Paul Wang
Bureau T13 (Toits du DMA)
paul.wang@math.ens.psl.eu
2024-2025

Corrigé du TD de Logique, feuille 2

Exercice 1 (Quelques plongements) **:**

1. Par dualité de Stone, ou bien par la dernière question de l'exercice 3 du TD 1, il existe un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{A} \simeq (OF(Spec\,\mathbb{A}), \Delta, \cap)$. Il suffit alors de composer cet isomorphisme avec le plongement $(OF(Spec\,\mathbb{A}), \Delta, \cap) \hookrightarrow (\mathcal{P}(Spec\,\mathbb{A}), \Delta, \cap) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{Spec\,\mathbb{A}}$.

2. Soit I l'ensemble des ouverts-fermés de l'espace X. Soit $f : X \to 2^I$ définie par $f(x) = (\mathbf{1}_{x\in O})_{O\in I}$. La fonction f est continue, car l'image réciproque d'un cylindre est une intersection finie d'ouverts-fermés, qui est un ouvert-fermé. De plus, l'image par f d'un ouvert-fermé de X est l'intersection avec Imf d'un cylindre, qui est un ouvert de 2^I. Donc, l'image par f d'un ouvert de X est l'intersection avec Imf d'un ouvert de 2^I, car tout ouvert de X est union d'ouverts-fermés.

   Montrons alors l'injectivité de f. Soient $x \neq y$ des éléments de x. Alors, comme X est séparé, il existe des ouverts U, V disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Comme les ouverts sont unions d'ouverts-fermés, quitte à prendre un U plus petit, on peut supposer que U est un ouvert-fermé. Alors, $f(x)(U) = 1$ et $f(y)(U) = 0$. Donc $f(x) \neq f(y)$, d'où l'injectivité de f.

   Nous aurions également pu utiliser les résultats suivants :

   Théorème(Théorème de Tychonoff)

   Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact, pour la topologie produit.

   En particulier, l'espace 2^I est compact.

   Proposition Soit X un espace topologique compact, et $F \subseteq X$ un fermé. Alors, pour la topologie induite, l'espace F est compact.

   Proposition Soit X un espace topologique séparé, et $C \subseteq X$ tel que, pour la topologie induite, l'espace C est compact. Alors, C est fermé dans X.

   Proposition Soient X, Y des espaces compacts, et $f : X \to Y$ continue. Alors, l'image directe par f de tout fermé de X est un fermé de Y.

Exercice 2 (Un exemple d'espace de Stone) **:**

1. Comme U n'est pas principal, aucun singleton n'appartient à U. Comme U est un ultrafiltre, on en déduit que tous les complémentaires de singletons sont dans U. On conclut par stabilité de U par intersections finies.

2. a) Soit I un intervalle borné appartenant à U. Alors, pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on considère une partition de I en n intervalles de même longueur. Comme U est un ultrafiltre, et que $I \in U$, l'un des intervalles de la partition est également dans U. Comme n est arbitraire, on a bien démontré le résultat voulu.

   b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que l'intervalle $]a, a+\varepsilon[$ est dans U. Par définition de a, on a $]a+\varepsilon, a+\varepsilon+1[\notin U$. Donc, comme U est un ultrafiltre, l'intervalle $]a, a+1[\setminus]a+\varepsilon, a+\varepsilon+1[=]a, a+\varepsilon]$ est dans U. Par la question 1, on en déduit que $]a, a+\varepsilon[$ est dans U, comme souhaité.

   Montrons alors l'égalité demandée. Notons $a^+ = \{X \in \mathbb{A}_\mathbb{R} \mid \exists\, \varepsilon > 0\ ]a, a+\varepsilon[\subseteq X\}$. On commence par constater que a^+ est un filtre. De plus, on a montré plus haut que $V \subseteq U$. Il suffit donc de montrer que a^+ est un ultrafiltre, pour conclure que $a^+ = U$. Soient $X, Y \in \mathbb{A}_\mathbb{R}$ tels que $X \cup Y \in a^+$. Montrons que $X \in a^+$ ou $Y \in a^+$. On écrit $X = \bigcup_i X_i$, et $Y = \bigcup_j Y_j$, où les X_i et Y_j sont des intervalles, qu'on peut supposer bornés. Soient alors α_i, β_i les bornes de X_i, et γ_j, δ_j celles de Y_j.

