Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 laslier@dma.ens.fr

TD5 : Intégrales à paramètres, théorèmes de Fubini

Exercice 1. [Une première utilisation de Fubini] Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant supposée σ-finie. Soit f mesurable positive.

1. Montrer que $\int_E f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(f > t)\, dt$.
2. Plus généralement montrer que si $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $g(0) = 0$ alors $\int_E g \circ f\, d\mu = \int_0^{\infty} g'(t)\mu(f > t)\, dt$.

Solution de l'exercice 1.

1. On remarque que par le théorème de Fubini

$$\int_0^{+\infty} \mu(f > t)\, dt = \int_0^{\infty} \int_E 1_{\{f>t\}} d\mu dt = \int_E \int_0^{\infty} 1_{\{f>t\}} dt d\mu$$
$$= \int_E f d\mu \ .$$

Ici on a utilisé le fait que l'application $\varphi : (t, x) \mapsto 1_{f(x)>t}$, qui va de $\mathbb{R}_+ \times E$ dans $\mathbb{R}$, était mesurable pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{A}$. En effet, il suffit de vérifier que l'ensemble suivant est mesurable

$$\varphi^{-1}(\{1\}) = \{(t, x) : f(x) > t\} \ ,$$

Or $(t, x) \mapsto (t, f(x))$ est bien mesurable de $\mathbb{R}_+ \times E$ dans $\mathbb{R}^2$ et $(u, v) \mapsto u - v$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ l'est aussi. Donc $\{(t, x) : f(x) > t\}$ est bien mesurable.

2. On a, par les mêmes arguments que précédemment :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g'(t)\mu(f > t)\, dt &= \int_0^{\infty} \int_E g'(t) 1_{\{f>t\}} d\mu dt \\ &= \int_E \int_0^{f} g'(t) dt d\mu \\ &= \int_E g \circ f d\mu \ .\end{aligned}$$

Exercice 2. [Lemme de Scheffé] Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que :

— $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout $x \in E$,

— $\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu < \infty$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)_+ \mathrm{d}\mu = 0$.
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Z_k = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2/k)^k} \mathrm{d}t$ et $f_k(t) = \frac{1}{Z_k(1+t^2/k)^k}$.
   (a) Montrer que $Z_k = \sqrt{k} A_k$, où $A_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} \mathrm{d}t$.

(b) Montrer que $A_{k+1} = \frac{2k-1}{2k} A_k$. En déduire un équivalent de A_k lorsque $k \to \infty$.

(c) Conclure que f_k converge dans L^1 vers la densité de la loi normale sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2.

1. On applique le théorème de convergence dominée, en utilisant l'inégalité $(f - f_n)_+ \leq f$, avec $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. On utiliser $|f - f_n| = 2(f - f_n)_+ - (f - f_n)$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \mathrm{d}\mu = 2 \lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)_+ \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = 0.$$

3. On observe par changement de variable et intégration par partie que

$$Z_k = \sqrt{k} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} = \sqrt{k} \frac{2k}{2k-1} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k-1}},$$

donc par formule de Stirling, on a $\lim_{k\to\infty} Z_k = \sqrt{\pi}$. On en déduit

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

et de plus $\int f_k(x) \mathrm{d}x = 1 = \int \frac{1}{\sqrt{pi}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$. On conclut par application du lemme de Scheffé *(ou bien on utilise le théorème de convergence dominée...)*.

Exercice 3. [Calculs]

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$. Comparez les valeurs de $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y)$ et $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x,y)$.
2. En considérant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$.
3. En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\mathrm{d}y$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1} \sin(x)\, e^{-tx} \mathrm{d}x \ .$$

Solution de l'exercice 3.

1. En remarquant que $x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - 2y^2$ au numérateur, une intégration par parties (on intègre $\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ et on dérive y) donne

$$\int_0^1 dy f(x,y) = \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+x^2} \ .$$

Donc $\int_0^1 dx \int_0^1 dy f(x,y) = \frac{\pi}{4}$ et par symétrie $\int_0^1 dy \int_0^1 dx f(x,y) = -\frac{\pi}{4}$. De ce fait le théorème de Fubini ne peut pas s'appliquer, et ainsi f n'est pas dans $L^1([0,1]^2)$.
En fait, $f(x,y) = -f(y,x)$ et $f(x,y) \geq 0$ sur $\{(x,y) \in [0,1]^2 : x \geq y\}$. Ainsi

$$\int_{[0,1]^2} |f| = 2 \int_{x=0}^1 \int_0^x f(x,y) dy dx \ .$$

En reprenant le calcul précédent on voit que

$$\int_0^x dy f(x,y) = \int_0^x \frac{dy}{x^2+y^2} + \frac{1}{2x} - \int_0^x \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2x} \ ,$$

qui n'est pas intégrable en 0.

