TD 6 : Complétude & Connexité

Exercice 1 : Echauffement

Pour chacun des espaces métriques suivants, dire s'il est complet. S'il ne l'est pas, en décrire un complété. On rappelle qu'un complété d'un espace métrique F est un espace métrique complet E muni une isométrie $i : F \to E$ telle que $i(F)$ est dense dans E.

1. $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle.
2. $]0,1[$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$.
3. L'espace E_0 des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, avec la norme $||\cdot||_\infty$.
4. L'espace E des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact, avec la norme $||\cdot||_\infty$.
5. L'espace c_0 des suites $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ nulles sauf en un nombre fini de points muni de la norme uniforme $||\cdot||_\infty$.
6. L'espace l_1 des suites $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tel que $||u||_1 := \sum_\mathbb{N} |u_n| < \infty$ muni de la norme $||\cdot||_1$.
7. L'espace c_0 muni de la norme $||\cdot||_1$.

Solution de l'exercice 1

1. Cette question n'a pas de sens ! La complétude concerne les distances, pas les topologies ! On peut mettre deux métriques sur $\mathbb{R}$, l'une complète et l'autre non, qui engendrent la même topologie. Voir Exercice 3, question 4 ou Exercice 8.
2. Il n'est pas complet : en effet, $\mathbb{R}$ est complet pour cette distance et les parties complètes d'un espace complet sont exactement les parties fermés. Et un/le complété est l'adhérence, donc $[0,1]$ ici.
3. C'est un sous-espace fermé de l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ car une limite uniforme de fonctions tendant vers 0 tend également vers 0 (à prouver si besoin), il est donc complet.
4. Cet espace là est dense dans le précédent, il n'est donc pas complet mais on en a déjà une complétion.
5. c_0 n'est pas complet. Son complété est l'espace des suites qui tendent vers 0 en $+\infty$ car il y est dense pour $||\cdot||_\infty$.
6. l_1 est complet. On le montre avec le critère de complétude "série absolument convergente implique série convergente dans les espaces vectoriels normés" : si $(u^p) \in (l^1)^\mathbb{N}$ est telle que $\sum\limits_p \|u^p\|_1 < \infty$, alors on sait en particulier que
$$\sum_p \sum_n |u_n^p| = \sum_n \sum_p |u_n^p| < \infty,$$
donc on peut poser, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^\infty = \sum\limits_p u_n^p$ (bien défini car $\mathbb{R}$ est complet, et on a écrit juste au dessus que chacune des séries $u_n\infty$ est absolument convergente, donc convergente par complétude).

De plus, on a clairement $u^\infty \in l^1$, car

$$\sum_n |u_n^\infty| \leq \sum_n \sum_p |u_n^p| < \infty \quad \text{par inégalité triangulaire.}$$

7. c_0 est dense dans l_1 pour la norme $||\cdot||_1$. C'est donc son complété.

Exercice 2 : Connexité : exemples et contre-exemples

1. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu i.e. ses composantes connexes sont les singletons.
2. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(0,0)\} \cup [0,1] \times \{1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$$
est connexe mais pas connexe par arcs.
3. Montrer que l'ensemble de $\mathbb{R}^2$,
$$E = \{(x, rx); x \in [0,1], r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$$
est connexe par arcs mais pas localement connexe par arcs (localement connexe par arcs : pour tout $x \in X$, tout voisinage de x contient un voisinage connexe par arcs.)

Solution de l'exercice 2

1. Soit $A \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une partie connexe. Supposons que A contient deux points distincts, u et v. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq v_n$. On note alors $U_i = \{w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, w_n = i\}$ pour $i = 0,1$. $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ et $U_0 \cup U_1 = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Or, $A \cap U_i \neq \emptyset$ si $i = 0,1$. Ce qui contredit la connexité de A. Ainsi, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est totalement discontinu.
2. $A = E \setminus \{(0,0\}$ est clairement connexe par arcs, donc connexe. Or, $(0,0) \in \overline{A}$ donc $A \subset E \subset \overline{A}$, et ainsi E est connexe. (Regarder le critère des applications si ce n'est pas connu).
Supposons que E est connexe par arcs. il existe un chemin γ continue reliant $(0,0)$ à $(1,0)$. $\gamma^{-1}(0,0)$ est fermé, non vide. Montrons qu'il est aussi ouvert. Soit $t \in [0,1]$ tel que $\gamma(t) = (0,0)$. Il existe un voisinage connexe V de t tel que $\pi_y \circ \gamma(V) \subset [0,1/2[$. Ainsi, sur V, $\pi_x \circ \gamma$ est à valeur dans $\{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre donc que $\pi_x \circ \gamma$ est constante sur V et donc $\gamma = (0,0)$ sur V. Ainsi, $\gamma^{-1}(0,0)$ est ouvert. Par connexité de $[0,1]$, $\gamma^{-1}(0,0) = [0,1]$, ce qui contredit le fait que $\gamma(1) = (1,0)$.

3. Tout point est relié à $(0,0)$ puisque chaque point de E est situé sur une droite incluse dans E passant par $(0,0)$.
Montrons que tout voisinage de $(1,1)$ qui ne contient pas 0 n'est pas connexe par arcs. Soit V un voisinage de $(1,1)$ ne contenant pas 0 et $\gamma : [0,1] \to V$ un chemin continu tel que $\gamma(1) = (1,1)$. L'application $t \mapsto \frac{y(t)}{x(t)}$ est bien définie, continue et à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Elle est donc constante égale à 1, par le théorème des valeurs intermédiaires. L'image de γ est donc incluse dans la première bissectrice, et donc aucun chemin continu dans V ne peut joindre $(1,1)$ à $(1,r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$ tel que $(1,r) \in V$. Et donc V n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3 : Autour du théorème de point fixe de Picard

On commence par rappeler l'énoncé du théorème :

Théorème. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *k-Lipschitzienne avec* $0 < k < 1$. *Alors* f *possède un unique point fixe.*

