Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 laslier@dma.ens.fr

TD4 : Théorèmes de convergence et calcul d'intégrales

Exercice 1. [Début en douceur] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Grâce au théorème de convergence monotone, montrer que si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu$.
2. Grâce au théorème de convergence dominé, montrer que si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu.$$

3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\mathrm{d}x$.

Solution de l'exercice 1.

1. La suite $(\sum_{k=1}^n f_j)_n$ est une suite croissante de fonctions positives, on applique donc le théorème de convergence monotone et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^n f_j \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f_j \mathrm{d}\mu$$
$$\sum_{j=1}^\infty \int f_j \mathrm{d}\mu = \int \sum_{j=1}^\infty f_j \mathrm{d}\mu.$$

2. Grâce au résultat précédent, on a $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Par conséquent, pour μ-presque tout $x \in E$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ par inégalité de Markov. On en déduit que la suite $(\sum_{j=1}^n f_n)_n$ est une suite convergente presque partout de fonctions. De plus, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^n f_j(x) \right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_j(x)| \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Par conséquence, par théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^n f_j \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f_j \mathrm{d}\mu$$
$$\sum_{j=1}^\infty \int f_j \mathrm{d}\mu = \int \sum_{j=1}^\infty f_j \mathrm{d}\mu.$$

3. On observer que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty x^{2k} \ln x \mathrm{d}x.$$

Puisque $(-x^{2n}\ln x)_n$ est une suite de fonctions positives, on a

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} -x^{2k}\ln x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 -x^{2k}\ln x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

par théorème de Fubini-Tonelli et intégration par parties. Ensuite, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)} = \frac{\pi^2}{24},$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De même, on a

$$\frac{\sin(\alpha x)}{e^x-1} = e^{-x}\sin(\alpha x)\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)x}\sin(\alpha x),$$

on utilise donc le théorème de Fubini-Lebesgue pour obtenir

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin(\alpha x)e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{(n+1)^2+a^2}.$$

Exercice 2. Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n \to f$ μ-p.p. On suppose que $\sup_{n\geq 1}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu < \infty$. Montrer que f est intégrable.

Solution de l'exercice 2. Par le lemme de Fatou, on a

$$\int_E |f|d\mu = \int_E \liminf |f_n|d\mu \leq \liminf \int_E |f_n|d\mu < \infty.$$

Exercice 3. [Théorème d'Egoroff] Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $(E,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq n}\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\Big) \leq \eta\ .$$

2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \epsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $E \backslash A$.
3. Que se passe-t-il lorsque $\mu(E) = \infty$?

Solution de l'exercice 3.

1. Soit $k \geq 1$. On introduit $A_n = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}$. Tout point appartenant à $\limsup_n A_n$ est un point x pour lequel $f_n(x)$ ne converge pas vers $f(x)$. Ainsi
$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \ .$$
On rappelle que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est la limite décroissante pour l'inclusion de la suite d'ensembles $(\cup_{j\geq n} A_j)_{n\geq 1}$. Comme $\mu(E) < \infty$ on a
$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{j\geq n} A_j) \ .$$
On peut alors conclure.
2. On fixe $\epsilon > 0$. Pour tout $k \geq 1$, il existe $n_k \geq$ tel que $\mu(\cup_{j\geq n_k} A_j) \leq \epsilon 2^{-k}$. On pose alors $A := \cup_{k\geq 1} \cup_{j\geq n_k} A_j$. On a $\mu(A) \leq \sum_{k\geq 1} \epsilon 2^{-k} \leq \epsilon$. On remarque alors que pour tout $x \in E \backslash A$ on a
$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k \ , \quad \forall n \geq n_k.$$
Ainsi (f_n) converge uniformément vers f sur cet ensemble.
3. Le résultat devient faux. Par exemple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on prend $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty)}$.

