CARACTERISATION DE L'INVERSE A GAUCHE ET APPLICATIONS

A. MESSAOUDI

Université Mohammed V, E.N.S. RABAT, MAROC

En collaboration avec H. SADOK
Travail entamé par Feu Alami LEMBARKI

ENS, 15 Décembre 2016

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Caractérisation
3. Cas particulier : $W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$
   - Relation entre T_{k+1} et T_k
   - Relation entre S_{k+1} et S_k
   - Relation entre G_{k+1} et G_k
   - Relation entre W_{k+1}^L et W_k^L
   - Propriétés
   - Un algorithme de calcul de W_k^L
4. Application
   - Cas : $Vect(Z_k) \neq Vect(Y_k)$
   - Cas : $Vect(Z_k) \subseteq Vect(Y_k)$

INTRODUCTION

On considère une matrice W_k de taille $n \times k$, avec $k \leq n$. On va commencer par caractériser les inverses à gauche W_k^L de W_k. Cette caractérisation va dépendre de deux matrices Y_k et Z_k de même taille que W_k.

Soit W_k^g une inverse à gauche de W_k on démontre que toute inverse W_k^L à gauche de W_k peut s'écrire sous la forme

$$W_k^L = W_k^g + Z_k^T (I_n - W_k W_k^g).$$

Introduction

Un cas particulier sera étudié :

$$W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T,$$

$$W_k^L = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T + Z_k^T (I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T).$$

Des relations de récurrence entre W_{k+1}^L et W_k^L seront établies. Des propriétés seront aussi données en utilisant les projecteurs.

Des algorithmes seront aussi proposés. Les choix de W_k, Y_k et Z_k permettent de retrouver la plupart des méthodes itératives pour la résolution d'un système linéaire : $Ax = b$.

INTRODUCTION

Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Si la matrice A est inversible on définit le complément de Schur de A dans M par

$$(M/A) = D - CA^{-1}B.$$

On note par $det(X)$ le détérminant de la matrice X.

PROPOSITION 1.

Si la matrice A est inversible et si la matrice M est carrée alors

$$det((M/A)) = det(M)/det(A).$$

Caractérisation

Proposition 2.

Si les matrices A et M sont inversibles alors

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(M/A)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(M/A)^{-1} \\ -(M/A)^{-1}CA^{-1} & (M/A)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Caractérisation

Définition 1.

Soit W_k une matrice de taille $n \times k$ et de rang k, W_k^L une matrice de taille $k \times n$, est une inverse à gauche de W_k si et seulement si

$$W_k^L W_k = I_k.$$

Proposition 3.

Soit W_k^L une inverse à gauche de W_k et S une matrice de taille $k \times n$. Alors

$$SW_k = 0_k \quad \Leftrightarrow \quad (W_k^L + S)W_k = I_k.$$

Caractérisation

Remarque 1.

W_k est une matrice de taille $n \times k$ et de rang k, alors il existe une matrice Y_k de taille $n \times k$ ($Y_k = W_k$) telle que

$$Y_k^T W_k \textit{ soit inversible}.$$

On remarque aussi que $(Y^T W_k)^{-1} Y^T$ est une inverse à gauche de W_k.

Remarque 2.

Soit W_k^g une inverse à gauche de W_k, et Z_k une matrice de taille $n \times k$ alors on peut choisir

$$S = Z_k^T (I_n - W_k W_k^g).$$

Caractérisation

En utilisant la définition d'une inverse à gauche, la proposition 3 et les remarques précédentes, on a

Théorème 1.

Soit W_k une matrice de taille $n \times k$ et de rang k, et W_k^g une inverse à gauche de W_k. Alors W_k^L est une inverse à gauche de W_k si et seulement si il existe une matrice Z_k de taille $n \times k$ telle que

$$W_k^L = W_k^g + Z_k^T (I_n - W_k W_k^g). \tag{2}$$

Cas particulier :

$$W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T,$$

$$W_k^L = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T + Z_k^T (I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T). \tag{3}$$

Cas particulier : $W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$

On va poser

$$Q_k = (Y_k^T W_k)^{-1}, \quad T_k = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T,$$
$$S_k = I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T, \quad G_k = I_n - W_k W_k^L.$$

Remarque 3.