On sait qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a, a+\varepsilon[\subseteq X \cup Y$. Quitte à prendre ε assez petit, on peut omettre les intervalles X_i pour lesquels $\alpha_i > a$ ou $\beta_i \leqslant a$, ainsi que les intervalles Y_j pour lesquels $\gamma_j > a$ ou $\delta_j \leqslant a$, car ceux-ci sont alors disjoints de $]a, a+\varepsilon[$. Alors, n'importe lequel des intervalles restants, X_i ou Y_j, contient un intervalle $]a, a+\varepsilon_1[$, pour $\varepsilon_1 > 0$ suffisamment petit. Donc $X \in a^+$ ou $Y \in a^+$.

Preuve alternative : Montrons que, si une union finie d'intervalles est dans a^+, alors l'un de ces intervalles est dans a^+. On utilise le fait suivant : "Pour toute union finie d'intervalles $\bigcup_{i<n} X_i$, il existe des intervalles I_k, $k < m$, deux à deux disjoints, tels que chacun des I_k est inclus dans l'un des X_i, et $\bigcup_{k<m} I_k = \bigcup_{i<n} X_i$". Attention, lesdits intervalles ne sont pas nécessairement les composantes connexes de l'union. Ce fait se démontre par récurrence sur n. En effet, pour l'hérédité, on considère $X_n \setminus \bigcup_{i<n} X_i$, qui est une union finie d'intervalles. C'est donc une union finie d'intervalles deux à deux disjoints, inclus dans X_n. Il suffit alors d'ajouter ces intervalles à la famille obtenue pour $\bigcup_{i<n} X_i$.

Le fait permet de se restreindre au cas où une union *disjointe* d'intervalles est dans a^+. En effet, en appliquant le fait à une union quelconque, si l'on trouve un intervalle de l'union disjointe qui est dans a^+, comme a^+ est un filtre, n'importe quel intervalle le contenant est dans a^+. Le cas d'une union disjointe se traite ensuite à la main.

Preuve alternative 2 : Par l'absurde, soit $X \in U \setminus a^+$. Comme U est un ultrafiltre, et X une union finie d'intervalles, on peut supposer que X est un intervalle. Quitte à l'intersecter avec $]a, a+1[\in U$, on peut supposer que $X \subseteq]a, a+1[$. Or, $X \notin a^+$, donc la borne inférieure de X est strictement plus grande que a. On en déduit une contradiction, car alors la partie vide est dans U, par stabilité de U par intersections finies.

c) Soit $\varepsilon > 0$, montrons que l'intervalle $]a-\varepsilon, a[$ est dans U. Par définition de a, il existe $x \in]a-\varepsilon, a[$ tel que $]x, x+1[\in U$. Comme U est un ultrafiltre, et $]a, a+1[\notin U$, l'intervalle $]x, x+1[\setminus]a, a+1[=]x, a]$ est dans U. Donc $]x, a[\in U$, or $a-\varepsilon < x < a$, d'où $]a-\varepsilon, a[\in U$, comme voulu.

Pour démontrer l'égalité, on raisonne comme pour la question précédente, en vérifiant que l'ensemble $\{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}} \mid \exists\, \varepsilon > 0\ ]a-\varepsilon, a[\subseteq X\}$ est un ultrafiltre.

Alternativement, on peut raisonner par symétrie, en considérant la permutation $x \mapsto -x$, qui induit un automorphisme de l'algèbre de Boole $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, et donc un automorphisme de $S(\mathbb{R})$.

3. Comme U ne contient pas d'intervalle borné, et que c'est un ultrafiltre, on sait que, pour tout $b > 0$, l'ensemble $]-\infty, -b[\cup]b, +\infty[$ est dans U. Comme on a supposé $]-\infty, 0[\in U$, on conclut par stabilité de U par intersections finies que $]-\infty, -b[\in U$.

   Notons $V = \{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}} \mid X \text{ n'est pas minorée}\}$. Comme les éléments de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ sont des unions finies d'intervalles, on vérifie par disjonction de cas que V est un filtre. De plus, comme une union finie de parties minorées de $\mathbb{R}$ est minorée, on déduit que V est un ultrafiltre. Comme on a montré que $V \subseteq U$, on a l'égalité.

