Дифференциал функции нескольких переменных

Формулы.

► Первый дифференциал функции нескольких переменных (1, стр. 311):

$$u(x,y): \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$u(x,y,z): \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

► Второй и третий дифференциалы функции нескольких переменных (дифференциал второго порядка) (2, стр. 521):

$$u(x,y): \qquad d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3$$

$$u(x,y,z): \qquad d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)^2 u$$

$$d^3u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)^3 u$$

(для дифференциала первого порядка не имеет значения, являются ли переменные $x,\ y,\ z$ независимыми переменными или нет (2, стр. 526, задача 39.10); для дифференциалов высших порядков это имеет значение, и формулы, приведённые здесь - для случая независимых переменных)

Условности при записи символов дифференцирования

► Символ dx рассматривается как единый символ, поэтому скобки при обозначении, например, квадрата, опускают:

$$d(du) = d^2u$$

$dx \cdot dx = (dx)^2 = dx^2$ (иногда записывают d^2x)

► Символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ рассматриваются как единые символы, и над ними возможно проведение всех арифметических операций как над числами. Принято писать:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\cdot\frac{\partial^n}{\partial y^n}\cdot u = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$$

► Символы приращений Δx, Δy и т.п. также рассматриваются как единые символы, поэтому скобки при обозначении, например, квадрата, опускают (2, стр. 501):

$$\Delta x \cdot \Delta x = (\Delta x)^2 = \Delta x^2$$

Условности в записи смешанных производных

► Допустим, выполняется последовательное дифференцирование функции $z = f(x, y)$ сначала по x, затем по y. Тогда это можно записать одним из следующих способов:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

Чёрточки (штрихи) для обозначения производной можно не применять, но всё-таки обычно их пишут:

$$z_{xy} = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(z'_x\right)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

(Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. "Курс математического анализа", 2003, стр. 255)

► Используется и другой способ указания последовательности дифференцирования:

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

(Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", 2001, стр. 227)

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Операторы

Введём понятия операторов дифференцирования (3, стр. 227).

► Символ $\frac{\partial}{\partial x}$ будем называть оператором частной производной по переменной x. При действии этого оператора на функцию $u(x, y)$ получается новая функция - частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Определим степени и произведения степеней операторов $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ следующим образом:

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ - оператор второй частной производной по x; при действии его на функцию u получается $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ - оператор смешанной второй производной по y, x;

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^n}{\partial y^n} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}$ - оператор смешанной производной $(m+n)$-го порядка n раз по y и m раз по x.

► Символ $d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ назовём оператором дифференциала. При действии этого оператора на функцию $u(x, y)$ получается дифференциал функции $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Определим n-ю степень оператора дифференциала как n-ю степень двучлена $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$, т.е. $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$ (формула справедлива для случая независимых переменных x и y !). Например, при действии оператора

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2$$ на функцию $u(x,y)$ получается второй дифференциал функции. В операторном виде формула второго дифференциала функции $u(x,y)$ имеет вид:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 u .$$

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", изд. 4, 2006, стр. 311;
2) Каплан И.А., Пустынников В.И. "Практикум по высшей математике", том 1, изд. 6, 2006, стр. 521;
3) Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. "Математический анализ в вопросах и задачах", изд. 4, 2001, стр.227;
4) Кудрявцев Л.Д. "Математический анализ", том 1, стр. 313.

1) Вычислить дифференциал dy функции

$$y = \cos^2 x$$

при $x_0 = \pi/4$ и $dx = 0,03$.

Используем формулу

$$dy = f'(x)dx .$$

$$dy = \left(\cos^2 x\right)' dx = 2\cos x \cdot (\cos x)' dx = -2\cos x \cdot \sin x \, dx = -\sin 2x \, dx$$

$$dy\Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ dx=0,03}} = -\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot 0,03 = -1 \cdot 0,03 = -0,03$$

Ответ: $dy = -0,03$.

Литература:

1) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 186.

2) Найти полный дифференциал du функции трёх переменных $u = \ln\left(x^2 \cdot y^2 \cdot z^2\right)$.

