важной характеристикой качества аппроксимации.

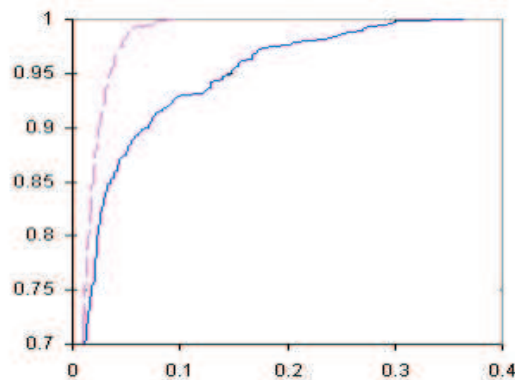


Рис. 16.3.

Приведем пример графиков обобщенной выборочной полноты для двух аппроксимаций ОЭП в пятикритериальной задаче оптимизации, критерии которой были основаны на использовании функций, имеющих существенные нелинейности, в частности несколько крутых пиков.

На рис. 16.3 представлены графики выборочной обобщенной полноты  $\eta_{\Phi}^N(\varepsilon)$  для грубой аппроксимации (итерация 1, сплошная линия) и точной

(итерация 7, штриховая линия) аппроксимации. Величина  $\varepsilon$  измеряется в относительных единицах — по отношению к диаметру границы Парето. Видно, что в случае итерации 1 приемлемая величина обобщенной полноты (скажем, 0.95) достигается только при  $\varepsilon = 0.15$ , т.е. 5% новых точек отстоят от аппроксимации дальше, чем 15% диаметра паретовой границы. В случае итерации 7 обобщенная полнота в 0.95 достигается уже при  $\varepsilon = 0.03$ . При этом радиус полного покрытия составляет около 0.35 для итерации 1 и меньше 0.1 для итерации 7. Таким образом, для итерации 7 все новые точки оказались на расстоянии от аппроксимации, составляющем не более 10% диаметра паретовой границы, причем 95% точек оказались на расстоянии не более чем в 3%. В этом примере применение обобщенной полноты позволяет распознать различие в качестве двух аппроксимаций в достаточно сложной задаче многокритериальной оптимизации.

### 16.3. Гибридный метод аппроксимации ОЭП

Начнем с описания общей концепции гибридных методов аппроксимации ОЭП для нелинейных задач. Гибридные методы, предложенные в [2], основываются на комбинировании методов различных типов, что позволяет решать задачи с разными свойствами критериальных функций. Методы, составляющие гибридные методы, являются итеративным, т.е. в них осуществляется пошаговая процедура улучшения качества аппроксимации.

#### Однофазный метод аппроксимации

В однофазном методе на каждой итерации осуществляется оценка качества полученной ранее аппроксимации  $T^*$  на основе построения выборочной функции полноты  $\eta^N(\varepsilon)$ , получаемой с помощью генерирования выборки  $H_N$  из  $N$  случайных равномерно распределенных точек множества допустимых решений  $X$ , и на основе расчета критериальных векторов для точек из  $H_N$ . При автоматической остановке метода проверяется выполнение требований по радиусу полного покрытия  $\varepsilon_{max} < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  — заданное положительное число. В диалоговом режиме пользователю предоставляется график  $\eta^N(\varepsilon)$ , после чего он сам решает, останавливать ли алгоритм. Если условие остановки не выполняется, то из совокупности точек исходной базы аппроксимации и критериальных точек, полученных при оценке полноты, формируется промежуточная совокупность точек, из которой путем выделения недоминируемых точек создается новая база аппроксимации ОЭП. Достоинством метода является его простота и наличие способа оценки качества аппроксимации, а также высокая эффективность в случае малой раз-

мерности пространства решений и критериальных функций с относительно медленным ростом.

### **Двухфазные методы аппроксимации**

В двухфазных методах на каждой итерации улучшение качества полученной ранее аппроксимации  $T^*$  осуществляется также на основе генерирования выборки  $H_N$  из  $N$  случайных равномерно распределенных точек множества допустимых решений  $X$ . Отличием является то, что эти точки улучшаются с помощью отображения  $\Phi$ , которое в двухфазных методах задается с помощью решения задачи локальной оптимизации одной из сверток критериев, приведенных выше, или их комбинации. Рассчитывается обобщенная выборочная полнота  $\eta_{\Phi}^N(\varepsilon)$ , по которой проверяется то же правило остановки, что и в однофазном методе. Если требуемая точность не достигнута, новая аппроксимация строится точно так же, как и в однофазном методе.

Достоинством двухфазного метода является наличие действенного способа оценки качества аппроксимации в случае большой размерности пространства решений (до нескольких сотен переменных). Отметим, что, вообще говоря, можно сформулировать большое число различных двухфазных оптимизационных методов, отличающихся методами свертки и их параметрами. Недостатком двухфазных методов является необходимость расчета большого числа критериальных точек при вычислении значений градиентов критериальных функций и при поиске локальных оптимумов вдоль выбранных направлений спуска. В том случае, когда заданы формулы расчета градиента, описанная проблема частично теряет свою остроту.

Вид метода, на котором основана локальная оптимизация, не имеет принципиального значения. В том случае, когда критериальные функции рассчитываются вычислительными модулями, приходится осуществлять оптимизацию только с использованием значений этих функций (simulation-based optimization).

### **Трехфазные методы аппроксимации**

Трехфазные методы отличаются от двухфазных тем, что при генерировании выборки  $H_N$  используется не равномерное распределение точек на множестве  $X$ , а распределение, зависящее от аппроксимации множества парето-эффективных решений  $P(X)$ . При этом выборка является объединением двух выборок, одна из которых генерируется равномерно на всем множестве  $X$ , а вторая генерируется равномерно на аппроксимации множества  $P(X)$ . При этом первая выборка содержит малое число точек, а вторая — большое

число. Подобная идея давно используется в методах неравномерного случайного поиска оптимума единственного критерия (сжатия области поиска), в частности, в широко используемом в настоящее время методе “имитируемого остывания стали” (simulated annealing). В отличие от традиционного метода simulated annealing, в предлагаемом методе множество, на котором проводится поиск, определяется адаптивно, т.е. на основе предыдущих расчетов, а не задается как заранее определенная окрестность точки текущего оптимума. В остальном метод не отличается от двухфазного метода оценки качества аппроксимации границы Парето.

Важным аспектом трехфазного метода является способ аппроксимации множества  $P(X)$ . В [2] множество  $P(X)$  аппроксимируется объединением шаров с центрами в прообразах точек базы и радиусом  $\tau > 0$ . Для расчета величины радиуса  $\tau$  применяется теория экстремальных статистик, описание и применение которой для расчета величины радиуса  $\tau$  выходит за пределы нашего курса лекций. Благодаря тому, что генерация большинства случайных точек осуществляется в пределах аппроксимации множества парето-эффективных решений, метод оказывается особенно эффективным в случае большой размерности пространства решений (до нескольких сотен переменных) и сложной структуры экстремумов критериальных функций. В частности, они позволяют уменьшить число находимых локальных экстремумов, не имеющих отношения к границе Парето. Это приводит к значительному ускорению процесса аппроксимации.

### **Генетический метод**

Генетические методы представляют собой результат реализации эволюционных концепций, основанных на идеях смешивания разумных решений. Генетические алгоритмы могут потребовать меньшего числа расчетов критериальных точек по сравнению с двух- и трехфазными методами.

В гибридных методах хорошо показал себя генетический метод “оштукатуривания” (plastering), примененный к уже достаточно точной аппроксимации, построенной с помощью двух- и трехфазного методов. В методе “оштукатуривания” из прообразов имеющейся базы покрытия  $T$  случайно (но с учетом некоторых ограничений) выбираются пары точек (“родители”). Далее, между точками каждой такой пары проводится отрезок и на этом отрезке случайным образом выбирается заранее заданное или случайное число  $q > 1$  новых точек множества допустимых решений (“популяция наследников”). Для всех точек-наследников вычисляются значения  $\varphi(x)$ . Полученные критериальные точки используются для оценки качества имеющейся аппроксимации (в том числе рассчитывается радиус полного покрытия

$\varepsilon_{max}$ ). Далее метод не отличается от однофазного, за исключением того, что число точек в базе аппроксимации в методе оштукатуривания может стать слишком велико, поэтому из полученной базы по какому-либо правилу (например, близость в пространстве решений) должно быть исключено значительное количество точек.

Эксперименты показывают, что наиболее подходящее место этого метода — завершающие шаги процесса аппроксимации, когда, наряду с уточнением аппроксимации, требуется получить достаточно большое число точек базы аппроксимации для большей выразительности изображений границы Парето. Этим описываемый гибридный метод отличается от большинства гибридных методов, в которых эволюционные методы используются с самого начала.

#### **16.4. Использование параллельных вычислений**

В задачах с большой размерностью вектора решений и сложной структурой критериальных функций построение достаточно точной аппроксимации границы Парето требует вычисления большого числа критериальных точек. Если же время одного такого расчета составляет минуты, то неизбежно обращение к параллельным вычислениям, которые позволяют распределить большой объем вычислений на большое число процессоров. Обычно при этом возникают сложные проблемы организации параллельного счета. Большим достоинством описанного гибридного метода аппроксимации ОЭП является наличие естественного параллелизма. Как вычисление критериальной точки, так и решение задач локальной оптимизации могут осуществляться параллельно без какой-либо предварительной адаптации алгоритма. Более того, выделение недоминируемого подмножества для полученных критериальных точек иногда (например, в однофазном методе) также можно осуществлять параллельно. Хотя обработка результатов всех расчетов итерации (оценка полноты, максимального отклонения и т. д.) требует полного объема информации, это не сильно сказывается на эффективности расчетов, поскольку требует относительно малого объема вычислений.

Интересно, что предложенный метод аппроксимации ОЭП для нелинейных систем может быть реализован не только на компьютерных кластерах с известным числом процессоров, но и в компьютерных сетях с неопределенным числом процессоров (и, возможно, других компьютерных ресурсов, таких как средства хранения информации), географически разделенных, но связанных между собой сетью. Такие средства расчета весьма недороги, поскольку используют время простоя компьютеров, которое практически бес-



платно, но потенциально весьма мощны. Отметим, что некоторые черты таких средств делают программирование на них значительно более сложным, чем на обычных компьютерных кластерах: процессоры могут сильно различаться между собой, число доступных процессоров может резко меняться во времени, связь между отдельными процессорами может быть плохой и, наконец, процессоры могут выключаться без предварительного предупреждения. В гибридном методе, описанном здесь, благодаря использованию случайных точек множества  $X$  эти проблемы исчезают: результат статистического анализа качества аппроксимации мало зависит от того, будет ли получен результат расчета от отдельного процессора. То же самое относится к результатам локальной оптимизации: отдельный расчет не имеет принципиального значения.

## Лекция 17. Методы визуализации паретовой границы, аппроксимированной конечным числом точек

Остановимся на методах визуализации совокупности критериальных точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$ , полученной в результате аппроксимации паретовой границы в задаче МКО. Отметим, что описываемые методы пригодны и для визуализации критериальных точек, полученных каким-либо другим образом (скажем, в задаче многокритериального выбора из базы данных)

### 17.1. Метод параллельных отрезков

Этот распространенный метод имеет также название метода профилей альтернатив и метода траекторий ценности (value paths). Для удобства критерии нормируются так, чтобы их значения для точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$  находились в отрезке  $[0, 1]$ . На экране компьютера изображаются  $m$  параллельных отрезков (по числу критериев), на каждом из которых откладываются значения соответствующего критерия для всех  $N$  точек. При этом каждой  $m$ -мерной критериальной точке на рисунке соответствуют  $m$  точек, по одной на каждом из параллельных отрезков. Затем проводится ломаная линия, которая соединяет точки на смежных отрезках, порожденные одной и той же  $m$ -мерной критериальной точкой. В результате каждая многокритериальная точка оказывается представленной некоторой ломаной линией.

