TD 3 : Construction de topologies

Exercice 1 : Echauffement

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit X, Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $f : X \to Y$ une application.
   a) Si f est continue, alors $f|_A : A \to Y$ est continue.
   b) Si $f|_A$ est continue alors f est continue en tout point de A.
2. La topologie produit sur $\{0,1\}^{10}$ est la topologie discrète.
3. La topologie produit sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est la topologie discrète.
4. On définit sur $[-1,1]$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont $\{-1\}, \{1\}, \{a,-a\}, a \in [0,1[$. On considère sur $Y = [-1,1]/\mathcal{R}$ la topologie quotient et on note $\pi : [-1,1] \to Y$ la projection.
   a) $\pi([0,1[)$ est ouvert.
   b) $\pi([0,1])$ est un voisinage de $\pi(1)$.
   c) Cette topologie est séparée.
5. On définit sur $[-1,1]$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont $\{-1\}, \{1\}$ et $]-1,1[$. On considère sur $Y = [-1,1]/\mathcal{R}$ la topologie quotient.
   a) C'est la topologie discrète.
   b) C'est la topologie grossière.

Solution de l'exercice 1

1. a) Vraie par définition des ouverts de A et par caractérisation des applications continues par les images réciproques.
   b) Fausse, prendre par exemple $X = Y = \mathbb{R}$, et f l'indicatrice des réels positifs. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais n'est pas continue en 0.
2. Vraie, car les singletons sont des cylindres de $\{0,1\}^{10}$.
3. Fausse, si une topologie qui peut être décrite par une base est discrète, alors les singletons sont dans la base. Cela contredit la définition de la topologie produit par la base. Voir l'exercice 5 pour une preuve "par cardinal".
4. a) $\pi^{-1}(\pi([0,1[)) =]-1,1[$ est ouvert, donc $\pi([0,1[)$ est ouvert.
   b) $\pi^{-1}(\pi([0,1])) =]-1,1]$, c'est donc un ouvert qui contient $\pi(1)$.
   c) 1 et -1 ne sont pas séparés !
5. Cette topologie admet cinq ouverts : $Y, \emptyset,]-1,1[, [-1,1[,]-1,1]$. Ce n'est donc ni la topologie grossière, ni la topologie discrète.

Exercice 2 : A propos de la topologie induite

1. Soit X un espace topologie séparé et $A \subset X$, muni de la topologie induite. Montrer que A est séparé.
2. Soit X un espace topologique quelconque et ω un élément qui n'est pas dans X. On pose $Y = X \cup \{\omega\}$ et on définit une topologie sur Y (pas la peine de vérifier que c'en est une) en décrétant que les ouverts de Y sont $\emptyset$ et les $U \cup \{\omega\}$, avec U ouvert de X.

a) Montrer que l'inclusion $j : X \to Y$ est un homéomorphisme sur son image.
b) Montrer que Y est séparable.
c) Soit $x \neq y$ deux points de X et U, V des ouverts de Y contenant respectivent x et y. Montrer que $U \cap V \neq \emptyset$. En particulier, X peut être séparé sans que Y ne le soit.

Solution de l'exercice 2

1. Si $x \neq y \in A$, ils sont séparés par U et V dans X, donc par $U \cap A$ et $V \cap A$ dans A.
2. a) C'est effectivement une bijection. Il faut donc montrer que l'image d'un ouvert de X est un ouvert de $j(X)$ (muni de la topologie induite) et que l'image réciproque d'un ouvert de $j(X)$ est un ouvert de X. Or, si $U \subset X$ est ouvert, $j(U) = j(X) \cap \{\omega\} \cup U$ est la trace d'un ouvert de Y donc un ouvert de $j(X)$. Si U est un ouvert de $j(X)$, c'est la trace d'un ouvert de Y, donc de la forme $X \cap V \cup \{\omega\}$ avec V ouvert de X. Donc $U = V$ est un ouvert de X et $j^{-1}(U) = U$ est un ouvert de X.
   b) $\{\omega\}$ est dense dans Y ! En effet, il intersecte tout ouvert non vide !
   c) On a forcément $\omega \in U \cap V$.

Exercice 3 : Séparation et espaces quotients

Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X.

1. Montrer que si $X/\mathcal{R}$ est séparé, alors $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé.
2. Montrer que si $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé et si $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.
3. On suppose dans cette question que $X = E$ est un espace vectoriel normé et que $\mathcal{R}$ est donné par $x\mathcal{R}y \iff x - y \in F$ où F est un sous-espace vectoriel de E. On note dans ce cas E/F l'espace quotient. Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel topologique.
   a) Montrer l'équivalence entre les 3 points suivants :
      (i) F est fermé
      (ii) E/F est normable
      (iii) E/F est séparé
      Indication : pour l'implication (i) $\implies$ (ii), on pourra considérer l'application $||S|| = \inf_{x \in S} d(x, F)$
   b) En déduire le résultat suivant : soit $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors :
   $$f \text{ est continue } \iff \ker f \text{ est fermé.}$$

Solution de l'exercice 3

1. On montre que le complémentaire de $\mathcal{R}$ est ouvert, en montrant que celui-ci est un voisinage de chacun de ses points. Soit $(x, y) \in X \times X \setminus \mathcal{R}$. $\pi(x) \neq \pi(y)$ et par séparation, il existe U, V des ouverts de $X/\mathcal{R}$ tels que $U \cap V = \emptyset, \pi(x) \in U, \pi(y) \in V$. Alors $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ est un ouvert de $X \times X$ qui contient (x, y). En outre, si $(w, z) \in \pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$, $\pi(w) \in U, \pi(z) \in V$ donc $w \not\mathcal{R} z$ et $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V) \subset X \times X \setminus \mathcal{R}$.
2. Soient $\pi(x) \neq \pi(y)$ deux classes de $X/\mathcal{R}$. $(x, y) \in X \times X \setminus \mathcal{R}$, qui est ouvert. Les ouverts de $X \times X$ étant engendrés par les pavés $U \times V$ avec U, V ouverts, on peut trouver U et V des ouverts de X contenant respectivement x et y tels que $U \times V \subset X \times X \setminus \mathcal{R}$. π étant ouverte, $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des ouverts de $X/\mathcal{R}$ contenant respectivement $\pi(x)$ et $\pi(y)$.