Для функции $u = f(x;\, y;\, z)$ полный дифференциал определим по формуле $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^{\cancel{2}} \cdot \cancel{y^2 \cdot z^2}} \cdot 2x \cdot \cancel{y^2 \cdot z^2} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\cancel{x^2} \cdot y^2 \cdot \cancel{z^2}} \cdot 2y \cdot \cancel{x^2 \cdot z^2} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\cancel{x^2 \cdot y^2} \cdot z^{\cancel{2}}} \cdot 2z \cdot \cancel{x^2 \cdot y^2} = \frac{2}{z}$$

Запишем полный дифференциал:

$$du = \frac{2}{x}dx + \frac{2}{y}dy + \frac{2}{z}dz$$

$$du = 2\cdot\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right)$$

Литература:

1) Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. "Высшая математика в упражнениях и задачах", часть 1, 2003, стр. 195;
2) Письменный Д.Т. "Конспект лекций по высшей математике", 2005, стр. 311.

3) Найти функцию по её полному дифференциалу dU :

$$dU = \left(4x^3 - y^2\right)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy\right)dy$$

Поскольку $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 4x^3 - y^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy$$

$$\int\frac{\partial U}{\partial x}dx = \int\left(4x^3 - y^2\right)dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - xy^2 + C_1 = x^4 - xy^2 + C_1$$

$$\int\frac{\partial U}{\partial y}dy = \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy\right)dy = \arcsin y - 2x\cdot\frac{y^2}{2} + C_2 = \arcsin y - xy^2 + C_2$$

Выделив общую часть полученных результатов, получим искомую функцию U :

$$U = x^4 - xy^2 + \arcsin y + C$$

Проверка:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(x^4 - xy^2 + \arcsin y + C\right)'_x = 4x^3 - y^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(x^4 - xy^2 + \arcsin y + C\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy$$

4) Дана функция $z = \ln\sqrt{5x^2 - y^2}$ и точки $P_1(1;2)$ и $P_2(1{,}02\ ;\ 1{,}85)$. Найти приближённое значение данной функции в точке P_2, исходя из её точного значения в точке P_1 и заменяя приращение Δz соответствующим дифференциалом dz , т.е. применяя формулу

$$f\left(x_2, y_2\right) \approx f\left(x_1, y_1\right) + [dz]_{\substack{x=x_1\\ y=y_1}}$$

Запишем формулу приближённого вычисления в виде

$$f(x+\Delta x\ ;\ y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\cdot\Delta x + f'_y(x;y)\cdot\Delta y\ ,$$

где $x = 1$,
$y = 2$,
$\Delta x = 0,02$,
$\Delta y = -0,15$.

$$z'_x = \left(\ln\sqrt{5x^2 - y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{5x^2-y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(5x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10x = \frac{5x}{\left(5x^2-y^2\right)}$$

$$z'_y = \left(\ln\sqrt{5x^2 - y^2}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{5x^2-y^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(5x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y) = -\frac{y}{\left(5x^2-y^2\right)}$$

$$f(1;2) = \ln\sqrt{5-4} = 0$$

$$f'_x(1;2) = \frac{5}{(5-4)} = 5$$

$$f'_y(1;2) = -\frac{2}{(5-4)} = -2$$

Так что

$$f(1,02\ ;\ 1,85) \approx 0 + 5\cdot 0,02 - 2\cdot(-0,15) = 0,4\ ,$$

5) Для функции $y = 0,4\cdot\sqrt{10x-16}$ найти приращение Δy и дифференциал dy, соответствующие значениям $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0,5$. Составить уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0. Сделать чертёж, указав на нём Δx, Δy, dy.

Приращение:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0,4\cdot\sqrt{10\cdot(2+0,5)-16} - 0,4\cdot\sqrt{10\cdot 2-16} = 0,4\cdot\left(\sqrt{25-16}-\sqrt{4}\right) = 0,4$$

Дифференциал:

$$y' = \left(0,4\cdot\sqrt{10x-16}\right)' = 0,4\cdot\frac{1}{2}(10x-16)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10 = \frac{2}{\sqrt{10x-16}}$$

$$dy = y'(x_0)\cdot\Delta x = \frac{2}{\sqrt{10\cdot 2-16}}\cdot 0,5 = 0,5$$

Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке x_0:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$$x_0 = 2$$

$$y(x_0) = 0,4\cdot\sqrt{10\cdot 2-16} = 0,8$$

$$y'(x_0) = \frac{2}{\sqrt{10\cdot 2-16}} = 1$$

$$y - 0,8 = 1\cdot(x-2)$$

$$y = x - 1,2$$

x	2	2,2
y	0,8	1

Чертёж выполним так, чтобы детально показать окрестности точки $x_0 = 2$.

Таблица для построения графика функции $y = 0,4 \cdot \sqrt{10x - 16}$:

x	1,6	1,7	2	2,5
y	0	0,4	0,8	1,2