# TD 4 : Compacité

---

## Exercice 1 : Échauffement

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Soit $X$ un espace topologique et $K \subset X$ quasi-compact, alors $K$ est fermé.
2. Soit $X$ un espace topologique compact et $F \subset X$ fermé. Alors $F$ est compact.
3. Soit $Y = [-1, 1]$, muni de la topologie usuelle, et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont $\{-1\}, \{1\}$ et les $\{-a, a\}$, $a > 0$. Alors $Y/\mathcal{R}$, muni de la topologie quotient est compact.
4. L'espace $E = [0; 1]^{[0;1]}$ des fonctions de $[0; 1]$ vers $[0; 1]$, muni de la topologie produit, est compact.
5. L'espace $F \subset E$ des fonctions 1-lipschitziennes, muni de la topologie induite par celle de $E$, est compact.
6. L'espace $G \subset E$ des fonctions continues, muni de la topologie induite par celle de $E$, est compact.
7. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normable. $E$ est localement compact si et seulement si il est de dimension finie.

**Solution de l'exercice 1**

1. Fausse : il faut supposer la séparation de $X$. Par exemple, si $X$ est muni de la topologie grossière, n'importe quelle partie de $X$ est quasi-compacte.
2. Vraie, c'est un théorème du cours.
3. Fausse, il n'est pas séparé (en revanche, il est quasi-compact).
4. Vraie : $E$ est compact par le théorème de Tychonov.
5. Vraie : $F$ est un compact. Pour le démontrer, il suffit de démontrer que $F$ est un fermé de $E$ (qui est compact d'après la question précédente).
Pour tous $x, y \in [0; 1]$ tels que $x \neq y$, posons $F_{x,y} = \{f \in E \text{ tq } |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$. Cet ensemble est un fermé de $E$. En effet, l'application $\phi_{x,y} : f \in E \to f(x) - f(y)$ est continue pour la topologie produit (car c'est une différence de fonctions continues) donc $F_{x,y} = \phi_{x,y}^{-1}([-|x - y|; |x - y|])$ est un fermé de $E$.
Puisque $F = \bigcap_{x \neq y} F_{x,y}$, $F$ est un fermé.
6. Fausse : $G$ n'est pas compact. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ telle que :
$$f_n(x) = \max(0, 1 - nx) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $E$ vers la fonction $g$ qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs. Elle a donc une unique valeur d'adhérence dans $E$, qui est $g$. Puisque $g \notin G$, $G$ n'est pas fermé ; ce n'est donc pas un sous-ensemble compact de $E$.
7. Vraie : il s'agit du Théorème de Riesz. Soit $B$ un voisinage ouvert de 0 d'adhérence compacte. On va montrer que $B$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Notons que montrer cela revient à terminer la preuve, car n'importe quel point de l'espace vectoriel est dans une certaine dilatation de $B$ de la forme $\lambda B$ par continuité

de la multiplication par un scalaire sur un e.v. topologique, et une dilatation de $B$ reste dans le sous-espace vectoriel considéré.
Pour montrer que $B \subset F$ avec $F$ de dimension finie, on écrit

$$\overline{B} \subset \bigcup_{x \in \overline{B}} x + \frac{B}{2},$$

où $\frac{B}{2} = \{x \in E |\ 2x \in B\}$. Par compacité de $\overline{B}$, soit $x_1, ..., x_n \in \overline{B}$ tels que

$$\overline{B} \subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k + \frac{B}{2}.$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. De façon claire, $B \subset \overline{B} \subset F + \frac{B}{2}$, donc en "divisant par 2" dans le sens ensembliste défini plus haut, on obtient $\frac{B}{2} \subset \frac{F}{2} + \frac{B}{4}$. Or $\frac{F}{2} = F$ et en substituant cette inclusion dans la précédente (et notant que $F + F = F$), on trouve $B \subset F + \frac{B}{4}$. Par récurrence, on montre ainsi que $B \subset F + \frac{B}{2^n}$. Ainsi, si $x \in B$, on peut écrire $x = f_n + b_n$ avec $f_n \in F$ et $b_n \in B$. Comme $E$ est normable, $b_n \longrightarrow 0$, et de fait $f_n \longrightarrow x$. Or, $F$ est de dimension finie donc fermé, de fait $x \in F$, ce qui conclut.
*Si $E$ n'est pas normable, il faut utiliser que les compacts sont des parties bornées, où l'on dit qu'une partie est bornée si elle est contenue dans une certaine dilatation de n'importe quel voisinage de $0$. Par dilatation de $B$ en $\frac{B}{2^n}$, on montre de même que $b_n \longrightarrow 0$.*

---

## Exercice 2 : Les compacts sont normaux

Soit $X$ un espace topologique compact.

