Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

TD de Logique, feuille 1

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande d'y réfléchir à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

Définition
Soit A un anneau commutatif unitaire. Un *idéal* de A est un ensemble $I \subseteq A$ tel que I est un sous-groupe de $(A, +)$ et, pour tout $x \in A$, on a $x \cdot I \subseteq I$. Un idéal I est *premier* s'il n'est pas égal à A et si, pour tous $a, b \in A$ tels que $a \cdot b \in I$, on a $a \in I$ ou $b \in I$. On note $Spec\, A$ l'ensemble des idéaux premiers de A.
Un idéal est *maximal* s'il est strictement inclus dans A, et maximal (pour l'inclusion) pour cette propriété.
Si a, b sont dans A, on dit que a divise b, ce qu'on note $a \mid b$, lorsqu'il existe $c \in A$ tel que $ac = b$.

Fait : Tout idéal strict d'un anneau commutatif unitaire est contenu dans un idéal maximal, et tout idéal maximal est premier.

Pour la suite, tous les anneaux considérés seront unitaires, sauf mention explicite du contraire. Un anneau de Boole est un anneau dans lequel tous les éléments sont égaux à leur carré.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Relation d'ordre dans un anneau de Boole) **:**
Soient $\mathbb{A}$ un anneau de Boole, et a, b, c dans $\mathbb{A}$. Soit $\leqslant$ la relation où $x \leqslant y$ si et seulement si $xy = x$.

1. Montrer que $x + x = 0$ pour tout x dans $\mathbb{A}$, puis que $\mathbb{A}$ est commutatif.
2. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre large (transitive, réflexive, antisymétrique) sur $\mathbb{A}$.
3. Montrer que $a \leqslant b$ si et seulement si $1 + a \geqslant 1 + b$.
4. Montrer que $c \leqslant ab$ si et seulement si $c \leqslant a$ et $c \leqslant b$. En déduire que $a \wedge b = ab$.
5. Montrer que $c \geqslant a + b + ab$ si et seulement si $c \geqslant a$ et $c \geqslant b$. En déduire que $a \vee b = a + b + ab$.
6. Montrer que $a \wedge b \leqslant c$ si et seulement si $a \leqslant (1 + b) \vee c$. On pourra alors noter $b \to c = (1 + b) \vee c$.
7. Montrer que $a \wedge (1 + a) = 0$ et $a \vee (1 + a) = 1$. On notera donc $\neg a = 1 + a$.
8. Montrer les égalités suivantes : $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.[1]

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Un peu d'algèbre commutative dans les anneaux de Boole) **:**
Attention, les résultats démontrés dans cet exercice sont faux dans des anneaux quelconques !
Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Soit $a \in \mathbb{A}$.

1. Montrer que, pour $b \in \mathbb{A}$, on a $b \mid a$ si et seulement si $a \cdot b = a$ (on pourra calculer $ab - a$).
2. Montrer que l'idéal $(1 + a)$ est égal à l'ensemble $\{x \in \mathbb{A} \mid ax = 0\}$.
3. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{A}$. Montrer que $a \notin \mathfrak{p}$ si et seulement si $1 + a \in \mathfrak{p}$.
4. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbb{A}$, et $a, b \in \mathbb{A}$. Montrer que $a + b \notin \mathfrak{p}$ si et seulement si exactement l'un des éléments a, b n'est pas dans $\mathfrak{p}$.
5. Soient $\mathfrak{p} \subseteq I$ des idéaux stricts de $\mathbb{A}$, où $\mathfrak{p}$ est premier. Montrer que $\mathfrak{p} = I$. Autrement dit, les idéaux premiers sont maximaux.
6. On suppose que l'élément a appartient à tous les idéaux premiers de $\mathbb{A}$. Montrer que $a = 0$.

   On pourra montrer que l'élément $1 + a$ n'appartient à aucun idéal premier.

[1] On a donc montré que $(\mathbb{A}, \leqslant)$ est une algèbre de Boole.

