Méthode des Volumes Finis

Pr. Said EL HAJJI

LabMiA, Faculté des Sciences,
Université Mohammed V - Rabat.

January 12, 2016

Pr S. El Hajji

Laboratory of Mathematics, Computing and Applications,

Department of Mathematical and Computer Sciences,

Faculty of Sciences,

University of Mohammed V-Rabat,

BP.1014 RP, Rabat, Morocco.

elhajji@fsr.ac.ma

Méthode des Volumes Finis : Plan

1 - Méthode des volumes finis: Principe de la méthode

2 - Présentation de la méthode sur un problème modèle en 1D

3 - Analyse du schème de volumes finis

4 -

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies.

Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies.

Comme pour les autres méthodes de discrétisation (Différences Finis, Eléments Finis, ...), on cherche à approcher la solution d'un problème aux limites en se donnant :

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies.

Comme pour les autres méthodes de discrétisation (Différences Finis, Eléments Finis, ...), on cherche à approcher la solution d'un problème aux limites en se donnant :

- Un ensemble fini de sous–domaines $\{K_i\}_{i=1,N}$ appelés cellules, Volumes Finis ou Volumes de Contrôle.

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Les méthodes de volumes finis (VF) sont adaptées aux équations de conservation et utilisées en mécanique des fluides depuis plusieurs décennies.

Comme pour les autres méthodes de discrétisation (Différences Finis, Eléments Finis, ...), on cherche à approcher la solution d'un problème aux limites en se donnant :

- Un ensemble fini de sous–domaines $\{K_i\}_{i=1,N}$ appelés cellules, Volumes Finis ou Volumes de Contrôle.
- Une caractérisation de la solution.

Principe DF, MEF: rappels

Différences finies : Appoximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide de devéloppement en série de Taylor.

La méthode des Différences finies est :

- bien connue,
- mise en œvre simple pour une géometrie simple,
- mais mise en œvre difficile pour une géometrie complexe.

Principe DF, MEF: rappels

Différences finies : Appoximation des dérivées intervenantes dans les équations à l'aide de devéloppement en série de Taylor.
La méthode des Différences finies est :

- bien connue,
- mise en œvre simple pour une géometrie simple,
- mais mise en œvre difficile pour une géometrie complexe.

Méthode des Elements finis: Détermination d'un champ local à attribuer à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème (bilan global).
La Méthode des élements finis :

- est une approche très "mathèmatique"
- s'adapte à une géometrie quelconque
- a des difficultées pour resoudre les termes non-lineaires

Le principe consiste à :

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Le principe consiste à :

- découper le domaine Ω en des "volumes de contrôle";

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Le principe consiste à :

- découper le domaine Ω en des "volumes de contrôle";

- intégrer l'équation de conservation sur les volumes de contrôle;

Méthode des volumes finis : Principe de la méthode

Le principe consiste à :

- découper le domaine Ω en des "volumes de contrôle";

- intégrer l'équation de conservation sur les volumes de contrôle;

- approcher les flux sur les bords du volume de contrôle
(par exemple pas une technique de différences finies).

Familles de volumes finis

On distingue deux familles de volumes finis :

Familles de volumes finis

On distingue deux familles de volumes finis :

1 - Méthodes centrées sur les cellules :

Familles de volumes finis

On distingue deux familles de volumes finis :

1 - Méthodes centrées sur les cellules :

2 - Méthodes centrées sur les noeuds :

Méthodes centrées sur les cellules :

Dans les Méthodes centrées sur les cellules

Méthodes centrées sur les cellules :

Dans les Méthodes centrées sur les cellules

- Les cellules $\{K_i\}_{i=1,N}$ sont données;

Méthodes centrées sur les cellules :

Dans les Méthodes centrées sur les cellules

Les cellules $\{K_i\}_{i=1,N}$ sont données;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs moyennes sur ces cellules;

Méthodes centrées sur les cellules :

Dans les Méthodes centrées sur les cellules

Les cellules $\{K_i\}_{i=1,N}$ sont données;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs moyennes sur ces cellules;

Il faut ensuite relier les flux aux valeurs moyennes.

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

On se donne une triangulation, en éléments finis, du domaine Ω;

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

On se donne une triangulation, en éléments finis, du domaine Ω;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs aux noeuds.

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

On se donne une triangulation, en éléments finis, du domaine Ω;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs aux noeuds.

