TD 1 : Révisions et espaces métriques

Définitions. Un espace métrique est la donnée d'un ensemble X et d'une application distance $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que
- (séparation) pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (symétrie) pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- (inégalité triangulaire) pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ est $B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$.
Une partie $O \subset X$ est ouverte si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$.
Une partie $F \subset X$ est fermée si elle est le complémentaire d'un ouvert.
Une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$, et on note $x_n \to x$, si $d(x_n, x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
X est compact (au sens de Bolzano-Weierstrass) si de toute suite, on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 1 : Intérieur et Adhérence

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer qu'une union quelconque d'ouverts de X est encore un ouvert. Que dire d'une intersection quelconque d'ouverts ? D'une intersection finie d'ouverts ?
2. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé. Que dire d'une union quelconque de fermée ? D'une union finie de fermés ?
3. Soit A une partie de X. Comment définir, avec ce qui précède, le plus grand ouvert inclus dans A ? On l'appelle intérieur de A et on le note $\mathring{A}$. Comment définir le plus petit fermé qui contient A ? On l'appelle adhérence de A et le note $\overline{A}$.
4. a) Montrer que l'adhérence de A est l'ensemble des limites possibles pour les suites à valeurs dans A :
$$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \longrightarrow x\}.$$
   b) Montrer que l'adhérence de A est le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A.
5. Au maximum, combien de sous-ensembles distincts peut-on créer en composant les opérations "prendre l'adhérence d'une partie" et "prendre l'intérieur d'une partie" : $A,\ \mathring{A},\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}}, \dots$?

Exercice 2 : A vos suites

1. Dans $\mathbb{R}$, pour la distance usuelle, quelle est l'adhérence de :
   a) un singleton $\{x\}$?
   b) $\mathbb{Q}$?
   c) l'ensemble des valeurs d'une suite convergente $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, où $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, quelle est l'adhérence de :
   a) $\mathbb{R} \times \{0\}^{n-1}$?
   b) si $n = 2$, la partie de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\{(x, \sin(\frac{1}{x})),\ \mid x > 0\}$?

3. Dans l'ensemble des fonctions bornées continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$, quelle est l'adhérence des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact ?
4. Dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie, quelle est l'adhérence de l'ensemble des fonctions continues, affines sur les segments $[2^{-n-1}, 2^{-n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 : Un produit dénombrable d'espaces métriques

Soit $((X_i, d_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques. On considère l'espace produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ dont les éléments sont les suites $(x_i)_{i\in I}$ telles que pour tout $i \in I, x_i \in X_i$.

1. **Préliminaires : Convergence dominée pour les séries.** Soient $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de suites réelles, $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :
   - $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n,k} \to l_k$ quand $n \to \infty$;
   - $\forall k, n \in \mathbb{N}^2, |u_{n,k}| \leq |d_k|$;
   - $\sum_{k\in\mathbb{N}} |d_k| < +\infty$.

   Montrer que la suite $s_n \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{N}} u_{n,k}$ est bien définie et converge vers une limite que l'on déterminera.
2. On définit sur $X \times X$ l'application
$$d : (x,y) \in X \times X \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \min(1, d_i(x_i, y_i))$$
   Montrer que d définit une distance sur X.
3. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $x \in X$. Montrer l'équivalence $(\star)$:
$$x_n \to x \iff \forall i \in \mathbb{N}, (x_n)_i \to_{n\to\infty} x_i$$
4. Montrer que si pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_i est compact, alors il en va de même pour (X, d).

Exercice 4 : Distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$. Pour $A \in \mathcal{K}$, on pose
$$d_A : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \inf_{a\in A} |x - a|$$
Enfin, pour A et $B \in \mathcal{K}$, on définit $\delta(A,B) = ||d_A - d_B||_\infty$.

1. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{K}$, $\delta(A,B)$ est bien défini et que δ est une distance. (On l'appelle la distance de Hausdorff).
2. Pour $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{K}$, on pose
$$V_\varepsilon(A) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^d ; d_A(x) \leq \varepsilon\}$$
   Soient A et $B \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que $\delta(A,B) \leq \varepsilon \iff A \subset V_\varepsilon(B)$ et $B \subset V_\varepsilon(A)$.

3. On note $\mathcal{K}_0$ l'ensemble des parties finies non vides de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $\mathcal{K}$. *Indication : on pourra montrer que si $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$.*

Exercice 5 : Distance ultramétrique

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que d est ultramétrique si elle vérifie de plus la propriété (plus forte que l'inégalité triangulaire) :

$$\forall x, y, z \in X, d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$$