En outre, $\pi(U)\cap\pi(V)=\emptyset$ puisque $U\times V\subset X\times X\setminus\mathcal{R}$. En effet, si $z=\pi(u)=\pi(v), u\in U, v\in V$ alors $u\mathcal{R}v$ et donc $U\times V\cap\mathcal{R}\neq\emptyset$.

3. a) ii =>iii est évident ; un espace métrique est toujours séparé.
iii =>i . Supposons que E/F est séparé et montrons que F est fermé,en montrant que son complémentaire est ouvert. Soit $x\in F^c$. $\pi(x)\neq 0\in E/F$ donc il existe un ouvert de E/F tel que $x\in U$ et $0\notin U$. $V=pi^{-1}(U)$ est un ouvert de E et $F\cap V=\emptyset$ puisque si $x\in F\cap V, \pi(x)=0\in U$. Donc F^c est un voisinage de x et par suite, de chacun de ses points, donc il est ouvert.
(i) => (ii) Supposons que F est fermé. Soit $R\in E/F$ une classe d'équivalence : on considère $||R||=\inf_{x\in R} d(x,F)$. Montrons que $||\cdot||$ est une norme qui donne la topologie quotient sur E/F. En fait, il n'est pas difficile de voir que $||R||=d(r,F)$ pour n'importe quel $r\in R$.
   - Homogénéité : On fixe $r\in R$, $||\lambda R||=d(\lambda r,F)=|\lambda|d(x,F)=\lambda||R||$.
   - Inégalité triangulaire : si $x,y\in E, d(x+y,F)\leq d(x,F)+d(y,F)$. En effet, si $\epsilon>0$, il existe $x_1,y_1\in F$ tels que $||x-x_1||\leq d(x,F)+\epsilon$, idem pour y. Alors $d(x+y,F)\leq N_E(x+y-(x_1+y_1))\leq d(,F)+d(y,F)+2\epsilon$, et on fait ensuite $\epsilon\to 0$. Et par suite, $||R+S||\leq||R||+||S||$ si $R,S\in E/F$.
   - Séparation : Soit $R\in E/F$ tel que $||R||=0$. Montrons que $R=F=0_{E/F}$. Soit $r\in R$. $d(r,F)=0$ donc il existe une suite de points de F tels que $d(x_n,r)\to 0$. Donc $x_n\to r$ et comme F est fermé, $r\in F$, donc $R=\pi(r)=F$.

   Il faut alors vérifier que cette norme induit la topologie quotient. Soit $B(0,r)$ une boule centrée en 0 pour la norme $||\cdot||$. Montrons que cette boule est ouverte pour la topologie quotient. Si $x\in E$, on a :

$$x\in\pi^{-1}(B(0,r)) \iff ||\pi(x)||<r \iff \exists y\in F, N_E(x-y)<r \iff x\in\bigcup_{y\in F}B(y,r)$$

   Autrement dit, $\pi^{-1}(B(0,r))=\bigcup_{y\in F}B(y,r)$ est un ouvert de E comme union d'ouverts, et donc $B(0,r)$ est ouvert. Par suite, toutes les boules sont ouvertes et donc la topologie quotient est plus fine que la topologie induite par la norme.
   Réciproquement, soit U un ouvert pour la topologie quotient et $R=\pi(x)\in U$. $V=\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de E donc il existe $r>0$ tel que $B_E(x,r)\subset V$. Si $S\in B_{E/F}(R,r)$. $||R-S||<r$ donc il existe $z\in R-S$ tel que $d(z,F)<r$, on écrit $z=x-s+f$ avec $f\in F, s\in S$. On peut donc trouver $t\in F$ tel que $N_E(z-t)<r$ i.E $N_E(x-(s-f+t))<r$. Ainsi, $s-f+t\in V$. Donc $\pi(s-f+t)=S\in\pi(V)=U$. Et donc, on a bien que U est ouvert.

   b) Le sens réciproque est évident ! Supposons réciproquement que $\ker f$ est fermé. Si $\ker f=E$, $f=0$ et c'est bon. Sinon, on considère l'espace quotient $F=E/\ker f$ que l'on munit de la topologie quotient, qui est normé. Or, G est une droite vectorielle, donc toutes les normes sont équivalentes et toutes les applications linéaires $g:G\to\mathbb{R}$ sont continues. En particulier, on peut quotienter f en une unique application linéaire $g:G\to\mathbb{R}$ telle que $f=g\circ\pi$ où $\pi:E\to G$ est le passage au quotient. Mais alors, f s'écrit comme composée de deux applications continues et elle est donc continue.

Exercice 4 : Lemme d'Urysohn

Définition. On dit qu'un espace topologique X est normal (ou T4) si pour tous fermés disjoints $F_0, F_1 \subset X$, il existe des ouverts disjoints $U_0, U_1 \subset X$ tels que $F_0 \subset U_0$ et $F_1 \subset U_1$.

On souhaite montrer le résultat suivant :

Théorème. (**Lemme d'Urysohn**) Soit X un espace topologique. Les deux assertions suivantes son équivalentes :

(i) X est normal.
(ii) pour tous fermés disjoints $F_0, F_1 \subset X$, il existe $f : X \to [0,1]$ continue qui vaut 0 sur F_0 et 1 sur F_1.

1. Montrer que (ii) implique (i).
2. Montrer que tout espace métrique est normal.
3. On souhaite montrer que (i) implique (ii). On suppose donc que X est normal et on fixe F_0 et F_1 deux fermés disjoints.
   a) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des dyadiques de $[0,1]$ (les nombres de la forme $\frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, 2^n\}$). Montrer qu'il existe une famille de fermés $(G_x)_{x\in\mathcal{D}}$ telle que :
      - $G_0 = F_0$ et $G_1 \subset F_1^c$
      - Si $x < y \in \mathcal{D}$, $G_x \subset \mathring{G}_y$
   b) On définit $f : X \to \mathbb{R}$ en posant :
   $$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in \mathcal{D}, x \in G_r\} & \text{si } x \in G_1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Montrer que f convient.