1. Montrer que $X$ est régulier (T3) : pour tout fermé $F \subset X$ et pour tout $x \in F^c$, il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tel que $F \subset U$ et $x \in V$.
2. Montrer que $X$ est normal (T4) : pour tous fermés disjoints $F$ et $G$, il existe des ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $F \subset U$ et $G \subset V$.

**Solution de l'exercice 2**

1. On fixe $F \subset X$ et $x \in F^c$. $X$ est séparé donc pour tout $y \in F$, il existe $U_y$ et $V_y$ deux ouverts disjoins séparant $y$ et $x$. $F \subset \bigcup_{y \in F} U_y$ et $F$ est compact (fermé dans un compact) donc il existe $y_1 \dots, y_n$ tels que $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. On prend alors $U = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ et $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. $U$ et $V$ sont ouverts, $U \cap V = \emptyset$, $F \subset U$ et $x \in V$.
2. On fixe $F$ et $G$. Par la question précédente, pour tout $x \in G$, il existe $U_x$ et $V_x$ ouverts disjoints tels que $F \subset U_x$ et $x \in V_x$. Puisque $G \subset \bigcup_{x \in G} V_x$, on conclut comme précédemment en considérant un sous-recouvrement fini de $G$.

---

## Exercice 3 : Un théorème de point fixe

1. Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et $f : X \to X$ tel que pour tous $x \neq y \in X, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Alors $f$ possède un unique point fixe.
2. Soit $(x_n)$ une suite de $X$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)$ converge vers cet unique point fixe.

**Solution de l'exercice 3**

1. L'unicité du point fixe est claire. On constate que $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur un compact donc atteint son inf en un point $x_0 \in X$. Si $f(x_0) \neq x_0$, alors $d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0)$ ce qui contredit la minimalité de $d(f(x_0), x_0)$. Donc $f(x_0) = x_0$.
2. Montrons d'abord que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$, remarquons que si $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon, d(x_{n+1}, x_{n+2}) < \epsilon$ puisque la suite décroît : il suffit de montrer qu'il existe $n$ tel que $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon$. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{n+1}) \geq \epsilon$. $F_\varepsilon := X \times X \setminus \{(x,y), d(x,y) < \varepsilon\}$ est un fermé du compact $X \times X$ donc compact. L'application $(x,y) \in F_\varepsilon \mapsto \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)}$ est continue, donc atteint son max $\rho < 1$. On a alors par récurrence immédiate que pour tout $n$, $d(x_n, x_{n+1}) < \rho^n d(x_0, x_1) \to 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
   Par compacité, on extrait de $(x_n)$ une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ qui converge vers $x \in X$. $d(f(x_{\sigma(n)}), x_{\sigma(n)}) \to 0$ donc $f(x_{\sigma(n)}) \to x$. Or, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Ainsi, $x = f(x)$.

---

## Exercice 4 : Applications propres

Soit $X, Y$ deux espaces topologiques séparés et $f : X \to Y$ une application continue. On dit que $f$ est propre si $f$ est fermée (i.e. l'image d'un fermé est un fermé) et si l'image réciproque d'un singleton de $Y$ est un compact de $X$.

1. On suppose que $f$ est propre. Montrer que l'image réciproque de tout compact de $Y$ est un compact.
2. On suppose de plus que $Y$ est localement compact. Montrer que si l'image réciproque d'un compact est compact, alors $f$ est propre. *Indication : on pourra utiliser, voire démontrer, le fait que dans un espace localement compact, tout point possède une base de voisinages compacts.*
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $||f(x)|| \to +\infty$ quand $||x|| \to \infty$.
   a) Montrer que $f$ est propre.
   b) En déduire que $f$ est un homéomorphisme.

**Solution de l'exercice 4**

1. $f^{-1}(K)$ est séparé (car dans $X$). On vérifie donc la propriété de Borel-Lebesgue, ou encore, son équivalent par les fermés : soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermé de $f^{-1}(K)$ tel que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. On veut montrer qu'il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $J \subset I$ fini, $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$. Les parties $F_i$ sont des fermés du fermé $f^{-1}(K)$ (c'est un fermé car $f$ est continue et $K$ fermé car compact dans un séparé), donc si $J \subset I$ est fini, $A_J := f(\bigcap_{i \in J} F_i)$ sont des fermés de $Y$ car $f$ est fermé, et donc de $K$. Et donc, par compacité de $K$, et comme tout intersection finie de $A_J$ est non vide (puisque contient l'image d'une intersection finie de $F_i$) on a nécessairement

$$\bigcap_{J \subset I \text{fini}} A_J \neq \emptyset.$$

On fixe donc $x$ un élément de cette intersection. Donc, pour toute partie finie $J \subset I$,

$$f^{-1}(\{x\}) \cap \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset,$$

car $x \in f(\bigcap_{i\in J} F_i) = A_J$. Or, on sait que $f^{-1}(\{x\})$ est compact. Donc

$$f^{-1}(\{x\}) \cap \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$$

ce qui contredit le fait que l'intersection des $F_i$ est vide.

