# Examen 2022/2023

Lundi 16 janvier 2023, 14h-17h, documents et internet non-autorisés
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas, il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Ce sujet comporte quatre parties : exercice 1, problème 1, exercice 2, exercice 3, traitables indépendamment.
Le résultat du problème 1 est explicitement admis dans l'exercice 2.
Le résultat de la question 1 de l'exercice 1 et le résultat de l'exercice 2 sont explicitement admis dans l'exercice 3.

**Exercice 1** (Théorème d'existence de Peano via schéma d'Euler et théorème d'Arzelà–Ascoli)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant : *Si $f : I\times O\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est continue, $I\times O$ ouvert, et $(t_0,x_0)\in I\times O$, alors l'EDO $x'(t)=f(t,x(t))$ avec $x(t_0)=x_0$, admet une solution locale.* D'après le théorème fondamental du calcul, cela revient à trouver $x\in\mathscr{C}(J,O)$, $t_0\in J\subset I$, et $x_t=x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s$ pour tout $t\in J$.

1. Montrer qu'il existe $T>0, r_*>0$ t.q. $C:=[t_0-T,t_0+T]\times\overline{B}(x_0,r_*)\subset I\times O$ et $M:=\sup_{(t,x)\in C}\|f(t,x)\|<\infty$.
2. Montrer que si $x$ est solution sur $[t_0-T_*,t_0+T_*]$, $T_*<\min(T,\frac{r_*}{M})$, alors $(t,x(t))\in C$ pour tout $t\in[t_0-T_*,t_0+T_*]$.
3. Pour tout entier $n\geq 1$, soit $(t_i^{(n)})_{0\leq i\leq n}$ la subdivision de $[t_0,t_0+T_*]$ telle que $t_0^{(n)}:=t_0<\cdots<t_n^{(n)}:=t_0+T_*$ et $t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}=h_n:=\frac{T_*}{n}$ pour tout $i$. On définit la fonction continue affine par morceaux $x^{(n)}:[t_0,t_0+T_*]\to\mathbb{R}^d$, par récurrence sur $i$ en posant (on parle de *schéma d'Euler explicite*)
$$\begin{cases} x^{(n)}(t_0) & := x_0 \\ x^{(n)}(t) & := x^{(n)}(t_i^{(n)})+(t-t_i^{(n)})f(t_i^{(n)},x^{(n)}(t_i^{(n)})) \quad \text{pour tout } t\in[t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}]\end{cases}$$
Montrer que $x^{(n)}(t)\in\overline{B}(x_0,r_*)$ pour tout $t\in[t_0,t_0+T_*]$ et $\|x^{(n)}\|_{\mathrm{Lip}}\leq M$.
4. Déduire de la question précédente que $x^{(n)}$ est continue uniformément en $t$ et $n$ (équicontinuité uniforme).
5. Déduire des deux question précédentes qu'il existe une sous-suite $(x^{(n_k)})$ qui converge uniformément vers une fonction $x_*:[t_0,t_0+T_*]\to\overline{B}(x_0,r)$ continue et vérifiant $x_*(t_0)=x_0$.
6. Considérons le module de continuité de $f$ sur $C$ défini pour $u>0$ assez petit par
$$\omega_f(u):=\sup\{\|f(s_1,y_1)-f(s_2,y_2)\|:|s_1-s_2|+\|y_1-y_2\|\leq u\}.$$
Montrer que $\lim_{u\to 0}\omega_f(u)=0$.
7. Montrer que tout tout $t\in\bigcup_i(t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)})$, $\|(x^{(n)})'(t)-f(t,x^{(n)}(t))\|\leq\omega_f(h_n+h_nM)$.
8. En déduire que $x_*$ vérifie la formulation intégrale de l'EDO sur $[t_0,t_0+T_*]$.
9. En déduire l'existence d'une solution locale.

**Problème 1** (Théorème de point fixe de Brouwer)**.**
Le but de ce problème est de démontrer le théorème de point fixe de Brouwer : *si $C$ est une partie convexe, compacte, non-vide dans $\mathbb{R}^n$ et $f:C\to C$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.*
Dans ce problème, on note $B_n:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<1\}$, $\overline{B}_n:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leq 1\}$, $S_n:=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$.
On dit que $f:A\to A'\subset A$ est une rétraction de $A\to A'$ lorsque $f(x)=x$ pour tout $x\in A'$.

1. Démontrer le théorème de Brouwer en dimension $n=1$ lorsque $C=[0,1]$.
2. Montrer que si $f:\overline{B}_n\to\overline{B}_n$ est continue et n'a pas de point fixe alors $\inf_{x\in\overline{B}_n}\|f(x)-x\|>0$.
3. Montrer que si $f:\overline{B}_n\to\overline{B}_n$ est continue et sans point fixe alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme à $n$ variables $P_\varepsilon$ tel que $P_\varepsilon(\overline{B}_n)\subset\overline{B}_n$, sans point fixe sur $\overline{B}_n$, tel que $\|f-P_\varepsilon\|_\infty\leq\varepsilon$ sur $\overline{B}_n$.
4. Supposons que $f:\overline{B}_n\to\overline{B}_n$ est continue et sans point fixe. Montrer que pour tout $x\in\overline{B}_n$, la demi-droite $\Delta_x:=\{f(x)+\lambda(x-f(x)):\lambda>0\}$ coupe $S_n$ en un unique point
$$f(x)+\frac{\sqrt{a^2+1-\|f(x)\|^2}-a}{\|x-f(x)\|}(x-f(x)) \quad \text{où} \quad a:=\frac{\langle f(x),x-f(x)\rangle}{\|x-f(x)\|}.$$
En déduire qu'il existe une rétraction $g:\overline{B}_n\to S_n$ de même régularité que $f$.

