Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

Corrigé du TD de Logique, feuille 3

Exercice 1 (Propriétés axiomatisables) **:**

1. Les ensembles infinis sont axiomatisables, mais pas finiment. En effet, on connaît une axiomatisation T, donnée par les $\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$, pour $n \geqslant 1$. Par compacité, s'il existait une axiomatisation finie, on pourrait extraire de T une sous-axiomatisation finie, ce qui serait absurde.

2. Les ensembles finis ne sont pas axiomatisables, car il existe des ensembles finis de cardinaux arbitrairement grands. Par compacité, toute théorie ayant des modèles finis arbitrairement grands a des modèles infinis.

3. Les graphes connexes ne sont pas axiomatisables. Disons qu'on travaille avec des graphes non orientés. Soit T une théorie dans le langage des graphes telle que tout graphe connexe est modèle de T. Pour tout entier n, soit φ_n une $\mathcal{L}$-formule en x, y exprimant que le sommet x est à distance au moins n du sommet y, pour la distance de graphe. Soit $T_1 = T \cup \{\varphi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Alors, T_1 est finiment satisfaisable, puisqu'il suffit de considérer, pour tout n, un graphe fini linéaire de longueur n. Par compacité, T_1 a donc un modèle (G, α). Mais alors, les sommets $\alpha(x)$ et $\alpha(y)$ ne sont pas dans la même composante connexe.

   Alternativement, on peut rajouter des symboles de constantes au langages, et travailler avec des énoncés.

4. Les corps de caractéristique nulle sont axiomatisables, mais pas finiment.

5. Les corps de caractéristique non nulle ne sont pas axiomatisables. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit φ_n l'énoncé $n \neq 0$. Si T est une éventuelle axiomatisation des corps de caractéristique non nulle, la théorie $T_1 := T \cup \{\varphi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est alors finiment satisfaisable, car il existe des nombres premiers arbitrairement grands. Donc, par compacité, T_1 a un modèle, qui est un corps de caractéristique nulle, ce qui contredit l'hypothèse sur T.

6. Le raisonnement est similaire à celui de la question 3. On ajoute une infinité de symboles de constantes c_n, $n < \omega$, au langage des ordres, ou bien on utilise une infinité dénombrables de variables $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On rajoute les axiomes exprimant que (c_n), ou (x_i), est une suite strictement décroissante. Alors, pour toute hypothétique axiomatization des bons ordres, la théorie augmentée est finiment satisfaisable, donc a un modèle, qui est un ordre contenant une suite strictement décroissante.

Exercice 2 (Infinitésimaux) **:**

1. La fonction $\overline{\mathbb{R}} \to \mathcal{R}$ est un plongement élémentaire, ce qui découle du théorème de Łoś. *Il s'agit d'un fait général : une ultrapuissance d'une structure S est toujours naturellement une extension élémentaire de S.* Par conséquent, les règles usuelles de calcul, notamment sur les inégalités, sont encore valables dans $\mathcal{R}$, puisqu'elles s'expriment au premier ordre dans $\mathcal{L}$.

2. Une fois ce constat fait, vérifier que I est un sous-groupe consiste à appliquer les définitions, et manipuler des inégalités. Pour trouver un élément non nul dans I, on peut par exemple considérer la classe de la suite $(\frac{1}{2^n})_n$ dans $\mathcal{R}$. Par le théorème de Łoś, comme l'ultrafiltre est non principal, l'élément ainsi défini est strictement positif, et est un infinitésimal. [On rappelle qu'un ultrafiltre sur une algèbre de Boole de la forme $\mathcal{P}(I)$ est non principal si et seulement s'il contient toutes les parties de complémentaire fini.] Le dernier point découle du fait que l'ensemble des entiers n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

3. Il s'agit de trouver une famille de suites dont les vitesses de croissance croissent assez vite, puis d'associer à chacune sa classe dans le quotient $\mathcal{R}$. Par exemple, définissons $u_{m,n} = 2^m$ si $n = 0$, $u_{m,n+1} = 2^{u_{m,n}}$. On peut alors définir $a_n = [u_{m,n}]_m \in \mathcal{R}$.

4. Supposons que F est continue en a. Soit $e \in I$. Montrons que $c := f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)$ est dans I. On choisit une suite (e_n) de réels représentant e. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{R} \models -1 < m \cdot c < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{m}$. Alors, par continuité de F en a, il existe $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que, pour tout $x \in Rr$, si $-\delta < x < \delta$, on a $-\varepsilon < F(a+x) - F(a) < \varepsilon$. Or e est un infinitésimal, donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid -\delta < e_n < \delta\}$ est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. Donc l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid -\varepsilon < F(a+e_n) - F(a) < \varepsilon\}$ est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. Ainsi, par le théorème de Łoś, on a $\mathcal{R} \models -1 < m \cdot c < 1$. Donc $c = f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)$ est bien un infinitésimal.