1. Montrer par un contre-exemple que la conclusion du théorème tombe en défaut si :
   a) l'on enlève l'hypothèse X complet
   b) on suppose simplement que pour tout $x, y \in X, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.
2. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ continue et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p est k-contractante avec $0 < k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit X et Y deux espaces métriques avec X complet et $f : X \times Y \longrightarrow X$ une application continue et k-contractante en X. Montrer que la fonction qui à y associe l'unique point fixe de $f(\bullet, y)$ est continue.
4. **Une application.** Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ une fonction $\mathcal{C}^1$ et $k \in]0; 1[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ x|f'(x)| \leq kf(x).$$

   Montrer que f admet un unique point fixe. *Indication : on pourra considérer la distance* $d(x, y) := |\ln(x) - \ln(y)|$ *et montrer qu'elle engendre la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et en fait un espace complet.*

Solution de l'exercice 3

1. a) $X =]0, 1], f : x \mapsto x/2$
   b) $X = \mathbb{R}, f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$
2. f^p possède un unique point fixe, noté x. $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(x)$. Ainsi $f(x)$ est un point fixe de f^p et donc, par unicité, $f(x) = x$. Donc f possède un point fixe. Tout point fixe de f est un point fixe de f^p : ce point fixe est donc unique.
3. On note a_y le point fixe de $f(\bullet, y)$. Soit $y_0 \in Y$ et $\epsilon > 0$. Par continuité de $f(a_{y_0}, \bullet)$ en y_0, il existe un voisinage V du point y_0 tel que pour tout $y \in V$ on ait

$$d(f(a_{y_0}, y), f(a_{y_0}, y_0)) = d(f(a_{y_0}, y), a_{y_0}) < \epsilon.$$

   On a maintenant pour $y \in V$

$$\begin{aligned} d(a_y, a_{y_0}) &= d(f(a_y, y), f(a_{y_0}, y_0)) \\ &\leq d(f(a_y, y), f(a_{y_0}, y)) + d(f(a_{y_0}, y), f(a_{y_0}, y_0)) \\ &\leq kd(a_{y_0}, a_y) + \epsilon \end{aligned}$$

   d'où finalement

$$d(a_y, a_{y_0}) \leq \frac{\epsilon}{1 - k}$$

   et $y \mapsto a_y$ est bien continue.

4. $\mathbb{R}_+^*$ muni de la distance de l'indication est isométrique à $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne usuelle, il est donc complet. (via exp). Il suffit pour cela de montrer que f est une k-contraction de $\mathbb{R}_+^*$ pour la distance donnée. Soit $y > x > 0$, alors

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |\ln f(x) - \ln f(y)| \\ &= \left| \int_x^y \frac{f'(t)}{f(t)} \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_x^y \frac{|f'(t)|}{f(t)} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_x^y \frac{k}{t} \mathrm{d}t \\ &= kd(x, y). \end{aligned}$$

Le théorème du point fixe assure alors l'existence d'un unique point fixe à f.

Exercice 4 : Pot pourri de connexité

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Soit X un espace topologique tel que tout point possède un voisinage connexe par arcs. Montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.
3. Soient A et B deux parties connexes d'un espace topologique X telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.
4. Soient A et B deux fermés d'un espace topologique tels que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient connexes. Montrer que A et B sont connexes.

Solution de l'exercice 4

1. Supposons par l'absurde qu'ils le sont. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe donc il en va de même pour $\phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{\phi(0)\}$. Ce qui n'est pas le cas.
2. Bien sûr, connexe par arcs implique connexe de façon générale. Supposons donc X connexe et montrons qu'il est connexe par arcs. Soit $x \in X$. On note $A = \{y \in X; \exists \gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$. On va montrer que $A = X$. Pour cela, utilisant la connexité de X, on va montrer que A est fermé, ouvert et non vide.

   - $A \neq \emptyset$ puisque $x \in A$.
   - A est ouvert car tout point possède un voisinage par arcs : si $y \in A$ et si V est un voisinage connexe par arcs de y, on peut concaténer des chemins et voir que $V \subset A$.
   - Soit $y \in X \setminus A$. Il existe un voisinage V de y connexe par arcs. Si $V \cap A \neq \emptyset$, alors en concaténant deux chemins, on voit que l'on aurait $y \in A$. Donc $V \subset X \setminus A$, ce qui prouve que A est fermé.

3. Soit $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ continue. Par connexité de A, f est constante sur A et de même, par connexité de B, f est constante sur B.Notons ε_A et ε_B les valeurs sur A et B et montrons que $\varepsilon_A = \varepsilon_B$. Soit $x \in \overline{A} \cap B$. $x \in f^{-1}(\{\varepsilon_B\}$, qui est un ouvert de $A \cup B$.

Donc il existe U ouvert de X tel que $f^{-1}(\{\varepsilon_B\} = U \cap (A \cup B)$. Mais, puisque $x \in \overline{A}$, $A \cap U \neq \emptyset$. Mais si $y \in A \cap U$, $f(y) = \varepsilon_A = \varepsilon_B$. D'où le résultalt.

4. On le fait pour A (puisque A et B jouent des rôles symétriques). Soit $f : A \to \{0, 1\}$ continue. Par connexité de $A \cap B$, f est constante sur $A \cap B$. Supposons par exemple que $f = 0$ sur $A \cap B$. Prolongeons alors f sur $A \cup B$ en posant : $g(x) = f(x)$ si $x \in A, g(x) = 0$ si $x \in B \setminus A$. Montrons que g est continue. Soit $F \subset \{0, 1\}$ un fermé. $g^{-1}(F) = (g^{-1}(F) \cap A) \cup (g^{-1}(F) \cap B)$. Si $Z \in \{A, B\}, g^{-1}(F) \cap Z$ est un fermé de Z car c'est l'image réciproque de la restriction de g à Z qui est continue (sur A, c'est f, sur B c'est l'application constante nulle). Or, Z est fermé, donc $g^{-1}(F) \cap Z$ est aussi fermé dans $A \cup B$. Donc g est bien continue. La connexité de $A \cup B$ montre que g est constante, et donc f aussi.