On associe à chaque noeud un volume de contrôle :

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

On se donne une triangulation, en éléments finis, du domaine Ω;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs aux noeuds.

On associe à chaque noeud un volume de contrôle :

- Méthode des Volumes–Différences–Finies :

Maillage rectangulaire.

Flux approchés par des développements de Taylor.

Méthodes centrées sur les noeuds :

Dans les Méthodes centrées sur les noeuds :

On se donne une triangulation, en éléments finis, du domaine Ω;

La solution discrète est caractérisée par ses valeurs aux noeuds.

On associe à chaque noeud un volume de contrôle :

- Méthode des Volumes–Différences–Finies :

Maillage rectangulaire.

Flux approchés par des développements de Taylor.

- Méthode des Volumes–Eléments–Finis :

Maillage quelconque.

Espace éléments finis pour approcher les flux

Rappels

Considérons une équation aux dérivées partielles linéaire, de degré 2, de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Rappels

Considérons une équation aux dérivées partielles linéaire, de degré 2, de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'appellation "elliptique", "parabolique" ou "hyperbolique" d'une équation aux dérivées partielles de cette forme correspond à la nature de la conique décrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est-'a-dire : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.

Considérons une équation aux dérivées partielles linéaire, de degré 2, de la forme :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'appellation "elliptique", "parabolique" ou "hyperbolique" d'une équation aux dérivées partielles de cette forme correspond à la nature de la conique décrite par l'équation caractéristique correspondante, c'est-'a-dire :
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.
Si $B^2 - 4AC < 0$,l'équation est dite elliptique.
Si $B^2 - 4AC = 0$,elle est parabolique,
et si $B^2 - 4AC > 0$,elle est hyperbolique.

Volumes finis pour un problème stationnaire en 1D

On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in \left]0,1\right[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

Volumes finis pour un problème stationnaire en 1D

On considère le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in \,]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

Remarque :
Cette équation modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans un barreau conducteur chauffé (terme source f) dont les deux extrémités sont plongées dans de la glace.

Maillage volumes finis en 1D:

Pour discrétiser l'intervalle $[0, 1]$,

Maillage volumes finis en 1D:

Pour discrétiser l'intervalle $[0, 1]$,
on ne se donne plus des points mais
des volumes de contrôle K_i, $i = 1, ..., N$,
avec $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$,
et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Maillage volumes finis en 1D:

Pour discrétiser l'intervalle $[0,1]$,
on ne se donne plus des points mais
des volumes de contrôle K_i, $i = 1, ..., N$,
avec $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$,
et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Pour chaque volume de contrôle K_i,
on se donne un point $x_i \in K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.

Maillage volumes finis en 1D:

Pour discrétiser l'intervalle $[0, 1]$,
on ne se donne plus des points mais
des volumes de contrôle K_i, $i = 1, ..., N$,
avec $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$,
et on note $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

Pour chaque volume de contrôle K_i,
on se donne un point $x_i \in K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.
On pourra considérer par exemple (mais ce n'est pas le seul point possible):
$x_i = \dfrac{(x_{i+1/2} + x_{i-1/2})}{2}$.

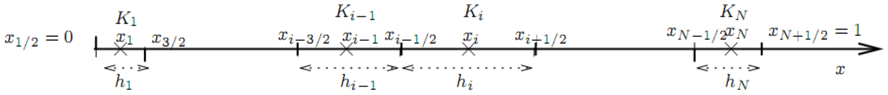

Figure: Maillage volumes finis en 1D

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation
$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Si on pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Si on pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

alors

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Si on pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

alors

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Cette équation est dite un bilan de flux.

Volumes finis en 1D: intégration

Loi de conservation sous forme integrale

Si on intégre l'équation

$$-u''(x) = f(x) \text{ sur } K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$$

On obtient :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -u''(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Si on pose

$$f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

alors

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Cette équation est dite un bilan de flux.

La quantité $F_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ est le flux de diffusion en $x_{i+\frac{1}{2}}$.

