Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

Corrigé du TD de Logique, feuille 5

Exercice 1 (Graphe aléatoire) **:**

1. La théorie T des graphes aléatoires est donnée par les axiomes suivants :
   - L'antiréflexivité et la symétrie de R : $\forall x \neg xRx \wedge \forall x \forall y\ (xRy \to yRx)$,
   - Un schéma d'axiomes, indexé par n, m, et $k \in \mathbb{N}$ pour le caractère aléatoire :

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \left(\bigwedge_{i,j} \neg x_i = y_j \to \exists z_1 \dots \exists z_k [\bigwedge_i zRx_i \bigwedge_j \neg zRy_j \bigwedge_{l \neq p} \neg z_l = z_p] \right)$$

2. Soit $\mathcal{G}$ un graphe au plus dénombrable. On peut remarquer que l'ensemble des parties finies de G, noté $\mathfrak{P}^f(G)$, est lui aussi un ensemble au plus dénombrable car $\bigcup_n G^n$ se surjecte sur cet ensemble. On munit alors $G' = G \sqcup \mathfrak{P}^f(G)$ d'une structure de graphe en posant :
   - Pour tout x, $y \in G$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $xR^{\mathcal{G}}y$,
   - Pour tout $x \in G$ et $y \in \mathfrak{P}^f(G)$, $xR^{\mathcal{G}'}y$ si et seulement si $yR^{\mathcal{G}'}x$ si et seulement si $x \in y$.

   Alors, $\mathcal{G}$ est un sous-graphe de $\mathcal{G}'$ qui est bien au plus dénombrable et pour tout S_1, S_2 finis disjoints inclus dans G, le point S_1 de G' n'est relié qu'au points de S_1 et donc, a fortiori, pas à ceux de S_2.

   On pose alors $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}'_n$ et $\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{G}_n$. $\mathcal{H}$ est un surgraphe de $\mathcal{G}$ et si S_1 et S_2 sont finis disjoints inclus dans H, il existe n tel qu'ils sont inclus dans G_n et il existe donc $s \in G_{n+1}$ qui soit relié à tous les points de S_1 et à aucun point de S_2 (et tel qu'on ait même $s \notin S_1 \cup S_2$).

   On peut d'ailleurs vérifier que $|H| = \aleph_0$ (même si le graphe de départ $\mathcal{G}$ est fini car $G_{n+1} \setminus G_n \neq \varnothing$). Il s'en suit donc bien que T a des modèles dénombrables et qu'elle est donc consistante.

3. Tout d'abord, K est non vide, en effet, comme R est anti-réflexive et qu'il n'y a pas de fonctions dans le langage (et donc que tout sous-ensemble de sommet muni de la structure induite est un sous-graphe), pour tout $g \in G$ et $h \in H$, l'application $g \mapsto h$ est bien un isomorphisme partiel.

   Soit maintenant $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ un isomorphisme partiel de domaine fini S et $g \in G$. Si $g \in S$ il n'y a rien à faire. Si $g \notin S$, on note $S_1 = \{s \in S : sRg\}$ et $S_2 = \{s \in S : \neg sRg\} = S \setminus S_1$. Comme ces deux ensembles sont finis et disjoints, c'est aussi le cas de $f(S_1)$ et de $f(S_2)$. Par le caractère aléatoire de $\mathcal{H}$, on trouve alors $h \in H$ qui soit relié à tous les points de $f(S_1)$ et à aucun de $f(S_2)$. Par la version un peu plus forte de l'axiome, on peut d'ailleurs supposer que $h \notin f(S_1) \cup f(S_2) = \mathrm{Im}(f)$. Il est alors facile de montrer que f' définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \to & \mathcal{H} \\ s \in S & \mapsto & f(s) \\ g & \mapsto & h \end{array} \right.$$

   est un isomorphisme partiel.

   La dernière propriété à démontrer se déduit du cas précédent par symmétrie, on veut maintenant agrandir le domaine de f^{-1} isomorphisme partiel de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.

