Méthodes des éléments finis
Modélisation et Simulation Numérique,
Méthode des éléments finis,

S. EL HAJJI (FSR, LabMiA)
Université Mohammed V de Rabat

2017-2018

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs
2. Défintion des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs
2. Défintion des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$
3. Formulation faible de l'équation de Poisson

Plan

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs
2. Défintion des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$
3. Formulation faible de l'équation de Poisson
4. Existence et unicité de la solution faible : Théorème de Lax-Milgram
5. Discrétisation par éléments finis (1D)

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs
2. Défintion des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$
3. Formulation faible de l'équation de Poisson
4. Existence et unicité de la solution faible : Théorème de Lax-Milgram
5. Discrétisation par éléments finis (1D)
6. Mise en oeuvre sur Matlab (1D)

Plan

1. Introduction : Classification des EDPs
2. Défintion des espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$
3. Formulation faible de l'équation de Poisson
4. Existence et unicité de la solution faible : Théorème de Lax-Milgram
5. Discrétisation par éléments finis (1D)
6. Mise en oeuvre sur Matlab (1D)
7. Discrétisation par éléments finis P1 (2D)

Plan

Références

1. Sobolev Spaces John J. F. Fournier, Second éedition 2003, Elsevier, Pure and Applied Mathematics series.

Références

1. Sobolev Spaces John J. F. Fournier, Second éedition 2003, Elsevier, Pure and Applied Mathematics series.
2. Méthode des éléments finis, De la théorie à la pratique. II, Complément. Eliane Bécache, Patrick Ciarlet, Cristophe Hazard, Eric Lunéville
   Les presses de L'ENSTA.

Références

1. Sobolev Spaces John J. F. Fournier, Second éedition 2003, Elsevier, Pure and Applied Mathematics series.
2. Méthode des éléments finis, De la théorie à la pratique. II, Complément. Eliane Bécache, Patrick Ciarlet, Cristophe Hazard, Eric Lunéville
   Les presses de L'ENSTA.
3. Equations aux dérivées partielles, cours et exercices corrigés. Claire Davide, Pierre Gosselet. Dunod (2012)

- Soit le problème de Dirichlet : trouver u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u\,(x) + u\,(x) & = & f \qquad x \in \left]0,1\right[\times \left]0,1\right[\\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

on suppose que

- Soit le problème de Dirichlet : trouver u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) & = & f \qquad x \in \left]0,1\right[\times \left]0,1\right[\\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

on suppose que

- $f \in L^2(\Omega)$

- Soit le problème de Dirichlet : trouver u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) & = & f \qquad x \in \,]0,1[\times]0,1[\\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

on suppose que

- $f \in L^2(\Omega)$
- La formulation variationnelle associée est

- $$V = H_0^1(\Omega)$$

- $$V = H_0^1(\Omega)$$

- $$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{1 \leq i \leq 2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u.v \right) .dx$$

- $$V = H_0^1\left(\Omega\right)$$

- $$a\left(u, v\right) = \int_\Omega \left(\sum_{1\leq i\leq 2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u.v \right) .dx$$

- $$L\left(v\right) = \int_\Omega f.v.dx$$

- La formulation au dessus est obtenue de la même manière qu'en dimension 1,

- La formulation au dessus est obtenue de la même manière qu'en dimension 1,
- sauf qu'au lieu d'intégrer par partie, on utilise le théorème de Green :

- La formulation au dessus est obtenue de la même manière qu'en dimension 1,
- sauf qu'au lieu d'intégrer par partie, on utilise le théorème de Green :
- $$\forall\ u, v \in H^1(\Omega)\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v.dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u.dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}.n_i.v.d\Gamma$$

- La formulation au dessus est obtenue de la même manière qu'en dimension 1,
- sauf qu'au lieu d'intégrer par partie, on utilise le théorème de Green :
- $$\forall\ u, v \in H^1(\Omega)\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v.dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u.dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}.n_i.v.d\Gamma$$
- sachant que n_i désigne la *ième* coordonnée de la normale extérieure à Γ.

Remarque

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (1).

- l'idée consiste à recouvrir le domaine Ω par des éléments T_k avec $k \in \{1, ..., N\}$ de petite taille (déstinée à tendre vers zéro) et de forme simple : ce seront essentiellement des rectangles ou des triangles.

- l'idée consiste à recouvrir le domaine Ω par des éléments T_k avec $k \in \{1, ..., N\}$ de petite taille (déstinée à tendre vers zéro) et de forme simple : ce seront essentiellement des rectangles ou des triangles.
- On notera $h\,(T_k)$ le diamètre de l'élément T_k, $h = \max_{k\in\{1,...,N\}} h\,(T_k)$ et τ_h l'ensemble de les éléments T_k, $k \in \{1, ..., N\}$.