On remarque que

$$S_k^2 = S_k, \quad G_k^2 = G_k.$$

et

$$\begin{aligned} S_k &= I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T \\ &= I_n - W_k T_k, \end{aligned} \tag{4}$$

Cas particulier : $W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$

Remarque 4.

$$
\begin{aligned}
W_k^L &= (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T - Z_k^T W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T + Z_k^T \\
&= T_k - Z_k^T W_k T_k + Z_k^T \\
&= T_k + Z_k^T (I_n - W_k T_k) \\
&= T_k + Z_k^T S_k .
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
G_k &= I_n - W_k W_k^L \\
&= I_n - W_k (T_k + Z_k^T S_k) \\
&= I_n - W_k T_k - W_k Z_k^T S_k \\
&= S_k - W_k Z_k^T S_k \\
&= (I_n - W_k Z_k^T) S_k .
\end{aligned} \tag{6}
$$

CAS PARTICULIER : $W_k^g = (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$

Soient

$$W_{k+1} = [W_k, w_{k+1}],\ Y_{k+1} = [Y_k, y_{k+1}],\ Z_{k+1} = [Z_k, z_{k+1}],$$

des matrices obtenues en rajoutant une colonne à chacune des matrice W_k, Y_k et Z_k. On suppose que W_{k+1} est de rang $k+1$ et que

$$Y_{k+1}^T W_{k+1} \quad \textit{est inversible.}$$

Relation entre T_{k+1} et T_k

En utilisant la Proposition 2 on obtient

$$
\begin{aligned}
Q_{k+1} &= (Y_{k+1}^T W_{k+1})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} Y_k^T W_k & Y_k^T w_{k+1} \\ y_{k+1}^T W_k & y_{k+1}^T w_{k+1} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} Q_k + T_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} W_k Q_k & -T_k \frac{w_{k+1}}{\alpha_k} \\ -\frac{y_{k+1}^T}{\alpha_k} W_k Q_k & \frac{1}{\alpha_k} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{7}
$$

Relation entre T_{k+1} et T_k

avec

$$\begin{aligned} \alpha_k &= y_{k+1}^T w_{k+1} - y_{k+1}^T W_k T_k w_{k+1} \\ &= y_{k+1}^T S_k w_{k+1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Relation entre T_{k+1} et T_k

En utilisant l'expression de T_{k+1} et la relation (7) on obtient

$$\begin{aligned}
T_{k+1} &= (Y_{k+1}^T W_{k+1})^{-1} Y_{k+1}^T \\
&= \begin{pmatrix} Q_k + T_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} W_k Q_k & -T_k \frac{w_{k+1}}{\alpha_k} \\ -\frac{y_{k+1}^T}{\alpha_k} W_k Q_k & \frac{1}{\alpha_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_k^T \\ y_{k+1}^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_k (I_n - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k) \\ \frac{y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Relation entre S_{k+1} et S_k

En utilisant les relations (4) et (9) on obtient

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= I_n - W_{k+1} T_{k+1} \\ &= I_n - W_k T_k \left(I_n - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k\right) - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k \\ &= S_k - S_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k. \end{aligned} \tag{10}$$

RELATION ENTRE G_{k+1} ET G_k

En utilisant les relations (6) et (10) on obtient

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (I_n - W_{k+1} Z_{k+1}^T) S_{k+1} \\ &= (I_n - W_k Z_k^T - w_{k+1} z_{k+1}^T)(S_k - S_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k) \qquad (11) \\ &= (G_k - w_{k+1} z_{k+1}^T S_k)(I_n - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k). \end{aligned}$$

Relation entre W_{k+1}^L et W_k^L

En utilisant les relations (3) et (9) on obtient

$$\begin{aligned} W_{k+1}^L &= T_{k+1} + Z_{k+1}^T S_{k+1} \\ &= \begin{pmatrix} W_k^L(I_n - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k) \\ \frac{y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k + z_{k+1}^T S_{k+1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

PROPRIÉTÉS

On a les propriétés suivantes

PROPOSITION 4.

1. $S_k S_{k+1} = S_{k+1}$, car $S_k^2 = S_k$.
2. $S_{k+1} S_k = S_{k+1}$, car $S_k^2 = S_k$.
3. $S_k W_k = 0$, car $S_k = I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$.
4. $Y_k^T S_k = 0$, car $S_k = I_n - W_k (Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T$.
5. $S_k G_k = S_k$, car $S_k W_k = 0$.
6. $G_k S_k = G_k$, car $S_k^2 = S_k$.
7. $G_k W_k = 0$, car $G_k = I_n - W_k W_k^L$.
8. $W_k^L G_k = 0$, car $G_k = I_n - W_k W_k^L$.

