TD 5 : Un problème de compacité

Exercice 1 : Compactification de Stone-Čech (extrait du partiel 2020)

On dit qu'un espace topologique X est un espace de Tychonoff si il est séparé et si pour tous $x \in X$ et $F \subset X$ fermé tels que $x \notin F$, il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $F \subset f^{-1}(\{1\})$. Dans tout l'exercice, on fixe un espace de Tychonoff X.
Une compactification de Stone-Čech de X est un espace topologique compact (en particulier séparé) $\widehat{X}$ et une application continue $\iota_X : X \to \widehat{X}$ qui satisfont la propriété universelle suivante :

pour tout espace topologique compact K et pour toute application continue $f : X \to K$, il existe une unique application continue $\widehat{f} : \widehat{X} \to K$ telle que $f = \widehat{f} \circ \iota_X$.

1. Soit $(\widehat{X}, \iota_X)$ et (Y, j_X) deux compactifcations de Stone-Čech de X. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $f : \widehat{X} \to Y$ tel que $f \circ \iota_X = j_X$.
2. Soit $(\widehat{X}, \iota_X)$ une compactification de Stone-Čech de X. Montrer que ι_X est un homéomorphisme sur son image.
   Construction. A partir de maintenant, on cherche à construire une compactification de Stone-Čech de X. Pour cela, on note C_X l'espace des fonctions continues de X dans $[0,1]$ et $K_X = [0,1]^{C_X}$, muni de la topologie produit. On notera $(\Phi(g))_{g \in C_X}$ les éléments de K_X. On note également $I : X \to K_X, x \mapsto I(x)$ où $I(x)(g) = g(x)$. Finalement, on définit $\widehat{X}$ comme étant l'adhérence de $I(X)$ dans K_X.
3. Justifier que K_X est un espace topologique compact.
4. a) Montrer que I est injective.
   b) Montrer que I est continue.
   c) Montrer que $I : X \to I(X)$ est ouverte et en déduire que I réalise un homéomorphisme sur son image. *Indication : N'oubliez pas que X est de Tychonoff.* Dans la suite, on note donc $\iota_X = I$.
5. Dans cette question, on souhaite démontrer que la propriété universelle est vérifiée. Soit donc K un espace topologique compact et $f : X \to K$ continue et on souhaite montrer l'existence d'une unique application $\widehat{f} : \widehat{X} \to K$ telle que $\widehat{f} \circ \iota_X = f$.
   a) Montrer l'unicité d'une telle application.
   b) On suppose que K est de la forme $[0,1]^A$, muni de la topologie produit, avec A quelconque. Prouver l'existence dans ce cas. *Indication : l'étendre à tout K_X !*
   c) Montrer qu'il existe $\iota : K \to [0,1]^{C_K}$ un homéomorphisme sur son image (où C_K est l'ensemble des applications continues de K dans $[0,1]$). On pourra admettre qu'un compact est de Tychonoff.
   d) Conclure.

Solution de l'exercice 1

1. Puisque Y est un espace topologique compact, on peut appliquer la propriété universelle à (Y, j_X) : il existe une unique application $f : \widehat{X} \to Y$ continue telle que $f \circ \iota_X = j_X$. De même, il existe une unique application continue $g : Y \to \widehat{X}$ telle que $g \circ j_X = \iota_X$.

Montrons alors que f et g sont inverses l'une de l'autre, ce qui prouvera que f est l'homéomorphisme recherché. On a

$$g \circ f \circ \iota_X = g \circ j_X = \iota_X.$$

Or, en appliquant la propriété universelle à $\widehat{X}$ et ι_X, $\mathrm{Id}_{\widehat{X}}$ est l'unique application h qui vérifie $h \circ \iota_X = \iota_X$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\widehat{X}}$. De même pour $f \circ g$. Ce qui montre que f est bijective d'inverse g.