Exercice 5 : une application du théorème de Baire aux fonctions continues

On rappelle l'énoncé suivant du théorème de Baire :

Théorème. *Soit (X, d) un espace métrique complet et (F_n) une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide ($\mathring{F}_n = \emptyset$). Alors, $\bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide.*

1. **Un corollaire du théorème de Baire.** Soit X un espace métrique complet et (F_n) une suite de fermés tels que $X = \bigcup_n F_n$. Montrer que $\Omega = \bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans X.
2. Soient X et Y deux espaces métriques. On suppose X **complet**. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $X \to Y$ et $f : X \to Y$ telles que pour tout $x \in X, f_n(x) \to f(x)$. On souhaite montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X. Pour $k \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$, on note

$$F_{n,k} := \{x \in X; \forall p, q \geq n, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\},\ \Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{F}_{k,n} \text{ et } \Omega = \bigcap_k \Omega_k$$

   a) Montrer que si $x \in \Omega$, alors f est continue en x.
   b) Conclure.
3. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' est continue sur une partie dense.

Solution de l'exercice 5

1. Posons $G_n = F_n \setminus \Omega$. G_n est fermé et il est d'intérieur vide. En effet, si $U \subset G_n$ est un ouvert, $U \subset \mathring{G}_n \subset \Omega$. Ainsi, $U \subset \Omega \setminus \Omega = \emptyset$, ce qui prouve que G_n est d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, $\bigcup_n G_n$ est d'intérieur vide. Or, $\bigcup_n G_n = X \setminus \Omega$ donc $X \overset{\circ}{\setminus} \Omega = \emptyset$ et donc $\bar{\Omega} = X$.
2. a) Soit $x \in \Omega$. Soit $\epsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\epsilon > \frac{3}{k}$. $x \in \Omega_k$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathring{F}_{k,n}$. Il existe donc V ouvert tel que $x \in V \subset F_{k,n}$. Dès lors, si $y \in V$,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \lim_{p \to \infty} d(f_p(x), f_p(y)) \\ &\leq \lim_{p \to \infty} d(f_n(x), f_p(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_p(y), f_n(x)) \\ &\leq \frac{2}{k} + d(f_n(x), f_n(y)) \end{aligned}$$

   Par continuité de f_n, il existe un voisinage W de x tel que $d(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{1}{k}$ si $y \in W$. Ainsi, si $y \in V \cap W, d(f(x), f(y) \leq \epsilon$, ce qui prouve la continuité de f en x.

b) Commençons par montrer que $X = \bigcup_n F_{n,k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in X$. Par hypothèse, $f_n(x) \to f(x)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n, d(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}$ d'où $x \in F_{n,k}$. Par la question 1, on en déduite que Ω_k est un ouvert dense. Puis, par le théorème de Baire, Ω est dense dans X. Ce qui conclut la preuve.

3. Il suffit d'écrire que f' est la limite simple de la suite de fonctions continues $g_n(x) = 2^n\left(f(x+2^{-n}) - f(x)\right)$.

Exercice 6 : Projection sur un convexe fermé

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert réel. On rappelle que l'identité suivante, dite du parallélogramme, est vérifiée : pour tout $x, y \in H$,

$$||x||^2 + ||y||^2 = \frac{1}{2}\left(||x-y||^2 + ||x+y||^2\right)$$

1. **Projection sur un convexe fermé.** Soit C une partie convexe fermé de H. Soit $x \in H$.
   a) Montrer qu'il existe un unique point, noté $p_C(x)$, tel que $d(x, C) = ||x - p_C(x)||$.
   b) Montrer que $p_C(x)$ est de manière équivalente, l'unique point $z \in C$ tel que pour tout $y \in C$, $\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$.
2. **Applications fondamentales.**
   a) Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que $F \oplus F^\perp = H$.
   b) Soit G un sous-espace vectoriel de H. Montrer que $\overline{G} = H \iff G^\perp = \{0\}$.
   c) **Théorème de représentation de Riesz.** On rappelle que H^* est l'espace des formes linéaires continues sur H, muni de la norma $||l||_{H^*} = \sup_{||x||=1} |l(x)|$. Pour $x \in H$, on note $l_x : y \in H \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \in H \mapsto l_x \in H^*$ est une isométrie surjective. En particulier, H et H^* sont isométriques.

Solution de l'exercice 6

1. a) **Existence** : Soit c_n une suite minimisante de C i.e. telle que $||x - c_n|| \to d(x, C)$. Montrons que la suite (c_n) est de Cauchy. La complétude de H assurera la convergence de c_n vers un point c, qui vérifie donc $||x - c|| = d(x, C)$. Pour cela, on utilise l'identité du parallélogramme à $(x - c_n)$ et $(x - c_m)$:

$$||c_n - c_m||^2 = 2(||x - c_n||^2 + ||x - c_m||^2) - ||(x - c_n) + (x - c_m)||^2$$

Or, $||2x - (c_n + c_m)|| = 2\left|\left|x - \frac{c_n + c_m}{2}\right|\right| \geq 2d(x, C)$ car $(c_n + c_m)/2 \in C$. On en déduit que

$$||c_n - c_m|| \leq 2(||x - c_n||^2 + ||x - c_m||^2 - 2(d(x, C)^2)$$

Puisque $||x - c_n||^2 \to d(x, C)^2$, pour $\varepsilon > 0$, on trouve N tel que on voit que pour $n \geq N$, $||x - c_n||^2 - d(x, C)^2 \leq \varepsilon$. Pour $n, m \geq N$, on a alors, $||c_n - c_m||^2 \leq 2\varepsilon$. Et donc (c_n) est de Cauchy.

