Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 laslier@dma.ens.fr

TD3 : Intégration, théorèmes de convergence

Exercice 1. [Mise en jambes]

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que f_n converge simplement vers 0. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que pour tout $A > 0$, on a $\mu(|f| \geq A) \leq \frac{1}{A}\int_E |f|\mathrm{d}\mu$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que
$$\int |f|\mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \qquad \int |f|\mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow |f| < +\infty \quad \mu\text{-p.p.}$$
Que dire des réciproques de ces propriétés ?
4. Montrer qu'il existe une suite de fonctions mesurables (f_n) telle que
$$\liminf_{n\to+\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Solution de l'exercice 1.

1. C'est le théorème de convergence dominée. Pouvez-vous faire une démonstration en utilisant uniquement l'intégrale de Riemann, sans utiliser de résultat de la théorie de la mesure ?
2. On intègre l'inégalité $A\mathbb{1}_{\{|f|\geq A\}} \leq |f|$ sur E.
3. Ce sont deux conséquences immédiates de l'inégalité de Markov ci-dessus. La première réciproque est trivialement vraie, la seconde est immédiatement fausse (par exemple $x \mapsto 1/x$ est non-intégrable...).
4. On prend des fonctions pouvant être négatives, par exemple $f_n = -\mathbb{1}_{[n,n+1]}$ convient.

Exercice A. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction additive, i.e. telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On montre que si f est mesurable, alors f est linéaire (i.e. il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{Q}$, on a $f(qx) = qf(x)$.
2. Montrer que si le graphe de f n'est pas dense dans le plan, alors f est linéaire.
3. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(A) > 0$. Montrer que l'ensemble $A - A = \{x - y, x, y \in A\}$ contient un intervalle ouvert centré en 0.
4. Montrer que si f est mesurable, alors elle est bornée au voisinage de 0.
5. Conclure que si f est mesurable et additive, alors elle est linéaire.

Exercice 2. [Théorème fondamental de l'analyse] Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$.

1. Montrer que f' est mesurable pour la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

2. On suppose que f' est bornée. Montrer que $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$.
3. Trouver une fonction continue et presque partout dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(x)dx = 0.$$

Solution de l'exercice 2.

1. On pose $g_n(x) = n\mathbb{1}_{\{x\leq 1-1/n\}}(f(x+1/n) - f(x))$, on observe que g_n est mesurable, et que f' est la limite ponctuelle de la suite g_n. Donc f' est bien mesurable.
2. On note $M = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, par théorème des accroissements finis, on a $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$. Par conséquent, en appliquant le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\int_{1-1/n}^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{1/n} f(x)\mathrm{d}x\right) = f(1) - f(0)\end{aligned}$$

par continuité.
3. Un exemple est l'escalier du diable de Cantor, qui est une fonction continue croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(x) = 0$ pour tout x n'appartenant pas à l'ensemble de Cantor K_3 qui a une mesure de Lebesgue nulle. On peut le construire comme la limite uniforme de la suite de fonctions :

$$g_n(x) = (3/2)^n \int_0^x \mathbb{1}_{K_n}(y)\mathrm{d}y,$$

où $K_n = [0,1]\backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

Exercice 3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1[} f(x^n)\mathrm{d}x$.

Solution de l'exercice 3. La fonction f étant monotone, elle admet une limite à droite en 0 que l'on note $\alpha \in [0,+\infty]$. On pose $f_n(x) = f(x^n)$ et on raisonne par disjonction des cas.

— Si f est décroissante, alors la suite f_n est une suite croissante de fonctions positives convergeant vers α pour tout x de $]0,1[$, donc par théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \alpha.$$

— Si f est croissante, alors $\alpha = +\infty$ et (f_n) est une suite de fonctions décroissantes convergeant simplement vers la fonction α. De plus $0 \leq f_n \leq f_1$ et f_1 est intégrable, donc par théorème de convergence dominée, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \alpha.$$

On observe que $f_n : x \mapsto f(x^n)$ est une suite décroissant de fonctions positives, donc par théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1[} f(x^n)\mathrm{d}x = f(0^+),$$

où $f(0^+) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, qui existe par monotonie de f.