2. ι_X est continue. Montrons qu'elle est injective. Soit $x \neq y$ deux points de X. Il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$. Mais alors, il existe $\widehat{f} : \widehat{X} \to [0,1]$ telle que $\widehat{f} \circ \iota_X = f$. On ne peut donc pas avoir $\iota_X(x) = \iota_X(y)$, donc ι_X est injective. C'est donc une bijection continue sur son image. Il reste à voir que $\iota_X : X \to \iota_X(X)$ est ouverte : pour cela, on va montrer qu'elle envoie un fermé sur un fermé. Soit $F \subset X$ un fermé de X. Montrer que $\iota_X(F)$ est un fermé de $\iota_X(X)$. Montrons que son complémentaire est ouvert dans $\iota_X(X)$. Soit $\iota_X(y) \in \iota_X(X)$ avec $y \notin F$. On souhaite montrer qu'il existe un ouvert U de $\iota_X(X)$ telle que $y \in U$ et $U \cap \iota_X(F) = \emptyset$. Pour cela, on sait qu'il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle que $f(y) = 0$, $F \subset f^{-1}(1)$. On étend f par la propriété universelle en $\widehat{f}$. Alors $U_1 = \widehat{f}^{-1}([0,1/2[)$ est un ouvert de $\widehat{X}$ et donc $U = U_1 \cap \iota_X(X)$ est un ouvert de $\iota_X(X)$. Or, $y \in U$ et $U \cap \iota_X(F) = \emptyset$ puisque si $z = \iota_X(x) \in \iota_X(F)$, $\widehat{f}(z) = 1$. D'où le résultat.
3. K_X est compact par le théorème de Tychonoff et $\widehat{X}$ est un fermé de K_X, donc compact.
4. a) Soit $x \neq y \in X$. On sait qu'il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle $f(x) \neq f(y)$. Donc $I(x)(f) \neq I(y)(f)$, de sorte que $I(x) \neq I(y)$, donc I est injective.

   b) Il suffit de montrer que l'image réciproque d'un ouvert de la base des ouverts de la topologie produit est un ouvert de X. Soit $g_1, \ldots, g_N \in C_X$ et des ouverts $U_1, \ldots, U_N$ de $[0,1]$, et considérons l'ouvert de la base

   $$U = \{\Phi \in K_X, \Phi(g_i) \in U_i, 1 \leq i \leq N\}$$

   On a alors

   $$x \in I^{-1}(U) \iff I(x) \in U \iff \forall 1 \leq i \leq N, I(x)(g_i) \in U_i \iff \forall 1 \leq i \leq N, g_i(x) \in U_i$$

   Ainsi $I^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{N} g_i^{-1}(U_i)$ est ouvert comme intersection finie d'ouverts, les g_i étant continues. Finalement, I est continue.

   c) Si I est ouverte, elle devient évidemment un homéo sur son image !
   Soit $F \subset X$ un fermé. On veut montrer que $I(F)$ est un fermé de $I(X)$. On montre que son complémentaire est ouvert. Soit $\Phi = I(x)$ avec $x \notin F$. On sait qu'il existe $f : X \to [0,1]$ continue telle que $F \subset f^{-1}(1)$ et $f(x) = 0$. $U = \{\Psi \in K_X, \Psi(f) < 1/2\}$ est un ouvert de K_X par définition de la topologie produit. Il est clair que $I(x) \in U$ et que $I(F) \cap U = \emptyset$ par définition de I. Ceci prouve que le complémentaire de $I(F)$ est ouvert dans $I(X)$ et donc que I est ouverte.
5. a) Soit g une autre telle application. Nécessairement, $\widehat{f}$ et g coïncident sur $\iota_X(X) = I(X)$. Or, deux applications continues qui coïncident sur un ensemble, coïncident sur son adhérence si l'espace d'arrivée est séparé.
   Preuve : soit $f, g : X \longrightarrow Y$ avec Y séparé, qui coïncident sur un ensemble dense dans X. Soit $x \in X$ tel que $f(x) \neq g(x)$. On sépare ces points dans y par des ouverts U_f, U_g, et on remarque que $f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g)$ est un ouvert de X qui contient x,

donc est non vide. Ainsi, l'ensemble dense sur lequel coïncident f et g intersecte aussi $f^{-1}(U_f) \cap f^{-1}(U_g)$, disons en un point z. Ainsi, $f(z) \in U_f$, $g(z) \in U_g$, mais $U_f \cap U_g = \emptyset$ alors que $f(z) = g(z)$, d'où la contradiction.