Unicité : Soit deux points $c_1, c_2 \in C$ tels que $d(x, C) = ||x - c_i||$. On applique encore l'identité du parallélogramme

$$||c_1 - c_2||^2 = 2(||x - c_1||^2 + ||x - c_2||^2) - ||(x - c_1) + (x - c_2)||^2 \leq 4d(x, C)^2 - 4d(x, C)^2 \leq 0$$

donc $c_1 = c_2$.

b) Soit $y \in C$. Pour $t \in [0,1]$, on note $y_t = ty + (1-t)p_C(x) = p_C(x) + t(y - p_C(x)$. On a que pour $t > 0$.

$$||x - y_t||^2 \geq ||x - p_C(x)||^2 \iff -2ty\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle + t^2||y - p_C(x)||^2 \geq 0$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$, on voit que $\langle x - p_C(x), y - p_C(x)\rangle \leq 0$. Réciproquement, supposons que $z \in C$ vérifie :pour tout $y \in C$, $\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$. Alors, si $y \in C$,

$$||x - y||^2 = ||x - z + z - y||^2 = ||x - z||^2 - 2\langle x - z, y - p_z + ||y - z||^2 \geq ||x - z||^2$$

donc z minimise bien la distance à C.

2. a) Il est clair que $F \cap F^\perp = \{0\}$. On doit montrer que $F + F^\perp = H$. Soit $x \in H$. F est convexe fermé, donc il existe un unique point, $p_F(x)$ qui minimise la distance à F. Montrons que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Ce qui conclura. Soit $y \in F$.

$$\langle y, x - p_F(x)\rangle = \langle y + p_F(x) - p_F(x), x - p_F(x)\rangle \leq 0$$

et

$$\langle y, x - p_F(x)\rangle = -\langle p_F(x) - y - p_F(x), x - p_F(x)\rangle \geq 0$$

car $p_F(x) - y, y + p_F(x) \in F$.

b) Si $\overline{G} = H$, alors $G^\perp = \overline{G}^\perp = \{0\}$ puisque $\overline{G} \oplus G^\perp = H$. Réciproquement, si $G^\perp = 0$, on voit aussi immédiatement que $\overline{G} \oplus \{0\} = H$.

c) **Isométrie :** Il est clair que $||l_x|| \leq ||x||$ par Cauchy-Schwartz. En outre, $l_x(x) = ||x||^2$, donc $||l_x|| = ||x||$, ce qui prouve que $x \mapsto l_x$ est une isométrie.
Surjection : Soit $l \in H^*$. Si $l = 0$, $l = l_0$. Sinon, soit $F = \ker l$. C'est un hyperplan fermé. Soit $x \in F^\perp$, $x \neq 0$. $l(x) \neq 0$ donc quitte à multiplier x par un scalaire, on peut supposer que $l(x) = 1$. Montrons alors que $l = l_x$. Il est clair que $l - l_x = 0$ sur $H^\perp = \mathrm{Vect}(x)$ et sur F (puisque $\ker l = H$ et que si $y \in F$, $l_x(y) = 0$). Donc, $l = l_x$ sur $F \oplus F^\perp = H$, comme voulu.

Pour aller plus loin

Exercice 7 : Fonctions continues nulle part dérivables

On notera $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. **Un exemple ...** Montrer que la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d(2^n x)}{2^n}$ est continue et nulle part dérivable, où $d(x)$ désigne la distance de x à l'entier de plus proche.
2. **... loin d'être exceptionnel !** En étudiant les ensembles

$$F_n \coloneqq \{f \in E; \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}$$

montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans E.

Solution de l'exercice 7

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $d_n : x \mapsto \frac{d(2^n x)}{2^n}$ est continue et la série des d_n est normalement convergente, donc f est continue. On va montrer que f n'est dérivable nulle part.
   Supposons que f soit dérivable en $x \in [0,1]$. Soient $k_m, l_m = k_m + 1/2$ deux demi entiers consécutifs ($\in \mathbb{Z}/2$) encadrant $2^m x$: $k_m \leq 2^m x < l_m$. On pose alors $y_m = 2^{-m}k_m$ et $z_m = 2^{-m}l_m$. Les suites (y_m) et (z_m) convergent vers x. Ainsi, si l'on considère l'accroissement
   $$\delta_m \coloneqq 2^{m+1}\left(f\left(z_m\right) - f(y_m)\right)$$
   on doit avoir $\delta_m \to f'(x)$. Par ailleurs, si $n > m$, $d(2^n(y_m + 2^{-m-1}) = d(2^n y_m)$ donc
   $$\delta_m = \sum_{n=0}^{m} \frac{d\left(2^n(y_m + 2^{-m-1})\right) - d(y_m)}{2^{n-m-1}}$$
   Or, si $n \leq m$, il n'y a pas de demi-entiers entre $2^n(y_m + 2^{-m-1}) = 2^n z_m$ et $2^n y_m$. En effet, si l'on avait $2^n y_m < l < 2^n z_m$, l'entier $2^{m-n}l$ serait entre k_m et l_m. Ce qui est absurde. Donc $2^n z_m$ et $2^n y_m$ sont dans la même branche affine de d de sorte que $d(2^n z_m) - d(2^n y_m) = \pm 2^{n-m-1}$. Et donc
   $$\epsilon_{n,m} = \frac{d(2^n z_m) - d(2^n y_m)}{2^{n-m-1}} = \pm 1$$
   En conséquence, (δ_m) est une suite d'entiers qui converge, donc qui stationne. Mais δ_{2m} et δ_{2m+1} n'ont pas la même parité. D'où l'absurdité.
2. E est complet. On va donc appliquer le théorème de Baire et montrer que si A désigne l'ensemble des fonctions dérivable en au moins un point, alors A est d'intérieur vide. On va pour cela montrer que $A \subset \bigcup_n F_n$ et que chacun des F_n est un fermé d'intérieur vide.
   - **Fait 1.** $A \subset \bigcup_n F_n$: soit $f \in A$. Il existe $x \in [0,1]$ tel que f est dérivable en x. Ainsi,
     $$y \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \\ f'(x) \text{ si } x = y \end{cases}$$
     est continue, donc bornée et il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$, ce qui prouve que $x \in F_n$.
   - **Fait 2.** Pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n$ est fermé. Soit (f_p) une suite de fonctions de F_n qui converge vers une fonction $f \in E$. Montrons que $f \in F_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe x_p tel que pour tout $y \in [0,1]$, $|f_p(x_p) - f_p(y)| \leq n|x_p - y|$. Par compacité de $[0,1]$, on peut extraire de x_p une sous-suite qui converge vers $x \in [0,1]$. En passant à la limite le long de la sous-suite dans $|f_p(x_p) - f_p(y)| \leq n|x_p - y|$, on a que $|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$, ce qui prouve que $f \in F_n$.
   - **Fait 3.** F_n est d'intérieur vide. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. On peut donc trouver $f \in F_n$ et $\epsilon > 0$ tel que $B(f,\epsilon) \in F_n$. On va alors construire une fonction $g \in B(f,\epsilon)$ qui n'est pas dans F_n. Soit $N \in \mathbb{N}$ et tâchons de construire une fonction t_N telle que
     – $||t_N||_\infty \leq 1$
     – Pour tout $x \in [0,1], \exists y \in [0,1]$ tel que $|t_N(x) - t_N(y)| > N|x-y|$

