TD 2 : Espaces topologiques

Définitions.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **séparé** si pour tous $x \neq y \in X$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U, y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **métrisable** s'il existe une distance d sur X tel que la topologie de l'espace métrique (X, d) est $\mathcal{T}$.

Exercice 1 : Échauffement

1. Dites si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse (ou ...) :
   (a) La topologie sur $\mathbb{N}$ induite par la distance $d(x, y) = |x-y|$ est la topologie discrète.
   (b) La topologie sur $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ induite $d(x, y) = |x - y|$ est la topologie discrète.
   (c) La topologie sur $A = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ induite par $d(x, y) = |x - y|$ est la topologie discrète.
   (d) Soit X un ensemble muni de la topologie grossière. Si $A \subset X$ et $A \neq X$, alors $\mathring{A} = \emptyset$.
   (e) Soit X un ensemble muni de la topologie discrète. Si $A \subset X$ et $A \neq X$, alors $\overline{A} = X$.
   (f) $\mathring{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
2. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, proposez une modification qui permet de la rendre vraie. On considère dans tout l'exercice $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{R})$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application quelconque.
   (a) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. Alors f est continue.
   (b) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie grossière. Alors f est continue.
   (c) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. Alors, toute suite est convergente.
   (d) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie grossière. Alors, toute suite est convergente.
   (e) On suppose que f est séquentiellement continue. Alors f est continue.
   (f) On suppose que X et Y sont des espaces vectoriels et que les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ proviennent de normes $||\cdot||_X$ et $||\cdot||_Y$. Alors f est continue si et seulement il existe $C > 0$ tel que si pour tout $x \in X$, $||f(x)||_Y \leq C||x||_X$.

Solution de l'exercice 1

1. a) Vraie : rappelons qu'une topologie sur X est discrète si et seulement si tous les singletons sont ouverts : par stabilité des ouverts par union, on a alors $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Il suffit donc de vérifier que les singletons de $\mathbb{N}$ sont ouverts, ce qui est immédiat puisque chaque $\{n\} \subset \mathbb{N}$ s'écrit comme la trace d'un ouvert de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{N}$, donc est ouvert : $\{n\} = (n - 1/2, n + 1/2) \cap \mathbb{N}$.
   b) Vraie : on procède comme pour la question précédente, en observant que les singletons de $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'écrivent comme trace d'ouverts de $\mathbb{R}$ par
   $$\{1/n\} = B(1/n, 1/(n + 1)^2) \cap \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}.$$
   c) Fausse : le singleton $\{0\}$ ne peut pas être la trace d'un ouvert de $\mathbb{R}$ sur A. En effet, si c'était le cas, on pourrait trouver $r > 0$ tel que $\{0\} = B(0, r) \cap A$, ce qui est impossible car si $n > 1/r$, alors $\{1/n\} \in A \cap B(0, r)$, d'où la contradiction.

d) Vraie : les seuls ouverts de la topologie grossière sont $\emptyset$ et X. Ainsi, pour $A \subsetneq X$, il n'existe qu'un seul ouvert inclus dans A : $\emptyset$.

e) Fausse : si X est muni de la topologie discrète, tous les ensembles sont ouverts, et donc tous les ensembles sont fermés, ainsi chaque ensemble est sa propre adhérence, en particulier $\overline{A} = A \neq X$.

f) Cela dépend de l'ensemble ambiant et de quelle topologie on le munit ! Si c'est $\mathbb{N}$, alors l'affirmation est vraie car l'ensemble ambiant est toujours ouvert. Si c'est $\mathbb{R}$ muni de la topologie habituelle, c'est bien entendu faux. Pour préciser davantage si l'affirmation est vraie ou fausse, plaçons nous dans le cadre où l'espace ambiant est une partie $A \subset \mathbb{R}$ et où *cet espace est muni de la topologie qui dérive de la métrique usuelle sur* $\mathbb{R}$. Dans ce cas, l'affirmation est vraie si et seulement si l'ensemble ambiant A sur lequel on définit la topologie, tel que $\mathbb{N} \subset A \subset \mathbb{R}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists r_n > 0,\ B(n, r_n) \cap A = \{n\}.$$

En effet, si cette condition est vérifiée, alors $\mathbb{N}$ est la trace sur A de l'ouvert $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B(n, r_n) \subset \mathbb{R}$, et réciproquement, si $\mathbb{N}$ est ouvert dans A, c'est la trace d'un ouvert de $\mathbb{R}$, donc il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \cap A = \mathbb{N}$, ce qui correspond exactement à la condition énoncée.

