Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

Corrigé du TD de Logique, feuille 1

Exercice 1 (Relation d'ordre dans un anneau de Boole) **:**

1. La réflexivité et l'antisymétrie sont claires. Montrons la transitivité : supposons que $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Alors, $abc = (ab)c = ac$. Or, on a aussi $abc = a(bc) = ab = a$. Donc $ac = a$, i.e. $a \leqslant c$.

2. On a $ab = a$ ssi $1 + ab = 1 + a$ ssi $(1+b)(1+a) = 1 + b$. Autrement dit, on a $a \leqslant b$ ssi $1 + b \leqslant 1 + a$.

3. Si $ca = c$ et $cb = c$, alors $cab = cb = c$. Réciproquement, si $cab = c$, alors $ca = ca^2b = cab = c$ et $cb = cab^2 = cab = c$. La propriété universelle de la borne sup permet de conclure.

4. Il s'agit de combiner les deux questions précedentes : on a $c \geqslant a$ et $c \geqslant b$ ssi $1 + c \leqslant 1 + a$ et $1 + c \leqslant 1 + b$ ssi $1 + c \leqslant (1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab$ ssi $c \geqslant a + b + ab$.

5. On a $a \wedge b \leqslant c$ ssi $abc = ab$ ssi $a(1 + b + bc) = a$. Or $1 + b + bc = (1 + b) + c + (1 + b)c = (1 + b) \vee c$.

6. On a $a(1 + a) = a + a^2 = 0$, et $a + (1 + a) + a(1 + a) = 1 + 0 = 1$.

Exercice 2 (Un peu d'algèbre commutative dans des anneaux de Boole) **:**

1. Si $x \in \mathbb{A}$, on a $(x+1)^2 = x + 1$, i.e. $x^2 + 2x + 1 = x + 1$, donc $3x + 1 = x + 1$, d'où $2x = 0$.

   Ensuite, si a, b sont dans $\mathbb{A}$, on a $(a + b)^2 = a + b$, i.e. $a^2 + b^2 + ab + ba = a + b$, donc $ab + ba = 0$. Donc $ab + ba + ba = ba$, or $ba + ba = 0$, donc $ab = ba$.

2. L'un des sens est clair. Supposons donc que b divise a. Soit $c \in \mathbb{A}$ tel que $c \cdot b = a$. Alors, on a $ab - a = cb^2 - cb = cb - cb = 0$. Donc $ab = a$.

3. Soit $x \in \mathbb{A}$. On a $ax = 0$ ssi $ax + x = x$ ssi $(1 + a) \cdot x = x$ ssi $(1 + a)$ divise x, par 1.

4. Soit $a \in Aa$. On sait que $a(1 + a) = 0 \in \mathfrak{p}$, donc $a \in \mathfrak{p}$ ou $1 + a \in \mathfrak{p}$. De plus, comme $\mathfrak{p}$ est propre, on sait que $1 \notin \mathfrak{p}$. Donc $a \notin \mathfrak{p}$ ou $1 + a \notin \mathfrak{p}$. D'où le résultat.

5. Le sens réciproque découle du fait qu'un idéal est un sous-groupe additif, et est vrai dans tout anneau. Démontrons le sens direct. Supposons que $a + b \notin \mathfrak{p}$. Alors, par la question 3, on a $x := 1 + a + b \in \mathfrak{p}$. Si $a \notin \mathfrak{p}$, alors $1 + a \in \mathfrak{p}$, donc $b = 1 + a + x \in \mathfrak{p}$. Symétriquement, si $b \notin \mathfrak{p}$, alors $a \in \mathfrak{p}$. D'où le résultat.

6. On va utiliser la question 3. Soit $a \in I$. Comme I est propre, on a $1 + a \notin I$. Donc $1 + a \notin \mathfrak{p}$. Donc $a \in \mathfrak{p}$. Donc $I \subseteq \mathfrak{p}$, d'où l'égalité.

