Intégration et Probabilités Benoît Laslier
ENS Paris, 2023/2024 `laslier@dma.ens.fr`

TD1 : Tribus, mesurabilité, liminf et limsup

Exercice 1. [Limsup et liminf de suites] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels, on pose

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

1. Expliquer pourquoi les deux limites ci-dessus sont nécessairement bien définies.
2. Calculer $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n$ et $\liminf_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
4. Vérifier que a_n converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell$.
5. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ une autre suite de réels. Montrer que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

A-t-on toujours $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$?

Solution de l'exercice 1.

1. La suite $(\sup_{k\geq n} a_k)$ est décroissante, alors que $(\inf_{k\geq n} a_k)$ est croissante.
2. Par simple calculs on a $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ et $\liminf_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. On pourra également vérifier que $\limsup_{n\to\infty} \cos(n) = 1$.
3. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. On a, pour une sous-suite (n_i), la convergence $a_{n_i} \to \ell$ quand $i \to \infty$. Nécessairement pour tout $i \geq 1$

$$\inf_{k\geq n_i} a_k \leq a_{n_i} \leq \sup_{k\geq n_i} a_k,$$

et donc par passage à la limite sur i on en déduit que $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \ell \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Montrons à présent que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ est une valeur d'adhérence. On définit n_1 comme le premier rang $k \geq 0$ pour lequel $a_k \geq \sup_{k\geq 0} a_k - 1$. Puis récursivement, on définit n_i comme le premier rang $k > n_{i-1}$ pour lequel $a_k \geq \sup_{k>n_{i-1}} a_k - 1/i$. La suite (n_i) est bien définie et tend vers $+\infty$. Par ailleurs on a

$$\sup_{k>n_{i-1}} a_k \geq a_{n_i} \geq \sup_{k>n_{i-1}} a_k - 1/i.$$

En passant à la limite sur i on voit que les membres de droite et de gauche convergent vers $\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$. On en déduit que (a_{n_i}) converge vers $\limsup_{n\to\infty} a_n$.

4. On sait que a_n converge vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si sa plus petite et sa plus grande valeur d'adhérence coincident. Par la question précédente, ceci est équivalent à $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \ell$.

5. Pour tout $n \geq 0$ et $k \geq n$, on a $a_k + b_k \leq \sup_{j\geq n} a_j + \sup_{j\geq n} b_j$. Par conséquent,

$$\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k,$$

et on obtient l'inégalité en passant à la limite. En règle général, on n'a pas d'égalité. Par exemple, en posant $a_n = (-1)^n$ et $b_n = -a_n$, on a alors $a_n + b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Mais $\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$.

Exercice 2. [Union et intersection de tribus]

1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est une tribu, mais qu'une union de tribus n'est pas forcément une tribu.
2. Pour chaque entier n soit $\mathcal{F}_n$ la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par l'ensemble $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}$. Montrer que $(\mathcal{F}_n)$ est une suite croissante de tribus mais que $\bigcup \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Solution de l'exercice 2.

1. Il est facile de vérifier qu'une intersection de tribus est une tribu. Concernant l'union de deux tribus, on peut penser au contre-exemple suivant sur un ensemble E qui contient au moins trois éléments x, y et z. Soit $\mathcal{F} := \{\emptyset, \{x\}, E\backslash\{x\}, E\}$ et $\mathcal{G} := \{\emptyset, \{y\}, E\backslash\{y\}, E\}$. Alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ne contient pas $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$.
2. La tribu $\mathcal{F}_{n+1}$ contient $\{0\}$, $\{1\}$, ..., $\{n\}$. Donc elle contient la tribu engendrée par ces éléments (on rappelle que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{C}$). En revanche $\cup_n \mathcal{F}_n$ ne contient pas $2\mathbb{N} = \cup_{n\geq 0}\{2n\}$.

Exercice 3. [Restriction d'une tribu] Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur E et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.

Solution de l'exercice 3. On vérifie aisément que $\mathcal{F}_B$ satisfait les 3 axiomes d'une tribu.

Exercice 4. [Image directe] Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, soit F un ensemble et soit $f : E \to F$ une application. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ n'est pas en général une tribu sur F.

Solution de l'exercice 4. Si f n'est pas surjective alors $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ ne contient pas F.

Exercice 5. [Tribu image réciproque] Soit E un ensemble et soit $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Soit $f : E \to F$ une application. On définit $\mathcal{E} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une tribu sur E.
2. Vérifier qu'il s'agit de la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable de E dans $(F, \mathcal{F})$.
3. Soit Y un ensemble fini muni de la tribu $\mathcal{P}(Y)$ constituée de toutes les parties de Y. Soit $g : (E, \mathcal{E}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ une application mesurable. Montrer qu'il existe $h : (F, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ mesurable tel que $g = h \circ f$.

Solution de l'exercice 5.

