§ 6 Полный дифференциал функции нескольких переменных

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\Delta z + \beta\Delta y .$$

Сумма двух первых слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Определение *Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то главная, линейная относительно приращения аргументов, часть ее полного приращения называется **полным** **дифференциалом** **функции** и обозначается*

$$dz\big|_{P_0} = df(x_0,y_0) \overset{def}{=} f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y . \qquad (5)$$

Приращения независимых переменных называют *дифференциалами независимых переменных* x и y и обозначают соответственно dx и dy. Тогда полный дифференциал функции записывается в виде

$$\boxed{dz\big|_{P_0} \overset{def}{=} df(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy}$$

Выражения $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx,\quad \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ называют *частными дифференциалами* функции $z = f(x;y)$ и обозначают $d_x f$ и $d_y f$. Тогда

$$dz = d_x z + d_y z .$$

Определение полного дифференциала легко обобщается на случай функции любого числа аргументов. Например для случая трех переменных

$$du\big|_P = f'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + f'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z .$$

Из определения дифференциала функции нескольких переменных следует, что

$$z = f(x,y) \qquad \Rightarrow \Delta f(x_0,y_0) \approx df(x_0,y_0),$$
$$u = f(x,y,z) \qquad \Rightarrow \Delta f(x_0,y_0,z_0) \approx df(x_0,y_0,z_0),$$
$$u = f(P),\ \ P \in R^n \Rightarrow \Delta f(P_0) \approx df(P_0).$$

Эти соотношения позволяют получить формулы для приближенного вычисления значений функции:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0),$$
$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z+\Delta z) \approx f(x_0,y_0,z_0) + df(x_0,y_0,z_0).$$

В общем случае

$$f(P) \approx f(P_0) + df(P_0) \quad \forall P \in O_r(P_0) \subset R^n . \qquad (6)$$

Пример Найти приближенное значение функции $f(x,y) = 2^{2x^2+y^2}$ в точке P(1,02; 2,03).

Точка Р расположена достаточно близко от точки $P_0(1;2)$, $\Delta x = 0{,}02 \quad \Delta y = 0{,}03$. По формуле (6) имеем

$$f(P_0) = 2^{2x^2+y^2}\Big|_P = 2^6 = 64.$$

$$df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{P_0}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{P_0}\Delta y = \left(4x\cdot 2^{2x^2+y^2}\ln 2\cdot 0{,}02 + 2y2^{2x^2+y^2}\ln 2\cdot 0{,}03\right)\Big|_{P_0} \approx 8{,}872$$

Следовательно

$$f(P) \approx f(1;2) + df(1;2) \approx 64 + 8{,}872 = 72{,}872.$$

Оценим погрешность вычислений. Точное значение, вычисленное с помощью калькулятора $f(P) = 73{,}583$.

Абсолютная погрешность

$$\Delta f = 73{,}583 - 72{,}872 = 0{,}711.$$

Относительная погрешность

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{f(x,y)}\cdot 100\% = \frac{0{,}711}{73{,}583} = 0{,}96\%$$

Описанный в примере алгоритм вычислений основан на замене приращения функции ее полным дифференциалом.

Полный дифференциал используется главным образом для оценки погрешностей вычислений по формулам.

Пусть задана дифференцируемая функция n переменных: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда абсолютная погрешность Δu вычислений по этой формуле оценивается величиной

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right||\Delta x_1| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right||\Delta x_2| + ... + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right||\Delta x_n|,$$

относительная погрешность - величиной

$$\delta_u = \frac{|\Delta u|}{|u|}.$$

§ 7 Дифференцирование сложной функции

Пусть $z = f(u,v)$- функция двух переменных, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y: $u = u(x,y) \quad v = v(x,y)$. Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$ - сложная функция от двух независимых переменных x и y, а u и v промежуточные переменные.

Теорема *Если функция* $z = f(u,v)$ *дифференцируема в точке* $M_0(u_0, v_0) \in G$*, а функция* $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ *дифференцируемы в точке* $P_0(x_0, y_0) \in D(f)$, *то сложная функция* $z = f(u,v)$, *где* $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$, *дифференцируема в точке* $P_0(x_0, y_0) \in D(f)$, *причем ее частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

или в более краткой записи

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y .$$

▹ Докажем первую из формул (7). В точке $P_0(x_0, y_0)$ переменной x дадим приращение Δx, сохранив вторую переменную постоянной. Тогда функции u и v получат частные приращения $\Delta_x u,\ \Delta_x v$, а функция z полное приращение Δz (так как $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ - приращения по обоим промежуточным переменным). Функция $z = f(u,v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0, v_0)$ поэтому приращение функции представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v .$$

Разделим последнее равенство на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta_x u+\frac{1}{\Delta x}\beta\Delta_x v . \qquad (8)$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ в силу непрерывности функций $u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta_x u=\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x}; \quad \frac{1}{\Delta x}\beta\Delta_x v=\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Перейдем в равенстве (8) к пределу и учтем, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=0; \quad \lim_{\Delta x\to 0}\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=0.$$

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \triangleleft$$

Рассмотрим функцию трех переменных $w = f(u,v,t)$, каждая из которых является, в свою очередь, функцией трех независимых переменных x, y, z: $u = u(x,y,z),\ v = v(x,y,z),\ t = t(x,y,z)$. Тогда функция

$$w = f\big(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)\big) = F(x,y,z)$$

является сложной функцией трех независимых переменных x, y, z, а переменные u, v, t являются *промежуточными.* Частные производные этой функции вычисляются по формулам

$$w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x + w'_t t'_x ,$$
$$w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y + w'_t t'_y ,$$

$$w'_z = w'_u u'_z + w'_v v'_z + w'_t t'_z\ .$$

Рассмотрим некоторые важные частные случаи.

1. Пусть $w = f(u, v, t)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$. Тогда функция $w = f\big(u(x, y), v(x, y), t(x, y)\big)$ является сложной функцией двух аргументов, а следовательно имеет две частные производные, которые вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}.$$

2. Пусть $w = f(x, y, u)$, $u = u(x)$, $y = y(x)$. Тогда функция $w = f\big(x, y(x), u(x)\big) = F(x)$ - функция одной переменной x. Производная z'_x находится по общей формуле дифференцирования сложной функции

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y = y(x), u = u(x)$, то частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x}$ превращаются в обыкновенные производные, кроме того $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, следовательно

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} \qquad (9)$$

Производная $\frac{dz}{dx}$, вычисляемая по формуле (9) называется <u>*полной производной.*</u>

Пример 1 Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $z = f(u, v) = u \ln v$, где $u = 3x - y, v = x^2 + y^2$.

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 3\ln v + 2x\frac{u}{v} = 3\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x\frac{3x - y}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -\ln v + 2y\frac{u}{v} = -\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y\frac{3x - y}{x^2 + y^2}$$