Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 `laslier@dma.ens.fr`

TD1 : Tribus, mesurabilité, liminf et limsup

Exercice 1. [Limsup et liminf de suites] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

1. Expliquer pourquoi les deux limites ci-dessus sont nécessairement bien définies.
2. Calculer $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n$ et $\liminf_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
4. Vérifier que a_n converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell$.
5. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

   A-t-on toujours $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$?

Exercice 2. [Union et intersection de tribus]

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.
2. Pour chaque entier n soit $\mathcal{F}_n$ la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 3. [Restriction d'une tribu] Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur E et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

Exercice 4. [Image directe] Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit F un ensemble et soit $f : E \to F$ une application. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas en général une tribu sur F.

Exercice 5. [Tribu image réciproque] Soit E un ensemble et soit $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $f : E \to F$ une application. On définit $\mathcal{E} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu sur E.
2. Vérifier qu'il s'agit de la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable de E dans $(F, \mathcal{F})$.
3. Soit Y un ensemble fini muni de la tribu $\mathcal{P}(Y)$ constituée de toutes les parties de Y. Soit $g : (E, \mathcal{E}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ une application mesurable. Montrer qu'il existe $h : (F, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ mesurable tel que $g = h \circ f$.

Pour aller plus loin

Exercice 6. [Dénombrabilité] Déterminer le cardinal (fini, dénombrable, en bijection avec $\mathbb{R}$...) des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
2. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$,
3. l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
4. l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Exercice 7. [Quelques exemples de tribus] Donner des conditions sur l'ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

1. $\{\emptyset, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
2. $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
3. La classe des singletons de E.
4. La classe des parties finies de E.
5. La classe des parties dénombrables de E.
6. La classe des parties finies ou cofinies de E. (On dit qu'une partie est cofinie si son complémentaire est fini).
7. La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. (On dit qu'une partie est codénombrable si son complémentaire est dénombrable).

Exercice 8. [Tribu dyadique] On définit $\mathcal{B}_n = \sigma\left(\{(k/2^n, (k+1)/2^n], 0 \leq k \leq 2^n - 1\}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire la tribu $\mathcal{B}_n$. Quel est son cardinal ?
2. Montrer que la tribu engendrée par $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ est la tribu des boréliens de l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 9. [Tribu infinie] On montre ici qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.
Soit E un ensemble et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E. Pour tout $x \in E$, on introduit l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x comme l'ensemble $\dot{x} := \bigcap_{\{A\in\mathcal{A}: x\in A\}} A$.

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si la tribu $\mathcal{A}$ est dénombrable alors elle contient tous ses atomes et que tout élément de $\mathcal{A}$ peut être obtenu comme une union dénombrable d'atomes.
3. En déduire que si $\mathcal{A}$ est dénombrable alors $\mathcal{A}$ est finie.

Exercice 10. [Partie dénombrable engendrant une tribu] Soit E un espace, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(D)$.