2. a) Vraie : comme tous les ensembles de X sont ouverts, l'image réciproque d'un ouvert est toujours ouverte, donc f est continue.

b) Fausse si X a au moins deux éléments, en considérant $(Y, \mathcal{R}) = (X, \mathcal{P}(X))$ et f l'identité, les singletons sont ouverts dans l'ensemble d'arrivée mais leur image réciproque n'est pas ouverte dans l'ensemble de départ. En fait, il suffit de considérer n'importe quelle topologie plus fine que la topologie grossière pour X à l'arrivée pour ce contre-exemple.

Si l'on suppose que Y vérifie l'axiome T0 de séparation au sens de Kolmogorov, alors f est continue si et seulement si elle est constante. En effet, une fonction constante est toujours continue, et réciproquement, si f n'est par constante, alors soit O un ouvert de Y qui contient l'une des valeurs prises par f mais pas toute. L'image réciproque de cet ouvert n'est ni vide, ni pleine donc pas ouverte, et ainsi f n'est pas continue.

Si Y ne vérifie pas l'axiome T0, définissons la relation d'équivalence suivante :

$$x \backsim y \Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{T},\ \{x, y\} \cap O \in \{\emptyset, \{x, y\}\}.$$

On peut reforumler cette classe d'équivalence comme la classe d'équivalence associée à l'application $t : y \in Y \mapsto \{U \subset Y \text{ ouvert tel que } x \in U\} \subset \mathcal{R}$: deux points sont équivalents s'ils ont la même image par t, cette image étant l'ensemble des ouverts qui contient un point.

Cette relation d'équivalence est non triviale (c'est-à-dire que les classes d'équivalences ne sont pas les singletons) **ssi** l'espace n'est pas T0. (Autrement dit, un espace est T0 **ssi** les classes d'équivalences pour cette relation sont les singletons).

Partitionnons Y selon les classes d'équivalences associées à cette relation :

$$Y = \bigsqcup_{y \in Y/\backsim} C_y,$$

alors f est continue si et seulement si elle est à valeurs dans une seule classe d'équivalence C_{y_0}.
En effet, si c'est le cas, l'image réciproque d'un ouvert est vide ou pleine selon que l'ouvert contient ou non tous les points de l'espace, et si ce n'est pas le cas, on utilise le même argument que pour justifier que les fonctions continues à valeurs dans un espace T0 sont nécessairement constantes.

c) Fausse, les suites convergentes sont exactement les suites constantes à partir d'un certain rang : il suffit d'écrire la définition de la convergence d'une suite pour l'ouvert singleton associé à la limite de la suite.

d) Vraie : chaque suite converge vers tous les points car si $x \in X$, il n'y a qu'un seul ouvert qui contient x et c'est X.

e) Fausse : voir contre-exemple dans l'exercice 3.
En général, la proposition est vraie si et seulement si l'adhérence d'une partie A est l'ensemble des limites possibles de suites convergentes à valeurs dans A.

f) Fausse : il suffit de prendre f constante non nulle, il n'existera jamais une telle borne en considérant $x = 0$.
La propriété est vraie si f est linéaire, car correspond à la continuité en 0, et par translation, f est continue en tout point.

Exercice 2 : Axiomes de fermeture de Kuratowski

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappeler pourquoi l'adhérence vérifie les propriétés suivantes :

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A},\ A \subset \overline{A},\ \overline{\emptyset} = \emptyset,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. Réciproquement, on se donne une application $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \widetilde{A} \in \mathcal{P}(X)$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus. Montrer qu'il existe une topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $A \subset X$, $\widetilde{A} = \overline{A}$. Que dire quant à l'unicité d'une telle topologie ?

Solution de l'exercice 2

1. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A, et c'est donc en particulier un fermé. Il est donc clair que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ et $A \subset \overline{A}$. Pour l'union, comme $A \subset \overline{A}$ et de même pour B, on a

$$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B},$$

qui est un fermé puisque c'est l'union de deux fermés, on en déduit donc que

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Réciproquement, on a

$$A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$$

et donc

$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}.$$

Puisqu'il en va de même pour B, on a finalement

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

et on a bien l'égalité.

2. On va définir la topologie par l'ensemble de ses parties fermées $\mathcal{F}$. Comme les fermés sont exactement les parties égales à leur adhérence, on va définir

$$\mathcal{F} := \{A \subset X \text{ t.q. } \widetilde{A} = A\}.$$

Montrons qu'il s'agit bien de l'ensemble des fermés d'une topologie. On sait que $\emptyset = \widetilde{\emptyset}$ et $X \subset \widetilde{X} \subset X$, donc X et $\emptyset$ sont bien des fermés. Soient F et G deux fermés, montrons que leur union l'est également :

$$\widetilde{F \cup G} = \widetilde{F} \cup \widetilde{G} = F \cup G$$

en utilisant successivement le fait que $A \mapsto \widetilde{A}$ préserve l'union, et que F et G en sont des points fixes. Donc $F \cup G$ est également fermé. Montrons enfin qu'une intersection quelconque de fermés est également fermée. Soit (F_i) une famille de fermés. Remarquons tout d'abord que $A \mapsto \widetilde{A}$ est croissante. En effet si $A \subset B$,

