Examen 2023/2024

Mercredi 17 janvier 2024, 9h-12h (3h)
Documents et internet non autorisés
Ce sujet vise à sonder votre niveau en topologie et calcul différentiel
Faites ce que vous pouvez, et ne vous en faites pas
Il n'est pas nécessaire de tout traiter pour avoir 20/20

Exercice 1 (Revêtements)**.** Le cercle $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ est muni de la topologie trace de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ définie par $\pi(x) = (\sin(2\pi x), \cos(2\pi x))$ est un revêtement de $B = S^1$ par $X = \mathbb{R}$:
   - π est surjective.
   - pour tout $b \in B$, il existe un voisinage ouvert V de b et une famille au plus dénombrable $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X deux à deux disjoints t.q. $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I} U_i$ et $\pi|_{U_i} : U_i \to V$ est un homéomorphisme pour tout $i \in I$.
2. Montrer que pour tout entier n, l'application $z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^n \in \mathbb{C}^*$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}^*$.
   Montrer que l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{e}^z \in \mathbb{C}^*$ est un revêtement de $\mathbb{C}^*$ par $\mathbb{C}$.
   Construire un revêtement de la bande de Möbius $[0,1]^2/((0,y) \sim (1,1-y))$ par le cylindre $X = S^1 \times [0,1]$.
3. Montrer que si $\pi : X \to B$ est un revêtement alors π est un homéomorphisme local :
   tout point de X a un voisinage ouvert U tel que $\pi(U)$ est ouvert et $\pi|_U : U \to \pi(U)$ est un homéomorphisme.
4. Montrer si $\pi : X \to B$ est un homéomorphisme local alors π est continue et ouverte.
5. Montrer que si $\pi : X \to B$ est un homéomorphisme local entre un espace topologique X séparé et quasi-compact et un espace topologique B séparé et connexe, alors π est un revêtement de B par X.

Exercice 2 (EDO linéaires : monotonie et stabilité)**.**
Cet exercice ne nécessite pas la connaissance du chapitre du cours sur la stabilité au sens de Lyapunov.
Dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, on considère l'EDOL $x'(t) = A(t)x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, où l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue.

1. Montrer la décroissance de $\|x(t)\|$ si $A(t)$ est symétrique négative.
2. Considérons le cas où $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1)\cot(\theta) \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 \leq 0$, et $\theta \in (0, \pi)$.
   Montrer que $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour un $x \in \mathbb{R}^2$ ssi $|\theta - \frac{\pi}{2}| > \theta_*$ avec θ_* à préciser en fonction de λ_1 et λ_2.
   D'où l'absence de décroissance de $\|x(t)\|$ avec A non-symétrique à valeurs propres négatives.
3. Montrer que dans le cas autonome (A ne dépend pas du temps), et si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors il existe une norme $\|\cdot\|_A$ telle que $\|x(t)\|_A$ ne dépend du spectre de A qu'à travers les parties réelles des valeurs propres de A, et que si ces parties réelles sont < 0 alors $\|x(t)\|_A$ décroît vers 0, exponentiellement, quand $t \to \infty$.
4. Montrer que dans le cas autonome général, il existe une norme $\|\cdot\|_A$ t.q. si les parties réelles des valeurs propres de A sont < 0 alors $\|x(t)\|_A \to 0$ exponentiellement quand $t \to \infty$, mais pas forcément de manière monotone.
5. On considère à présent le cas non-autonome de dimension $n = 2$ suivant :
   $$A(t) = P(t)A(0)P(t)^{-1} \quad \text{où} \quad P(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad A(0) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$
   Montrer que
   $$P(t)^{-1}x(t) = \mathrm{e}^{t(A(0)-Q)}P(t)^{-1}x(0) \quad \text{où} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$
   Que se passe-t-il pour $\omega = -6$, et $A(0)$ égal au A de la question 2 avec $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -1$, et $\cot(\theta) = -4/3$?

Problème 1 (Entre Hahn–Banach et calcul différentiel)**.** Sauf mention explicite du contraire, $(X, \|\cdot\|)$ est un evn réel.

1. On dit que X est strictement convexe lorsque pour tous $x \neq y \in X$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|x + y\| < 2$.
   Géométriquement, cela signifie que la sphère unité ne contient aucun segment de longueur non nulle.
   (a) Montrer que X est strictement convexe ssi la boule unité fermée est strictement convexe :
   pour tous $x \neq y \in X$ tels que $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, et tout $t \in (0,1)$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
   Autrement dit, pour tous $x \neq y \in X$ et tout $z \in (x, y)$, on a $\|z\| < \max(\|x\|, \|y\|)$.