Bilan de flux: expression

On a : $\quad -u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \quad , \quad i = 1, ..., N$

avec

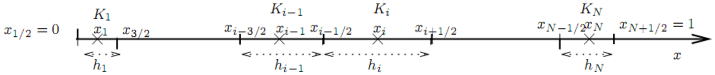

Figure: Maillage volumes finis en 1D

Bilan de flux: expression

On a : $-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \quad , \quad i = 1, ..., N$
avec

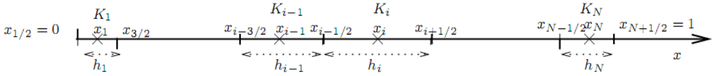

Figure: Maillage volumes finis en 1D

Pour la première maille ($i = 1$), on obtient :

$$-u'(x_{3/2}) + u'(x_{1/2}) = h_1 f_1 \qquad \text{soit}$$
$$-u'(x_{3/2}) + u'(0) = h_1 f_1$$

Bilan de flux: expression

On a : $\quad -u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \quad , \quad i = 1, ..., N$
avec

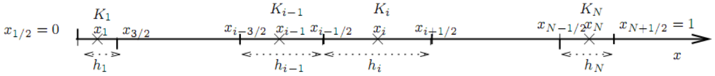

Figure: Maillage volumes finis en 1D

Pour la première maille ($i = 1$), on obtient :

$$-u'(x_{3/2}) + u'(x_{1/2}) = h_1 f_1 \qquad \text{soit}$$
$$-u'(x_{3/2}) + u'(0) = h_1 f_1$$

et pour la dernière maille ($i = N$), :

$$-u'(x_{N+1/2}) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N \qquad \text{soit}$$
$$-u'(1) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N.$$

Bilan de flux: expression

On a : $\quad -u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \quad , \quad i = 1, ..., N$
avec

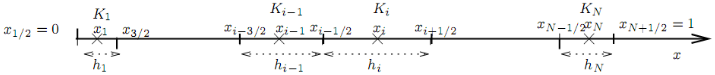

Figure: Maillage volumes finis en 1D

Pour la première maille ($i = 1$), on obtient :

$-u'(x_{3/2}) + u'(x_{1/2}) = h_1 f_1 \qquad$ soit

$-u'(x_{3/2}) + u'(0) = h_1 f_1$

et pour la dernière maille ($i = N$), :

$-u'(x_{N+1/2}) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N \qquad$ soit

$-u'(1) + u'(x_{N-1/2}) = h_N f_N.$

Remarque : L'opérateur à approcher est ici d'ordre 1, alors qu'il était d'ordre 2 en différences finies pour la même équation.

Calcul de ui approximation de u(xi)

On cherche donc à approcher

les flux $-u'(x_{i+1/2})$ aux interfaces $x_{i+1/2}$ des mailles,

et

les flux $u'(0)$ et $u'(1)$ au bord.

Calcul de ui approximation de u(xi)

On cherche donc à approcher

les flux $-u'(x_{i+1/2})$ aux interfaces $x_{i+1/2}$ des mailles,

et

les flux $u'(0)$ et $u'(1)$ au bord.

On se donne une inconnue par maille (ou volume de contrôle i), qu'on note u_i,
et on veut approcher la valeur $u(x_i)$ (ou $\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx$).

Discrétisation du bilan de flux

On suppose que u suffisamment règulière,
Si on effectue deux développements de Taylor à l'ordre 2 de u entre x_{i+1} et $x_{i+1/2}$ et entre x_i et $x_{i+1/2}$;

Discrétisation du bilan de flux

On suppose que u suffisamment règulière,
Si on effectue deux développements de Taylor à l'ordre 2 de u entre x_{i+1} et $x_{i+1/2}$ et entre x_i et $x_{i+1/2}$;
On a

$$u'(x_{i+1/2}) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

Discrétisation du bilan de flux

On suppose que u suffisamment règulière,
Si on effectue deux développements de Taylor à l'ordre 2 de u entre x_{i+1} et $x_{i+1/2}$ et entre x_i et $x_{i+1/2}$;
On a

$$u'(x_{i+1/2}) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

et de plus, si $u \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ l'erreur de consistance sur les flux, définie par :

$$R_{i+1/2} = u'(x_{i+1/2}) - \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}.$$

est d'ordre 1.

