

## Вопросы к экзамену по дисциплине «Дискретная математика»

1. Множества и классы. Антиномии (парадоксы). Антиномия всемогущества, парадокс «деревенский парикмахер». Антиномия Рассела. Класс разбиений множества. Пустое множество. Универсум. Мощность (кардинальное число, порядок) множества. Булеан.
2. Отношение. Кorteж. Бинарное отношение. Отношение принадлежности. Отношение включения. Подмножество, надмножество, собственное подмножество. Операции над множествами: объединение (дизъюнкция, сумма), пересечение (конъюнкция, произведение), разность, симметрическая разность, дополнение.
3. Рефлексивное, симметричное, антисимметричное, транзитивное отношения. Отношение предпорядка, порядка, толерантности, эквивалентности.
4. Инволюция (обращение), дополнение, произведение (композиция) отношений. Способы задания отношений. Декартово произведение множеств. Отображение (соответствие). Пустое отображение, полное отображение. Область определения, прообраз ( $Dom$ ) отображения. Область значений, образ ( $Im$ ) отображения. Всюду определенные и сюръективные отображения. Образ ( $im$ ) и прообраз ( $coim$ ) элемента. Отображение как частично определенная многозначная функция.
5. Гомоморфизм, изоморфизм, автоморфизм, эпиморфизм (сюръекция), мономорфизм (инъекция), эндоморфизм.
6. Бинарная операция и ее основное множество. Алгебра, сигнатура алгебры, тип алгебры. Модель. Способы задания бинарной операции. Таблица Кэли. Gruppoид. Квазигруппа. Лупа. Полугруппа. Моноид. Группа. Абелева группа. Группа симметрий фигуры. Симметрическая группа (группа подстановок). Подгруппа данной группы. Порядок группы. Теорема Кэли.
7. Теорема Лагранжа и ее следствия. Индекс подгруппы в группе. Циклическая группа. Порядок элемента группы. Примарная группа, элементарная группа. Прямое произведение подгрупп. Сопряженные элементы и подгруппы, трансформация и инвариантность относительно трансформации. Нормальный делитель (инвариантная подгруппа). Правый и левый смежные классы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.
8. Кольцо. Аддитивная группа кольца. Нуль, делители нуля. Ассоциативное кольцо, альтернативное кольцо, йорданово кольцо, кольцо Ли, коммутативное кольцо, область целостности. Тело. Теорема Веддербёрна. Поле (коммутативное тело).
9. Элементы комбинаторики – сочетания, размещения, перестановки. Метод включений и исключений. Решение однородных и неоднородных линейных рекуррентных соотношений.

10. Матрица смежности, матрица инцидентности. Задание графа списками. Изоморфные графы. Подграфы. Операции на графах: добавления ребра, добавления вершины, удаление ребра, удаление вершины, подразбиения ребра, дополнение графа, объединение графов, пересечение графов. Гомеоморфные графы. Теорема Понтрягина-Куратовского.
11. Маршрут, цепь, простая цепь, цикл, простой цикл, путь, контур. Связность графа, сильная связность орграфа. Компонента связности, сильной связности. Графы  $k$ -вершинно (реберно)связные. Длина маршрута. Теорема о числе маршрутов из заданной вершины заданной длины. Матрица связности, матрица достижимости, матрица сильной связности. Алгоритм выделения компонент связности.
12. Задача о кенигсбергских мостах. Эйлеров цикл. Эйлеров путь в графе. Теорема о существовании эйлерова пути, цикла на графе. Алгоритм построения эйлерова цикла. Гамильтонов путь в графе, гамильтонов цикл. Задача коммивояжера. Алгоритм с возвратом для поиска гамильтонова пути. Расстояние между вершинами на графе. Эксцентриситет вершины. Диаметр, радиус, центр графа. Взвешенные графы и орграфы. Длина пути в обычном и во взвешенном орграфе.
13. Алгоритм Форда-Беллмана нахождения расстояния от источника до всех вершин. Условие возможности применения алгоритма Форда-Беллмана. Оценка временной сложности алгоритма. Алгоритм Дейкстры нахождения расстояния от источника до всех остальных вершин в графе с неотрицательными весами дуг. Оценка сложности алгоритма.
14. Транспортная сеть. Источник, сток, пропускная способность дуги. Поток, полный поток, максимальный поток. Алгоритм построения полного потока. Разрез графа относительно некоторого множества его вершин. Теорема о максимальном потоке. Примеры использования транспортных сетей на практике. Алгоритм построения максимального потока

