TD0 : Anneaux et Idéaux

11/09/2024

Sauf mention explicite du contraire, les anneaux seront toujours supposés commutatifs et unitaires. Un morphisme d'anneaux $f : A \to A'$ vérifiera toujours $f(1_A) = 1_{A'}$.

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1. Un idéal I d'un anneau A est un sous-groupe additif de A stable par multiplication par A. On dit qu'un idéal est

— *premier* si c'est un idéal propre et $\forall a, b \in A, ab \in I \Rightarrow (a \in I) \vee (b \in I)$.

— *maximal* si c'est un élément maximal de l'ensemble des idéaux propres de A pour la relation $\subseteq$.

— *de type fini* si il est engendré par un nombre fini d'élements, et *principal* si il est engendré par un seul élément.

Exercice 1 : Idéaux premiers et maximaux

1. Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que I est premier (resp. maximal) si et seulement si A/I est un anneau intègre (resp. un corps).

2. Soit A un anneau et I un idéal. Montrer que I est premier (resp. maximal) si et seulement si il est le noyau d'un morphisme (resp. d'un morphisme surjectif) $\phi : A \to B$ où B est un anneau intègre (resp. un corps).

Exercice 2 : Etude de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geqslant 2$.

1. Quels sont les éléments inversibles, les éléments nilpotents, les diviseurs de 0 de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

2. Quels sont les idéaux, les idéaux premiers, les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

3. Quels sont les morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 : Principalité de $A[X]$

Soit A un anneau. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 4 : Éléments inversibles de $A[X]$

1. Vérifier que si A est un anneau intègre, alors $A[X]$ est intègre et $A[X]^\times = A^\times$.

2. A est désormais un anneau quelconque, et $f := \sum_{i=0..n} a_i X^i$ un élément de $A[X]$.

a. Montrer que si a_0 est inversible dans A et $a_1, \ldots, a_n$ sont nilpotents, alors f est inversible dans $A[X]$.

b. Réciproquement, supposant f inversible dans $A[X]$, montrer successivement que $a_0 \in A^\times$, puis $a_n \in \mathrm{Nil}(A)$, puis $a_{n-1}, \ldots, a_1 \in \mathrm{Nil}(A)$.

c. Retrouver le résultat précédent en utilisant le fait que $\mathrm{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A.

Exercice 5 : Un exemple d'idéal premier mais non maximal

Montrer que l'idéal $(x^2 - 2)$ est premier mais pas maximal dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 6 : Image réciproque d'un idéal maximal

Soient $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et M un idéal maximal de B. Soit $N := f^{-1}(M)$. Montrer que N n'est pas nécessairement un idéal maximal de A , mais que c'est le cas si f est surjectif.

Exercice 7 : Entiers algébriques

Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) x est racine d'un polynôme non nul unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{Z}[x]$ est un groupe abélien de type fini.

En déduire que l'ensemble des entiers algébriques de $\mathbb{C}$ est un anneau.

Exercice 8 : Division euclidienne

Soit A un anneau et $A[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans A.

1. Montrer que si $D \in A[X]$ a un coefficient dominant inversible, alors pour $P \in A[X]$ il existe $R, Q \in A[X]$ tel que $P = QD + R$ et $\deg R < \deg D$. Si A est intègre, montrer que le couple P, Q est unique.

Exercice 9 : Une caractérisation de l'intégrité

Soit A un anneau distinct de $\{0\}$, de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et de $\mathbb{F}_2[X]/(X^2)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est intègre.

(ii) Tout polynôme unitaire de degré n à coefficients dans A a au plus n racines dans A.

(iii) Tout polynôme unitaire de degré 2 à coefficients dans A a au plus 2 racines dans A.

Exercice 10 : Anneaux d'entiers

Montrer que si un nombre rationnel est racine d'un polynôme non nul unitaire à coefficients entiers, alors c'est un entier.

Exercice 11 : Théorème des deux carrés

On rappelle que les anneaux des entiers de Gauss est l'anneau $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. On définit $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ par $N(z) := |z|^2$.

1.

a. Montrer que N est multiplicative, i.e. pour tous $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ on a

$$N(zz') = N(z)N(z')$$

b. Montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[i], N(z) = 1\}$.

2. Soit p un nombre premier différent de 2.

a. Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1[4]$.

b. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

(ii) $p \equiv 3[4]$

(iii) p n'est pas somme de deux carrés d'entiers naturels.

Exercice 12 : Exemples d'entiers algébriques ?

Parmi ces nombres algébriques, lesquels sont des entiers algébriques ?

$$\frac{3 + 2\sqrt{6}}{(1 - \sqrt{6})}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}, \frac{1 +^3 \sqrt{10} +^3 \sqrt{100}}{3}, \frac{1 + i}{2}, \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{n}$$

avec $a, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0, 1\}$ des entiers distincts sans facteur carré et $n \in \mathbb{N}^*$.