(b) Montrer que X est strictement convexe ssi le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire est co-linéaire positif : pour tous $x, y \in X$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ implique qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.
En particulier, l'espace $\ell^p(I,\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$ et I au plus dénombrable est strictement convexe.

(c) Montrer que ce n'est plus vrai quand $p \in \{1, \infty\}$ dès que $\mathrm{card}(I) \geq 2$.

(d) Montrer que tout espace de Hilbert est strictement convexe.

(e) (Bonus) Montrer que X est strictement convexe ssi il existe $p > 1$ tel que $\|\cdot\|^p$ est strictement convexe : pour tous $x \neq y \in X$, on a $\|\frac{1}{2}(x+y)\|^p < \frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)$,
et que si cela est vrai pour un $p > 1$, cela est vrai pour tout $p > 1$. Que se passe-t-il pour $p = 1$?

2. Cette partie est consacrée à l'unicité dans le théorème de Hahn–Banach. On note $(X', \|\cdot\|)$ le dual topologique de $(X, \|\cdot\|)$. Soit $X_1 \subset X$ un sous-espace et $f \in X_1'$. On dit que $g \in X'$ prolonge f lorsque $g|_{X_1} = f$ et $\|g\| = \|f\|$.

(a) Montrer que si g et h sont deux prolongements de f alors $\|g+h\| \geq 2\|f\|$.

(b) En déduire que si X' est strictement convexe, alors il y a unicité du prolongement.

(c) Montrer que X' est strictement convexe quand X est un espace de Hilbert.

(d) Montrer que X' est strictement convexe quand $X = \ell^p(I,\mathbb{R})$ avec $1 < p < \infty$ et I au plus dénombrable.

(e) Construire un contre exemple à l'unicité du prolongement lorsque $p = 1$ et $\mathrm{Card}(I) \geq 2$.

3. Cette partie est consacrée à un lien entre Hahn–Banach et Gateaux dérivabilité de la norme.

(a) Montrer que pour tout $x \in X$, $\|x\| = 1$, il existe $g_x \in X'$ tel que $g_x(x) = \|g_x\| = 1$.
Montrer que si X' est strictement convexe, alors g_x est unique.

(b) Montrer que pour tout $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$, $y \in X$, $t > 0$, et g_x comme précédemment, on a

$$g_x(y) \leq \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}.$$

(c) En déduire sous les mêmes hypothèques que (existence des limites et inégalités)

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x-ty\| - \|x\|}{-t} \leq g_x(y) \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}.$$

Il en découle le fait remarquable suivant : si la norme $\|\cdot\|$ de X est Gateaux dérivable en tout point de la sphère de X et dans toute direction, alors la forme linéaire g_x est unique pour tout x sur la sphère.

4. Cette partie est consacrée à la dérivée au sens de Carathéodory. Ici $O \subset X$ est un ouvert de X et $(Y, \|\cdot\|)$ est un evn réel. On dit que $f : O \to Y$ est Carathéodory dérivable en $x \in O$ quand il existe $\Phi_x : O \to L(X,Y)$ telle que

$$\Phi_x \text{ est continue en } x \quad \text{et} \quad f(y) = f(x) + \Phi_x(y)(y-x) \text{ pour tout } y \in O.$$

Cette notion généralise aux evn le familier taux d'accroissement $(f(y)-f(x))/(y-x)$ du cas unidimensionnel $X = Y = \mathbb{R}$. Le but est d'établir que dérivabilité au sens de Carathéodory et au sens de Fréchet sont équivalentes.

(a) Montrer que si f est Carathéodory dérivable en x, alors f est continue en x.

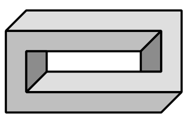
(b) Montrer que si f est Carathéodory dérivable en x, alors elle est Fréchet dérivable en x et $(Df)(x) = \Phi_x(x)$.

(c) Montrer que si f est Fréchet dérivable en x, alors elle est Carathéodory dérivable en x, et pour tout $z \in X$,

$$\Phi_x(y)(z) := \begin{cases} \ell_{x,y}(z) \dfrac{f(y) - f(x) - (Df)(x)(y-x)}{\|y-x\|} + (Df)(x)(z) & \text{si } x \neq y \\ (Df)(x)(z) & \text{si } x = y \end{cases},$$

avec $\ell_{x,y} \in X'$ bien choisi et à préciser.

(d) Donner une condition sur X qui assure l'unicité de la construction de la dérivée ci-dessus.



Brique d'Escher