Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2023-2024

Corrigé du TD de Logique, feuille 4

Exercice 1 (Extensions élémentaires) **:**

1. Vrai. Soit $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ une formule et $a_1,\dots,a_n$ des éléments de M. En utilisant les deux inclusions élémentaires, on a
$$M \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n] \iff N \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n] \iff O \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n].$$
Donc $M \preccurlyeq O$.

2. Vrai. L'argument est similaire.

3. Faux. Voici un contre-exemple. On prend $L = \{s\}$ où s est un symbole de fonction unaire. Soit $M = \omega\times\omega$ (le produit cartésien). Soit $M = (M, s)$ la L-structure d'univers M où s est interprété par $s((n,m)) = (n, m+1)$ pour $n, m < \omega$.

   On pose $N = (N, s)$ où $N = (\omega+1)\times\omega$ et à nouveau $s(n,m) = (n, m+1)$ pour $n < \omega+1$ et $m < \omega$. Et enfin $O = (O, s)$ où $O = \omega\times\omega \cup \{\omega\}\times(\{-1\}\cup\omega)$ et s est interprété comme pour M et N. La structrue O est donc obtenue à partir de N en ajoutant un seul élément : $(\omega,-1)$ tel que $s((\omega,-1)) = (\omega, 0)$. On a des inclusions naturelles $M \subset N \subset O$.

   Remarquer que ces trois structures sont isomorphes.

   On admet que $M \preccurlyeq N$ et $M \preccurlyeq O$. (Pour le prouver, il faudrait montrer un résultat d'élimination des quantificateurs dans un langage plus grand. Remarquer par contre qu'il y a un isomorphisme de N sur O laissant M invariant point par point, donc il suffit de montrer qu'une des deux inclusions est élémentaire).

   On montre que $N \not\preccurlyeq O$. Soit $\varphi(x)$ la formule $(\exists y)s(y) = x$. Alors $O \vDash \varphi[(\omega,0)]$, mais $N \vDash \neg\varphi[(\omega,0)]$.

Exercice 2 (Ensembles définissables) **:**

1. Il s'agit simplement de vérifier que la conjonction (resp. disjonction, resp. négation) de formules se traduit par l'intersection (resp. l'union, resp. le complémentaire) des ensembles définissables.

2. C'est une conséquence immédiate de la définition de ces algèbres.

3. a) On a $M \vDash \forall x\, \varphi(x, a_1) \leftrightarrow \psi(x, a_2)$. Donc, comme f est élémentaire, on a $N \vDash \forall x \varphi(x, f(a_1)) \leftrightarrow \psi(x, f(a_2))$.

   b) Similaire au point précédent : si $v \in M^n$, on a $M \vDash \varphi(v, a)$ ssi $N \vDash \varphi(f(v), f(a))$.

   c) Le a) nous permet de définir une fonction $\overline{f} : Def_C(M^n) \to Def_{f(C)}(N^n)$, car le $X(N)$ ainsi construit ne dépend pas du choix de la définition. On vérifie facilement que cette fonction est un morphisme d'algèbres de Boole. De plus, elle est injective, par Tarski-Vaught. Enfin, on montre facilement qu'elle est surjective.

      Une autre preuve consiste à construire explicitement la réciproque de $\overline{f}$, en tirant en arrière par f les ensembles $f(C)$-définissables dans N^n.

4. On utilise le fait que tout automorphisme est un plongement élémentaire.

   a) Il s'agit d'appliquer la question 3)a).

   b) Soit $\varphi(x, a)$ une définition de X. Par définition, on a, pour tout $m \in X(M)$, $M \vDash \varphi(m, a)$. Comme σ est élémentaire, on en déduit $M \vDash \varphi(\sigma(m), \sigma(a)$. On conclut en utilisant le fait que σ fixe le uplet a.

5. On peut démontrer le fait suivant : pour toute partie finie $C \subset \mathbb{Q}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ et σ un automorphisme de $(\mathbb{Q}, <)$ tel que $\sigma(a) = a$ pour tout $a \in C$, et $\sigma(n) = n + \frac{1}{2}$. L'automorphisme σ peut être choisi affine par morceaux.

   Alors, si $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$-définissable, il existe une partie finie $C \subset \mathbb{Q}$ telle que $\mathbb{Z}$ est A-définissable. Le fait rentre alors en contradiction avec 3)b).

6. Soit $a_1, \cdots, a_n$ une famille finie de vecteurs de V. Soit A le sous-espace engendré par les a_i. Supposons par l'absurde que W est A-définissable. Soit $W_1 \leqslant W$ un sous-espace tel que $A + W = A \oplus W_1$. Enfin, soit $W_2 \leqslant V$ tel que $V = A \oplus W_1 \oplus W_2$. En particulier, on a $W_2 \cap (A + W) = (0)$.

   On constate que $W_1 \neq (0)$, car $A + W$ est de dimension infinie, et A est de dimension finie. Le même argument d'algèbre linéaire, appliqué dans le quotient V/W, nous donne que $A + W$ est strictement inclus dans V. Donc $W_2 \neq (0)$.

   Alors, en choisissant une base de V adaptée à la somme directe $A \oplus W_1 \oplus W_2$, on construit un automorphisme σ de V qui fixe tous les éléments de A, et envoie un certain vecteur $w_1 \in W_1$ sur $w_1 + w_2$, où $w_2 \in W_2 \setminus (0)$. En particulier, $\sigma(W)$ n'est pas inclus dans W. C'est une contradiction.