Exercice 4. [Fonction Γ] Soit Γ la fonction définie par $t \in (0, +\infty) \mapsto \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$. Grâces aux fonctions définies par $f_n : x \in \ (0, +\infty) \ \mapsto \mathbb{1}_{\{(0,n)\}}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}$, montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$, $\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}$.

Solution de l'exercice 4. On applique ici le théorème de convergence dominée, on a
$$0 \leq f_n(x) \leq x^{t-1} e^{-x} \in \mathcal{L}^1(\mathrm{d}x),$$
par conséquent
$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - x/n)^n x^{t-1} \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} n^t \int_0^1 (1-y)^n y^{t-1} \mathrm{d}y.\end{aligned}$$
Posons $I_n(t) = \int_0^1 y^{t-1}(1-y)^n \mathrm{d}y$, on montre par récurrence que $I_n(t) = \frac{nI_{n-1}(t+1)}{t}$, d'où l'on obtient par une récurrence immédiate
$$I_n(t) = \frac{n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}$$

Exercice D. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{A}$ la tribu borélienne de cette ensemble et $\mathcal{B}$ la plus petite tribu rendant les applications $\pi_x : f \mapsto f(x)$ mesurables. Montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Exercice 5. [Ensemble de Cantor] Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ et soit $K_0 := [0, 1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant de chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de l'intervalle en question et de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \cap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

Solution de l'exercice 5.

1. K est une intersection de fermés, c'est donc un fermé. Par ailleurs K est inclus dans l'intervalle borné $[0,1]$, on en déduit donc qu'il est compact.
   Soit $\varphi : K \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'application construite de la façon suivante. Soit $x \in K$. Si x appartient à l'intervalle de gauche de K_1 alors on pose $\varphi(x)_1 := 0$, s'il appartient à l'intervalle de droite on pose $\varphi(x)_1 := 1$. En répétant ce procédé on obtient une suite $(\varphi(x)_n)_{n\geq 1}$. Il est clair que φ est une bijection. On en déduit que K n'est pas dénombrable.
   Montrons par contradiction que K est d'intérieur vide. Supposons qu'il existe deux points $x \neq y$ tels que $[x,y] \subset K$. Nécessairement $[x,y]$ est entièrement inclus dans l'un des intervalles fermés qui constitue K_n, pour tout $n \geq 1$. Ainsi $\varphi(x)_n = \varphi(y)_n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui implique que $\varphi(x) = \varphi(y)$ et donc $x = y$. On en conclut que K ne contient aucun intervalle non trivial, et est donc d'intérieur vide.
   Soit x un point de K. Soit $n \geq 1$. Tout point $y \in K$ tel que $\varphi(y)_k = \varphi(x)_k$ pour tout $k \leq n$ est tel que x et y appartiennent au même intervalle de K_n. La longueur des intervalles de K_n est donnée par
   $$\epsilon_n := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-d_k}{2} \ .$$
   Cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$. On en déduit donc que la distance entre x et y tend vers 0 quand $n \to \infty$.
2. Comme K est la limite décroissante de K_n, et que les K_n sont inclus dans $K_0 = [0,1]$ on a
   $$\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \ .$$
   On remarque alors que
   $$\lambda(K_{n+1}) = (1-d_n)\lambda(K_n) = \prod_0^n (1-d_k) = \exp(\sum_0^n \log(1-d_k)) \ .$$
   Ainsi $\lambda(K_n)$ tend vers une limite non nulle si et seulement si
   $$\sum_{n\geq 0} d_n < \infty \ .$$

Exercice 6. [Mesure atomique] Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$.

1. Donner un exemple de mesure possédant des atomes.
2. Montrer que la mesure de Lebesgue n'a pas d'atomes.
3. Donner un exemple de mesure possédant des atomes qui ne sont pas des singletons.

Une mesure est appelée purement atomique s'il existe une collection $\mathcal{C}$ d'atomes de μ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a $\mu(A) = \sum_{C\in\mathcal{C}} \mu(A \cap C)$.