Сначала рассмотрим метод в случае малого числа  $N$  (см. рис. 17.1), а затем перейдем к общему случаю. Изучая совокупность критериальных точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$ , представленных в виде малого числа ломаных, ЛПР может сравнить соответствующие варианты решения. Важно, что при этом может рассматриваться большое число критериев (до нескольких десятков критериев). Так как число ломаных мало, ЛПР может легко оценить частное двухкритериальное замещение для критериев, соответствующих смежным отрезкам. Для несмежных отрезков это также возможно, но требует определенных усилий. Поскольку сложность сравнения ломаных и выбора из них растет с ростом их числа, доминируемые точки разумно отсеивать заранее и не изображать вообще. В целом, хотя выбор из десятка многокритериальных недоминируемых альтернатив всегда представляет собой сложную операцию, использование метода параллельных прямых в случае десятка альтернатив представляется полезным средством визуальной поддержки ЛПР в процессе решения этой сложной задачи.

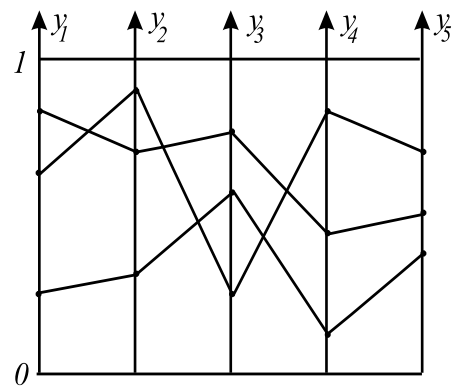


Рис. 17.1.

Использование метода параллельных отрезков в случае большого числа критериальных точек проиллюстрируем рис. 17.2 и 17.3. На рис. 17.2 изображены 200 ломаных, представляющих 200 возможных вариантов, характеризующихся 11 критериями. Как видно, на рисунке невозможно проследить отдельный вариант. Для того чтобы упростить исследование, программное обеспечение метода часто предоставляет возможность выделить наиболее интересные варианты решений ломаными яркими цветами на фоне одноцветных ломаных, соответствующих остальным вариантам. Это дает возможность рассмотреть семь-десять ломаных на фоне остальных.

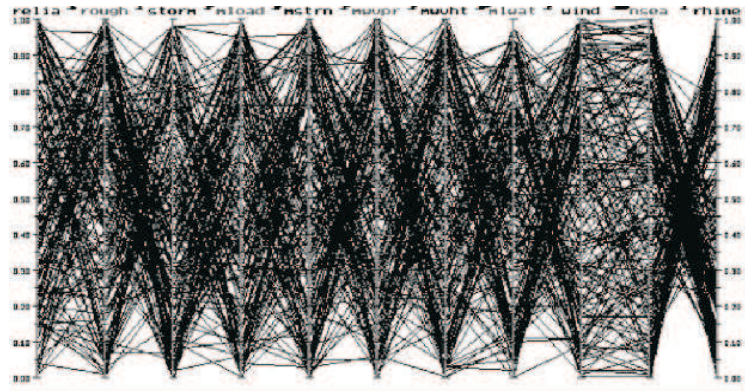


Рис. 17.2.

Программное обеспечение обычно позволяет выделить подмножество вариантов по какому-либо признаку. Так, на рис. 17.3 изображены 77 ломаных, выделенных из исходных 200 ломаных на основе принадлежности значения первого критерия узкому диапазону значений.

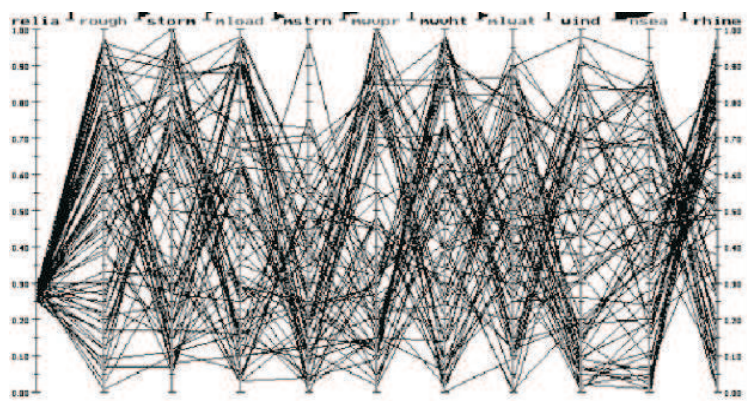


Рис. 17.3.

Как видно, сравнение вариантов и выделение наиболее интересных из них по-прежнему невозможно. В то же время, выделяя различные подмножества исходных 200 точек, можно попробовать обнаружить какие-то закономерности этой совокупности вариантов.

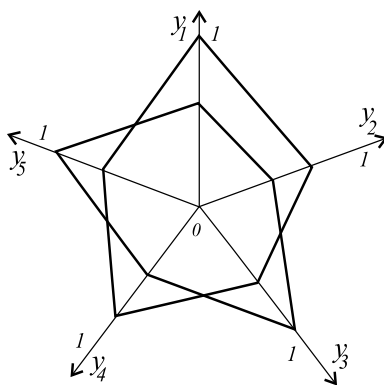


Рис. 17.4.

Метод радарных диаграмм является модификацией метода параллельных отрезков. В этом случае отрезки направлены в разные стороны, что, по нашему мнению, только затрудняет исследование, хотя, конечно, выглядит более эффектно (см. рис. 17.4).

Все замечания, высказанные относительно метода параллельных отрезков, верны и в случае радарных диаграмм.

## 17.2. Метод матрицы рассеивания

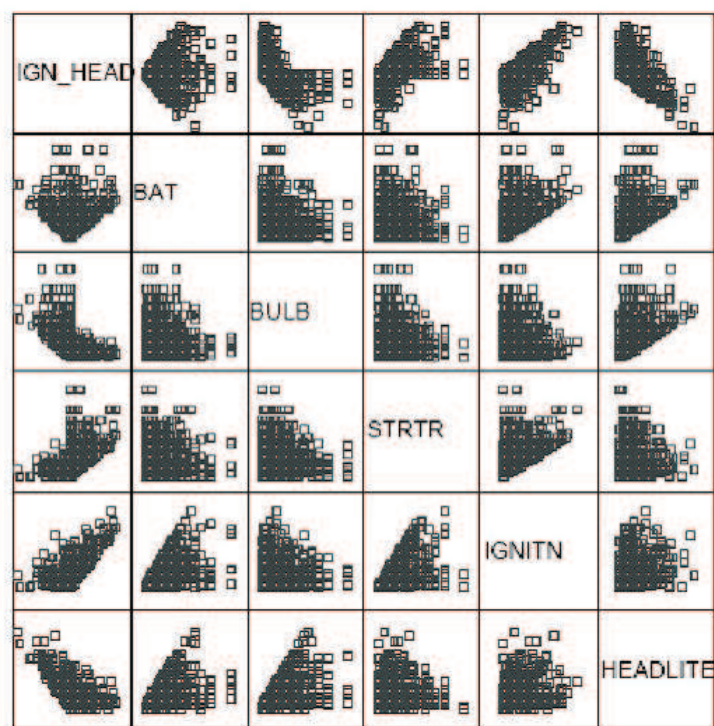


Рис. 17.5.

В случае более чем двух критериев довольно часто предлагается использовать метод, получивший название *метода матрицы рассеивания* (*scatterplot matrix*). Метод основан на упомянутой ранее способности человека в случае двух критериев обнаруживать недоминируемые критериальные

точки прямо на рисунке, содержащем полную совокупность критериальных точек, и даже осуществлять прямой выбор из этой совокупности. Поскольку в задачах, к которым применяется метод матрицы рассеивания, число критериев больше, чем два, предлагается предъявить ЛПР совокупность проекций критериальных точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$  на всевозможные плоскости, соответствующие парам критериев. Эти двухкритериальные проекции группируются в виде матрицы, диагональ которой пуста (или содержит условное название критериев), а на месте пересечения  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца изображается проекция критериальных точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$  на плоскость критериев с номерами  $i$  и  $j$  (см. рис. 17.5).

Таким образом, каждая критериальная плоскость встречается дважды, причем с различным расположением критериев на осях. ЛПР получает возможность изучить информацию о расположении точек (в том числе, о взаимном доминировании) по всем парам критериев. Таким образом, метод матрицы рассеивания предлагает ЛПР оценивать частичное (т.е. двухкритериальное) замещение сразу для всех пар критериев. Авторами метода почему-то предполагается, что такая информация окажется достаточной для выбора наиболее подходящей критериальной точки. Такой подход, однако, может дезориентировать ЛПР, поскольку наиболее интересные недоминируемые точки, сбалансированные по всем критериям, обычно оказываются доминируемыми на всех двумерных проекциях, т.е. мало отличаются от неудовлетворительных решений.

Рассмотрим простой пример с семью стратегиями, оцениваемыми по трем критериям (предполагается желательной минимизация значений каждого из критериев):

- точка №1: (0, 1, 1);
- точка №2: (1, 0, 1);
- точка №3: (1, 1, 0);
- точка №4: (0.2, 0.2, 0.8);
- точка №5: (0.2, 0.8, 0.2);
- точка №6: (0.8, 0.2, 0.2);
- точка №7: (0.4, 0.4, 0.4).

Легко проверить, что все эти точки недоминируемы, причем стратегия №7, сбалансированная по всем критериям, может оказаться наиболее предпочтительной для ЛПР. В то же время, построив все шесть рисунков, содержащие проекции данных точек на плоскости пар критериев, можно не заметить преимуществ стратегии №7. На рис. 17.6 приведен один из таких рисунков, представляющий собой совокупность проекций точек на плоскость первого и второго критериев.

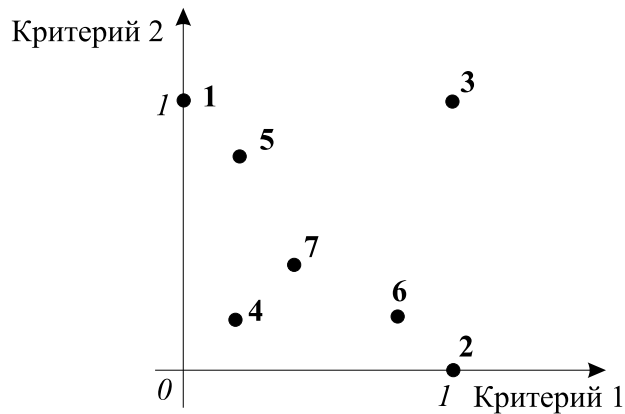


Рис. 17.6.

На приведенном рисунке очень привлекательной выглядит стратегия №4, которая на самом деле не так уж хороша, поскольку значение третьего критерия для этой стратегии весьма велико. Как видно, проекция точки, соответствующей стратегии №7, доминируется проекцией точки №4, причем проекция точки №7 лежит довольно глубоко внутри совокупности проекций других точек. Аналогичная картина будет и на других рисунках, поскольку данные для задачи подобраны так, проекции на всех рисунках совпадают, а единственное отличие состоит в том, что номера точек (кроме №7) меняются. Поскольку проекция точки №7 на всех проекциях будет находиться глубоко внутри совокупности проекций других точек, ЛПР не будет иметь основания для внимательного рассмотрения соответствующей стратегии №7 и может упустить это сбалансированное решение.