Solution de l'exercice 4

1. Il suffi de considérer $U_0 = f^{-1}([0,1/3[)$ et $U_1 = f^{-1}(]2/3,1])$ qui sont ouverts par continuité de f, disjoints et contiennent F_0 et F_1 respectivement par hypothèse sur f.
2. On utilise seulement le sens $(ii) \implies (i)$ qui vient d'être démontré. Puisque F_0 et F_1 sont disjoints, $d(x,F_0) + d(x,F_1) > 0$ pour tout $x \in X$. On rappelle que $d(\cdot, F_i)$ est une fonction continue qui s'annule sur F_i. Il suffit de considérer $f : X \to [0,1]$ définie par
$$f(x) = \frac{d(x,F_0)}{d(x,F_0) + d(x,F_1)}$$
3. a) Par récurrence sur n, on construit $G_{\frac{k}{2^n}}$, $k = 0, \dots, 2^n$ vérifiant les deux points.
   $n = 0$: On considère deux ouverts U_0 et U_1 disjoints séparant F_0 et F_1. On vérifie que $G_1 = U_1^c$ convient : $G_0 \subset U_0 \subset U_1^c = G_1$ donc $G_0 \subset \mathring{G}_1$.
   Supposons $G_{\frac{k}{2^n}}$, $k = 0, \dots, 2^n$ construit. On fixe $k \in \{0, 2^n - 1\}$ et on veut construire $G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$. Pour cela, on considère U_0 et U_1 deux ouverts disjoints séparant $G_{\frac{k}{2^n}}$ et $X \setminus \overset{\circ}{\widehat{G_{\frac{k+1}{2^n}}}}$ et on pose $G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = U_1^c$, qui vérifie
   $$G_{\frac{k}{2^n}} \subset U_0 \subset \overset{\circ}{\widehat{G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}}} \subset G_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \subset \overset{\circ}{\widehat{G_{\frac{k+1}{2^n}}}}$$
   La famille ainsi construite convient.

b) f est évidemment à valeurs dans $[0,1]$.
Si $x \in F_0$, $f(x) = 0$ puisque $x \in G_0$ et $\inf\{r \in \mathcal{D}, x \in G_r\} = 0$.
Si $x \in F_1, x \notin G_1$ donc $f(x) = 1$.
Il reste à montrer que f est continue. f est continue sur l'ouvert G_1^c puisqu'elle y est constante. Soit donc $x \in G_1$ et montrons que f est continue en x. Posons $r = f(x)$. Soit $\epsilon > 0$. Par définition de r, il existe $r < s < t < r + \epsilon$,$s, t \in \mathcal{D}$ tel que $x \in G_s \subset \mathring{G}_t$. $\mathring{G}_t$ est un voisinage de x et si $y \in \mathring{G}_t$, $f(y) < r + \epsilon$. Si $r = 0$, on a terminé, sinon, on peut supposer $\epsilon < r$. $x \in G_u^c$ pour tout $u \in \mathcal{D}, r - \epsilon < u < r$. Or, si $y \in G_u^c$, $y \notin G_v$ pour tout $v \leq u$, et donc $f(y) \geq u$. On en déduit que si $U = G_u^c \cap \mathring{G}_t \subset G_1$, U est un ouvert qui contient x tel que $U \subset f^{-1}(]r - \epsilon, r + \epsilon[)$, ce qui prouve bien que f est continue en x.

Exercice 5 : Quelques propriétés des espaces produits.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts. Montrer que la topologie produit sur $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est à base dénombrable d'ouverts.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces topologiques séparables. Montrer que $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, muni de la topologie produit, est séparable.
3. Soit $((X_i, d_i))_{i\in I}$ une famille d'espaces métriques ayant au moins 2 points. On considère l'espace topologique produit $X = \prod_{i\in I} X_i$. Montrer que X est métrisable si et seulement si I est dénombrable.

Solution de l'exercice 5

1. On note $p_i : X \to X_i$ la projection sur X_i. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons $(U_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ une base de la topologie de X_n. Pour $J \subset \mathbb{N}$ fini et $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^J$ notons
$$U_{J,\mathbf{a}} = \bigcap_{n\in J} p_n^{-1}\left(U_{n,\mathbf{a}_n}\right)$$
L'ensemble des $U_{J,\mathbf{a}}$ est dénombrable et forme une base d'ouverts de la topologie produit. En effet, si $U \subset X$ est un ouvert et si $x \in U$, il existe $J \subset \mathbb{N}$ fini et des ouverts $U_n \subset X_n$ pour $n \in J$ tels que
$$x \in \bigcap_{n\in J} p_n^{-1}\left(U_n\right) \subset U$$
Or, pour tout $n \in J$, il existe $a_n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U_{n,a_n} \subset U_n$ puisque $(U_{n,k})_k$ est une base d'ouverts de X_n. Mais alors, avec $\mathbf{a} = \{(k_n), n \in J\}$, on a
$$x \in U_{J,\mathbf{a}} \subset U$$
Ce qui prouve que U est une base d'ouverts.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne $(x_{n,k})$ une famille dénombrable dense de X_n. Fixons $y \in X$. Pour $J \subset \mathbb{N}$ fini et $\mathbf{a} = (a_n, n \in J) \in \mathbb{N}^J$ notons
$$x_{J,\mathbf{a}} = (x_n)_{n\in N} \text{ où } x_n = x_{n,a_n} \text{ si } n \in J, x_n = y_n \text{ sinon}$$
La famille des $x_{J,\mathbf{a}}$ est dénombrable. De plus, elle est dense dans X. En effet, si U est un ouvert non vide et si $x \in U$, il existe $J \subset \mathbb{N}$ fini et des ouverts $U_n \subset X_n$ pour $n \in J$ tels que
$$x \in \bigcap_{n\in J} p_n^{-1}\left(U_n\right) \subset U$$

Par densité de chacune des familles $(x_{n,k})_k$, pour tout $n \in J$, il existe $a_n \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n,a_n} \in U_n$. Mais alors, avec $\mathbf{a} = (a_n, n \in J)$, $x_{J,\mathbf{a}} \in U$. Donc cette famille est bien dense dans X.

