TD1 : Anneaux, Idéaux, Extensions de Corps

18/09/2023

Exercice 1 : Vrai ou Faux ?

Soit A un anneau.
1. Si a, b, u non nuls sont tels que $(a) = (b)$ et $a = bu$, alors $u \in A^\times$.
2. Si A est intègre, I principal et A/I est un anneau principal, alors A est principal.
3. Si A est principal, I un idéal propre, alors tout idéal de A/I est principal.
4. L'anneau des nombres décimaux est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(10X-1)$.

Correction :

1. FAUX. On peut prendre $A = \mathbb{Z}^2$, $a = (1,0), b = (-1,0)$ et $u = b$ qui n'est pas inversible.
2. FAUX. Par exemple $A = \mathbb{C}[X,Y]$, qui n'est pas principal car (X,Y) n'est pas un idéal principal. Cependat avec l'idéal principal $I = (Y)$, on a $A/I = \mathbb{C}[X]$ qui est principal.
3. VRAI. Soit J uun idéal de A/I, alors $\pi^{-1}(J)$ est un idéal de A donc s'écrit (a). Mais alors $J = \pi(\pi^{-1}(J)) = \pi((a)) = (\pi(a))$. D'où tout idéal de A/I est principal.
4. VRAI. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux, D $= \{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$. On pose

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{D} \\ & & P & \mapsto & P(\frac{1}{10}) \end{array}$$

On vérifie que f est bien définie et est un morphisme d'anneaux, clairement surjective par définition des entiers décimaux (si $x = \frac{a}{10^n}$, alors $x = P(\frac{1}{10})$ avec $P = aX^n$). Pour conclure il suffit alors de montrer que $\ker f = (10X-1)$. On a clairement $(10X-1) \subseteq \ker f$, montrons la réciproque :

Soit $P \in \ker f$. On peut écrire dans $\mathbb{Q}[X]$ la division euclidienne $P(X) = (10X-1)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{Q}[X]$. Il reste à montrer qu'en fait Q est à coefficients entiers. On peut le montrer par récurrence en regardant les coefficients de Q en partant du plus petit dégré, ou sinon on propose une preuve plus astucieuse : Pour R un polynôme à coefficients entiers de degré d, on note $\tilde{R}(X) = X^d R\left(\frac{1}{X}\right) \in \mathbb{Z}[X]$. On remarque que $\tilde{\tilde{R}} = R$.

Alors $\tilde{P} = (10-X)\tilde{Q}$, ce qui par unicité de la division euclidienne de $\tilde{P}$ par $X-10$ qui est bien un polynôme unitaire, implique que $\tilde{Q}$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, et donc Q aussi. Finalement on a bien

$$\mathbb{D} \simeq \mathbb{Z}[X]/(10X-1)$$

Remarque 1. On remarque que c'est en fait la construction du localisé en $S = \langle 10 \rangle$ de $\mathbb{Z}$ via les polynômes.

Exercice 2 : Irréductibilité

Soit A un anneau intègre. On rappelle que $x \in A$ est *irréductible* si il n'est pas inversible et si dès que $x = ab$, alors a ou b est inversible.
1. Soit x non nul dans A. Montrer que si (x) est premier, alors x est irréductible dans A. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que x non nul est irréductible ssi (x) est maximal dans l'ensemble des idéaux principaux propres de A.
3. Soit A un anneau principal et x non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

— x est irréductible.

— l'idéal (x) est premier.

— l'idéal (x) est maximal.

Correction :

1. Soit $x = ab$ non nul tel que (x) est premier. Alors $ab \in (x)$ donc disons $a \in (x)$, ie $a = ux$. Mais alors $x = bux$, puis par intégrité, et le fait que x soit non nul, $bu = 1$ puis b est inversible. D'où x est irréductible. La réciproque est fausse : par exemple dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, on peut montrer que 2 est irréductible, mais $(1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}) = 6 \in (2)$ sans qu'aucun de ces facteurs ne soient dans (2) donc (2) n'est pas premier.

2. Soit x irréductible. Supposons que $(x) \subset (y) \subsetneq A$. Alors $x = ay$, et y n'est pas inversible car (y) est un idéal propre. Alors comme x est irréductible a est inversible, puis $y = a^{-1}x$ et $(x) = (y)$. D'où (x) est maximal dans l'ensemble des idéaux propres principaux de A.