4. On commence par se convaincre que, si U ne contient pas d'intervalle borné et $]-\infty, 0[\notin U$, alors $]0, +\infty \in U$, et un raisonnement symétrique à celui de la question précédente entraîne que U est l'ensemble des unions finies d'intervalles qui sont non majorées. On peut donc terminer la classification des éléments de $S(\mathbb{R})$: en plus des ultrafiltres principaux, en bijection avec les nombres réels, il y a les ultrafiltres a^- et a^+, pour $a \in \mathbb{R}$, ainsi que les deux ultrafiltres décrits précédemment, qu'on peut noter $-\infty$ et $+\infty$.

5. Un ultrafiltre $\mathcal{V}$ est principal si et seulement s'il existe $X_0 \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ tel que $\mathcal{V} = \{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}} \mid X_0 \subseteq X\}$. Montrons que cela équivaut à ce que $\mathcal{V}$ soit un point isolé. Si le filtre engendré par X_0 est égal à l'ultrafiltre $\mathcal{V}$, alors tout filtre contenant X_0 est égal à $\mathcal{V}$, donc l'ouvert fermé défini par X_0 est égal à $\{\mathcal{V}\}$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{V}$ est isolé par l'ouvert-fermé défini par X_0. Autrement dit, $\mathcal{V}$ est le seul *ultrafiltre* contenant X_0. Montrons alors que le filtre $\mathcal{F}$ engendré par X_0 est égal à l'ultrafiltre $\mathcal{V}$. Par l'absurde, soit $X \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{F}$. Alors, on a $X \wedge X_0 < X_0$, donc $\neg X \wedge X_0 \neq \bot$, car $X_0 = (\neg X \wedge X_0) \vee (X \wedge X_0)$. Il existe donc un ultrafiltre $\mathcal{V}'$ contenant $\neg X \wedge X_0$. Un tel ultrafiltre contient X_0, et $\neg X$. Or, par hypothèse, on a alors $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$, ce qui contredit le fait que $X \in \mathcal{V}$.

6. On rappelle que, par définition de la topologie d'un espace d'ultrafiltres, les parties de $S(\mathbb{R})$ de la forme $\{U \in S(\mathbb{R}) \mid X \in U\}$, pour $X \in a^+$, forment une base de voisinages de a^+. De plus, par la description de a^+ obtenue plus haut, on peut se restreindre aux cas où $X =]a, a+\varepsilon[$, pour $\varepsilon > 0$.

   Ainsi, si, pour tout i, x_i est un ultrafiltre principal, engendré par $\{b_i\}$, où $b_i \in \mathbb{R}$, ce qui précède entraîne que $(x_i)_i$ converge vers a^+ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_{\geqslant n}$, on a $b_i \in]a, a+\varepsilon[$.

Exercice 3 (Compactification) **:**
Soit U un ouvert non vide de S. Par construction, U est une union d'ouverts-fermés. Donc, par la description des ouverts-fermés de $S = Spec(\mathbb{A})$, il existe $a \in \mathbb{A}$ tel que $V(a) = D(1+a) \subseteq U$ et $V(a) = D(1+a) \neq \varnothing$. Comme $V(a)$ est non vide, en particulier la partie $a \in \mathcal{P}(E)$ est non vide, donc il existe $x \in E$ tel que $x \in a$. Autrement dit, on a $\{x\} \leqslant a$ dans l'anneau $\mathbb{A}$. Ainsi, l'ultrafiltre $f(x)$ engendré par $\{x\}$ contient la partie a. Comme $V(a) \subseteq U$, on a bien $f(x) \in U$, comme voulu.

Exercice 4 (Anneaux des formules à équivalence près) **:**
On notera $\overline{\varphi}$ la classe dans $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$ de la formule φ.

1. Pour montrer $(\varphi_1 \to \psi_1) \equiv (\varphi_2 \to \psi_2)$, il faut prendre une fonction $\alpha : V \to \{0,1\}$, et calculer $\alpha(\varphi_1 \to \psi_1)$ et $\alpha(\varphi_2 \to \psi_2)$. On constate que, par construction, $\alpha(\varphi \to \psi)$ est une fonction de $\alpha(\varphi)$ et $\alpha(\psi)$, pour toutes formules φ, ψ. D'où le résultat, puisque $\alpha(\varphi_1) = \alpha(\varphi_2)$ et $\alpha(\psi_1) = \alpha(\psi_2)$.

   Comme toutes les opérations logiques considérées sont construites à partir de $\to$ et de $\bot$, on vérifie facilement qu'elles passent au quotient par la relation d'équivalence $\equiv$.