Or, par définition de $\widehat{X}$, $\iota_X(X)$ est dense $\widehat{X}$. Donc, $\widehat{f} = g$.

b) On définit $\widehat{f} : K_X \to [0,1]^A$ de la façon suivante. Si $a \in A$, on note f_a l'application continue : $x \in X \mapsto f(x)_a \in [0,1]$ (on l'on note $(g_a)_{a\in A}$ les éléments de $[0,1]^A$)). On pose alors

$$\widehat{f}(\Phi)_a = \Phi(f_a)$$

On voit facilement que

$$\widehat{f} \circ \iota(x)_a = \widehat{f}(I(x))_a = I(x)(f_a) = f_a(x) = f(x)_a$$

de sorte que $\widehat{f} \circ \iota(x) = f(x)$. Il faut surtout montrer que $\widehat{f}$ est continue. On considère un ouvert de la base de la topologie produit sur $[0,1]^A$: $a_1, \dots, a_N \in A$, $U_1, \dots, U_N$ des ouverts de $[0,1]$ et

$$U = \{\Psi \in [0,1]^A, \Psi(a_i) \in U_i, 1 \leq i \leq N\}$$

On a

$$\widehat{f}(\Phi) \in U \iff \forall 1 \leq i \leq N, \Phi(f_{a_i}) \in U_i$$

de sorte que

$$\widehat{f}^{-1}(U) = \{\Phi \in K_X, \Phi(f_{a_i}) \in U_i)\}$$

qui est bien un ouvert pour la topologie produit.

c) Soit K un espace topologique compact. On sait qu'il est normal par le TD 4, donc il est de Tychonoff par le Lemme d'Urysohn, par le TD3... C'est bien fait quand même, ces TD ! :-)

Puisqu'il est de Tychonoff, la question 4 prouve que l'on peut construire $\iota : K \to [0,1]^{C_K}$ comme voulu.

d) On étend d'abord $\iota \circ f$ sur $[0,1]^{C_K}$ par la question 5.b) en $\widetilde{f} : K_X \to [0,1]^{C_K}$, que l'on restreint ensuite à $\widehat{X}$. Or, si $x \in X$,

$$\widetilde{f}(I(x)) = \iota \circ f(x) \in \iota(K)$$

Donc sur $I(X)$, on a $\widetilde{f} = \iota \circ f$. Puisque $I(X)$ est dense dans $\widehat{X}$ et que ces applications sont continues, l'égalité reste vrai sur $\widehat{X}$. On pose alors

$$\widehat{f} = \iota^{-1} \circ \widetilde{f}$$

qui convient.

En effet, $\tilde{f} : \hat{X} \longrightarrow K_K$ est bien à valeurs dans $\iota(K)$, ce qui n'est pas immédiat !

Pour voir cela, remarquons d'abord que $\tilde{f} \circ I$ est à valeurs dans $\iota(K)$. De plus, comme $I(X)$ est dense dans $\hat{X}$, l'image de $\tilde{f}$ est exactement $\tilde{f}(\overline{I(X)})$. Notons alors que

$$\tilde{f}\left(\overline{I(X)}\right) \subset \overline{\tilde{f}(I(X))}.$$

En effet, soit $y \in \tilde{f}(\overline{I(X)})$ et par l'absurde, $y \notin \overline{\tilde{f}(I(X))}$. Comme $\overline{\tilde{f}(I(X))}^C$ est ouvert, on dispose de U un ouvert de K_K tel que $y \in U \subset \overline{\tilde{f}(I(X))}^C$. Par continuité

de $\tilde{f}$, l'image réciproque de U est ouverte, et vérifie $\tilde{f}^{-1}(U) \subset I(X)^C$. Par définition de l'intérieur, on a alors $\tilde{f}^{-1}(U)$ qui est inclus dans l'intérieur de $I(X)^C$. Or (voir TD1), l'intérieur du complémentaire est le complémentaire de l'adhérence, donc $\tilde{f}^{-1}(U) \subset \overline{I(X)}^C$, ce qui contredit que $y \in \tilde{f}(\overline{I(X)})$.
On a donc montré que $\tilde{f}(\overline{I(X)}) \subset \overline{\tilde{f}(I(X))}$.
Or, on sait que $\tilde{f} \circ I = \iota \circ f$ sur X. Donc $\overline{\tilde{f}(I(X))} = \overline{\iota(f(X))}$, et comme $f(X) \subset K$, on a alors $\overline{\iota(f(X))} \subset \overline{\iota(K)}$. Comme K est compact, et que l'image continue d'un compact est compacte, $\iota(K)$ est compact (car ι est un homéomorphisme), et en particulier fermé, donc $\overline{\iota(K)} = \iota(K)$. Pour résumer,

$$\tilde{f}(\hat{X}) = \tilde{f}(\overline{I(X)}) \subset \overline{\tilde{f}(I(X))} = \overline{\iota(f(X))} \subset \overline{\iota(K)} = \iota(K).$$

De fait, $\tilde{f}$ est bien à valeurs dans $\iota(K)$ et donc $\hat{f} = \iota^{-1} \circ \tilde{f}$ est bien définie ! :-)