École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 11

Exercice 1. *Diverses propriétés des groupes localement compacts*

Soit G un groupe topologique localement compact, on notera λ une mesure de Haar (invariante à gauche).

1. Soit N un sous-groupe de G. Montrer que si H est fermé, alors G/N est séparé.
2. Montrer que G admet une base dénombrable pour sa topologie, si et seulement si G est σ-compact et admet une base dénombrable de voisinage en e.
3. Montrer que $\lambda(\{e\}) > 0$ si et seulement si G est muni la topologie discrète.
4. Montrer que $\lambda(G) < \infty$ si et seulement si G est compact.
5. Soit G^0 la composante connexe de e dans G. Montrer que G^0 est un sous-groupe distingué fermé et que le quotient G/G^0 est totalement discontinu.

Exercice 2. *Mesure de Haar et σ-finitude*

Soit G un groupe locallement compact, on note λ une mesure de Haar. On se propose de montrer que λ est une mesure σ-finie si et seulement si G est σ-compact.

1. Montrer le sens de l'équivalence σ-compact implique σ-finitude de λ.
2. On suppose que λ est σ-finie. Montrer qu'il existe un borélien V σ-compact de mesure cofinie, i.e $\lambda(G\backslash V) < \infty$.
3. En considérant le groupe $H = \langle V\rangle$, conclure.

Exercice 3. *Unicité de la mesure de Haar*

Soient G un groupe localement compact et λ et μ deux mesures de Haar (à gauhce) sur G. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in (0, \infty)$ tel que $\mu = c\lambda$.

Dans la suite, on fixe V_0 un voisinage symétrique compact de e et $f, g \in C_c^+(G)$ deux fonctions continues à supports compacts strictement positives. On introduit les ensembles compacts suivants

$$A = (\mathrm{supp} f)V_0 \cup V_0(\mathrm{supp} f), \quad B = (\mathrm{supp} g)V_0 \cup V_0(\mathrm{supp} g).$$

1. Soit $\epsilon > 0$, montrer qu'il existe un voisinage symétrique compact $V \subset V_0$ de e tel que
$$\forall x \in G, \forall y \in V, \quad |f(xy) - f(yx)| < \epsilon, \ |g(xy) - g(yx)| < \epsilon.$$
2. Montrer qu'il existe $h \in C_c^+(G)$ satisfaisant $h(x) = h(x^{-1})$ et $\mathrm{supp}(h) \subset V$.
3. Montrer les égalités suivantes
$$\int h\, d\mu \int f\, d\lambda = \int \int h(y) f(yx)\, d\lambda(x)\, d\mu(y)$$
$$\int h\, d\lambda \int f\, d\mu = \int \int h(y) f(xy)\, d\lambda(x)\, d\mu(y).$$
4. En déduire l'inégalité suivante
$$\left| \frac{\int f\, d\lambda}{\int f\, d\mu} - \frac{\int g\, d\lambda}{\int g\, d\mu} \right| \leq \epsilon \left(\frac{\lambda(A)}{\int f\, d\mu} + \frac{\lambda(B)}{\int g\, d\mu} \right),$$
et conclure.

Exercice 4. *Théorème de Birkhoff-Kakutani*

On se propose de donner une démonstration du résultat suivant:

Théorème. *Soit G un groupe topologique. Alors G est métrisable si et seulement si G est séparé et possède une base dénombrable de voisinage en e. De plus, dans ce cas il existe une distance invariante par translation.*

On s'intéresse au deuxième sens de cette équivalence. On devra faire pour cela usage du lemme suivant:

Lemme. *Soit G un groupe topologique séparé à base dénombrable de voisinages. Il existe alors une fonction continue $f : G \to [0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

- *(Maximum unique) $f(e) = 1$, et $f(x) < 1$ pour tout $x \neq e$.*
- *(Base de voisinage) Les ensembles $\{x \in G \ : \ f(x) > 1 - 1/n\}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ forment une base de voisinage de e.*
- *(Continuité uniforme) f est une fonction uniformément continue sur G.*

On démontre dans un premier temps ce lemme.

1. Par hypothèse, il existe une base de voisinage $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de e telle que
$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset \{e\}.$$
Montrer qu'il existe une suite décroissante de voisinages ouverts de e
$$U_1 \supset U_{1/2} \supset U_{1/4} \supset \cdots \supset \{e\},$$
telle que $U_{1/2^n}$ est symétrique, est contenu dans V_n et vérifie $U_{1/2^{n+1}} \cdot U_{1/2^{n+1}} \subset U_{1/2^n}$.
2. Pour tout nombre dyadique $a/2^n$ dans $(0,1)$, on définit l'ouvert $U_{a/2^n}$ par
$$U_{a/2^n} := U_{1/2^{n_k}} \cdot \cdots \cdot U_{1/2^{n_1}},$$
où on écrit $a/2^n = 2^{-n_1} + \dots 2^{-n_k}$, son expansion binaire. Montrer que ces ensembles sont indéxés de manière croissante.
3. On définit
$$f(x) := \sup\{1 - \frac{a}{2^n} \ : \ n \geq 1,\, 1 \leq a < 2^n,\, x \in U_{a/2^n}\},$$
avec $f(x) = 0$ si la borne supérieure est prise sur un ensemble vide. Montrer que f est solution du lemme.

Soit donc G un groupe topologique séparé à base dénombrable de voisinages et f la fonction du lemme. On définit la fonction $d_f := G \times G \to [0, \infty)$ par la formule
$$d_f(g,h) := \sup_{x\in G} |f(g^{-1}x) - f(h^{-1}x)|,$$
et on notera $\tau_g f(x) := f(g^{-1}x)$ les translations à gauche.

4. Montrer que d_f définit bien une distance invariante par translation à gauche.
5. Montrer que la topologie induite par d_f coincide avec la topologie initiale de G.