$$\widetilde{B} = \widetilde{A \cup (B \backslash A)} = \widetilde{A} \cup \widetilde{B \backslash A}$$

et donc $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$. Ainsi, pour tout i,

$$\bigcap_i F_i \subset F_i \Rightarrow \widetilde{\bigcap_i F_i} \subset \widetilde{F_i} = F_i,$$

d'où

$$\widetilde{\bigcap_i F_i} \subset \bigcap_i F_i$$

et on a bien l'égalité.
Vérifions enfin que cela définit bien l'adhérence pour cette topologie. Soit $A \subset X$. $\widetilde{A}$ est fermé et si $A \subset B$ avec B fermé, on a vu par croissance que $\widetilde{A} \subset \widetilde{B} = B$. Donc $\widetilde{A}$ est bien le plus petit fermé contenant A : c'est donc son adhérence : $\widetilde{A} = \overline{A}$.
Enfin, l'unicité provient du fait que si une topologie coïncide avec celle-là, les fermés sont exactement les parties égales à leur adhérence donc les points fixes de l'application $\widetilde{\cdot}$.

Exercice 3 : Topologies cofinie et codénombrable

Soit X un ensemble infini. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini et $\mathcal{C}$ la réunion $\mathcal{C}_0 \cup \{\emptyset\}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. X est-il séparé ?
   b) Quels sont les comportements asymptotiques possibles pour une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ en termes de convergence ?
   c) Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$ continue. Montrer que f est constante.
2. On considère maintenant X un ensemble non-dénombrable, et on le munit de la topologie co-dénombrable : les fermés différents de X sont les parties au plus dénombrables.
   a) Montrer que c'est une topologie sur X. X est-il séparé ?
   b) Quels sont les comportements asymptotiques possibles pour une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ en termes de convergence ?

c) Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$. Que dire de f ?

d) Soit $x \in X$. Existe-t-il une base dénombrable de voisinages de x ?

e) Que se passe-t-il si X est dénombrable ?

Solution de l'exercice 3

1. a)
   - $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $X \in \mathcal{C}$ puisque X^c est vide.
   - Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{C}$. Si pour tout $i \in I, U_i = \emptyset$, $\bigcup_{i\in I} U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$. Sinon, il existe $i_0 \in I, U_i \neq \emptyset$ et $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^c \subset U_{i_0}^c$ qui est fini, donc $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{C}$.
   - Soient $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{C}$. S'il existe $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $U_i = \emptyset$ alors $\bigcap_{i=1}^N U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$. Sinon, $\left(\bigcap_{i=1}^N U_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^N U_i^c$ est fini et$\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{C}$.

   Soient U et $V \in \mathcal{C}_0$. $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$ est fini. Comme X est infini, $(U \cap V)^c \neq X$ et donc $U \cap V \neq \emptyset$. Cette topologie n'est donc pas séparée.

   b) Soit $u \in X^{\mathbb{N}}$ une quelconque. Distinguons trois cas, selon le nombre de points que u parcourt une infinité de fois.
   - Soit u ne prend jamais la même valeur une infinité de fois, dans ce cas, u converge vers tous les points de X. En effet, si O est un ouvert non vide de X, comme $X \setminus O$ est fini par définition des fermés, et que chaque point de $X \setminus O$ est parcouru au plus un nombre fini de fois par u, alors il existe un certain rang à partir duquel les termes de la suite u sont dans O. Ainsi u est dans chaque ouvert à partir d'un certain rang (dépendant de l'ouvert) donc u converge vers tous les points de X.
   - Soit il existe un unique point $x \in X$ que u parcourt une infinité de fois (u n'est pas forcément stationnaire, mais il existe une sous-suite de u constante). Alors u possède une unique limite et cette limite est x. En effet, soit O un ouvert contenant x. Comme précédemment, à partir d'un certain rang, u est dans cet ouvert, donc u converge vers x. A contrario, soit $O' = X \setminus \{x\}$. Alors u ne sera jamais à valeurs dans l'ouvert O' à partir d'un certain rang, donc u ne converge vers aucun point de $X \setminus \{x\}$, d'où l'unicité de la limite.
   - Soit il existe au moins deux points x et y de X tels que u prend ces deux valeurs une infinité de fois, alors u ne sera jamais dans l'ouvert $X \setminus \{x\}$ ni dans l'ouvert $X \setminus \{y\}$ à partir d'un certain rang, donc u ne converge pas.

   c) Supposons par l'absurde que f n'est pas constante et soient $y_1 \neq y_2 \in f(X)$. Y est séparé car c'est un espace métrique. Il existe V_1 et V_2 ouverts tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et tels que $y_i \in V_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Alors $f^{-1}(V_1)$ et $f^{-1}(V_2)$ sont deux ouverts de X non vides qui ne s'intersectent pas, or, on a vu en première question que c'est impossible, d'où la contradiction.

