Partiel 2022/2023

Lundi 7 novembre 2022, 16h-18h
Documents et internet non-autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Exercice 1 (Topologie codénombrable)**.** Soit X un ensemble non dénombrable. On note $\mathscr{D}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire au plus dénombrable et $\mathscr{D}$ la réunion $\mathscr{D}_0 \cup \{\varnothing\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une topologie sur X.
2. Cette topologie est-elle séparée ?
3. Soit $x \in X$.
   (a) Soit $(V_i)_{i\in I}$ une base de voisinage de x. Montrer que $\bigcap_{i\in I} V_i = \{x\}$. (On dit que X est accessible, ou T1).
   (b) Montrer que x ne possède pas de base de voisinage dénombrable.
4. Montrer que tout suite convergente à valeurs dans X est stationnaire.
5. On suppose, uniquement dans cette question, que $X = \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Id} : (X, \mathscr{D}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séquentiellement continue.
   (b) Est-elle continue ?
6. Montrer que X est connexe.
7. Soit $A \subset X$ une partie quasi-compacte de X.
   (a) Montrer que A est finie.
   (b) L'espace topologique A, muni de la topologie induite, est-il compact ?

Exercice 2 (Une conséquence du théorème de Baire)**.**
Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ pour tout $x > 0$. Le but est d'établir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1. Fixons $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $A_n := \{x \geq 0 : \forall k \geq n, |f(kx)| \leq \varepsilon\}$ est fermé dans $[0, +\infty)$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que A_n contient un intervalle ouvert non-vide.
3. En déduire que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3 (Compacité et connexité de groupes de matrices)**.** On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n\times n}$ de la topologie usuelle.

1. Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \det(M) \neq 0\}$ n'est ni compact ni connexe.
2. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : MM^\top = I_n\}$ est compact.
3. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.
4. Montrer que le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$ est connexe par arcs.
   Indication : $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ssi $\exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ t.q. $M = P\mathrm{Diag}(R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r), I_{n-2r})P^\top$, $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
5. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes qui le sont par arcs.
6. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et montrer qu'elles le sont par arcs.
   Indication : si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $M = DT_{i_1,j_1}(\lambda_1)\cdots T_{i_r,j_r}(\lambda_r)$, avec $D := \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \det(M))$, $T_{i,j}(\lambda) := I_n + \lambda E_{i,j}$, et $(E_{i,j})_{i',j'} := \mathbf{1}_{(i',j')=(i,j)}$, pour des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, et des entiers $1 \leq r \leq n$, $1 \leq i_1 \neq j_1, \ldots, i_r \neq j_r \leq n$.

Exercice 4 (Groupes topologiques)**.** On dit qu'un groupe $(G, \cdot)$ est un groupe topologique, s'il est muni d'une topologie qui rend continues les applications $(x, y) \in G^2 \mapsto xy$ et $x \in G \mapsto x^{-1}$. Dans tout l'exercice, on fixe un groupe topologique G de neutre 1 et H un sous-groupe de G. On rappelle que G/H désigne l'ensemble des classes d'équivalence par l'action à gauche de H sur G i.e. $g_1 \sim g_2 \iff g_1^{-1}g_2 \in H$, et que ces classes sont de la forme gH.

1. Montrer que H est ouvert dans G si et seulement si $1 \in \mathring{H}$.

2. Montrer que si H est ouvert, alors H est fermé.
3. Montrer que G est séparé si et seulement si $\{1\}$ est fermé.
4. Montrer que si H est fermé, alors G/H est séparé.
5. On note G_0 la composante connexe de 1. Montrer que G_0 est un sous-groupe fermé et distingué. On rappelle qu'un sous-groupe est distingué si pour tous $g \in G, h \in G_0$, $ghg^{-1} \in G_0$.
6. Montrer que si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

Exercice 5 (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)**.** Dans ce problème, on va montrer que les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont conjugués à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Rappels et notations : On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

— On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}); AA^\top = \mathrm{I}_n\}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
— On dit que deux sous-groupes G et H de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont conjugués s'il existe $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), G = gHg^{-1}$.
— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une partie $A \subset E$ est dite convexe si pour tout $x, y \in A, \lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda) y \in A$.
— Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $A \subset E$, l'enveloppe convexe de A, noté $\mathrm{conv}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A.
— On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice symétriques réelles, $S_n^+(\mathbb{R})$ celles qui sont positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques définies positives.

1. On fixe un espace vectoriel normé E.
   (a) Si $A \subset E$, montrer que
   $$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i; p \in \mathbb{N}, x_1, \dots x_p \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$
   (b) Démontrer le théorème de Carathéodory : si E est de dimension n et $A \subset E$, alors
   $$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i; x_1, \dots x_{n+1} \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$$
   (c) En déduire que si E est de dimension n et si A est compacte, alors $\mathrm{conv}(A)$ est compacte.
   (d) (Bonus). On suppose désormais que E est un espace de Banach. Montrer que si $A \subset E$ est compacte, alors $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ est compacte. *On pourra montrer qu'elle est précompacte (= pour tout $\varepsilon > 0$, admet un ε-réseau.)*
2. Dans cette question, on souhaite démontrer le **théorème de Kakutani :** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace euclidien,* $K \subset E$ *une partie convexe compacte non vide et* $G \subset \mathrm{GL}(E)$ *un sous-groupe compact tel que pour tout* $g \in G, g(K) \subset K$. *Alors, il existe* $x \in K$ *tel que pour tout* $g \in G, g(x) = x$.
   (a) On définit sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ par $N(x) := \sup_{g \in G} \|g(x)\|$
      i. Montrer que N est une norme sur E.
      ii. Soit $x, y \in E$. Montrer que $N(x+y) = N(x) + N(y) \iff \exists \lambda \geq 0, x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $x \in K$ tel que $N(x) = \inf_{y \in K} N(y)$.
   (c) Conclure.
3. On fixe un sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ compact et on veut montrer qu'il est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) En appliquant le théorème de Kakutani, montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\forall g \in G, gBg^\top = B$. *Indication: on pourra considérer $A = \{BB^\top, B \in G\}$ et $K = conv(A)$.*
   (b) Démontrer que G est conjugé à un sous groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *On rappelle qu'il existe $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = B$.*

– oOo –