2. Notons $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour tout $x, y \geq 0$. On a, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2y}\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{dy}{(1+y)} \frac{\pi}{2\sqrt{y}} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{2},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Or pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x,y)\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2-1}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right)\mathrm{d}y = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

3. Posons $G(x,y) = \cos(xy)\exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0,1]$ et $t > 0$. On a $|G(x,y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x,y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(x)}{x}e^{-xt}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}_+\times[0,1]} G(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}_+}\cos(xy)e^{-tx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{ixy}e^{-tx}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{t}{y^2+t^2}\mathrm{d}y \\ &= \arctan\left(\frac{1}{t}\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. [Intégrales à paramètre] Soit $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction mesurable pour les tribus boréliennes associées. On pose $F : x \in [0,\infty) \mapsto \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que F est continue.
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Solution de l'exercice 4.

1. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}$ vérifie la domination :

$$\frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2} \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)} \ .$$

Ainsi $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et par le théorème de convergence dominée, F est continue.

2. Soit $(x_n)_n \to +\infty$. On a

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{1+t^2} \to \frac{1}{1+t^2} 1_{\{f(t)\neq 0\}} \ .$$

Par la domination précédente, on en déduit que

$$F(x_n) \to \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} 1_{\{f(t)\neq 0\}} dt \ .$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée

$$\frac{f(t)}{1+(xf(t))^2} \frac{1}{1+t^2} = \frac{xf(t)}{1+(xf(t))^2} \frac{1}{x} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{1+t^2} \ .$$

Ainsi pour tout $a > 0$, pour tout $x \in [a, \infty)$ on a la domination

$$\frac{f(t)}{1+(xf(t))^2} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{a} \frac{1}{1+t^2} \ .$$

On conclue en bornant les taux d'accoroissement grâce à l'inégalité des accroissements finis et en appliquant le théorème de convergence dominé.

4. Si $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable alors la domination suivante

$$\frac{f(t)}{1+(xf(t))^2} \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{f(t)}{1+t^2} \ ,$$

permet d'appliquer le raisonnement précédent pour les intégrales à paramètres et de déduire que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \infty[$. (Bien que l'on travaille ici sur un fermé, la preuve du thórème s'applique.)
Supposons à présent que $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}$ n'est pas intégrable. On remarque que

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x)}{x} = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{xf(t)} \frac{f(t)}{1+t^2} dt \ .$$

Un calcul montre que $\arctan(u)/u$ est décroissante, et ainsi $\frac{\arctan(xf(t))}{xf(t)} \frac{f(t)}{1+t^2}$ croit vers $\frac{f(t)}{1+t^2}$ quand $x \downarrow 0$. Ainsi par le théorème de convergence monotone.

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \to \int_0^\infty \frac{f(t)}{1+t^2} dt \ .$$

Exercice D. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + x^2/t^2)} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation $F' = -2F$.
2. En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi} e^{-2|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu.$$

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Solution de l'exercice 5. La fonction F est positive donc $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \geq 0$. De plus, $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ donc d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(y)|\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f|\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} |g|\mathrm{d}\mu < \infty \ .$$

Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \mu)$. De même $fg \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ et μ est une mesure de probabilité, donc $(x, y) \mapsto f(x)g(x) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mu \otimes \mu)$. On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} F(x, y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) - 2\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) \ .$$

Et d'après le théorème de Fubini pour les fonctions intégrables, on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} fg\mathrm{d}\mu \ ,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)g(y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\mu \ ,$$

ce qui nous donne le résultat.

Exercice 6. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et soit $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$. On pourra considérer les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\} \ , \quad n \geq 1 \ , \quad \eta > 0.$$

Solution de l'exercice 6. On remarque que

$$\lambda(A_{\eta,n}) = \lambda(\frac{1}{n}\{y \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(y)| > \eta\}) = \frac{1}{n}\lambda(\{y \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(y)| > \eta\}) \ .$$

Par l'inégalité de Markov, on trouve

$$\lambda(A_{\eta,n}) \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}\eta} \int |f| d\mu \ .$$

Ainsi pour tout $\eta > 0$, on a $\sum_n \lambda(A_{\eta,n}) < \infty$, et par Borel-Cantelli on en déduit que

$$\lambda(\limsup_n A_{\eta,n}) = 0 \ .$$

On voit alors que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $k \geq 1$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $n^{-\alpha}|f(nx)| \leq 1/k$. C'est la propriété demandée.

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles, soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E et $\mathcal{B}$ une tribu sur F. Montrer que les sections d'un ensemble mesurable pour la tribu produit sont mesurables. Autrement dit, si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alors $C^y := \{x \in E \colon (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ pour tout $y \in F$ et $C_x := \{y \in F \colon (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in E$.