Exercice 3 (Spectre d'un anneau de Boole, dualité) **:**
Cet exercice donne une autre présentation de l'espace de Stone associé à un anneau de Boole.
Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. On note $Spec\,\mathbb{A}$ l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbb{A}$. Pour $a \in \mathbb{A}$, soit $D(a) = \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\}$, et $V(a) = \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \mid a \in \mathfrak{p}\}$. Plus généralement, si $B \subseteq \mathbb{A}$, soit $V(B) = \bigcap_{a \in B} V(a)$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{A}$. Montrer que $D(ab) = D(a) \cap D(b)$, que $V(ab) = V(a) \cup V(b)$, et que $D(a) = V(1 + a)$.
2. Vérifier que la collection des $D(a)$, pour $a \in \mathbb{A}$, forme une base d'ouverts pour une topologie. On appelle cette topologie sur $Spec\,\mathbb{A}$ la *topologie de Zariski*. L'espace obtenu est appelé le *spectre* de $\mathbb{A}$, et dans notre cas, c'est *l'espace de Stone* associé à l'anneau de Boole $\mathbb{A}$.
3. Montrer que $Spec\,\mathbb{A}$ est séparé, et que les $D(a)$ sont ouverts-fermés.
4. Soit $B \subseteq \mathbb{A}$, et I l'idéal engendré par B. Montrer que $V(B) = \varnothing$ si et seulement si $1 \in I$. En déduire que l'espace topologique $Spec\,\mathbb{A}$ est compact, et a une base d'ouverts constituée d'ouverts-fermés. Un espace ayant ces propriétés est appelé *espace de Stone*, ou espace *profini*.
5. Soit $X \subseteq Spec\,\mathbb{A}$ un ouvert-fermé. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{A}$ tel que $D(a) = X$.
6. Soit $OF(Spec\,\mathbb{A})$ l'ensemble des ouverts-fermés de $Spec\,\mathbb{A}$. Montrer que la fonction $a \mapsto D(a)$ définit un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{A} \simeq (OF(Spec\,\mathbb{A}), \Delta, \cap)$, où Δ désigne la différence symétrique. On pourra utiliser la question 5 de l'exercice 2 pour calculer $D(a + b)$.

Exercice 4 (Mesures) **:**
Soit S un espace topologique profini. Soit $A \leqslant \mathcal{P}(X)$ l'algèbre de Boole des ouverts-fermés de S. Soit $B \geqslant A$ la tribu des boréliens de S, i.e. la tribu engendrée par les ouverts de S. Soit $\mu : A \to [0, 1]$ une mesure de probabilité finiment additive, i.e. telle que $\mu(S) = 1$, et $\mu(U \vee V) = \mu(U) + \mu(V)$ pour tous $U, V \in A$ tels que $U \wedge V = \varnothing$. On veut montrer qu'on peut étendre μ en une mesure de probabilité, au sens usuel, définie sur la tribu B.

1. Si $F \subseteq S$ est fermé, on définit $\mu(F) := \inf\limits_{O \in A,\, F \subseteq O} \mu(O)$. De même, si $U \subseteq S$ est ouvert, on définit $\mu(U) := \sup\limits_{O \in A,\, O \subseteq U} \mu(O)$. Vérifier que ces définitions sont cohérentes.
2. Soit $X \in B$ ouvert ou fermé, et $Y \in B$ ouvert ou fermé.
   a) On suppose $X \leqslant Y$. Montrer $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$.
   b) On suppose que X et Y sont ouverts. Montrer que $\mu(X \vee Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$.
   c) On suppose que $X \geqslant Y$, X est ouvert, et Y fermé. Montrer que $\mu(X) = \mu(X \setminus Y) + \mu(Y)$.
3. Montrer que, si F_1, F_2 sont deux fermés disjoints, alors $\mu(F_1 \vee F_2) = \mu(F_1) + \mu(F_2)$.
4. Montrer que, si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts de S, alors $\mu(\bigcup\limits_n U_n) \leqslant \sum\limits_n \mu(U_n)$.
5. Montrer que, si $X \in B$ est ouvert ou fermé, on a
$$\sup_{F \in B,\, F \subseteq X,\, F \text{ fermé}} \mu(F) = \inf_{U \in B,\, X \subseteq U,\, U \text{ ouvert}} \mu(U) \tag{1}$$
6. Soit $B_{reg} \subseteq B$ la collection des boréliens $X \in B$ qui vérifient l'égalité 1. Montrer que B_{reg} est une sous-tribu de B. En déduire que $B_{reg} = B$.
7. On définit $\mu(X) := \sup\limits_{F \in B,\, F \subseteq X,\, F \text{ fermé}} \mu(F) = \inf\limits_{U \in B,\, X \subseteq U,\, U \text{ ouvert}} \mu(U)$, pour tout $X \in B$. Montrer que μ est alors une mesure de probabilité σ-additive.