TD 2 : Espaces topologiques

Définitions.
Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **séparé** si pour tous $x \neq y \in X$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U, y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.
Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit **métrisable** s'il existe une distance d sur X tel que la topologie de l'espace métrique (X, d) est $\mathcal{T}$.

Exercice 1 : Échauffement

1. Dites si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse (ou ...) :
   (a) La topologie sur $\mathbb{N}$ induite par la distance $d(x,y) = |x-y|$ est la topologie discrète.
   (b) La topologie sur $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ induite $d(x,y) = |x-y|$ est la topologie discrète.
   (c) La topologie sur $A = \{0\} \cup \{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ induite par $d(x,y) = |x-y|$ est la topologie discrète.
   (d) Soit X un ensemble muni de la topologie grossière. Si $A \subset X$ et $A \neq X$, alors $\mathring{A} = \emptyset$.
   (e) Soit X un ensemble muni de la topologie discrète. Si $A \subset X$ et $A \neq X$, alors $\overline{A} = X$.
   (f) $\mathring{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
2. Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, proposez une modification qui permet de la rendre vraie. On considère dans tout l'exercice $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{R})$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application quelconque.
   (a) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. Alors f est continue.
   (b) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie grossière. Alors f est continue.
   (c) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète. Alors, toute suite est convergente.
   (d) On suppose que $\mathcal{T}$ est la topologie grossière. Alors, toute suite est convergente.
   (e) On suppose que f est séquentiellement continue. Alors f est continue.
   (f) On suppose que X et Y sont des espaces vectoriels et que les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ proviennent de normes $||\cdot||_X$ et $||\cdot||_Y$. Alors f est continue si et seulement il existe $C > 0$ tel que si pour tout $x \in X$, $||f(x)||_Y \leq C||x||_X$.

Exercice 2 : Axiomes de fermeture de Kuratowski

1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Rappeler pourquoi l'adhérence vérifie les propriétés suivantes :
$$\overline{\overline{A}} = \overline{A},\ A \subset \overline{A},\ \overline{\emptyset} = \emptyset,\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
2. Réciproquement, on se donne une application $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \widetilde{A} \in \mathcal{P}(X)$ vérifiant les quatre propriétés ci-dessus. Montrer qu'il existe une topologie $\mathcal{T}$ sur X telle que pour tout $A \subset X$, $\widetilde{A} = \overline{A}$. Que dire quant à l'unicité d'une telle topologie ?

Exercice 3 : Topologies cofinie et codénombrable

Soit X un ensemble infini. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini et $\mathcal{C}$ la réunion $\mathcal{C}_0 \cup \{\emptyset\}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X. X est-il séparé ?
   b) Quels sont les comportements asymptotiques possibles pour une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ en termes de convergence ?
   c) Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$ continue. Montrer que f est constante.
2. On considère maintenant X un ensemble non-dénombrable, et on le munit de la topologie co-dénombrable : les fermés différents de X sont les parties au plus dénombrables.
   a) Montrer que c'est une topologie sur X. X est-il séparé ?
   b) Quels sont les comportements asymptotiques possibles pour une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ en termes de convergence ?
   c) Soit Y un espace métrique et $f : X \to Y$. Que dire de f ?
   d) Soit $x \in X$. Existe-t-il une base dénombrable de voisinages de x ?
   e) Que se passe-t-il si X est dénombrable ?

Exercice 4 : Topologie de Fort

Soient X un ensemble infini et $x \in X$. On définit $\mathcal{T}$ comme étant l'ensemble des parties A de X telles que ou bien A^c est fini (type 1), ou bien A^c est infini et $x \in A^c$ (type 2).

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
2. Montrer que cette topologie est séparée.
3. On suppose que X est dénombrable. On considère $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite. Montrer que A et X sont homéomorphes. En déduire que X est métrisable.
4. On suppose X non dénombrable. Montrer que $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable.

Exercice 5 : Droite réelle étendue

On munit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ de la topologie dont une base d'ouverts est donnée par les intervalles $[-\infty, a[,]b, +\infty]$ ou $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que c'est bien une base de topologie.
2. Décrire une base dénombrable de voisinages de $-\infty, +\infty, x \in \mathbb{R}$.
3. On définit $f : x \in \overline{\mathbb{R}} \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \arctan(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \\ \pm\pi/2 \text{ si } x = \pm\infty \end{array} \right.$
   a) Montrer que f est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la topologie usuelle.
   b) En déduire que cette topologie est métrisable.
   c) $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est-il séparable ?