2. a) Les propriétés d'une topologie se vérifient comme pour la première question. Muni de cette topologie, X n'est pas séparé car deux ouverts non vides ne sont jamais d'intersection vide. En effet, si U, V sont des ouverts de X, alors $U \cap V = X \setminus (U^C \cup V^C)$, mais $(U^C \cup V^C)$ est dénombrable donc ne peut pas être égal à X.

   b) Les seules suites convergentes sont les suites stationnaires, et leur limite est un singleton : c'est le point en lequel elles stationnent. En effet, soit $u \in X^{\mathbb{N}}$ une suite qui stationne en x à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Alors si O est un ouvert de X contenant x, pour $n \geq N$, $u_n \in O$. (En fait, peu importe l'espace et la

topologie, une suite stationnaire est toujours convergente au moins vers son point de stationnement, et si l'espace est au moins T1, c'est l'unique limite.)
Maintenant, si u n'est pas stationnaire, alors pour $x \in X$ considérons le fermé (car au plus dénombrable)

$$F_{x,u} = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\}.$$

Comme u ne stationne pas en x, u prend des valeurs dans $F_{x,u}$ une infinité de fois, donc n'est pas dans l'ouvert $O = X \setminus F_{x,u}$ à partir d'un certain rang. Comme cette ouvert contient x, u ne converge pas vers x, et cela est vrai pour tout x, donc u n'admet aucune limite.

c) f est toujours séquentiellement continue, car les seules suites convergentes sont stationnaires. Cela permet de construire facilement des fonctions séquentiellement continues, mais pas continues. Par exemple, si O est un ouvert strict de X, et $y_1, y_2 \in Y$, prendre la fonction f telle que $f^{-1}(\{y_1\}) = O$ et $f^{-1}(\{y_2\}) = X \setminus O$. f n'est pas continue car l'image réciproque du fermé $\{y_1\}$ est un ouvert de X.

d) La réponse est non ! Supposons qu'il existe une base (V_n) de voisinages de x. Par définition de la topologie codénombrable, puisque que V_n contient un ouvert contenant x, V_n^c est dénombrable, et donc $\bigcup_n V_n^c$ aussi. Or, $\bigcup_n V_n^c = (\bigcap_n V_n)^c$. Pour aboutir à une contradiction et conclure, il suffit de montrer que $\bigcap_n V_n = \{x\}$, puisque $\{x\}^c$ n'est bien évidemment pas dénombrable.
Il est clair que $x \in \bigcap_n V_n$. Réciproquent, considérons $y \neq x$. $U = \{y\}^c$ est ouvert puisque de complémentaire fini donc dénombrable. Or $x \in U$ donc il existe n tel que $V_n \subset U$. En particulier, $y \notin V_n$, comme voulu.

e) Si X est dénombrable, la topologie codénombrable est juste... la topologie discrète !

Exercice 4 : Topologie de Fort

Soient X un ensemble infini et $x \in X$. On définit $\mathcal{T}$ comme étant l'ensemble des parties A de X telles que ou bien A^c est fini (type 1), ou bien A^c est infini et $x \in A^c$ (type 2).

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Montrer que cette topologie est séparée.
3. On suppose que X est dénombrable. On considère $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite. Montrer que A et X sont homéomorphes. En déduire que X est métrisable.
4. On suppose X non dénombrable. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.

Solution de l'exercice 4

1.
   - $\emptyset^c$ est infini et contient x, X^c est fini donc $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
   - Une union de parties type 1 est de type 1 (déjà vu). Une union de parties de type 2 a pour complémentaire une partie contenant x, donc est soit fini, soit infini contenant x. Enfin, l'union d'une partie de type 1 et d'une partie de type 2 est de type 1.
   - Une intersection finie de parties type 1 est de type 1 (déjà vu). Une intersection de parties de type 2 est de type 2. Enfin, l'intersection d'une partie de type 1 et d'une partie de type 2 est de type 2.
2. Remarquons que si $y \neq x$, $\{y\}$ est ouvert. Soient $y \neq z \in X$.
   - Cas 1 : $y \neq x$ et $z \neq x$. $\{y\}$ et $\{z\}$ sont des ouverts disjoints qui séparent y et z.

- Cas 2 : $z = x$. $V = X \setminus \{y\}$ est un ouvert contenant x et $W = \{z\}$ un ouvert contenant z. En outre, $V \cap W = \emptyset$.