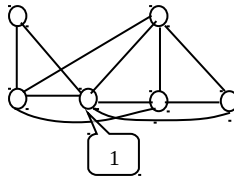
### Примеры практических заданий

1. Кодовый замок имеет 5 одинаковых ячеек, каждая ячейка может быть установлена в одно из 6 положений. Сколько различных комбинаций нужно перебрать, чтобы открыть замок, не зная кода
2. На множестве натуральных чисел задана абстрактная операция  $n_1 \circ n_2 = 2n_1 + n_2$ . Является ли алгебра  $\langle N, \circ \rangle$  группоидом, полугруппой, моноидом, группой, абелевой группой
3. Докажите методом математической индукции следующее утверждение:  

$$\forall n \in N (n^3 + 11n \equiv 0 \pmod{6})$$
4. Найти решение уравнения  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n$  с начальными условиями  $a_0 = 5, a_1 = 7$

5. Дано:  
 $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, P_1 \subseteq A \times B, P_2 \subseteq B^2, P_1 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle c, 3 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 4 \rangle\}$   
 $P_2 = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$ . Найдите  $(P_1 \circ P_2)^{-1}$ . Является ли отношение  $P_2$  рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным
6. Докажите тождество:  $A \cap B = (\overline{A} \cup B) \cap A$ .
7. Перестановку разложить в произведение независимых циклов, транспозиций, определить ее четность:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
8. Пятеро студентов сдают экзамен. Каким количеством способов могут быть выставлены оценки, если известно, что никто из студентов не получил неудовлетворительной оценки?
9. Будет ли верно тождество:  $(A \cup B) \setminus (C \cap A) = (B \setminus C) \setminus (A \cup C)$ .
10. Докажите, что всевозможные числа вида  $a + b\sqrt{3}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$  образуют числовое поле
11. Какие множества являются равномощными: множество точек отрезка, множество натуральных чисел, множество точек на прямой, множество действительных чисел, множество простых чисел, множество видимых звезд на небе, множество рациональных чисел.
12. Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?
13. Сколько положительных чисел от 20 до 1000 делятся ровно на одно из чисел 7, 11 или 13.
14. На предприятии работает 67 человек. Из них 48 знают английский, 35 немецкий и 27 оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого?
15. Докажите, что матрицы вида  $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$  с действительными  $a, b$  образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения матриц.
16. Для заданного многочлена  $x^2 + x + 1$  с коэффициентами из множества  $\{0, 1\}$  построить кольцо. Для мультипликативной группы кольца найти нормальную подгруппу
17. Найдите область определения, область значений отношения  $R$ , где  $R \subseteq \mathbb{R}^2, \langle x, y \rangle \in R \Leftrightarrow x^2 \geq y$ . Является ли отношение  $R$  рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?
18. Каждому числу сопоставим цифру, получающуюся по правилу: суммируем все цифры числа, в полученной сумме опять суммируем все цифры и т.д. пока не останется одна цифра. Является ли отображение множества натуральных чисел в множество цифр  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , построенное по описанному правилу, морфизмом (если да, то каким)?
19. Для графа, изображенного на рисунке, найти все маршруты длины 2 из вершины 1. Является ли граф планарным? Имеются ли на графе циклы,

цепи Эйлера? Если да, то найдите их, используя алгоритм построения цикла Эйлера.



20. По весовой матрице графа  $G$  найдите все кратчайшие маршруты из вершины 2

	1	2	3	4	5	6
1	0	6	$\infty$	9	12	$\infty$
2	$\infty$	0	6	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	6
4	$\infty$	4	8	0	6	14
5	$\infty$	7	5	$\infty$	0	10
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

**21.** По матрице пропускных способностей дуг графа  $G$  найти максимальный поток от первой вершины до седьмой вершины

[illegible]