- l'idée consiste à recouvrir le domaine Ω par des éléments T_k avec $k \in \{1, ..., N\}$ de petite taille (déstinée à tendre vers zéro) et de forme simple : ce seront essentiellement des rectangles ou des triangles.
- On notera $h\,(T_k)$ le diamètre de l'élément T_k, $h = \max\limits_{k \in \{1,...,N\}} h\,(T_k)$ et τ_h l'ensemble de les éléments T_k, $k \in \{1, ..., N\}$.
- τ_h s'appelle une triangulation.

Définition

Une triangulation est admissible si

1. *l'intersection entre deux éléments T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.*

Définition

Une triangulation est admissible si

1. *l'intersection entre deux éléments T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.*
2. *Tous les coins de $\partial\Omega$ sont des sommets des éléments de τ_h.*

Définition

Une triangulation est admissible si

1. *l'intersection entre deux éléments T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.*
2. *Tous les coins de $\partial\Omega$ sont des sommets des éléments de τ_h.*
3. *Inversement, soit $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{N} T_k$; tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ sont des points de $\partial\Omega$.*

Définition

Une triangulation est admissible si

1. *l'intersection entre deux éléments T_k et $T_{k'}$ est soit vide, soit réduite à un point, soit réduite à un côté tout entier.*
2. *Tous les coins de $\partial\Omega$ sont des sommets des éléments de τ_h.*
3. *Inversement, soit $\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{N} T_k$; tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ sont des points de $\partial\Omega$.*
4. *Les éléments ne sont pas dégénérés.*

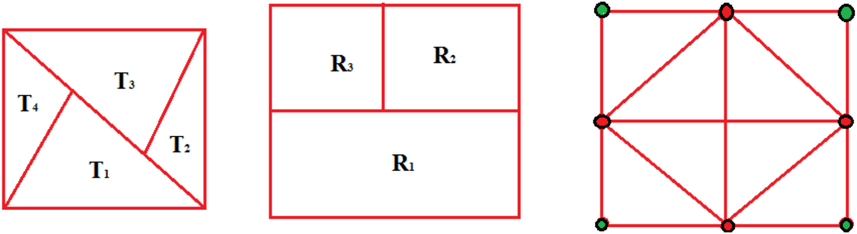


Figure: Exemples de triangulations non admissibles

Remarque

- *En général* $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_h$ *mais pour simplification on supposera que* $\overline{\Omega} = \Omega_h$*, ceci revient àsupposer que* Ω *est un domaine à frontière polygonale.*

Remarque

- *En général* $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_h$ *mais pour simplification on supposera que* $\overline{\Omega} = \Omega_h$, *ceci revient àsupposer que* Ω *est un domaine à frontière polygonale.*
- *Pour la convergence de la méthode nous supposerons également que*

$$\exists\ c > 0 \ \textit{tel que}\ \forall h > 0 \ \sup_{T \in \tau_h} \frac{h\,(T)}{\varrho\,(T)} \leq c$$

Remarque

- *En général* $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_h$ *mais pour simplification on supposera que* $\overline{\Omega} = \Omega_h$, *ceci revient àsupposer que* Ω *est un domaine à frontière polygonale.*
- *Pour la convergence de la méthode nous supposerons également que*

$$\exists\ c > 0 \text{ tel que } \forall h > 0 \ \sup_{T \in \tau_h} \frac{h(T)}{\varrho(T)} \leq c$$

- *avec* $\varrho(T)$ *désigne le diamètre du plus grand cercle inscrit dans l'élément* T.

Remarque

- *En général* $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_h$ *mais pour simplification on supposera que* $\overline{\Omega} = \Omega_h$, *ceci revient àsupposer que* Ω *est un domaine à frontière polygonale.*
- *Pour la convergence de la méthode nous supposerons également que*

$$\exists\ c > 0 \text{ tel que } \forall h > 0 \ \sup_{T \in \tau_h} \frac{h(T)}{\varrho(T)} \leq c$$

- *avec* $\varrho(T)$ *désigne le diamètre du plus grand cercle inscrit dans l'élément* T.
- *on souhaite résoudre le problème (1) de manière approchée.*

Remarque

- *En général* $\overline{\Omega} \neq \overline{\Omega}_h$ *mais pour simplification on supposera que* $\overline{\Omega} = \Omega_h$, *ceci revient àsupposer que* Ω *est un domaine à frontière polygonale.*
- *Pour la convergence de la méthode nous supposerons également que*

$$\exists\ c > 0 \ \textit{tel que}\ \forall h > 0 \ \sup_{T \in \tau_h} \frac{h(T)}{\varrho(T)} \leq c$$

- *avec* $\varrho(T)$ *désigne le diamètre du plus grand cercle inscrit dans l'élément* T.
- *on souhaite résoudre le problème (1) de manière approchée.*

- on désigne par (x_1, x_2) les coordonnées dans le plan.

- Soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$

- Soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$
- on pose $h_1 = \dfrac{1}{N_1 + 1}$ et $h_2 = \dfrac{1}{N_2 + 1}$

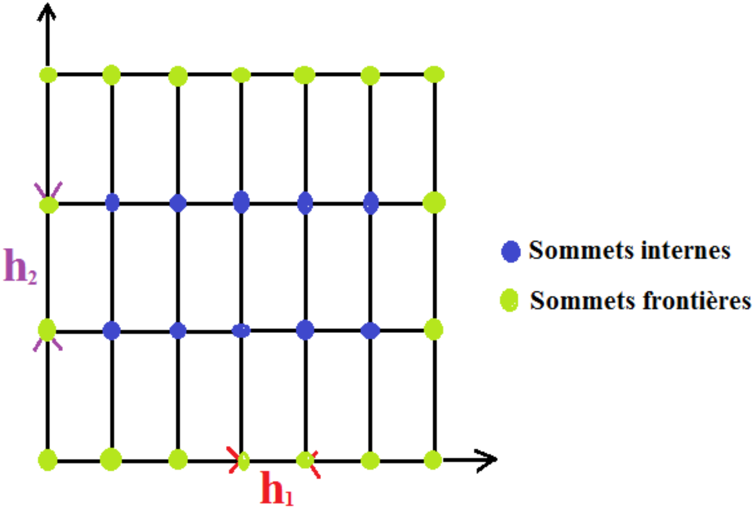
- Soit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$
- on pose $h_1 = \dfrac{1}{N_1+1}$ et $h_2 = \dfrac{1}{N_2+1}$
- Ainsi on peut obtenir un recouvrement de $\overline{\Omega}$ par $N_T = (N_1+1)(N_2+1)$ éléments rectangulaires R_k de taille h_1 dans la direction x_1 et de taille h_2 dans la direction x_2

- On note $q^{(i)}$ $i \in \{1, ..., N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)\}$ les points du maillage, i.e, les sommets des rectangles de la triangulation.

- On note $q^{(i)}$ $i \in \{1, ..., N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)\}$ les points du maillage, i.e, les sommets des rectangles de la triangulation.
- on désigne par

- On note $q^{(i)}$ $i \in \{1, ..., N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)\}$ les points du maillage, i.e, les sommets des rectangles de la triangulation.
- on désigne par
  - $N_f = 2(N_1 + N_2) + 4$ le nombres de sommets situés sur le bord de Ω (sommets frontières)

- On note $q^{(i)}$ $i \in \{1, ..., N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)\}$ les points du maillage, i.e, les sommets des rectangles de la triangulation.
- on désigne par
  - $N_f = 2(N_1 + N_2) + 4$ le nombres de sommets situés sur le bord de Ω (sommets frontières)
  - $N_i = N_s - N_f = N_1.N_2$ le nombre de sommets qui ne sont pas situés sur la frontière (sommets internes)



Exemple de Maillage

- On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes à deux variables qui sont de degré ≤ 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2.

- On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes à deux variables qui sont de degré ≤ 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2.
- Les polynômes 1, x_1, x_2, $x_1 x_2$

- On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes à deux variables qui sont de degré ≤ 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2.
- Les polynômes $1, x_1, x_2, x_1 x_2$
- On introduit l'espace

$$V_h = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que } \left. v\right|_{R_k} \in Q^1 \; k = 1, , , N_T \right\}$$

- On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes à deux variables qui sont de degré ≤ 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2.
- Les polynômes 1, x_1, x_2, $x_1 x_2$
- On introduit l'espace

$$V_h = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que } v\big|_{R_k} \in Q^1 \;\; k = 1, , , N_T \right\}$$

- et l'espace

$$V_{0h} = \{ v \in V_h \text{ tel que } v\big|_{\Gamma} = 0 \}$$

- On note Q^1 l'espace vectoriel des polynômes à deux variables qui sont de degré ≤ 1 par rapport à chacune des deux variables x_1 et x_2.
- Les polynômes $1,\ x_1,\ x_2,\ x_1 x_2$
- On introduit l'espace

$$V_h = \left\{ v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \text{ tel que } \left. v\right|_{R_k} \in Q^1 \;\; k = 1,,, N_T \right\}$$