7. Si a appartient à tous les idéaux premiers, alors $1 + a$ n'appartient à aucun idéal premier, donc à aucun idéal propre, donc $1 + a$ est inversible, donc $1 + a = 1$ (tout inversible dans un anneau de Boole est égal à 1). Donc $a = 0$, comme voulu.

Exercice 3 (Spectre d'un anneau de Boole, dualité) **:**

1. Pour $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on a $ab \notin \mathfrak{p}$ ssi $a \notin \mathfrak{p}$ et $b \notin \mathfrak{p}$. D'où $D(ab) = D(a) \cap D(b)$. Le résultat sur $V(ab)$ en découle. Enfin, on sait que, si $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on a $a \notin \mathfrak{p}$ ssi$1 + a \in \mathfrak{p}$, d'où $D(a) = V(1 + a)$.

2. La question précédente nous montre que la famille est close par intersections finies non vides. Pour l'intersection vide, il suffit de constater que $D(1) = Spec\,\mathbb{A}$.

3. Le fait que les $D(a)$ soient ouverts-fermés découle de la question 1 : $D(a) = V(1 + a) = D(1 + a)^c$. Démontrons que l'espace est séparé. Soient $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ dans $Spec\,\mathbb{A}$. Alors, comme les idéaux premiers sont maximaux, il existe $a \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Autrement dit, on a $\mathfrak{q} \in D(a)$ et $\mathfrak{p} \notin D(a)$. Or, $D(a)$ est un ouvert-fermé, d'où la séparation.

4. On commence par vérifier que $V(B) = V(I)$: un idéal premier contient B ss'il contient I. Ensuite, par le fait rappelé plus haut, un idéal est inclus dans un idéal premier ss'il est propre, ss'il ne contient pas 1. D'où l'équivalence.

   Démontrons alors la compacité de $Spec\,\mathbb{A}$: soit $(F_k)_{k\in K}$ une famille de fermés, dont les intersections finies sont non vides. Montrons que l'intersection de la famille est non vide. Par définition de la topologie de Zariski, chaque fermé F_k est de la forme $V(B_k)$, pour un certain $B_k \subseteq \mathbb{A}$. Pour $J \subseteq K$, notons I_J li'déal engendré par l'union des B_k, $k \in J$. Par hypothèse, si J est fini, on a $1 \notin I_J$. Par conséquent, on a $1 \notin I_K$, d'où $V(I_K) \neq \varnothing$, comme voulu.

5. Démontrons l'unicité : soient a, b dans $\mathbb{A}$ tels que $D(a) = D(b)$. Alors, par la question 5 de l'exercice 2 du TD 2, l'élément $a + b$ est dans tous les idéaux premiers, donc, par 6 de ce même exercice, cet élément est nul.

   Pour l'existence, on utilise la compacité : soit U un ouvert-fermé, qu'on écrit comme une union *finie* d'ouverts de base $D(a)$, disons $U = \bigcup_{i<n} D(a_i)$. Alors, on a $U^c = \bigcap_{i<n} D(1 + a_i) = D(\prod_i (1 + a_i))$. Donc $U = D(1 + \prod_i (1 + a_i))$.

6. On sait que la fonction $a \mapsto D(a)$ définit une bijection $\mathbb{A} \simeq OF(Spec\,\mathbb{A})$. De plus, on a $D(0) = \varnothing$, $D(1) = Spec\,\mathbb{A}$, et $D(ab) = D(a) \cap D(b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$. Enfin, par la question 5 de l'exercice 2 du TD 2, on a $D(a + b) = D(a)\Delta D(b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$. On a donc bien défini un isomorphisme d'anneaux.