4. Il s'agit d'appliquer le critère d'élimination des quantificateurs, *avec une subtilité.* Soient M, N des modèles de T, $E \subseteq M$, $f : E \to N$ un plongement, et $a \in M$. On cherche à étendre f. *L'ensemble E pouvant être infini, on ne peut pas directement appliquer le va-et-vient.* Pour résoudre ce problème, on cherche à appliquer le théorème de compacité, et la méthode des diagrammes. Introduisons la notation suivante : pour $B \subseteq M$, notons $\Delta(a/B)$ la collection $\{\varphi(x,b) \,|\, b \subseteq B,\ M \vDash \varphi(a,b),\ \varphi \text{sans quantificateurs}\}$. Notons également $f_*(\Delta(a/B))$ la collection $\{\varphi(x, f(b)) \,|\, f \subseteq F,\ M \vDash \varphi(a,b),\ \varphi \text{sans quantificateurs}\}$.

   On considère la collection de formules $\Sigma := Diag(N) \cup f_*(\Delta(a/E))$. On vérifie qu'un modèle de Σ fournit bien une extension élémentaire N_1 de N et un plongement de $E \cup \{a\}$ dans N_1 étendant f. Par compacité, il suffit alors de trouver un modèle de $Diag(N) \cup f_*(\Delta(a/E_0))$, pour tout $E_0 \subseteq E$ fini. Ce dernier point découle de la propriété de va(-et-vient).

Le critère d'élimination des quantificateurs est donc vérifié.

Démontrons alors que T est complète. On constate que si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H} \vDash T$, comme on l'a vu $g \mapsto h$, pour $g \in G$ et $h \in H$ quelconques, est un isomorphisme partiel. Quitte à identifier ces deux points, on a donc une sous-structure A commune à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$. Par élimination des quantificateurs, tout énoncé φ est équivalent à une formule $\psi[a]$ avec $a \in A$ sans quantificateurs qui est vraie dans $\mathcal{G}$ si et seulement si elle est vraie dans A, si et seulement si elle est vraie dans $\mathcal{H}$.

5. Posons $G = \{g_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $H = \{h_i : i \in \mathbb{N}\}$ deux énumérations de G et H. On construit alors par récurrence une suite d'isomorphismes partiels f_i de domaine fini tel que le domaine de f_{2i} contient g_i et l'image de f_{2i+1} contient h_i et f_i étend f_j si $i \geqslant j$.

   On pose f_{-1} un isomorphisme partiel de domaine fini quelconque entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ (qui existe par la question précédente). Si f_{2i-1} est construit, on pose f_{2i} qui l'étend et donc le domaine contient g_i (qui existe par le va) et si f_{2i} est construit, on pose f_{2i+1} qui l'étend et donc l'image contient h_i (qui existe par le vient).

   On pose alors $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ qui est bien un isomorphisme partiel. Son domaine contient tout G et son image tout H, c'est donc bien un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$.

6. Soit $\mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}_G$ auquel on rajoute une constante h_P par partie de G et T' la théorie $T \cup \{gRh_P : g \in P\} \cup \{\neg gRh_P : g \notin P\}$. Alternativement, on peut appliquer le théorème de compacité pour une collection de formules où les variables libres sont indexées par $\mathcal{P}(G)$. Soit $T_0 \subset T$ finie. On a alors $T_0 \subset T \cup \{gRh_{P_i} : g \in S_1^i\} \cup \{\neg gRh_{P_i} : g \in S_2^i\}$ où $S_1^i \subseteq P_i$ est fini, et de même $S_2^i \subseteq P_i^c$ (le complémentaire de P_i) est fini. On a donc bien S_1^i et S_2^i finis disjoints. Il existe donc $g_i \in G$ tel que g_i soit relié aux points de S_1^i et pas à ceux de S_2^i. La structure où h_{P_i} est interprétée par g_i est donc un modèle de T_0. Il s'en suit donc que T est finiment consistante donc consistante. De plus $|\mathcal{L}'| = 2^{|G|}$ et tout modèle de T' est au moins de cardinal $2^{|G|}$ (car les h_P sont forcément distincts). Par Löwenheim-Skolem descendant, il existe donc $\mathcal{H} \vDash T'$ de cardinal $2^{|G|}$.