     Pour cela, on considère la fonction $\frac{1}{N}$ périodique et affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en $\frac{1}{2N}$ (et donc 0 en $\frac{1}{N}$). La condition sur la norme est bien sûr vérifiée.

Vérifions la deuxième condition. Soit $x \in [0,1]$. On voit que si x et y sont dans un même intervalle où t est affine, alors $|f(x) - f(y)| = 2N|x-y|$. Donc t est bien comme voulue.
Ensuite, grâce au théorème de Stone-Weierstrass, on sait qu'il existe P polynomiale telle que $||f-P||_\infty < \epsilon/2$. Si N est bien choisi, j'affirme que $g = P + \frac{\epsilon}{2}t_N$ convient. En effet,

$$||f - (P + \frac{\epsilon}{2}t_N)||_\infty \leq ||f-P||_\infty + \frac{\epsilon}{2}||t_N||_\infty < \epsilon$$

De plus, si $x \in [0,1]$, on considère $y \in [0,1]$ tel que $|t_N(x) - t_N(y)| > N|x-y|$. Alors

$$|g(x) - g(y)| \geq \frac{\epsilon}{2}|t_N(x) - t_N(y)| - |P(x) - P(y)| \geq N\epsilon|x-y| - ||P'||_\infty|x-y|$$

où on a utilisé l'inégalité des accroissements finis $|P(x) - P(y)| \leq ||P'||_\infty|x-y|$. Ainsi tout N qui vérifie

$$N > \frac{||P'||_\infty + n}{\epsilon}$$

convient.

Exercice 8 : Le tipi de Cantor

On rappelle que l'ensemble triadique de Cantor est obtenu comme l'intersection d'une famille dénombrable d'intervalles $K = \bigcap_{m\in M} I_m$ où M est dénombrable. On note alors $\mathcal{B} = \bigcup_{m\in M} \partial I_m$. On note $p = (1/2, 1) \in \mathbb{R}^2$. Si $z \in K$, on définit la partie

$$D(z) = \begin{cases} \{(x,y) \in [(z,0),p]; y \in \mathbb{Q}\} \text{ si } z \in \mathcal{B} \\ \{(x,y) \in [(z,0),p]; y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Enfin, on appelle Tipi de Cantor (ou éventail de Knaster-Kuratowski) la partie $X = \bigcup_{z\in K} D(z)$, que l'on munit de la topologie induite.

1. Montrer que $X \setminus \{p\}$ est totalement discontinu.
2. (**difficile**) montrer que X est connexe.

Solution de l'exercice 8

1. $X \setminus \{p\} = Y$ est totalement discontinu : il suffit pour cela de montrer que pour tous a et $b \in Y$, il existe deux ouverts U et V de Y tels que $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$ et $U \bigcup V = Y$. En effet, si cela est vérifié, toute partie connexe de Y ne peut contenir qu'au plus un point. Soient donc $a, b \in Y$. On écrit alors que $a \in D(x)$ et $b \in D(z)$.
Premier cas : $x < z$. Alors on peut trouver deux ouverts de K U_1 et V_1 tels que $x \in U_1, z \in V_1, U_1 \cap V_1 = \emptyset$ et $U_1 \cup V_1 = K$. En effet, si x et z n'ont pas le même développement en base 3, on peut trouver $a \in]x,z[$ tel que $a \in [0,1] \setminus K$ et les ouverts $K \cap [0,a[$ et $K \cap]a,1]$ font l'affaire. On considère alors les ouverts suivants de Y : $U = \bigcup_{y\in U_1} D(y)$ et $V = \bigcup_{y\in U_1} D(y)$, qui conviennent.
Deuxième cas : $x = z$. Dans ce cas, a et b ont deux ordonnées y_a et y_b distinctes qui sont dans un ensemble $D \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$. Il existe des ouverts de $\mathbb{R}$ U_1 et V_1 tels que $y_a \in U_1, y_b \in V_1, U_1 \cap V_1 \cap D = \emptyset, U_1 \bigcup V_1 = \mathbb{R}$. On considère alors les ouverts $U = Y \cap \mathbb{R} \times U_1$ et $V = Y \cap \mathbb{R} \times V_1$ qui conviennent.

2. X est connexe : On notera $\mathcal{G} = K \setminus \mathcal{B}$. Remarquons d'ailleurs que $\mathcal{B} = K \cap \mathbb{Q}$.
   Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que $U \cap V \cap X = \emptyset$ et $U \cup V = X$. Supposons par exemple que $p \in U$. Montrons alors que $U \cap X = X$.
   On définit la hauteur d'un point de K relativement à V par :
   $$h(c) = \sup\{y \in [0,1]; \exists x \in \mathbb{R}, (x,y) \in D(c) \cap V\}$$
   (avec $h(c) = 0$ si $D(c) \cap V = \emptyset$). Notons également, pour $q \in \mathbb{Q}$, F_q l'adhérence des points de hauteur q :
   $$F_q = \overline{h^{-1}(\{q\})}$$