7. Soit $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, et soit $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \{U \in OF(X) \,|\, U^c \in \mathfrak{p}\}$. Commençons par se rappeler que, si $U \in OF(X)$, alors $U \notin \mathfrak{p}$ ssi $U^c \in \mathfrak{p}$. Alors, par définition d'un idéal premier, l'intersection de deux éléments de $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ est encore dans $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$. De plus, la partie $X \in OF(X)$ est dans $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$, puisque l'élément 0 de $OF(X)$, qui est la partie $\varnothing$, est dans $\mathfrak{p}$. Ainsi, $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ est une collection de fermés non vides de X, close par intersections finies. Par compacité de X, l'intersection $\bigcap_{U\in\mathcal{F}_\mathfrak{p}} U$ est non vide.

   On veut maintentant montrer que cette intersection est un singleton. Pour cela, il suffit de se rappeler que deux éléments distincts de X sont séparés par un ouvert-fermé, et que, si $U \in OF(X)$, alors $U \notin \mathfrak{p}$ ssi $U^c \in \mathfrak{p}$.

   On définit alors $f : Spec\,\mathbb{A} \to X$ en décrétant que $f(\mathfrak{p})$ est l'unique élément de $X_\mathfrak{p} := \bigcap_{U\in\mathcal{F}_\mathfrak{p}} U$. Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ sont dans $Spec\,\mathbb{A}$, alors, comme les idéaux premiers de $\mathbb{A}$ sont maximaux, il existe $U \in \mathbb{A} = OF(X)$ tel que $U \in \mathfrak{p}$ et $U^c \in \mathfrak{q}$. Donc $X_\mathfrak{p} \cap X_\mathfrak{q} = \varnothing$, donc f est injective.

   Pour la surjectivité de f, il s'agit de vérifier que, si $x \in X$, alors l'ensemble $I = \{U \in OF(X) \,|\, x \notin U\}$ est un idéal premier de $OF(X) = \mathbb{A}$, et que $x \in X_I$.

   Enfin, comme f est entre espaces compacts, il reste à montrer qu'elle est continue. Comme X profini, il suffit de montrer que $f^{-1}(U)$ est ouvert, pour tout $U \in OF(X)$. On vérifie que, si $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$ et $U \in OF(X)$, alors $f(\mathfrak{p}) \in U$ ssi $X_\mathfrak{p} \subseteq U$ ssi $U \in \mathcal{F}_\mathfrak{p}$ ssi $U^c \in \mathfrak{p}$. Ainsi, on a $f^{-1}(U) = D(U)$, qui est bien un ouvert(-fermé) de $Spec\,\mathbb{A}$.

Exercice 4 (Mesures) **:**

1. Il s'agit de vérifier que, si $X \in B$ est à la fois ouvert et fermé, on a $\inf_{O\in A, X\subseteq O} \mu(O) = \sup_{O\in A, O\subseteq X} \mu(O)$. Cela découle du fait qu'alors $X \in A$, et de la monotonie de la mesure finiment additive μ.

2. a) Si X et Y sont ouverts, cela découle de la montonie de $\mu|_A$. De même, si X et Y sont fermés. Supposons X ouvert et Y fermé. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $O_1, O_2 \in A$ tels que $O_1 \leqslant X$, $Y \leqslant O_2$, $\mu(O_1) \leqslant \mu(X) \leqslant \mu(O_1) + \varepsilon$ et $\mu(O_2) - \varepsilon \leqslant \mu(Y) \leqslant \mu(O_2)$. On a donc $O_1 \leqslant O_2$, et donc $\mu(O_1) \leqslant \mu(O_2)$, d'où $\mu(X) \leqslant \mu(Y) + 2\varepsilon$. Donc $\mu(X) \leqslant \mu(Y)$.

