Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

Corrigé du TD de Logique, feuille 6

Exercice 1 (Groupes ordonnés divisibles) **:**

1. La théorie T contient les axiomes suivants :
   - La théorie des groupes abéliens $\forall xyz,\ (x+y)+z = x+(y+z) \wedge x+y = y+x \wedge x+(-x) = 0 \wedge x+0 = x$;
   - $\forall xyz,\ x < y \rightarrow x+z < y+z$;
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\forall x \exists y,\ x+\ldots+x = y$ où x apparait n fois dans la somme ;
   - $\exists x,\ x \neq 0$.
   - Les axiomes de la théorie des ordres totaux.
2. Supposons que $x \neq 0$, quitte à remplacer x par $-x$ on peut supposer que $x > 0$. On a alors $(n+1)\cdot x > n\cdot x$ et donc si $n \neq 0$, $n \cdot x > 0$.
3. Soit G un groupe divisible sans torsion. Soit x, y et $z \in G$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tels que $n\cdot y = n \cdot z = x$. On a alors $n\cdot(y-z) = 0$ et donc comme G est sans torsion $y = z$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, x/n est bien défini. Pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on pose alors $p/q \cdot x = p\cdot(x/q)$ (c'est bien défini). On peut vérifier que cela fait bien de G un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
4. a) Soit $x \in \mathrm{Div}(A)$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, comme G est divisible, il existe $y \in G$ tel que $n \cdot y = x \in A$. Comme $x \in \mathrm{Div}(A)$, il existe m tel que $m \cdot x \in A$ et donc $nm \cdot y \in A$. Par définition de $\mathrm{Div}(A)$, $y \in \mathrm{Div}(A)$ et donc $\mathrm{Div}(A)$ est bien divisible.

   b) Soit $y \in \mathrm{Div}(A)$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que $n\cdot y \in A$, on pose alors $g(y) = f(n\cdot y)/n$ (c'est bien défini). Il est alors facile de vérifier que g est bien un morphisme de groupe. De plus, on peut montrer (par récurrence) que si $x < y$ alors $x/n < y/n$. Il s'en suit donc que g est aussi strictement croissant.
5. Soient G, H des modèles de T, $E \leqslant G$ une sous-structure, $a \in G$ et $f : E \to H$ un plongement. On cherche une extension élémentaire $H^* \succeq H$ et un plongement $g :< E, a > \hookrightarrow H^*$ étendant f. Par 4)b), on peut supposer que $E = Div(E)$, et que $a \notin E$. Appliquant la méthode des diagrammes, nous cherchons un modèle de $\Sigma(x) := D^{el}(H) \cup \{\varphi(x, f(e)) \mid e \subseteq E,\ \varphi \text{ sans quantificateurs}, G \vDash \varphi(a, e)\}$. Par compacité, il suffit de montrer que Σ est finiment consistante. Comme d'habitude, nous cherchons, pour $\Sigma_0 \subset \Sigma$ fini, un modèle où l'extension élémentaire de H est H lui-même. Quitte à prendre une conjonction, il suffit de traiter le cas où $\Sigma_0 \subseteq D^{el}(H) \cup \{\varphi(x, f(e))\}$, où on a $G \vDash \varphi(a, e)$.

   Comme les formules sans quantificateurs sont équivalentes à des formules de la forme $\bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{i,j}$, où les $\varphi_{i,j}$ sont des formules atomiques ou des négations de formules atomiques, il suffit de traiter le cas où φ est de la forme $\bigwedge_j \varphi_{i,j}(x, f(e))$. Comme il n'y a qu'un symbole de relation binaire, et l'égalité, les formules atomiques ou négations d'atomiques sont de l'une des formes suivantes :