3. Supposons $I = \{1, \dots, N\}$ avec $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et considérons

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} \min(1, d_i(x_i, y_i))$$

d est bien définie puisque somme d'une série absolument convergente (les termes sont $\leq 2^{-i}$). $d \geq 0$ et d est symétrique car les d_i le sont. d est séparante car si $d(x,y) = 0$ alors pour tout i, $d_i(x_i, y_i) = 0$ et donc $x = y$. Enfin, l'inégalité triangulaire est vérifiée car les d_i la vérifie et par l'inégalité : $\min(1, a+b) \leq \min(1,a) + \min(1,b)$. Ainsi, d est une distance.

Montrons que cette distance métrise la topologie produit. On montre que les ouverts définis par d sont des ouverts de la topologie produit et réciproquement. Pour cela, il suffit de le vérifier pour une base d'ouverts à savoir les boules pour d et les pavés d'ouverts pour la topologie produit.

Soit $B(x,r)$ une boule ouverte pour d et montrer que c'est un ouvert de la topologie produit. Soit $y \in B(x,r)$. On pose $r_0 = d(x,y) < r$. Soit N_0 tel que $\sum_{i > N_0} 2^{-i} < (r - r_0)/2$. Soit $\epsilon < 1$ à déterminer et considérons l'ouvert

$$U = B(y_1, \epsilon) \times \dots \times B(y_{N_0}, \epsilon) \times X_{N_0+1} \times \dots$$

Si $z \in U$,

$$\begin{aligned}
d(x,z) &\leq \sum_{i > N_0} 2^{-i} + \sum_{i=1}^{N_0} 2^{-i} \min(1, d_i(x_i, z_i)) \\
&\leq (r - r_0)/2 + \sum_{i=1}^{N_0} 2^{-i} \min(1, d_i(y_i, z_i)) + \sum_{i=1}^{N_0} 2^{-i} \min(1, d_i(x_i, y_i)) \\
&\leq (r - r_0)/2 + r_0 + \sum_{i=1}^{N_0} \epsilon 2^{-i} \\
&\leq (r + r_0)/2 + \sum_{i=1}^{N_0} \epsilon 2^{-i}
\end{aligned}$$

Avec ϵ assez petit, $(r + r_0)/2 + \sum_{i=1}^{N_0} \epsilon 2^{-i} < r$ et donc $U \subset B(x,r)$. $B(x,r)$ est un voisinage de chacun de ses points donc ouvert.

Soit U un ouvert élémentaire de la topologie produit, que l'on peut prendre de la forme $B(x_1, r_1) \times \dots B(x_M, r_M) \times X_{M+1} \times \dots$. Soit $y \in U$. Montrons que $B(y, \epsilon) \subset U$ pour ϵ assez petit. On prend $\epsilon < 2^{-M}$. Ainsi, si $z \in B(y,\epsilon)$, pour tout $i \leq M, d_i(y_i, z_i) \leq 1$. Par suite, $d_i(y_i, z_i) \leq 2^i \epsilon$. On choisit alors ϵ tel que $2^i \epsilon < r_i - d_i(x_i, y_i)$ pour tout $i \leq M$. Dans ce cas, $d_i(y_i, z_i) < r_i - d_i(x_i, y_i)$ pour $i \leq M$ et donc par inégalité triangulaire, $d_i(x_i, z_i) < r_i$ ce qui prouve que $z \in U$ et donc $B(y, \epsilon) \subset U$, de sorte que U est ouvert.

Réciproquement, supposons que X soit métrisable. On fixe $x, z \in \prod_{i \in I} X_i$ tels que pour tout $i \in I$, $x_i \neq z_i$. On considère alors pour tout i, $V_i = \{y \in \prod X_i ; y_i \neq x_i\}$ qui est un

voisinage de z ainsi que l'ensemble $A = \{y \in \prod X_i; \exists J \subset I \text{ fini }, \forall i \in I \setminus J, y_i = x_i\}$.
On vérifie que A est dense dans $\prod X_i$. En effet, si U est un ouvert élémentaire de la forme $\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I \setminus J} X_i$, alors $A \cap U \neq \emptyset$ puisque si $a_j \in U_j$, le point y tel que $y_i = a_i$ si $i \in J$ et $y_i = x_i$ sinon est dans $U \cap A$.
La densité de A et la métrisabilité de X permettent de construire une suite (x_n) de points de A telle que $x_n \to z$. On note alors $I_n = \{i \in I; x_n \in V_i\}$. Si $i \in I$, V_i est un voisinage de z, à partir d'un certain rang $w_n \in V_i$ et donc en particulier $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.
Or, les I_n sont finis puisque $x_n \in A$, et donc x_n n'appartient qu'à un nombre fini de V_n.
On en déduit que I est (fini ou) dénombrable.

Pour aller plus loin

Exercice 6 : Exemples d'espaces quotient

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel et tous les espaces quotient considérés seront munis de la topologie quotient.

