

TD2 : Mesures additives et σ -additives.

Exercice 1. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et (A_n) une suite d'ensembles mesurables, montrer que $\mu(\bigcup A_n) \leq \sum \mu(A_n)$.

Exercice 2. [Retour sur les tribus] Soit E un espace et \mathcal{C} une famille de parties de E .

1. On pose $\mathcal{G} = \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \text{il existe une partie dénombrable } \mathcal{D} \text{ de } \mathcal{C} \text{ vérifiant } A \in \sigma(\mathcal{D})\}$. Montrer que \mathcal{G} est une tribu sur E .
2. En déduire que pour tout $B \in \sigma(\mathcal{C})$, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$.

Exercice 3. [Limsup et liminf d'ensembles] On considère un ensemble E et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E . On pose $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$.

1. Décrire ces ensembles avec des mots.
2. Montrer que $(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c$.
3. Relier leurs fonctions indicatrices aux fonctions indicatrices des A_n .
4. Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ dans les cas suivants.
 - (i) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
 - (ii) $A_{2n} =]0, 3 + 1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =]-1 - 1/(3n), 2]$.

On se donne maintenant une tribu \mathcal{E} et une mesure μ sur E , et on suppose que les A_n sont tous mesurables.

5. Montrer que $\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$, et montrer par un exemple que l'inégalité peut-être stricte.
6. Montrer que si de plus μ est une mesure finie on a aussi $\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$, mais que l'inégalité est fausse en général.
7. On suppose que $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0$. On appelle ce résultat le *Lemme de Borel-Cantelli*.
8. (*Une application du lemme de Borel-Cantelli*) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0, 1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couple (p, q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, c'est-à-dire presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2 + \varepsilon$ ".

Pour aller plus loin

Exercice 4. On dit qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est symétrique si $A = -A$, où on a posé

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de \mathbb{R} .

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.
2. Montrer que \mathcal{A} est une tribu de \mathbb{R} .
3. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.
4. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
5. Montrer que \mathcal{A} est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
6. Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.

Définition. On appelle *algèbre sur E* un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{P}(E)$ tel que $E \in \mathcal{A}$, et \mathcal{A} est stable par intersections finies et passage au complémentaire.

Exercice 5. [Algèbres et tribus] Soit \mathcal{A} une algèbre sur E . Montrer que \mathcal{A} est une tribu si et seulement si pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments *deux à deux disjoints* de \mathcal{A} on a $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Exercice 6. [Algèbre et mesure additive] Soit \mathcal{A} une algèbre d'ensembles sur un ensemble E . Soit μ une mesure σ -additive sur (E, \mathcal{A}) , c'est-à-dire, une mesure additive sur (E, \mathcal{A}) telle que pour toute suite d'éléments deux-à-deux disjoints $A_n \in \mathcal{A}$ telle que $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$ on a

$$\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n).$$

1. Montrer que la condition “ μ est une mesure additive” pourrait être relaxée en “ $\mu(\emptyset) = 0$ ” sans changer la classe des mesures σ -additives sur (E, \mathcal{A}) .
2. De même, montrer que la condition $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, pourrait être relaxée en la condition $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
3. Montrer que si l'on combine les deux relaxations précédentes alors on obtient des objets qui ne sont pas forcément des mesures σ -additives.

Exercice 7. [Tribu borélienne produit]

1. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On pose $(F_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ l'ensemble des fonctions réelles bornées, muni de la norme infinie.
 - (a) Soit U un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(F_\infty) \otimes \mathcal{B}(F_\infty)$. Montrer qu'il existe une suite (A_n) de boréliens de F_∞ telle que $U \in \sigma(A_m \times A_n, m, n \in \mathbb{N})$
 - (b) Pour $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$, on pose $B_{\mathbf{x}} = \cap_{n \geq 0} C_n$, où $C_n = A_n$ si $\mathbf{x}_n = 1$, et $C_n = A_n^c$ sinon. Montrer que l'ensemble des éléments pouvant s'écrire comme union des ensembles de la forme $B_{\mathbf{x}} \times B_{\mathbf{x}'}$ est une tribu.
 - (c) En déduire qu'il existe des familles de boréliens $(A_i)_{i \in \mathbb{R}}$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{R}}$ telles que

$$U = \cup_{i \in \mathbb{R}} A_i \times B_i$$

- (d) En déduire que $\Delta = \{(f, f), f \in F_\infty\}$ est un élément de $\mathcal{B}(F_\infty \times F_\infty)$ mais pas un élément de $\mathcal{B}(F_\infty) \otimes \mathcal{B}(F_\infty)$.