TD1 : Anneaux, Idéaux, Extensions de Corps

18/09/2023

Exercice 1 : Vrai ou Faux ?

Soit A un anneau.
1. Si a, b, u non nuls sont tels que $(a) = (b)$ et $a = bu$, alors $u \in A^\times$.
2. Si A est intègre, I principal et A/I est un anneau principal, alors A est principal.
3. Si A est principal, I un idéal propre, alors tout idéal de A/I est principal.
4. L'anneau des nombres décimaux est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(10X - 1)$.

Exercice 2 : Irréductibilité

Soit A un anneau intègre. On rappelle que $x \in A$ est *irréductible* si il n'est pas inversible et si dès que $x = ab$, alors a ou b est inversible.

1. Soit x non nul dans A. Montrer que si (x) est premier, alors x est irréductible dans A. La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que x non nul est irréductible ssi (x) est maximal dans l'ensemble des idéaux principaux propres de A.

3. Soit A un anneau principal et x non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

— x est irréductible.

— l'idéal (x) est premier.

— l'idéal (x) est maximal.

Exercice 3 : Nilradical et Radical de Jacobson

Soit A un anneau et I un idéal de A.

1. Notons $J = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ l'intersection des idéaux premiers contenant I. On veut montrer que $J = \sqrt{I} = \{x \in A, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

a. Vérifier que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

b. Montrer que $\sqrt{I} \subset J$.

c. Soit $a \in A \backslash \sqrt{I}$. En considérant $\mathcal{E}$ la famille constituée des idéaux qui contiennent I mais aucune puissance de a, montrer que $a \notin J$.

d. Conclure

2. On pose maintenant $\mathcal{J}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$ l'intersection des idéaux maximaux de A.

a. Montrer que $\mathcal{J}(A) = \{x \in A | \forall y \in A, 1 - xy \in A^\times\}$.

b. Montrer que $\mathcal{J}(A/\mathcal{J}(A)) = 0$.

Exercice 4 : Anneau des séries formelles

Soit K un corps et $A = K[[X]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficients dans K.
1. Montrer que A est intègre et déterminer $A^\times$.
2. Montrer que A possède un unique idéal maximal.
3. Montrer que A est principal

Exercice 5 : Irréductibilité de polynômes par extension

Soit K un corps, P un polynôme irréductible de degré n sur K. Soit L une extension finie de K de degré premier à n. Montrer que P est irréductible sur L. On pourra supposer que l'on peut plonger ces corps dans $K \subset L \subset \Omega$ où Ω est une clôture algébrique.

Exercice 6 : Degré d'extensions

Déterminer le degré des extensions suivantes de $\mathbb{Q}$:

— $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{18}, i\sqrt{7})$.

— $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$.

— $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$.

— $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{10} + \sqrt[3]{7})$.

Exercice 7 : Extensions de degré 2

Soit L une extension d'un corps K de degré 2.

1. On suppose que la caractéristique de K n'est pas 2. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L \simeq K[X]/(X^2 - a)$ (que l'on note par definition $K(\sqrt{a})$.

2. A quelle condition deux extensions de cette forme sont isomorphes ?

3. Décrire les K automorphismes de $K(\sqrt{a})$.

Exercice 8 : Polynômes minimaux

Soient K un corps et L une extension finie de K. Soient x, y deux éléments de L, et P_x, P_y leurs polynômes minimaux respectifs sur K. Montrer que P_x est irréductible sur $K(y)$ si et seulement si P_y est irréductible sur $K(x)$.

Exercice 9 : Idéaux premiers d'un anneau de polynômes

Soit A un anneau principal de corps des fractions K. Soit I un idéal premier non nul de $A[X]$.

1. Montrer que $I \cap A$ est un idéal maximal de A.

2.

a. On suppose $I \cap A = 0$. Soit J l'idéal de $K[X]$ engendré par I. Montrer que $I = J \cap A[X]$.

b. Montrer que I est principal, engendré par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

3. On suppose que $I \cap A$ est non nul, et on pose $k = A/(I \cap A)$. Montrer que I est engendré soit par $I \cap A$, soit par $I \cap A$ et un $P \in A[X]$ dont l'image dans $k[X]$ est irréductible.

4. En déduire que les idéaux premiers de $A[X]$ sont :

— (0).

— Les idéaux principaux engendrés par un polynôme non constant, irréductible et primitif.

— Les idéaux engendrés par un idéal maximal de A.

— Les idéaux engendrés par un idéal $\mathfrak{m}$ de A et un polynôme $P \in A[X]$ irréductible modulo $\mathfrak{m}$.

Peut-on dire lesquels sont maximaux ou non ?

5. Trouver les idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{C}[X, Y], \mathbb{Z}[X]$.

6. Soit α un entier algébrique, montrer que tout idéal premier non nul de $\mathbb{Z}[\alpha]$ est maximal.

Exercice 10 : Clôture algébrique de $\mathbb{Q}$

On considère l'extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. On note $K := \{x \in \mathbb{C}, x \text{ est algébrique sur } \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que si L est une extension algébrique de K dans $\mathbb{C}$, alors $L = K$.

2. Montrer que K est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Est-ce une extension finie de $\mathbb{Q}$?

3. Montrer que K est dénombrable. En déduire l'existence de réels transcendants sur $\mathbb{Q}$.