Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 `laslier@dma.ens.fr`

TD4 : Théorèmes de convergence et calcul d'intégrales

Exercice 1. [Début en douceur] Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Grâce au théorème de convergence monotone, montrer que si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu$.
2. Grâce au théorème de convergence dominé, montrer que si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, on a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu.$$
3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telle que $f_n \to f$ μ-p.p. On suppose que $\sup_{n\geq 1} \int_E |f_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Montrer que f est intégrable.

Exercice 3. [Théorème d'Egoroff] Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que
$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq n} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}\Big) \leq \eta\ .$$
2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \epsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $E \backslash A$.
3. Que se passe-t-il lorsque $\mu(E) = \infty$?

Exercice 4. [Fonction Γ] Soit Γ la fonction définie par $t \in (0, +\infty) \mapsto \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$. Grâces aux fonctions définies par $f_n : x \in \ (0, +\infty) \ \mapsto \mathbb{1}_{\{(0,n)\}}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}$, montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$, $\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}$.

Exercice 5. [Ensemble de Cantor] Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ et soit $K_0 := [0, 1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant de chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de l'intervalle en question et de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \cap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.

Exercice 6. [Mesure atomique] Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, on a $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$.

1. Donner un exemple de mesure possédant des atomes.
2. Montrer que la mesure de Lebesgue n'a pas d'atomes.
3. Donner un exemple de mesure possédant des atomes qui ne sont pas des singletons.

Une mesure est appelée purement atomique s'il existe une collection $\mathcal{C}$ d'atomes de μ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a $\mu(A) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mu(A \cap C)$.

4. Montrer qu'une mesure sur un ensemble dénombrable muni de la tribu des parties est purement atomique.

Une mesure est appelée diffuse si elle n'a pas d'atome.

5. ($\star$) Montrer que si μ est diffuse et que $\mu(X) = 1$, alors l'image de $\mathcal{F}$ par μ est $[0, 1]$. On pourra commencer par montrer que si $\mu(A) > 0$, il existe $B \subset A$ mesurable tel que $\mu(A)/3 \leq \mu(B) \leq 2\mu(A)/3$.
6. Nous allons maintenant montrer que toute mesure finie se décompose en une mesure atomique et une mesure diffuse. On suppose $\mu(X) < \infty$.
   (a) Si A et B sont deux atomes de μ, on pose $A \equiv B$ si $\mu(A \cap B) = \mu(A)$. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atomes de μ.
   (b) Montrer que si A et B sont deux atomes dans des classes d'équivalences différentes, alors $\mu(A \cap B) = 0$.
   (c) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une collection d'atomes contenant exactement un représentant de chaque classe d'équivalence pour $\equiv$. Montrer que la mesure définie par
   $$\nu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap C_i),$$
   est une mesure purement atomique, et que $\mu = \nu + \rho$ avec ρ une mesure sans atomes.

Exercice 7. [Escalier du diable] On considère $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par :

— Pour $x \in [0, 1]$, $F_0(x) = x$;

— La fonction F_1 est la fonction qui envoie $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ sur $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ respectivement, et qui est affine entre chacun de ces points ;

— De même on passe de F_n à F_{n+1} en remplaçant F_n sur chacun des intervalles maximaux $[a, b]$ où elle est affine par la fonction qui envoie $a, (2a+b)/3, (a+2b)/3, b$ sur $F(a), (F(a)+F(b))/2, (F(a)+F(b))/2, F(b)$ respectivement et qui est affine entre chacun de ces points.

1. Montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[0, 1]$. On appelle F la limite. Montrer que F est continue sur $[0, 1]$ et croît de 0 à 1.
2. Montrer que F est dérivable presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue) et que sa dérivée est identiquement nulle.
3. Soit μ la mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont F est la fonction de répartition. Montrer que μ est à la fois diffuse et portée par un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 8. Trouver $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ mais $A + B = \mathbb{R}$.