   Il y a aussi une autre preuve : construire un graphe $\mathcal{H}_0$ qui contient les nouveaux points h_P tels qu'on les veut, voir que $\mathcal{H}_0$ est alors de cardinal $2^{|G|}$ et ensuite appliquer l'argument de chaîne de la question 1 pour obtenir un sur-graphe $\mathcal{H} \vDash T$ qui est lui aussi de cardinal $2^{|G|}$.

7. On peut remarquer que dans la question 3 lorsqu'on prouve que K est non vide est lorsqu'on prouve le va, on n'utilise pas que $\mathcal{G}$ est aléatoire (juste que c'est un graphe). Il s'en suit donc que l'argument de la question 5 (en enlevant les étapes où on étend l'image) nous montre que tout graphe au plus dénombrable se plonge dans $\mathcal{G}$, en particulier c'est vrai pour les graphes finis.

   On peut aussi remarquer que tout graphe fini $\mathcal{H}$ se plonge dans un graphe aléatoire (dénombrable) $\mathcal{H}_0$ comme montré à la question 1. Par le théorème de Löwenheim-Skolemn descendant il existe $\mathcal{G}_0 \vDash T$ dénombrable qui se plonge dans $\mathcal{G}$. Mais comme $\mathcal{G}_0 \simeq \mathcal{H}_0$, on obtient bien un plongement de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$.

8. Sur un ensemble dénombrable de sommets, considérer des arêtes aléatoires, iid, de loi Bernoulli de paramètres $p \neq 0, 1$. Si l'on fixe un couple (S_1, S_2), le lemme de Borel-Cantelli nous assure que la propriété d'existence d'un point convenable est presque sûre.

   Il s'agit ensuite de vérifier que la collection des couples de sous-ensembles finis disjoints de l'ensemble des sommets, est dénombrable, puis de se rappeler qu'une intersection dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.

Exercice 2 (Espaces de types) **:**
Soient $\mathcal{L}$ un langage, M une $\mathcal{L}$-structure, et $A \subseteq M$. Un *n-type complet sur A* est un ultrafiltre sur l'algèbre de Boole $Def_A(M^n)$. On note $S_n^M(A)$, ou $S_n(A)$, l'espace de ces ultrafiltres, qui est aussi le spectre $Spec(Def_A(M^n))$. On rappelle qu'un tel espace est profini, i.e. compact et avec une base d'ouverts constituée d'ouverts-fermés.

1. Il s'agit d'appliquer la méthode des diagrammes et le théorème de compacité : on forme la théorie contenant le diagramme élémentaire de M et les formules en le uplet de variables x exprimant que x appartient aux ensembles définissables qui sont dans U. Comme U est un filtre, il est clos par intersections finies et ne contient pas $\varnothing$, ce qui permet de trouver des modèles de toute partie finie de cette théorie. On conclut en utilisant le théorème de compacité.

2. L'homéomorphisme $S_n^M(A) \to S_n^N(A)$ découle de l'isomorphisme d'algèbres de Boole $Def_A(M^n) \to Def_A(N^n)$ vu précédemment.

3. a) Le fait que c'est un filtre découle des définitions. Pour montrer que c'est un ultrafiltre, on constate que, pour tout ensemble A-définissable X, on a $\alpha \in X$ ou $\alpha \in M^n \setminus X$.

   b) Il s'agit de combiner les questions 1. et 3. a.

4. Il s'agit de constater que tout isomorphisme, étant un plongement élémentaire, préserve les types sur $\varnothing$.

   La réciproque est fausse : considérer, par exemple, $\mathbb{R} \models DLO$ et $\mathbb{R} \cup \mathbb{R} \models DLO$. Ces modèles ne sont pas isomorphes (l'un a la propriété de la borne sup, et pas l'autre), mais réalisent les mêmes types sur $\varnothing$.

5. Par élimination des quantificateurs dans la théorie des ordres linéaires denses sans extrémités, on peut appliquer le deuxième exercice du TD 2 : l'espace de Stone considéré alors est en fait un espace de types.

6. Par élimination des quantificateurs, les ultrafiltres $p \in S_1(G)$ non principaux, i.e. les points non isolés, sont déterminés par l'ensemble des $a \in G$ tels que $p \in [xRa]$.

