Partiel 2023/2024

Mercredi 8 novembre 2023, 10h45-12h15 (1h30)
Documents et internet non autorisés
Ce sujet vise à sonder votre niveau en topologie
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Exercice 1 (Connexité)**.** Cet excercice sur la connexité comprend deux questions déconnectées l'une de l'autre.

1. Démontrez que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ne sont pas homéomorphes.
   Le raisonnement s'étend-il à la non-homéomorphie de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ quand $n \neq m$, $m, n \geq 2$? Justifiez votre réponse.
2. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et si I est un intervalle non-vide alors $f'(I)$ est un intervalle.
   Indication : utiliser le taux d'accroissement défini comme $(x, y) \in I^2 \cap \{x < y\} \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Exercice 2 (Compacité locale)**.** Soit X un espace topologique séparé, localement (quasi-)compact : pour tout $x \in X$, il existe un ouvert O et un quasi-compact K tels que $x \in O \subset K$.

1. Montrer que si (K_n) est une suite décroissante pour l'inclusion de quasi-compacts non-vides alors $\cap_n K_n \neq \varnothing$.
2. En déduire que si $(O_n)_n$ est une suite d'ouverts denses, alors $\cap_n O_n$ est dense.
3. Le résultat de la question précédente est-il plus fort ou moins fort que ceux du même type vus en cours ?

Exercice 3 (Espaces réguliers et espaces normaux)**.** Soit X un espace topologique. On rapelle que X est...

— *régulier* lorsque les singletons sont fermés et pour tout $x \in X$ et tout fermé F tels que $x \notin F$,
  il existe des ouverts O_x et O_F disjoints tels que $x \in O_x$ et $F \subset O_F$.

— *normal* lorsque les singletons sont fermés et pour tous fermés F_1 et F_2 disjoints,
  il existe des ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$.

1. Démontrer que si X est normal, alors il est régulier.
2. Démontrer que si X est séparé et quasi-compact, alors il est normal .
3. Démontrer que si X est métrisable, alors il est normal (indication : utiliser des boules).
4. Démontrer que si X est régulier, alors pour tout $x \in X$, et tout ouvert O tel que $x \in O$, il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $\overline{U} \subset O$, en d'autres termes, les voisinages fermés forment une base de voisinages.
5. En déduire que si X est régulier et à base dénombrable alors pour tous fermés disjoints A et B, il existe deux suites d'ouverts (V_n^A) et (V_n^B) telles que $A \subset \cup_n V_n^A$ et $B \subset \cup_n V_n^B$, et pour tout n, $\overline{V_n^A} \cap B = \varnothing$ et $\overline{V_n^B} \cap A = \varnothing$.
6. En déduire que si X est régulier et à base dénombrable alors il est normal.

Exercice 4 (Théorème de métrisabilité d'Urysohn)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer que tout espace topologique régulier et à base dénombrable est métrisable.
On tient pour acquis le résultat final de l'exercice 3 : tout espace régulier et à base dénombrable est normal.
Les notions d'espace régulier et d'espace normal sont précisées dans l'exercice 3.

1. Rappeler pourquoi si X est normal alors pour tous ouverts U et V tels que $\overline{U} \subset V$,
   il existe $f : X \to [0, 1]$ continue telle que $f = 1$ sur U et $f = 0$ sur V^c.
2. Supposons que X est normal et à base dénombrable.
   Soit $\mathscr{B}$ une base dénombrable de la topologie de X, et $\mathscr{S} := \{(U, V) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B} : \overline{U} \subset V\}$.
   Pour tout $S = (U, V)$, soit f_S l'application fournie par la question précédente pour U et V.
   Montrer que l'application $f : X \to [0, 1]^{\mathscr{S}}$ définie par $f(x) = (S \in \mathscr{S} \mapsto f_S(x) \in [0, 1])$ est continue et injective.

3. Conclure.

Exercice 5 (Topologie semi-ouverte)**.** Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie engendrée par tous les $[a, b)$ avec $a < b$.

1. Montrer que la topologie de X est strictement plus fine que la topologie usuelle.
2. Montrer que X est séparé.
3. Montrer que les intervalles $[a, b)$ avec $a < b$ forment une base de la topologie de X.
4. En déduire que X est séparable.
5. Montrer que X n'est pas à base dénombrable.
6. En déduire que X n'est pas métrisable.
7. Montrer que X est à base dénombrable de voisinages.
8. Montrer que $1/n \to 0$ tandis que $-1/n \not\to 0$.
9. Montrer que les compacts de X sont des ensembles au plus dénombrables.
   Indication : utiliser le recouvrement par les ouverts $(-\infty, x - 1/n)$ et $[x, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$.
10. En déduire que X n'est pas localement compact.

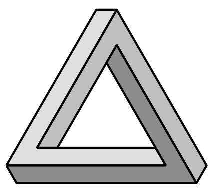
Exercice 6 (Complétude)**.** Soit (X, d) un espace métrique, et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts sur cet espace métrique. Pour une partie compacte $K \in \mathcal{K}$, on note

$$d_K : x \in X \mapsto d(x, K) := \inf\{d(x, y),\ y \in K\}.$$

On munit alors $\mathcal{K}$ de la distance $\delta : (A, B) \in \mathcal{K}^2 \mapsto \|d_A - d_B\|_\infty$.

1. Vérifier que δ est bien définie, et qu'il s'agit bien d'une distance.
   Pour $K \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$, soit $V_\varepsilon(K) = d_K^{-1}([0, \varepsilon]) \subset X$.
2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$, $\delta(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset V_\varepsilon(B)$ et $B \subset V_\varepsilon(A)$.
   On veut désormais montrer que si (X, d) est complet, alors $(\mathcal{K}, \delta)$ l'est aussi.
   On se donne une suite de Cauchy (A_n) à valeurs dans $\mathcal{K}$, et on note $A := \{x \in X,\ \exists x_k \in A_k,\ x_k \longrightarrow x\}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A \subset V_\varepsilon(A_n)$ pour n assez grand.
4. Montrer l'inclusion réciproque.
   On pourra considérer $n = k_1 < k_2 < \ldots$ tels que $\delta(A_p, A_q) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ pour $p, q \geq k_j$, et montrer que $A_n \subset V_\varepsilon(A)$.
5. Conclure.
6. En déduire que (X, d) est complet si et seulement si $(\mathcal{K}, \delta)$ l'est.

– oOo –



Triangle de Penrose