2. Puisque $Y$ est localement compact, $\{y\}$ est compact : il est fermé (pourquoi ?) dans un compact. Donc $f^{-1}(\{y\})$ est compact. Montrons à présent que $f$ est fermée. Soit $F \subset X$ fermé. On va montrer que $\overline{f(F)} = f(F)$. Soit donc $y \in \overline{f(F)}$. Soit $W$ un voisinage compact de $y$. On sait que $W \cap f(F) \neq \emptyset$. On se donne également une base de voisinages compacts (donc fermés) $V_i$ de $y$ et l'on suppose que $V_i \subset W$. On note $F_i = f^{-1}(V_i) \cap F$. Ce sont des fermés de $f$, inclus dans $f^{-1}(W) \cap F$, qui est compact. Or, pour tout partie finie $J \subset I$, $\bigcap_{j\in J} F_j = f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} V_j \cap f(F)\right) \neq \emptyset$ car $\bigcap_{j\in J} V_j$ est un voisinage de $y$. Mais, alors, par la propriété de Borel-Lebesgue (version avec les fermés et contraposée),

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$$

Il existe donc $x \in W \cap \bigcap_{i\in I} F_i$. Mais alors, $f(x) \in \bigcap_{i\in I} V_i = \{y\}$. Donc $y \in f(F)$, comme voulu !

3. a) Si $B$ est bornée, $f^{-1}(B)$ est bornée. En effet, pour tout $A > 0$, il existe $R > 0$ tel que $||x|| > R \implies ||f(x)|| > A$. Donc si $B \subset B(0, A)$, on a nécessairement $f^{-1}(B) \subset B(0, R)$. Or, les compacts sont les fermés bornés et $f$ est continue, donc l'image réciproque d'un compact est un compact. Cela suffit à la propreté puisque $\mathbb{R}^n$ est localement compact.
   b) Il suffit de montrer que $f^{-1}$ est continue, ou encore que $f$ est fermée. Mais ceci est vrai par la question 2.

---

## Exercice 5 : Compactification d'Alexandrov

Soit $X$ un espace topologique localement compact (i.e. séparé et tel que tout point possède un voisinage compact). On fixe $\infty$ un point (qui n'est pas dans $X$) et on pose $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. On dit que $U \subset \hat{X}$ est ouvert si $U$ vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- $U \subset X$ et $U$ est un ouvert de $X$
- $\infty \in U$ et $\hat{X} \setminus U$ est un compact de $X$

1. Montrer que cela définit une topologie sur $X$.
2. Montrer que $\hat{X}$ est compact.
3. Montrer $\iota : X \to \hat{X}; x \mapsto x$ est un homéomorphisme sur son image.
4. Soit $Y$ un espace topologique compact tel qu'il existe $j : X \to Y$ homéomorphisme sur son image tel que $Y \setminus j(X)$ est réduit à un point. Montrer que $Y$ est homéomorphe à $\hat{X}$.

5. **Un exemple.** On considère $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et on note $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle Nord. On appelle projection stéréographique l'application qui a un point $X \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ lui associe l'unique point d'intersection de la droite $(NX)$ avec le plan $\{x_n = -1\}$. En utilisant la projection stéréographique, montrer que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est (homéomorphe à) $\mathbb{S}^n$.

### Solution de l'exercice 5

Remarquons d'abord (on s'en servira dans plusieurs questions) qu'avec cette définition des ouverts de $\hat{X}$, tout ouvert $U$ de $\hat{X}$ est tel que $U \cap X$ est ouvert dans $X$ (si $U$ vérifie 1., c'est évident ; si $U$ vérifie 2., $U \cap X = X - (\hat{X} - U)$ donc $U$ est le complémentaire d'un sous-ensemble fermé de $X$).