   Etape 1 : $F_q \cap \mathcal{B} = \emptyset$: si $b \in B$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $(x,q) \in [b,p]$ et donc $s = (x,q) \in D(b)$. Soit $s \in U$ soit $s \in V$. Si $s \in V$, V étant ouvert, si $z \in K$ est suffisamment proche de b, on peut trouver des points d'ordonnées $> q + \epsilon$ dans $D(z) \cap V$, pour un certain $\epsilon > 0$. . Ainsi, $h(z) > q + \epsilon$. Et donc $b \notin F_q$. Si $s \in U$, U étant ouvert, l existe $\epsilon > 0$ tel que si $z \in K$ est suffisamment proche de b, il n'existe aucun point de d'ordonnées $y \in]q - \epsilon, q + \epsilon[$ dans $D(z) \cap V$. Dès lors, $h(z) \notin]q - \epsilon, q + \epsilon[$. Et donc $b \notin F_q$.
   Etape 2 : F_q est d'intérieur vide (dans K) : si ce n'est pas le cas, F_q contiendrait un point de B puisque B est dense dans K.
   Etape 3 : si $c \in \mathcal{G}$, $h(c) \in \mathbb{Q}$. En effet, si $h(c) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, le point s de $D(c)$ d'ordonnée $h(c)$ serait dans X donc dans U ou dans V. Si $s \in V$, V étant ouvert, il y aurait des points de hauteurs $> h(c)$ dans $V \cap D(c$, ce qui n'est pas possible. Si $s \in U$, U étant ouvert, on ne peut pas trouver de points de $V \cap D(c)$ dont l'ordonnée tend vers $h(c)$. Dans les deux cas, la définition de $h(c)$ est contredite.
   Etape 4 : $K = \mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} F_q \cup H$ où H est l'ensemble des points de $\mathcal{G}$ de hauteur nulle. En effet, un point de $\mathcal{G}$ est soit dans H, soit dans un F_q par l'étape 3.
   Etape 5 : H est dense dans K. Il suffit de montrer que son complémentaire, à savoir, $\mathcal{B} \cup \bigcup_{q \in]0,1] \cap \mathbb{Q}} F_q$ est d'intérieur vide. Or, chacun des F_q est un fermé d'intérieur vide, $\mathcal{B}$ aussi. K étant de Baire car compact, cette union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide, comme voulu.
   Conclusion : Il est alors évident que $\bigcup_{c \in H} D(c)$ est dense dans X. Par ailleurs, si $c \in H$, $h(c) = 0$ donc $D(c) \subset U$. Donc U est dense dans X. Son complémentaire dans X, à savoir $V \cap X$ est donc d'intérieur vide. Mais $V \cap X$ est un ouvert de X, donc $V \cap X = \emptyset$ et donc $U \cap X = X$.

Exercice 9 : Interversion surprenante !

On va démontrer le théorème de Sunyer i Balaguer :
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale.
Autrement dit,
$$\forall x, \exists n, f^{(n)}(x) = 0 \iff \exists n, \forall x, f^{(n)}(x) = 0$$

1. On va commencer par un cas facile : on suppose que f est analytique i.e. f est développable en série entière au voisinage de chacun de ses points.
   a) Montrer que s'il existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalle non vide tel que $f_{|I} = 0$ alors $f = 0$.
   b) En considérant les ensembles $F_n = \{x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0\}$, montrer le résultat.

2. On démontre dans cette question la version générale du théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0$. On note

$$Y = \{x \in \mathbb{R};\ \exists a < x < b, f \text{ est polynomiale sur }]a,b[\} \text{ et } X = \mathbb{R} \setminus Y$$

   a) Montrer que si $X = \emptyset$, alors f est polynomiale.
   Dans la suite de la question, on raisonne par l'absurde et on suppose que $X \neq \emptyset$.
   b) Montrer que X est complet.
   c) Montrer que X est sans point isolé.
   d) On note $F_n = \{x \in X;\ f^{(n)}(x) = 0\}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a < b \in \mathbb{R}$ tels que$X \cap]a,b[\neq \emptyset$ et pour tout $n \geq n_0$, $X \cap]a,b[\subset F_n$.
   e) Montrer que $]a,b[\subset F_{n_0}$ puis conclure.

Solution de l'exercice 9

1. a) Soit $X = \{x \in \mathbb{R}, \exists I \subset \mathbb{R} \text{ intervalle }, \forall y \in I, f(y) = 0\}$. On va montrer que X est ouvert, fermé et non vide, ce qui suffira pour montrer que $X = \mathbb{R}$, par connexité de $\mathbb{R}$, et donc que $f = 0$. X est trivialement ouvert et par hypothèse, X est non vide. Montrons donc qu'il est fermé. Soit x_n une suite de points de X telle que $x_n \to x$. Soit I intervalle sur lequel f est développable en série entière. Supposons par l'absurde qu'il existe m tel que $f^{(m)}(x) \neq 0$ et prenons ce m minimale. Alors, au voisinage de x, on a $f(y) \sim f^{(m)}(x)(y-x)^m$ et en particulier, $f(x_n) \sim f^{(m)}(x)(x_n - x)^m$ qui ne peut donc pas stationner en 0. Ainsi, $f = 0$ sur I et $x \in X$.
   b) $\mathbb{R}$ est complet et par hypothèse, $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$. Donc, par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n n'est pas d'intérieur vide. On peut donc trouver un intervalle non vide sur lequel $f^{(n)}$ est nulle. Par analycité de $f^{(n)}$ et la question précédente, on en déduit que $f^{(n)} = 0$, comme voulu
2. a) Supposons X vide. $0 \in Y$ donc il existe $\epsilon > 0$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f = P$ sur $]\epsilon, \epsilon[$. Montrons alors que $f = P$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe donc $y \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(y) \neq P(y)$. On peut par exemple supposer que $y > 0$. Notons alors $t = \inf\{y > 0, f(t) \neq P(t)\}$ qui est donc bien défini par hypothèse et qui vérifie $t > 0$. $t \in Y$ donc il existe $\epsilon_1 > 0$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f = P$ sur $]t - \epsilon_1, t + \epsilon_1[$. Mais alors, $P = Q$ sur $]t - \epsilon, t[$ et donc $P = Q$. On a donc $P(y) = f(y)$ sur $[t, t + \epsilon_1[$: Ce qui contredit la définition de t. D'où l'absurdité et le résultat.
   b) Il suffit de montrer que X est un fermé de $\mathbb{R}$, qui est complet. Ceci est évident car Y est trivialement ouvert.
   c) Supposons que $x \in X$ est un point isolé. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap X = \{x\}$. On peut donc trouver P et Q deux polynômes tels que $f = P$ sur $]x - \epsilon, x[$ et $f = Q$ sur $]x, x + \epsilon[$. En effet, il suffit de considérer P et Q qui coïncident avec f pour n'importe quel point de $]x - \epsilon, x[$ et $]x, x + \epsilon[$ (qui sont par hypothèse inclus dans Y) , puis de raisonner comme précédemment pour montrer qu'ils coïncident avec f sur tout l'intervalle. Soit d un entier strictement plus grand que le degré de P et de Q. Alors $f^{(d)}(y) = 0$ sur $]x - \epsilon, x[\cap]x, x + \epsilon[$, donc $f^{(d)}(y) = 0$ sur $]x - \epsilon, x + \epsilon[$, ce qui montrer que f est polynomiale sur cet intervalle et contredit le fait que $x \in X$.
   d) Les F_n sont des fermés de $\mathbb{R}$ qui recouvrent $\mathbb{R}$ par hypothèse sur f. Donc les $X \cap F_n$ sont des fermés de X qui le recouvrent. X étant complet, le théorème de Baire s'applique (ou plutôt sa contraposée), et on peut donc trouver n_0 tel que $F_{n_0} \cap X$ soit d'intérieur (dans X) non vide. Il existe donc $a < b$ tel que l'ouvert de X, $X \cap]a,b[$ soit non vide et $X \cap]a,b[\subset F_{n_0}$. Par ailleurs, si $x \in]a,b[\cap X$, on peut trouver