Solution de l'exercice 7. On pose $\Omega = E \times F$. On fixe $y \in F$. On considère l'ensemble $\mathcal{D}$ des parties $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ telles que $C^y \in \mathcal{A}$. Montrons que $\mathcal{D}$ est une tribu. Comme $\Omega^y = E$ on a $\Omega \in \mathcal{D}$. Par ailleurs, pour tout $C \in \mathcal{D}$, $(\Omega \backslash C)^y = E \backslash C^y$ donc $\Omega \backslash C \in \mathcal{D}$. Enfin pour toute suite $C_n \in \mathcal{D}$, on a $(\cup_n C_n)^y = \cup_n C_n^y \in \mathcal{A}$ donc $\cup_n C_n \in \mathcal{D}$.
On observe alors que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{B}$, $(A \times B)^y = A$ si $y \in B$ et $\emptyset$ sinon. Donc $A \times B \in \mathcal{D}$, et la tribu engendrée par cette classe, qui n'est rien d'autre que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, appartient donc à $\mathcal{D}$.
Le raisonnement est identique pour C_x.

Exercice 8. [Convolution] Pour f, g deux fonctions boréliennes positives, on pose

$$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int f(y) g(x - y) \mathrm{d}y.$$

1. Montrer que si f et g sont intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $f * g$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $0 < \lambda(A) < \infty$. Montrer que si $(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{-A})(x) > 0$ alors il existe $y, z \in A$ tels que $x = y - z$.
3. Soit $a \geq 0$, montrer que $\{x \in \mathbb{R} : f * g(x) \leq a\}$ est fermé. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, il existe $y \in A$ tel que $x + y \in A$.
4. On pose $F = \{x_a, a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$, où x_a est un représentant de $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans l'intervalle $[0, 1]$. En observant que $\{q + F, q \in \mathbb{Q}\}$ est une partition dénombrable de $\mathbb{R}$, montrer que F ne peut être mesurable.
5. Montrer que si $A \cap (q + F) \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(A \cap (q_0 + F)) > 0$.
6. En conclure que si A est de mesure de Lebesgue positive, alors il existe un ensemble $B \subset A$ tel que $B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 8.

1. Par théorème de Fubini-Tonelli et invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y f(y) g(x - y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x g(x - y) \right) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{d}x \times \int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{d}y < \infty.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y \in A\}} \mathbb{1}_{\{y - x \in A\}} \mathrm{d}x > 0$. La fonction $y \mapsto \mathbb{1}_{\{y \in A\}} \mathbb{1}_{\{y - x \in A\}}$ est non-nulle sur un intervalle de mesure de Lebesgue positive, donc en particulier en un point y_0. Alors $y_0 \in A$ et $z_0 = y_0 - x \in A$, et on a bien $x = y_0 - z_0$.

3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $f * g(x_n) \leq a$ pour tout n. On note x_∞ sa limite. Pour tout y, $f(y)g(x_n - y) \to f(y)g(x_\infty - y)$ donc par Fatou $f * g(x_\infty) \leq a$.
   On remarque que $\mathbb{1}_{\{A\}} * \mathbb{1}_{\{-A\}}(0) = \lambda(A) > 0$. D'après la première partie, on doit donc avoir $d(0, \{x : \mathbb{1}_{\{A\}} * \mathbb{1}_{\{-A\}}(x) \leq \lambda(A)/2\}) > 0$ et en particulier il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{1}_{\{A\}} * \mathbb{1}_{\{-A\}}(x) > \lambda(A)/2$ pour tout $x \in [-\delta, \delta]$. On conclue par le point 2.
4. Si F était mesurable, il existerait $c \in [0, 1]$ tel que $\lambda(F) = c$. On a alors
$$1 \leq \lambda(\cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(q + F)) = \infty.c \leq 3,$$
   puisque $[0, 1] \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(q + F) \subset [-1, 2]$, ce qui interdit toutes les valeurs possibles de c.
5. Si tous les ensembles de la forme $A \cap (q + F)$ sont mesurables, on a
$$\lambda(A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(A \cap (q + F)) > 0,$$
   par conséquent un terme au moins de la série est non-nulle.
6. Si $A \cap (q + F)$ est mesurable et de mesure de Lebesgue non-nulle, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, il existe $y \in A \cap (q+F)$ tel que $y+x \in A \cap (q+F)$. Par conséquent, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $y \in F$ et $x + y \in F$ ce qui est en contradiction avec la définition de F. On arrive ainsi à une contradiction : il existe nécessairement un rationnel q tel que $A \cap (q + F)$ n'est pas mesurable.