École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 3

Exercice 1. *Croissance des orbites périodiques et entropie des applications expansives*
Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application continue et expansive, c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$,

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{d}(f^n(x), f^n(y)) \leq \delta \implies x = y.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note
$$p_n(f) = \#\{x \in X, f^n(x) = x\}.$$
On définit aussi le taux de croissance exponentielle de la séquence $p_n(f)$,

$$p(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(1 + p_n(f))}{n}.$$

1. Montrer que $p_n(f)$ est fini pour tout n et qu'on a
$$p(f) \leq h_{\mathrm{top}}(f), \tag{1}$$
où $h_{\mathrm{top}}(f)$ est l'entropie topologique de f.
2. Donner un exemple d'application f telle que (1) soit une égalité.
3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$ hyperbolique (i.e. dont les valeurs propres sont toutes de module différent de 1), on a
$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{sp}(A)\\ |\lambda|>1}} \log|\lambda| \leq h_{\mathrm{top}}(f_A),$$
où $f_A : \mathbf{T}^m \to \mathbf{T}^m$ est l'automorphisme toral associé à A.

Exercice 2. *Chaîne topologique de Markov*
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}$ une matrice à coefficients dans $\{0, 1\}$. On considère l'ensemble suivant:

$$\Sigma_A^+ = \{\omega \in Y^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ a_{\omega_n,\omega_{n+1}} = 1\},$$

où $Y = \{1, \cdots, k\}$. On vérifie que Σ_A^+ est une partie fermée de $Y^{\mathbf{N}}$: muni du décalage de Bernoulli usuel, noté S, de tels systèmes dynamiques sont appelés chaînes de Markov topologiques.

1. Pour $m \in \mathbf{N}^*$, prouver que le nombre de point m-périodiques de (Σ_A^+, S) est égale à $\mathrm{Tr}(A^m)$.
2. Montrer qu'une chaîne de Markov topologique est expansive. En déduire l'inégalité suivante
$$\ln(\rho(A)) \leq h_{top}(S_{\Sigma_A^+}),$$
où $\rho(A)$ désigne le rayon spectral de A.
3. En utlisant de nouveau la propriété d'expansivité, montrer qu'en réalité, il y a égalité:
$$h_{top}(S_{\Sigma_A^+}) = \ln(\rho(A)).$$

Exercice 3. *Codage symbolique de l'application du Chat d'Arnold*

On considère la matrice
$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Alors L induit un automorphisme $f_L : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2$ appelé application du Chat d'Arnold. On observe que L a deux valeurs propres $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et λ^{-1}. Les vecteurs propres associés respectifs sont $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\lambda^{-1} \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\lambda \end{pmatrix}$.
On considère une partition de $\mathbf{T}^2$ en deux rectangles $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ dont les côtés sont parallèles à v ou w (voir Figure 1). On constate que $f_L(R^{(1)})$ se décompose en trois rectangles Δ_0, Δ_1 et Δ_3 tandis que $f_L(R^{(2)})$ se décompose en deux rectangles Δ_2 et Δ_4 (voir Figure 1).

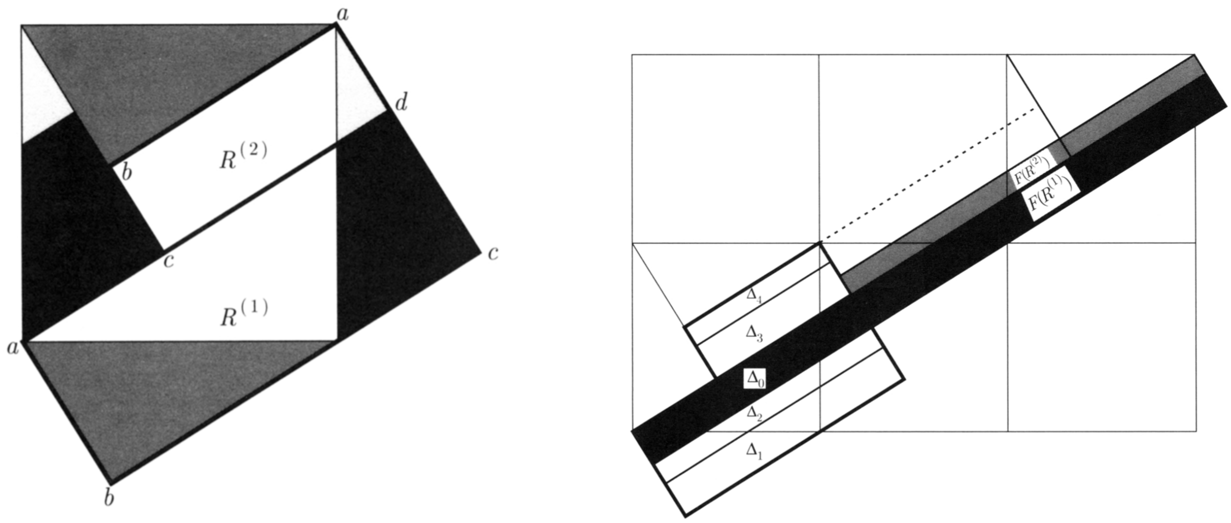

Figure 1: Partition de $\mathbf{T}^2$ en deux rectangles (à gauche) et image des relevés de ceux ci par $F : x \mapsto Lx$ (à droite)

1. En utilisant la partition $\mathbf{T}^2 = \bigcup_{j=0}^{4} \Delta_j$, montrer que f_L est un facteur d'une chaîne de Markov topologique dont on précisera la matrice de transition.
2. En déduire l'entropie topologique de f_L.

Exercice 4. *Fonctions zêta dynamiques*

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation continue et expansive de X. On définit la fonction zêta dynamique de f par
$$\zeta_f(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(f)}{n} z^n, \quad z \in \mathbf{C}, \quad |z| < \exp(-p(f)),$$
où $p_n(f)$ et $p(f)$ sont définis dans l'exercice **2**.

1. Montrer que ζ_f est bien définie.
2. Montrer, dans les cas suivants, que ζ_f est une fonction rationnelle admettant un pôle simple au point $z = \exp(-h_{\mathrm{top}}(f))$, et que
$$p_n(f) \sim \exp(n h_{\mathrm{top}}(f)) \quad (n \to \infty).$$
   (a) $X = \mathbf{T}$ et $f : x \mapsto mx$ où $m \in \mathbf{N}_{\geq 2}$.
   (b) $X = \mathbf{T}^2$ et $f = f_L$ est l'application du Chat d'Arnold.
   (c) $X = \Sigma_A$ où A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ irréductible[1],
$$\Sigma_A = \left\{ (x_j)_{j \in \mathbf{Z}} \in \{1, \ldots, n\}^{\mathbf{Z}} \mid \forall j \in \mathbf{Z},\ A_{x_j, x_{j+1}} = 1 \right\},$$
   et $f = \sigma_A$ est le décalage sur Σ_A.

[1]En particulier, par le théorème de Perron-Frobenius, il existe une valeur propre $\lambda > 0$ telle que $\lambda = \rho(A)$ et $\mathrm{sp}(A) \cap \{|z| \in \mathbf{C},\ |z| = \lambda\} = \{\lambda, \lambda\omega, \ldots, \lambda\omega^{p-1}\}$ où $p \in \mathbf{N}$ et $\omega = \exp(2i\pi/p)$.