2. Il s'agit de faire des disjonctions de cas, qu'on peut résumer dans des tables de vérité.

$\alpha(\varphi \vee \psi)$			$\alpha(\varphi \wedge \psi)$			$\alpha(\varphi \Delta \psi)$		
$\alpha(\varphi)$ \ $\alpha(\psi)$	0	1	$\alpha(\varphi)$ \ $\alpha(\psi)$	0	1	$\alpha(\varphi)$ \ $\alpha(\psi)$	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0

3. Démontrons par exemple la distributivité à gauche : soient $a, b, c \in \mathcal{F}_{\equiv}(V)$. Montrons que $a \wedge (b \Delta c) = (a \wedge b) \Delta (a \wedge c)$. Soient φ, χ, ψ des formules représentant respectivement a, b et c. On veut montrer que $\varphi \wedge (\chi \Delta \psi) \equiv (\varphi \wedge \chi) \Delta (\varphi \wedge \psi)$. Soit donc $\alpha : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On calcule $[\![\varphi \wedge (\chi \Delta \psi)]\!](\alpha) = [\![\varphi]\!](\alpha) \cdot [\![\alpha(\chi) + \alpha(\psi)]\!](\alpha) = [\![\varphi]\!](\alpha) \cdot [\![\chi]\!](\alpha) + [\![\varphi]\!](\alpha) \cdot [\![\psi]\!](\alpha) = [\![(\varphi \wedge \chi) \Delta (\varphi \wedge \psi)]\!](\alpha)$. Comme cela vaut pour tout α, on a bien l'équivalence $\varphi \wedge (\chi \Delta \psi) \equiv (\varphi \wedge \chi) \Delta (\varphi \wedge \psi)$, doù l'égalité $a \wedge (b \Delta c) = (a \wedge b) \Delta (a \wedge c)$.

   Soit $\preceq$ la relation d'ordre sur $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$ définie en cours, via $\overline{\varphi} \preceq \overline{\psi}$ ssi pour tout $\alpha : V \to 2$, on a $[\![\varphi]\!](\alpha) \leqslant [\![\psi]\!](\alpha)$. Alors, on constate que $\overline{\varphi} \preceq \overline{\psi}$ ssi, pour tout $\alpha : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $[\![\varphi \wedge \psi]\!](\alpha) = [\![\varphi]\!](\alpha)$, ssi $\varphi \wedge \psi \equiv \varphi$, ssi $\overline{\varphi} \cdot \overline{\psi} = \overline{\varphi}$. D'où le résultat.

4. On vérifie que les opérations induites par les connecteurs logiques $\vee, \wedge, \to$ sur $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$ satisfont les propriétés universelles adéquates pour l'ordre $\preceq$. Alors, come celui-ci coïncide avec l'ordre de l'anneau de Boole $(\mathcal{F}_{\equiv}(V), \Delta, \wedge)$, on en déduit par unicité le résultat voulu pour ces connecteurs. Le cas de $\neg$ se traite de manière similaire.

5. a) Par l'exercice 1, ou par le théorème de dualité de Stone, il existe un morphisme d'anneaux injectif $f : \mathbb{A} \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. On va montrer que $f(\alpha(\varphi)) = f(\alpha(\psi))$, ce qui suffira pour conclure, par injectivité de f. Pour cela, on montre que toutes les coordonnées de $f(\alpha(\varphi))$ et $f(\alpha(\psi))$ sont égales. Soit donc $i \in I$, et $\pi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la projection sur la coordonnée i.

   Comme f et π sont des morphismes d'anneaux de Boole, ils commutent avec l'opération $\to$, et envoient 0 sur 0. Par conséquent, l'extension canonique de l'application $\pi \circ f \circ \alpha : V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à $\mathcal{F}(V)$ coïncide avec la composée de $\pi \circ f$ avec l'extension canonique de α. Or $\varphi \equiv \psi$. Donc $\pi(f(\alpha(\varphi))) = \pi(f(\alpha(\psi)))$. D'où le résultat.

b) Par la question précédente, toute fonction $\alpha : V \to \mathbb{A}$ induit une *fonction* définie sur le quotient $\mathcal{F}_{\equiv}(V)$. Par construction, une telle fonction commute avec $\to$, et envoie $\perp$ sur 0. On vérifie alors que cela entraîne que c'est un morphisme d'anneaux, puisque les opérations Δ et $\wedge$ ont été définies à partir de $\perp$ et $\to$.

c) L'unicité découle du fait suivant : l'image d'une variable par une éventuelle fonction α convenable est égale à l'image de la classe de cette variable par le morphisme d'anneaux donné.

