Benoît Laslier
laslier@dma.ens.fr

TD5 : Intégrales à paramètres, théorèmes de Fubini

Exercice 1. [Une première utilisation de Fubini] Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, la mesure μ étant supposée σ-finie. Soit f mesurable positive.

1. Montrer que $\int_E f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(f > t) \, dt$.
2. Plus généralement montrer que si $g \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $g(0) = 0$ alors $\int_E g \circ f \, d\mu = \int_0^{\infty} g'(t)\mu(f > t) \, dt$.

Exercice 2. [Lemme de Scheffé] Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que :

— $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout $x \in E$,

— $\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu < \infty$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int (f - f_n)_+ \mathrm{d}\mu = 0$.
2. En déduire que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Z_k = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+t^2/k)^k} \mathrm{d}t$ et $f_k(t) = \frac{1}{Z_k(1+t^2/k)^k}$.
   (a) Montrer que $Z_k = \sqrt{k} A_k$, où $A_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que $A_{k+1} = \frac{2k-1}{2k} A_k$. En déduire un équivalent de A_k lorsque $k \to \infty$.
   (c) Conclure que f_k converge dans L^1 vers la densité de la loi normale sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. [Calculs]

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$. Comparez les valeurs de $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y f(x,y)$ et $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x f(x,y)$.
2. En considérant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$.
3. En remarquant que $x^{-1}\sin(x) = \int_0^1 \cos(xy)\mathrm{d}y$, calculer pour tout $t > 0$ l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} x^{-1} \sin(x) \, e^{-tx} \mathrm{d}x \, .$$

Exercice 4. [Intégrales à paramètre] Soit $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction mesurable pour les tribus boréliennes associées. On pose $F : x \in [0,\infty) \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est continue.
2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Exercice 5. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soient f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f, g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu.$$

Indication : on pourra considérer la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 6. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et soit $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$. On pourra considérer les ensembles

$$A_{\eta,n} = \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(nx)| > \eta\}\ , \quad n \geq 1\ , \quad \eta > 0.$$

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles, soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E et $\mathcal{B}$ une tribu sur F. Montrer que les sections d'un ensemble mesurable pour la tribu produit sont mesurables. Autrement dit, si $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alors $C^y := \{x \in E\colon (x, y) \in C\} \in \mathcal{A}$ pour tout $y \in F$ et $C_x := \{y \in F\colon (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in E$.

Exercice 8. [Convolution] Pour f, g deux fonctions boréliennes positives, on pose

$$f * g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int f(y)g(x - y)\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que si f et g sont intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $f * g$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $0 < \lambda(A) < \infty$. Montrer que si $(\mathbb{1}_A * \mathbb{1}_{-A})(x) > 0$ alors il existe $y, z \in A$ tels que $x = y - z$.
3. Soit $a \geq 0$, montrer que $\{x \in \mathbb{R} : f * g(x) \leq a\}$ est fermé. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, il existe $y \in A$ tel que $x + y \in A$.
4. On pose $F = \{x_a, a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$, où x_a est un représentant de $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans l'intervalle $[0, 1]$. En observant que $\{q + F, q \in \mathbb{Q}\}$ est une partition dénombrable de $\mathbb{R}$, montrer que F ne peut être mesurable.
5. Montrer que si $A \cap (q + F) \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(A \cap (q_0 + F)) > 0$.
6. En conclure que si A est de mesure de Lebesgue positive, alors il existe un ensemble $B \subset A$ tel que $B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.