3. Soit (x_n) une énumération de $X \setminus \{x\}$. Montrons que $x_n \to x$. Soit V un ouvert contenant x. Alors V^c est fini donc il existe un rang n_0 à partir duquel tous les x_n sont dans V. Donc, on a bien $x_n \to x$. On définit alors $f : X \to A$ par :
$$f(x) = 0; f(x_n) = \frac{1}{n+1}$$
f est clairement bijective. Les images directes et réciproques par f ont donc mêmes cardinaux et transforment donc des parties de type 1 en parties de type 1 et des parties de type 2 en partie de type 2 avec 0 et x jouant le rôle du point à contenir. Il suffit donc de montrer que les ouverts de A sont les parties de type 1 et de type 2.
Si $B \subset A$ est de type 1, son complémentaire est réunion fini de fermés (les singletons sont fermés) donc fermé et donc B est ouvert.
Si U est de type 2, U est de la forme $\bigcup_{n\in M}\{\frac{1}{n}\}$ où $M \subset \mathbb{N}^*$, donc U est ouvert car chacun des singletons $\{\frac{1}{n}\} = B(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n(n+1)})$ est ouvert.
Réciproquement, si U est un ouvert de A, on distingue encore 2 cas. Si 0 est dans U, il existe $\epsilon > 0, B(0,\epsilon) \cap A \subset A$ et donc $U^c \subset A \cap [\epsilon, 1]$ est fini. Sinon, $0 \in U^c$, et dans ce cas U est soit fini et de type 1, soit de type 2.
4. Supposons que $(X, \mathcal{T})$ est métrisable. Soit d une distance qui induit cette topologie.
$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, 2^{-n})\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x, 2^{-n})^c$$
est union dénombrable de complémentaire d'ouverts contenant x. Or, tout ouvert contenant x a pour complémentaire un ensemble fini. Donc, $\{x\}^c$ est dénombrable et par suite, X aussi.

Exercice 5 : Droite réelle étendue

On munit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[-\infty, a[,]b, +\infty]$ ou $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que c'est bien une base de topologie.
2. Décrire une base dénombrable de voisinages de $-\infty, +\infty, x \in \mathbb{R}$.
3. On définit $f : x \in \overline{\mathbb{R}} \mapsto \begin{cases} \arctan(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \\ \pm\pi/2 \text{ si } x = \pm\infty \end{cases}$
   a) Montrer que f est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la topologie usuelle.
   b) En déduire que cette topologie est métrisable.
   c) $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est-il séparable ?

Solution de l'exercice 5

1. Il faut vérifier que l'union de ces intervalle fait tout $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui est clair ! Il faut ensuite vérifier que si I_1 et I_2 sont deux intervalles et si $x \in I_1 \cap I_2$, alors il existe I_3 intervalles ouverts tel que $x \in I_3 \subset I_1 \cap I_2$. Il faut traiter plusieurs cas, mais c'est bien entendu vrai. Par exemple, si $I_1 = [-\infty, a[$ et $I_2 =]b, c[$, soit $a \leq b$ et l'intersection est vide, soit

$a > b$ et dans ce cas $I_1 \cap I_2 =]b, a[$ ou $]b, c[$ selon que a soit plus grand que c ou non, ce qui est directement un intervalle.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on prend les $]x - 1/n, x + 1/n[$, pour $-\infty$ les $[-\infty, n[$ et pour $+\infty$ les $[n, +\infty[$.
3. a) f est clairement bijective et c'est une application croissante (pour l'ordre étendu). Elle échange donc les intervalles. Or, les intervalles ouverts (au sens de la topologie sur $[-\pi/2, \pi/2]$) forment une base de $[-\pi/2, \pi/2]$. Ainsi, f échange deux bases de topologie, c'est donc un homéomorphisme.
   b) C'est évident puisqu'elle est homéomorphe à un espace métrique. Si l'on en est pas convaincu, prendre $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.
   c) Puisqu'il est homéomorphe à $[-1, 1]$, il est séparable (car compact au sens de Bolzano-Weiestrass).

Pour aller plus loin

Exercice 6 : A propos des distances

1. On dit qu'une application $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une jauge si $j(0) = 0, j(x) > 0$ si $x > 0$, j est croissante et j est sous-additive ($j(x+y) \leq j(x) + j(y)$).
   a) Vérifier que $j(x) = x/(1+x)$ et $j(x) = \min(1, x)$ sont des jauges.
   b) Soit (X, d) un espace métrique et j une jauge. Montrer que $j \circ d$ est une distance.
2. Soit X un ensemble et d_1, d_2 deux métriques sur X. On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si elles engendrent les mêmes topologies. On dit qu'elles sont **uniformément équivalentes** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_1(x, y) \leq \delta \implies d_2(x, y) \leq \varepsilon$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_2(x, y) \leq \delta \implies d_1(x, y) \leq \varepsilon$.
   a) Montrer que deux distance uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.
   b) Montrer que $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ sont topologiquement équivalentes, mais pas uniformément équivalentes, sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que si (X, d) est un espace métrique, d et $d/(1 + d)$ sont uniformément équivalentes.
3. On note d la distance SNCF sur $\mathbb{C}$ définie par $d(z, w) = \begin{cases} |z - w| \text{ si } w \text{ et } z \text{ sont colinéaires} \\ |z| + |w| \text{ sinon} \end{cases}$
   Est-elle topologiquement équivalente à la topologie usuelle ? Si non, comparer les topologies.
4. On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et on définit une distance par $d_l(x, y) = 2 \arcsin \frac{||x-y||}{2}$
   a) Montrer que c'est une distance et l'interpréter (sur un dessin !).
   b) Est-elle topologiquement équivalente (resp. uniformément équivalente) à la distance usuelle induite sur la sphère ?