   Preuve alternative : On connaît une base explicite $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de V. Pour A finie incluse dans V, on trouve $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $a \in A$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $|i| > N$, on a $e_i^*(a) = 0$. On peut alors définir un automorphisme $\sigma \in Aut(V/A)$, par $\sigma(e_i) = e_i$ si $|i| \leqslant N$, et $\sigma(e_i) = e_{-i}$ sinon.

Exercice 3 (Préservation) **:**

1. Voir le cours sur les diagrammes.

2. Soit $M \subseteq N \vDash T$ et $\varphi = \forall x_1 \forall x_n\ \psi[x_1, \ldots, x_n]$ universelle (où ψ est sans quantificateurs) conséquence de T. Comme $N \vDash T$, on a $N \vDash \varphi$. Pour tout $c_1, \ldots, c_n \in M$, on a alors $N \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ et donc $M \vDash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$.

   Réciproquement soit $M \vDash T_\forall$ et soit $T' = \Delta(M) \cup T$. On cerche un modèle de T', et on raisonne par compacité. Soit $T_0 \subseteq T'$ fini. Comme $\Delta(M)$ est clos par conjonction finie, on peut supposer $T_0 = \{\varphi[c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}]\} \cup T$ où les c_{m_i} n'apparaissent pas dans T et $M \vDash \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Si T_0 était inconsistante, on aurait $T \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$. Il s'agit d'un résultat général, qu'on peut démontrer en déroulant les définitions.

   Alors, comme $M \vDash T_\forall$, $M \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_k\ \neg\varphi[x_1, \ldots, x_k]$ et donc $M \vDash \neg\varphi[m_1, \ldots, m_k]$, ce qui est absurde.

   Un modèle de T' étant exactement un modèle de T dans lequel se plonge M, on a bien montré le résultat voulu.

3. Comme $T_\forall$ est universelle, la question précédente entraîne que $T_\forall$ et donc T qui lui est équivalente est stable par sous-structure.

   Réciproquement, comme $T_\forall$ est conséquence de T par définition, il suffit de montrer que T est conséquence de $T_\forall$. Soit N un modèle de $T_\forall$. Par la question précédente N se plonge dans $M \vDash T$. Mais comme T est stable par sous-structure, $N \vDash T$.

4. L'énoncé $\neg\varphi$ est préservé par sous-structure, en effet si $N \vDash \neg\varphi$ et $M \subseteq N$ alors si on a pas $M \vDash \neg\varphi$, il s'en suit que $M \vDash \varphi$ et donc, par hypothèse sur φ, $N \vDash \varphi$, ce qui est absurde. Par la question précédente (et le théorème de compacité), il existe une formule universelle ψ qui soit équivalente à $\neg\varphi$ et donc $\neg\psi$ qui est existentielle est équivalente à φ.

   On pourrait aussi démontrer l'équivalent de la question précédente (i.e. avec une théorie plutôt qu'une formule) dans le cas existentiel, mais ce n'est pas une conséquence immédiate de la question précédente et nécessite sa propre démonstration (utilisant le même genre de techniques que Lowenheim-Skolem descendant).

Exercice 4 (Non équivalence élémentaire) **:**

1. Il s'agit, par exemple, de calculer le cardinal du groupe quotient $\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n$, qui est 2^n, et de constater qu'on peut exprimer ce cardinal par une formule du premier ordre :

   $\exists x_1, ..., \exists x_{2^n}, [\forall y \bigwedge_{i \neq j} (y + y \neq x_i - x_j)] \wedge [\forall z \, \exists t \bigvee_i z = x_i + t + t]$.

2. On constate que, dans les deux groupes $(B_2(\mathbb{R}), \cdot)$ et $(B_2(\mathbb{C}), \cdot)$, la matrice $-I_2$ est l'unique élément du centre qui est d'ordre 2. Or, cet élément n'a pas de racine carrée dans $(B_2(\mathbb{R}), \cdot)$, mais en a une dans $(B_2(\mathbb{C}), \cdot)$. D'où le résultat : une formule qui distingue les deux groupes est (la transcription formelle de) celle qui exprime que "l'unique élément du centre qui est d'ordre 2 a une racine carrée".

   On peut aussi utiliser le fait qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 3 dans $(B_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

Exercice 5 (Classes axiomatisables) **:**
Lemme Soit T une $\mathcal{L}$-théorie telle que toute partie finie de T a un modèle dans $\mathcal{C}$. Alors, T a un modèle qui est un ultraproduit de structures appartenant à $\mathcal{C}$.

1. Il s'agit de constater que la preuve du théorème de compacité vue en cours donne en fait une démonstration de ce lemme.

2. Soit T la théorie de S, i.e. la collection des énoncés vrais dans S. On veut appliquer le lemme à T. Pour tout énoncé $\varphi \in T$, si $\varphi \in T_0$, alors toute structure dans $\mathcal{C}$ est modèle de φ, et sinon, par définition de T_0, il existe une structure dans $\mathcal{C}$ qui est modèle de φ.

   Donc, par le lemme, il existe un ultraproduit de structures de $\mathcal{C}$ qui est modèle de T. Or, T est complète, i.e. pour tout φ, on a $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$. Alors, cet ultraproduit ayant la même théorie que S, il lui est élémentairement équivalent.

3. Si $\mathcal{C}$ est close par équivalence élémentaire et ultraproduit, on vient de démontrer que T_0 est alors une axiomatisation de $\mathcal{C}$.

   Réciproquement, toute classe axiomatisable est close par équivalence élémentaire et ultraproduits.