Рассмотренный пример показывает, что матрица рисунков, содержащих проекции точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$  на плоскости пар критериев, недостаточна для информирования пользователя о критериальных точках даже в случае трех критериев. По этой причине часто стараются модифицировать исходный вариант метода матрицы рассеивания с помощью того или иного способа изображения информации о значениях точек плоскости по другим критериям. Для этого можно использовать цвет, форму и размер точек или дополнительную цифровую информацию (в дополнение к номеру точки). Зачастую номер точки не ставится (как на рис. 17.5), вместо этого приводится значение по какому-то другому критерию. В этом случае, однако, возникает вопрос о том, как связать между собой проекции одной и той же критериальной точки на разных рисунках (в программном обеспечении это

может быть сделано, например, при помощи одновременного выделения на всех рисунках проекции точки, указанной с помощью компьютерной мыши на одном из них). Благодаря таким дополнительным возможностям удастся в какой-то мере представить информацию о критериальных замещениях, лежащую за рамками простого частичного (двухкритериального) замещения. Надо, однако, отметить, что эта информация имеет весьма ограниченную полезность, поскольку теряется наглядность сравнения. В частности, оптимальность критериальных точек по Парето, не говоря уже о глобальном замещении или норме замещения для точек многомерной паретовой границы, обычно не видны на таких рисунках. Кроме того, указанные дополнительные возможности информирования о значениях остальных критериев обычно могут использоваться только в случае малого числа точек.

Таким образом, метод матриц рассеивания имеет много недостатков и часто вводит пользователя в заблуждение. В связи с этим его нельзя рекомендовать для поддержки выбора наиболее предпочтительного решения. В то же время, этот метод дает понятную информацию о пределах возможных значений критериев и о возможной связи пар критериальных значений. Так, в случае большого числа вариантов, приведенном на рис. 17.5, можно проследить связь между значениями любой пары критериев при условии, что значения остальных критериев интереса не представляют. В результате такого анализа можно попытаться исключить из рассмотрения некоторый критерий, значения которого тесно связаны со значениями другого критерия. Вместо метода матрицы рассеивания для этого можно использовать методы, описанные в следующих разделах данной лекции.

### 17.3. Визуализация двумерных сечений ОЭП

Рассмотрим теперь вопрос о визуализации совокупности критериальных точек  $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}\}$  с помощью построения двумерных сечений ОЭП этой совокупности точек, т.е. совокупности конусов с вершинами в этих точках. Двумерные сечения одного конуса рассчитываются элементарно, а затем одновременно изображаются на экране компьютера одним цветом. В результате получается сечение объединения конусов. Для построения карты решений, как и в выпуклом случае, сечения, соответствующие различным значениям третьего критерия, окрашиваются в различные цвета и накладываются одно на другое. Как и в выпуклом случае, рядом с картой решений изображается шкала соответствия цвета и значения третьего критерия. В отличие от выпуклого случая, при визуализации ОЭП совокупности точек обычно изображаются “толстые сечения”, представляющие собой объеди-



нения сечений для небольшого диапазона значений, так что в шкале указываются границы диапазонов значений третьего сечения.

На рис. 17.7 изображена черно-белая копия цветного экрана, демонстрирующего несколько сотен точек, аппроксимирующих паретову границу в пятикритериальной задаче МКО. Под картой решений на экране компьютера изображены прокрутки, позволяющие с помощью слайдеров менять диапазоны значений четвертого и пятого критериев.

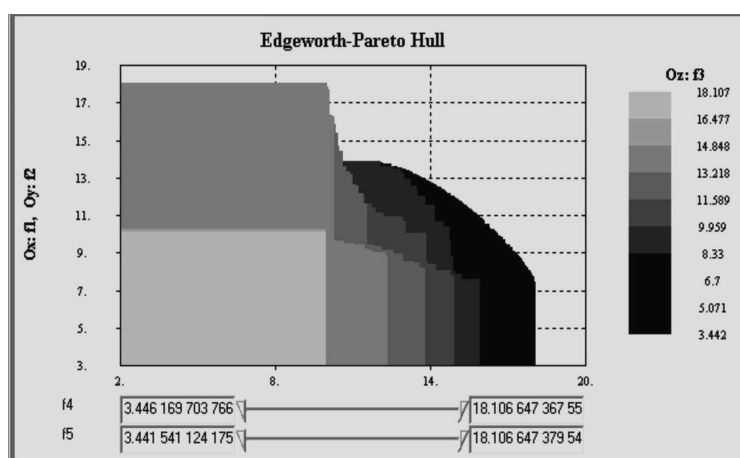


Рис. 17.7.

Как видно, при большом числе точек можно увидеть критериальные замещения и даже норму критериального замещения в тех точках паретовой границы, где она близка к гладкой. Как и в выпуклом случае, ЛПР имеет возможность указать предпочтительную целевую точку. После этого компьютер находит доминирующую ее точку в списке критериальных точек и соответствующее решение.

На рис. 17.8 приведена черно-белая копия экрана в прикладной четырехкритериальной задаче, связанной с оптимизацией процесса охлаждения стали в оборудовании для ее непрерывной разливки. В этой задаче требовалось уменьшать значения всех критериев.

Как видно на рисунке, малым значениям третьего критерия (от 0 до 0.01) соответствует область, не включающая малые значения по другим показателям (заметим, что значение критерия, расположенного на прокрутке, выбрано равным нулю). Таким образом, идеальная точка, равная в этой задаче

нулю по всем критериям, не достижима. Видно, что при увеличении значения третьего критерия появляются небольшие дополнительные возможности уменьшения значений критериев, отложенных на осях. Это, однако, не позволяет найти критериальную точку с нулевым значением одновременно для двух критериев, отложенных на осях. На карте решений ясно видны замещения между критериями, которые в данном случае имеют совсем не простой вид.

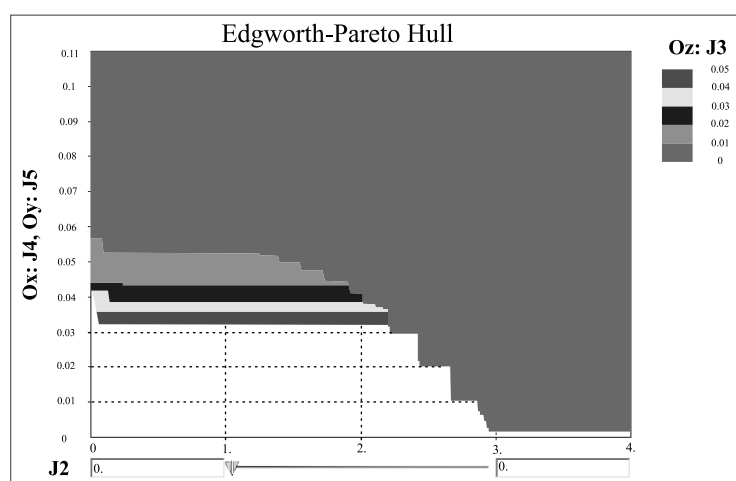


Рис. 17.8.

#### 17.4. Метод разумных целей

В данном разделе описывается метод поддержки выбора из конечного (может быть, очень большого — до миллиона) числа многокритериальных точек, основанный на визуализации выпуклой оболочки этих точек. Поэтому этот метод может быть использован не только для выбора из критериальных точек, дающих аппроксимацию паретовой границы, но и из точек, полученных путем наблюдений или прямых расчетов критериев в дискретных задачах многокритериальной оптимизации и собранных в больших базах данных. Метод получил название метода разумных целей (МРЦ). Опишем его на простом примере, состоящем в выборе предпочтительных стра-

тегий улучшения качества воды в реке. При этом возможные стратегии заданы в таблице, в которой каждой стратегии соответствует отдельная строка, а столбцы содержат значения количественных критериев, по которым осуществляется отбор предпочтительных стратегий.

Хотя метод предназначен для визуального анализа в случае до 7-8 критериев, для наглядности начнем со случая двух критериев. Пусть, например, в качестве критериев взяты стоимость реализации стратегии и остаточная концентрация одного из загрязнителей после ее осуществления. В этом случае каждой стратегии соответствует критериальный вектор, состоящий из двух чисел — стоимости и остаточной концентрации загрязнителя. Совокупности возможных стратегий соответствует конечное множество критериальных векторов, которые в случае двух критериев можно изобразить на плоскости в виде точек в координатах рассматриваемых критериев — стоимости и концентрации (см. рис. 17.9).



Рис. 17.9.

Критериальные векторы на рисунке разбиты на два класса — доминируемые (представлены точками) и недоминируемые (представлены крестами). Как уже говорилось, метод разумных целей основан на построении и анализе выпуклой оболочки совокупности векторов. Для случая двух критериев, представленного на рис. 17.9, выпуклая оболочка приведена на рис. 17.10. Границей выпуклой оболочки является ломаная линия.

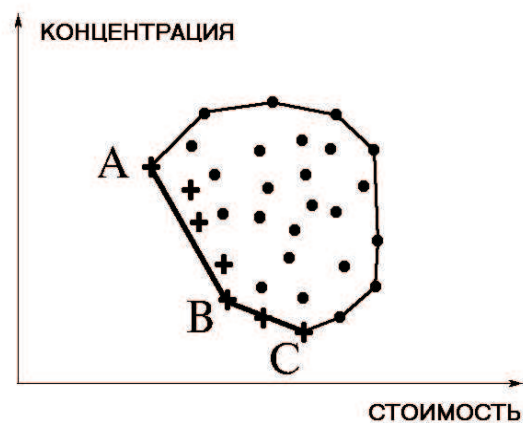


Рис. 17.10.

Как видно на рис. 17.10, эта оболочка, наряду с критериальными точками, порожденными строками таблицы, содержит и промежуточные сочетания значений критериев, введение которых помогает упростить изображение. Такой подход оказывается очень полезным при числе критериев, большем двух. В МРЦ промежуточные критериальные точки не имеют такого смысла и служат исключительно для упрощения графического анализа.

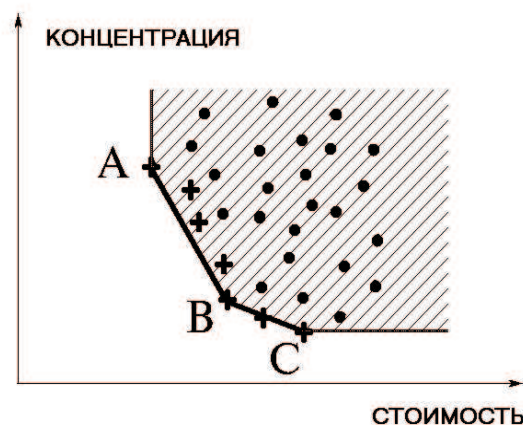


Рис. 17.11.

Итак, пользователь изучает выпуклую оболочку критериальных точек, а не сами точки. Поскольку предпочтительно уменьшать как стоимость, так и концентрацию загрязнителя, для пользователя представляет интерес “юго-западная” (недоминируемая) граница выпуклой оболочки (ломаная ABC на рис. 17.10). Поскольку другие границы выпуклой оболочки не представляют интереса, вместо выпуклой оболочки разумно рассмотреть более широкое множество — оболочку Эджворта-Парето выпуклой оболочки (рис. 17.11). Напомним, что при переходе к ОЭП доминируемые границы множества исчезают  $\square$  вместо них на рисунках появляются горизонтальный и вертикальный лучи, легко заметные на глаз (см. рис. 17.11, где недоминируемой границей является ломаная линия ABC). В дальнейшем ОЭП выпуклой оболочки набора критериальных векторов будем для краткости называть выпуклой оболочкой Эджворта-Парето (ВОЭП).

В случае использования ВОЭП пользователь не видит отдельных критериальных векторов, показанных на рис. 17.9. Вместо этого его внимание сосредоточено на анализе недоминируемой границы выпуклой оболочки (см. рис. 17.12).

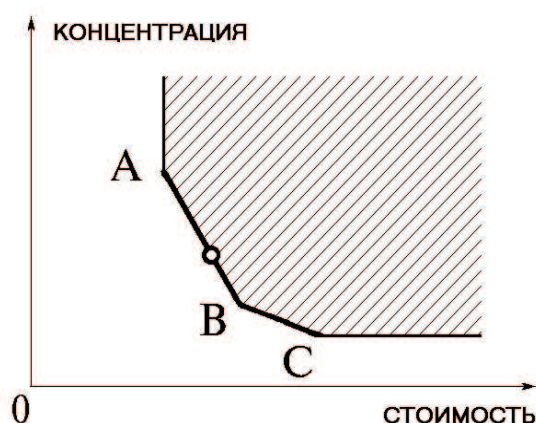


Рис. 17.12.