1. $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{E}$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $f^{-1}(B) = A$. Alors $A^c = f^{-1}(B^c)$ et donc $A^c \in \mathcal{E}$. Soit A_n une suite d'éléments de $\mathcal{E}$. Alors il existe B_n, éléments de $\mathcal{F}$ tels que $A_n = f^{-1}(B_n)$ et l'on a $\cup_n A_n = f^{-1}(\cup_n B_n)$ ainsi $\cup_n A_n \in \mathcal{E}$.
2. Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur E qui rend f mesurable. Alors pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$. Ainsi $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. Comme $\mathcal{E}$ est une tribu, on en déduit que $\mathcal{E}$ est l'intersection de toutes les tribus qui rendent f mesurable.
3. Pour tout $y \in Y$ on introduit $A_y = g^{-1}(\{y\})$. Nécessairement $A_y \in \mathcal{E}$. On voit alors que $\cup_y A_y = E$ et que pour tout $x \in A_y$, $g(x) = y$.
   Par définition de $\mathcal{E}$, on peut trouver $B_y \in \mathcal{F}$ tel que $f^{-1}(B_y) = A_y$. Il serait alors naturel de poser pour tout $x \in B_y$, $h(x) = y$. Malheureusement il se peut que les B_y ne soient pas disjoints. Cependant, les points x qui appartiennent à deux B_y distincts sont forcément des points qui ne sont pas atteints par l'application f. On peut donc leur assigner une valeur arbitraire par h. On choisit donc $y_0 \in Y$ arbitraire et l'on introduit $I = \cup_{y \neq y'} B_y \cap B_{y'}$ et $C = F \backslash (\cup_y B_y)$. On note que ces des ensembles sont dans $\mathcal{F}$. On pose alors pour tout $x \in I \cup C$, $h(x) = y_0$ et pour tout $x \in B_y \backslash I$, $h(x) = y$. On vérifie aisément que h est mesurable de $(F, \mathcal{F})$ dans $(Y, \mathcal{P}(Y))$, et que l'on a bien
   $$g = h \circ f.$$

Pour aller plus loin

Exercice 6. [Dénombrabilité] Déterminer le cardinal (fini, dénombrable, en bijection avec $\mathbb{R}$...) des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
2. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,
3. l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.
4. l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 6.

1. Graphiquement on peut énumérer $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en balayant le plan dans un ordre bien choisi.
2. On souhaite montrer que cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0, 1)$ on considère son développement dyadique $(x_1, x_2, \ldots)$ à savoir $x_1 = 1$ ssi $x \geq 1/2$, puis $x_2 = 1$ ssi $x - x_1 2^{-1} \geq 2^{-2}$ etc.
   Il est facile de vérifier que cette application est une injection de $[0, 1)$ dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On peut aussi vérifier que les éléments de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ qui ne sont pas atteints pas cette application sont les développements dyadiques impropres, c'est-à-dire, les suites $(x_1, x_2, \ldots)$ qui valent 1 à partir d'un certain rang. L'ensemble de ces suites est dénombrable.
   Ainsi, en ajoutant un ensemble dénombrable à $[0, 1)$ on obtient un ensemble qui est en bijection avec $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. On peut donc construire une injection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, il est facile d'injecter $\mathbb{R}$ dans $(0, 1)$. Donc $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ a même cardinal que $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $k \geq 1$ on définit $A_k := \{x \in [0, 1] : f(x+) - f(x-) \geq 1/k\}$. Cet ensemble est fini (car autrement $f(1) - f(0)$ serait plus grand que ∞/k). L'ensemble recherché est alors $\cup_k A_k$. C'est une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables : c'est donc un ensemble au plus dénombrable.

4. Il est facile de voir que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est de cardinal au moins $\mathbb{R}$: on peut considérer les ouverts $]x, x+1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrons que le cardinal est exactement $\mathbb{R}$. On remarque que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion dénombrable d'intervalles dont les extrémités sont rationnelles. Soit $A = \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2 : p < q\}$. Cet ensemble est dénombrable. Et l'on peut injecter l'ensemble des ouverts dans l'ensemble des parties de A :
$$O \mapsto \{(p,q) \in \mathbb{Q}^2 : p < q,]p,q[\in O\}.$$
Ainsi l'ensemble des ouverts n'est pas plus grand que $\mathbb{R}$.

Exercice 7. [Quelques exemples de tribus] Donner des conditions sur l'ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

1. $\{\emptyset, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
2. $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
3. La classe des singletons de E.
4. La classe des parties finies de E.
5. La classe des parties dénombrables de E.
6. La classe des parties finies ou cofinies de E. (On dit qu'une partie est cofinie si son complémentaire est fini).
7. La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. (On dit qu'une partie est codénombrable si son complémentaire est dénombrable).

Solution de l'exercice 7.

1. $\{\emptyset, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
   Seulement si $E = \{x\}$.
2. $\{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est fixé.
   Toujours une tribu.
3. La classe des singletons de E.
   Jamais une tribu puisque l'ensemble vide n'est pas un singleton.
4. La classe des parties finies de E.
   Seulement si E est fini.
5. La classe des parties dénombrables de E.
   Seulement si E est dénombrable.
6. La classe des parties finies ou cofinies de E. (On dit qu'une partie est cofinie si son complémentaire est fini).
   Seulement si E est finie.
7. La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. (On dit qu'une partie est codénombrable si son complémentaire est dénombrable).
   Toujours une tribu. En effet, soit $(A_n)_n$ une suite de telles parties. Si toutes ces parties sont dénombrables alors l'union l'est aussi. Si l'une de ces parties est co-dénombrable, disons A_{n_0}, alors
   $$(\cup_n A_n)^c = \cap_n A_n^c \subset A_{n_0}^c,$$
   qui est dénombrable.