   a) $t_1(x,y) = t_2(x,y)$

   b) $t_1(x,y) < t_2(x,y)$

   c) $\neg(t_1(x,y) = t_2(x,y))$

   d) $\neg(t_1(x,y) < t_2(x,y))$

   De plus, les termes du langage sont équivalents à des termes de la forme $t(x,y) = n\cdot x + \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot y_i$, où $n, n_i \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de montrer que, *par densité de l'ordre de H*, une conjonction finie $\bigwedge_j \varphi_{i,j}(x, f(e))$ de telles formules a une solution dans H, dès que $G \vDash \bigwedge_j \varphi_{i,j}(a, e)$. Nous allons en fait montrer que chaque $\varphi_{i,j}(x, f(e))$ est équivalente, modulo $D^{el}(H)$, à une formule $\psi_{i,j}(x, f(e))$, où $\psi_{i,j}(x,y)$ est une formule sans quantificateurs dans le langage de l'ordre, telle que $G \vDash \psi_{i,j}(a, e)$. Ecrivons alors $t_1(x,y) = n\cdot x + \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot y_i$ et $t_2(x,y) = m\cdot x + \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot y_i$. Nous allons traiter les deux premiers cas, les autres étant similaires, car l'ordre est total. Comme $a \notin Div(E)$, le premier cas est dégénéré : si on a $G \vDash$

$t_1(a,e) = t_2(a,e)$, alors on a $(n-m)\cdot a = \sum_i (m_i - n_i)\cdot e_i \in E$, donc $n = m$ et $\sum_i (m_i - n_i)\cdot e_i = 0$. Donc $\sum_i (m_i - n_i)\cdot f(e_i) = 0$, d'où $H \vDash \forall x\,(\varphi_{i,j}(x, f(e)) \leftrightarrow \top)$. De même, si $n = m$, alors le deuxième cas est dégénéré. Enfin, si $n \neq m$, en discutant selon le signe de $n - m$, on vérifie que la formule $t_1(x, f(e)) < t_2(x, f(e))$ est équivalente, modulo $D^{el}(H)$, à une formule de la forme $x < f(e^{'})$ ou $x > f(e^{'})$, où $e^{'}$ est une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire des coordonnées de e. D'où le résultat.

On a donc montré (modulo quelques résultats du cours) que T élimine les quantificateurs. Il s'ensuit que T est complète parce que tous ses modèles contiennent le groupe ordonné nul comme sous-structure.

Remarque : La méthode des diagrammes, la compacité ainsi que l'écriture des formules sans quantificateurs comme disjonctions de conjonctions de formules atomiques ou négations d'atomiques, sont des arguments généraux. Seule la fin de la preuve repose sur des considérations spécifiques à la théorie considérée.

6. Soient $\overline{g} \in G$ et $\varphi[x, \overline{y}]$ une $\mathcal{L}$-formule (que l'on peut supposer sans quantificateurs par la question précédente). La formule $\varphi[x, \overline{g}]$ est alors équivalente à une formule de la forme $\bigvee_k \varphi_k$ où φ_k est de la forme
$$\bigwedge_{j=1}^{l_1^k} (x < g_{j,k,1}) \bigwedge_{j=1}^{l_2^k} (g_{j,k,2} < x) \bigwedge_{j=1}^{l_3^k} (x = g_{j,k,3}) \wedge \psi_k[\overline{g}],$$
où les $g_{j,k,n}$ sont dans le groupe engendré par $\overline{g}$. Il suffit alors de montrer que $\varphi_k[x, \overline{g}]$ définit un point ou un intervalle. Si $l_3^k \neq 0$, $\varphi_k[x, \overline{g}]$ est réduit à un point. Si $l_3^k = 0$, alors en prenant $g_1 = \min\{g_{j,k,1}\} \cup \{\infty\}$ et $g_2 = \max\{g_{j,k,2}\} \cup \{-\infty\}$ alors $\varphi_k[x, \overline{g}]$ définit l'intervalle (g_1, g_2).