Exercice 4. [Un peu de calcul]

1. Calculer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ les limites quand $n \to +\infty$ de
$$\int_0^n (1-x/n)^n x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \text{ et de } \int_0^n (1-x/n)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x.$$
2. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que
$$\sum_{n\geq 0}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu < +\infty \text{ implique } \sum_{n\geq 0}\int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu,$$
puis calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

Solution de l'exercice 4.

1. Il s'agit d'applications classiques du théorème de convergence dominée. Grâce à la concavité de log, pour tout $x \in [0, n]$ on a
$$n\log(1-x/n) \leq -x,$$
donc $(1-x/n)^n x^{\alpha-1}\mathbb{1}_{[0,n]} \leq x^{\alpha-1}e^{-x}$ qui est intégrable dès que $\alpha > 0$. On en déduit
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-x/n)^n x^{\alpha-1}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha).$$
Avec la même méthode, on a pour tout $\alpha < 1$,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-x/n)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}.$$
2. On peut voir ce résultat comme le théorème de Fubini, ou comme une application du théorème de convergence dominée :
$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N f_n\mathrm{d}\mu,$$
en utilisant la majoration par la fonction intégrable $\sum_{n\geq 0}|f_n|\mathrm{d}\mu$, (par théorème de convergence monotone). On écrit ensuite
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \ln x\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n\geq 0} -\int_0^{+\infty} ye^{-(n+1)y}\mathrm{d}y = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Pour aller plus loin

Exercice 5. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O tel que $\mathbb{Q} \subset O$ mais la mesure de Lebesgue de O est plus petite qu'ϵ.

Solution de l'exercice 5. On prend par exemple $O = \cup_{p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}} \left(\frac{p}{q} - \frac{\epsilon}{8^{|p|+q+1}}, \frac{p}{q} + \frac{\epsilon}{8^{|p|+q+1}}\right)$.

Exercice 6. [Uniforme continuité de l'intégrale] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \mathrm{d}\mu = 0$.
2. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \mathrm{d}\mu < \epsilon$.
3. En déduire si f est une fonction intégrable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors la fonction $F : u \mapsto \int_0^u f(x)\mathrm{d}x$ est uniformément continue.

Solution de l'exercice 6.

1. On a $\lim_{n\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \mathrm{d}\mu = \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|=+\infty\}} \mathrm{d}\mu$ par théorème de convergence dominée. Or si $\mu(|f| = +\infty) > 0$, f ne peut pas être intégrable.
2. Soit $\epsilon > 0$, on choisit n assez grand tel que $\mu(|f| > n) < \epsilon/2$. Alors, pour $\delta < \epsilon/2n$, on a
$$\int_A |f| \mathrm{d}\mu \leq \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} + \int n \mathbb{1}_{\{|f|<n\}} \mathbb{1}_A \leq \epsilon.$$
3. C'est une conséquence immédiate du résultat précédent, l'uniforme continuité de F s'écrit :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y > 0, \int_{[y,y+\delta]} |f| \leq \epsilon.$$

Exercice 7. [Le retour de Borel-Cantelli]

1. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, on pose (A_n) une suite d'ensembles mesurables telle que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < +\infty$. Démontrer le Lemme de Borel-Cantelli en utilisant la suite de fonction $(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$.
3. Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\alpha_n} < +\infty$ et (a_n) une suite de réels. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty$.
4. $(\star)$ Montrer qu'on a également $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 7.

1. Posons $F = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}$, on observe que $\int F \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$, par convergence monotone ou théorème de Fubini. Alors F est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, donc $|F| < +\infty$ μ-presque partout, par inégalité de Markov, ce qui prouve le résultat, puisque
$$x \in \limsup_{n\to+\infty} A_n \iff F(x) = +\infty.$$

2. Soit $0 < \beta < \alpha$, on s'intéresse à la suite d'ensembles définie par $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(nx) > n^\beta\}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{f(nx)>n^\beta\}} \mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f(y)>n^\beta\}} \mathrm{d}y$$
$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{n^\beta} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{1+\beta}} < +\infty.$$

On conclut par théorème de Borel-Cantelli.