Solution de l'exercice 6

1. a) Dans les 2 cas, les 3 premiers points sont clairs (il est facile de montrer que $x \mapsto x/(1+x)$ croît). Pour la sous-additivité, on traite le premier exemple. Le deuxième exemple se traite par disjonction de cas.
   $$\frac{u+v}{1+u+v} = \frac{u}{1+u+v} + \frac{v}{1+u+v} \leq \frac{u}{1+u} + \frac{u}{1+v}$$
   car $u, v \geq 0$.
   b) séparation : $j \circ d(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$.
   symétrie : facile.
   inégalité triangulaire : $j(d(x, z)) \leq j(d(x, y) + d(y, z)$ (par croissance) puis par sous-additivité on conclut.
2. a) Il faut montrer que les ouverts sont les mêmes. On note B_i les boules ouvertes pour d_i. Par symétrie des cas, il suffit de montrer que les ouverts de d_1 sont des ouverts de d_2. Soit $U \subset X$ ouvert de d_1. Montrons que c'est un ouvert de d_2. Soit $x \in U$. Il existe $r > 0$ tel que $B_1(x, r) \subset U$. Or, il existe $\delta > 0$ tel que $d_2(y, z) \leq \delta \implies d_1(y, z) \leq \varepsilon$. Donc, on en déduit que $B_2(x, \delta) \subset B_1(x, r) \subset U$. Donc U est ouvert de d_2.

b) Il est bien connu que $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est un homéomorphisme (pour les topologies usuelles). Il est donc clair que les deux espaces ont même suites convergentes, ce qui suffit pour les espaces métriques (et seulement eux !!!) Sinon, on peut vérifier que U est ouvert pour d_2 si et seulement si $\arctan(U)$ est un ouvert de $]-\pi/2, \pi/2[$. L'application tan n'est pas uniformément continue, ce qui va empêcher les deux distance d'être uniformément équivalentes. Par exemples, on vérifie que $|\arctan(n+1) - \arctan(n)| \to 0$ alors que $|n+1-n| = 1$.

c) On a clairement $d \leq d/(1+d)$, ce qui donne la première partie. Pour la deuxème en notant $d' = d/(1+d)$, on voit que $d = d'/(1-d')$. On vérifie que $g : x \mapsto x/1-x$ est strictement croissante sur $[0,1[$ et tend vers 0 en 0, de sorte que si $\varepsilon > 0$, on peut toujours trouver $\delta = g^{-1}(\varepsilon)$ vérifie $g(x) \leq \varepsilon$ si $x \leq \delta$.

3. On peut vérifier que les boules ouvertes (pour la topologie usuelle) sont ouverts pour la distance SNCF. En effet, si $x = 0$, les deux boules coïncident. Si $x \neq 0$ et si $r = |x|$, toute boule $B(x,\rho)$ de la topologie usuelle contient la boule $B_{SNCF}(x, r')$ avec $r' \leq |x|$, qui n'est autre que l'intervalle de taille $2r$ centré en x sur la droite passant par 0 et x. Cela montre que la topologie SNCF est plus fine, et même strictement puisque les boules de la distance SNCF de la forme $B_{SNCF}(x, r')$ avec $r' \leq |x|$ ne sont pas des ouverts de la topologie usuelle.

4. a) Pour l'interpréter : si x et y sont diamétralement opposés, la distance est 2. Sinon, on prend l'unique grand cercle qui passe par les deux points et c'est l'arc de cercle le plus court qui relie x à y sur ce grand cercle.

Montrons que c'est bien une distance : la séparation et la symétrie sont claires. L'inégalité triangulaire nécessite un peu de travail. Soyons un peu astucieux. On fixe $x, y, z \in \mathbb{S}^2$. On remarque déjà que la distance est invariante par isométrie, au sens où $d_l(g(x), g(y)) = d_l(x, y)$ si g est une isométrie. On peut donc supposer que $z = (0, 0, 1)$ est le pôle Nord. Puis, quitte à faire une rotation qui laisse le pôle nord invariant, on peut supposer que y n'a pas de composante sur l'axe des x, donc de la forme $(0, \sin(\alpha), \cos(\alpha))$. Enfin, on suppose que $x = (\cos(\theta)\sin\phi, \sin(\theta)\sin\phi, \cos(\phi))$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha, \phi \in [0, \pi]$. On vérifie (où l'on a compris ?) que la distance $d(x, z) = \alpha$ et $d(y, z) = \phi$. On veut donc montrer

$$\alpha \leq \phi + d(x, y)$$

Si $\alpha \leq \phi$, c'est évident. On suppose donc que $\phi \leq \alpha$.

