TD 6 : Complétude & Connexité

Exercice 1 : Echauffement

Pour chacun des espaces métriques suivants, dire s'il est complet. S'il ne l'est pas, en décrire un complété. On rappelle qu'un complété d'un espace métrique F est un espace métrique complet E muni une isométrie $i : F \to E$ telle que $i(F)$ est dense dans E.

1. $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.
2. $]0,1[$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.
3. L'espace E_0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, avec la norme $||\cdot||_\infty$.
4. L'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, avec la norme $||\cdot||_\infty$.
5. L'espace c_0 des suites $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ nulles sauf en un nombre fini de points muni de la norme uniforme $||\cdot||_\infty$.
6. L'espace l_1 des suites $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tel que $||u||_1 \coloneqq \sum_\mathbb{N} |u_n| < \infty$ muni de la norme $||\cdot||_1$.
7. L'espace c_0 muni de la norme $||\cdot||_1$.

Exercice 2 : Connexité : exemples et contre-exemples

1. Montrer que $\{0,1\}^\mathbb{N}$ est totalement discontinu i.e. ses composantes connexes sont les singletons.
2. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(0,0)\} \cup [0,1] \times \{1\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$$
est connexe mais pas connexe par arcs.
3. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(x, rx); x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$$
est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs (localement connexe par arcs : pour tout $x \in X$, tout voisinage de x contient un voisinage connexe par arcs.)

Exercice 3 : Autour du théorème de point fixe de Picard

On commence par rappeler l'énoncé du théorème :

Théorème. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ k-Lipschitzienne avec $0 < k < 1$. Alors f possède un unique point fixe.*

1. Montrer par un contre-exemple que la conclusion du théorème tombe en défaut si :
   a) l'on enlève l'hypothèse X complet
   b) on suppose simplement que pour tout $x, y \in X, d(f(x), f(y)) < d(x,y)$.

2. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ continue et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est k-contractante avec $0 < k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit X et Y deux espaces métriques avec X complet et $f : X \times Y \longrightarrow X$ une application continue et k-contractante en X. Montrer que la fonction qui à y associe l'unique point fixe de $f(\bullet, y)$ est continue.
4. **Une application.** Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $k \in]0; 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; x|f'(x)| \leq kf(x).$$

Montrer que f admet un unique point fixe. *Indication : on pourra considérer la distance $d(x, y) := |\ln(x) - \ln(y)|$ et montrer qu'elle engendre la topologie usuelle sur $\mathbb{R}_+^*$ et en fait un espace complet.*

Exercice 4 : Pot pourri de connexité

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Soit X un espace topologique tel que tout point possède un voisinage connexe par arcs. Montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.
3. Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
4. Soient A et B deux fermés d'un espace topologique tels que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes. Montrer que A et B sont connexes.

Exercice 5 : une application du théorème de Baire aux fonctions continues

On rappelle l'énoncé suivant du théorème de Baire :

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique complet et (F_n) une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide ($\mathring{F}_n = \emptyset$). Alors, $\bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide.*

1. **Un corollaire du théorème de Baire.** Soit X un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés tels que $X = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans X.
2. Soient X et Y deux espaces métriques. On suppose X **complet**. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $X \to Y$ et $f : X \to Y$ telles que pour tout $x \in X, f_n(x) \to f(x)$. On souhaite montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X. Pour $k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$, on note

$$F_{n,k} := \{x \in X; \forall p, q \geq n, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\}, \; \Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_{k,n} \text{ et } \Omega = \bigcap_k \Omega_k$$

   a) Montrer que si $x \in \Omega$, alors f est continue en x.
   b) Conclure.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est continue sur une partie dense.

Exercice 6 : Projection sur un convexe fermé

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. On rappelle que l'identité suivante, dite du parallélogramme, est vérifiée : pour tout $x, y \in H$,

$$||x||^2 + ||y||^2 = \frac{1}{2}\left(||x-y||^2 + ||x+y||^2\right)$$

1. **Projection sur un convexe fermé.** Soit C une partie convexe fermé de H. Soit $x \in H$.
   a) Montrer qu'il existe un unique point, noté $p_C(x)$, tel que $d(x, C) = ||x - p_C(x)||$.
   b) Montrer que $p_C(x)$ est de manière équivalente, l'unique point $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$, $\langle x - z, y - z \rangle \leq 0$.
2. **Applications fondamentales.**
   a) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que $F \oplus F^{\perp} = H$.
   b) Soit G un sous-espace vectoriel de H. Montrer que $\overline{G} = H \iff G^{\perp} = \{0\}$.
   c) **Théorème de représentation de Riesz.** On rappelle que H^* est l'espace des formes linéaires continues sur H, muni de la norma $||l||_{H^*} = \sup_{||x||=1} |l(x)|$. Pour $x \in H$, on note $l_x : y \in H \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \in H \mapsto l_x \in H^*$ est une isométrie surjective. En particulier, H et H^* sont isométriques.

