École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.psl.eu

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 1

Beaucoup d'exercices intéressants dans les notes de Benoist et Paulin

Exercice 1. *Points prépériodiques*

Soit $f : X \to X$ une application définie sur une ensemble X. On dit qu'un point $x \in X$ est *prépériodique* si x n'est pas périodique et s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n(x)$ est périodique.

1. Donner un exemple d'application ayant un point prépériodique. Peut-on trouver un exemple bijectif ?

2. Montrer que si X est fini, alors tout point est périodique ou prépériodique. Montrer également qu'il existe des points périodiques.

Exercice 2. *Familles d'applications transitives*

Soit X un espace topologique à base dénombrable, localement compact et sans points isolés. Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille d'applications continues et topologiquement transitives. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega_{f_i}(x) = X$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Exercice 3. *Transitivité des homéomorphismes*

Soit X un espace topologique métrisable compact sans points isolés et $T : X \longrightarrow X$ un homéomorphisme. Supposons qu'il existe un point x dont l'orbite $\mathcal{O}_T(x) = \{T^i(x),\ i \in \mathbf{Z}\}$ est dense dans X. Montrer qu'il existe $y \in X$ tel que $\mathcal{O}_T^+(y)$ est dense dans X, i.e que T est topologiquement transitive.

Exercice 4. *Ensemble non-errant*

Soit X un espace topologique séparé et $f : X \to X$ une transformation continue. On dira que $x \in X$ est *non errant* si pour tout voisinage U de x, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. On note $\Omega(f)$ l'ensemble des points non errants.

1. Montrer que si $x \in X$ est non errant et U un voisinage de x, alors pour tout $m \in \mathbf{N}$ il existe $n > m$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

2. Montrer que $\Omega(f)$ est un fermé, invariant en avant et qu'il contient tous les ensembles ω-limites (et α-limites si f est inversible) de tous les points.

3. Montrer que l'on a
$$\mathrm{Per}(f) \subset M(f) \subset R(f) \subset \Omega(f),$$
où $\mathrm{Per}(f)$ est l'ensemble des points périodiques de f, $M(f)$ est la fermeture de l'union de toutes les parties minimales pour f et $R(f)$ est la fermeture de l'ensemble des points récurrents pour f.

4. Montrer qu'il existe un système dynamique pour laquelle la dernière inclusion est stricte.

Exercice 5. *Classes de conjugaison des applications expansives du cercle*

On note $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ le tore de dimension 1 et on note $[y] = y \mod 1$ pour tout $y \in \mathbf{R}$. On dit qu'une application continue $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *relève* une application continue $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ si $[F(x)] = f([x])$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que pour tout $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ continue, il existe un relèvement de f, et que tous les relèvements diffèrent d'un entier.

Dans toute la suite, on fixe une application continue $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$.

2. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{Z}$ tel que $F(x+1) = F(x) + p$ pour tout relèvement F de f et tout $x \in \mathbf{R}$. Cet entier s'appelle le *degré* de f.

On suppose dans la suite que $p \geq 1$.

3. Montrer que f a au moins $p - 1$ points fixes.
4. En déduire que
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log \#\mathrm{Fix}(f^n)}{n} \geq \log p,$$
où $\mathrm{Fix}(f^n)$ est l'ensemble des points fixes de f^n.
5. On suppose que f possède un relèvement strictement croissant. Calculer $\#\mathrm{Fix}(f^n)$.

On suppose dans la suite que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\partial_\theta f > 1$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $H(x+1) = H(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $H \in \mathcal{E}$ on définit une application $\Phi(H) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par
$$\Phi(H)(x) = \frac{1}{p} H(F(x)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

6. Montrer que Φ préserve $\mathcal{E}$ et que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a un unique point fixe H_0.

7. Montrer que H_0 relève une application continue $h_0 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ de degré 1, et que
$$h_0 \circ f = E_p \circ h_0$$
où $E_p : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est l'application $[x] \mapsto [px]$.
8. En considérant l'application $\Psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $\Psi(H)(x) = F^{-1}(H(px))$, montrer que h_0 est un homéomorphisme de $\mathbf{T}^2$.