1. (**Tores**) On définit le tore de dimension n comme étant le quotient $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ i.e. le quotient de $\mathbb{R}^n$ par la relation d'équivalence $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$. On note $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité.
   Montrer que $\mathbb{T}^n$ et $(\mathbb{S}^1)^n$ sont homéomorphes.
2. (**Droites projectives réelles**) On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff x \in \mathbb{R}y$. On note $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/\mathcal{R}$.
   a) Montrer que $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est en bijection avec les droites de $\mathbb{R}^n$.
   b) Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^n/\sim$ où $\mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $x \sim y \iff x = y$ ou $x = -y$ (relation d'antipodie).
   c) Montrer $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.
3. (**Cônes**) Soit X un espace topologique. On considère sur $X \times [0,1]$ le relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :
$$(x,t)\mathcal{R}(y,s) \iff (t = s = 1) \text{ ou } (x,t) = (y,s)$$
   On considère enfin $CX := (X \times [0,1])/\mathcal{R}$ et on note π la projection canonique.
   a) Décrire l'image de $X \times \{1\}$.
   b) Montrer que $x \in X \mapsto \pi(x,0) \in CX$ est un homéomorphisme sur son image. On peut donc identifier X à un sous-ensemble de CX.
   c) On se donne Y un autre espace topologique et $f : X \to Y$ continue. Montrer que l'on peut définir une application continue $Cf : CX \to CY$ telle que pour tout $(x,t) \in X \times [0,1], Cf(\pi_X(x,t)) = \pi_Y(f(x),t)$.
4. (**Ecrasements**) Soit X un espace topologique et $A \subset X$. On considère sur X le relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :
$$x\mathcal{R}y \iff (x \in A \text{ et } y \in A) \text{ ou } x = y$$
   On considère enfin $X/ < A >:= X/\mathcal{R}$ et on note π la projection canonique.
   a) Décrire l'image de A dans $X/ < A >$.

b) On suppose que A est fermé ou ouvert. Montrer que $\pi : X \setminus A \to X/ < A >$ est un homéomorphisme sur son image.

c) (Un exemple) Montrer que $C\mathbb{S}^n/ < \mathbb{S}^n >$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^{n+1}$.

Solution de l'exercice 6

1. On considère l'application $f : (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (e^{2i\pi\theta_1}, \ldots, e^{2i\pi\theta_n}) \in \mathbb{U}^n$. Cette application est continue et surjective. Si $x-y \in \mathbb{Z}^n$, $f(x) = f(y)$. Par propriété universelle du quotient, il existe une application continue $\bar{f} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{U}^n$ continue et surjective telle que $\bar{f} = f \circ \pi$. En outre, $\bar{f}$ est injective : en effet, il est clair que $f(x) = f(y) \iff x-y \in \mathbb{Z}^n$. Ainsi $\bar{f}$ est une bijection continue. Par ailleurs, $\mathbb{U}^n$ est compact et $\mathbb{T}^n$ est compact, puisque c'est l'image de $[0,1]^n$ par la projection canonique, donc (résultat déjà vu), $\bar{f}$ est un homéomorphisme.

2. a) L'application $f : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}v \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des droites) est une application surjective et l'on voit que $f(v) = f(w) \iff \mathbb{R}v = \mathbb{R}w$ donc on peut quotienter : il existe une unique application $\bar{f}$ surjective telle que $\bar{f} = f \circ \pi$, et qui est injective par l'équivalence.

   b) On note π (resp. p) le passage au quotient pour $\mathcal{R}$ (resp. $\sim$). On considère l'application continue $h : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{v}{||v||} \in \mathbb{S}^n$. On peut ensuite considérer $\tilde{h} = p \circ h$. Celle est continue et surjective comme composée d'applications continues et surjectives. En outre, on vérifie sans mal que $v\mathcal{R}w \iff \tilde{h}(v) = \tilde{h}(w)$. On peut donc construire une application bijective et continue $\bar{h}$ entre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}^n/\sim$. Les deux espaces sont compacts puisqu'on peut les obtenir par image de la sphère unité par l'application continue de passage au quotient, et donc $\bar{h}$ est un homéomorphisme.

   c) Au vu de la question précédente, on doit montrer que $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^n/\sim$ sont homéomorphes, ce qui se voit manifestement bien sur un dessin ! Pour cela, on considère $d : z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^2 \in \mathbb{S}^1$. C'est une application continue et surjective et on remarque que $d(z) = d(w) \iff z = \pm w$. On conclut donc encore une fois avec la même mélodie pour montrer qu'on peut la factoriser en un homéomorphisme.

3. a) Tous les points de $X \times \{1\}$ sont dans une même classe d'équivalence, son image par π est donc un singleton.

   b) Notons f cette application. L'application $x \in X \mapsto (x, 0) \in X \times [0,1]$ est continue puisque l'image réciproque d'un ouvert élémentaires $U \times I$ n'est autre que U si $0 \in I$ et $\emptyset$ sinon. Donc f est continue comme composée d'applications continues. f est injective car si $f(x) = f(y)$ alors $(y, 0)$ et $(x, 0)$ sont dans la même classe, qui est un singleton. Donc f est une bijection continue de $X \to f(X)$. Montrons que sa réciproque est continue. Soit U un ouvert de X. $f(U)$ est l'ensemble $\{\{(x,0)\}; x \in U\}$. On doit montrer que c'est un ouvert de $f(X)$: considérons $V = U \times [0, 1/2[$ ouvert de $X \times [0,1]$. π est injective sur V et donc $\pi^{-1}(\pi(V)) = V$. Donc $\pi(V)$ est un ouvert de CX et par suite $\pi(V) \cap f(X) = f(U)$ est un ouvert de $f(X)$. Ceci achève la démonstration.

   c) On commence par définir $g : X \times [0,1] \to CY$ en posant $g(x,t) = \pi_Y(f(x), t)$. C'est une application continue comme composée et si $(x,t)\mathcal{R}_X(y,s)$, on a deux cas : soit $(x,t) = (y,s)$ auquel cas, $g(x,t) = g(y,s)$ (le scoop), soit $t = s = 1$ auquel cas $(f(x),t)\mathcal{R}_Y(f(y),s)$ et donc $g(x,t) = g(y,s)$. Par la propriété universelle du quotient, on peut donc construire Cf comme l'unique application (continue) qui factorise g et Cf convient.

4. a) Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont A et les $\{x\}, x \notin A$. Donc l'image de A est un

point (on a bien écrasé A).

b) π est continue, et comme les classes d'équivalence de $X \setminus A$ sont des singletons, on voit bien que π est une bijection de $X \setminus A \to \pi(X \setminus A)$. Montrons que sa réciproque est continue. Soit U un ouvert de $X \setminus A$. On doit montrer que $\pi(U)$ est un ouvert de $\pi(X \setminus A)$. On peut écrire $U = V \cap (X/A)$ où V est un ouvert de X. Distinguons alors les deux cas :

- A fermé. U est en fait aussi un ouvert de X. $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ puisque π est une bijection sur U et donc $\pi(U)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. *A fortiori* un ouvert de $\pi(X \setminus A)$.