   Démontrons la réciproque, par contraposée. Supposons donc que F n'est pas continue en a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe $e_n \in \mathbb{R}$ tel que $-\frac{1}{n} < e_n < \frac{1}{n}$ et $(F(a+e_n) - F(a) > \varepsilon$ ou $F(a+e_n) - F(a) < -\varepsilon)$. Soit $e \in \mathcal{R}$ la classe de $(e_n)_n$. Alors, par le théorème de Łoś, l'élément e est un infinitésimal (non nul), et on a $\mathcal{R} \models f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a) > \varepsilon$ ou $\mathcal{R} \models f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a) < -\varepsilon$. Donc l'élément $f^{\mathcal{R}}(a+e) - f^{\mathcal{R}}(a)$ n'est pas un infinitésimal.

5. a) $\Leftrightarrow$ b) : On a en fait montré à la question précédente que F tend vers b en a ssi, pour tout $e \in I$, on a $f^{\mathcal{R}}(a+e) - b \in I$. Il suffit alors d'appliquer ce résultat à la fonction de taux d'accroissement.

   a) $\Leftrightarrow$ c) : Il s'agit d'appliquer le théorème de Łoś/ le fait qu'on a un plongement élémentaire. Plus précisément, soit $\varphi(y,z)$ une formule équivalente (aux abréviations près) à la formule $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \neq 0)\,[-\delta < x < \delta \longrightarrow -\varepsilon < \frac{f(y+x)-f(y)}{x} - z < \varepsilon]$. Soit α une assignation de variables envoyant y sur l'image de a dans $\mathcal{R}$ (qui est la classe d'équivalence de la suite constante égale à a), et envoyant z sur l'image de r dans $\mathcal{R}$. Soit β une assignation de variables envoyant y sur $a \in \mathbb{R}$, et envoyant z sur $r \in \mathbb{R}$. Alors, on a, par le théorème de Łoś, $\mathcal{R} \models \varphi(\alpha)$ si et seulement si l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{\mathbb{R}} \models \varphi(\beta)$ est dans $\mathcal{U}$, si et seulement si $\overline{\mathbb{R}} \models \varphi(\beta)$.

   Or, on constate que $\overline{\mathbb{R}} \models \varphi(\beta)$ si et seulement si la fonction F est dérivable en a, de dérivée r.

6. a) Argument de théorie des modèles : on constate que $Def^{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}}$ est constituée de sous-ensembles *définissables, avec paramètres dans* $\mathbb{R}$, de l'ensemble sous-jacent à la structure $\mathcal{R}$. De tels sous ensembles définissables sont définis par des formules du langage des ordres, à paramètres dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Łoś, si deux telles formules sont équivalentes dans $\mathcal{R}$, alors elles le sont aussi dans $\mathbb{R}$. On définit ainsi un isomorphisme d'algèbres de Boole $Def^{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}} \simeq Def^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}}$. Par dualité de Stone, on en déduit un homéomorphisme $S^{\mathcal{R}}(\mathbb{R}) \simeq S^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

   b) Pour $a \in \mathcal{R}$, on considère la collection, qu'on note $tp(a/\mathbb{R})$, des éléments $X \in Def^{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}}$ tels que $a \in X$. On vérifie en appliquant les définitions que $tp(a/\mathbb{R})$ est un ultrafiltre sur $Def^{\mathcal{R}}_{\mathbb{R}}$. Reste à montrer la surjectivité. Soit donc $\mathcal{U} \in S^{\mathcal{R}}(\mathbb{R})$. On identifie $\mathcal{U}$ à un élément de $S^{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Par un exercice du TD 2, on sait donc que $\mathcal{U}$ est de la forme a, a^+, a^-, $+\infty$ ou $-\infty$. Avec cette classification, on peut construire des réalisations explicites de $\mathcal{U}$.

Exercice 3 (Ultraproduits) **:**

1. Quitte à choisir une famille de bijections, on peut supposer que l'ensemble sous-jacent à S_n est égal à $\mathbb{N}$, pour tout n.

   Alors, pour tout $\varepsilon \in 2^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $f(\varepsilon) = (\sum_{i=0}^{n} \varepsilon(i) \cdot 2^i)_n$. Alors, par unicité de la décomposition en base 2, si $\varepsilon_1(i) \neq \varepsilon_2(i)$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$, alors on a $f(\varepsilon_1)(k) \neq f(\varepsilon_2)(k)$ pour tout $k \geqslant i$. Comme l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est non principal, il contient toutes les parties cofinies de $\mathbb{N}$. Ainsi, la composée de f avec le passage au quotient définit une injection $\overline{f} : 2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow S = \prod_{n \to \mathcal{U}} S_n$. On conclut en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein.