1. Les ensembles $\emptyset$ et $\hat{X}$ vérifient respectivement les propriétés 1 et 2 ; ce sont donc des ouverts.
   Si $U_1$ et $U_2$ sont ouverts, alors :
   - si $U_1, U_2 \subset X$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$ et $U_1 \cap U_2$ est une intersection finie d'ouverts de $X$, donc un ouvert de $X$ ; alors $U_1 \cap U_2$ est un ouvert de $X$.
   - si $U_1 \subset X$ et $\infty \in U_2$, alors $U_1 \cap U_2 \subset X$. Alors $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (X \cap U_2)$ est un ouvert. Donc $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 1 et est un ouvert.
   - si $\infty \in U_1$ et $U_2 \subset X$, même raisonnement que dans le cas précédent.
   - si $\infty \in U_1$ et $\infty \in U_2$, on a $\infty \in U_1 \cap U_2$ et $\hat{X} - (U_1 \cap U_2) = (\hat{X} - U_1) \cup (\hat{X} - U_2)$. Dans un espace séparé (et c'est le cas ici car $X$ est localement compact donc séparé), une union de 2 compacts est un compact. Donc $\hat{X} - (U_1 \cap U_2)$ est un compact et $U_1 \cap U_2$ vérifie la propriété 2 donc est un ouvert.

   Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $\hat{X}$, montrons que $\bigcup\limits_i U_i$ est aussi un ouvert.
   - si $\infty \notin U_i$ pour tout $i$, alors $\bigcup\limits_i U_i \subset X$ est est une union d'ouverts de $X$, donc un ouvert de $X$. Donc $\bigcup\limits_i U_i$ est un ouvert de $\hat{X}$.
   - s'il existe $i_0$ tel que $\infty \in U_{i_0}$, alors $\infty \in \bigcup\limits_i U_i$. De plus :

   $$\begin{aligned}\hat{X} - \bigcup_i U_i &= \bigcap_i (\hat{X} - U_i)\\ &= \bigcap_i (X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0})\end{aligned}$$

     L'ensemble $(\hat{X} - U_i) \cap X$ est un fermé pour tout $i$. L'ensemble $(X - X \cap U_i) \cap (\hat{X} - U_{i_0})$ est donc, pour tout $i$, un fermé du compact $\hat{X} - U_{i_0}$. Une intersection de fermés étant fermée, $\hat{X} - \bigcup\limits_i U_i$ est un sous-ensemble fermé d'un compact ; c'est un compact. Donc $\bigcup\limits_i U_i$ vérifie la propriété 2 et est ouvert.

2. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\hat{X}$ dont l'union est $\hat{X}$. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini.
   Puisque $\infty \in \bigcup\limits_i U_i$, il existe $i_0$ tel que $\infty \in U_{i_0}$. L'ensemble $\hat{X} - U_{i_0}$ est un compact de $X$, qui est inclus dans l'union des $(X \cap U_i)$.
   Pour tout $i$, $X \cap U_i$ est un ouvert de $X$. Il existe donc $i_1, ..., i_s$ un nombre fini d'indices tels que :
   $$\hat{X} - U_{i_0} \subset (X \cap U_{i_1}) \cup ... \cup (X \cap U_{i_s})$$
   Pour ce choix d'indices, on a :
   $$\hat{X} \subset U_{i_0} \cup ... \cup U_{i_s}$$

Si on montre que $\hat{X}$ est séparé, on aura donc montré que $X$ est compact. Deux points disjoints $x, y \in X \subset \hat{X}$ sont séparés par des ouverts disjoints de $\hat{X}$ car ils sont séparés par des ouverts disjoints de $X$.
Traitons le cas où $x = \infty$ et $y \neq \infty$. Puisque $X$ est localement compact, $y$ admet un voisinage compact $V$. Alors $U = \hat{X} - V$ et $\mathring{V}$ sont des ouverts disjoints dont l'un contient $x$ et l'autre $y$.

3. L'application $i$ est bijective vers son image. Elle est continue. En effet, si $U$ est un ouvert de $\hat{X}$, $i^{-1}(U) = X \cap U$ est un ouvert de $X$.
La réciproque $i^{-1} : i(X) \to X$ est aussi continue : si $V$ est un ouvert de $i(X) = X \subset \hat{X}$, il existe $U$ un ouvert de $\hat{X}$ tel que $V = X \cap U$. Donc $V = i^{-1}(V)$ est un ouvert de $X$.
4. On a vu que $\hat{X}$ vérifiait ces propriétés. Supposons maintenant que $Y$ vérifie également ces propriétés et montrons que $\hat{X}$ et $Y$ sont homéomorphes.
Notons $j : X \to Y$ l'application vérifiant la propriété 2 et notons $\infty_Y$ l'unique point de $Y - j(X)$.
On définit une application $\phi : Y \to \hat{X}$ par :
$$\begin{aligned} \phi(j(x)) &= i(x) \text{ si } x \in X \\ \phi(\infty_Y) &= \infty \end{aligned}$$
Il s'agit d'une bijection. Montrons qu'il s'agit d'une application continue.
Soit $U$ un ouvert de $\hat{X}$. Montrons que $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert de $Y$.
   - Premier cas : $U \subset X$. Dans ce cas, $\phi^{-1}(U) = j(U)$. Puisque $j$ est un homéomorphisme sur son image, $j(U)$ est un ouvert de $j(X)$. L'ensemble $j(X)$ est lui-même un ouvert de $Y$ (car il est égal à $Y$ privé d'un point et, dans un espace séparé, les singletons sont fermés). Un ouvert d'un ouvert étant un ouvert, $j(U)$ est ouvert dans $Y$.
   - Deuxième cas, $\infty \in U$ et $\hat{X} - U$ est un compact de $X$. Alors $\phi^{-1}(\hat{X} - U) = j(\hat{X} - U)$ donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est l'image d'un compact par une application continue, $j$. Donc $j(\hat{X} - U)$ est un compact de $j(X)$, puis de $Y$. Un sous-ensemble compact d'un espace séparé est nécessairement fermé donc $\phi^{-1}(\hat{X} - U)$ est un fermé. Puisque $\phi^{-1}(U)$ est son complémentaire, $\phi^{-1}(U)$ est ouvert.