Démontrons donc l'existence : soit $f : \mathcal{F}_{\equiv}(V) \to \mathbb{A}$ un morphisme d'anneaux. Soit $\alpha : V \to \mathbb{A}$ définie par $\alpha(v) := f(\overline{v})$. Soit $f_\alpha : \mathcal{F}_{\equiv}(V) \to \mathbb{A}$ le morphisme d'anneaux induit par α. On vérifie alors par induction sur $\varphi \in \mathcal{F}(V)$ que $f(\overline{\varphi}) = f_\alpha(\overline{\varphi})$, pour toute formule φ.

Exercice 5 (D'autres exemples d'espaces de Stone) **:**

1. En distinguant selon le fait que l'ultrafiltre contienne un intervalle borné ou non, et en constatant qu'un intervalle à bornes entières est union disjointe finie d'intervalles ouverts à bornes entières de longueur 1 et de singletons, on montre que, outre les points $+\infty$ et $-\infty$, et les ultrafiltres engendrés par des singletons (qui sont principaux), l'espace des ultrafiltres contient les ultrafiltres principaux engendrés par les $]n, n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

2. Si un ultrafiltre contient une partie finie, alors il est principal, engendré par un singleton. Sinon, il ne contient que des parties de complémentaire fini. On constate que le filtre des parties de complémentaire fini est un ultrafiltre, ce qui permet de déduire que c'est le seul point non isolé de l'espace des ultrafiltres sur $\mathbb{A}$.

Exercice 6 (Produits d'anneaux de Boole) **:**

1. On commence par constater que, si $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, alors exactement l'un des éléments $(1,0)$ et $(0,1)$ appartient à $\mathfrak{p}$.

   Supposons que $(1,0) \in \mathfrak{p}$. Soit $I = \{b \in \mathbb{B} \mid (0,b) \in \mathfrak{p}\}$. En utilisant le fait que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, on montre que I est un idéal premier de $\mathbb{B}$. Notamment, $1 \notin I$, car $(0,1) \notin \mathfrak{p}$. On vérifie alors que $\mathfrak{p} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{A}, b \in I\}$.

   Réciproquement, si $I \in Spec\,\mathbb{B}$, l'ensemble $\mathfrak{p}(I) := \{(a,b) \mid a \in \mathbb{A}, b \in I\}$ est un idéal premier de $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, et on a $(1,0) \in \mathfrak{p}(I)$. De plus, on vérifie que $I = \{b \in \mathbb{B} \mid (0,b) \in \mathfrak{p}(I)\}$.

   Ainsi, on a construit une bijection $I : \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid (1,0) \in \mathfrak{p}\} \to Spec\,\mathbb{B}$. Notons $e_1 = (1,0) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Alors, on sait que $V(e_1) := \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid (1,0) \in \mathfrak{p}\}$ est un ouvert-fermé de $Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Pour montrer que I est un homéomorphisme, on vérifie les faits suivants :

   - Si $(a,b) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, et $\mathfrak{p} \in V(e_1)$, alors $(a,b) \in \mathfrak{p}$ ssi $(0,b) \in \mathfrak{p}$ ssi $b \in I(\mathfrak{p})$.
   - Si $b \in \mathbb{B}$ et $\mathfrak{q} \in Spec\,\mathbb{B}$, alors $b \in \mathfrak{q}$ ssi $(1,b) \in I^{-1}(\mathfrak{q})$.

   Le premier point montre que I est ouverte, et le deuxième qu'elle est continue. On a donc un homéomorphisme $V(e_1) \simeq Spec\,\mathbb{B}$. Symétriquement, en notant $V(e_2) = \{\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \mid (0,1) \in \mathfrak{p}\}$, on définit un homéomorphisme $V(e_2) \simeq Spec\,\mathbb{A}$. Donc, en recollant les deux, qui sont définis sur des ouverts-fermés disjoints de $Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, on obtient un homéomorphisme $Spec\,\mathbb{A} \times \mathbb{B} \simeq Spec\,\mathbb{A} \bigsqcup Spec\,\mathbb{B}$.