1. Montrer que pour tous $x, y, z \in X$, $d(x,y) \neq d(y,z) \implies d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.
2. Montrer que tout point d'une boule ouverte en est un centre.
3. Étant donnée deux boules ouvertes, montrer que ou bien l'une est incluse dans l'autre, ou bien elles sont disjointes.
4. (**Exemple : La distance p-adique**). Soit p un nombre premier. Tout nombre rationnel non nul x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = p^n \frac{a}{b}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{N}^*$ premiers avec p et premiers entre eux et on pose $v_p(x) = n$. On définit sur $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,

$$d_p(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ p^{-v_p(x-y)} \text{ sinon} \end{cases}$$

   a) Montrer que d_p définit une distance ultramétrique.
   b) Montrer que $p^n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6 : Limites supérieure et inférieure

Soit (u_n) une suite réelle. On définit les quantités suivantes, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

$$\liminf_n u_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} u_k \quad , \quad \limsup_n u_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u_k$$

1. Vérifier que les suites $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sup_{k \geq n} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes. En déduire que :

$$\liminf_n u_n := \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} u_k \quad ; \quad \limsup_n u_n := \lim_{n \to +\infty} \sup_{k \geq n} u_k$$

2. a) On suppose que (u_n) est majorée. Montrer que $l = \limsup_n u_n$ est une valeur d'adhérence de (u_n) i.e. il existe une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\phi(n)} \to l$.
   b) Que dire si (u_n) est minorée ? Quel théorème est ainsi démontré ?
   c) Que dire si (u_n) est non majorée ? non minorée ?
3. Soit l une valeur d'adhérence de (u_n). Montrer que $\liminf_n u_n \leq l \leq \limsup_n l$.
4. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\limsup_n u_n = \liminf_n u_n$ et que dans ce cas, $\lim_{n \to \infty} u_n = \limsup_n u_n = \liminf_n u_n$. On pourra se contenter du cas (u_n) bornée.

5. a) Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles telles pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Vérifier que

$$\liminf_n u_n \leq \liminf_n v_n \quad ; \quad \limsup_n u_n \leq \limsup_n v_n$$

   b) Réinterpréter le "théorème des gendarmes" à partir de ces constatations.

6. **Applications.**
   a) **Théorème de Cauchy-Hadamard.** Soit (a_n) une suite complexe. Montrer que le rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$ de la sérié $\sum a_n z^n$ est donné par la formule :

$$\frac{1}{R} = \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

   b) **Lemme de Fekete.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle sous-additive i.e. telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}, u_{n+m} \leq u_n + u_m$.
      i – Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'il existe $c_k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k} + \frac{c_k}{n}$$

      ii – En déduire que $\frac{u_n}{n} \to \inf_k \frac{u_k}{k} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

   c) Soit (E, d) un espace métrique. On considère deux suites de fonctions de E dans $\mathbb{R}$, $(f_n), (g_n)$ et $f : E \to \mathbb{R}$ telles que :
      (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont continues ;
      (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, $f_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$;
      (c) Pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x), g_n(x) \to f(x)$.

   Montrer que f est continue.

Pour aller plus loin

Exercice 7 : Ensemble triadique de Cantor

Soit $\mathcal{T}_k$, $k \in \{0,1,2\}$ l'application qui à un intervalle $I = [a,b] \subset [0,1]$ lui associe l'intervalle de $[0,1]$, $J = [a + \frac{k(b-a)}{3}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{3}]$. On définit par récurrence une suite de familles finies d'intervalles compacts de $[0,1]$ par $I_0 = \{[0,1]\}$ et

$$I_{n+1} = \bigcup_{I \in I_n} \{\mathcal{T}_0(I), \mathcal{T}_2(I)\}$$

On pose alors $K_n = \bigcup_{I \in I_n} I$ et $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que K est compact.
2. Montrer que l'application
$$f : x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2x_n}{3^n} \in [0,1]$$
a pour image K et réalise un homéomorphisme, où l'on munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ de la distance de l'exercice 2.
3. Montrer que K est d'intérieur vide.

Exercice 8 : Théorème de plongement de Arens-Eells

Soit X un espace métrique, $x_0 \in X$, $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.
Pour tout $x \in X$, on note

$$f_x : A \in \mathcal{F} \mapsto d(x,A) - d(x_0,A) \in \mathbb{R}$$

Montrer que $x \mapsto f_x$ est une isométrie de X sur son image dans $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. En déduire que tout espace métrique est isométrique à un fermé d'un sous-espace vectoriel normé.

Exercice 9 : Théorème de plongement de Tietze

On souhaite démontrer le théorème suivant :

Théorème. Soient (X,d) un espace métrique, $F \subset X$ fermé et $f : F \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Alors il existe une application continue $g : X \to \mathbb{R}$ prolongeant f et ayant mêmes bornes inférieures et supérieures.

On considère donc X, F et f comme dans l'énoncé.

1. Pourquoi peut-on supposer que $m = \inf_{x \in F} f(x) > 0$? C'est ce que nous supposerons par la suite.
On définit g comme suit : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in F \\ \inf_{y \in G} f(y) \frac{d(x,y)}{d(x,F)} \text{ sinon} \end{cases}$
2. Vérifier que g est bien définie et que g prolonge f.
3. Montrer que f et g ont même bornes.
4. Montrer que g est continue et conclure.