TD2.2 : Extensions de corps

26/09/2023

Exercice 1 :

Soit $K \hookrightarrow L$ une extension algébrique de corps et $Q \in L[X]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il existe un polynôme irréductible. Montrer qu'il existe un poynôme irréductible $P \in K[X]$ tel que Q divise P dans $L[X]$.

Exercice 2 : Extensions de degré 2

Soit L une extension d'un corps K de degré 2, de caractéristique différente de 2.
1. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L \simeq K[X]/(X^2 - a)$ (que l'on note par definition $K(\sqrt{a})$.
2. A quelle condition deux extensions de cette forme sont isomorphes ?
3. Décrire les K automorphismes de $K(\sqrt{a})$.

Exercice 3 : Une extension purement transcendante

Montrer que $k(x, \sqrt{1-x^2})$ est purement transcendante.

Exercice 4 :

On veut montrer dans cet exercice que si $F \subset K \subset L$ est une tour d'extensions de corps, alors il est équivalent que :

(i) K/F et L/K sont de type fini

(ii) L/F est de type fini.

1. Traiter les cas faciles et identifier la partie difficile.
2. On va avoir ensuite besoin de quelques résultats sur les extensions transcendantes :
a. Soit E/F et S une partie de E algébriquement indépendante sur F. Soit $\alpha \in E \backslash S$, alors $S \cup \{\alpha\}$ est algébriquement indépendante si et seulement si α est transcendant sur $F(S)$.
b. Une extension purement transcendante est totalement transcendante (c'est à dire que tout élément de $E \backslash F$ est transcendant).
3. Soit E/F une extension et $S \subset E$ une partie algébriquement indépendante sur F. Soit $A \subset E$ une extension algébrique de F.
a. Montrer que S est algébriquement indépendante sur A.
b. Montrer que A est l'ensemble des éléments de $A(S)$ algébriques sur F.
c. Montrer que $[E : F(S)] < \infty \Rightarrow [A : F] < \infty$.
4. Conclure la preuve du théorème.

Exercice 5 : Un contre-exemple

Soit $K = \mathbb{Q}(T)$, et deux sous corps $K_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $K_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$. Montrer que K est algébrique sur K_1 et K_2 mais pas sur $K_1 \cap K_2$.

Exercice 6 : Théorème de Lüroth

1. On admet le résultat suivant, que l'on verra plus tard dans le cours : Soit A un anneau factoriel ($K[X_i]_i$ est factoriel) de corps des fractions F. Si $f \in A[X] \backslash \{0\}$ s'écrit $f = gh$ avec g et h dans $F[X]$, alors il existe $g_0 = \alpha g \in A[X]$ et $h_0 = \beta h \in A[X]$ tel que $f = g_0 h_0$.
a. Soient $P, Q \in F[X]$ premiers entre eux et $U, V \in F[Y]$ premiers entre eux, et on suppose que U et V ne sont pas tous deux constants. Notons $f(X,Y) = U(Y)P(X) - V(Y)Q(X)$. Supposons que $f = gh$ avec $g \in F[X,Y]$ et $h \in F[X]$. Montrer que h est constant.

b. Soient $P, Q \in F[X]$ premiers entre eux et notons $d = \max(\deg P, \deg Q)$. Soit $E = F(\beta)$ où β est transcendant, et soit $f = p - \beta q \in E[X]$. Montrer que $\deg(f) = d$ et f est irréductible si $d > 0$.

2. On veut montrer le théorème de Lüroth : Soit $L = F(\alpha)$, avec α transcendant sur F. Soit E une extension intermédiaire $L/E/F$. Alors $E = F(\beta)$ pour un certain $\beta \in E$.

a. Soit $\beta \in E \backslash F$. Montrer que $d(\beta) \overset{\text{def}}{=} [L : F(\beta)] < \infty$, puis que $n \overset{\text{def}}{=} [L : E] < \infty$, puis conclure qu'il suffit de trouver un β tel que $d(\beta) = n$.

b. Soit $g = \min_E(\alpha)$. Quel est le degré de g, et est-ce que $g \in F[X]$?

c. Soit β un coefficient de g dans $E \backslash F$. Montrer que β convient. *On pourra partir de $q(\alpha)p(X) - p(\alpha)q(X) = g(X)h(X)$ dans $L[X]$, où $\beta = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)}$, puis remplacer α par Y, et enfin remarquer que le degré en Y du terme à gauche est d, alors que le degré en X du terme à droite est n.*