Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 `laslier@dma.ens.fr`

DM1 : Atomes

Exercice 1. [Atomes d'une tribu] On considère un ensemble e muni d'une tribu $\mathcal{F}$. On introduit l'atome engendré par $x \in E$ comme l'ensemble $\dot{x} := \bigcap_{\{A \in \mathcal{F} : x \in A\}} A$.

1. Montrer que les atomes forment une partition de E.
2. Montrer que tout $A \in \mathcal{F}$ s'écrit de manière unique comme une union d'atome.

On suppose maintenant que $\mathcal{F}$ est générée par un ensemble dénombrable, c.a.d que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ pour un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ dénombrable.

3. Soit $x, y \in E$, on suppose que pour tout $C \in \mathcal{C}$ on a soit $\{x, y\} \subset C$ soit $\{x, y\} \cap C = \emptyset$. Montrer que c'est le cas pour tout élément de $\mathcal{F}$.
4. En déduire que pour tout x, $\dot{x} = \left(\bigcap_{\{C \in \mathcal{C} : x \in C\}} C\right) \cap \left(\bigcap_{\{C \in \mathcal{C} : x \notin C\}} C^c\right)$ puis que $\dot{x} \in \mathcal{F}$.

On s'intéresse enfin au cas où $\mathcal{F}$ n'est pas générée par un ensemble dénombrable. On pose $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ que l'on muni de la tribu $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{C} = \{C_x | x \in \mathbb{R}\}$ où C_x est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ contenant x.

5. Soit $A \in \mathcal{F}$, montrer qu'il existe un ensemble dénombrable $X(A)$ tel que pour tout $e, e' \in E$ si $e \in A$ et $e \cap X(A) = e' \cap X(A)$ alors $e' \in A$.
6. En déduire que $\mathcal{F}$ ne contient pas les singletons.
7. Quels sont les atomes de $\mathcal{F}$?

Remarque : La tribu étudiée dans les questions 5 à 7 n'est autre que la tribu produit si l'on voit $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ comme $\{0, 1\}^{\mathbb{R}}$. Elle est similaire à la tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui intervient assez naturellement quand par exemple on cherche à étudier une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ choisie aléatoirement.

Exercice 2. [Atomes d'une mesure] On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$ et on suppose que $\mu(E) < \infty$. Pour $A \in \mathcal{F}$, on note $\mathrm{div}(A) = \{\mu(B) | B \subset A\}$. On dit que A est un atome de μ si $\mu(A) > 0$ et $\mathrm{div}(A) = \{0, \mu(A)\}$.

1. Expliquer rapidement pourquoi le terme d'atome est approprié dans la définition.
2. On suppose qu'il existe $\epsilon \in (0, \frac{1}{4})$ et A tel que $\mathrm{div}(A) \cap [\epsilon\mu(A), (1-\epsilon)\mu(A)] = \emptyset$, montrer que μ a un atome.
3. On suppose maintenant que μ n'a pas d'atome, montrer qu'il existe ϵ tel que pour tout A, $\mathrm{div}(A) \cap [\epsilon\mu(A), (1-\epsilon)\mu(A)] \neq \emptyset$.
4. En déduire que pour tout A, $\mathrm{div}(A) = [0, \mu(A)]$.

On rappel que pour $x \in E$, la mesure de Dirac en x, notée δ_x est définie par $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. On considère μ une mesure admettant un atome A.

5. * Montrer que si $\mathcal{F}$ est générée par un ensemble dénombrable, montrer qu'on peut trouver $x \in E$ et ν une mesure tels que $\mu = \nu + \mu(A)\delta_x$.
6. * Construire un contre-exemple pour une tribu qui n'est pas générée par un ensemble dénombrable.