Недоминируемая граница выпуклой оболочки характеризует разумные критериальные точки для проблемы, в которой введенные нами промежуточные критериальные точки также возможны. Именно поэтому недоминируемая граница имеет такой простой вид. Пользователь видит, каковы пределы уменьшения стоимости и концентрации загрязнителя, а также как

связаны разумные значения этих критериев, представляемые недоминируемой границей. Проанализировав кривую объективного замещения, пользователь может выбрать наиболее предпочтительное сочетание значений критериев (цель) прямо на недоминируемой границе ВОЭП (на рис. 17.12 цель отмечена кружком). В случае необходимости, выбор цели можно не ограничивать недоминируемой границей ВОЭП, а предоставить и более широкие возможности выбора. Важно понимать, что в любом случае цель обычно не совпадает ни с одной из критериальных точек. В то же время, она близка к совокупности критериальных точек в целом. Это отличает метод разумных целей от целевых методов, в которых пользователь вынужден выбирать цель без информации о предельных возможностях и связях критериев. Так как обычно целевая точка не совпадает ни с одной из критериальных точек, то выбираются несколько точек, близких к ней в том или ином смысле. На рис. 17.13 близкие векторы отмечены крестами.



Рис. 17.13.

Если число критериев равно трем, то для демонстрации недоминируемой границы ВОЭП можно использовать карты решений, описанные для выпуклого случая в лекции 15. Если же число критериев превосходит три, то необходимо использовать программное обеспечение диалоговых карт решений, в которых влияние четвертого, пятого и др. критериев можно изучить с помощью анимации карт решений. Выбрав одну из карт решений, пользователь может указать цель непосредственно на предпочтительном сечении.

Так же как и в случае двух критериев, будут отобраны несколько критериальных точек, близких к цели, указанной пользователем.

Нетрудно видеть, что МРЦ является модификацией метода достижимых целей, наиболее эффективного при анализе выпуклых моделей, на случай, когда множество изучаемых критериальных точек является конечным. При этом визуальный анализ недоминируемых границ и идентификация целевой точки ничем не отличаются от выпуклого случая. Важно подчеркнуть, что так же, как и в методе достижимых целей, в методе разумных целей пользователь получает информацию в графической форме, более простой и наглядной, чем в описанном выше методе визуализации ОЭП конечного числа точек. Можно использовать различные алгоритмы поиска критериальных точек, близких к целевой точке, указанной пользователем. Мы этот вопрос здесь рассматривать не станем.

Отметим, что в методах полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (методы рассмотрены нами в лекции 16) число расчетов опорной функции, требуемых для достижения определенной точности, зависит только от числа критериев и формы выпуклой оболочки, а не от числа критериальных точек, породивших эту оболочку. Поскольку каждый расчет опорной функции в данном случае — это решение скалярной задачи оптимизации на множестве критериальных точек, ее трудоемкость зависит от числа точек линейно. Далее, трудоемкость построения карт решений зависит только от числа критериев и числа вершин в аппроксимации, а сложность визуального анализа пользователем паретовой границы аппроксимации также зависит от числа критериев и формы множества, а не от числа критериальных точек. Поэтому МРЦ может применяться в случае очень большого числа точек — до нескольких миллионов.

На рис. 17.14 приведен пример визуализации около 400 тыс. возможных стратегий в упомянутой выше задаче улучшения качества воды в реке, в которой рассматривалось четыре критерия — общая стоимость проекта и остаточные концентрации трех загрязнителей<sup>1)</sup>.

На карте решений по горизонтальной оси отложены величины общей стоимости проекта, по вертикальной оси отложены значения наиболее важного загрязнителя. Кривые разного цвета на экране компьютера являются границами сечений ВОЭП (на рис. 17.14 — разных оттенков серого), они показывают, как влияет на расположение паретовой границы изменение требований к концентрации второго загрязнителя. Влияния ограничений

---

<sup>1)</sup>Л.В.Бурмистрова, Р.В.Ефремов, А.В.Лотов. Методика визуальной поддержки принятия решений и ее применение в системах управления водными ресурсами. Известия АН. Сер. Теория и системы управления. 2002, №5, 89-100.

на концентрацию третьего загрязнителя было изучено с помощью анимации с использованием прокрутки, оно оказалось несущественным и поэтому на рис. 17.14 не отражено.

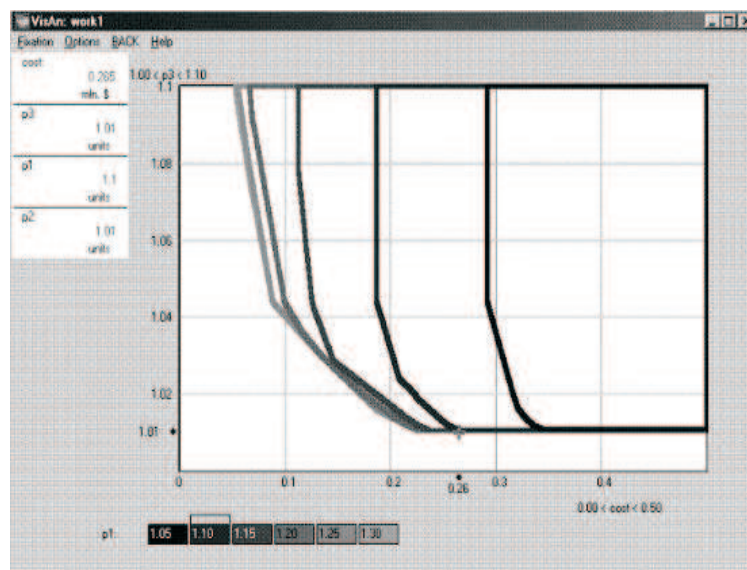


Рис. 17.14.

Рисунок дает ясное представление о связи трех рассматриваемых критериев для выпуклой оболочки точек. Ясно, что рассмотрение такого рисунка значительно проще для пользователя, чем рисунка типа 17.7. На рис. 17.14 крестом отмечена точка, выбранная ЛПР. Она отвечает достаточно низкой стоимости проекта при относительно небольших остаточных концентрациях загрязнителей. Выбрав в качестве цели точку, отмеченную крестом, пользователь получит несколько вариантов стратегии выполнения очистных мероприятий, реализация которых приведет к результатам, близким к указанной точке.

МРЦ был реализован в сети Интернет в виде ресурса, с помощью которого пользователи могут решать свои задачи. Мы здесь не будем рассматривать этот вопрос, поскольку использованию этого ресурса посвящена лабораторная работа, приведенная в приложении к данному курсу лекций.



## Часть V. Методы поддержки выбора из малого числа альтернатив на основе парных сравнений

В методах выбора из малого числа многокритериальных альтернатив или их классификации широко используется идея построения решающего правила. Хотя в таких задачах также можно попытаться построить адекватную функцию полезности, исследователи предпочитают разрабатывать решающие правила других типов. При этом решающие правила стараются строить так, чтобы они были более понятны ЛПР, чем обычная функция полезности. В данной части книги мы рассмотрим два таких метода — метод анализа иерархий и метод ELECTRE.

### Лекция 18. Методы анализа иерархий и ELECTRE

#### 18.1. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (Analytic Hierarchical Process, АНР) базируется на использовании линейной функции полезности. Этот популярный метод был предложен известным американским ученым Т. Саати для анализа политических ситуаций, в которых невозможно использовать математическое описание проблем выбора решения<sup>1)</sup>.

Рассмотрим простейший случай применения метода АНР в задаче выбора одного из конечного числа  $N$  альтернативных вариантов, каждый из которых характеризуется значениями  $m$  критериев  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Хотя эти значения в методе АНР оцениваются (особенно в случае политических или социальных проблем) с помощью методики, описанной далее в этом разделе, здесь для упрощения описания будем полагать, что значения критериев для каждого из альтернативных вариантов уже известны. В этом случае метод АНР сводится к процедуре определения весов  $m$  критериев.

Точнее говоря, предполагается, что предпочтения ЛПР можно представить в линейном виде, т.е.  $U(y) = \sum_{i=1}^m W_i y_i$ , так что задача состоит в том, чтобы определить веса<sup>2)</sup> критериев  $W = (W_1, W_2, \dots, W_m)$ . По мнению Т. Саати, основная проблема заключается в том, что человеку трудно назначить веса непосредственно, поэтому он предлагает определить значения

---

<sup>1)</sup>Т. Саати Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.

<sup>2)</sup>Вместо привычных  $c_1, \dots, c_m$  здесь мы сохраняем обозначения Т. Саати, поэтому веса обозначаются  $W_1, \dots, W_m$ .

весов с помощью некоторой процедуры, составляющей главное содержание метода. В рамках этой процедуры ЛПР просят сообщить не сами значения весов, а показатели *относительной важности*  $a_{ij}$ , для всех пар критериев  $i, j = 1, \dots, m$ . При этом значения  $a_{ij}$  не могут быть произвольны, а должны выбираться из некоторой шкалы, например,  $\{1, 2, \dots, 9\}$ , причем число 9 означает, что критерий  $i$  много важнее критерия  $j$ , а число 1 — что критерии примерно эквивалентны по важности. Автоматически полагается  $a_{ji} = 1/a_{ij}$  и  $a_{ii} = 1$ .

Как не трудно заметить, человеку приходится отвечать на  $m(m-1)/2$  вопросов о величинах  $a_{ij}$ , вместо  $m$  прямых вопросов о величинах  $W_i, i = 1, \dots, m$ . Таким образом, матрица  $A = \|a_{ij}\|^{m \times m}$  содержит избыточную информацию, которая используется для контроля логичности ответов ЛПР о величинах  $a_{ij}$  и для построения весов  $W_i, i = 1, \dots, m$ .

От абсолютно логичного ЛПР должны быть получены величины

$$a_{ij} = \frac{W_i}{W_j}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (18.1)$$

где  $W_i, i = 1, \dots, m$ , — имеющиеся у него в голове положительные значения весов. Нетрудно заметить, что если бы ЛПР был абсолютно логичен, т.е. существовали бы такие веса  $W_i, i = 1, \dots, m$ , что величины  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, m$  удовлетворяли бы соотношению (18.1), то матрица показателей относительной важности критериев  $A$ , которую в таком случае обозначим через  $A^0$ , удовлетворяла бы соотношению  $A^0 W = mW$ . Таким образом,  $W$  — был бы собственным вектором, а  $\lambda_1 = m$  — собственным числом матрицы  $A^0$ . Легко заметить, что строки матрицы  $A^0$  пропорциональны, так что ее ранг равен единице. В этом случае уравнение  $A^0 v = 0$  имеет  $m-1$  линейно независимых решений, и потому остальные собственные значения матрицы  $A^0$  — нулевые.

В реальности ЛПР дает противоречивые ответы, т.е. строки матрицы  $A = \|a_{ij}\|^{m \times m}$  не удовлетворяют соотношению (18.1) и поэтому не пропорциональны. В методе АНР матрица  $A$  рассматривается как некоторое возмущение матрицы  $A^0$ , поэтому ожидается, что собственные числа матрицы  $A$  будут близки к собственным числам матрицы  $A^0$ . Так как по построению матрица  $A$  положительна, то по теореме Фробениуса-Перрона [1] у нее существует максимальное положительное собственное число  $\lambda_{max} > 0$  и положительный собственный вектор  $W$ . Собственное число  $\lambda_{max}$  рассматривается как возмущение собственного числа  $\lambda_1 = m$  невозмущенной матрицы  $A^0$ . В связи этим собственный вектор  $W$  матрицы  $A$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_{max}$ , используется в качестве искомого набор весов.