   Nous avons donc montré que $\phi$ était une bijection continue. Puisque $X$ et $Y$ sont compacts, $\phi$ est un homéomorphisme.
5. On identifie $\mathbb{R}^n$ avec le plan $\{x_{n+1} = -1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on vérifie aisément que la projection stéréographique réalise un homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. On utilise alors la question précédente : $Y = \mathbb{S}^n$ satisfait les hypothèses.

---

***Pour aller plus loin***

## Exercice 6 : Dimension métrique

Soit $(X,d)$ un espace métrique. On dit que $(X,d)$ est précompact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$. On notera alors $N(\epsilon)$ le plus petit $n$ qui convient.

1. (Re)démontrer qu'un espace métrique compact (au sens de Bolzano-Weierstrass) est précompact.

   Dans toute la suite, $(X,d)$ désigne un espace métrique précompact.

2. On note également $P(\epsilon) = \max\{n \in \mathbb{N}; \exists x_1, \ldots, x_n \in X, \forall i \neq j, d(x_i, x_j) > \epsilon\}$. Montrer que :
$$N(\epsilon) \leq P(\epsilon) \leq N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

3. On dit que $(X,d)$ possède une dimension métrique (ou de boîte), si la limite suivante existe :
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)}$$
   Dans ce cas, on note $\dim_B(X)$ cette limite, appelée dimension métrique de $X$. Montrer que les ensembles suivants possèdent une dimension de boîte et la calculer.
   a) La boule unité de $\mathbb{R}^n$ (on pourra utiliser la mesure de Lebesgue).
   b) L'ensemble triadique de Cantor.
   c) Si $\alpha > 0$, $\{0\} \cap \{n^{-\alpha}; n \in \mathbb{N}^*\}$.

**Solution de l'exercice 6**

(Référence : Quéffelec, Topologie 4ème édition)

1. (cf. cours plus tard)
2. Si $N = P(\epsilon)$, on fixe $x_1, \ldots, x_N$ tels que $d(x_i, x_j) > \epsilon$. Par maximalité, si $x \in X$, il existe $i$ tel que $d(x, x_i) \leq \epsilon$ et donc $X \subset \bigcup_i B(x_i, \epsilon)$ donc $N(\epsilon) \leq N$.
   Soient $N = N\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ et $x_1, \ldots, x_N$ tels que $X \subset \bigcup B(x_i, \epsilon/2)$. Si $z_1, \ldots, z_p$ satisfont $d(z_i, z_j) > \epsilon$ si $i \neq j$, deux $z_i$ distincs sont dans deux boules distinctes : il y en a donc au plus $N$, d'où $P(\epsilon) \leq N$.
3. a) Soit $\epsilon > 0$. Si $N(\epsilon)$ boules de taille $\epsilon$ recouvrent $B(0,1)$, alors
$$\lambda(B(0,1)) \leq N(\epsilon)\lambda(B(0,\epsilon)) = N(\epsilon)\lambda(B(0,1))\epsilon^n$$
   donc
$$\frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \geq n$$
   Pour le sens réciproque, on inclut $B(0,1)$ dans l'hypercube $[-1,1]^n$. En outre, l'hypercube $[-a,a]^n$ est inclus dans une boule $B(0, b_n)$ avec $b_n = \sqrt{n}$. Or, par un

découpage en petits cubes,$[-1,1]^n$ est inclus dans la réunion de $C(\epsilon)$ cubes de taille $\frac{\epsilon}{b_n}$ avec $C(\epsilon) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\epsilon}+1\right)^n$ donc de $C(\epsilon)$ boules de rayon $\epsilon$. Ainsi, $N(\epsilon) \leq C(\epsilon)$ et

$$n \leq \frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \leq n\frac{\log(b_n/\epsilon+1)}{-\log(\epsilon)}$$