Le schéma numérique

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \qquad , \qquad i = 2, ..., N-1$$

s'écrit donc :

$$-\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} + \frac{u(x_i) - u(x_i - 1)}{h_{i-1/2}} = h_i f_i; \qquad i = 2, ..., N-1$$

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \qquad i = 2, ..., N-1$$

Frame Title

Le schéma numérique

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = h_i f_i \qquad , \qquad i = 2, ..., N-1$$

s'écrit donc :

$$-\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} + \frac{u(x_i) - u(x_i - 1)}{h_{i-1/2}} = h_i f_i; \qquad i = 2, ..., N-1$$

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \qquad i = 2, ..., N-1$$

Pour la première et N-^{ième} equations, on tient compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes:

$$-\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1}{h_{1/2}} = h_1 f_1,$$

$$\frac{u_N}{h_{N+1/2}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} = h_N f_N,$$

Conditions de Dirichlet non homogènes

$$\left\{ \begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{array} \right.$$

Conditions de Dirichlet non homogènes

$$\left\{ \begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{array} \right.$$

Dans ce cas :

les équations discrètes du schèma de volumes finis associés aux noeuds internes restent identiques,

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \qquad i = 2, ..., N-1$$

Conditions de Dirichlet non homogènes

$$\left\{\begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{array}\right.$$

Dans ce cas :
les équations discrètes du schèma de volumes finis associés aux noeuds internes restent identiques,

$$-\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \qquad i = 2, ..., N-1$$

Mais pour la première et N-ième equations, on a:

$$-\frac{u_2 - u_1}{h_{3/2}} + \frac{u_1 - a}{h_{1/2}} = h_1 f_1,$$
$$-\frac{b - u_N}{h_{N+1/2}} + \frac{u_N - u_{N-1}}{h_{N-1/2}} = h_N f_N,$$

Autres conditions limites

Condition de Neumann: une condition qui impose une valeur de la dérivée, par exemple : $u'(0) = a$.

Autres conditions limites

Condition de Neumann: une condition qui impose une valeur de la dérivée, par exemple : $u'(0) = a$.

Condition de Fourier ou condition de Robin, une condition qui impose une relation entre la dérivée et la valeur de la solution, par exemple, $u\prime(1) + \alpha u(1) = b$, avec $\alpha > 0$.

Autres conditions limites

Condition de Neumann: une condition qui impose une valeur de la dérivée, par exemple : $u'(0) = a$.

Condition de Fourier ou condition de Robin, une condition qui impose une relation entre la dérivée et la valeur de la solution, par exemple, $u\prime(1) + \alpha u(1) = b$, avec $\alpha > 0$.

Conditions aux limites mixtes : elles sont de type différents sur des portions de frontière du domaine :
Dans le cas unidimensionnel si, par exemple, on a une condition de Dirichlet en 0 et une condition de Neumann en 1.

Exemple conditions mixtes

La condition de Neumann est simple à prendre en compte, puisque le schéma de volumes finis fait intervenir l'approximation du flux en 0,

$u'(0)$ sera approchée par $a + \frac{u_1 - u_2}{h_{3/2}} - h_1 f_1$.

Exemple conditions mixtes

La condition de Neumann est simple à prendre en compte, puisque le schéma de volumes finis fait intervenir l'approximation du flux en 0,

$u'(0)$ sera approchée par $a + \frac{u_1 - u_2}{h_{3/2}} - h_1 f_1$.

La condition de Fourier: par exemple: $u'(1) + \alpha u(1) = b$, avec $\alpha > 0$.
Pour approcher le terme $u'(1)$: on peut par exemple approcher $u'(1)$ par $b - \alpha u_N$
ce qui nous donne comme N-ième équation discréte :

$F_{N+1/2} - F_{N-1/2} = h_N f_N$ avec

$$F_{N+1/2} = \alpha u_N - b \qquad et \qquad F_{N-1/2} = -\frac{uN - u_{N-1}}{h_{N-1/2}}$$

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de N mailles $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de N mailles $(K_i)_{i=1,...,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

$$x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < ... < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < ... < x_{N+1/2} = 1$$

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de

N mailles $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

$x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$

$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

et N autre points $(x_i)_{i=1,..,N}$ situés dans les mailles K_i.

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de N mailles $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

$$x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

et N autre points $(x_i)_{i=1,..,N}$ situés dans les mailles K_i.

On a donc

$$x_{1/2} = 0 < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

on notera $\qquad h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i \qquad et \qquad h = \max h_i.$

Analyse du schèma de volumes finis

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de

N mailles $(K_i)_{i=1,\ldots,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

$x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N+1/2} = 1$

$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$.

et N autre points $(x_i)_{i=1,..,N}$ situés dans les mailles K_i.

On a donc

$$x_{1/2} = 0 < x_1 < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N+1/2} = 1$$

on notera $\qquad h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i \qquad et \qquad h = \max h_i$.