Величина  $\Delta = \frac{\lambda_{max} - m}{m - 1}$  является характеристикой отклонения матрицы  $A$  от невозмущенной матрицы  $A^0$ , т.е. оценкой непоследовательности ЛПР. Если величина  $\Delta$  достаточно мала (скажем, по сравнению с этой величиной для случайной матрицы размера  $m \times m$ , у которой  $a_{ji} = 1/a_{ij}$  для все пар  $i, j = 1, \dots, m$ ), то полученные результаты удовлетворительны, а собственный вектор  $W$  матрицы  $A$  может использоваться в качестве вектора весов.

Кроме недостатков, свойственных всем методам, основанным на линейной функции полезности, метод АНР имеет и специфические недостатки. В частности, было показано, что введение дополнительного неэффективного варианта может привести к такому изменению весов, что это приведет к изменению решения задачи. В связи с этим метод АНР следует считать эвристическим и использовать с осторожностью. Стоит отметить, что метод АНР получил широкое распространение, уступая только целевому подходу, благодаря своей простоте и личным способностям автора, его умению организовать рекламу метода. Т. Саати удалось внедрить метод среди лиц, которые до этого не имели представления о многокритериальных методах поддержки принятия решений и полагались исключительно на экспертов и собственную интуицию. Существенным фактором является то, метод АНР не требует построения математических моделей.

Для того чтобы устранить недостатки, возникающие из-за использования линейной функции полезности, было предложено рассмотреть функцию полезности вида  $U(y) = \sum_{i=1}^m W_i U_i(y_i)$ , т.е. сначала для каждого критерия построить однокритериальную функцию полезности  $U_i$ , а затем с помощью метода АНР найти веса критериев. Необоснованность такого подхода уже рассматривалась при обсуждении вопроса о построении аддитивных функций полезности. Такой подход позволяет устранить недостатки, характерные для линейных функций полезности, но все же остается эвристическим подходом, не гарантирующим правильность представления предпочтений.

Отметим, что в последнее время были разработаны более сложные варианты метода анализа иерархий, но они лежат за пределами нашего курса.

## 18.2. Метод ELECTRE

Метод ELECTRE является первым из методов классификации альтернатив (outranking). Он был предложен французским ученым Б. Руа в 70-е годы XX века и породил целое направление в области методов поддержки

выбора из конечного числа альтернатив. В методе ELECTRE вместо функции полезности строится правило в виде бинарного отношения, которое позволяет выделить подмножество альтернатив из исходной совокупности. Альтернативы заданы значениями своих показателей (критериев выбора), которые могут быть получены различными путями, в том числе и с использованием математического моделирования.

Рассмотрим  $N$  альтернатив, каждая из которых характеризуется значениями  $m$  критериев, причем в качестве критериев могут выступать как количественные, так и качественные показатели. Значение  $i$ -го критерия для выбора  $j$ -й альтернативы будем обозначать  $y_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Прежде всего, в методе ELECTRE требуется перейти от количественных показателей к качественным. Это осуществляется разбиением множества количественных значений на конечное число классов, каждому из которых присваивается качественная характеристика. После этого каждый из альтернативных вариантов оказывается задан наборами из  $m$  качественных показателей. При этом для каждого из показателей должны быть заранее согласованы с ЛПР соотношения предпочтительности между различными классами.

Общая схема метода состоит из четырех этапов.

**1. Назначение весов.** ЛПР назначает положительные веса каждого из критериев  $W_1, W_2, \dots, W_m$ .

**2. Построение индекса согласия.** Для каждой пары альтернатив  $j$  и  $k$  множество критериев  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  разбивается на три группы:

$$I_{jk}^+ = \{i \in I \mid y_{ji} \succ y_{ki}\}, \quad I_{jk}^- = \{i \in I \mid y_{ji} \prec y_{ki}\}, \quad I_{jk}^o = \{i \in I \mid y_{ji} \approx y_{ki}\}.$$

Множество  $I_{jk}^+$  включает те критерии, по которым  $j$ -я альтернатива лучше  $k$ -й, множество  $I_{jk}^-$  состоит из критериев, по которым  $j$ -я альтернатива хуже  $k$ -й, а множество  $I_{jk}^o$  состоит из тех критериев, по которым  $j$ -я и  $k$ -я альтернативы эквивалентны. *Индекс согласия* с тем, что альтернатива  $j$  лучше альтернативы  $k$  определяется следующим образом:

$$C_{jk} = \frac{\sum_{i \in I_{jk}^+} W_i + \alpha \sum_{i \in I_{jk}^o} W_i}{\sum_{i=1}^m W_i},$$

где  $\alpha$  — параметр,  $\alpha \in \{1, 0.5, 0\}$  (выбор параметра  $\alpha$  зависит от того, какая модификация метода реализуется).

**3. Построение индекса несогласия.** Для каждой пары  $j$  и  $k$  индекс несогласия с тем, что альтернатива  $j$  лучше альтернативы  $k$ , определяется по формуле

$$d_{jk} = \frac{1}{100} \max_i \left\{ \text{интервал превосходства } k\text{-й альтернативы над } j\text{-й по } i\text{-му критерию} \right\},$$

где *интервал превосходства*  $k$ -й альтернативы над  $j$ -й по  $i$ -му критерию определяет число последовательных переходов из класса в класс, которое необходимо осуществить для того, чтобы  $j$ -й вариант стал эквивалентен  $k$ -му по  $i$ -му критерию, умноженное на цену одного такого перехода. При этом требуется, чтобы величины  $d_{jk}$  не превышали единицу.

**4. Построение решающего правила.** На основе чисел  $p \in (0, 1]$  и  $q \in [0, 1)$ , определяемых ЛПР, на множестве альтернатив строится следующее бинарное отношение:  $j$ -я альтернатива признается лучше альтернативы  $k$ , при условии того, что  $c_{jk} \geq p$  и  $d_{jk} \leq q$ . Сразу можно заметить, что при  $\alpha = 0.5$ ,  $p = 1$  и  $q = 0$  указанное бинарное отношение становится аналогом бинарного отношения Слейтера, поскольку в этом случае  $j$ -я альтернатива доминирует  $k$ -ю лишь тогда, когда  $c_{jk} = 1$  и  $d_{jk} = 0$ , т.е.  $i \in I_{jk}^+$  для всех  $i = 1, \dots, m$ . При  $p < 1$  и  $q > 0$  могут возникнуть другие пары альтернатив, связанные введенным бинарным отношением.

После того как бинарное отношение построено, лицу, принимающему решение, представляется множество взаимно недоминируемых альтернатив, на котором построенное бинарное отношение обладает НМ-свойством (ядро по фон Нейману-Моргенштерну). Сразу скажем, что построенное бинарное отношение обычно не транзитивно, так что в ядре могут присутствовать альтернативы, доминируемые альтернативами, не включенными в ядро. Далее ЛПР выбирает окончательное решение из этого множества. Таким образом, метод ELECTRE позволяет сократить число анализируемых вариантов, облегчая тем самым выбор ЛПР. Покажем, как работает этот метод на примере задачи о покупке автомобиля.

### 18.3. Пример использования метода ELECTRE

Допустим, ЛПР собирается купить автомобиль, выбрав один из семи вариантов ( $N = 7$ ). Каждый автомобиль оценивается по четырем показателям ( $m = 4$ ): цене, комфортности салона, максимальной скорости и внешнему виду. Цена и скорость являются количественными критериями, поэтому область их значений разобьем на классы, присвоив каждому классу свой код и перейдя тем самым к качественным показателям.

Возможные значения показателей для нашего примера представлены в таблице 1 (соотношения предпочтительности между классами очевидны), а в таблице 2 с учетом введенных обозначений перечислены значения этих критериев для каждого из семи автомобилей (в таблице 2 представлена матрица  $\|y_{ji}\|^{N \times m}$ ).

Таблица 1

	Показатели	Значения	Код
1	цена	$\leq 27000$	25
		28000 - 32000	30
		33000 - 37000	35
		38000 - 42000	40
		43000 - 47000	45
2	комфортность	высокая	H
		средняя	M
		низкая	L
3	скорость	быстрая	F
		медленная	S
4	внешний вид	красивый	B
		приемлемый	A

Таблица 2

	1	2	3	4
1	45	H	F	B
2	40	H	S	B
3	40	M	F	B
4	35	M	F	A
5	35	M	S	B
6	35	L	F	B
7	25	L	S	A

Теперь применим описанный метод.

1. Пусть ЛПР выбрал следующие веса:  $W_1 = 5$ ,  $W_2 = 3$ ,  $W_3 = 1$ ,  $W_4 = 1$ .

2. Считая, что  $\alpha = 0.5$ , вычислим индексы согласия для каждой пары вариантов выбора автомобилей. Рассмотрим сначала автомобили 1 и 2. Автомобиль 1 лучше автомобиля 2 по третьему показателю (по скорости), и совпадает с ним по второму и четвертому (по комфортности и по качеству внешнего вида), поэтому  $I_{jk}^+ = \{3\}$ ,  $I_{jk}^- = \{1\}$ ,  $I_{jk}^o = \{2, 4\}$ . Согласно заданным весам

$$C_{12} = \frac{W_3 + 0.5(W_2 + W_4)}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4} = \frac{1 + 0.5(3 + 1)}{10} = 0.3.$$

Аналогично

$$C_{21} = \frac{W_1 + 0.5(W_2 + W_4)}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4} = \frac{5 + 2}{10} = 0.7.$$

Как нетрудно видеть, при  $\alpha = 0.5$  сумма симметричных индексов согласия равна единице. Сравнивая все остальные автомобили попарно, получим матрицу согласия

$$C = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} - & 3 & 4 & 4.5 & 4.5 & 4 & 5 \\ 7 & - & 6 & 4 & 4 & 3.5 & 4.5 \\ 6 & 4 & - & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 5.5 & 6 & 7 & - & 5 & 6 & 4 \\ 5.5 & 6 & 7 & 5 & - & 7 & 4.5 \\ 6 & 6.5 & 6 & 4 & 3 & - & 3.5 \\ 5 & 5.5 & 5 & 6 & 5.5 & 6.5 & - \end{pmatrix}.$$

3. Для определения индексов несогласия необходимо задать цену перехода значения в соседний класс по каждому из критериев. В нашем примере будем считать, что понижение цены автомобиля на один уровень оценивается в 20 баллов, увеличение скорости — в 25 баллов, повышение удобства салона и качества внешнего вида — по 20 баллов. Вычислим индекс несогласия для первого и второго варианта выбора автомобиля. Первый автомобиль хуже второго только по цене, причем их разделяет лишь один переход, который оценивается в 20 баллов, поэтому  $d_{12} = 0.2$ . Найдем теперь  $d_{21}$ . Так как автомобиль 1 превосходит автомобиль 2 по скорости, причем на один класс, и цена перехода составляет 25 баллов, то  $d_{21} = 0.25$ . Рассчитав все остальные индексы несогласия, получим матрицу несогласия

$$D = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} - & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 2.5 & - & 2.5 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2.5 & - & 2 & 2.5 & 2 & 6 \\ 2 & 2.5 & 2 & - & 2.5 & 2 & 4 \\ 2.5 & 2 & 2.5 & 2.5 & - & 2.5 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2.5 & - & 4 \\ 4 & 4 & 2.5 & 2.5 & 2 & 2.5 & - \end{pmatrix}$$

4. Для построения решающего правила выберем  $p = 0.6$ ,  $q = 0.2$  и определим, между какими вариантами автомобилей существует доминирование. Для варианта 1 в 1-й строке матрицы несогласия  $D$  ищем элементы, не превосходящие 0.2. Таких элементов два, они соответствуют автомобилям 2 и 3. Однако индексы согласия с тем, что первый автомобиль лучше второго и третьего, равны, соответственно,  $c_{12} = 0.3$  и  $c_{13} = 0.4$ . Эти числа меньше 0.6, поэтому первый автомобиль не доминирует никакой другой автомобиль. То же самое получается и для второго автомобиля. Третья строка матрицы

$D$  содержит три элемента, равных 0.2 — первый, четвертый и шестой. Среди чисел, стоящих на аналогичных позициях в третьей строке матрицы  $C$ , есть одно, не меньшее 0.6 — это первый элемент. Следовательно, третий автомобиль доминирует первый. Поступая дальше аналогичным образом, находим все остальные пары, связанные отношением доминирования. На рис. 18.1 *а* такие пары соединены стрелками: стрелка идет от лучшего варианта к худшему. Как видно, построенное бинарное отношение не обладает свойством транзитивности. Так, четвертый автомобиль доминирует третий, третий доминирует первый, но четвертый не доминирует первый, так что надо быть осторожным при построении ядра. Для нашего примера в случае  $p = 0.6$ ,  $q = 0.2$  в ядро бинарного отношения войдут недоминируемые автомобили 4, 5, 7, а также автомобиль 1, который включается в ядро для того, чтобы сохранялось НМ-свойство.