7. Une manière de procéder est, de considérer, pour tout modèle G de T, et tous $a, b \in G$, la collection $Q_{a,b}$ des $q \in \mathbb{Q}$ tels que $a < q \cdot b$. Alors, si $a, b, c, d \in G$ sont tels que $Q_{a,b} \neq Q_{c,d}$, on a $tp^G(a, b/\varnothing) \neq tp^G(c, d/\varnothing)$. De plus, on peut vérifier que la collection des $Q_{a,b}$, pour $G \vDash T$ et $a, b \in G$, est de cardinal $2^{\mathbb{N}}$. Ainsi, on a bien montré que $|S_2(T)| \geqslant 2^{\mathbb{N}}$.

   Ensuite, on utilise Löwenheim-Skolem descendant : tout 2-type $p(x,y) \in S_2(T)$ est réalisé dans un modèle *dénombrable* de T. En effet, par compacité, tout type est réalisé dans un modèle de T, et comme le langage est dénombrable, on peut extraire une sous-structure élémentaire dénombrable contenant une réalisation.

   Pour conclure, soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de modèles dénombrables de T deux à deux non isomorphes, telle que tout modèle dénombrable de T est isomorphe à un G_i. On veut montrer que $|I| \geqslant 2^{\mathbb{N}}$. On a, par ce qui précède, une surjection $\bigsqcup_{i \in I} G_i \times G_i \to S_2(T)$. Or, les G_i étant dénombrables, on a $|G_i^2| = |G_i| = |\mathbb{N}|$ pour tout i. Donc, le cardinal de cette union disjointe est égal à $|\mathbb{N} \times I|$. On a donc, du fait de la surjection, $|\mathbb{N} \times I| \geqslant |S_2(T)| \geqslant |2^{\mathbb{N}}|$. On en déduit que $|I| > |\mathbb{N}|$, car $2^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. Alors, on a $|I| \leqslant |\mathbb{N} \times I| \leqslant |I^2| = |I|$. Donc, par Cantor-Bernstein, on a $|\mathbb{N} \times I| = |I|$, d'où $|I| \geqslant |2^{Nn}|$.

Exercice 2 (Union de chaîne de Tarski) **:**

1. L'idée est de pouvoir "travailler à niveau fini". Par exemple, pour interpréter un symbole de relation R, pour chaque uplet $a \in S$ de l'arité *finie* de R, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que toutes les coordonnées de a sont dans S_i. On utilise alors l'interprétation de R dans S_i. Cela ne dépend pas du choix de i, car les plongements préservent les interprétations. Pour les symboles de fonction, le principe est le même.

   Le fait que les g_i soient des plongements découle de la construction.

2. On démontre, par induction sur la formule φ, le résultat suivant :

   "Pour tout i, pour toute assignation de variables $\alpha : V \to S_i$, on a $S_i \vDash \varphi(\alpha)$ si et seulement si $S \vDash \varphi(g_i \circ \alpha)$."

   Pour les formules atomiques, cela découle de la première question. Pour l'induction, le cas important est celui des quantificateurs, disons existentiels. Soit ψ une formule, qui s'écrit $\exists x\, \varphi$, où φ est une formule vérifiant l'hypothèse d'induction. Soit $i \in \mathbb{N}$, et $\alpha : V \to S_i$.

   Si $S_i \vDash \psi(\alpha)$, alors il existe une assignation $\beta : V \to S_i$ qui coïncide avec α hors de x, et telle que $S_i \vDash \varphi(\beta)$. Alors, par induction, $S \vDash \varphi(\beta)$, donc $S \vDash \exists x \varphi(\alpha)$.