3. On s'intéresse à la suite d'ensembles définie par $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - a_n| < \sqrt{\alpha_n}\}$. On a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\sqrt{\alpha_n} < +\infty,$$

et pour tout $x \in \liminf_{n\to+\infty} B_n^c$, on a $\frac{\alpha_n}{|x-a_n|} \leq \sqrt{\alpha_n}$ pour tout n assez grand, donc $\sum \frac{\alpha_n}{|x-a_n|}$ converge au point x.

4. Par théorème de Fubini-Tonelli, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{x-1}^{x+1} \sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|y-a_n|}} \mathrm{d}y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_n} \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{\sqrt{|y-a_n|}} \mathrm{d}y$$
$$\leq 4 \sum \sqrt{\alpha_n} < \infty.$$

Par conséquent, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} < +\infty$ pour presque tout $y \in [x-1, x+1]$. C'est donc également vrai pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ par union dénombrable.

Exercice 8. [Une extension du théorème de convergence dominée] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, on suppose $\mu(E) < +\infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite *uniformément intégrable* si $\limsup_{c\to+\infty} \sup_{i\in I} \int_{|f_i|>c} |f_i|\mathrm{d}\mu = 0$.

1. Montrer que toute famille finie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable.
2. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\sup_{i\in I} \int |f_i|\mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{et} \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \forall A \in \mathcal{E}, \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{i\in I} \int_A |f_i|\mathrm{d}\mu < \epsilon. \quad (\star)$$

3. Montrer que si $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour $(f_i + g_i)_{i\in I}$.
4. Soit (f_n) une suite de fonctions telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour μ-presque tout $x \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si (f_n) est uniformément intégrable.
5. Montrer le critère de de la Vallée-Poussin : une famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une fonction convexe $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe croissante telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \sup_{i\in I} \int G(|f_i|)\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

6. En déduire qu'une suite de fonctions bornée dans $\mathcal{L}^p$ qui converge μ-p.p. vers f converge également vers f dans $\mathcal{L}^1$.

Solution de l'exercice 8.

