École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 2

Exercice 1. *Propriétés de l'entropie topologique*

Soient $(X, \mathrm{d}_X), (Y, \mathrm{d}_Y)$ des espaces métriques compacts et des transformations continues $f : X \to X$ et $g : Y \to Y$.

1. Soit $\Lambda \subset X$ un fermé f-invariant. Montrer que $h_{\mathrm{top}}(f|_\Lambda) \leq h_{\mathrm{top}}(f)$.
2. Soient $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ des fermés f-invariants de X tels que $X = \bigcup_{j=1}^m \Lambda_j$. Montrer que $h_{\mathrm{top}}(f) = \max_{1\leq j \leq m} h_{\mathrm{top}}(f|_{\Lambda_j})$.

Exercice 2. *Entropie des transformations Lipschitziennes*

Soit (X, d) un espace métrique compact. On définit

$$\mathrm{bdim}(X) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log M(X, \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$$

où $M(X, \varepsilon)$ est le nombre minimal de ε-boules (pour la distance d) qu'il faut pour recouvrir X.

1. Montrer que $\mathrm{bdim}\left([0,1]^n\right) = n$.

Soit $f : X \to X$ une application Lipschitzienne et

$$L(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\mathrm{d}(f(x), f(y))}{\mathrm{d}(x, y)}$$

sa constante de Lipschitz.

2. Montrer que
$$h_{\mathrm{top}}(f) \leq \mathrm{bdim}(X) \max(0, \log L(f)). \tag{1}$$
3. Donner un exemple d'application f telle que (1) soit une égalité.

Exercice 3. *Automorphismes linéaires du tore de dimension 2*

On note $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore de dimension 2. On appellera *feuilletage* de $\mathbf{T}^2$ une partition $\mathbf{T}^2 = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} F$ où pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe une immersion $\mathbf{R} \to \mathbf{T}^2$ (i.e. une application $\mathcal{C}^\infty$ de différentielle partout non nulle) d'image F.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme $f_A : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ associé à une matrice $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{Z})$ soit un automorphisme.

Dans toute la suite, A désigne une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$.

2. On suppose que $|\mathrm{tr}\, A| \in \{0, 1\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $(f_A)^n = \mathrm{id}_{\mathbf{T}^2}$.
3. On suppose que $|\mathrm{tr}\, A| = 2$. Montrer qu'il existe un feuilletage en cercles de $\mathbf{T}^2$, préservé par f_A et que f_A (resp. f_A^2) agit par rotation sur chacun des cercles si $\mathrm{tr}(A) = 2$ (resp. $\mathrm{tr}(A) = -2$). On dit que f_A est un *twist de Dehn*.
4. On suppose que $|\mathrm{tr}\, A| > 2$.
   (a) Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes λ, λ^{-1} avec $|\lambda| > 1$ et que les vecteurs propres associés ont des pentes irrationnelles.

(b) Montrer qu'il existe deux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ de $\mathbf{T}^2$, globalement préservés par f_A, tels que chaque feuille est dense dans $\mathbf{T}^2$, et tels que la différentielle de f_A multiplie par $\left|\lambda^{-1}\right|$ la norme des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^s$ et par $|\lambda|$ celle des vecteurs tangents aux feuilles de $\mathcal{F}^u$.

Exercice 4. *Entropie algébrique*

Soit G un groupe finiment engendré et $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ un système de générateur. Pour $\gamma \in G$ on définit

$$L(\gamma, \Gamma) = \min \left\{ \sum_{j=1}^{ks} |i_j| \;\middle|\; \gamma = \gamma_1^{i_1} \cdots \gamma_s^{i_s} \gamma_1^{i_{s+1}} \cdots \gamma_s^{i_{2s}} \cdots \gamma_s^{i_{ks}},\ i_j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Si $F \in \mathrm{Hom}(G, G)$ est un morphisme de groupe on note

$$L_n(F, \Gamma) = \max_{1 \le i \le s} L(F^n \gamma_i, \Gamma), \quad n \in \mathbf{N}.$$

1. Montrer que la limite
$$h(F, \Gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log L_n(F, \Gamma)$$
existe.
2. Montrer que si Γ' est un autre système de générateurs, alors $h(F, \Gamma) = h(F, \Gamma')$.

On définit l'*entropie algébrique* $h_{\mathrm{alg}}(f)$ de f par $h_{\mathrm{alg}}(F) = h(F, \Gamma)$ pour n'importe quel système de générateur Γ.

3. Montrer que $h_{\mathrm{alg}}(I_{\gamma_0} F) = h_{\mathrm{alg}}(F)$ pour tout $\gamma_0 \in G$ où $I_{\gamma_0} \in \mathrm{Hom}(G, G)$ est défini par $I_{\gamma_0}(\gamma) = \gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0$.

Soit M une variété connexe compacte, $x_\star \in M$ et $G = \pi_1(M, x_\star)$. Soit α un chemin dans M joignant $x_\star$ à $f(x_\star)$. Soit f une transformation continue de M ; on définit $F_{x_\star, \alpha} \in \mathrm{Hom}(G, G)$ par

$$F_{x_\star, \alpha} \gamma = \alpha^{-1} (f \circ \gamma) \alpha.$$

4. On admet que G est finiment engendré. Montrer que $h_{\mathrm{alg}}(F_{x_\star, \alpha})$ ne dépend pas des choix de $x_\star$ et de α.

Le nombre $h_{\mathrm{alg}}(f)$ défini par $h_{\mathrm{alg}}(f) = h_{\mathrm{alg}}(F_{x_\star, \alpha})$ pour n'importe quel choix de $x_\star, \alpha$ est appelé *entropie algébrique* de f. On peut montrer que

$$h_{\mathrm{alg}}(f) \le h_{\mathrm{top}}(f).$$