École Normale Supérieure
2023/2024

Lino Benedetto
lbenedetto@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 5

Exercice 1. *Unique ergodicité et densité des orbites*

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation continue. On suppose qu'il existe une unique mesure borélienne de probabilité invariante μ et que $\mu(A) > 0$ pour tout ouvert non vide A. Montrer que toutes les orbites de f sont denses dans X.

Exercice 2. *Critére de Weyl et équirépartition*

Une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite équirépartie modulo 1 si, pour tout intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}\{k \le n : \ \{x_k\} \in [a, b]\} = b - a,$$

où $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie décimale de x.

1. Montrer que la rotation du cercle $T_\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est uniquement ergodique si et seulement si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
2. En déduire que la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ avec α irrationnel est équirépartie modulo 1.

Il existe une caractérisation pratique de l'équirépartition: le critère de Weyl.

Théorème. *Une suite de réel est équirépartie modulo 1 si et seulement si, pour tout m dans $\mathbf{Z}^*$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi m x_k} = 0.$$

1. Soit $\mathcal{F}_b([0, 1], \mathbf{C})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\varphi(t)|$, et E le sous-espace vectoriel foré des fonctions φ telles $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x_k) = \int_0^1 \varphi(t)dt$. Montrer que E est fermé dans $\mathcal{F}_b([0, 1], \mathbf{C})$.
2. Prouver le critère de Weyl et retouver le résultat d'équirépartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbf{N}}$ pour α irrationnel.
3. Soit $x \in \{0, \dots, 9\}$. Calculer la limite suivante

$$\frac{1}{n}\mathrm{Card}\{k \le n : \ \text{le premier chiffre de } 2^k \text{ est } x\}.$$

Exercice 3. *Équirépartition de la suite $P(n)$ dans le tore*

1. Soit α un nombre irrationnel. On considère l'homéomorphisme f du tore $\mathbf{T}^N$ donné par

$$f(\theta_1, \dots, \theta_N) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \theta_1, \dots, \theta_N + \theta_{N-1}).$$

   Montrer que f est uniquement ergodique pour la mesure de Haar.

2. Soit P un polynôme non constant de degré N à coefficients réels et dont le coefficient dominant est irrationnel. Posons $P_N = P$ et pour $j = 0, \dots, N-1$, $P_j(X) = P_{j+1}(X + 1) - P_{j+1}(X)$. En considérant la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par

$$\theta_n = (P_1(n), \dots, P_N(n)),$$

   montrer que la suite $P(n)$ est équirépartie modulo 1.

Exercice 4. *Théorème du point fixe de Markov-Kakutani*

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de point fixe suivant:

Théorème. *Soit K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe X and soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions affines continues de K dans lui-même qui commutent deux à deux. Alors il existe $x_0 \in K$ tel que $T(x_0) = x_0$ pour tout $T \in \mathcal{F}$.*

1. Pour $T \in \mathcal{F}$ et $n \geq 1$, on définit $T^{(n)} : K \to K$ par

$$T^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k.$$

   On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{K} = \{T^{(n)}(K) : \ T \in \mathcal{F}, \, n \geq 1\}$. Montrer que l'ensemble $\bigcap\{B : \ B \in \mathcal{K}\}$ est non vide.

2. En déduire le théorème de Markov-Kakutani.

3. Soit G un groupe abélien agissant continûment sur un espace compact métrisable X. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité G-invariante sur X.