École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 7

Exercice 1. *Critère de mélange fort*

Soit $(T, X, \mathcal{X}, \nu)$ un système dynamique pmp. Montrer que $(T, X, \mathcal{X}, \nu)$ est mélangeant si et seulement si, pour une base hilbertienne donnée Φ de $L^2(X, \mathcal{X}, \nu)$ et pour tout $\varphi, \psi \in \Phi$, on a

$$\int_X \varphi(T^n x)\bar{\psi}(x)\, d\nu \longrightarrow \left(\int_X \varphi\, d\nu\right)\left(\int_X \bar{\psi}\, d\nu\right) \text{ quand } n \to \infty.$$

Exercice 2. *Décroissance surexponentielle des corrélations pour les applications dilatantes du cercle*

Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ on note E_m la multiplication par m sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

1. Montrer que E_m est fortement mélangeante pour la mesure de Haar μ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$.
   (a) Montrer que pour tout $N > 0$, il existe $C > 0$ telle que
   $$\left|\int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi(\theta)\mathrm{e}^{-2i\pi k\theta}\mathrm{d}\mu(\theta)\right| \leq \frac{C}{|k|^N}, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$
   (b) En déduire que pour tout $r > 0$, il existe $C > 0$ telle que
   $$\left|\int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi\left(\psi \circ E_m^j\right)\mathrm{d}\mu - \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi\mathrm{d}\mu \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi\mathrm{d}\mu\right| \leq C\mathrm{e}^{-rj}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Exercice 3. *Théorème de Rényi pour le mélange*

Montrer qu'un système dynamique pmp $(T, X, \mathcal{X}, \nu)$ est fortement mélangeant si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{X}$

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A \cap T^{-n}(A)) = \nu(A)^2.$$

Exercice 4. *Un critère pour le mélange faible*

Un ensemble $E \subset \mathbf{N}$ d'entiers est dit de densité nulle si

$$\lim_n \frac{1}{n}\#\Big(\{1, \ldots, n\} \cap E\Big) = 0.$$

Inversement, une suite strictement croissante d'entiers (n_j) est de densité 1 si l'ensemble complémentaire $\complement\{n_j,\ j \in \mathbf{N}\}$ est de densité nulle.

1. Soit (a_n) une suite de nombre complexes bornés. Montrer que $\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|a_n| = 0$ si et seulement si, il existe un ensemble de densité nulle E tel que $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin E}} a_n = 0$.

2. Soit $(T, X, \mathcal{X}, \nu)$ un système dynamique pmp. Montrer que T est faiblement mélangeante si et seulement si il existe une suite d'entiers (n_j) de densité 1 telle que

$$\lim_j \nu\big(T^{-n_j}(A) \cap B\big) = \nu(A)\nu(B), \quad A, B \in \mathcal{X},$$

ou encore si et seulement si

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\nu(T^{-k}(A) \cap B) - \nu(A)\nu(B)\Big)^2 = 0, \quad A, B \in \mathcal{X}.$$

Exercice 5. *Bien fondé de la définition de mélange*

Dans cet exercice, on cherche à montrer que si $(T, X, \mathcal{X}, \nu)$, un système dynamique pmp, possède la propriété que pour tout $A, B \in \mathcal{X}$, il existe N tel que

$$\nu(A \cap T^{-n}(B)) = \nu(A)\nu(B) \tag{1}$$

pour tout $n \geq N$, alors il est trivial dans le sens que $\nu(A) \in \{0, 1\}$ pour tout $A \in \mathcal{X}$. On suppose dans la suite que la propriété 1 est vérifiée.

1. Définissons $\mathcal{S} = \mathcal{X}(\mod \nu)$ l'ensemble des parties mesurables modulo les parties négligeables. Montrer que $(\mathcal{S}, d)$ est un espace métrique complet, où $d(A, B) = \nu(A \Delta B)$ pour $A, B \in \mathcal{S}$.

2. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{S}$ tel que $0 < \nu(B) < 1$. On définit pour $N \in \mathbf{N}$

$$\Lambda_N = \{A \in \mathcal{S} \,:\, \forall n \geq N,\ \nu(A \cap T^{-n}(B)) = \nu(A)\nu(B)\}.$$

Montrer que les $(\Lambda_N)_N$ sont des fermés d'intérieurs vides.

3. Conclure.