On a donc $\frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \to n$. Donc la boule unité est de dimension boîte $n$ (ouf! ).

b) Soit $\epsilon > 0$. Soit $n = n_\epsilon$ l'unique entier tel que $\frac{1}{3^{n+1}} \leq \epsilon < \frac{1}{3^n}$. On a $n_\epsilon \sim -\frac{\log \epsilon}{\log 3}$. On peut inclure $K \subset K_{n+1}$ qui est réunion de $2^{n+1}$ intervalles de taille $\frac{1}{3^{n+1}}$ donc $N(\epsilon) \leq 2^{n\epsilon+1}$ d'où

$$\frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \leq \log(2)(n_\epsilon+1) \sim \frac{\log 2}{\log 3}$$

Si $N(\epsilon)$ intervalles de taille $\epsilon$ recouvrent $K$ $K$ et si $I, J \in \mathcal{I}_n$ (notation de l'exercice sur le Cantor), $d(I,J) \geq (1/3^n)$ donc pour recouvrir $K$, il faut au moins un intervalle par intervalle de $\mathcal{I}_n$. Ainsi, $N(\epsilon) \geq 2^{n_\epsilon}$. On conclut donc que

$$\frac{\log(N(\epsilon))}{-\log(\epsilon)} \to \frac{\log 2}{\log 3}$$

c) On pose $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n+1)^\alpha}\right)$, qui vérifie $u_n \sim \frac{\alpha}{2}n^{-(\alpha+1)}$. Soit $\epsilon > 0$. On note $n_\epsilon$ l'unique entier tel que $u_{n+1} \leq \epsilon < u_n$ (qui existe car $(u_n)$ est strictement décroissante et tend vers 0). On vérifie sans mal que $\log(n_\epsilon) \sim \frac{-\log\epsilon}{\alpha+1}$. Si $x \in \{1, \dots, \frac{1}{n^\alpha}\}$, tout intervalle de taille $\epsilon$ qui contient $x$ ne peut contenir aucun autre point de $X$ donc $N(\epsilon) \geq n$. Par ailleurs, on peut recouvrir $X$ par :

- Les intervalles centrés en $x \in \{1, \dots, \frac{1}{n_\epsilon^\alpha}\}$ de taille $\epsilon$ : il y en a $n_\epsilon$
- $C(\epsilon)$ intervalles de taille $\epsilon$ qui permettent de recouvrir $[0, \frac{1}{(n_\epsilon+1)^\alpha}]$ : on peut prendre $C(\epsilon) \sim \frac{1}{(n_\epsilon+1)^\alpha}/\epsilon$

Or, puisque $\epsilon > u_{n_\epsilon}$, $C(\epsilon) = O(\frac{n_\epsilon^{\alpha+1}}{(n_\epsilon)^\alpha}) = O(n_\epsilon)$. Ainsi, $N(\epsilon) \leq Cn_\epsilon$ pour une certaine constante $C$. Par suite,

$$\log(N(\epsilon)) \sim \log(n_\epsilon) \sim \frac{-\log\epsilon}{\alpha+1}$$

Donc la dimension boîte de $X$ existe et vaut : $\frac{1}{\alpha+1}$

---

## Exercice 7 : Retour sur la distance de Hausdorff

On considère un espace métrique compact $(X,d)$. A l'image du TD 1, on peut définir une distance $\delta$ sur l'ensemble des parties compactes de $X$, ensemble que l'on note $\mathcal{K}(X)$. On admet que les deux définitions suivantes de $\delta$ définissent effectivement une distance et sont équivalentes : $\delta(A,B) = ||d_A - d_B||_\infty$ où $d_A(y) = \inf_{x\in X} d(x,y)$ est la distance à $A$ ; et $\delta(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0, A \subset V_\varepsilon(B) \text{ et } B \subset V_\varepsilon(A)\}$ où $V_\varepsilon(A) = \{x \in X, d(x,A) \leq \varepsilon\}$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que $(\mathcal{K}(X), \delta)$ est compact.

1. *Préliminaires.*

   a) Montrer que $X$ est à base dénombrable d'ouverts. On note $(U_m)_{m\in N}$ une telle base.

b) Soit $(K_n)$ une suite de $\mathcal{K}(X)$ qui converge vers $K$ et soit $(x_n)$ une suite de $X$ telle que $x_n \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \to x$. Montrer que $x \in K$.
Dans la suite, on considère une suite quelconque $(K_n)$ de $\mathcal{K}(X)$ et on souhaite montrer qu'on peut en extraire une sous-suite convergente.