Pour aller plus loin

Exercice 7 : Fonctions continues nulle part dérivables

On notera $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. **Un exemple ...** Montrer que la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(2^n x)}{2^n}$ est continue et nulle part dérivable, où $d(x)$ désigne la distance de x à l'entier de plus proche.
2. **... loin d'être exceptionnel !** En étudiant les ensembles

$$F_n \coloneqq \{f \in E; \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq n|x-y|\}$$

   montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans E.

Exercice 8 : Le tipi de Cantor

On rappelle que l'ensemble triadique de Cantor est obtenu comme l'intersection d'une famille dénombrable d'intervalles $K = \bigcap_{m \in M} I_m$ où M est dénombrable. On note alors $\mathcal{B} = \bigcup_{m \in M} \partial I_m$. On note $p = (1/2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \in K$, on définit la partie

$$D(z) = \begin{cases} \{(x,y) \in [(z,0), p]; y \in \mathbb{Q}\} \text{ si } z \in \mathcal{B} \\ \{(x,y) \in [(z,0), p]; y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Enfin, on appelle Tipi de Cantor (ou éventail de Knaster-Kuratowski) la partie $X = \bigcup_{z \in K} D(z)$, que l'on munit de la topologie induite.

1. Montrer que $X \setminus \{p\}$ est totalement discontinu.
2. (**difficile**) montrer que X est connexe.

Exercice 9 : Interversion surprenante !

On va démontrer le théorème de Sunyer i Balaguer :
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale. Autrement dit,

$$\forall x, \exists n, f^{(n)}(x) = 0 \iff \exists n, \forall x, f^{(n)}(x) = 0$$

1. On va commencer par un cas facile : on suppose que f est analytique i.e. f est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points.
   a) Montrer que s'il existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non vide tel que $f_{|I} = 0$ alors $f = 0$.
   b) En considérant les ensembles $F_n = \{x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0\}$, montrer le résultat.
2. On démontre dans cette question la version générale du théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. On note

$$Y = \{x \in \mathbb{R};\ \exists a < x < b, f \text{ est polynomiale sur }]a, b[\} \text{ et } X = \mathbb{R} \setminus Y$$

   a) Montrer que si $X = \emptyset$, alors f est polynomiale.
   Dans la suite de la question, on raisonne par l'absurde et on suppose que $X \neq \emptyset$.
   b) Montrer que X est complet.
   c) Montrer que X est sans point isolé.
   d) On note $F_n = \{x \in X;\ f^{(n)}(x) = 0\}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a < b \in \mathbb{R}$ tels que$X \cap]a, b[\neq \emptyset$ et pour tout $n \geq n_0$, $X \cap]a, b[\subset F_n$.
   e) Montrer que $]a, b[\subset F_{n_0}$ puis conclure.

Exercice 10 : Théorème d'Alexandroff-Mazurkiewicz (Partiel 2016)

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit A une partie de X. On va montrer l'équivalence suivante :

(1) Il existe une distance d' sur A qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (A, d') est complet.

(2) A est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

1. Quelques préliminaires.
   a) Montrer qu'un fermé de X peut s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts.
   b) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ où Y est un espace topologique, est une intersection dénombrable d'ouverts.
2. On va traiter le sens direct.
   a) Soit d' une distance complète sur A, induisant la même topologie que la distance d. Montrer qu'on peut supposer d' bornée et A dense dans X.
   b) Pour z dans X, on pose

$$f(z) = \sup \left\{ \limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d \right\}.$$

Montrer que f est bien définie et à valeurs réelles. Montrer que f est continue exactement en les points de A.

c) Conclure le sens (1) $\implies$ (2).

3. Passons au sens réciproque.

a) Soit U un ouvert de X. On considère d', définie sur U, par

$$d'(x,x') = d(x,x') + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right|,$$

où $f(x) = d(x, X - U)$. Montrer que d' est une distance sur U, induisant la même topologie que d. Montrer que (U, d') est un espace métrique complet.

b) Utiliser la question précédente pour construire une métrique complète sur $A = \cap_n U_n$, où $(U_n)_n$ est une famille dénombrable d'ouverts de X.