Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

TD de Logique, feuille 4

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande d'y réfléchir à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Extensions élémentaires) **:**
Soient $M \subseteq N \subseteq O$. Lesquelles de ces affirmations sont vraies ? (pour la négative, on pourra se contenter, pour l'instant, d'arguments vagues)

1. Si $M \preccurlyeq N$ et $N \preccurlyeq O$, alors $M \preccurlyeq O$.
2. Si $M \preccurlyeq O$ et $N \preccurlyeq O$, alors $M \preccurlyeq N$.
3. Si $M \preccurlyeq O$ et $M \preccurlyeq N$, alors $N \preccurlyeq O$.

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Ensembles définissables) **:**
Soient $\mathcal{L}$ un langage, M une $\mathcal{L}$-structure, et $C \subseteq M$. Pour $n \geqslant 1$, un *sous-ensemble C-définissable de M^n* est une partie $X \subseteq M^n$, telle qu'il existe $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}$ et $a \in C^y$, avec $|x| = n$ tels que $X = \{v \in M^n \,|\, M \vDash \varphi(v, a)\}$. On parle aussi de *partie C-définissable de M^n*, et on dira que $\varphi(x, a)$ est *une* définition de X.

1. Montrer que, pour tout n, la collection des parties C-définissables de M^n est une sous-algèbre de Boole de l'algèbre des parties $(P(M^n), \wedge, \vee)$. On notera cette algèbre $Def_C(M^n)$.
2. Soit $B \subseteq M$ tel que $C \subseteq B$. Pour tout n, vérifier qu'on a une inclusion entre algèbres de Boole $Def_C(M^n) \subseteq Def_B(M^n)$.
3. Soit $f : M \to N$ un plongement élémentaire entre $\mathcal{L}$-structures. Soit $n \geqslant 1$.
   a) Soit $X \in Def_C(M^n)$. Soient $\varphi(x, a_1), \psi(x, a_2)$ des définitions de X, où $|x| = n$. Montrer que $\{v \in N^n \,|\, N \vDash \varphi(v, f(a_1))\} = \{v \in N^n \,|\, N \vDash \psi(v, f(a_2))\}$. On notera cet ensemble $X(N)$. On notera aussi $X(M) = \{v \in M^n \,|\, M \vDash \varphi(v, a_1)\}$.
   b) Montrer que $f(X(M)) \subseteq X(N)$ pour tout ensemble M-définissable X.
   c) Définir un isomorphisme d'algèbres de Boole $\overline{f} : Def_C(M^n) \to Def_{f(C)}(N^n)$.
4. Soit $Aut(M)$ le groupe des automorphismes de M. Plus généralement, pour tout $C \subseteq M$, soit $Aut(M/C)$ le groupe des automorphismes de M qui fixent tous les éléments de C. Soit $n \geqslant 1$ et $C \subseteq M$.
   a) Montrer que le groupe $Aut(M)$ agit sur l'algèbre de Boole $Def_M(M^n)$.
   b) Soit $X \in Def_C(M^n)$. Déduire d'une question précédente que, pour tout $\sigma \in Aut(M/C)$, pour tout élément/uplet $m \in X(M)$, on a $\sigma(m) \in X(M)$.
5. On considère la structure $(\mathbb{Q}, <)$. Montrer que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ n'est pas une partie $\mathbb{Q}$-définissable. On pourra chercher à construire des automorphismes de $(\mathbb{Q}, <)$.
6. Soit $(V, 0, +, -)$ le groupe $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soit W le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$. Est-il V-définissable ?

Exercice 3 (Préservation) **:**
Si M est une $\mathcal{L}$-structure, on note $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup M$, et M_M la $\mathcal{L}_M$-structure où chaque constante $m \in M$ est interprétée par elle-même. On note également $\Delta(M) = \{\varphi : \mathcal{L}_M\text{-énoncé sans quantificateurs} \,|\, M_M \vDash \varphi\}$.
Soit T une $\mathcal{L}$-théorie, on note $T_\forall = \{\varphi : \mathcal{L} \text{ énoncé universel} \,|\, T \vDash \varphi\}$.

1. Soient M, N des $\mathcal{L}$-structures, et N_M un enrichissement de N en une $\mathcal{L}_M$-structure. Soit $f : M \to N$ la fonction $m \mapsto m^{N_M}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) La fonction f est un plongement de $\mathcal{L}_M$-structures.

b) La fonction f est un plongement de $\mathcal{L}$-structures.

c) La structure N_M est un modèle de $\Delta(M)$.

2. Montrer qu'une $\mathcal{L}$-structure M est modèle de $T_\forall$ si et seulement s'il existe N modèle de T telle que M se plonge dans N. Autrement dit, *les modèles de $T_\forall$ sont, à isomorphisme près, les sous-structures des modèles de T.*

3. En déduire que si T est stable par sous-structure (i.e. si $M \models T$ et N sous-structure de M, alors $N \models T$), alors T est équivalente à $T_\forall$.

4. Soit φ un $\mathcal{L}$-énoncé, montrer que si φ est préservée par sur-structure (i.e. $M \models \varphi$ et M sous-structure de N, alors $N \models \varphi$) alors φ est équivalente à un énoncé existentiel.

Exercice 4 (Non équivalence élémentaire) **:**

1. $(*)$ Montrer que si $m \neq n$, alors les groupes $(\mathbb{Z}^m, 0, +, -)$ et $(\mathbb{Z}^n, 0, +, -)$ ne sont pas élémentairement équivalents, i.e. $Th(\mathbb{Z}^m, 0, +, -) \neq Th(\mathbb{Z}^n, 0, +, -)$. Indication : on pourra considérer les quotients $\mathbb{Z}^m / 2\,\mathbb{Z}^m$ et $\mathbb{Z}^n / 2\,\mathbb{Z}^n$.

2. Si K est un corps, on note $B_n(K) \leqslant GL_n(K)$ le sous-groupe constitué des matrices triangulaires supérieures inversibles. Montrer que $(B_2(\mathbb{R}), \cdot)$ et $(B_2(\mathbb{C}), \cdot)$ ne sont pas élémentairement équivalents.

Exercice 5 (Classes axiomatisables) **:**
L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'une classe de structures est axiomatisable si et seulement si elle est close par équivalence élémentaire et ultraproduits. On fixe un langage $\mathcal{L}$, et $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures.

Lemme Soit T une $\mathcal{L}$-théorie telle que toute partie finie de T a un modèle dans $\mathcal{C}$. Alors, T a un modèle qui est un ultraproduit de structures appartenant à $\mathcal{C}$.

1. Démontrer le lemme.

2. Soit T_0 la collection des énoncés vérifiés par toutes les structures dans $\mathcal{C}$. Soit S un modèle de T_0. Montrer que S est élémentairement équivalente à un ultraproduit de structures de $\mathcal{C}$.

3. Conclure.