une suite de points distincts de x dans $X\cap]a,b[$, (y_n) qui converge vers x et alors $f^{(n_0+1)}(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{f^{(n_0)}(y_m)-f^{(n_0)}(x)}{y_m-x} = 0$. Donc $X\cap]a,b[\subset F_{n_0+1}$. Une récurrence immédiate montre que $X\cap]a,b[\subset F_n$ pour tout $n \geq n_0$.

e) On a déjà $X\cap]a,b[\subset F_{n_0}$ de sorte qu'il suffit de montrer que $]a,b[\backslash X \subset F_{n_0}$. Soit donc $x \in]a,b[\backslash X$. Il existe donc un polynôme P et un intervalle I contenant x telle que $f = P$ sur I. En outre, on peut prendre $I =]y,z[$ maximal dans $]a,b[$. Par ailleurs, puisque $]a,b[\cap X \neq \emptyset$ et donc que $]y,z[\neq]a,b[$, l'un ou l'autre des points y et z est dans X, puisque sinon on pourrait prolonger l'intervalle $]y,z[$ dans $]a,b[$. Supposons donc que $y \in X$. Soit d le degré de P. Alors $f^{(d)}(t) = c \neq 0$ sur $]y,z[$ et par continuité, $f^{(d)}(y) = c$. Or, $y \in X\cap]a,b[$ donc $y \in F_n$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci assure que $d < n_0$. Et donc $f^{(n_0)}(x) = P^{(n_0)}(x) = 0$. D'où $x \in F_{n_0}$, ce qui démontrer que $]a,b[\subset F_{n_0}$.
Mais alors, $f^{(n_0)}$ est nulle sur $]a,b[$, ce qui montre que f est polynomiale sur $]a,b[$ et contredit l'hypothèse $]a,b[\cap X \neq \emptyset$.

Exercice 10 : Théorème d'Alexandroff-Mazurkiewicz (Partiel 2016)

Soit (X,d) un espace métrique complet et soit A une partie de X. On va montrer l'équivalence suivante :

(1) Il existe une distance d' sur A qui engendre la même topologie que d et pour laquelle (A,d') est complet.

(2) A est une intersection dénombrable d'ouverts de X.

1. Quelques préliminaires.
   a) Montrer qu'un fermé de X peut s'écrire comme intersection dénombrable d'ouverts.

   b) Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ où Y est un espace topologique, est une intersection dénombrable d'ouverts.
2. On va traiter le sens direct.
   a) Soit d' une distance complète sur A, induisant la même topologie que la distance d. Montrer qu'on peut supposer d' bornée et A dense dans X.
   b) Pour z dans X, on pose
   $$f(z) = \sup\left\{\limsup_n d'(x_n,x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d\right\}.$$
   Montrer que f est bien définie et à valeurs réelles. Montrer que f est continue exactement en les points de A.
   c) Conclure le sens (1) $\implies$ (2).
3. Passons au sens réciproque.
   a) Soit U un ouvert de X. On considère d', définie sur U, par
   $$d'(x,x') = d(x,x') + \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')}\right|,$$
   où $f(x) = d(x, X-U)$. Montrer que d' est une distance sur U, induisant la même topologie que d. Montrer que (U,d') est un espace métrique complet.
   b) Utiliser la question précédente pour construire une métrique complète sur $A = \cap_n U_n$, où $(U_n)_n$ est une famille dénombrable d'ouverts de X.

