École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 6

Exercice 1. *Moyennes de Birkhoff pour les permutations*

Soit σ une permutation de $X = \{1, \dots, p\}$. Montrer que pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbf{C}$ et tout $x \in X$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\sigma^k(x)\right) = \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} \sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \varphi(y),$$

où $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbf{N}\}$ est l'orbite de x.

Exercice 2. *Théorème de Von Neumann un peu généralisé*

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ une contraction linéaire, i.e qui vérifie l'inégalité suivante:

$$\forall h \in \mathcal{H},\ \|U(h)\| \leq \|h\|.$$

On note $\mathcal{H}^U$ le sous-espace fermé $\{h \in \mathcal{H} \,|\, U(h) = h\}$ et p^U la projection orthogonale sur $\mathcal{H}^U$. On veut montrer que

$$\forall h \in \mathcal{H},\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k(h) = p^U(h).$$

1. Montrer la propriété pour $h \in \mathcal{H}^U$ et pour $h = U(h_0) - h_0$ avec $h_0 \in \mathcal{H}$.
2. Montrer que l'orthogonal de la fermeture de $(U - Id)(\mathcal{H})$ est l'espace des vecteurs invariants $\mathcal{H}^U$.
3. Conclure.

Exercice 3. *Théorème ergodique sur les espaces métriques compacts*

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation mesurable préservant une mesure borélienne de probabilité μ que l'on suppose ergodique pour f. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable $G \subset X$ de mesure totale tel que pour tout fonction continue φ et tout $x \in G$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi \circ f^k\right)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X \varphi \, d\mu.$$

Exercice 4. *Théorème de récurrence de Khintchine*

Soit $(X, \mathcal{X}, \nu, T)$ un système dynamique pmp. Soit $A \in \mathcal{X}$ et fixons $\varepsilon > 0$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'ensemble d'entiers suivant

$$\{n \in \mathbf{N} \, : \, \nu(A \cap T^{-n}(A)) > \nu(A)^2 - \varepsilon\}$$

est syndétique.

1. Montrer pour $M \in \mathbf{N}$ l'inégalité

$$\lim_{N - M \to \infty} \frac{1}{N - M} \sum_{n=M}^{N-1} \nu(A \cap T^{-n}(A)) \geq \nu(A)^2.$$

2. En déduire le théorème de Khintchine.

Exercice 5. *Explosion des sommes de Birkhoff et positivité de la moyenne*

Soit $(X, \mathcal{A}, f, \mu)$ un système dynamique pmp ergodique. Soit $\varphi \in L^1(\mu)$. On suppose que pour μ presque tout x,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(f^k(x)\right) = +\infty.$$

On cherche à montrer que $\displaystyle\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu > 0$.

On note $T_n\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ T_n \varphi \geq \varepsilon \right\}, \quad B_\varepsilon = \bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(A_\varepsilon).$$

1. Montrer que $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \geq 0$.
2. Soit $x \in A_\varepsilon$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$T_n\varphi(x) \geq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_\varepsilon}\left(f^k(x)\right).$$

3. Montrer que si $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ alors $\mu(B_\varepsilon) = 0$.
4. Conclure.