4. Montrer qu'une mesure sur un ensemble dénombrable muni de la tribu des parties est purement atomique.

Une mesure est appelée diffuse si elle n'a pas d'atome.

5. ($\star$) Montrer que si μ est diffuse et que $\mu(X) = 1$, alors l'image de $\mathcal{F}$ par μ est $[0, 1]$. On pourra commencer par montrer que si $\mu(A) > 0$, il existe $B \subset A$ mesurable tel que $\mu(A)/3 \leq \mu(B) \leq 2\mu(A)/3$.
6. Nous allons maintenant montrer que toute mesure finie se décompose en une mesure atomique et une mesure diffuse. On suppose $\mu(X) < \infty$.
   (a) Si A et B sont deux atomes de μ, on pose $A \equiv B$ si $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atomes de μ.
   (b) Montrer que si A et B sont deux atomes dans des classes d'équivalences différentes, alors $\mu(A \cap B) = 0$.
   (c) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une collection d'atomes contenant exactement un représentant de chaque classe d'équivalence pour $\equiv$. Montrer que la mesure définie par
   $$\nu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap C_i),$$
   est une mesure purement atomique, et que $\mu = \nu + \rho$ avec ρ une mesure sans atomes.

Solution de l'exercice 6.

1. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ possède des atomes.
2. Supposons par l'absurde que A soit un atome de la mesure de Lebesgue. Alors la fonction croissante $f : x \mapsto \lambda(A \cap (-\infty, x))$ prend les valeurs 0 ou $\lambda(A)$, avec $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda(A)$. Fixons x^* tel que $f(x^*-) = 0$ et $f(x^*+) = \lambda(A)$. On obtient aisément que pour tout $\epsilon > 0$,
   $$\lambda(A) = \lambda(A \cap (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]) \leq 2\epsilon.$$
   On en déduit que $\lambda(A) = 0$, c'est une contradiction.
3. On pose $E = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par $[0, 1/2]$ et l'ensemble des singletons, et μ la restriction de la mesure de Lebesgue à $\mathcal{F}$. On observe que $[0, 1/2]$ est un atome de μ.
4. On a immédiatement, par σ-additivité
   $$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in E} \mu(\{x\} \cap A)$$
5. Soit μ une mesure diffuse. On va montrer quel que soit l'ensemble mesurable A avec $\mu(A) > 0$, il existe un sous-ensemble B de A tel que $\frac{\mu(A)}{3} \leq \mu(B) \leq \frac{2\mu(A)}{3}$, le résultat général s'en déduit.

   Soit A un ensemble mesurable de mesure non-nulle. On pose
   $$I = \inf \left\{ \mu(B_\infty), B_\infty := \bigcap_{n \geq 0} B_n \text{ avec pour tout } n \ B_n \subset B_{n-1} \subset A \text{ et } \mu(B_n) \geq \mu(A)/3 \right\}.$$
   On a par définition $I \geq \mu(A)/3$. Supposons par l'absurde que $I \geq 2\mu(A)/3$, dans ce cas on peut construire une suite $(B_\infty^n, n \geq 0)$ telle que $\mu(B_\infty^n) \to I$, on a alors $\mu(\cap_{n \geq 0} B_\infty^n) = I$.

Puisque $B_\infty^\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_\infty^n$ n'est pas un atome, il existe $C \subset B_\infty^\infty$ avec $\mu(C) < \mu(B_\infty^\infty) = I$. On a alors $\mu(A)/3 \leq I/2 < \max(\mu(C), \mu(B_\infty^\infty \backslash C)) < I$, on obtient donc une contradiction, puisque l'une des suites constantes C ou $B_\infty^\infty \backslash C$ appartient à l'ensemble des suites décroissantes mesurables de mesure supérieure à $\mu(A)/3$.