5. Déduire des deux questions précédentes que si $f : \overline{B}_n \to \overline{B}_n$ est continue et sans point fixe, alors on peut construire une rétraction $g : \overline{B}_n \to S_n$ $\mathscr{C}^0(\overline{B}_n) \cap \mathscr{C}^1(B_n)$ avec $Dg$ prolongeable par continuité à $\overline{B}_n$.
   Dans la suite du problème, on considère une telle fonction $g$.
6. Soit $g_t(x) := (1-t)x + tg(x)$. Montrer que $c := \sup_{x\in B_n} \|Dg(x)\| < \infty$ et que pour tout $t \in (0, 1/(1+c))$, l'application $g_t : B_n \to B_n$ est bien définie et est injective.
7. Montrer que $g_t$, vue comme fonction $\overline{B}_n \to \overline{B}_n$, est bien définie, continue, et $g_t(x) = x$ pour tout $x \in S_n$.
8. Montrer que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t : B_n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local, c'est-à-dire que pour tout $x \in B_n$, il existe des voisinages ouverts $U$ et $V$ de $x$ et $g_t(x)$ tels que la restriction $g_t : U \to V$ est un difféomorphisme.
9. Montrer que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t(B_n)$ est ouvert et que $g_t : B_n \to g_t(B_n)$ est un difféomorphisme.
10. Montre que pour $t \in (0, 1/(1+c))$, $g_t(B_n)$ est fermé puis que $g_t(B_n) = B_n$ (d'où $g_t : B_n \to B_n$ difféomorphisme).
11. Montrer que le polynôme suivant est constant et non-nul : $P(t) := \int_{B_n} \det(Dg_t(x))\mathrm{d}x$.
    Indication : montrer que $P(t) = \mathrm{volume}(B_n)$ pour tout $t \in (0, 1/(1+c))$.
    Note : question bonus qui nécessite un résultat abordé dans le cours d'intégration et probabilités.
12. En déduire, par l'absurde, le théorème de Brouwer quand $C = \overline{B}_n$.
    Indication : $S_n$ est de dimension $n-1$.
13. Soit $C$ une partie convexe compacte dans $\mathbb{R}^m$, dont l'intérieur contient 0. Soit $j(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$.
    Montrer qu'il existe $r, R \in (0, \infty)$ tels que pour tous $\lambda \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^m$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$, $\frac{1}{R}\|x\| \leq j(x) \leq \frac{1}{r}\|x\|$, et $j(x+y) \leq j(x) + j(y)$. En déduire que $j$ est Lipschitz. Indication : choisir $r, R$ tels que $\overline{B}(0,r) \subset C \subset \overline{B}(0,R)$.
14. En déduire que toute partie $C$ convexe compacte non-vide dans $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\overline{B}_m$, pour un $m \leq n$.
15. En déduire le théorème de Brouwer.

**Exercice 2** (Théorème de point fixe de Schauder)**.**
Cet exercice est consacré à la preuve du théorème de point fixe de Schauder : *si $C$ est une partie convexe compacte non-vide d'un espace vectoriel normé $X$, et si $f : C \to C$ est continue, alors $f$ admet un point fixe.*
Ce théorème généralise celui de Brouwer à un espace vectoriel normé de dimension quelconque.
Nous allons le démontrer en utilisant le théorème de point fixe de Brouwer que l'on admet dans cet exercice.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in C$ tels que $C \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.
2. Soit $C_0$ l'enveloppe convexe de $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que $C_0 \subset C$ et
   $$g(x) := \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)} \quad \text{où} \quad g_i(x) := (\varepsilon - \|x - x_i\|)\mathbb{1}_{\|x-x_i\|\leq\varepsilon}$$
   définit bien une fonction $g : C \to C_0$ continue, vérifiant $\|g(x) - x\| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in C$.
3. Soit $h$ la restriction de $g \circ f$ à $C_0$. Montrer que $h$ possède un point fixe $z \in C_0$.
   Indication : $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est de dimension finie c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{R}^n$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z = z_\varepsilon \in C_0$ tel que $\|f(z) - z\| \leq \varepsilon$.
5. En déduire que $f$ possède un point fixe.

**Exercice 3** (Preuve du théorème de Peano via théorème d'Arzelà–Ascoli et théorème de point fixe de Schauder)**.**
Le but de cet exercice est de démontrer, au moyen du théorème d'Arzelà–Ascoli et du théorème de point fixe de Schauder, que l'on admet dans cet exercice, le théorème d'existence de Peano de l'exercice 1.
Aussi on admet qu'il existe $r_* > 0$ et $T > 0$ tels que $C := [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(t_0, r_*) \subset I \times O$ et $M := \sup_{(t,x)\in C} \|f(t,x)\| < \infty$.
Soit $0 < T_* < \min(T, \frac{r_*}{M})$ et $\overline{J} := [t_0 - T_*, t_0 + T_*]$.

1. Soit $\mathscr{A} := \{x \in \mathscr{C}(\overline{J}, \overline{B}(x_0, r_*)) : \|x\|_{\mathrm{Lip}} \leq M\}$. Montrer que ce qui suit définit bien un opérateur $A : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ :
   $$(Ax)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\mathrm{d}s, \quad t \in \overline{J}.$$
2. Montrer que $\mathscr{A}$ est convexe, fermé, non-vide.
3. Montrer que $\mathscr{A}$ est compact.
4. Montrer que $A$ est continu et en déduire que $A$ admet un point fixe (l'EDO a une solution locale).

– oOo –