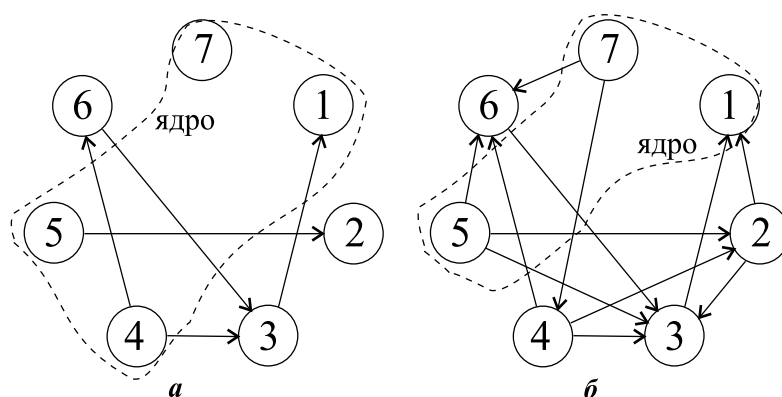


Рис. 18.1.

Найдем ядро бинарного отношения для рассматриваемого примера при других значениях  $p$  и  $q$ . В случае, когда  $p = 1$ ,  $q = 0$ , ядро будут составлять все семь вариантов автомобилей. Будем теперь постепенно уменьшать  $p$  и увеличивать  $q$ . При  $p = 0.9$ ,  $q = 0.1$  ядро опять будут составлять все семь автомобилей. Та же самая ситуация будет и при  $p = 0.8$ ,  $q = 0.2$ . Если взять  $p = 0.7$  и  $q = 0.2$ , то четвертый автомобиль доминирует третий, и, следовательно, в ядро войдут все варианты, кроме третьего. В случае, когда  $p = 0.6$ ,  $q = 0.2$ , ядро будут составлять автомобили 1, 4, 5, 7. Если же  $p = 0.6$ ,  $q = 0.25$ , то возникающие в этом случае отношения доминирования представлены на рис. 18.1 *б*. При этом ядро состоит из автомобилей 1, 5, 7.



Очень интересна ситуация, когда  $p = 0.5$ ,  $q = 0.25$ . Для автомобилей 5 и 4 индексы согласия и несогласия имеют значения  $c_{54} = 0.5 \geq p$ ,  $d_{54} = 0.25 \leq q$ , т.е. автомобиль 5 доминирует автомобиль 4, но в то же время  $c_{45} = 0.5 \geq p$  и  $d_{45} = 0.25 \leq q$ , т.е. автомобиль 4, в свою очередь, доминирует автомобиль 5. Таким образом, бинарное отношение не только не является транзитивным, но и может приводить к циклам доминирования, причем состоящим всего из двух вариантов, что уже совсем недопустимо. Хорошо, если все элементы цикла доминируются какими-то другими, не входящими в этот цикл вариантами, так что его можно просто исключить из рассмотрения. В нашем случае ядро будет состоять из автомобилей 2 и 7. Однако в общем случае неясно, что делать, если образующие цикл варианты являются недоминируемыми. По-видимому, для того, чтобы подобных ситуаций не возникало, величина  $p$  должна быть достаточно велика.

Подведем итоги. Итак, от ЛПР в процессе реализации метода ELECTRE требуется получить

- 1) веса критериев,
- 2) цены перехода из класса в класс для построения индексов несогласия,
- 3) числа  $p$  и  $q$  для построения бинарного отношения.

При этом результат зависит от того, какие  $p$  и  $q$  будут выбраны. Так, если  $p$  близко к единице, а  $q$  к нулю, то с помощью метода ELECTRE можно исключить только альтернативы, доминируемые по Слейтеру. При других значениях  $p$  и  $q$  появляются другие возможности доминирования и могут возникнуть ситуации, когда доминируемая альтернатива попадает в ядро.

Так как ЛПР довольно сложно сразу назначить  $p$  и  $q$  разумным образом, то был предложен следующий подход. В качестве начальных значений выбираются  $p = 1$  и  $q = 0$ , затем они постепенно меняются. При этом ЛПР получает информацию о том, какие альтернативы попадают в ядро, а также диаграммы, изображающие отношения доминирования между альтернативами, аналогичные тем, что представлены на рис. 18.1. Когда изменения параметров начинают приводить к противоречиям, процесс останавливается, и ЛПР выбирает наиболее приемлемый для себя вариант значений  $p$  и  $q$  из рассмотренных ранее. Можно также исключать часть альтернатив при больших значениях  $p$  и малых  $q$ , а затем продолжать анализ с меньшим  $p$  и большим  $q$  только для тех вариантов, которые не были исключены на предыдущих шагах. Разработаны и более сложные варианты метода ELECTRE, которые получили название ELECTRE II и ELECTRE III ([10]).

Отметим, что существует очень важное отличие метода ELECTRE от рассмотренных ранее методов: решающее правило, с помощью которого осуществляется выбор между имеющимися альтернативами, не определяется заранее, а меняется с учетом мнения ЛПР. В этом процессе человек меняет параметры алгоритма в соответствии с тем, какими свойствами обладает решаемая задача и добивается наиболее приемлемого для себя результата. Это приближает метод ELECTRE к итеративным методам, рассмотренным нами ранее.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ. Лабораторная работа по поддержке коллективного выбора решений в сети Интернет**

Целью лабораторной работы является изучение современных многокритериальных методов, основанных на визуализации паретовой границы и реализованных в сети Интернет. Изучение проводится на примере метода разумных целей в сочетании с диалоговыми картами решений (МРЦ/ДКР), реализованных в виде веб-приложения RGDB (Reasonable Goals for Data-Base).

### **1. Теоретические основы метода и веб-приложения**

Для реализации в сети Интернет метода разумных целей, описанного в лекции 17, принципиально важно, что визуализация выпуклой оболочки Эджворта-Парето (ВОЭП) может быть осуществлена средствами языка Java. Поскольку с аппроксимацией ВОЭП связано примерно 99% вычислительных затрат и она отделена от работы пользователя по изучению недоминируемого множества, диалоговая визуализация ВОЭП легко реализуется в структуре “сервер-клиент”. Аппроксимация ВОЭП может быть осуществлена на достаточно мощном сетевом сервере, в то время как визуализация — на персональном компьютере пользователя средствами языка Java с использованием обычных браузеров сети. Метод МРЦ/ДКР, реализованный в сети Интернет в форме веб-приложения RGDB с использованием технологии Java, может применяться для выбора предпочтительной альтернативы из прямоугольной таблицы — списка альтернатив, заданных количественными атрибутами (критериями выбора). С использованием веб-приложения RGDB можно осуществить визуализацию паретовой границы, указать разумную цель и получить небольшое число строк из таблицы, являющейся простейшей формой реляционной базы данных.

Итак, построение оболочки точек происходит на сервере, а Java-апплет обеспечивает интерактивную визуализацию паретовой границы. Кроме того, апплет позволяет пользователю задать цель на своем компьютере. Цель, указанная пользователем, возвращается на сервер, который осуществляет отбор альтернатив, близких к цели. Через некоторое время после фиксации целевой точки (время зависит, в основном, от скорости передачи данных по сети) пользователь получает список альтернатив, которые близки к указанной им цели. Схема веб-приложения RGDB приведена на рис. 1.

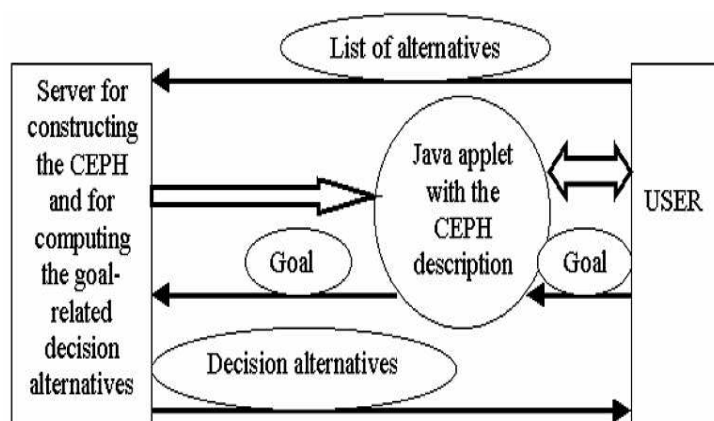


Рис. 1.

Сервер вычислений представляет собой исполняемую программу, написанную на языке программирования C++. Он принимает на вход табличные данные и строит аппроксимацию ВОЭП. Графический клиент представляет собой Java апплет, работающий на компьютере пользователя. Веб-сервер обеспечивает выполнение нескольких задач: помогает пользователю подготовить таблицу с исходными вариантами, обращается к серверу вычислений для их обработки, передает апплет с рассчитанными данными на компьютер пользователя и отыскивает альтернативы, наиболее близкие к цели.

Веб-приложение RGDB представляет собой прототип ресурсов, которые могут быть адаптированы к конкретным областям применения, что позволяет добавить некоторые полезные специфические особенности. Кроме базового веб-приложения RGDB, в настоящее время реализовано веб-приложение, предназначенное для поддержки переговоров. Такое веб-приложение уже нашло свое применение в среднесрочном планировании использования водных ресурсов бассейнов малых рек.

В данной лабораторной работе в сети Интернет осуществляется экспериментальное использование описанного веб-приложения. Лабораторная работа проводится совместно с Университетом им. Короля Хуана-Карлоса (Мадрид, Испания). Эксперимент направлен на изучение возможности привлечения широких слоев населения к принятию групповых решений с использованием сети Интернет. В связи с этим в лабораторной работе выбрана задача, понятная студентам разных стран — задача выбора наиболее подходящего хостела (дешевого отеля) в Лондоне. На основе базы данных о

стоимости проживания и четырех показателях качества отелей (около сотни отелей в базе), полученных на одном из сайтов в Лондоне, собирающем такую информацию среди клиентов, воспользовавшихся отелями, студенты должны совместно выбрать отель для всей группы участников эксперимента. Описанное веб-приложение RGDB было адаптировано к решению данной конкретной задачи.

Целью работы является проверка возможности использования данного метода поддержки принятия решений на практике, т.е. проверка способности участников эксперимента на основе использования информации, полученной с помощью веб-приложения RGDB, найти согласованное решение (т.е. выбрать отель для всей группы студентов, участвующих в эксперименте). Хотя в итоге должно быть выбрано согласованное решение, лабораторная работа концентрируется на индивидуальном выборе, а вопрос о согласовании индивидуальных решений отдельных студентов рассматривается на отдельном занятии уже после завершения лабораторной работы. В связи с этим, в процессе ее выполнения студент может временно отвлечься от проблем коллективного выбора и сосредоточиться на собственных предпочтениях.

## **2. Задание лабораторной работы**

1. Студент должен ознакомиться с информацией об отелях на основе базы данных о стоимости проживания и четырех показателях качества отелей.

2. Студент должен зарегистрироваться на сайте и приступить к работе с системой поддержки принятия решений (т.е. с веб-приложением RGDB).