Propriétés

on a aussi

1. $S_{k+1} W_k = 0$, car $S_k W_k = 0$.
2. $G_{k+1} W_k = 0$, car $S_k W_k = 0$.
3. $S_{k+1} G_k = S_{k+1}$, car $S_k G_k = S_k$.
4. $G_{k+1} S_k = G_{k+1}$, car $S_{k+1} S_k = S_{k+1}$.
5. $G_k G_{k+1} = G_k$, car $G_k W_k = 0$.
6. $G_{k+1} G_k = G_{k+1}$, car $S_k G_k = S_k$.

Un algorithme de calcul de W_k^L

Algorithme 1.

- w_1, y_1 et z_1 sont des vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$,
- on pose $W_1 = w_1$, $Y_1 = y_1$ et $Z_1 = z_1$,
- on suppose que $Y_1^T W_1 \neq 0$, on calcule
- $S_1 = I_n - W_1(Y_1^T W_1)^{-1} Y_1^T$,
  $W_1^L = (Y_1^T W_1)^{-1} Y_1^T + Z_1^T (I_n - W_1(Y_1^T W_1)^{-1} Y_1^T)$
- pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on pose
- $W_{k+1} = (W_k \;\; w_{k+1})$, $Y_{k+1} = (Y_k \;\; y_{k+1})$ et $Z_{k+1} = (Z_k \;\; z_{k+1})$,
- on suppose que $Y_{k+1}^T W_{k+1}$ est inversible, on calcule
- $\alpha_k = y_{k+1}^T S_k w_{k+1}$, $S_{k+1} = S_k - S_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k$,
- $W_{k+1}^L = \begin{pmatrix} W_k^L (I_n - \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k) \\ \frac{y_{k+1}^T}{\alpha_k} S_k + z_{k+1} S_{k+1} \end{pmatrix}$

Application

On considère le système linéaire suivant

$$Ax = b, \tag{13}$$

où A est une matrice $n \times n$, inversible et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $x^* = A^{-1}b$..

Soit x_0 un vecteur donné et $r_0 = b - Ax_0$ le résidu associé

$$x^* - x_0 = A^{-1}b - x_0 = A^{-1}(b - Ax_0) = A^{-1}r_0,$$

On va poser $t_0 = x_0$ et pour $k = 1, \ldots, CV$

$$\begin{aligned} t_k - x^* &= S_k(x_0 - x^*) \\ &= (I_n - W_k(Y_k^T W_k)^{-1} Y_k^T)(x_0 - x^*), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} x_k - x^* &= G_k(x_0 - x^*) = (I_n - W_k Z_k^T) S_k(x_0 - x^*) \\ &= (I_n - W_k Z_k^T)(t_k - x^*). \end{aligned} \tag{15}$$

Application

En utilisant la Proposition 4 on a les propriétés suivantes.

Proposition 5.

1. $t_k - x^* = S_k(x_k - x^*)$, car $S_k = S_k G_k$.
2. $x_k - x^* = G_k(t_k - x^*)$, car $G_k = G_k S_k$.
3. $x_k = x^* \Leftrightarrow t_k = x^*$.

On va exprimer t_{k+1} et x_{k+1} en fonction de t_k et x_k. En utilisant les relations (10) et (11) on obtient

$$t_{k+1} = t_k + \frac{y_{k+1}^T(x^* - t_k)}{\alpha_k} S_k w_{k+1}, \quad (16)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{y_{k+1}^T(x^* - t_k)}{\alpha_k} G_k w_{k+1} + z_{k+1}^T(x^* - t_{k+1}) w_{k+1}. \quad (17)$$

Application

En utilisant les relations (14) et (15) et la Proposition 5 on a

Proposition 6.

Il existe $n_0 \leq n$ telle que $x_{n_0} = t_{n_0} = x^*$.