Réciproquement si (x) est maximal dans l'ensemble des idéaux propres de A, si $x = ab$, avec disons a non inversible, $(x) \subset (a) \neq A$, mais donc par maximalité $(x) = (a)$, puis $a = ux$, et finalement par intégrité $x(1 - bu) = 0$ implique que b est inversible, donc x est irréductible.

3. *ii*) implique *i*) par la question 1, *iii*) implique *ii*) par définition, et *i*) implique *iii*) par la question 2 et le fait que A est principal.

Exercice 3 : Nilradical et Radical de Jacobson

Soit A un anneau et I un idéal de A.

1. Notons $J = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ l'intersection des idéaux premiers contenant I. On veut montrer que $J = \sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

a. Vérifier que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

b. Montrer que $\sqrt{I} \subset J$.

c. Soit $a \in A \backslash \sqrt{I}$. En considérant $\mathcal{E}$ la famille constituée des idéaux qui contiennent I mais aucune puissance de a, montrer que $a \notin J$.

d. Conclure

2. On pose maintenant $\mathcal{J}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$ l'intersection des idéaux maximaux de A.

a. Montrer que $\mathcal{J}(A) = \{x \in A | \forall y \in A, 1 - xy \in A^{\times}\}$.

b. Montrer que $\mathcal{J}(A/\mathcal{J}(A)) = 0$.

Correction :

1.

a. oui.

b. Soit $x \in \sqrt{I}$, il existe donc $n \geqslant 1$ tel que $x^n \in I$. Alors pour tout $\mathfrak{p}$ contenant I, $x^n \in \mathfrak{p}$ donc $x \in \mathfrak{p}$ par primalité. D'où l'inclusion.

c. $\mathcal{E}$ est non vide car contient I, et est clairement inductif : Si $(I_\alpha)_\alpha$ est une chaîne non vide d'éléments de $\mathcal{E}$, alors $I_{\text{sup}} = \bigcup_\alpha I_\alpha$ est bien un idéal, en effet si x, y sont dans I_{sup}, alors $x \in I_\alpha$ et $y \in I_\beta$ et quitte à échanger on peut supposer $I_\alpha \subseteq I_\beta$ car on a pris une chaine, et donc $x + y \in I_\beta$. De plus J est bien dans $\mathcal{E}$ par construction.

Soit I_0 un élément maximal pour cet ordre, qui existe par Zorn. Si par l'absurde I_0 n'est pas premier, on a $bc \in I_0$ tel que ni b ni c soient dans I_0. Par maximalité, $a^n \in I_0 + (b)$ et $a^m \in I_0 + (c)$. Alors $a^{n+m} \in I_0$, absurde, ce qui conclut.

2.

a. Soit $x \in \mathcal{J}(A)$ et $y \in A$. Si $1 - yx$ n'est pas inversible, il est contenu dans un certain idéal maximal $\mathfrak{m}$, et donc $1 \in \mathfrak{m}$, abusrde. Réciproquement, si x est tel que $\forall y, 1 - xy \in A^{\times}$, alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, en notant $\pi : A \to A/\mathfrak{m}$ la projection, on a que $\pi(1 - xy)$ est inversible dans $A/\mathfrak{m}$ qui est un corps, ce qui force $\pi(x) = 0$.

b. Il suffit de montrer que $\mathfrak{m} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ de $\mathrm{Spm}(A/\mathcal{J}(A)) \to \mathrm{Spm}(A)$, où $\pi : A \to A/\mathcal{J}(A)$ induit une bijection sur les idéaux maximaux. Cette application est bien définie car π est surjective. Montrons que cette application est bijective.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, alors $\pi(\mathfrak{m})$ est un idéal de $A/\mathcal{J}(A)$ par surjectivité de π, propre sinon on aurait un $x \in \mathfrak{m}$ tel que $\pi(x) = 1$, ou encore $x + y = 1$ où $y \in \mathcal{J}(A)$, puis $1 \in \mathfrak{m}$ absurde. De plus $\pi(\mathfrak{m})$ est maximal, sinon $\pi(\mathfrak{m}) \subsetneq n$ pour n idéal de $A/\mathcal{J}(A)$, puis par maximalité $\mathfrak{m} = \pi^{-1}(n)$, puis par surjectivité de π, $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) = n$. Donc $\pi : \mathrm{Spm}(A) \to \mathrm{Spm}\,(A/\mathcal{J}(A))$ est bien définie et clairmeent inverse de π^{-1}.