Pour aller plus loin

Exercice 6 : A propos des distances

1. On dit qu'une application $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une jauge si $j(0) = 0, j(x) > 0$ si $x > 0$, j est croissante et j est sous-additive ($j(x+y) \leq j(x) + j(y)$).
   a) Vérifier que $j(x) = x/(1+x)$ et $j(x) = \min(1, x)$ sont des jauges.
   b) Soit (X, d) un espace métrique et j une jauge. Montrer que $j \circ d$ est une distance.
2. Soit X un ensemble et d_1, d_2 deux métriques sur X. On dit que d_1 et d_2 sont **topologiquement équivalentes** si elles engendrent les mêmes topologies. On dit qu'elles sont **uniformément équivalentes** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_1(x, y) \leq \delta \implies d_2(x, y) \leq \varepsilon$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que pour tout $x, y \in X$, $d_2(x, y) \leq \delta \implies d_1(x, y) \leq \varepsilon$.
   a) Montrer que deux distance uniformément équivalentes sont topologiquement équivalentes.
   b) Montrer que $d_1(x, y) = |x - y|$ et $d_2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ sont topologiquement équivalentes, mais pas uniformément équivalentes, sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que si (X, d) est un espace métrique, d et $d/(1+d)$ sont uniformément équivalentes.
3. On note d la distance SNCF sur $\mathbb{C}$ définie par $d(z, w) = \begin{cases} |z - w| \text{ si } w \text{ et } z \text{ sont colinéaires} \\ |z| + |w| \text{ sinon} \end{cases}$
   Est-elle topologiquement équivalente à la topologie usuelle ? Si non, comparer les topologies.
4. On note $\mathbb{S}^2$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et on définit une distance par $d_l(x, y) = 2 \arcsin \frac{||x-y||}{2}$
   a) Montrer que c'est une distance et l'interpréter (sur un dessin !).
   b) Est-elle topologiquement équivalente (resp. uniformément équivalente) à la distance usuelle induite sur la sphère ?

Exercice 7 : Topologie de l'ordre

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné i .e. $\leq$ vérifie pour tous $x, y, z \in E$,
- réflexive $x \leq x$
- antisymétrique : $x \leq y$ et $y \leq x \implies x = y$;
- transitive : $x \leq y$ et $y \leq z \implies x \leq z$;

On appelle intervalles ouverts les ensembles ayant l'une des formes suivantes $(x, y \in E)$:

$$\{t \in E, x < t < y\}, \{t \in E, x < t\}, \{t \in E, t < x\}, E$$

On rappelle que l'ordre est dit **total** si pour tout $x, y \in E$, soit $x \leq y$, soit $y \leq x$.

On définit une topologie sur E, appelée topologie de l'ordre par : soit $U \subset E$, U est ouvert si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe un nombre finie d'intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_J$ tels que $x \in I_1 \cap \cdots \cap I_J$ et $I_1 \cap \cdots \cap I_J \subset U$.

1. Vérifier que cela définit une topologie et que quand l'ordre est total, il suffit de prende $J = 1$. Vérifier aussi que les intervalles ouverts sont des ouverts pour la topologie de l'ordre.

2. Montrer que la toplogie de l'ordre sur $(\mathbb{R}, \leq)$ est la topologie usuelle.
3. Montrer que la topologie de l'ordre sur $(\mathbb{N}^*, |)$ (divisibilité) est la topologie discrète.
4. On suppose que l'ordre est total. Montrer que la topologie est séparée.
5. On considère $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de l'ordre induit par $\leq$ sur $\mathbb{R}$ et tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq +\infty$ et $-\infty \leq x$. Montrer que $\bar{\mathbb{R}}$ muni de la topologie de l'ordre est homéomorphe à $[-1, 1]$ muni de la topologie usuelle.

Exercice 8 : Partiel 2016

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note L_n le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0,0)$ à $(1, 1/n)$ et L_∞ le segment de $\mathbb{R}^2$ reliant $(0,0)$ à $(1,0)$. Soit L la réunion des L_n pour $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On munit chaque L_n de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des parties O de L telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $O \cap L_n$ est un ouvert de L_n.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur L. Comparer $\mathcal{T}$ avec la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. $(L, \mathcal{T})$ est-il séparé ?
3. Montrer que $(L, \mathcal{T})$ n'est pas métrisable. Indication : on raisonne par l'absurde ; étant donnée une distance d de L engendrant $\mathcal{T}$, construire une suite (x_n) telle que $x_n \in L_n - \{(0,0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n) tend vers $(0,0)$ dans (L, d) mais pas dans $(L, \mathcal{T})$.

Exercice 9 : Topologie définie par une famille de semi-normes

Faire le DM 1. Si vous voulez qu'il soit corrigé, à rendre la semaine du 7 Octobre.