   Finalement, supposons X fermé et Y ouvert. Par compacité de X (qui est fermé dans un espace compact), comme Y est union d'ouverts-fermés, il existe $O \in A$ tel que $X \leqslant O \leqslant Y$. Alors, $\mu(X) \leqslant \mu(O) \leqslant \mu(Y)$.

b) Il s'agit d'utiliser le fait suivant, qui découle de la compacité et du fait que les ouverts sont des unions d'ouverts-fermés : pour tout ouvert-fermé O inclus dans $X \vee Y$, il existe des ouverts-fermés $O_1 \leqslant X$ et $O_2 \leqslant Y$ tels que $O \leqslant O_1 \vee O_2$. Alors, $\mu(O) \leqslant \mu(O_1 \vee O_2) \leqslant \mu(O_1) + \mu(O_2) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Soient $O_1 \leqslant X \smallsetminus Y$ et $O_2 \geqslant Y$ tels que $|\mu(O_1) - \mu(X \smallsetminus Y)| \leqslant \varepsilon$ et $|\mu(O_2) - \mu(Y)| \leqslant \varepsilon$. De plus, quitte à restreindre O_2, on peut supposer que $O_2 \leqslant X$. En effet, $O_2 \wedge X$ est un ouvert contenant Y, donc une union d'ouverts-fermés; par compacité, une union finie de tels ouverts-fermés contient Y. Quitte à intersecter O_2 avec le complémentaire de O_1, on peut supposer que O_1 et O_2 sont disjoints.

Alors, on a $O_1 \vee O_2 \leqslant X$, et $\mu(O_1 \vee O_2) = \mu(O_1) + \mu(O_2) \leqslant \mu(X)$. On en déduit que $\mu(X) \geqslant \mu(X \smallsetminus Y) + \mu(Y) - 2\varepsilon$. D'où $\mu(X) \geqslant \mu(X \smallsetminus Y) + \mu(Y)$.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ et $O \leqslant X$ un ouvert-fermé tel que $\mu(O) \geqslant \mu(X) - \varepsilon$. Par compacité, on peut supposer que $O \geqslant Y$. Soit alors $O_2 \leqslant O$ tel que $Y \leqslant O_2$ et $\mu(O_2) \leqslant \mu(Y) + \varepsilon$. Alors, $O \smallsetminus O_2 \leqslant X \smallsetminus Y$. Donc $\mu(X \smallsetminus Y) + \mu(Y) \geqslant \mu(O \smallsetminus O_2) + \mu(O_2) + \varepsilon = \mu(O) - \varepsilon \geqslant \mu(X) - 2\varepsilon$. D'où le résultat.

3. Soit $\varepsilon > 0$, et $O \in A$ tel que $F_1 \vee F_2 \leqslant O$ et $\mu(O) - \varepsilon \leqslant \mu(F_1 \vee F_2)$. Par hypothèse, le fermé F_1 est inclus dans l'ouvert $O \smallsetminus F_2$. Ce dernier étant une union d'ouverts-fermés, et F_1 étant compact, il existe un ouvert-fermé $O_1 \in A$ tel que $F_1 \leqslant O_1 \leqslant O \smallsetminus F_2$. Alors, le fermé F_2 est inclus dans l'ouvert $O \smallsetminus O_1$. Donc, il existe $O_2 \in A$ tel que $F_2 \leqslant O_2 \leqslant O \smallsetminus O_1$. De plus, quitte à restreindre O_1 et O_2, on peut supposer que $\mu(O_1) \leqslant \mu(F_1) + \varepsilon$ et $\mu(O_2) \leqslant \mu(F_2) + \varepsilon$. Ainsi, on a

$$\mu(O_1) + \mu(O_2) - \varepsilon = \mu(O_1 \vee O_2) - \varepsilon \leqslant \mu(F_1 \vee F_2) \leqslant \mu(O_1 \vee O_2) = \mu(O_1) + \mu(O_2).$$

Et

$$|\mu(O_1) + \mu(O_2) - (\mu(F_1) + \mu(F_2))| \leqslant 2\varepsilon.$$

D'où le résultat.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $O \leqslant \bigcup_n U_n$ un ouvert-fermé tel que $\mu(O) \geqslant \mu(\bigcup_n U_n) - \varepsilon$. Alors, comme O est compact, il existe N tel que $O \leqslant \bigcup_{n<N} U_n$. Donc $\mu(\bigcup_n U_n) \leqslant \mu(O) + \varepsilon \leqslant \mu(\bigcup_{n<N} U_n) + \varepsilon$. Or, par la question 2. b. (et par récurrence), on a $\mu(\bigcup_{n<N} U_n) \leqslant \sum_{n<N} \mu(U_n)$. Ainsi, on a $\mu(\bigcup_n U_n) \leqslant \sum_{n<N} \mu(U_n) + \varepsilon \leqslant \sum_n \mu(U_n) + \varepsilon$. D'où le résultat.

