Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2024/2025 laslier@dma.ens.fr

TD6 : Espaces L^p

Exercice 1. [Comparaison de convergences]

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)\cap L^q(E,\mathcal{E},\mu)$ avec $p,q\in[1,+\infty[$ et $p\neq q$. On suppose que $f_n\to 0$ dans L^p quand $n\to\infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans L^q. Montrer que $f_n\to 0$ dans L^q quand $n\to\infty$.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$ qui converge dans L^p vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g\in L^p$ et que $f=g$ μ-p.p.

Exercice 2. [Uniforme intégrabilité] Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E)<\infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$, $p\in]1,\infty]$, que l'on suppose bornée dans L^p, c'est-à-dire $\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_p<\infty$. On considère aussi une fonction mesurable f sur $(E,\mathcal{E},\mu)$ telles que $f_n\to f$ μ-p.p. quand $n\to\infty$.

1. Montrer que $f\in L^p(E,\mathcal{E},\mu)$.
2. Montrer que pour tout $\epsilon>0$, $\mu(|f_n-f|\geq\epsilon)\to 0$.
3. En déduire que $f_n\to f$ dans L^r pour tout $r\in[1,p[$.

Exercice 3. Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré et soit $p\in[1;+\infty[$.

1. Montrer que les fonctions étagées h vérifiant $\mu(h\neq 0)<+\infty$ sont denses dans $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$.
2. Soit K un compact et soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $K\subset U$. Montrer qu'il existe φ continue à support compact vérifiant $\mathbf{1}_K\leq\varphi\leq\mathbf{1}_U$.
3. Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\lambda)$, en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4. [CS] Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f:E\to]0,\infty[$ une fonction mesurable telle que f et $1/f$ sont intégrables, montrer que μ est finie.

Exercice 5. [Inégalité de Young pour la convolution] On note λ la mesure de Lebesgue, soient $1\leq p,q,r\leq\infty$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. Soient $f\in L^p(\mathbb{R},\lambda)$ et $g\in L^q(\mathbb{R},\lambda)$ on définit la convolution de f et g par $f*g:x\in\mathbb{R}\mapsto\int f(x-y)g(y)\lambda(\mathrm{d}y)$.

1. On suppose d'abord $r=\infty$. Montrer que $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$.
2. On suppose maintenant $r<\infty$. Posons $q'=\frac{q}{q-1}$ et $h(x,y)=|f(x-y)|^{1-p/q'}|g(y)|$. Montrer que
$$|f*g(x)|\leq\|h(x,\cdot)\|_q\|f\|_p^{p/q'}.$$
3. Démontrer l'inégalité de Minkovski généralisée : pour tout $s\geq 1$,
$$\int\left(\int h(x,y)^s\mathrm{d}x\right)^{1/s}\mathrm{d}y\geq\left(\int\left(\int h(x,y)\mathrm{d}y\right)^s\mathrm{d}x\right)^{1/s}$$

4. Montrer que
$$\left(\int\left(\int h(x,y)^q \mathrm{d}y\right)^{r/q} \mathrm{d}x\right)^{q/r} \leq \|f\|_p^{pq/r}\|g\|_q^q.$$
5. En déduire $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Exercice 6. [Continuité de l'opérateur de translation] Soient $f : (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et $h \in \mathbb{R}$. On définit $\tau_h f$ par $\tau_h f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x-h)$.

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour $p \in [1,+\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ alors,
$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h f - f\|_p = 0 \text{ et } \lim_{|h|\to+\infty}\|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p}\|f\|_p$$
Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question précédente si $p = \infty$?
4. (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que quand $t \to \infty$ on a $\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx \to 0$.
5. Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A$ (l'ensemble des $x - y$ pour $x \in A$ et $y \in A$) contient un voisinage de 0.

Exercice 7. [Lemme de Scheffé] Soient $p \in [1,\infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $L^p(E,\mathcal{E},\mu)$. Montrer l'équivalence suivante :
$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \|f\|_p.$$
Indication : considérer $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$.

Exercice 8.

1. Soient $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+),\lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}}|F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$
2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in L^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1,+\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 9. Soient $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1,\infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour toute fonction $f \in L^p$, on a $fg \in L^p$. Montrer que $g \in L^\infty$.

Exercice 10. [Absolue continuité] Soient μ et ν deux mesures positives sur $(E,\mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$
$$\mu(A) \leq \eta \Longrightarrow \nu(A) \leq \epsilon\ .$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Donner un contre-exemple dans le cas où ν est infinie.