On remarque que t_{k+1} et x_{k+1} existent si et seulement si $\alpha_k \neq 0$. Or

$$\alpha_k = y_{k+1}^T S_k w_{k+1} = (Y_{k+1}^T W_{k+1} / Y_k^T W_k).$$

Et en utilisant la Proposition 1, on obtient

$$\alpha_k = det(Y_{k+1}^T W_{k+1}) / det(Y_k^T W_k).$$

Application

Donc

$$\alpha_k \neq 0 \text{ si et seulement si } det(Y_{k+1}^T W_{k+1}) \neq 0.$$

Définition 2.

La matrice $Y_{n_0}^T W_{n_0}$ est une matrice fortement inversible si et seulement si $det(Y_k^T W_k) \neq 0$, pour $k = 1, \ldots, n_0$.

Donc si $Y_{n_0}^T W_{n_0}$ est une matrice fortement inversible alors t_k et x_k existent pour $k = 1, \ldots, n_0$.

Application

Dans S_k et G_k on va remplacer Y_k et Z_k par $A^T Y_k$ et $A^T Z_k$ et on pose $s_k = b - At_k = A(x^* - t_k)$. On obtient

$$S_{k+1} = S_k - S_k \frac{w_{k+1} y_{k+1}^T}{\alpha_k} A S_k, \tag{18}$$

$$G_{k+1} = (I_n - W_{k+1} Z_{k+1}^T A) S_{k+1}. \tag{19}$$

Et les relations (16) et (17) deviennent

$$t_{k+1} = t_k + \frac{y_{k+1}^T s_k}{\alpha_k} S_k w_{k+1}, \tag{20}$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{y_{k+1}^T s_k}{\alpha_k} G_k w_{k+1} + z_{k+1}^T s_{k+1} w_{k+1}. \tag{21}$$

Application

Avec

$$\alpha_k = y_{k+1}^T A S_k w_{k+1}. \tag{22}$$

Remarquons que t_{k+1} et α_k necéssitent le calcul de $S_k w_{k+1}$. Ceci peut être fait récursivement. Pour $i = 1, \ldots, k$, posons $u_{i,k+1} = S_i w_{k+1}$, ainsi $S_k w_{k+1} = u_{k,k+1} = u_k$. Or

$$S_i = S_{i-1} - S_{i-1} \frac{w_i y_i^T}{\alpha_{i-1}} A S_{i-1},$$

d'où

$$u_{i,k+1} = u_{i-1,k+1} - \frac{y_i^T A u_{i-1,k+1}}{y_i^T A u_{i-1,i}} u_{i-1,i}.$$

Application

On prend $u_0 = w_1$, l'algorithme 2 calcule u_k, pour $k \leq n_0$.

Algorithme 2.

- $u = w_{k+1}$,
- pour $i = 1, \ldots, k$, on calcule
  $$u = u - \frac{y_i^T A u}{y_i^T A u_{i-1}} u_{i-1},$$
- fin i.
- $u_k = u$.

x_{k+1} nécessite le calcul de $G_k w_{k+1}$. On pose $g_k = G_k w_{k+1}$

$$\begin{aligned} g_k &= (I_n - W_k Z_k^T A) S_k w_{k+1} \\ &= S_k w_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} w_i z_i^T A S_k w_{k+1} \\ &= u_k - \sum z_i^T A u_k w_i. \end{aligned}$$

Application

On donne l'algorithme qui calcule $g_k = G_k w_{k+1}$.

Algorithme 3.

- $g = u_k$
- pour $i = 1, \dots, k$, on calcule
  $$g = g - z_i^T A u_k w_i,$$
- fin i
- $g_k = g$.

Soit Y_k la matrice dont les colonnes sont notées par y_i,

$$Vect(Y_k) = sev\{y_1, y_2, \dots, y_k\}.$$

CAS : $Vect(Z_k) \neq Vect(Y_k)$

Lorsque $Vect(Z_k) \neq Vect(Y_k)$ on a l'algorithme suivant.

ALGORITHME 4.

- x_0 un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, $t_0 = x_0$, $r_0 = s_0 = b - Ax_0$, $u_0 = w_1$, $g_0 = w_1$,
- pour $k = 0, \ldots, n_0$, on calcule $\alpha_k = y_{k+1}^T A u_k$, si $\alpha_k = 0$ arrêter

$$t_{k+1} = t_k + \frac{y_{k+1}^T s_k}{\alpha_k} u_k,$$
$$s_{k+1} = s_k - \frac{y_{k+1}^T s_k}{\alpha_k} A u_k,$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{y_{k+1}^T s_k}{\alpha_k} g_k + z_{k+1}^T s_{k+1} w_{k+1},$$

- u_{k+1} se calcule par l'algorithme 2,
- g_{k+1} se calcule par l'algorithme 3.