2. Par le théorème de Łoś, la structure S est finie si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait $\{n \in \mathbb{N} \mid |S_n| \leqslant k\} \in \mathcal{U}$.

   Dans le cas contraire, on va montrer que S est en bijection avec $2^{\mathbb{N}}$. On veut, comme précédemment, construire une injection $\overline{f} : 2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow S$. Quitte à choisir des bijections, on peut supposer que, pour tout n, l'ensemble sous-jacent à S_n est l'ensemble $\{0, \ldots, |S_n| - 1\}$.

   Par hypothèse, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $E_k := \{n \in \mathbb{N} \mid |S_n| > k\}$ est dans $\mathcal{U}$. On définit alors, en s'inspirant de la question précédente, une fonction $f : 2^{\mathbb{N}} \to \prod_n S_n$, en décrétant que

$f(\varepsilon)(n) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon(i) \cdot 2^i$, où m est le plus grand entier inférieur ou égal à n tel que $\sum_{i=0}^{m} \varepsilon(i) \cdot 2^i \leqslant |S_n| - 1$, s'il existe, et $f(\varepsilon)(n) = 0 \in S_n$ sinon.

La propriété qu'on obtient est la suivante : si $\varepsilon_1(i) \neq \varepsilon_2(i)$, alors, pour tout $n \in E_{2^{i+1}} \cap [i, +\infty[$, on a $f(\varepsilon_1)(n) \neq f(\varepsilon_2)(n)$. Or, l'ensemble $E_{2^{i+1}} \cap [i, +\infty[$ est dans l'ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$. Donc, par le théorème de Łoś, la fonction $\overline{f} : 2^{\mathbb{N}} \to S$ induite par f est injective.

3. Donnons-nous une énumération de Σ : $\Sigma = \{\varphi_n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout k, soit ψ_k la conjonction des φ_n pour $n < k$. Par convention, $\psi_0 = \top$. Alors, on a $S \vDash \forall x \, \psi_{k+1}(x) \to \psi_k(x)$ et $S \vDash \exists x \, \psi_k(x)$, pour tout k. De plus, il suffit de trouver un $a \in S$ réalisant tous les ψ_k.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $l = l(k) \leqslant k$ maximal tel que $S_k \vDash \exists x \, \psi_l(x)$. Choisissons un élément b de S_k tel que $S_k \vDash \psi_l(b)$, et posons $a_k := b$.

   On vérifie alors que la classe a de la suite $(a_k)_k$ dans S réalise tous les ψ_k.

Exercice 4 (Modèles non-standard de l'arithmétique) **:**

1. Soit c une nouvelle constante. On pose $T^\star = T \cup \{\exists x, \ \bar{n}x = c : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. Par le théorème de compacité, la théorie $T^\star$ est consistante si et seulement si tout bout fini de T l'est, i.e. $T \cup \{\exists x, \ \bar{n}x = c : 0 < n < k\}$. Il suffit alors de prendre comme modèle $\mathcal{N}$ où c est interprété par $k!$. Un modèle $\mathcal{M}$ de $T^\star$ est bien un modèle de T contenant un point $c^{\mathcal{M}}$ qui est divisible par tout $\bar{n}$ pour $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, en particulier, il est plus grand que tout $\bar{n}$.

2. Si $\mathcal{M} \vDash \exists x \neg \varphi[x]$ alors $\mathcal{N} \vDash \exists x \neg \varphi[x]$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{N} \vDash \neg \varphi[\bar{n}]$ et donc $\mathcal{M} \vDash \neg \varphi[\bar{n}]$. On a montré la contraposée de la question.

3. Soit $\varphi[x]$ tel que $\mathcal{M} \vDash \varphi[m]$ si et seulement si $m = \bar{n}$ pour un $n \in \mathbb{N}$. En particulier $\mathcal{M} \vDash \varphi[\bar{n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc par la question précédente $\mathcal{M} \vDash \forall x \ \varphi[x]$, ce qui est absurde.

Exercice 5 (Groupes pseudo-finis) **:**

1. Soit φ_n l'énoncé exprimant qu'il existe au plus n éléments. La théorie $T = T_0 \cup \{\neg \varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ convient alors. De plus, tous les G_i étant des groupes, ils sont tous modèles des énoncés de la théorie des groupes qui est donc incluse dans T_0. Donc tout modèle de T_0, et a fortiori tout modèle infini de T_0, est un groupe.