Exercice 3 (Plongements élémentaires) **:**
Donnons-nous des symboles de constantes c_i^a, pour $i \in I$ et $a \in S_i$, ce qui nous donne un langage $\mathcal{L}_1$ plus grand. Il s'agit alors de trouver un modèle de la $\mathcal{L}_1$-théorie suivante : $T := \bigcup_{i\in I} Diag(S_i) \cup \{c_i^a = c_j^{f_{i,j}(a)} \mid i \in I,\ j \in I,\ i < j,\ a \in S_i\}$.
Par compacité, il suffit de trouver des modèles des parties finies $T_0 \subseteq T$. Or, comme l'ordre sur I est total, et que les plongements élémentaires $f_{i,j}$ forment une famille cohérente, on peut supposer qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que que tous les énoncés intervenant dans T_0 ne font apparaître que des symboles de constantes des S_i pour $i \leqslant i_0$. Alors, avec les interprétations naturelles des symboles de constantes, on peut enrichir S_{i_0} en une $\mathcal{L}_1$-structure qui est un modèle de T_0.
Plus précisément, on interprète c_i^a par l'élément $f_{i,i_0}(a)$, pour tout $i \leqslant i_0$ et $a \in S_i$. Alors, la méthode des diagrammes nous assure que, pour tout $i \leqslant i_0$, la structure S_{i_0} ainsi enrichie est un modèle de $Diag(S_i)$, car la fonction $f_{i,i_0} : S_i \to S_{i_0}$ est un plongement élémentaire. Le fait que les égalités $c_i^a = c_j^{f_{i,j}(a)}$ soient valides, pour $i < j \leqslant i_0$ et $a \in S_i$, découle de l'hypothèse faite sur les $f_{i,j}$.

Exercice 4 (Modèles de la théorie de $\mathbb{R}$) **:**

1. On utilise l'exercice 1 de cette feuille. En effet, pour n'importe quel ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$, l'ultrapuissance est un modèle de RCF. De plus, comme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, on montre en utilisant Cantor-Bernstein que ces ultrapuissances ont même cardinal que $\mathbb{R}$. Mais, il existe des infinitésimaux non nuls dans ces modèles, et il n'y en a pas dans $\mathbb{R}$. Or, un isomorphisme d'anneaux doit fixer les entiers et préserver l'ordre, donc envoyer des infinitésimaux sur des infinitésimaux. D'où le résultat.

2. a) L'anneau des entiers se plonge de manière unique dans M. Comme M est un corps, ce plongement s'étend en un unique plongement de l'anneau $\mathbb{Q}$ dans M, qui préserve l'ordre.

   La bonne définition de $r(a)$ découle de la propriété de la borne supérieure pour $(\mathbb{R}, <)$.

   b) On remarque que tout isomorphisme de $\mathcal{L}$-structures entre modèles de RCF doit fixer les entiers, donc les rationnels, et préserver l'ordre, donc être compatible avec les fonctions $r : a \mapsto sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$.

c) On peut construire une telle famille par récurrence. Soit M_0 un modèle dénombrable arbitraire de RCF. Alors, l'ensemble $X_0 = \{r(a) \mid a \in M_0\}$ est au plus dénombrable. Soit alors $x_0 \in \mathbb{R} \setminus X_0$. Soit $\mathcal{L}_1$ le langage des anneaux, enrichi de symboles de constantes pour les éléments de M_0, ainsi que d'un symbole de constante suplémentaire c_0. Considérons alors la $\mathcal{L}_1$-théorie $Diag(M_0) \cup \{(q < c_0) \wedge (c_0 < r) \mid q, r \in \mathbb{Q}, q < x_0 < r\}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on vérifie que cette théorie est cohérente/finiment satisfaisable. Par les théorèmes de compacité et de Löwenheim-Skolem, elle a donc un modèle *dénombrable* M_1. De plus, M_1 est naturellement une extension élémentaire de M_0, puisque $M_1 \vDash Diag(M_0)$. Par ailleurs, on vérifie facilement qu'on a $r(c_0^{M_1}) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus X_0$, ce qui entraîne que $r(M_0) \subsetneq r(M_1)$.

On construit alors par récurrence une suite $(M_n)_n$ de modèles dénombrables de RCF se plongeant élémentairement les uns dans les autres, et tels que $r(M_n) \subsetneq r(M_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.