- A ouvert. Si $V \cap A = \emptyset$, on conclut comme précédemment, puisque dans ce cas $U = V$. Sinon, $V \cap A \neq \emptyset$. Dans cas $\pi(V) = \pi(U) \cup \{A\}$ et $\pi^{-1}(V) = U \cup A$ est un ouvert de X comme union de deux ouverts et donc $\pi(V)$ est un ouvert de $X/\mathcal{R}$. Par suite, $\pi(U) = \pi(V) \cap \pi(X \setminus A)$ est donc un ouvert de $(\pi(X \setminus A)$. Ce qui conclut la preuve.

Exercice 7 : Espace de Helly

On construit dans cet exercice un espace séparable, à base dénombrable de voisinages mais qui n'est pas à base dénombrable d'ouverts. On considère l'espace $[0,1]^{[0,1]}$ des applications de $[0,1]$ dans $[0,1]$, muni de la topologie produit (= de la convergence simple) et son sous-espace H des fonctions croissantes, muni de la topologie induite. C'est l'*espace de Helly.*

1. Montrer que H est séparable et à base dénombrable de voisinages.
2. Montrer que H n'est pas à base dénombrable d'ouverts.
   Indication : Considérer les fonctions $f_x, x \in [0,1]$, telles que $f_x(y) = 0$ si $y < x$, $f_x(x) = \frac{1}{2}$ et $f_x(y) = 1$ si $y > x$.

Solution de l'exercice 7

1. Séparabilité : on considère l'ensemble A des fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$, qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de fonctions indicatrices d'intervalles à extrémités rationnelles. L'ensemble A est dénombrable ; montrons qu'il est dense dans H. Tout ouvert de H contient un ouvert élémentaire de la forme
$$U = U(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, \epsilon) = \{f \in H \mid \forall i = 1, \ldots, k : |f(x_i) - y_i| < \epsilon\},$$
où les x_i et les y_i sont croissants dans $[0,1]$. Notons $J_y := \{i \in [1, \ldots, k] : y_i = y\}$. Alors, J_y est vide ou de la forme $[i_y, i_y + 1, \ldots, j_y]$, avec $j_y \geq i_y$. Pour tout $y \in [0,1]$ tel que J_y est non vide (nombre fini), on choisit des rationnels $q_{y,1}$ et q_{y2} tels que $q_{y_1} \leq x_{i_y}$ et $x_{j_y} \leq q_{y_2}$ et tels que les segments $S_y := [q_{y_1}, q_{y_2}]$ soient deux à deux disjoints. On choisit enfin, pour tout y tel que J_y est non vide des rationnels $r(y)$ proches à ϵ près de y tels que $r(y)$ croit avec y.
On considère alors la fonction
$$f := \sum_y r(y) I_{S(y)},$$
où $I_S(y)$ est la fonction indicatrice de $S(y)$ et où la somme est faite sur les y tels que J_y est non vide. Alors, f est dans $A \cap U$. Donc, A est dense dans H.

Base dénombrable de voisinages : soit f une fonction de H. Notons D_f l'ensemble des points de discontinuité de f. Il est bien connu (exercice !) que cet ensemble est dénombrable. Notons $A_f = D_f \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1])$. On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des voisinages suivants de f :

$$V = V(x_1, \ldots, x_k, n) := \{g \in H \mid \forall i = 1, \ldots, k : |f(x_i) - g(x_i)| < 1/n\},$$

où k est un entier naturel et où les x_i sont dans A_f. L'ensemble $\mathcal{V}$ est manifestement dénombrable.
Considérons W le voisinage suivant de f :

$$W = W(x, \epsilon) := \{g \in H \mid |f(x) - g(x)| < \epsilon\},$$

où x est un point de $[0,1]$ et $\epsilon > 0$. Montrons que W contient un élément de $\mathcal{V}$. Si x est un point de discontinuité de f, c'est clair : on a $V(x,n) \subset W$ dès que $1/n \leq \epsilon$. Supposons maintenant que x est un point de continuité de f. Soit δ tel que $|y - x| < \delta$ implique $|f(y) - f(y)| < \epsilon/2$. Soient q_1 et q_2 deux rationnels tels que $x - \delta < q_1 \leq x \leq q_2 < x + \delta$. Considérons $V \in \mathcal{V}$ défini par $V = V(q_1, q_2, n)$, où n est à déterminer. Soit g dans V. Par croissance de g, on a $g(q_1) \leq g(x) \leq g(q_2)$. De plus, on a $f(q_1) - 1/n \leq g(q_1)$ et $g(q_2) \leq f(q_2) + 1/n$. Enfin, on a $f(q_1) \geq f(x) - \epsilon/2$ et $f(q_2) \leq f(x) + \epsilon/2$. En mettant ces inégalités ensemble, il vient :

$$f(x) - 1/n - \epsilon/2 \leq g(x) \leq f(x) + 1/n + \epsilon/2.$$

Donc, pour n suffisamment grand, on en déduit que $V(q_1, q_2, n)$ est inclus dans W.
Tout voisinage de f est intersection finie de voisinages de la forme de W. De plus, si V_1 et V_2 sont dans $\mathcal{V}$, il existe $V_3 \in \mathcal{V}$ tel que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Ceci prouve que $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages de f.

2. On considère l'ensemble $A := \{f_x, x \in [0,1]\}$, où les f_x sont donnés dans l'énoncé. On montre immédiatement que A est un ensemble discret pour la topologie induite. Comme A n'est pas dénombrable, A n'est pas à base dénombrable d'ouverts. Donc, H non plus, car la propriété d'être à base dénombrable d'ouverts est stable par passage à un sous-espace (prendre les traces d'ouverts dans une base).