1. On a $\lim_{c\to+\infty}\int|f_i|\mathrm{d}\mu = 0$ pour tout $i\in I$ par théorème de convergence dominée. C'est donc également vrai pour le supremum d'un nombre fini d'éléments.
2. Si $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable, il existe $c>0$ tel que $\sup_{i\in I}\int_{|f_i|>c}|f_i|\mathrm{d}\mu \leq 1$. Dans ce cas, pour tout $i\in I$, on a $\int_E|f_i|\mathrm{d}\mu \leq \int_{|f_i|>c}|f_i| + c\mu(|f_i|\leq c) \leq 1 + c\mu(E)$. Par conséquent $\sup_{i\in I}\int|f_i|\mathrm{d}\mu \leq 1+c\mu(E)$. De la même façon pour tout ensemble $A\in\mathcal{E}$, on a
$$\sup_{i\in I}\int_A|f_i|\mathrm{d}\mu < c\mu(A) + \sup_{i\in I}\int_{|f_i|>c}|f_i|\mathrm{d}\mu.$$
Par conséquent, pour tout $\epsilon>0$, en choisissant c tel que $\sup_{i\in I}\int_{|f_i|>c}|f_i|\mathrm{d}\mu < \epsilon/2$ et $\delta<\epsilon/2c$, on obtient également $(\star)$.
Réciproquement, supposons que $(f_i)_{i\in I}$ est une famille bornée dans $\mathcal{L}^1$ satisfaisant la propriété $(\star)$. Soit $\epsilon>0$ on fixe $\delta>0$ tel que $\int_A|f_i|\mathrm{d}\mu<\epsilon$ pour tout $i\in I$ et tout ensemble A de mesure inférieure à δ. On observe que pour tout $c>0$, on a
$$\mu(|f_i|>c) \leq \frac{1}{c}\int_E|f_i|\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{c}\sup_{j\in I}\int_E|f_j|\mathrm{d}\mu.$$
En fixant $c=\sup_{i\in I}\int_E|f_j|\mathrm{d}\mu/\delta$, pour tout $i\in I$ on a bien $\mu(|f_i|>c)\leq\delta$, donc $\sup_{i\in I}\int_{|f_i|>c}|f_i|\mathrm{d}\mu\leq\epsilon$. On obtient donc
$$\limsup_{c\to+\infty}\sup_{j\in I}\int_E|f_j|\mathrm{d}\mu\leq\epsilon,$$
par monotonie. Cette inégalité étant valable pour tout $\epsilon>0$, on en déduit que la limite est nulle.
3. Si $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont deux familles uniformément intégrables (i.e. bornées dans $\mathcal{L}^1$ et satisfaisant $(\star)$), on en déduit que (f_i+g_i) est bien bornée dans $\mathcal{L}^1$ et satisfait $(\star)$ également, donc est uniformément intégrable.
4. Commençons par prouver le sens direct de cette propriété. On suppose que $f\in\mathcal{L}^1$ et que $\lim_{n\to+\infty}\int|f_n-f|\mathrm{d}\mu=0$. Dans ce cas, la suite $(f_n-f)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}^1$. De plus, pour tout $\epsilon>0$ on a $\int_E|f_n-f|\mathrm{d}\mu<\epsilon$ pour tout $n\geq N_\epsilon$. En utilisant que la famille $(f_n-f)_{n\leq\mathbb{N}_\epsilon}$ est uniformément intégrable, on détemine l'existence d'un $\delta>0$ tel que $(\star)$ est vérifiée. Les familles $(f_n-f)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément intégrables, c'est également le cas de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On montre ensuite le sens réciproque. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Par Lemme de Fatou, la suite (f_n) étant bornée dans $\mathcal{L}^1$, on observe immédiatement que f est intégrable. De plus, par théorème de convergence dominée, pour tout $c>0$ on a $f_n\wedge c\to f\wedge c$ dans $\mathcal{L}^1$. On a alors
$$\int|f_n-f|\mathrm{d}\mu = \int_{|f_n|\leq c}|f_n\wedge c - f\wedge c|\mathrm{d}\mu + \int_{|f_n|>c}|f_n-f|\mathrm{d}\mu$$
$$\int|f_n-f|\mathrm{d}\mu \leq \int_{|f_n|\leq c}|f_n\wedge c - f\wedge c|\mathrm{d}\mu + \int_{|f_n|>c}|f_n|\mathrm{d}\mu + \int_{|f|>c}|f|\mathrm{d}\mu.$$

Par conséquent, pour tout $c > 0$, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \int |f_n - f|\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|f_n|>c} |f_n|\mathrm{d}\mu + \int_{|f|>c} |f|\mathrm{d}\mu.$$

On passe à la limite dans cette inégalité, on obtient bien la convergence de (f_n) vers f dans $\mathcal{L}^1$.

5. Le sens direct est une application relativement directe de l'inégalité de Markov (Exercice 1 question 2). Soit $M > 0$, soit C tel que pour tout $x \geq C$, $G(x) \geq Mx$. Pour tout i, on a $\int_{|f_i|>C} |f_i| \leq \int_{f_i>0} G(|f_i|)/M \leq \frac{1}{M} \sup_j \int G(|f_j|)$.
   Pour la réciproque, on va construire la fonction G à partir des bornes sur $\sup_i \int_{|f_i|>C} |f_i|$. Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ increasing such that for all n,

$$\sup_i \int_{|f_i|>C_n} |f_i| \leq \frac{1}{n^3}.$$

   On pose $g(x) = \sum_n n 1_{C_n \leq x < C_{n=1}}$ et G sa primitive avec $G(0) = 0$, qui est clairement convexe croissante et satisfait $\lim_{x\to\infty} G(x)/x = +\infty$. Par ailleurs, on voit aussi clairement que pour $x \in [C_n, C_{n+1}]$, on a $G(x) \leq nx$.
   Soit $i \in I$, on a

$$\int_{C_{n+1}>|f_i|\geq C_n} G(|f_i|) \leq n \int_{C_{n+1}>|f_i|\geq C_n} |f_i| \leq \frac{1}{n^2}$$

   par construction et donc $\int G|f_i| \leq \pi^2/6$ uniformément pour tout i.
6. Conséquence immédiate de la question précédente, la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et $\lim_{x\to\infty} x^{p-1} = \infty$.