Exercice G.[Preuve de l'irrationalité de π] On suppose par l'absurde que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j f^{(j)}(x).$$

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $f^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F'(x)\sin(x) - F(x)\cos(x)\right) = f(x)\sin(x).$$
3. En déduire que $\int_0^\pi f(x)\sin(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{Z}$.
4. Obtenir une contradiction en observant que f est une fonction positive qui converge vers 0 uniformément.

Exercice 8. [Tribu dyadique] On définit $\mathcal{B}_n = \sigma\left(\{(k/2^n, (k+1)/2^n], 0 \leq k \leq 2^n - 1\}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire la tribu $\mathcal{B}_n$. Quel est son cardinal ?
2. Montrer que la tribu engendrée par $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ est la tribu des boréliens de l'intervalle $[0, 1]$.

Solution de l'exercice 8.

1. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathcal{B}_n = \left\{\cup_{k\in J}(k/2^n, (k+1)/2^n], J \subset \{1, \ldots, 2^n\}\right\}.$$
En effet, c'est une tribu qui contient bien tous les ensembles de la forme $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, et toute tribu contenant ces ensembles contiendra également $\mathcal{B}_n$ par stabilité par union dénombrable. Son cardinal est donc de 2^{2^n}, puisque $\mathcal{B}_n$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\{1, \ldots 2^n\})$.
2. Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la tribu $\mathcal{B}_n$ est incluse dans la tribu des borélien (qui contient en particulier tous les intervalles de la forme $(k/2^n, (k+1)/2^n]$). Réciproquement, soit $a < b$, on remarque que
$$(a, b) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k : a < k2^{-n} \text{ et } (k+1)2^{-n} < b} (k/2^n, (k+1)/2^n],$$
donc la tribu engendrée par $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ contient tous les intervalles ouvert, et donc la tribu borélienne par définition.

Exercice 9. [Tribu infinie] On montre ici qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.
Soit E un ensemble et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E. Pour tout $x \in E$, on introduit l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x comme l'ensemble $\dot{x} := \bigcap_{\{A\in\mathcal{A}: x\in A\}} A$.

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si la tribu $\mathcal{A}$ est dénombrable alors elle contient tous ses atomes et que tout élément de $\mathcal{A}$ peut être obtenu comme une union dénombrable d'atomes.
3. En déduire que si $\mathcal{A}$ est dénombrable alors $\mathcal{A}$ est finie.

Solution de l'exercice 9.

1. On commence par remarquer que $x \in \dot{x}$. Ainsi $\cup_x \dot{x} = E$. Soit $x \neq y \in E$. On souhaite montrer que $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont soit égaux soit disjoints. Par symétrie, il suffit de montrer que soit $\dot{x}$ est inclus dans $\dot{y}$, soit ils sont disjoints. Pour cela, on distingue deux cas. Premièrement, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $y \in A$ mais $x \notin A$. Alors $A^c \in \mathcal{A}$ et $\dot{x} \subset A^c$. Comme $\dot{y} \subset A$ on en déduit que $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont disjoints. Deuxièmement, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $y \in A$, on a $x \in A$. Alors
$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}} A \quad \subset \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} : y \in A\}} A = \dot{y}.$$
2. Si $\mathcal{A}$ est dénombrable alors $\dot{x}$ est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, c'est donc un élément de $\mathcal{A}$. Ainsi pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a
$$A = \cup_{x \in A} \{x\} \subset \cup_{x \in A} \dot{x} \subset \cup_{x \in A} A = A.$$
Ainsi A s'écrit comme une union d'atomes. Ces atomes sont en quantité au plus dénombrable.
3. Supposons $\mathcal{A}$ dénombrable. S'il y a un nombre fini d'atomes alors la tribu $\mathcal{A}$ est finie car tout élément de la tribu s'écrit comme une union d'atomes. S'il y a un nombre infini d'atomes alors l'ensemble non dénombrable $2^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans $\mathcal{A}$: en effet, il existe une suite d'atomes disjoints $(B_i)_{i \geq 1}$ et tous les éléments de la forme
$$\cup_{i \in I} B_i, \quad I \subset \mathbb{N},$$
font partie de la tribu $\mathcal{A}$, et sont distincts dès que leurs ensembles I sont distints.

Exercice 10. [Partie dénombrable engendrant une tribu] Soit E un espace, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(D)$.

Solution de l'exercice 10. On montre que
$$\mathcal{G} = \{B \in \sigma(C) : \text{ il existe une partie dénombrable } \mathcal{D} \text{ de } \mathcal{C} \text{ vérifiant } B \in \sigma(\mathcal{D})\}$$
est une tribu en vérifiant les trois axiomes. Or $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{C})$, d'où le résultat.