Finalement, $J := \mathcal{J}\,(A/\mathcal{J}) = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Spm}(A/\mathcal{J}(A)} \mathfrak{m} = \bigcap_{m \in \mathrm{Spm}(A)} \pi(\mathfrak{m})$. Alors $\pi^{-1}(J) = \mathcal{J}(A)$ et $J = \pi(\pi^{-1}(J)) = 0$.

Exercice 4 : Anneau des séries formelles

Soit K un corps et $A = K[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans K.
1. Montrer que A est intègre et déterminer $A^\times$.
2. Montrer que A possède un unique idéal maximal.
3. Montrer que A est principal

Correction :

1. On pose $\nu_0 : \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n X^n \in A \mapsto \min\{n \in \mathbb{N}, f_n \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Alors on a $\nu_0(fg) = \nu_0(f) + \nu_0(g)$ ce qui permet de prouver que $fg = 0$ ssi $f = 0$ ou $g = 0$. De plus, si $fg = 1$, on a alors forcément $\nu_0(f) = 0$. Réciproquement, si $\nu_0(f) = 0$, on note $f = f_0 + Xh$, et on vérifie que l'élément $g = f_0 \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{Xh}{f_0}\right)^n$ est bien défini et est l'inverse de f.

2. Comme ν_0 est une valuation, $m = \{f \in A | \nu_0(f) > 0\}$ est un idéal de A, et comme son complémentaire est exactement $A^\times$, m est l'unique idéal maximal de A.

3. Soit I un idéal propre de A, et $n = \min\{\nu_0(f) | f \in I\}$. Alors $n \geqslant 1$ car I est propre. Soit $f \in I$ tel que $\nu_0(f) = n$. Alors $f = X^n h$ avec h inversible dans A, donc $(f) = (X^n) \subset I$, et par définition de n, tout élément g de I s'écrit $X^n h$ d'où l'autre inclusion.

Exercice 5 : Irréductibilité de polynômes par extension

Soit K un corps, P un polynôme irréductible de degré n sur K. Soit L une extension finie de K de degré premier à n. Montrer que P est irréductible sur L. On pourra supposer que l'on peut plonger ces corps dans $K \subset L \subset \Omega$ où Ω est une clôture algébrique.

Correction :

Soit Ω une cloture algébrique de L, x une racine de P. Alors $K(x) \simeq K[X]/(P)$ car P irréductible. On veut mq $[L(x) : L] = n$ ce qui permettra de conclure que P irréductible sur L. Or $[K(x) : K] = n | [L(x) : K] = [L(x) : L][L : K]$ mais $[L : K]$ est premier à n, donc n divise $[L(x) : L]$ et est en fait égal.

Exercice 6 : Degré d'extensions

Déterminer le degré des extensions suivantes de $\mathbb{Q}$:

— $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, i\sqrt{7})$.
— $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$.
— $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$.
— $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{10} + \sqrt[3]{7})$.

Correction :

— On a $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ car $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$ qui est irréductible (sinon on aurait $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$). Remarquons que $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ est dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Comme $\sqrt{-7})$ est racine de $X^2 + 7$, on a $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{-7}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \leqslant 2$. Or, comme $\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, on a donc $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{-7}) \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{-7}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ et $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, \sqrt{-7}) : \mathbb{Q}] = 4$ par multiplicativité.

— On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$. On a $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ comme précédemment.
On a $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \leqslant 2$ car $\sqrt[4]{2}$ est racine de $X^2 - \sqrt{2}$. Si $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on aurait $(a + b\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$, on obtient, en décomposant dans la base $1, \sqrt{2}, a^2 + 2b^2 = 0$ et $2ab = 1$, on obtient alors $a^4 = -1/2$ dans $\mathbb{Q}$ ce qui n'est pas possible. Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$.
De même $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] \leqslant 2$, car i est solution de $X^2 - 1$. Comme $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{R}$ mais $i \notin \mathbb{R}, [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] \leqslant 2$ Par multiplicativité, $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 8$.