On remarque qu'on a en fait aussi la formule suivant (du fait que $||x|| = ||y|| = 1$).

$$d_l(x, y) = \arccos(x \cdot y)$$

On doit alors montrer que

$$\alpha - \phi \leq d(x, y) \iff \cos(\alpha - \phi) \leq x \cdot y = \sin(\theta)\sin\phi + \cos\alpha\cos\phi$$

Soit encore

$$\cos(\alpha)\cos(\phi) + \sin(\alpha)\sin(\phi) \leq \sin(\theta)\sin\phi + \cos\alpha\cos\phi$$

Ce qui se simplifie en $\sin(\alpha)\sin(\phi)(1 - \sin(\theta)) \geq 0$, ce qui est vrai.

b) Elle est en fait uniformément et donc topologiquement équivalente à la distance usuelle. cela vient du fait que $\arcsin x \sim x$ en 0.

Exercice 7 : Topologie de l'ordre

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné i .e. $\leq$ vérifie pour tous $x, y, z \in E$,
- réflexive $x \leq x$
- antisymétrique : $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$;
- transitive : $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$;

On appelle intervalles ouverts les ensembles ayant l'une des formes suivantes $(x, y \in E)$:

$$\{t \in E, x < t < y\}, \{t \in E, x < t\}, \{t \in E, t < x\}, E$$

On rappelle que l'ordre est dit **total** si pour tout $x, y \in E$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

On définit une topologie sur E, appelée topologie de l'ordre par : soit $U \subset E$, U est ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe un nombre finie d'intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_J$ tels que $x \in I_1 \cap \cdots \cap I_J$ et $I_1 \cap \cdots \cap I_J \subset U$.

1. Vérifier que cela définit une topologie et que quand l'ordre est total, il suffit de prende $J = 1$. Vérifier aussi que les intervalles ouverts sont des ouverts pour la topologie de l'ordre.
2. Montrer que la toplogie de l'ordre sur $(\mathbb{R}, \leq)$ est la topologie usuelle.
3. Montrer que la topologie de l'ordre sur $(\mathbb{N}^*, |)$ (divisibilité) est la topologie discrète.
4. On suppose que l'ordre est total. Montrer que la topologie est séparée.
5. On considère $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de l'ordre induit par $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$. Montrer que $\bar{\mathbb{R}}$ muni de la topologie de l'ordre est homéomorphe à $[-1, 1]$ muni de la topologie usuelle.

Solution de l'exercice 7

1. Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des U dits ouverts. Par définition, il est clair que $E \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$. Il n'est pas difficile non plus de voir qu'un union quelconque et qu'une intersection finie d'élements de $\mathcal{T}$ reste dans $\mathcal{T}$, ce qui prouve que $\mathcal{T}$ est une topologie. Ou encore, on peut dire que l'ensemble des intersections finis d'intervalle est une base d'ouverts (à vérifier aussi).
   Supposons que l'ordre est total. Pour montrer que l'on peut prendre $J = 1$, il suffit de montrer qu'une intersection de deux intervalles ouverts est un intervalle ouvert. Il y a plusieurs cas à traiter, qui se ressemblent plus ou moins ... considérons simplement le cas $I_1 = \{t, x_1 < t < y_1\}$ et $I_2 = \{t, x_2 < t < y_2\}$. On peut suppose $x_1 \leq x_2$. Il y a plusieurs sous-cas à traiter selon la position de y_1 par rapport à I_2 :
   - $y_1 \leq x_2$: $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, sinon puisque l'ordre es total, c'est que $x_2 < y_1$;
   - Si $x_2 < y_1 \leq y_2$: $I_1 \cap I_2 = \{t, x_2 < t < y_1\}$, sinon puisque l'ordre est total $y_2 < y_1$;
   - $y_2 < y_1$, alors $I_2 \subset I_1$ donc $I_1 \cap I_2 = I_2$.

   Enfin, si I est un intervalle ouvert, pour tout $t \in I$, on a $t \in I \subset I$ ... don I est ouvert !
2. Si U est un ouvert pour la topologie usuelle, par définition, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Mais $B(x, r)$ est un intervalle ouvert ! Donc U est un ouvert de la topologie de l'ordre. Réciproquement, si U est un ouvert pour la topologie de l'ordre, si $x \in U$, il existe I intervalle ouvert tel que $x \in I \subset U$. Mais on sait que les intervalles ouverts sont des ouverts de la topologie usuelle, donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset I \subset U$. Donc U est un ouvert de la topologie usuelle.

