Intégration et Probabilités
ENS Paris, 2023/2024

Benoît Laslier
laslier@dma.ens.fr

TD3 : Intégration, théorèmes de convergence

Exercice 1. [Mise en jambes]

1. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que f_n converge simplement vers 0. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que pour tout $A > 0$, on a $\mu(|f| \geq A) \leq \frac{1}{A}\int_E |f|\mathrm{d}\mu$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que

$$\int |f|\mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \mu\text{-p.p.} \qquad \int |f|\mathrm{d}\mu < +\infty \Rightarrow |f| < +\infty \quad \mu\text{-p.p.}$$

   Que dire des réciproques de ces propriétés ?
4. Montrer qu'il existe une suite de fonctions mesurables (f_n) telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. [Théorème fondamental de l'analyse] Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$.

1. Montrer que f' est mesurable pour la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.
2. On suppose que f' est bornée. Montrer que $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$.
3. Trouver une fonction continue et presque partout dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f'(x)dx = 0.$$

Exercice 3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1[} f(x^n)\mathrm{d}x$.

Exercice 4. [Un peu de calcul]

1. Calculer en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ les limites quand $n \to +\infty$ de

$$\int_0^n (1 - x/n)^n x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \text{ et de } \int_0^n (1-x/n)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x.$$

2. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{E}, \mu)$, montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n|\mathrm{d}\mu < +\infty \text{ implique } \sum_{n\geq 0} \int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)\mathrm{d}\mu,$$

   puis calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x$.

Pour aller plus loin

Exercice 5. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O tel que $\mathbb{Q} \subset O$ mais la mesure de Lebesgue de O est plus petite qu'ϵ.

Exercice 6. [Uniforme continuité de l'intégrale] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} \mathrm{d}\mu = 0$.
2. Montrer que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \mathrm{d}\mu < \epsilon$.
3. En déduire si f est une fonction intégrable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors la fonction $F : u \mapsto \int_0^u f(x)\mathrm{d}x$ est uniformément continue.

Exercice 7. [Le retour de Borel-Cantelli]

1. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, on pose (A_n) une suite d'ensembles mesurables telle que $\sum_{n\geq1} \mu(A_n) < +\infty$. Démontrer le Lemme de Borel-Cantelli en utilisant la suite de fonction $(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$.
3. Soit (α_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\alpha_n} < +\infty$ et (a_n) une suite de réels. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{|x - a_n|} < +\infty$.
4. ($\star$) Montrer qu'on a également $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha_n}{|x-a_n|}} < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. [Une extension du théorème de convergence dominée] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, on suppose $\mu(E) < +\infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite *uniformément intégrable* si $\limsup_{c\to+\infty} \sup_{i\in I} \int_{|f_i|>c} |f_i| \mathrm{d}\mu = 0$.

1. Montrer que toute famille finie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est uniformément intégrable.
2. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :
$$\sup_{i\in I} \int |f_i| \mathrm{d}\mu < +\infty \quad \text{ et } \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{E}, \mu(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{i\in I} \int_A |f_i| \mathrm{d}\mu < \epsilon. \quad (\star)$$
3. Montrer que si $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour $(f_i + g_i)_{i\in I}$.
4. Soit (f_n) une suite de fonctions telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour μ-presque tout $x \in E$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si (f_n) est uniformément intégrable.
5. Montrer le critère de de la Vallée-Poussin : une famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une fonction convexe $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe croissante telle que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \quad \text{ et } \quad \sup_{i\in I} \int G(|f_i|) \mathrm{d}\mu < +\infty.$$
6. En déduire qu'une suite de fonctions bornée dans $\mathcal{L}^p$ qui converge μ-p.p. vers f converge également vers f dans $\mathcal{L}^1$.