5. Démontrons l'égalité si X est fermé. Il s'agit de montrer que $\mu(X)$ est égal à $\inf_{U \in B,\, X \subseteq U,\, U \text{ ouvert}} \mu(U)$. Par définition, on a $\mu(X) = \inf_{O \in A,\, X \subseteq O} \mu(O)$. Il s'agit alors de combiner la monotonie démontrée en 2 avec le fait suivant : si U est un ouvert contenant X, alors il existe un ouvert-fermé O tel que $X \leqslant O \leqslant U$.

6. On commence par constater que, si F est un fermé, et U son complémentaire, alors $\mu(F) + \mu(U) = 1$. On en déduit que B_{reg} est clos par passage au coplémentaire. Il reste à démontrer que B_{reg} est clos par union dénombrable. Soit donc $(X_n)_n$ une suite d'éléments de B_{reg}. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n, soient $F_n \leqslant X_n \leqslant U_n$ tels que F_n est fermé, U_n est ouvert et $\mu(U_n) - \mu(F_n) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$.

Alors, il existe un ouvert-fermé $O_1 \leqslant \bigcup_n U_n$ tel que $\mu(O_1) \geqslant \mu(\bigcup_n U_n) - \varepsilon$. Par compacité, il existe N tel que $O_1 \leqslant \bigcup_{n<N} U_n$. Donc $\mu(\bigcup_{n<N} U_n) \geqslant \mu(\bigcup_n U_n) - \varepsilon$. Enfin, en utilisant 2, on calcule

$$\mu(\bigcup_{n<N} U_n) - \mu(\bigcup_{n<N} F_n) = \mu(\bigcup_{n<N} U_n \smallsetminus \bigcup_{k<N} F_k) \leqslant \mu(\bigcup_{n<N} (U_n \smallsetminus F_n)) \leqslant \sum_{n<N} \mu(U_n) - \mu(F_n) \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc, en posant $U = \bigcup_n U_n$, $X = \bigcup_n X_n$ et $F = \bigcup_{n<N} F_n$, on a $F \leqslant X \leqslant U$ et $\mu(U) - \mu(F) \leqslant 3\varepsilon$, ce qui conclut.

7. Soit $X = \bigcup_n X_n$, où $(X_n)_n$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints. Montrons que $\mu(X) = \sum_n \mu(X_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n, soient $F_n \leqslant X_n \leqslant U_n$, où F_n est fermé et U_n ouvert, tels que $\mu(U_n) \leqslant \mu(X_n) + \varepsilon 2^{-n} \leqslant \mu(F_n) + 2 \cdot \varepsilon 2^{-n}$. Notons que, comme les X_n sont deux à deux disjoints, les F_n également.

   Alors, par la question 3, on a $\mu(\bigcup_n F_n) \geqslant \sum_n \mu(F_n) \geqslant \sum_n \mu(X_n) + 2\varepsilon$. En effet, la mesure de l'union est supérieure ou égale aux mesure des unions partielles finies, qui sont égales aux sommes partielles finies (par la question 3). Par conséquent, on a $\mu(X) \geqslant \sum_n \mu(X_n) + 2\varepsilon$.

   D'autre part, grâce à la question 4, on calcule $\mu(X) \leqslant \mu(\bigcup_n U_n) \leqslant \sum_n \mu(U_n) \leqslant \sum_n \mu(X_n) + 2\varepsilon$. Donc $\mu(X) \leqslant \sum_n \mu(X_n) + 2\varepsilon$.

   Comme ε est arbitraire, on a l'égalité.