Exercice 8 : Topologie séquentielle (extrait du partiel 2021)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une partie $A \subset X$ est

- séquentiellement fermée (en abrégé s-fermée) si pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in X$, $x_n \to_{n\to+\infty} x \implies x \in A$;
- séquentiellement ouverte (en abrégé s-ouverte) si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et pour tout $x \in A$, $x_n \to_{n\to+\infty} x \implies \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in A$

1. a) Montrer que si A est s-ouverte alors $A^c = X \setminus A$ est s-fermée.
   b) Montrer que si A est s-fermée, alors A^c est s-ouverte.
2. On définit la famille $\mathcal{T}_s \subset \mathcal{P}(X)$ comme étant l'ensemble des parties séquentiellement ouvertes de X.
   a) Montrer que $\mathcal{T}_s$ est une topologie.
   b) Comparer $\mathcal{T}_s$ et $\mathcal{T}$.

c) On suppose (*uniquement dans cette question*) que tout point $x \in X$ possède une base dénombrable de voisinages. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_s$.

3. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et $x \in X$. Montrer que (x_n) converge vers x au sens de la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si (x_n) converge vers x au sens de la topologie $\mathcal{T}_s$.
4. **Un exemple où les topologies ne coïncident pas.** On considère $X = [0,1]^{[0,1]}$, muni de la topologie produit.
   On note A l'ensemble des applications qui s'annulent excepté en un nombre au plus dénombrable de points.
   a) Montrer que A est séquentiellement fermée.
   b) Montrer que A est dense dans X (pour la topologie produit). En particulier, A n'est pas fermée.

Solution de l'exercice 8

1. a) On suppose que A est s-ouverte. Soit (x_n) une suite de point de A^c qui converge vers un point $x \in X$. Montrons que $x \in A^c$. Si ce n'était pas le cas, alors $x \in A$ et comme A est s-ouverte, la suite (x_n) serait dans A à partir d'un certain rang. C'est absurde. Donc A^c est s-fermée.
   b) On suppose que A est s-fermée. Soit (x_n) une suite de X qui converge vers un point $x \in A^c$. Supposons que pour une infinité de n, $x_n \in A$. Alors, on peut extraire de (x_n) une suite (y_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in A$. Mais $y_n \to x$. Donc $x \in A$ car A est s-fermée. C'est absudre. Donc à partir d'un certain rang, $x_n \in A^c$.
2. a)
   - $\emptyset \in \mathcal{T}_s$ puisque l'on quantifie sur l'ensemble vide.
   - $X \in \mathcal{T}_s$ de façon évidente.
   - Soit $A, B \in \mathcal{T}_s$. Soit (x_n) une suite de X telle que $x_n \to x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ donc à partir d'un certain rang (aprc) n_A, $x_n \in A$. De même, apcr n_B, $x \in B$. Donc pour $n \geq \max(n_A, n_B)$, $x_n \in A \cap B$. Ceci prouve que $A \cap B \in \mathcal{T}_s$.
   - Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathcal{T}_s$. Soit x_n une suite de X telle que $x_n \to x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Alors $x \in A_i$ pour un certain i et donc apcr n_i, $x_n \in A_i \subset \bigcup_i A_i$. Ceci prouve que $\bigcup_i A_i \in \mathcal{T}_s$.

   b) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_s$. En effet, si A est ouvert. Il est s-ouvert puisque si (x_n) est une suite qui converge vers $x \in A$, A est un voisinage de x donc apcr, $x_n \in A$.
   c) On doit montrer que dans ce cas, si $A \in \mathcal{T}_s$, alors A est un ouvert. Montrons que A est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in A$. On se donne $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable de voisinage de x. Remarquons que si l'on pose $W_n = \bigcap_{m=0}^{N} V_m$, alors (W_n) est une famille décroissante de voisinage de x et reste une base de voisinage de x puisque $W_n \subset V_n$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset A$. Supposons le contraire. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in W_n \setminus A$. Mais alors $x_n \to x$. En effet, si U est un voisinage de x, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_n \subset U$ et pour $m \geq n, x_m \in W_m \subset W_n \subset U$. Comme A est s-ouverte, on devrait avoir qu'apcr, $x_n \in A$. C'est absurde. Donc il existe n tel que $W_n \subset A$ et donc A est un voisinage de x.
3. Supposons que $x_n \to x$ pour la topologie $\mathcal{T}_s$. Montrons que $x_n \to x$ pour $\mathcal{T}$. Soit $U \in \mathcal{T}$ contenant x. $U \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_s$. Donc à partir d'un certain rang, $x_n \in U$. Ce qui prouve que $x_n \to x$ pour $\mathcal{T}$.
   Supposons que $x_n \to x$ pour la topologie $\mathcal{T}$. Montrons que $x_n \to x$ pour $\mathcal{T}_s$. Soit $U \in \mathcal{T}_s$ contenant x. Par définition de $\mathcal{T}_s$, apcr $x_n \in U$ puisque $x_n \to x$ (pour $\mathcal{T}$).

4. a) Si f_n est une suite de A qui convegre simplement vers f, en notant D_n une partie dénombrable en dehors de laquelle f_n est nulle, on a pour x en dehors de l'ensemble dénombrable $\bigcup D_n$ $f(x) = \lim f_n(x) = 0$. Donc $f \in A$.
   b) Si U est un ouvert de la base naturelle de la topologie produit, de la forme $\bigcap_{i=1}^{N} \pi_{x_i}^{-1}(U_i)$, alors toute fonction qui s'annule en dehors de $x_1, \ldots, x_N$ est dans A et peut être arrangée pour être dans U donc $U \cap A \neq \emptyset$, ce qui assure que A est dense dans X.

Exercice 9 : Droite et plan de Sorgenfrey

L'espace topologique que nous allons construire fournit des contre-exemples pour un certain nombre de propriétés. Pour des tas de contre-exemples, on pourra consulter le Springer, *Counterexamples in Topology*, Lynn Arthur Steen, J. Arthur SeebachJr.
On munit $\mathbb{R}$ de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[a, b[, a < b$. On note S la droite réelle munie de cette topologie.