Solution de l'exercice 10

1. a) Il suffit de considérer $U_n = \{x \in X | d(x, F) < \frac{1}{n}\}$ qui est ouvert car $d(\cdot, F)$ est continue et vérifie $\bigcap U_n = F$ car $x \in F \iff d(x, F) = 0$ (F est fermé).
   b) Il suffit de considérer $E_n = \{x \in Y | \exists V$ voisinage de x tel que $\forall y, z \in V, |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}\}$ et vérifier que $x \in \bigcap E_n \iff f$ est continue en x.
2. a) On peut supposer que d' est bornée. En effet, $d_2 = \min(1, d')$ est une distance qui engendre la même topologie que d' et telle que (X, d_2) est complet.
   On peut également supposer que A est dense dans X, quitte à remplacer X par $\overline{A}$. En effet, l'espace $\overline{A}$ est aussi complet (c'est un fermé d'un espace complet). De plus, si A est une intersection dénombrable d'ouverts de $\overline{A}$, c'est aussi une intersection dénombrable d'ouverts de X par la question 1.a).
   b) Posons, pour tout $z \in X$, $f(z) = \sup \left\{ \limsup_n d'(x_n, x_{n+1}) \text{ tq } x \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } x_n \to z \text{ pour } d \right\}$.
   - Si $z \in A$, $f(z) = 0$ et f est continue en z pour la distance d : toute suite x d'éléments de A convergeant vers z pour d converge aussi vers z pour d', puisque les distances d et d' engendrent la même topologie sur A. Donc x est de Cauchy pour d' et $d'(x_n, x_{n+1}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Puisque c'est vrai pour toute suite x, $f(z) = 0$.
     Montrons que f est continue en z. Soit (z_n) une suite d'éléments de X convergeant vers z. On suppose par l'absurde que $f(z_n) \not\to f(z) = 0$. Quitte à extraire, on peut supposer que $f(z_n) > \epsilon$ pour tout n, pour un certain $\epsilon > 0$.
     Pour tout n, soit $(x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers z_n pour d telle que $\limsup_m d'(x_m^{(n)}, x_{m+1}^{(n)}) > \epsilon$. Soit $m(n)$ tel que :
     $$d(x_{m(n)}^{(n)}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d(x_{m(n)+1}^{(n)}, z_n) < \frac{1}{n+1} \qquad d'(x_{m(n)}, x_{m(n)+1}) > \epsilon$$
     La suite $(x_{m(1)}, x_{m(1)+1}, x_{m(2)}, x_{m(2)+1}, ...)$ converge vers z pour la distance d. Elle converge donc aussi pour la distance d', ce qui est absurde car elle n'est pas de Cauchy pour d'.
   - Si $z \in X - A$, $f(z) > 0$ et f n'est pas continue en z : soit x une suite d'éléments de A convergeant vers z pour la distance d. Une telle suite existe car A est dense dans X. La suite x n'est pas de Cauchy pour d', sinon sa limite serait dans A, puisque (A, d') est complet.
     Puisque cette suite n'est pas de Cauchy, il existe $\epsilon > 0$ et $n_0, n_1, n_2, ...$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $d'(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > \epsilon$. La suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers z pour d donc $f(z) \geq \limsup_n d'(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) > 0$.
     Puisque A est dense dans X, il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers z. Pour tout n, $f(z_n) = 0$ (puisque $z_n \in A$). Donc $f(z_n) \not\to f(z)$. Donc f n'est pas continue en z.

   c) L'ensemble A est donc l'ensemble des points de continuité de la fonction f. D'après la question 1.b), c'est une intersection dénombrable d'ouverts.
3. a) Si $U = X$, c'est évident : $d' = d$ convient.
   Sinon, posons, pour tout $x \in U$, $f(x) = d(x, X - U) > 0$ et définissons, pour tous $x, x' \in U$:
   $$d'(x, x') = d(x, x') + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right|$$

La fonction d' est symétrique. De plus, $d' \geq d$ donc d' est séparante. Elle vérifie l'inégalité triangulaire. C'est donc une distance.

- Les distances d et d' engendrent la même topologie sur U : d'un part, puisque $d' \geq d$, la topologie engendrée par d' est plus fine que celle engendrée par d. Montrons la réciproque.
  Soient $x \in U$, $\epsilon > 0$. Il faut montrer que $B_d(x, \epsilon') \subset B_{d'}(x, \epsilon)$ pour un certain $\epsilon' > 0$.
  La fonction f est continue et ne s'annule pas au voisinage de x ; son inverse $1/f$ est donc également continue. Soit ϵ' suffisamment petit pour que :
  $$\forall x' \in B_d(x, \epsilon'), \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x')} \right| < \epsilon/2$$
  Alors $B_d(x, \min(\epsilon', \epsilon/2)) \subset B_{d'}(x, \epsilon)$.
- (U, d') est complet : soit (x_n) une suite de Cauchy pour d'. Puisque $d' \geq d$, c'est aussi une suite de Cauchy pour d. Soit x_∞ sa limite pour d. Si $x_\infty \in U$, alors $x_n \to x_\infty$ pour d' puisque d et d' engendrent la même topologie sur U. Il suffit donc de montrer que $x_\infty \in U$.
  Si ce n'est pas le cas, $f(x_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} d'(x_m, x_n) = +\infty$. Ce n'est pas possible, puisque la suite est de Cauchy, donc $x_\infty \in U$.

b) Supposons maintenant que $A = \bigcap\limits_n U_n$ avec U_n ouvert dans x, pour tout n. Pour tout n, notons d'_n une distance sur U_n qui engendre la même topologie que d et rend U_n complet. Elle existe, d'après le lemme précédent.
Quitte à remplacer les d'_n par $\min(1, d'_n)$, on peut supposer que ces distances sont bornées par 1.
Posons $d' = \sum\limits_n 2^{-n} d'_n$.

- La distance d' engendre la même topologie que d sur A. De manière générale, si, sur un espace X, les δ_n sont des distances bornées par 1 engendrant la même topologie, $\sum\limits_n 2^{-n} \delta_n$ engendre aussi la même topologie.
- Pour la distance d', A est complet. En effet, si x est une suite de Cauchy pour d', c'est une suite de Cauchy pour chaque d'_n (car $d'_n \leq 2^n d'$). Elle admet donc une limite dans U_n pour chaque d'_n. Cette limite est également la limite pour d (puisque d'_n et d sont équivalentes sur U_n ; la convergence pour d'_n implique donc la convergence pour d). Toutes les limites pour les d'_n sont donc les mêmes et appartiennent donc à $\bigcap\limits_n U_n = A$. Notons x_∞ la limite.

  Puisque x converge vers x_∞ pour chaque d'_n, x converge vers x_∞ pour d' et cette suite de Cauchy a bien une limite.