2. Montrons que $\sup\{|G_i| \,|\, i \in I\} = \omega$ est nécessaire et suffisant. En effet si $\sup\{|G_i| \,|\, i \in I\} = n < \omega$, l'énoncé $\varphi_n = \forall x_0 \forall x_n \ \bigvee_{i<j} x_i = x_j$ est vrai dans tout G_i et est donc dans T_0, qui ne peut donc avoir de modèle de cardinal plus grand que n.

   Réciproquement, si $\sup\{|G_i|\} = \omega$, la théorie T est consistante, i.e. T_0 admet un modèle infini. En effet, par compacité, il suffit de considérer $T' \subseteq T$ fini, i.e. $T' \subseteq T_0 \cup \{\neg \varphi_n : n < m\}$. Mais alors tout G_i de cardinal strictement plus grand que m est modèle de T'.

3. Par le théorème de compacité, tout énoncé φ qui est conséquence de T est conséquence d'une partie finie de T, qui est incluse dans $T_0 \cup \{\neg \varphi_n : n < m\}$ pour un certain m. L'énoncé φ est donc vérifié dans tout G_i de cardinal plus grand que m. Réciproquement, si φ est vrai dans tous les G_i de cardinal plus grand qu'un certain m, alors la formule $\varphi_m \to \varphi$ est vraie dans tous les G_i et est donc vraie dans tout modèle de T_0. Les modèles infinis de T_0 étant tous modèles de φ_m, il s'ensuit que φ est vraie dans tout modèle de T.

Exercice 6 (Compacité) **:**

1. L'une des implications est claire. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont tous les sous-graphes finis sont k-coloriables. Montrons que G est lui-même k-coloriable. Soient $v_{x,i}$, pour $x \in S$ et $i < k$, des variables propositionnelles. Notons $V = \{v_{x,i} \,|\, x \in S, \ i < k\}$. Soit $\Phi \subseteq \mathcal{F}(V)$ l'ensemble contenant les

formules suivantes : $(\bigwedge_{i<k} v_{x,i}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg(v_{x_i} \wedge v_{x,j})$, pour tout $x \in S$, et $\bigwedge_{i<k} \neg(v_{x,i} \wedge v_{y,i})$, pour tout couple $(x,y) \in A$.

Alors, on vérifie que se donner un k-coloriage de G équivaut à se donner un $\delta : V \to \{0,1\}$ tel que $\delta \vDash \Phi$.

Soit $\Phi_0 \subseteq \Phi$ une partie finie de Φ. Alors, les formules de Φ_0 ne font intervenir qu'un nombre fini de sommets. Donc, par l'hypothèse sur les sous-graphes finis de Φ, il existe $\delta : V \to \{0,1\}$ tel que $\delta \vDash \Phi_0$. Cela vaut pour tout Φ_0 fini inclus dans Φ. Donc, par compacité de la logique propositionnelle, il existe un $\delta : V \to \{0,1\}$ tel que $\delta \vDash \Phi$, comme voulu.

2. Montrons que tout ordre partiel s'étend en un ordre total. Soit $(X, \leqslant)$ un ordre partiel. Donnons-nous des variables propositionnelles $v_{x,y}$, pour $x, y \in X$. Soit V l'ensemble de ces variables, et soit $\Phi \subseteq \mathcal{F}(V)$ l'ensemble contenant les formules suivantes :

   - $v_{x,y}$, pour tous $x, y \in X$ tels que $x \leqslant y$.
   - $v_{x,x}$ pour tout $x \in X$.
   - $\neg(v_{x,y} \wedge v_{y,x})$, pour tous $x \neq y$ dans X.
   - $v_{x,y} \wedge v_{y,z} \to v_{x,z}$ pour tous x, y, z dans X.
   - $v_{x,y} \vee v_{y,x}$, pour tous x, y dans X.

   Alors, il y a une bijection entre les $\delta : V \to 2$ tels que $\delta \vDash \Phi$, et les ordres totaux sur X étendant l'ordre $\leqslant$. Par compacité de la logique propositionnelle, il reste alors à vérifier que toute partie finie de Φ a un modèle. Il s'agit alors de montrer que tout ordre partiel *sur un ensemble fini* s'étend en un ordre total. Pour cela, on peut raisonner par récurrence sur le cardinal de l'ensemble : si l'ensemble a au plus un élément, il n'y a rien à faire. Sinon, on choisit un élément *minimal* pour l'ordre donné, qui existe par finitude, et on décrète que cet élément est le *minimum* pour l'ordre qu'on veut définir. Il reste alors à ordonner les éléments restants, ce qu'on fait par induction. On vérifie alors qu'à chaque étape, la relation binaire étendue est un ordre partiel étendant celui de départ.