3. В процессе работы студент должен ознакомиться с инструкцией по работе с апплетом веб-приложения RGDB, выработать представление об объективных замещениях между стоимостью проживания и показателями качества отеля и назначить цель — предпочтительное сочетание стоимости и показателей качества.

4. После того как сервер найдет несколько отелей, соответствующих указанной студентом цели, и представит ему список таких отелей, студент должен заполнить таблицу, выставив субъективную оценку каждому из выбранных отелей (от 1 до 5 баллов — большая оценка соответствует более предпочтительному отелю).

5. Из упорядоченного списка отелей, который будет составлен на основе полученных ответов, студенты на совместном заседании прямым голосованием выбирают наиболее предпочтительный отель.

6. Студент должен дать анонимное письменное заключение о встретившихся трудностях, а также о том, полезно ли данное веб-приложение по

сравнению с прямым выбором из списка. Приветствуются предложения по совершенствованию системы.

### 3. Пример выполнения лабораторной работы

Апплет веб-приложения RGDB предназначен для поддержки графического анализа связи между характеристиками отелей и выбора разумной цели, то есть предпочтительного набора значений показателей, близкого к реальным значениям, приведенным в таблицах. Предлагается, что пользователь в процессе графического анализа связи между характеристиками отелей рассмотрит несколько рисунков, которые отображают совокупность возможных разумных целей.

Для начала работы студент должен зайти на сайт с веб-приложением RGDB, адаптированным к данной проблеме. Появится окно, изображенное на рис. 2.

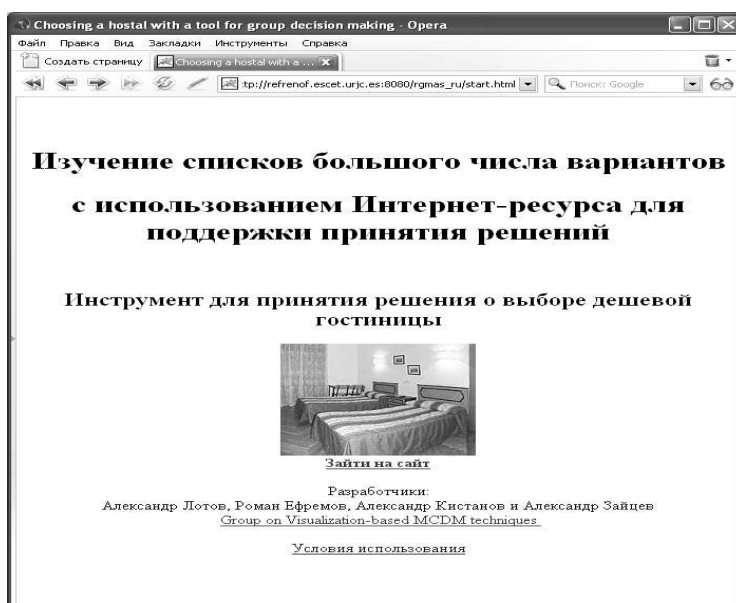
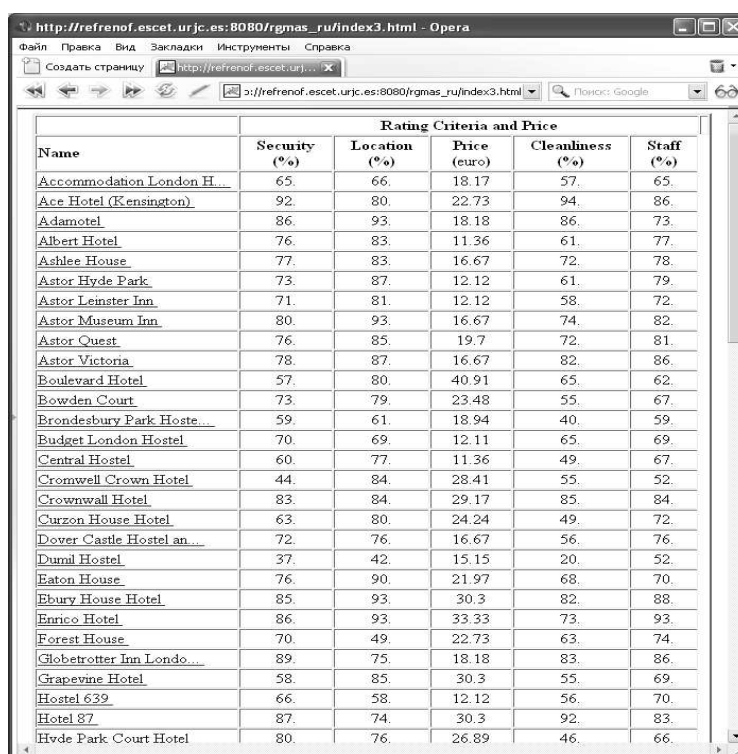


Рис. 2.

Далее по ссылке “Зайти на сайт” или нажимая мышкой на картинку, студент попадает на страницу с введением к заданию, где ставится основная задача. Нажимая на стрелку “Вперед”, студент знакомится с уточненным заданием. А именно, от него требуется ознакомиться с информацией

по отелям на основе базы данных, зарегистрироваться на сайте и на основе диалоговой работы с графической системой поддержки принятия решений выявить предпочтительное для себя сочетание стоимости и показателей качества отеля. Получив список из нескольких отелей, которые по мнению искусственного интеллекта системы соответствуют указанной студентом цели, студент должен внести в пустые окна напротив каждого из этих отелей его субъективную оценку (от 1 — “не поеду туда ни за что” до 5 — “полностью годится”). Рассмотрим эти этапы более подробно.



The screenshot shows a web browser window with the address `http://refrenof.escet.urjc.es:8080/rgmas_ru/index3.html`. The browser displays a table titled "Rating Criteria and Price" with the following columns: Name, Security (%), Location (%), Price (euro), Cleanliness (%), and Staff (%). The table lists 30 hotels with their respective ratings and prices.

Name	Security (%)	Location (%)	Price (euro)	Cleanliness (%)	Staff (%)
Accommodation London H...	65.	66.	18.17	57.	65.
Ace Hotel (Kensington)	92.	80.	22.73	94.	86.
Adamotel	86.	93.	18.18	86.	73.
Albert Hotel	76.	83.	11.36	61.	77.
Ashlee House	77.	83.	16.67	72.	78.
Astor Hyde Park	73.	87.	12.12	61.	79.
Astor Leinster Inn	71.	81.	12.12	58.	72.
Astor Museum Inn	80.	93.	16.67	74.	82.
Astor Quest	76.	85.	19.7	72.	81.
Astor Victoria	78.	87.	16.67	82.	86.
Boulevard Hotel	57.	80.	40.91	65.	62.
Bowden Court	73.	79.	23.48	55.	67.
Brondesbury Park Hoste...	59.	61.	18.94	40.	59.
Budget London Hostel	70.	69.	12.11	65.	69.
Central Hostel	60.	77.	11.36	49.	67.
Cromwell Crown Hotel	44.	84.	28.41	55.	52.
Crownwall Hotel	83.	84.	29.17	85.	84.
Curzon House Hotel	63.	80.	24.24	49.	72.
Dover Castle Hostel an...	72.	76.	16.67	56.	76.
Dunal Hostel	37.	42.	15.15	20.	52.
Eaton House	76.	90.	21.97	68.	70.
Ebury House Hotel	85.	93.	30.3	82.	88.
Enrico Hotel	86.	93.	33.33	73.	93.
Forest House	70.	49.	22.73	63.	74.
Globetrotter Inn Londo...	89.	75.	18.18	83.	86.
Grapevine Hotel	58.	85.	30.3	55.	69.
Hostel 639	66.	58.	12.12	56.	70.
Hotel 87	87.	74.	30.3	92.	83.
Hvde Park Court Hotel	80.	76.	26.89	46.	66.

Рис. 3.

### Информация о гостиницах

Каждая гостиница характеризуется пятью показателями:

- Security (Безопасность)
- Location (Местонахождение)

- Price (Стоимость)
- Cleanliness (Чистота)
- Staff (Качество обслуживания)

Все показатели, кроме Price (Стоимость), оцениваются в баллах от 0 до 100 (чем больше баллов, тем лучше качество обслуживания, удобнее расположение, более безопасно и чище в соответствующей гостинице). Критерий Price определяет стоимость (в евро) за сутки проживания в гостинице (см. рис. 3).

Ясно, что хотя таблица содержит все данные, необходимые для выбора гостиницы, сделать выбор непросто. Используя веб-приложение RGDB, предназначенное для поддержки решения подобных задач, сделать это значительно легче. Основная задача студента в рамках веб-приложения RGDB — понять связь показателей и выразить свое предпочтение в виде разумной цели.

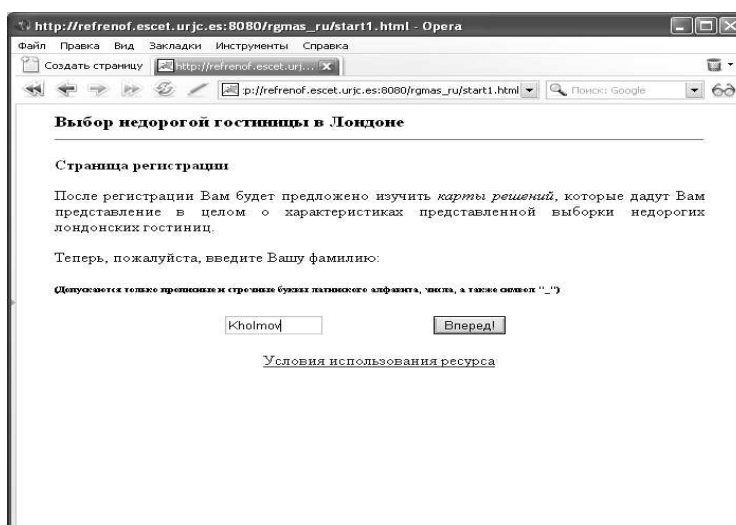


Рис. 4.

После нескольких нажатий на кнопку “Вперед”, попадаем на страницу регистрации (см. рис. 4), где достаточно ввести фамилию или условное имя и нажать кнопку “Вперед!”.



Далее открывается окно, где показываются Java апплет и инструкция по работе с ним. Апплет позволяет рассмотреть различные рисунки, приближенно описывающие границы возможных значений стоимости и четырех показателей качества для всей совокупности отелей.

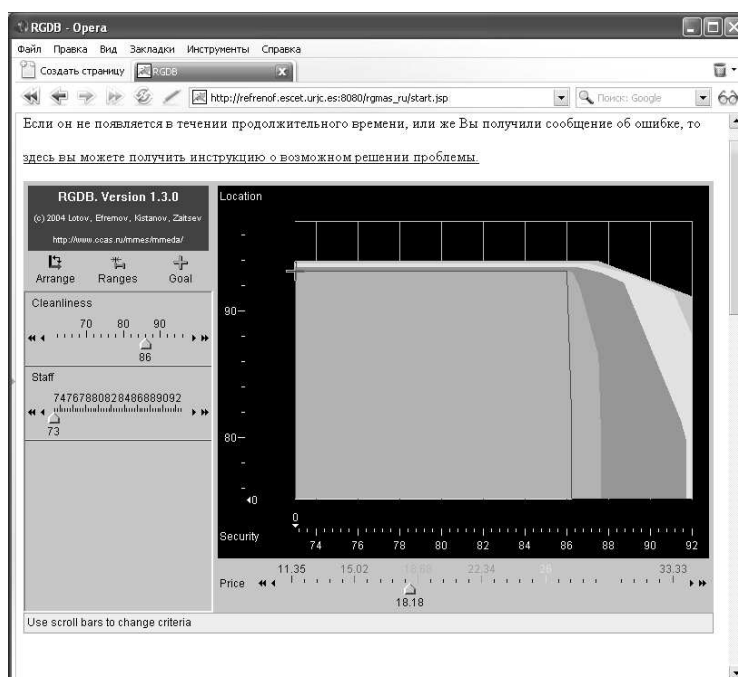


Рис. 5.