— Le polynome $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ car sinon il aurait un facteur de degré 1 , et donc aurait une racine dans $\mathbb{Q}$ ce qui n'est pas le cas. Donc $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$. De même $X^2 - 3$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, donc sur $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ d'après l'exercice 5. Alors $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2$, et donc le degré cherché est 6 par multiplicativité

— Notons $\alpha = \sqrt[5]{10} + \sqrt[3]{7}$. Par le critère d'Eisenstein, les polynômes $X^5 - 10$ et $X^3 - 7$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$. Alors $[\mathbb{Q}(10^{1/5}) : \mathbb{Q}] = 5$ et $[\mathbb{Q}(7^{1/3}) : \mathbb{Q}] = 3$. Comme $5 \wedge 3 = 1$, on montre comme précédemment que $[\mathbb{Q}(10^{1/5}, 7^{1/3}) : \mathbb{Q}] = 15$. Alors $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]|15$.
Soit P le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. Posons $Q = (X - 7^{1/3})^5 - 10 \in \mathbb{Q}(7^{1/3})[X]$. Alors d'une part $Q(\alpha) = 0$, et d'autre part $\deg Q = 5 = [\mathbb{Q}(10^{1/5}, 7^{1/3}) : \mathbb{Q}(7^{1/3})] = [\mathbb{Q}(\alpha, 7^{1/3}) : \mathbb{Q}(7^{1/3})]$. Cela prouve que Q est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}(7^{1/3})$. Alors $Q|P$ (car P annule aussi α en tant que polynôme de $\mathbb{Q}(7^{1/3})[X]$), et comme Q n'est pas dans $\mathbb{Q}[X]$, $\deg P \geqslant 6$. Comme $\deg P|15$, on a finalement $\deg P = 15$ ce qui conclut.

Exercice 7 : Extensions de degré 2

Soit L une extension d'un corps K de degré 2.

1. On suppose que la caractéristique de K n'est pas 2. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L \simeq K[X]/(X^2 - a)$ (que l'on note par definition $K(\sqrt{a})$.

2. A quelle condition deux extensions de cette forme sont isomorphes ?

3. Décrire les K automorphismes de $K(\sqrt{a})$.

Correction :

1. Soit $x \in L\backslash K$. La famille $1, x$ est libre sur K donc $x^2 = bx + c$. En caractéristique différente de 2 , on obtient $(x + b/2)^2 = c + b^2/4$. En posant $a = c + b^2/4$ et en envoyant X sur $x + b/2$, on obtient un morphisme $K[X]/\left(X^2 - a\right) \to L$, qui est un isomorphisme car $1, x + b/2$ forment une base de L sur K.

2. Si $b \in K$ est un carré dans $K[X]/\left(X^2 - a\right)$, alors $b = (c + d\sqrt{a})^2$, et donc $2cd = 0$ et $b = c^2 + ad^2$. Donc soit b soit b/a est un carré dans k. Or si b est un carré $K[X]/\left(X^2 - b\right)$ n'est pas un corps. Donc $K[X]/\left(X^2 - a\right)$ et $K[X]/\left(X^2 - b\right)$ sont isomorphes si et seulement si b/a est un carré.

3. Notons y une racine de a dans L. Si σ est un automorphisme de L fixant K. On a $\sigma(y)^2 = \sigma\left(y^2\right) = \sigma(a) = a$ donc $\sigma(y)$ est y ou $-y$. Comme y engendre L, on obtient au plus deux automorphismes possibles. On vérifie facilement que $\sigma(e + fy) = e - fy$ définit bien un automorphisme

Exercice 8 : Polynômes minimaux

Soient K un corps et L une extension finie de K. Soient x, y deux éléments de L, et P_x, P_y leurs polynômes minimaux respectifs sur K. Montrer que P_x est irréductible sur $K(y)$ si et seulement si P_y est irréductible sur $K(x)$.

