# TD2 : Extensions de corps

25/09/2023

**Exercice 1 : Corps de décomposition**

Déterminer les corps de décompositon des polynôme suivants de $\mathbb{Q}[X]$, ainsi que leur dimension sur $\mathbb{Q}$ :
- $X^2 - 3$.
- $X^3 - 2$
- $(X^3 - 2)(X^2 - 2)$
- $X^5 - 7$
- $X^4 + 4$.
- $X^6 + 3$.
- $X^8 + 16$.

**Exercice 2 :**

Soit $L/K$ une extension de corps et $F_1, F_2$ deux sous-extensions. On suppose que $[F_1 : K] \wedge [F_2 : K] = 1$. Montrer que $F_1 \cap F_2 = K$.

**Exercice 3 : Polynômes minimaux**

Soient $K$ un corps et $L$ une extension finie de $K$. Soient $x, y$ deux éléments de $L$, et $P_x, P_y$ leurs polynômes minimaux respectifs sur $K$. Montrer que $P_x$ est irréductible sur $K(y)$ si et seulement si $P_y$ est irréductible sur $K(x)$.

**Exercice 4 :**

Soit $k$ un corps et $K = k(X)$ le corps des fractions rationnelles.

**1.** Soit $F \in K \backslash k$.

a. Montrer que $X$ est algébrique sur $k(F)$.

b. En déduire que $F$ est transcendant sur $k$.

c. Montrer que $[K : k(F)] = \max(\deg P, \deg Q)$ où $F = \frac{P}{Q}$ avec $P, Q \in k[X], P \wedge Q = 1$.

On pourra d'abord montrer le lemme suivant :

**Lemme 0.1.**

Soient $f, g \in K[t]$ premiers entre eux, et $m = \max(\deg f, \deg g)$, et $P_n \in K[t]$ des polynômes de degré strictement inférieur à $m$. Si il existe $N$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N} P_n f^n g^{N-n} = 0$$

Alors $P_n = 0$ pour tout $n \leqslant N$.

**2.** Soit $\phi : \mathrm{GL}_2(k) \to \mathrm{Aut}_k(K)$ le morphisme de groupe défini par

$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : R \mapsto R\left(\frac{aX + b}{cX + d}\right)$$

Montrer que $\phi$ est surjectif et déterminer $\ker(\phi)$.

**Exercice 5 :**

**1.** Est-ce que l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi)/\mathbb{Q}$ est purement transcendante ?
**2.** Est-ce que l'extension $\mathbb{R}(X, Y)/\mathbb{R}(X + Y)$ est purement transcendante ?

**Exercice 6 : Degré du corps de décomposition**

Soient $K$ un corps, $P \in K[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et $L$ un corps de décomposition de $P$ sur $K$. Montrer que $[L : K]$ divise $n!$.

**Exercice 7 : Un contre-exemple**

Soit $K = \mathbb{Q}(T)$, et deux sous corps $K_1 = \mathbb{Q}(T^2)$ et $K_2 = \mathbb{Q}(T^2 - T)$. Montrer que $K$ est algébrique sur $K_1$ et $K_2$ mais pas sur $K_1 \cap K_2$.

**Exercice 8 : Extensions de degré 2**

Soit $L$ une extension d'un corps $K$ de degré 2.
**1.** On suppose que la caractéristique de $K$ n'est pas 2. Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $L \simeq K[X]/(X^2 - a)$ (que l'on note par definition $K(\sqrt{a})$.
**2.** A quelle condition deux extensions de cette forme sont isomorphes ?
**3.** Décrire les $K$ automorphismes de $K(\sqrt{a})$.

**Exercice 9 : Une extension purement transcendante**

Montrer que $k(x, \sqrt{1 - x^2})$ est purement transcendante.

**Exercice 10 : Un exemple**

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.
**1.** Déterminer $[K : \mathbb{Q}]$, et exprimer $K$ comme corps de décomposition d'un polynôme bien choisi.
**2.** Déterminer tous les sous-corps de $K$ ainsi que leur degré.

**Exercice 11 : Critères d'irréductiblité**

**1.** (Eisenstein) Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ à coefficients entiers. Supposons qu'il existe un nombre premier $p$ tel que $p | a_i$ pour $i \leqslant n - 1$, $p$ ne divise pas $a_n$ et $p^2$ ne divise pas $a_0$. Alors $P$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
**2.** (Lemme de Gauss) Pour $P$ un polynôme, on note $c(P)$ le pgcd de ses coefficients. On dit que $P$ est primitif si $c(P) = 1$.

Soit $A$ un anneau factoriel, et $K$ son corps des fractions. Les éléments irréductibles de $A[X]$ sont les éléments premiers de $A$ et les polynôme primitifs irréductibles sur $K[X]$.