С самого начала на экране монитора виден рисунок (рис. 5), который представляет собой несколько областей, различающихся по цвету и наложенных одна на другую (карты решений). Каждая из областей представляет разумные сочетания двух показателей — Security и Location при некотором значении показателя Price. Величины Security отложены по горизонтальной оси, а величины Location — по вертикальной. На цветовой шкале под графиком дается соответствие между цветом и значением показателя Price. Поскольку естественным является желание улучшить (увеличить) и Security, и Location, то “северо-восточная” граница каждой из областей отражает предельные возможности назначения разумных целей. Поэтому говорят, что эта граница области содержит неулучшаемые сочетания Security,

и Location, если, конечно, цвет (значение показателя Price) и значения других показателей заданы.

Отметим, что для того, чтобы получить конкретную карту решений, необходимо также задать значения остальных показателей — Cleanliness и Staff. Исходная карта решений соответствует величинам Cleanliness и Staff, выбранным системой, однако их величины могут быть изменены пользователем на прокрутках (scroll-bar), которые отображаются слева от карты решений. Изменение значений величинам Cleanliness и Staff приведет к изменению карты решений. Можно “оживить” карту решений, используя автоматическое движение ползунков (слайдеров), изменяющих уровни Cleanliness и Staff (используйте двойную стрелку).

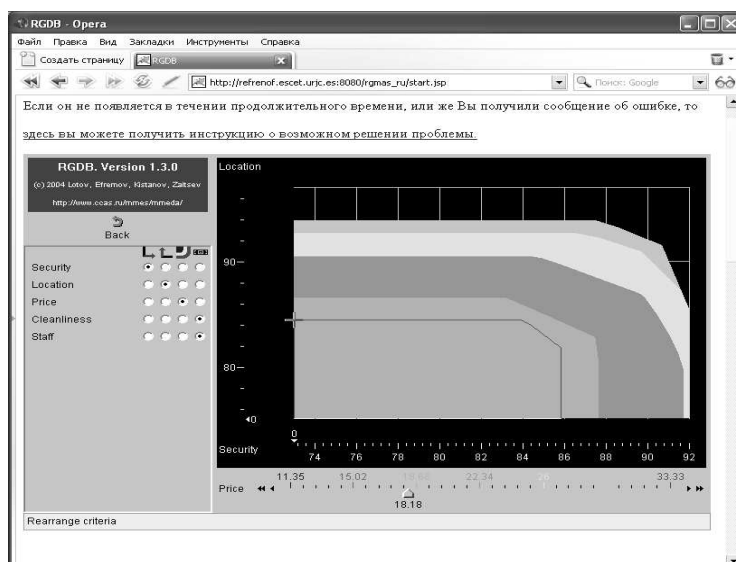


Рис. 6.

На карте решений видна дополнительная перемещаемая граница, которая позволяет рассматривать положение неувлучшаемой границы в зависимости от промежуточных значений показателя, задаваемого цветом (в исходном рисунке — Price). Перемещая ползунок на прокрутке, расположенной под цветной шкалой, можно постепенно менять показатель Price и изучать, как неувлучшаемые сочетания Security и Location связаны с показателем Price.

На дополнительной границе можно заметить крест, который может перемещаться по ней с помощью мыши. Он используется для идентификации разумной (желаемой) цели. Система RGDB позволяет менять размещение показателей по осям и прокруткам — достаточно использовать кнопку Arrange, расположенную слева, и откроется соответствующее окно (см. рис. 6).

Новое размещение может оказаться более информативным, чем исходное, выбранное системой автоматически. Отметим, что для того, чтобы добиться более детальной картины, можно сузить диапазоны показателей (используйте кнопку Ranges, расположенную слева, см. рис. 7).

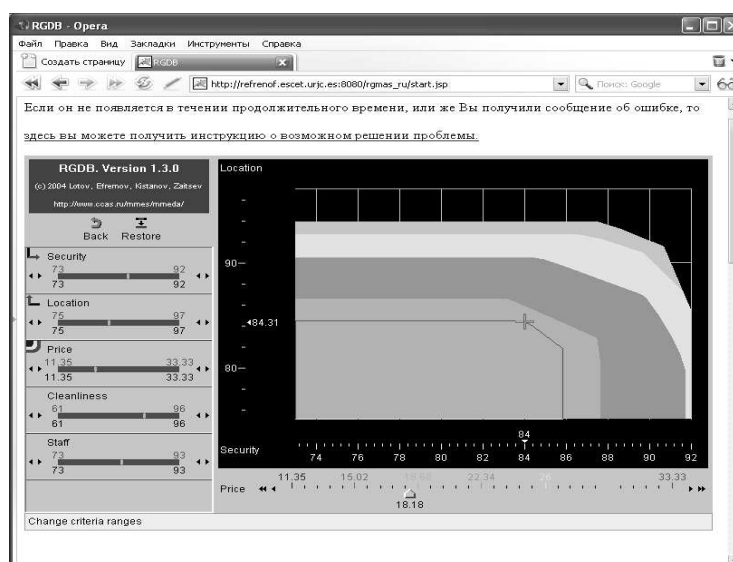


Рис. 7.

Мы советуем пользователю “поиграть” с размещением критериев, менять значения критериев на прокрутках и, что особенно важно, воспользоваться анимацией. Когда пользователь почувствует, что в достаточной степени понял связь неумлучшаемых значений показателей, он может приступить к идентификации разумной цели. Для этого сначала надо выбрать удобное размещение показателей и установить значения показателей на прокрутках (в том числе и на цветовой шкале). Последним выбором задается положение перемещаемой границы. Установленные значения показателей

войдут в цель. Осталось установить неувлучшаемые величины двух оставшихся показателей, значения которых отложены на осях. Для этого надо нажать кнопку Goal над прокрутками (см. рис. 8).

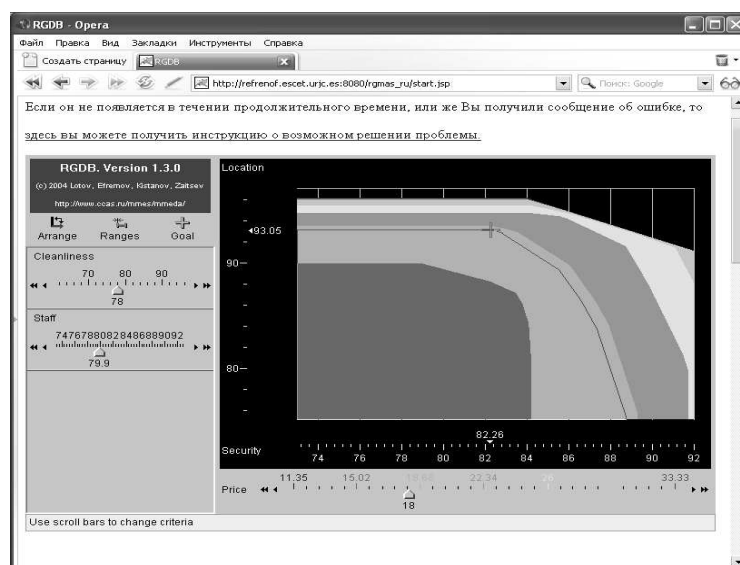


Рис. 8.

Заметим, что после этого уже невозможно будет менять значения прокруточных показателей — они зафиксированы и даны слева от карты решений. Перемещая крест вдоль дополнительной границы, легко установить неувлучшаемые значения двух оставшихся показателей — надо просто перевести крест в предпочтительную позицию.

Таким образом, в нашем примере мы выбрали следующее значение Показателей (см. рис. 9): 85 для Security (Безопасность) 89.9 для Location (Местонахождение) 18 для Price (Стоимость) 78 для Cleanliness (Чистота) 79.9 для Staff (Качество обслуживания)

Нажимаем на кнопку “Fixation” и получаем на выходе пять вариантов гостиниц наиболее близких по показателям к выбранной цели (см. рис. 10). Остается лишь внести в пустые клетки оценку (в баллах от 1 до 5), отражающую Ваше отношение к полученным отелям (от 1 — очень плохо, до 5 — отлично).

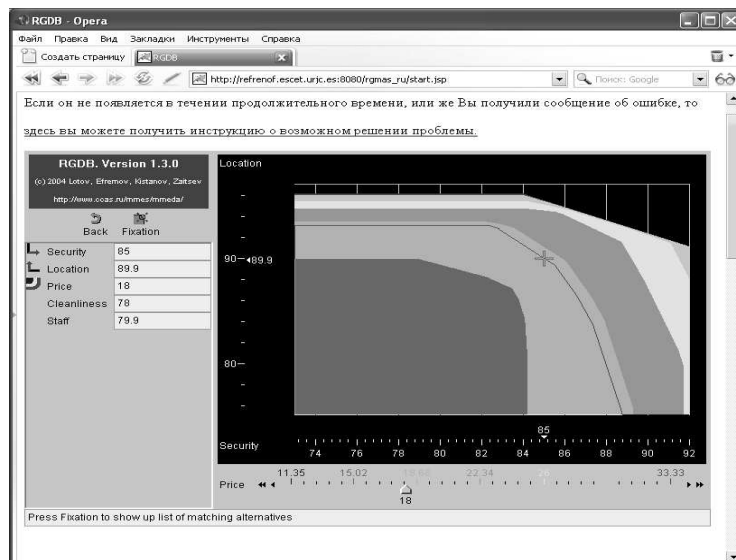


Рис. 9.

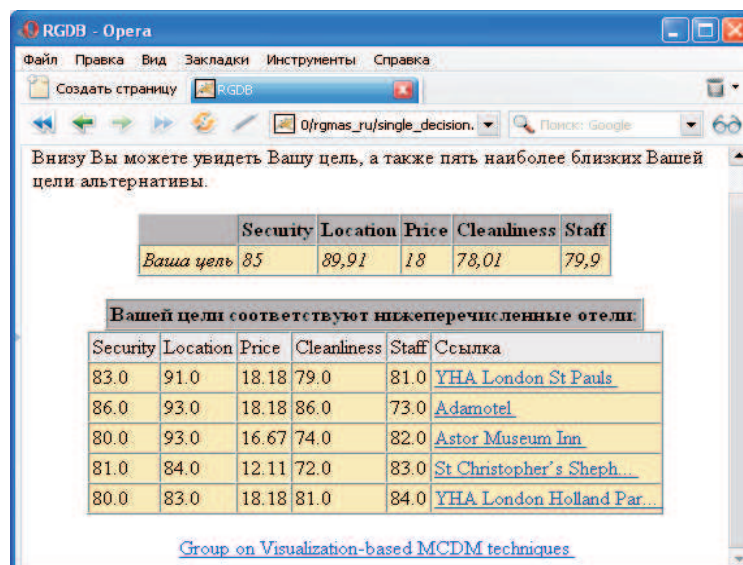


Рис. 10.

## Список литературы

- [1] *С.А. Ашманов* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
- [2] *Березкин В.Е., Каменев Г.К., Лотов А.В.* Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // ЖВМиМФ. 2006. Т. 46(11). С. 2009-2023.
- [3] *Ф.П. Васильев* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
- [4] *Ю.Б. Гермейер* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
- [5] *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов* Математический анализ. М.: Проспект, 2004.
- [6] *М. Интрилигатор* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-пресс, 2002.
- [7] *Р.Л. Кини, Х. Райфа* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
- [8] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
- [9] *О.И. Ларичев* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.
- [10] *О.И. Ларичев* Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2002.
- [11] *А.В. Лотов* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.
- [12] *А.В. Лотов, В.А. Бушенков, Г.К. Каменев, О.Л. Черных* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.
- [13] *В.В. Подиновский, В.Д. Ногин* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
- [14] *А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.
- [15] *Р. Штойер* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.