École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 9

Exercice 1. *Une autre version du théorème de Kolmogorov-Sinai*

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé, f une transformation de X préservant μ et α_n une suite croissante de sous-algèbres finies de $\mathcal{F}$ telle que $\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n\right) = \mathcal{F}$. Reprendre la démonstration du théorème de Kolmogorov-Sinai et montrer que

$$h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \alpha_n).$$

Exercice 2. *Entropie de certains systèmes inversibles*

Soit $(X, \mathcal{X}, T, \nu)$ un système dynamique pmp inversible. On suppose qu'il existe une partition finie mesurable ξ tel que la famille $\xi_n = \xi \vee T^{-1}(\xi) \vee \cdots \vee T^{-n+1}(\xi)$ forme une famille génératrice, i.e $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \xi_n) = \mathcal{X}$. Montrer que $h_\nu(T) = 0$.

Exercice 3. *Quelques propriétés de l'entropie métrique*

Soit $(X, \mathcal{X}, T, \mu)$ un système dynamique pmp.

1. Soit ν une autre mesure de probabilité préservée par T. Montrer que pour $t \in [0,1]$,
$$h_{t\mu+(1-t)\nu}(T) \geq t h_\mu(T) + (1-t) h_\nu(T).$$
2. Soit A un ensemble T-invariant avec $\mu(A) > 0$. Montrer que $h_\mu(T) = \mu(A) h_{\mu_A}(T|_A) + \mu(A^c) h_{\mu_{A^c}}(T|_{A^c})$.
3. Soient, pour $i \in \{1,2\}$ $(X_i, \mathcal{X}_i, T_i, \mu_i)$ deux systèmes dynamiques pmp sur des espaces standards. Montrer que
$$h_{\mu_1\otimes\mu_2}(T_1 \times T_2) = h_{\mu_1}(T_1) + h_{\mu_2}(T_2).$$
4. On suppose que $(X_2, \mathcal{X}_2, T_2, \mu_2)$ est un pmp facteur de $(X_1, \mathcal{X}_1, T_1, \mu_1)$. Montrer que $h_{\mu_2}(T_2) \leq h_{\mu_1}(T_1)$.

Exercice 4. *Entropie métrique et mesures boréliennes*

Soit (X, d) un espace métrique compact, μ une mesure de probabilité borélienne et $f : X \to X$ une transformation mesurable préservant μ.

1. Pour toute partition finie de boréliens $\mathcal{P}$ et tout $x \in X$, on note $\mathcal{P}(x)$ l'élement de $\mathcal{P}$ contenant x. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de partitions finies telle que pour tout $x \in X$,
$$\operatorname{diam} \mathcal{P}_n(x) \to 0.$$
Montrer que $h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n)$.
2. On suppose $X = S^1$, μ est la mesure de Haar et f est une rotation. Montrer que $h_\mu(f) = 0$.

Exercice 5. *Entropie métrique pour les applications expansives*

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation continue. On suppose que f est expansive, c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$,

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{d}(f^n(x), f^n(y)) < \delta \implies x = y.$$

1. Soit $\mathcal{P}$ une partition finie de X telle que $\operatorname{diam}(P) < \delta$ pour tout $P \in \mathcal{P}$, et μ une probabilité borélienne sur X préservée par f. Montrer que
$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P}).$$

2. En déduire l'entropie métrique des applications expansives E_m, $m \in \mathbf{N}^*$, du cercle pour la mesure de Haar.

Exercice 6. *Inégalité de Rokhlin*

Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de probabilité et $m \in \mathbf{N}$. Si $\xi = \{C_1, \dots, C_m\}$ et $\eta = \{D_1, \dots, D_m\}$ sont deux partitions mesurables finies de X, on note
$$d_R(\xi, \eta) = H_\mu(\xi|\eta) + H_\mu(\xi|\eta).$$

1. Montrer que pour toute partition α de cardinal m, on a $H_\mu(\xi|\eta) \leq H_\mu(\xi|\alpha) + H_\mu(\alpha|\eta)$.

2. En déduire que d_R est une distance sur l'ensemble des partitions mesurables finies de cardinal m de X (modulo les ensembles négligeables).

3. Montrer que pour toute transformation $f : X \to X$ préservant μ on a
$$|h_\mu(f, \xi) - h_\mu(f, \eta)| \leq d_R(\xi, \eta).$$

On définit une deuxième distance sur $\mathcal{P}_m$ par

$$D(P, Q) = \min_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sum_{i=1}^{m} \mu(P_i \Delta Q_{\sigma(i)}).$$

1. Montrer que D définit bien une distance sur $\mathcal{P}_m$.

2. Montrer que D et d_R sont deux distances topologiquement équivalentes.