2. Notons $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. Pour $A \subseteq I$, soit $e_A := (\mathbf{1}_{i \in A})_{i \in I}$ la suite de 0 et de 1 définie par A. On voit e_A comme un élément de $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$. Pour $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{B}$, soit $\mathcal{U}(\mathfrak{p}) := \{A \subseteq I \mid 1 + e_A \in \mathfrak{p}\}$. Alors, on vérifie que $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ a les propriétés suivantes :

   - On a $I \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$, et $\varnothing \notin \mathcal{U}(\mathfrak{p})$.
   - Si A, B sont dans $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$, alors $A \cap B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, on calcule : $1 + e_{A \cap B} = 1 + e_A \cdot e_B = (1 + e_A) + (1 + e_B) + (1 + e_A)(1 + e_B) \in \mathfrak{p}$.
   - Si $A \subseteq B$ et $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$, alors $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, $e_A e_B = e_A$, donc $e_A(1 + e_B) = 0 \in \mathfrak{p}$, donc $e_A \in \mathfrak{p}$ ou $(1 + e_B) \in \mathfrak{p}$. Or $1 + e_A \in \mathfrak{p}$, donc $e_A \notin \mathfrak{p}$, donc $(1 + e_B) \in \mathfrak{p}$, i.e. $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$.

- Si $A \cup B = I$, alors $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ ou $B \in \mathcal{U}(\mathfrak{p})$. En effet, on calcule que $1 = e_{A\cup B} = e_A + e_B + e_{A\cap B} = e_A + e_B + e_A e_B$. Autrement dit, on a $0 = 1 + 1 = 1 + e_A + e_B + e_A e_B = (1 + e_A)(1 + e_B)$. Donc $(1 + e_A)(1 + e_B) \in \mathfrak{p}$, donc $1 + e_A \in \mathfrak{p}$ ou $1 + e_B \in \mathfrak{p}$, comme voulu.

Réciproquement, si $\mathcal{U} \in P(I)$ a les quatre propriétés ci-dessus, on dit que $\mathcal{U}$ est un *ultrafiltre* sur I, et on définit $\mathfrak{p}(\mathcal{U}) := \{1 + e_A \,|\, A \in \mathcal{U}\}$. On vérifie qu'alors $\mathfrak{p}(\mathcal{U})$ est un idéal premier de $\mathbb{B}$. Par exemple, si $(1 + e_A)(1 + e_B) \in \mathfrak{p}(\mathcal{U})$, alors $1 + e_{A\cup B} \in \mathfrak{p}(\mathcal{U})$, i.e. $A \cup B \in \mathcal{U}$, donc $A \in \mathcal{U}$ ou $B \in \mathcal{U}$, donc $1 + e_A \in \mathfrak{p}(\mathcal{U})$ ou $1 + e_B \in \mathfrak{p}(\mathcal{U})$.

Enfin, on calcule que ces deux constructions sont réciproques l'une de l'autre. Le spectre de Zariski de $\mathbb{B} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$ est donc isomorphe à l'espace des ultrafiltres sur I.

Exercice 7 (Dualité de Stone, morphismes) **:**

1. Démontrons l'unicité. Soit $F : Y \to X$ une fonction continue telle que $f = F^{-1}$. Comme X est un espace de Stone, on a, pour tout $x \in X$, l'égalité suivante :

$$\{x\} = \bigcap_{\substack{O \in OF(X) \\ x \in O}} O.$$

Par conséquent, en appliquant F^{-1} à cette égalité, on obtient

$$F^{-1}(\{x\}) = \bigcap_{\substack{O \in OF(X) \\ x \in O}} F^{-1}(O) = \bigcap_{\substack{O \in OF(X) \\ x \in O}} f(O).$$

Il suffit alors de constater que F est entièrement déterminée par la collection des $F^{-1}(\{x\})$, pour $x \in X$. D'où l'unicité.

Démontrons alors l'existence. On veut définir F via la collection des $F^{-1}(\{x\})$, en demandant que $F(y) = x$ ssi $y \in Y_x := \bigcap_{\substack{O \in OF(X) \\ x \in O}} f(O)$.

