Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

TD de Logique, feuille 3 (Compacité, ultraproduits)

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande d'y réfléchir à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

Pour alléger les notations, on utilisera le même symbole pour une structure et pour l'ensemble sous-jacent. La plupart des exercices ci-dessous utilisent le théorème de compacité de la logique du premier ordre :
Une collection de formules (possiblement avec variables libres) dans un langage du premier ordre a un modèle si et seulement si toute sous-collection finie a un modèle.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Propriétés axiomatisables) **:**
Parmi les classes de structures suivantes, lesquelles sont axiomatisables ? finiment axiomatisables ?

1. Les ensembles infinis (dans le langage de l'égalité),
2. Les ensembles finis,
3. Les graphes connexes (dans le langage avec une relation binaire),
4. Les corps de caractéristique nulle (dans le langage des anneaux),
5. Les corps de caractéristique non nulle (dans le langage des anneaux),
6. Les ensembles bien ordonnés[1] (dans le langage des ordres).

Indication : on pourra démontrer que, si une classe de structures est finiment axiomatisable, alors, de toute axiomatisation, on peut extraire une sous-axiomatisation finie.

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Infinitésimaux) **:**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times, <, f\}$, où f est un symbole de fonction unaire. Soit $\overline{\mathbb{R}}$ la $\mathcal{L}$-structure naturelle, où le symbole f est interprété par F. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$, et soit $\mathcal{R}$ l'ultraproduit $\prod_{n\to\mathcal{U}} \overline{\mathbb{R}}$. On plonge le corps $\mathbb{R}$ dans le corps $\mathcal{R}$, via la fonction $x \mapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}]$.

1. Montrer que les règles de calcul usuelles sur les égalités et inégalités sont encore valables dans $\mathcal{R}$.
2. Soit $I = \{a \in \mathcal{R} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{R} \vDash -1 < n \cdot a < 1\}$. On appelle I l'ensemble des *infinitésimaux*. Montrer que I est un sous-groupe non trivial de $(\mathcal{R}, +)$, et que $\mathbb{R} \cdot I = I$.
3. Construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{R}_{>0}$ telle que, pour tout n, pour tout $k \geqslant 1$, on ait $\frac{{a_n}^k}{a_{n+1}} \in I$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si, pour tout $e \in I$, on a $f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a) \in I$.
5. Soient $a, r \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a) La fonction F est dérivable en a, de dérivée r.
   b) Pour tout $e \in I \setminus \{0\}$, on a $\frac{f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)}{e} - r \in I$.
   c) On a $\mathcal{R} \vDash (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq 0)\,[-\delta < x < \delta \longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - r < \varepsilon]$, où les abréviations usuelles ont été utilisées.
6. Soit $Def_{\mathbb{R}}^{\mathcal{R}} \leqslant \mathcal{P}(\mathcal{R})$ l'algèbre de Boole des parties de $\mathcal{R}$ qui sont des unions finies d'intervalles à bornes dans $\mathbb{R}$ ou infinies. Soit $S^{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$ l'espace des ultrafiltres sur $Def_{\mathbb{R}}^{\mathcal{R}}$.

[1] Un bon ordre est un ordre où toute partie non vide a un minimum.

a) Soit $Def_{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \leqslant \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'algèbre de Boole des parties de $\mathbb{R}$ qui sont des unions finies d'intervalles à bornes dans $\mathbb{R}$ ou infinies, et soit $S^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'espace de ses ultrafiltres. Montrer que les espaces $S^{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$ et $S^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ sont homéomorphes. On pourra chercher des arguments généraux de théorie des modèles, ou plus spécifiques aux unions finies d'intervalles.

b) Construire une surjection "raisonnable" $\mathcal{R} \to S^{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$. On pourra utiliser un TD précédent.

Exercice 3 (Ultraproduits) **:**
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}$-structures (non vides). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Soit $S \coloneqq \prod_{n\to\mathcal{U}} S_n$ l'ultraproduit des S_n. *Cet exercice utilise des notions de cardinalité naïve ; on pourra utiliser le théorème dit de Cantor-Benstein.*

1. On suppose que les S_n sont infinies dénombrables. Montrer que (l'ensemble sous-jacent à) l'ultraproduit $S = \prod_{n\to\mathcal{U}} S_n$ est en bijection avec $2^{\mathbb{N}}$. On pourra utiliser l'unicité de la décomposition en base 2, pour construire une injection $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow S$.

2. On suppose que les S_n sont finies. La structure S est-elle finie ? Si non, peut-on calculer son cardinal ? Dans la cas où S est infinie, on pourra s'inspirer de la question précédente.

3. Soit $\Sigma(x)$ une collection finie ou dénombrable de $\mathcal{L}$-formules en la variable x. On suppose que, pour tout conjonction finie $\varphi(x)$ de formules de Σ, on a $S \vDash \exists x\, \varphi(x)$. Montrer qu'il existe $a \in S$ tel que, pour tout $\varphi \in \Sigma$, on a $S \vDash \varphi[a]$.

   Indication : on pourra chercher à faire une construction diagonale, en choisissant des éléments pour chaque coordonnée.

Exercice 4 (Modèles non standard de l'arithmétique) **:**
Soit $\mathcal{L}_{\text{ar}} = \{0, s, +, -, \times, 1, <\}$ et notons $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, s, +, \times, 1, <)$ où les symboles ont leurs interprétations standard (s est la fonction successeur). On note $\overline{n} = s^n(0)$, et $T = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$.

1. Montrer qu'il existe $\mathcal{M} \vDash T$ et $a \in M$ tel que $a > \overline{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qu'on peut de plus supposer ce a divisible par $\overline{n}$, pour tout $n \geqslant 1$.

2. Soit $\varphi[x]$ une formule telle que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\overline{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $a \in M$, $\mathcal{M} \vDash \varphi[a]$.

3. En déduire que $\{\overline{n} : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas définissable dans $\mathcal{M}$.

Exercice 5 (Groupes pseudo-finis) **:**
Soient $(G_i)_{i\in I}$ des groupes finis, que l'on étudie dans le langage $\{\times, 1, .^{-1}\}$. On note $T_0 = \{\text{énoncés } \varphi : \forall i\ G_i \vDash \varphi\}$.

1. Supposons que T_0 admette des modèles infinis, donner une axiomatisation T des modèles de T_0 qui sont infinis. Montrer que ce sont des groupes.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les G_i pour que T_0 admette des modèles infinis.

3. Montrer qu'un énoncé φ est conséquence de T si et seulement s'il existe n tel que φ soit vrai dans tous les G_i de cardinal plus grand que n.

Exercice 6 (Compacité de la logique propositionnelle) **:**

1. Un graphe (orienté) G est un ensemble S de sommets, muni d'une relation binaire $A \subseteq S \times S$. On dit que x est relié à y si (x, y) appartient à A. Un graphe G est dit *k-coloriable* s'il existe une fonction $c : S \to \{0, ..., k-1\}$ telle que, pour tous $x, y \in V$ avec $(x, y) \in A$, on a $c(x) \neq c(y)$. Autrement dit, on demande que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

   Montrer qu'un graphe est k-coloriable si et seulement si tous ses sous-graphes finis le sont. On pourra introduire des variables propositionnelles $v_{x,i}$, pour $x \in S$ et $i < k$, et chercher à traduire en logique propositionnelle la condition définissant un coloriage .

2. Montrer, en utilisant le théorème de compacité de la logique propositionnelle, que tout ordre partiel s'étend en un ordre total.