Réciproquement, si $S \vDash \psi(\alpha)$, alors il existe une assignation $\beta : V \to S$ qui coïncide avec α hors de x, et telle que $S \vDash \varphi(\beta)$. Comme φ n'a qu'un nombre fini de variables, et que la satisfaction ne dépend que des valeurs de β en les variables de φ, on peut supposer que β est à valeurs dans un certain S_j. Par hypothèse d'induction, on a donc $S_j \vDash \varphi(\beta)$. *Comme les plongements entre les S_j sont supposés élémentaires*, on peut supposer que $j \geqslant i$, quitte à remplacer j par $max(i,j)$. Alors, $S_j \vDash (\exists x\varphi)(\alpha)$. Comme $S_i \preceq S_j$, on a donc $S_i \vDash (\exists x\varphi)(\alpha)$, comme voulu.

3. Le principe de "travailler à niveau fixé" fonctionne encore avec un ordre filtrant. Pour la deuxième question, l'induction se fait sur les formules, pour tous les indices $i \in I$ simultanément. Notons $f_{i,k} : S_i \to S_k$ le plongement pour $i \leqslant k$. On note en particulier $f_{i,i} = id : S_i \to S_i$.

   Plus précisément : soit U l'union disjointe $\bigsqcup_{i \in I} S_i$. Soit E la relation binaire sur U suivante : si $i, j \in I$, $a \in S_i$ et $b \in S_j$, alors aEb si et seulement si bEa, si et seulement s'il existe $k \in I$ tel que $k \geqslant i$, $k \geqslant j$, et $f_{i,k}(a) = f_{j,k}(b)$. On vérifie qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, en utilisant l'hypothèse d'ordre filtrant pour la transitivité. Par ailleurs, les $f_{i,k}$ étant des plongements, donc injectifs, on aurait pu remplacer, dans la définition de E, "il existe $k \in I$ tel que $k \geqslant i$ et $k \geqslant j$ et $f_{i,k}(a) = f_{j,k}(b)$" par "pour tout $k \in I$ tel que $k \geqslant i$ et $k \geqslant j$, on a $f_{i,k}(a) = f_{j,k}(b)$".

   Soit S le quotient U/E. On veut faire de S une $\mathcal{L}$-structure. Pour un symbole de relation n-aire P, par exemple : soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in S$. Par hypothèse d'ordre filtrant, soit $k \in I$ et $a_1, \cdots, a_n$ dans S_k tels que $\alpha_i = [a_i]_E$. On définit alors $P^S(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ si et seulement si $(a_1, \cdots, a_n) \in P^{S_k}$. L'essentiel est de vérifier que cela est bien défini.

   Si l'on choisit un autre indice k', et que l'on choisit d'autres représentants a'_i, alors il existe k'' tel que $k'' \geqslant k$ et $k'' \geqslant k'$. Alors, par une remarque précédente, on a $f_{k,k''}(a_i) = f_{k',k''}(a'_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc, comme $f_{k,k''}$ et $f_{k',k''}$ sont des plongements, on a $(a_1, \cdots, a_n) \in P^{S_k}$ si et seulement si $(f_{k,k''}(a_1), \cdots f_{k,k''}(a_n)) \in P^{S_{k''}}$, si et seulement si $(f_{k',k''}(a'_1), \cdots f_{k',k''}(a'_n)) \in P^{S_{k''}}$, si et seulement si $(a'_1, \cdots, a'_n) \in P^{S_{k'}}$. Ainsi, l'interprétation P^S est bien définie.

   On définit de même les interprétations des symboles de fonctions. On vérifie alors que, par construction, on a des fonctions $g_i : S_i \to S$, qui sont des plongements de $\mathcal{L}$-structures, compatibles avec les $f_{i,k}$ en un sens naturel : $g_k \circ f_{i,k} = g_i$ pour tout $k \geqslant i$.

   Supposons désormais que les $f_{i,k}$, $i \leqslant k$, sont élémentaires. Alors, par le même raisonnement qu'à la question 2, via une induction sur les formules, on montre que les g_i sont élémentaires.