Cas : $Vect(Z_k) \subseteq Vect(Y_k)$

En utilisant ($Y_k^T A S_k = 0$) de la Proposition 4, on obtient

$$G_k = S_k = I_n - W_k(Y_k^T A W_k)^{-1} Y^T A \text{ et } t_k = x_k.$$

La relation (15) devient

$$\begin{aligned} x_k - x_0 &= S_k(x_0 - x^*) \\ &= (I_n - W_k(Y_k^T A W_k)^{-1} Y_k^T A)(x_0 - x^*) \\ &= x_0 - x^* - W_k(Y_k^T A W_k)^{-1} Y_k^T A(x_0 - x^*), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} x_k &= x_0 - W_k(Y_k^T A W_k)^{-1} Y_k^T A(x_0 - x^*) \\ &= x_0 + W_k(Y_k^T A W_k)^{-1} Y_k^T r_0. \end{aligned} \tag{22}$$

Cas : $Vect(Z_k) \subseteq Vect(Y_k)$

Algorithme 5.

- x_0 un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, $r_0 = b - Ax_0$, $u_0 = w_1$,
- pour $k = 0, \ldots, n_0$, on calcule

  $\alpha_k = y_{k+1}^T A u_k$, si $\alpha_k = 0$ arrêter

  $x_{k+1} = x_k + \frac{y_{k+1}^T r_k}{\alpha_k} u_k$,

  $r_{k+1} = b - Ax_{k+1} = r_k - \frac{y_{k+1}^T r_k}{\alpha_k} A u_k$,

  u_{k+1} est calculé par l'algorithme 2.
- fin k.

Cas : $Vect(Z_k) \subseteq Vect(Y_k)$

Les identifications se font soit en utilisant la relation (22) soit en utilisant l'Algorirhme 5.

Algorithme	*Conditions*	*Choix de y_k*	*Choix de w_k*
CG	*A SPD*	p_{k-1}	r_{k-1}
CR	*A inver.*	Ap_{k-1}	r_{k-1}
CGNE	*A inver.*	r_{k-1}	$A^T r_{k-1}$
CGNR	*A inver.*	Ap_{k-1}	r_{k-1}
GCR	*A et H_0 inver.*	Ar_{k-1}	r_{k-1}
Daniel	*A inver.* *H et K SPD*	HAp_{k-1}	$KA^T Hr_{k-1}$
PGCR	*A inver.* *H SPD et K PD*	Ap_{k-1}	$KA^T Hr_{k-1}$

CAS : $Vect(Z_k) \subseteq Vect(Y_k)$

Algorithme	Conditions	Choix de y_k	Choix de w_k
GCD	A inver. H SPD	Hd_k	d_k
Axelsson Vassilevsky	A inver. B SPD	BAp_{k-1}	p_{k-1}
Orthodir	A inver. ZA PD	$Z^T q_{k-1}$	$w_1 = q_0$ $w_k = Aq_{k-2}$
Orthomin	A inver. Z et ZA PD	$Z^T p_{k-1}$	$w_k = r_{k-1}$
ABS	A et H_0 inver.	v_k	$H_0^T q_0$
FOM	A inver.	v_k	$w_k = v_k$
GMRES	A inver.	Av_k	$w_k = v_k$

Conclusion

Questions ouvertes :

1. Quel est le choix de W_k, Y_k et Z_k pour retrouver les algorithmes : CGS, bi-cgstab, IDR,...
2. Les versions globales et par blocs et leurs applications.

A. Messaoudi,
Recursive interpolation Algorithm : a formalism for linear equations, I. Direct methods,
J. Comp. Appl. Math 76 (1996) 13-30

A. Messaoudi,
Recursive interpolation Algorithm : a formalism for linear equations, II. Iterative methods,
J. Comp. Appl. Math 76 (1996) 31-53.

Y. Saad
Iterative methods for sparse linear systems,
PWS. Publishing Company, 1996.

H. Van der Vorst,
Iterative Krylov methods for large linear systems,
Cambridge University Press, 2003.

Merci pour votre attention