2. a) Soit $U$ un ouvert de $X$. Montrer qu'on peut extraire de $(K_n)_n$ une sous-suite $(K_{\sigma(n)})_n$ tel que soit $\forall n, K_{\sigma(n)} \cap U = \emptyset$ soit $\forall n, K_{\sigma(n)} \cap U \neq \emptyset$.
   b) En déduire qu'il existe une extraction $\phi$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $K_{\phi(n)} \cap U_m = \emptyset$ à partir d'un certain rang, soit $\forall n, K_{\phi(n)} \cap U_m \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang.
   Dès lors, on note $L_n = K_{\phi(n)}$ et $L$ l'ensemble des points $x \in X$ tel que pour tout voisinage $V$ de $x$, $L \cap L_n \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang :

$$L \coloneqq \{x \in X; \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0; V \cap L_n \neq \emptyset\}$$

3. Montrer que $L$ est compact.
4. On souhaite finalement montrer que $L_n \to L$ dans $(\mathcal{K}(X), \delta)$. On fixe $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe une famille finie $(U_i)_{i\in I}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ finie telle que :
   - $\forall i \in I, U_i \cap L \neq \emptyset$
   - $\forall i \in I, \mathrm{diam} U_i \leq \varepsilon$
   - $L \subset \bigcup_{i\in I} U_i \subset V_\varepsilon(L)$

   On note $U = \bigcup_{i\in I} U_i$.
   b) En déduire que pour tout $i \in I$ $U_i \cap L_n \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang puis que $U \subset V_\varepsilon(L_n)$ à partir d'un certain rang.
   c) Montrer qu'il existe $0 < r < \varepsilon$ et $J \subset \mathbb{N}$ finie tels que $X \setminus U \subset \bigcup_{j\in J} U_j \subset X \setminus V_r(L)$

   d) Montrer que $L_n \subset U$ à partir d'un certain rang.
   e) Conclure.

### Solution de l'exercice 7

1. a) Un espace métrique compact est séparable (utiliser le précompacité si vous voulez le (re)démontrer). On a déjà vu qu'un espace métrique séparable est à base dénombrable d'ouverts dans un TD précédent.
   b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\delta(K_n, K) \to 0$, $K_n \subset V_\varepsilon(K)$ pour $n$ assez grand. En particulier, $x_n \in V_\varepsilon(K)$ pour $n$ assez grand. Puisque $V_\varepsilon(K)$ est fermé, on en déduit que $x \in V_\varepsilon(K)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $x \in K = \bigcap_{\varepsilon>0} V_\varepsilon(K)$.
2. a) Il suffit de distinguer deux cas :
   - A partir d'un certain rang, $K_n \cap U = \emptyset$, auquel cas on peut clairement extraire une sous-suite telle que $K_{\sigma(n)} \cap U = \emptyset$
   - Dans le cas contraire, cela signifie que l'ensemble des $n$ tel que $K_n \cap U \neq \emptyset$ est non majoré et on peut clairement extraire une sous-suite telle que $K_{\sigma(n)} \cap U \neq \emptyset$

   b) Il suffit dès lors d'employer un procédé d'extraction diagonale.
3. Puisque $L \subset X$ et que $X$ est compact, il suffit de montrer que $L$ est fermé, ou de façon équivalente que son complémentaire est ouvert. Or, si $x \in X \setminus L$, il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $V \cap L_n = \emptyset$ pour une infinité de $n$. Mais alors, tout $y \in V$ possède $V$ comme voisinage qui l'empêche d'appartenir à $L$ i.e. $V \subset X \setminus L$. $X \setminus L$ est donc ouvert puisque c'est un voisinage de chacun de ses points.

4. a) Soit $x \in L$. On peut écrire la boule $B(x, \varepsilon)$ comme réunion d'ensemble $U_n$ et il existe donc $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{diam} U_{n_x} \leq \varepsilon$ et $x \in U_{n_x}$. En particulier, les $U_{n_x}$ intersecte $L$ et $U_{n_x} \subset V_\varepsilon(L)$. Puisque $L$ est compact et que $L \subset \bigcup_{x \in L} U_{n_x}$, on peut en extraire une famille finie qui convient.

   b) Puisque $U_i \cap L \neq \emptyset$, $U_i$ est un voisinage d'un point $x \in L$. Donc, par définition de $L$, $U_i \cap L_n \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang. Par suite, comme $U_i \cap L_n$ et que $U_i$ est de diamètre plus petit que $\varepsilon$, on a que $U_i \subset V_\varepsilon(L_n)$ et donc $U \subset V_\varepsilon(L_n)$ si $n$ est assez grand.

