Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

TD de Logique, feuille 2

Les exercices marqués d'une flèche sont à chercher en priorité. Je recommande d'y réfléchir à l'avance. Ceux qu'on aura pu corriger en TD sont à connaître. Les corrections seront concentrées sur ceux-là, mais vous pouvez toujours me demander des précisions concernant les autres exercices. Les questions ou exercices marqués d'une étoile sont plus difficiles.

$\longrightarrow$ **Exercice 1** (Quelques plongements) **:**

1. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Montrer qu'il existe un ensemble I et un morphisme d'anneaux injectif $\mathbb{A} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$.

2. Soit X un espace de Stone. Montrer qu'il existe un ensemble I et une injection continue ouverte sur son image $X \to 2^I$, où $2^I = \{0, 1\}^I$ est muni de la topologie produit, qui en fait un espace de Stone.

$\longrightarrow$ **Exercice 2** (Un exemple d'espace de Stone) **:**
Soit $\mathbb{A}_\mathbb{R} \leqslant \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'algèbre de Boole constituée des unions finies d'intervalles. On note $S(\mathbb{R})$ l'espace de ses ultrafiltres. L'objectif de cet exercice est de décrire l'espace $S(\mathbb{R})$. Soit $U \in S(\mathbb{R})$ un ultrafiltre *non principal.*

1. Montrer que, pour tout intervalle $I \in U$, l'intérieur de I (qui est un intervalle ouvert) appartient à U.

2. On suppose que U contient un intervalle borné. Soit $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid]x, x+1[\in U\}$.
   a) Si I est un intervalle borné, on note $l(I)$ sa longueur. Montrer que $\inf\limits_{I \in U} l(I) = 0$.
   b) On suppose que $]a, a+1[\in U$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a, a+\varepsilon[$ est dans U.
   Puis, montrer que U est égal à $\{X \in \mathbb{A}_\mathbb{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0\ ]a, a+\varepsilon[\subseteq X\}$.
   On notera $U = a^+$ dans ce cas.
   c) On suppose que $]a, a+1[\notin U$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]a-\varepsilon, a[$ est dans U.
   Puis, montrer que U est égal à $\{X \in \mathbb{A}_\mathbb{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0\ ]a-\varepsilon, a[\subseteq X\}$.
   On notera $U = a^-$.

3. On suppose que U ne contient pas d'intervalle borné, et que $]-\infty, 0[\in U$. Montrer que, pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $]-\infty, b[\in U$. En déduire que U est égal à $\{X \in \mathbb{A}_\mathbb{R} \mid X \text{ n'est pas minorée}\}$.

4. Déduire des questions précédentes une description de l'ensemble sous-jacent à $S(\mathbb{R})$.

5. Montrer que les ultrafiltres principaux sont les points isolés de $S(\mathbb{R})$.

6. Soit $a \in \mathbb{R}$, et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ultrafiltres principaux. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_i)_i$ converge vers a^+.

Exercice 3 (Compactification) **:**
Soit E un ensemble, et $\mathbb{A} \leqslant \mathcal{P}(E)$ une algèbre de Boole, contenant tous les singletons. On note S l'espace des ultrafiltres de $\mathbb{A}$. Soit $f : E \to S$ l'application qui à $x \in E$ associe le filtre engendré par l'élément $\{x\}$ (qui est un ultrafiltre). Montrer que $f(E)$ est dense dans S.

Exercice 4 (Anneaux des formules à équivalence près) **:**
Soient V un ensemble de variables. On rappelle qu'on définit une relation d'équivalence $\equiv$ sur $\mathcal{F}(V)$, où $\varphi \equiv \psi$ si et seulement si, pour tout $\alpha : V \to \{0,1\}$, on a $[\![\varphi]\!](\alpha) = [\![\psi]\!](\alpha)$. L'ensemble quotient est noté $\mathcal{F}_\equiv(V)$.
On rappelle les abréviations usuelles : $\top = \bot \to \bot$, $\neg\varphi = \varphi \to \bot$, $\varphi \vee \psi = (\neg\varphi) \to \psi$, $\varphi \wedge \psi = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$. On notera aussi $\varphi \Delta \psi = (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$.

1. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}(V)$ telles que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\psi_1 \equiv \psi_2$. Montrer que $(\varphi_1 \to \psi_1) \equiv (\varphi_2 \to \psi_2)$. En déduire que les opérations logiques $\neg$, $\vee$, $\wedge$ et Δ passent au quotient par la relation $\equiv$.

2. Soit $f : V \to \{0,1\}$. On rappelle que f s'étend en une fonction définie sur $\mathcal{F}(V)$, qu'on note encore f. On munit l'ensemble $\{0,1\}$ de la structure d'anneau de Boole évidente.

   Vérifier que $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \cdot f(\psi)$, $f(\varphi \Delta \psi) = f(\varphi) + f(\psi)$, $f(\bot) = 0$ et $f(\top) = 1$, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(V)$.

3. En déduire que $(\mathcal{F}_\equiv(V), \Delta, \wedge)$ est un anneau de Boole. Pour démontrer des égalités entre classes de formules, on pourra choisir des représentants adéquats, et utiliser la question 2.

   Vérifier que la relation d'ordre sur $\mathcal{F}_\equiv(V)$ définie en cours coïncide avec celle donnée par la structure d'anneau de Boole.

4. Montrer que les opérations $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et $\to$, telles que définies de manière générale pour les anneaux de Boole, coïncident avec les opérations induites par les connecteurs logiques sur l'anneau de Boole $(\mathcal{F}_\equiv(V), \Delta, \wedge)$.

5. Soit $\mathbb{A}$ un anneau de Boole. Pour toute fonction $f : V \to \mathbb{A}$, on étend f en un fonction définie sur $\mathcal{F}(V)$, via $f(\bot) = 0$ et $f(\varphi \to \psi) = f(\varphi) \to f(\psi)$. Cela généralise sans difficulté la construction vue en cours.

   a) Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(V)$ telles que $\varphi \equiv \psi$. Soit $f : V \to \mathbb{A}$. Montrer que $f(\varphi) = f(\psi)$.

      Indication : Utiliser l'exercice 1 pour plonger $\mathbb{A}$ dans un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$, afin de se ramener à des fonctions $V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   b) En déduire que toute fonction $f : V \to \mathbb{A}$ induit un morphisme d'anneaux $f : \mathcal{F}_\equiv(V) \to \mathbb{A}$

   c) Montrer que tout morphisme d'anneaux $\mathcal{F}_\equiv(V) \to \mathbb{A}$ provient d'une unique fonction $f : V \to \mathbb{A}$.

   On dit alors que l'anneau de Boole $\mathcal{F}_\equiv(V)$ est *l'anneau de Boole libre sur l'ensemble V*.

Exercice 5 (D'autres exemples d'espaces de Stone) **:**
Décrire les espaces d'ultrafiltres (ensemble sous-jacent et topologie) des algèbres de Boole suivantes :

1. L'algèbre de Boole $\mathbb{A}_\mathbb{Z} \leqslant \mathcal{P}(\mathbb{R})$ constituée des unions finies d'intervalles *à bornes entières* ou infinies.

2. L'algèbre de Boole $\mathbb{A} \leqslant \mathcal{P}(E)$ constituée des parties finies ou de complémentaire fini, pour E un ensemble infini.

Exercice 6 (Produits d'anneaux de Boole) **:**

1. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ des anneaux de Boole. Quel est l'espace de Stone correspondant à l'anneau de Boole $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$?

2. Soit I un ensemble. Décrire les idéaux premiers de l'anneau de Boole $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. On pourra, pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$, considérer $\mathcal{U} = \{A \subseteq I \,|\, \mathbf{1}_A \notin \mathfrak{p}\}$, et montrer qu'il s'agit d'un ultrafiltre sur $P(I)$.

Exercice 7 (Dualité de Stone, morphismes) **:**

1. Soient X, Y des espaces de Stone, et $f : OF(X) \to OF(Y)$ un morphisme d'anneaux. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $F : Y \to X$ telle que $f = F^{-1}$, i.e., pour tout ouvert-fermé $O \subseteq X$, on a $f(O) = F^{-1}(O)$.

2. Soient $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ des anneaux de Boole, et $F : Spec\,\mathbb{A} \to Spec\,\mathbb{B}$ une application continue. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tel que $F = f^{-1}$, i.e., pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$, on a $F(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$.