1. Cette topologie est-elle plus fine que la topologie usuelle ? Moins fine ?
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans S. En particulier, S est séparable.
3. Montrer que S n'est pas métrisable. *Montrer que S ne possède pas de base dénombrable d'ouverts*
4. On considère dans la suite $S \times S$ muni de la topologie produit et l'antidiagonale $\Delta = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. On note enfin $K = \{(x, -x); x \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que Δ est un fermé discret.
5. Montrer que K et $L = \Delta \setminus K$ sont fermés.
6. On souhaite montrer que K et $\Delta \setminus K$ sont deux fermés disjoints tels que pour tous ouverts U et V,
$$K \subset U \text{ et } \Delta \setminus K \subset V \implies U \cap V \neq \emptyset$$
   On fixe donc deux tels ouverts U et V.
   a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \{x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}; [x, x+2^{-n}[\times[-x, -x+2^{-n}[\subset V\}$. Montrer que $[0, 1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \cup \mathbb{Q}$.
   b) En admettant le théorème suivant :

      Théorème. Soit (X, d) espace métrique compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermés d'intérieur vide, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

      Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ ainsi que $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $]a, b[\subset \overline{K_n}$ où l'adhérence est comprise ici au sens de la topologie usuelle.
   c) Montrer que $\{(x, -x + \epsilon); x \in]a, b[, 0 < \epsilon < 2^{-n}\} \subset V$.
   d) Conclure.
7. On considère sur $S \times S$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes d'équivalence sont données par $K, \Delta \setminus K$ et $\{x\}, x \in S \times S \setminus \Delta$. Montrer que $\mathcal{R}$ est fermée mais que $S \times S/\mathcal{R}$ n'est pas séparé.

Solution de l'exercice 9

1. Si $a < b$, l'intervalle $]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}[a+2^{-n}, b[$ est un ouvert de S. Ces intervalles engendrant la topologie usuelle, celle-ci est moins fine que la topologie de S.
2. $\mathbb{Q}$ intersecte tout intervalle $[a, b[$ donc tout ouvert non vide.

3. Si S était métrisable, $B(q, 2^{-n}), q \in Q, n \in \mathbb{N}$ serait une base dénombrable d'ouverts pour S. On démontre donc l'indication. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une base d'ouverts. On va montrer que I n'est pas dénombrable en injectant $\mathbb{R}$ dans I. Pour cela, si $x \in \mathbb{R}$, on considère $[x, x+1[$ qui peut s'écrire comme réunion
$$[x, x+1[= \bigcup_{i\in I_x} U_i$$
$x \in [x, x+1[$ donc il existe $i_x \in I$ tel que $x \in U_{i_x}$ et nécessairement $x = \inf U_{i_x} = \min U_{i_x}$. On considère alors $f : x \in \mathbb{R} \mapsto i_x \in I$. f est injective car si $i_x = i_y$, $x = \min U_{i_x} = \min U_{i_y} = y$. Ce qui achève la démonstration.
4. Soit $(x, y) \in S \times S \setminus \Delta$. On suppose par exemple que $y < -x$ et soit $y < z < -x$. $[x, -z[\times[y, z[$ est un ouvert contenant (x, y) et qui ne rencontre pas Δ. $S \times S \setminus \Delta$ est donc un voisinage de chacun de ses points, donc ouvert et Δ est fermé.
Soit $(x, -x) \in \Delta$. $U = [x, x+1[\times[-x, -x+1[$ est un ouvert qui vérifie $U\cap\Delta = \{(x, -x)\}$, donc $(x, -x)$ est isolé. Ainsi, Δ est discret.
5.
   - K fermé : son complémentaire est ouvert, on montre que c'est un voisinage de chacun de ses poins. Si $(x, y) \notin K$, soit $(x, y) \notin \Delta$ un ouvert $[x, -z[\times[y, z[$ avec z bien choisi convient, soit $(x, y) \in \Delta$ et l'ouvert $[x, x+1[\times[-x, -x+1[$ convient.
   - $L = \Delta \setminus K$ fermé : un raisonnement similaire convient.
6.
   a) C'est que conséquence immédiate du fait que $L \subset V$ et du fait que les $[x, x + 2^{-n}[\times[-x, -x + 2^{-n}[$ forment une base de voisinage de $(x, -x)$.
   b) On applique la contraposée du théorème à la famille $\{\overline{K_n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{Q}$. Son union n'étant pas d'intérieur vide, il existe un de ses ensembles qui n'est pas d'intérieur vide, et il ne peut pas être un singleton, donc c'est un K_n.
   c) On fixe $x \in]a, b[, 0 < \epsilon < 2^{-n}$. Il suffit de montrer qu'il existe $y \in K_n$ tel que $(C1) : x \in [y, y + 2^{-n}[\times[-y, -y + 2^{-n}[\subset V$. Si $x - \epsilon < y < x$, $C1$ est vérifiée. Or, $]x - \epsilon, x[\cap]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide inclus dans $\overline{K_n}$, donc $]x - \epsilon, x[\cap]a, b[\cap K_n \neq \emptyset$. Tout y dans cette intersection convient.
   d) Si $a < q < b$ avec $q \in \mathbb{Q}$, $(q, -q) \in U$ donc il existe $\epsilon > 0$, $[q, q+\epsilon[\times[-q, -q+\epsilon[\subset U$. On peut toujours supposer que $\epsilon < 2^{-n}$. Dans ce cas, le point $(q, -q+\epsilon/2)$ est dans U mais aussi dans V, d'où $U \cap V \neq \emptyset$.
7. $\mathcal{R} = L \times L \cup K \times K \cup \{(x, x); x \in S \setminus \Delta \times S \setminus \Delta\}$ est l'union de 3 fermés donc fermé. Si l'on pose $l = \pi(l_0)$ pour $l_0 \in L$ et $k = \pi(k_0)$ pour $k_0 \in K$, on ne peut pas séparer l et k. En effet, si U et V sont des voisinages de l et k respectivement, $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$sont des voisinages de L et K respectivement, donc s'intersecte en $x_0 \in S \times S$. Alors, $\pi(x_0) \in U \cap V$.