   c) Puisque $L$ est compact et $U$ ouvert, $d(L, U^c) > 0$. Il existe donc $r > 0$ tel que $V_r(L) \subset U$. On peut supposer $r < \varepsilon$ quitte à le prendre plus petit.
   Si $x \in X \setminus U$, il existe un ouvert $U_{m_x}$ de la base d'ouvert tel que $x \in U_{m_x}$ et $U_{m_x} \subset X \setminus V_r(L)$ puisque ce dernier ensemble est ouvert (il suffit de prendre $U_{m_x}$ de diamètre suffisamment petit). Enfin, $X \setminus U$ est fermé donc compact et on peut extraire du recouvrement $(U_{m_x})_{x \in X \setminus U}$ un sous-recouvrement finie, qui convient.

   d) Supposons le contraire. Pour une infinité de $n$, on a donc l'existence de $x_n \in L_n \setminus U$. Ainsi, comme $X \setminus U \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ et que $J$ est fini, il existe $j \in J$ tel que $U_j \cap L_n \neq \emptyset$ pour une infinité de $n$. En particulier, au vu de la définition de l'extraction $(L_n)$, on a nécessairement que $U_j \cap L_n \neq \emptyset$ pour tout $n$ assez grand.
   On se donne alors une suite $(x_n) \in L_n \cap U_j$. On en extrait une sous-suite $(x_{\sigma(n)})$ qui converge vers un élément $x \in X$. Puisque $U_j \subset X \setminus V_r(L)$, on a $x \in X \setminus L$.
   Il existe donc $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap L_n = \emptyset$ pour une infinité de $n$. En utilisant le fait que $(U_n)$ est une base d'ouverts, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_m \subset V$. Puisque $V \cap L_n = \emptyset$ pour une infinité de $n$, cela vaut aussi pour $U_m$ et par la définition de l'extraction, on voit que $L_n \cap U_m = \emptyset$ à partir d'un certain rang. Or, $U_m$ est un voisinage de $x$ et $x_n \in L_n$. En particulier, pour $n$ assez grand $x_{\sigma(n)} \in U_m$. Ceci fournit une contradiction.

   e) On a donc, pour $n$ assez grand, $L \subset U \subset V_\varepsilon(L_n)$ et $L_n \subset U \subset V_\varepsilon(L)$, donc $\delta(L, L_n) \leq \varepsilon$ pour $n$ assez grand. Ceci prouve la convergence de $(L_n)$ vers $L$. Et donc on a pu extraire de $(K_n)$ une sous-suite convergente. Ceci démontre la compacité de $(\mathcal{K}(X), \delta)$.

---

## Exercice 8 : Être ou ne pas être compact ou séquentiellement compact.

On rappelle qu'un espace topologique est dit séquentiellement compact si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge.

1. Soit $I = [0, 1]$ muni de la topologie usuelle et $X = I^I$ muni de la topologie produit.
   a) Justifier que $X$ est compact.
   b) On définit $a_n : I \to I$ par $a_n(x) =$ le $n$-ième chiffre dans l'écriture en base 2 de $x$. Montrer que l'on ne peut pas extraire de $(a_n)$ une sous-suite qui converge.

2. *[Pour celles et ceux qui suivent le cours de Logique]* On note $\Omega$ le premier ordinal non dénombrable (à savoir $\Omega = \{\alpha; \alpha \text{ ordinal dénombrable }\}$). On muni $\Omega$ de la topologie de l'ordre (cf. TD 2).
   a) En considérant le recouvrement $U_\alpha := \{\beta \in \Omega; \beta < \alpha\}$, montrer que $\Omega$ n'est pas compact. On rappelle que $\Omega$ est non dénombrable.
   b) Montrer que $\Omega$ est séquentiellement compact. *Indication : On pourra montrer que toute suite possède une sous-suite monotone.*

**Solution de l'exercice 8**

1. a) C'est une conséquence immédiate du théorème de Tychonoff.
   b) Supposons qu'on puisse en extraire une sous-suite $a_{n_k}$ qui converge vers $a \in X$. Soit $p \in I$ tel que $a_{n_k}(p) = 0$ si $k$ est pair, et 1 si $k$ impair (il en existe). Alors $a_{n_k}(p)$ ne converge pas, alors qu'elle devrait converger vers $a(p)$.
2. (Non corrigée).

---

## Exercice 9 : Théorème de Tychonoff

Faire le DM 2. Si vous voulez qu'il soit corrigé, à rendre la semaine du 21 Octobre.