Exercice 3 (Ordres discrets) **:**

1. On a $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ mais pas $2\mathbb{Z} \preceq \mathbb{Z}$ car $\exists x\, 0 < x < 2$ est vrai dans la première structure mais pas dans la deuxième. De plus $2\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. C'est donc bien modèle de la $\mathcal{L}$-théorie de $\mathbb{Z}$ qui ne peut donc pas éliminer les quantificateurs.

2. La théorie $T^\star$ contient les énoncés suivants :
   - $\forall x \forall y \forall z\, ((x < y \wedge y < z) \to x < z) \wedge \neg x < x \wedge (x < y \vee x = y \vee y < x)$;
   - $\forall x \exists y \exists z\, y < x \wedge x < z \wedge (\forall u\, (u < x \to (u < y \vee u = y)) \wedge (x < u \to (z < u \wedge z = u)))$;
   - $\forall x, x < s(x) \wedge \neg(\exists y\, x < y \wedge y < s(x))$.

3. Soient M et $N \vDash T^\star$, $A \subseteq M$, $B \subseteq M$ et $f : A \to B$ un isomorphisme. Quitte à étendre f à l'ensemble $\{a \in M : \exists n \in \mathbb{N}\, s^n(a) \in A\}$ en posant $f(s^{-n}(a)) = s^{-n}(f(a))$ qui est bien défini car s est injective, on peut supposer que A est aussi clos par l'inverse de s.

   Soit alors $c \in M$. On veut montrer qu'il existe $N^\star$ une extension élémentaire de N, $A' \subseteq M$ tel que $c \in A'$, $B' \subseteq N^\star$ et $g : A' \to B'$ un isomorphisme.

   Soit alors $A^- = \{a \in A : a < c\}$ et $A^+ = \{a \in A : c < a\}$. Notons que pour tout $a \in A^-$, on a encore $s(a) \in A^-$ et donc entre tout élément de A^- et tout élément de A^+ il y a au moins un élément dans N. Par compacité il s'en suit que la théorie $\mathcal{D}(N) \cup \{a < c : a \in A^-\} \cup \{c < a : A^+\}$, où c est une nouvelle constante, est consistante (on peut aussi utiliser une variable libre). Soit $N^\star$ un modèle de cette théorie, il suffit alors d'étendre f en c par $f(s^n(c)) = s^n(c^{N^\star})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. Tout modèle de T contient une copie de $\mathbb{Z}$ et peut donc être enrichi en un modèle de $T \cup \Delta(\mathbb{Z})$ qui est complète car T élimine les quantificateurs. Il s'en suit donc que $T^\star$ est complète. De même, tout ordre total discret sans extrémité peut être enrichi, de manière unique, en un modèle de $T^\star$ et donc cette dernière théorie est aussi complète.

Exercice 4 (Théorie modèle compagne) **:**

1. La théorie modèle compagne des ordres totaux est DLO. Les propriétés de plongements découlent du fait que tout ordre total $(X,<)$ se plonge dans le produit lexicographique $(X \times \mathbb{Q}, <_{lex})$. Pour la modèle complétude, on peut utiliser le fait que DLO élimine les quantificateurs.

   La théorie modèle compagne des corps est la théorie des corps algébriquement clos : tout corps se plonge dans une clôture algébrique.

2. Soit T une théorie, et T', T'' deux théories modèles compagnes de T. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T (si T n'est pas satisfaisable, alors T' et T'' non plus, donc il n'y a rien à faire.) On construit alors la chaîne suivante :
$$\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3 \prec \cdots$$
   telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $\mathcal{M}_{2k} \vDash T$, $\mathcal{M}_{4k+1} \vDash T'$ et $\mathcal{M}_{4k+3} \vDash T''$. Comme $\bigcup_k \mathcal{M} = \bigcup_k \mathcal{M}_{4k+1} = \bigcup_k \mathcal{M}_{4k+3}$, et que les théories T' et T'' sont modèles complètes, on a $\bigcup_k \mathcal{M}_{4k+1} \vDash T'$, $\bigcup_k \mathcal{M}_{4k+3} \vDash T''$, et donc $T' \equiv T''$.