Soit $y \in Y$. On veut trouver un unique $x \in X$ tel que y soit dans l'intersection des $f(O)$, pour O ouvert-fermé de X tel que $x \in O$. Soit $\mathcal{F}_y := \{O \in OF(X) \,|\, y \in f(O)\}$. On vérifie alors, en utilisant le fait que f est un morphisme d'anneaux, que $\mathcal{F}_y$ est un ultrafiltre sur l'anneau de Boole $OF(X)$. De plus, si $x \in X$, on a $y \in Y_x$ ssi l'ensemble des ouverts-fermés de X contenant x est égal à $\mathcal{F}_y$.

Comme l'espace X est un espace de Stone, il existe un unique élément $x \in X$ tel que, pour tout $O \in OF(X)$, on a $x \in O$ ssi $y \in f(O)$. Donc $y \in Y_x$, comme voulu.

On peut donc définir une fonction $F : Y \to X$, telle que $F^{-1}(\{x\}) = Y_x$ pour tout $x \in X$. Montrons qu'on a $f = F^{-1}$, ce qui entraînera que F est continue. Soit $O \in OF(X)$, et $y \in Y$. On a $y \in f(O)$ ssi $O \in \mathcal{F}_y$ ssi $F(y) \in O$, car $\mathcal{F}_y$ est l'utrafiltre des ouvert-fermés contenant $F(y)$. D'où $f(O) = F^{-1}(O)$, comme voulu.

2. Démontrons l'unicité. Soit $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ un morphisme d'anneaux tel que $F = f^{-1}$. Alors, pour $b \in \mathbb{B}$ et $\mathfrak{p} \in \mathit{Spec}\,\mathbb{A}$, on a $f(b) \in \mathfrak{p}$ ssi $b \in F(\mathfrak{p})$. Or, tout élément $a \in \mathbb{A}$ est déterminé par la collection des idéaux premiers de $\mathbb{A}$ auxquels il appartient. On en déduit l'unicité de f.

Démontrons alors l'existence. Soit $b \in \mathbb{B}$. Considérons $O_b = F^{-1}(V(b))$. Comme $V(b)$ est un ouvert-fermé de $\mathit{Spec}\,\mathbb{B}$, et que F est continue, on sait que O_b est un ouvert-fermé de $\mathit{Spec}\,\mathbb{A}$. Donc, il existe un unique élément $a \in \mathbb{A}$ tel que $O_b = V(a)$. On pose $f(b) := a$. On définit ainsi une fonction $f : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, telle que, pour tout $b \in \mathbb{B}$, on a $F^{-1}(V(b)) = V(f(b))$. En passant au complémentaire, on en déduit, pour tout $b \in \mathbb{B}$, l'égalité $F^{-1}(D(b)) = D(f(b))$ $(*)$.

Montrons que la fonction f est un morphisme d'anneaux $\mathbb{B} \to \mathbb{A}$. On sait que $D : \mathbb{A} \to OF(\mathit{Spec}\,\mathbb{A})$ est un isomorphisme d'anneaux. De même, $D : \mathbb{B} \to OF(\mathit{Spec}\,\mathbb{B})$ est un isomorphisme d'anneaux. Par l'égalité $(*)$, il suffit alors de se rappeler que $F^{-1} : OF(\mathit{Spec}\,\mathbb{B}) \to OF(\mathit{Spec}\,\mathbb{A})$ est un morphisme d'anneaux, du fait des bonnes propriétés de l'image réciproque. Avec un diagramme commutatif, cela donne :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "D"] & \mathbb{A} \arrow[d, "D"] \\
OF(Spec\,\mathbb{B}) \arrow[r, "F^{-1}"] & OF(Spec\,\mathbb{A})
\end{tikzcd}$$

Enfin, montrons que f a bien la propriété voulue. Soit $\mathfrak{p} \in Spec\,\mathbb{A}$. Montrons que $F(\mathfrak{p}) = f^{-1}(\mathfrak{p})$. Soit donc $b \in \mathbb{B}$, et montrons que $b \in F(\mathfrak{p})$ ssi $f(b) \in \mathfrak{p}$. On a $b \in F(\mathfrak{p})$ ssi $F(\mathfrak{p}) \in V(b)$ ssi $\mathfrak{p} \in F^{-1}(V(b))$. Or $F^{-1}(V(b)) = V(f(b))$. Donc $\mathfrak{p} \in F^{-1}(V(b))$ ssi $f(b) \in \mathfrak{p}$. D'où $b \in F(\mathfrak{p})$ ssi $f(b) \in \mathfrak{p}$. D'où le résultat.