On pose aussi : $\qquad x_0 = 0 \qquad$ et $\qquad x_{N+1} = 1$.

On va étudier la discrétisation par volumes finis du problème:

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C([0,1])$.

On va utiliser un maillage volumes finis de l'intervalle $[0,1]$ constitué de

N mailles $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ telle que $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ avec

$$x_{1/2} = 0 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

et N autre points $(x_i)_{i=1,..,N}$ situés dans les mailles K_i.

On a donc

$$x_{1/2} = 0 < x_1 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = 1$$

on notera $\quad h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i \quad$ *et* $\quad h = \max h_i$.

On pose aussi : $\quad x_0 = 0 \quad$ et $\quad x_{N+1} = 1.$

ainsi

$$x_0 = x_{1/2} = 0 < x_1 < x_2 < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = x_{N+1} = 1$$

Pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale (bilan des flux) obtenue en intégrant l'équation $(1): -u''(x) = f(x)$ sur une maille $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale (bilan des flux) obtenue en intégrant l'équation (1) : $-u''(x) = f(x)$ sur une maille $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Si on pose $\qquad f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$

$F_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ est le flux de diffusion en $x_{i+\frac{1}{2}}$

Pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale (bilan des flux) obtenue en intégrant l'équation (1) : $-u''(x) = f(x)$ sur une maille $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Si on pose $\qquad f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$

$F_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ est le flux de diffusion en $x_{i+\frac{1}{2}}$

alors

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \qquad i = 1, ..., N.$$

Pour obtenir un schéma volumes finis, on part de la forme intégrale (bilan des flux) obtenue en intégrant l'équation (1) : $-u''(x) = f(x)$ sur une maille $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$.

$$-u'(x_{i+1/2}) + u'(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx \qquad , \qquad i = 1, ..., N.$$

Si on pose $\quad f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$

$F_{i+\frac{1}{2}} = -u'(x_{i+\frac{1}{2}})$ est le flux de diffusion en $x_{i+\frac{1}{2}}$

alors

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \qquad i = 1, ..., N.$$

Pour tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u(0) = u(1) = 0$.

$$F_{\frac{1}{2}} = -\frac{u_1}{h_{1/2}}.$$

$$F_{N+\frac{1}{2}} = \frac{u_N}{h_{N+1/2}}.$$

On peut aussi écrire :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \qquad i = 0, ..., N.$$

en posant $u_0 = u_{N+1} = 0$.

On peut aussi écrire :

$$F_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \qquad i = 0, ..., N.$$

en posant $u_0 = u_{N+1} = 0$.

On peut écrire le système linéaire obtenu sur $(u_1, ..., u_N)$ sous la forme:

$$A_h U_h = b_h,$$

avec

$$(A_h U_h)_i = \frac{1}{h_i}\left[\frac{-1}{h_{i+1/2}}(u_{i+1} - u_i) + \frac{-1}{h_{i-1/2}} u_i - u_{i-1})\right] \qquad \text{et}$$

$(b_h)_i = f_i$.

Remarques

1- L'approximation de $-u''(x_i)$ par

$$\frac{1}{h_i}\left[\frac{-1}{h_{i+1/2}}(u_{i+1}-u_i)+\frac{-1}{h_{i-1/2}}u_i-u_{i-1})\right]$$

n'est pas consistance dans le cas général.

Remarques

1- L'approximation de $-u''(x_i)$ par

$$\frac{1}{h_i}\left[\frac{-1}{h_{i+1/2}}(u_{i+1}-u_i)+\frac{-1}{h_{i-1/2}}u_i-u_{i-1})\right]$$

n'est pas consistance dans le cas général.

2 - On peut montrer que les deux schèmas diffèrences finies et volumes sont identiques "au bord près" dans le cas d'un maillage uniforme lorsque x_i est supposé être le centre de la maille K_i.

Proposition

Existence de la solution du schèma volumes finis.

Proposition

Existence de la solution du schèma volumes finis.

Soit $f \in C([0,1])$ et $u \in C^2([0,1])$ solution du problème

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

Proposition

Existence de la solution du schèma volumes finis.

Soit $f \in C([0,1])$ et $u \in C^2([0,1])$ solution du problème

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

et soit $(K_i)_{i=1,\ldots N}$ le maillage de $[0,1]$.

Proposition

Existence de la solution du schèma volumes finis.