3. Tout topologie est moins fine que la topologie discrète. Il suffit donc de montrer que la topologie de l'ordre est plus fine que la topologie discrète : il suffit de montrer que les singletons sont des ouverts de la topologie de l'ordre. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Si $a = 1$, $\{1\}$ est égal à $\{t \in \mathbb{N}^*, t < 2\}$ donc $\{1\}$ est ouvert. Si $a \neq 1$, écrivons $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ LA décomposition, avec disons $\alpha_1 > 0$. Notons
$$I = \{t \in \mathbb{N}^*, a/p_1 < t < ap_1\}$$
Alors $I = \{a\}$. Donc $\{a\}$ est ouvert.
4. Soient $x \neq y \in E$. L'ordre étant total, $x < y$ ou $y < x$. Supposons par exemple que $x < y$. Premier cas : il existe $a \in E$ tel que $x < a < y$. Alors $U = \{t, t < a\}$ et $V = \{t, a < t\}$ sont des ouverts qui séparent x et y. Sinon, deuxième cas : pour tout $a \in E$, soit $a \leq x$ soit $y \leq a$. Dans ce cas, $U = \{t, t < y\}$ et $V = \{t, x < t\}$ sont des ouverts disjoints. Enfin, l'assertion du deuxième cas permet de voir que si $a \in U$, alors $a \leq x$ et donc $a \notin V$.
5. On considère l'application
$$f : x \in [-1, 1] \mapsto \begin{cases} -\infty \text{ si } x = -1 \\ +\infty \text{ si } x = +1 \\ \tan\left(\frac{2x}{\pi}\right) \end{cases}$$
C'est évidemment une bijection, il faut encore montrer qu'elle est continue. Une façon élégante de faire est de dire que la topologie usuelle sur $[-1, 1]$ est la topologie de l'ordre avec l'ordre usuel (pourquoi ? à prouver éventuellement mais ordre induit+topologie induite + question 2) et de dire que f est strictement croissante, donc f échange intervalles ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$ et de $[-1, 1]$, et donc échange les ouverts.

Exercice 8 : Partiel 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0, 0)$ à $(1, 1/n)$ et L_∞ le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0, 0)$ à $(1, 0)$. Soit L la réunion des L_n pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On munit chaque L_n de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties O de L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $O \cap L_n$ est un ouvert de L_n.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur L. Comparer $\mathcal{T}$ avec la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. $(L, \mathcal{T})$ est-il séparé ?
3. Montrer que $(L, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable. Indication : on raisonne par l'absurde ; étant donnée une distance d de L engendrant $\mathcal{T}$, construire une suite (x_n) telle que $x_n \in L_n - \{(0, 0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n) tend vers $(0, 0)$ dans (L, d) mais pas dans $(L, \mathcal{T})$.

Solution de l'exercice 8

1. Il s'agit de la topologie finale relatives aux inclusions des segments L_n dans L, c'est donc bien une topologie (chose que l'on peut aussi vérifier directement).

   Cette topologie rend l'inclusion de L dans $\mathbb{R}^2$ continue puisqu'elle est continue lorsqu'on la restreint aux L_n. Ainsi, cette topologie est plus fine que celle de L vu comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

2. L'espace L est séparé : en effet, la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$ l'est et elle est plus fine que cette topologie.
3. Raisonnons par l'absurde et soit d une distance induisant la topologie $\mathcal{T}$ sur L. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de terme général $\frac{1}{p}(1, \frac{1}{n}) \in L_n \subset L$ tend vers $(0,0)$ pour $\mathcal{T}$ lorsque p tend vers l'infini puisqu'elle tend effectivement vers $(0,0)$ dans L_n. La distance à $(0,0)$ tend donc vers 0 lorsque p tend vers l'infini. On peut donc trouver p_n tel que $0 < d_n := d(\frac{1}{p_n}(1, \frac{1}{n}), (0,0)) < \frac{1}{n}$. On pose ensuite $x_n := \frac{1}{p_n}(1, \frac{1}{n})$.

   La suite (x_n) tend vers 0 pour la distance d qui engendre la topologie $\mathcal{T}$, mais (x_n) ne tend pas vers 0 pour $\mathcal{T}$, ce qui est absurde. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit V_n un voisinage de 0 dans L_n qui sépare 0 de x_n. La suite reste en dehors du voisinage

$$V := L_\infty \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} V_n.$$

Exercice 9 : Topologie définie par une famille de semi-normes

Faire le DM 1. Si vous voulez qu'il soit corrigé, à rendre la semaine du 7 Octobre.

Solution de l'exercice 9

Bien tenté, mais il faudra attendre !