3. a)

   b) Soit $\overline{a} \in \mathcal{M}_1$, et $\psi(\overline{a})$ une formule existentielle. Si $\mathcal{M}_2 \vDash \psi(\overline{a})$, alors $\mathcal{M}_3 \vDash \psi(\overline{a})$ et par clôture existentielle, $\mathcal{M}_1 \vDash \psi(\overline{a})$. Le sens réciproque est immédiat puisque $\mathcal{M}_1 \leqslant \mathcal{M}_2$: les formules existentielle passent aux extensions de structures.

   c) Supposons que les modèles existentiellement clos de T forment une classe élémentaire d'une théorie $T_\exists$. Montrons que $T_\exists$ est la théorie modèle compagne de T. D'une part si $\mathcal{M}$ est un modèle de $T_\exists$, $\mathcal{M}$ est un élément de la classe élémentaire mentionnée, donc $\mathcal{M}$ est un modèle de T (et se plonge trivialement dans lui-même). Réciproquement, $\mathcal{M} \vDash T$, $\mathcal{M}$ se plonge dans un modèle existentiellement clos car T est inductive : l'idée est que l'on peut construire par récurrence transfinie une tour d'extension $\mathcal{M}_n$ de $\mathcal{M}$, tel que $\mathcal{M}_{n+1}$ contient les témoins d'une formule existentielle ψ à paramètres dans $\mathcal{M}_n$ telle que $Th_0(\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n) \cup \{\psi\}$ soit satisfaisable et l'union des $\mathcal{M}_n$ sera bien existentiellement close.

      Alternative (avec Zorn) : on peut aussi montrer que $\{\mathcal{N} \geqslant \mathcal{M} : |\mathcal{N}| = |\mathcal{M}| \; \mathcal{N} \vDash T\}$ est un ensemble inductif (car T est inductive) est admet un élément maximal qui est existentiellement clos (à vérifier en utilisant Löwenheim Skolem).

      Enfin, $T_\exists$ est modèle complète : en effet, tout modèle de $T_\exists$ est un modèle existentiellement clos de T, donc aussi un modèle existentiellement clos de $T_\exists$, puis l'exercice 2 du TD5 assure que tous les formules sont équivalente à des formules existentielle modulo $T_\exists$: donc si on a deux modèles de $T_\exists$, $\mathcal{M} \leqslant \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M} \leqslant_1 \mathcal{N}$, puis $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$.

      Réciproquement, supposons que T a une théorie modèle compagne T'. Montrons que T' est la théorie des modèles existentiellement clos de T. Soit $\mathcal{M}$ un modèle existentiellement close de T, alors $\mathcal{M}$ se plonge dans $\mathcal{M}_2 \vDash T'$ qui se plonge lui-même dans $\mathcal{M}_3 \vDash T$ que l'on peut supposer existentiellement close (car T est inductive).
$$\mathcal{M} \leqslant \mathcal{M}_2 \leqslant \mathcal{M}_3$$
      Par le lemme de la question 3b, $\mathcal{M}$ est existentiellement close dans $\mathcal{M}_2$, et par le lemme de la question 3a, $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_2$, donc en particulier $\mathcal{M} \vDash T'$. Inversement, si $\mathcal{M}$ est un modèle de T', on plonge $\mathcal{M}$ dans un modèle existentiellement clos $\mathcal{N}$ de T. Alors $\mathcal{N}$ est en fait un modèle de T' (avec le même raisonnement que ci-dessus), et donc on a $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, donc $\mathcal{M}$ est un modèle de T. Enfin $\mathcal{M}$ est existentiellement close dans T : si $\mathcal{N} \vDash T$ est une extension de $\mathcal{M}$, on plonge $\mathcal{N}$ dans un modèle de T' et on conclut par modèle complétude de T' et le lemme de la question 3b.