Soit $f \in C([0,1])$ et $u \in C^2([0,1])$ solution du problème

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} -u''(x) = f(x), \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right.$$

et soit $(K_i)_{i=1,\ldots N}$ le maillage de $[0,1]$.

Alors il existe une unique solution $u = (u_1, ..., u_N)$ du problème discret.

Dérivée discrète

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots N}$ de $[0,1]$

Dérivée discrète

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,...N}$ de $[0,1]$
Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i,qui représente une approximation d'une fonction définie sur $[0,1]$ et nulle en 0 et en 1.

Dérivée discrète

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\ldots N}$ de $[0,1]$
Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i,qui représente une approximation d'une fonction définie sur $[0,1]$ et nulle en 0 et en 1.
En posant $v_0 = v_{N+1} = 0$, on peut définir une sorte de "dérivée discrète" de v par les
pentes:

$$p_{i+1/2} = \frac{(v_{i+1} - v_i)}{h_{i+1/2}},\ i = 0, ..., N.$$

Dérivée discrète

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots N}$ de $[0,1]$
Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i,qui représente une approximation d'une fonction définie sur $[0,1]$ et nulle en 0 et en 1. En posant $v_0 = v_{N+1} = 0$, on peut définir une sorte de "dérivée discrète" de v par les
pentes:

$$p_{i+1/2} = \frac{(v_{i+1} - v_i)}{h_{i+1/2}}, \ i = 0, \dots, N.$$

On peut alors dèfinir une $D_T v$, fonction constante par intervalle et égale à $p_{i+1/2}$ sur l'intervalle $K_{i+1/2} =]x_i, x_{i+1}[$.

Dérivée discrète

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,...N}$ de $[0,1]$
Soit v une fonction constante par mailles sur les mailles K_i,qui représente une approximation d'une fonction définie sur $[0,1]$ et nulle en 0 et en 1.
En posant $v_0 = v_{N+1} = 0$, on peut définir une sorte de "dérivée discrète" de v par les
pentes:

$$p_{i+1/2} = \frac{(v_{i+1} - v_i)}{h_{i+1/2}}, \ i = 0, ..., N.$$

On peut alors dèfinir une $D_T v$, fonction constante par intervalle et égale à $p_{i+1/2}$ sur l'intervalle $K_{i+1/2} =]x_i, x_{i+1}[$.
La norme L^2 de $D_T v$ est alors définie par :

$$\|D_T v\|^2_{L(]0,1[)} = \sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} \ \ p^2_{i+1/2} = \sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} \ \ \left(\frac{(v_{i+1} - v_i)}{h_{i+1/2}}\right)^2.$$

où

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}.$$

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots N}$ de $[0,1]$.

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,...N}$ de $[0,1]$.

Pour $i = 1, ..., N$, on note f_i la valeur moyenne de f sur la maille K_i.

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\dots N}$ de $[0,1]$.

Pour $i = 1, ..., N$, on note f_i la valeur moyenne de f sur la maille K_i.

Si u_h est la fonction constante par maille dont les valeurs sur les mailles sont des valeurs $(u_1, ..., u_N)$ qui vérifient le schéma volumes finis,

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\ldots N}$ de $[0,1]$.

Pour $i = 1, ..., N$, on note f_i la valeur moyenne de f sur la maille K_i.

Si u_h est la fonction constante par maille dont les valeurs sur les mailles sont des valeurs $(u_1, ..., u_N)$ qui vérifient le schéma volumes finis,

alors

$$\|D_T v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} .$$

Stabilité

Soit $f \in L^2([0,1])$.

On considère le maillage $(K_i)_{i=1,\ldots N}$ de $[0,1]$.

Pour $i = 1, ..., N$, on note f_i la valeur moyenne de f sur la maille K_i.

Si u_h est la fonction constante par maille dont les valeurs sur les mailles sont des valeurs $(u_1, ..., u_N)$ qui vérifient le schéma volumes finis,

alors

$$\|D_T v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} .$$

Démonstration :
La preuve de cette proposition est calquée sur l'estimation apriori qu'on peut faire sur les solutions du problème continu.

Frame Title

???????

Frame Title

Frame Title

Frame Title

Frame Title

Frame Title

Frame Title

Pr S. El Hajji

Laboratory of Mathematics, Computing and Applications,

Department of Mathematical and Computer Sciences,

Faculty of Sciences,

University of Mohammed V-Agdal,

BP.1014 RP, Rabat, Morocco.

elhajji@fsr.ac.ma