Correction :

P_x est irréductibe sur $K(y)$ ssi $K(y)[X]/(P_x(X))$ est un corps ssi $K[X, Y]/(P_x(X), P_y(Y))$ est un corps, ssi $K(x)[Y]/(P_y(Y))$ est un corps, ssi P_y irréductible sur $K(x)$.

Exercice 9 : Idéaux premiers d'un anneau de polynômes

Soit A un anneau principal de corps des fractions K. Soit I un idéal premier non nul de $A[X]$.

1. Montrer que $I \cap A$ est un idéal maximal de A.

2.

a. On suppose $I \cap A = 0$. Soit J l'idéal de $K[X]$ engendré par I. Montrer que $I = J \cap A[X]$.

b. Montrer que I est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

3. On suppose que $I \cap A$ est non nul, et on pose $k = A/(I \cap A)$. Montrer que I est engendré soit par $I \cap A$, soit par $I \cap A$ et un $P \in A[X]$ dont l'image dans $k[X]$ est irréductible.

4. En déduire que les idéaux premiers de $A[X]$ sont :

— (0).

— Les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

— Les idéaux engendrés par un idéal maximal de A.

— Les idéaux engendrés par un idéal $\mathfrak{m}$ de A et un polynôme $P \in A[X]$ irréductible modulo $\mathfrak{m}$.

Peut-on dire lesquels sont maximaux ou non ?

5. Trouver les idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{Z}[X]$.

6. Soit α un entier algébrique, montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.

Correction :

1. On a un morphisme injectif $A/(A \cap I) \to A[X]/I$, comme I est premier on en déduit que $A \cap I$ est premier en tant qu'idéal de A, mais comme A est principal, $I \cap A$ est maximal.

2.

a. On a clairement $I \subset J \cap A[X]$. Montrons l'inclusion réciproque, soit $P \in J \cap A[X]$. Comme K est le corps des fractions de A, il existe $a \in A \backslash \{0\}$ tel que $aP \in I$. Or $a \notin I$ car $I \cap A = 0$, donc par primalité de I on déduit $P \in I$.

b. Comme $K[X]$ est principal, il existe $P \in K[X]$ tel que $J = (P)$. Soit c le contenu de P (le pgcd des coefficients), alors $I = A[X] \cap (c^{-1}P)K[X] = (c^{-1}P)A[X]$ car $c^{-1}P$ est primitif. On a donc le résultat, le caractère premier et non constant du polynôme engendrant I venant de I premier et $I \cap A = 0$.

3. Par principalité de A on peut écrire $A \cap I = (a)$, et donc $aA[X] \subset I$. Or $A[X]/aA[X] = k[X]$ est principal, donc il existe P dans $k \in k[X]$ tel que $I/J = Pk[X]$. Finalement, $I = aA[X]$ si $P = 0$ et $I = (a, \tilde{P})$ où $\tilde{P} \in A[X]$ est un relèvement de P.

4. c'est les questions précédentes pour les idéaux premiers, le premier et le troisième cas donne des idéaux non maximaux, le deuxieme donne des idéaux maximaux (voir les quotients), et enfin on ne peut rien dire sur le caractère maximal du dernier cas.

5. D'après la caractérisation précédente, les idéaux premiers de $\mathbb{C}[X, Y]$ sont (0), (P) où P irréductible, et $(X - a, Y - a), a, b \in \mathbb{C}$. Pour $\mathbb{Z}[X]$, on a $(0), (P)$ où P irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, et (p, P) où p premier et P un polynôme irréductible mod p.

6. On a $\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[X]/(P)$ avec P unitaire irréductible annulant α. Mais alors les idéaux premiers de $\mathbb{Z}[\alpha]$ correspondent aux idéaux premiers de $\mathbb{Z}[X]$ contentant strictement (P), ie les (p, P) avec p premier tel que P est irréductible mod p : ils sont bien maximaux.

Exercice 10 : Clôture algébrique de $\mathbb{Q}$

On considère l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. On note $K := \{x \in \mathbb{C}, x \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que si L est une extension algébrique de K dans $\mathbb{C}$, alors $L = K$.

2. Montrer que K est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Est-ce une extension finie de $\mathbb{Q}$?

3. Montrer que K est dénombrable. En déduire l'existence de réels transcendants sur $\mathbb{Q}$.