6. On observe que si A et B sont deux atomes de μ, alors $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$. Donc soit $\mu(A \cap B) = \mu(A) = \mu(B)$ soit $\mu(A \cap B) = 0$. Cela montre que $\equiv$ est symétrique, elle est également transitive puisque si $A \equiv B$, alors $A \cap B \equiv B$.
7. Soit A et B deux atomes de μ. Si $\mu(A \cap B) \neq \mu(A)$ alors $\mu(A \cap B) = 0$ par définition des atomes.
8. On vérifie aisément que ν est purement atomique. De plus puisque $\nu(A) \leq \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$, la fonction $\rho : A \mapsto \mu(A) - \nu(A)$ définit bien une mesure finie sur X. De plus, si C est un atome de ρ, c'est un atome de μ qui n'est pas un atome de ν, on obtient une contradiction.

Exercice 7. [Escalier du diable] On considère $(F_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par :

— Pour $x \in [0,1]$, $F_0(x) = x$;

— La fonction F_1 est la fonction qui envoie $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ sur $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ respectivement, et qui est affine entre chacun de ces points ;

— De même on passe de F_n à F_{n+1} en remplaçant F_n sur chacun des intervalles maximaux $[a,b]$ où elle est affine par la fonction qui envoie $a, (2a+b)/3, (a+2b)/3, b$ sur $F(a), (F(a)+F(b))/2, (F(a)+F(b))/2, F(b)$ respectivement et qui est affine entre chacun de ces points.

1. Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On appelle F la limite. Montrer que F est continue sur $[0,1]$ et croît de 0 à 1.
2. Montrer que F est dérivable presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue) et que sa dérivée est identiquement nulle.
3. Soit μ la mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont F est la fonction de répartition. Montrer que μ est à la fois diffuse et portée par un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Solution de l'exercice 7.

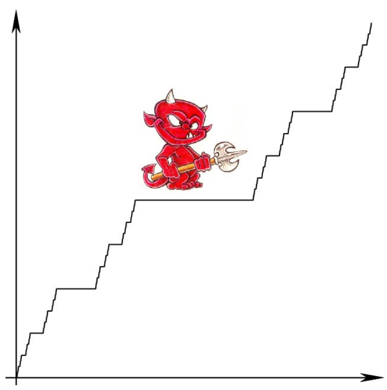

FIGURE 1 – L'escalier de Cantor

1. On peut vérifier que F_n prend les valeurs $0, 2^{-n}, 2.2^{-n}, \dots, 2^{n-1}2^{-n}, 1$ et alterne entre des intervalles où elle est affine entre deux tels points et où elle constante. Ainsi lors d'un passage de F_{n+1} à F_n on a : $\sup |F_{n+1} - F_n| \leq 2^{-n}$.
2. La fonction F est constante sur chaque composante connexe de l'ensemble ouvert K^c où K est l'ensemble de Kantor associé à la suite $d_n = 1/3$ (voir l'exercice précédent). Comme $\sum_{n \geq 0} d_n = \infty$, la mesure de Lebesgue de K est nulle. Rappelons que K^c est une réunion d'intervalles ouverts non triviaux. Ainsi F est de dérivée nulle presque partout.
3. La fonction F étant continue, μ ne peut avoir d'atome. Par ailleurs, le support de μ est contenu dans le fermé K de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 8. Trouver $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ mais $A + B = \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 8. Considérons la décomposition dyadique des réels dans $[0, 1]$. On note A l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont la décomposition vaut 0 aux rangs pairs, et B l'ensemble de ceux dont la décomposition vaut 0 aux rangs impairs.
On remarque que pour tout $n \geq 1$ on a $\lambda(A) \leq 2^{-n}$, $\quad \lambda(B) \leq 2^{-n}$. Ainsi $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$. Par ailleurs, la somme des éléments de A et B génère tous les réels de $[0, 1]$. Pour conclure, il suffit de remplacer A par l'union sur les $z \in \mathbb{Z}$ de $z + A$, et idem pour B.