- et l'espace

$$V_{0h} = \{ v \in V_h \text{ tel que } \left. v\right|_{\Gamma} = 0 \}$$

- $h = \max\left(h_1, h_2\right)$

Proposition

1. *Les fonctions de V_h sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_s sommets $q^{(i)}$ du maillage.*

Proposition

1. *Les fonctions de V_h sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_s sommets $q^{(i)}$ du maillage.*
2. *La dimension de l'espace V_h est $N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)$*

Proposition

1. *Les fonctions de V_h sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_s sommets $q^{(i)}$ du maillage.*
2. *La dimension de l'espace V_h est $N_s = (N_1 + 2)(N_2 + 2)$*
3. *La famille de fonctions $\left\{\omega^{(i)}\right\}_{1 \leq i \leq N_s}$ de V_h donnée par*

$$\omega^{(i)}\left(q^{(j)}\right) = \delta_{ij}$$

définit une base de l'espace V_h et on a pour tout $v_h \in V_h$

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_s} v_h\left(q^{(i)}\right)\omega^{(i)}$$

Définition

Les scalaires $v_h\left(q^{(i)}\right)$ *sont appelés les degrés de liberté de la fonction* v_h

Proposition

1. $V_h \subset H^1(\Omega)$

Définition

Les scalaires $v_h\left(q^{(i)}\right)$ sont appelés les degrés de liberté de la fonction v_h

Proposition

1. $V_h \subset H^1(\Omega)$
2. *Pour tout $v_h \in V_h$ on a au sens des distributions*

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N_T} \chi_{\overset{\circ}{R}_K} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_h\big|_{\overset{\circ}{R}_K} \right)$$

avec $\chi_{\overset{\circ}{R}_K}$ la fonction indicatrice de $\overset{\circ}{R}_K$

Proposition

1. *Les fonctions de* V_{0h} *sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des sommets* $q^{(i)}$ *internes du maillage.*

Proposition

1. *Les fonctions de* V_{0h} *sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des sommets* $q^{(i)}$ *internes du maillage.*
2. *La dimension de l'espace* V_{0h} *est égale au nombres de sommets internes du maillage :*N_i $(N_i = N_s - N_f = N_1 N_2)$

Proposition

1. *Les fonctions de* V_{0h} *sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des sommets* $q^{(i)}$ *internes du maillage.*
2. *La dimension de l'espace* V_{0h} *est égale au nombres de sommets internes du maillage :*N_i $(N_i = N_s - N_f = N_1 N_2)$
3. *Les fonctions* $\omega^{(i)}$ *correspondantes aux sommets internes du maillage forment une base de* V_{0h} *et*

$$\forall v_h \in V_{0h} \text{ tel que } v_h = \sum_{i / q^i \notin \Gamma} v_h\left(q^{(i)}\right)\omega^{(i)}$$

Proposition

1. *Les fonctions de V_{0h} sont entièrement détérminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des sommets $q^{(i)}$ internes du maillage.*
2. *La dimension de l'espace V_{0h} est égale au nombres de sommets internes du maillage :N_i $(N_i = N_s - N_f = N_1 N_2)$*
3. *Les fonctions $\omega^{(i)}$ correspondantes aux sommets internes du maillage forment une base de V_{0h} et*

$$\forall v_h \in V_{0h} \text{ tel que } v_h = \sum_{i/q^i \notin \Gamma} v_h\left(q^{(i)}\right)\omega^{(i)}$$

4. $V_{0h} \subset H_0^1(\Omega)$

- On suppose que les indices des sommets internes du maillage sont numérotés de 1 à N_i

- On suppose que les indices des sommets internes du maillage sont numérotés de 1 à N_i
- Ainsi, on cherche u_h de la forme

$$u_h = v_h = \sum_{j=1}^{N_i} u_j \omega^{(j)}$$

- On suppose que les indices des sommets internes du maillage sont numérotés de 1 à N_i
- Ainsi, on cherche u_h de la forme

$$u_h = v_h = \sum_{j=1}^{N_i} u_j \omega^{(j)}$$

- Les composantes $(u_1, .., u_{N_i})$ sont alors solution du système linéaire

$$AU = b$$

- avec

$$A_{ij} = \int_\Omega \left(\nabla \omega^{(i)} \nabla \omega^{(j)} + \omega^{(i)} \omega^{(j)} \right) dx$$

- avec

$$A_{ij} = \int_\Omega \left(\nabla \omega^{(i)} \nabla \omega^{(j)} + \omega^{(i)} \omega^{(j)} \right) dx$$

- et

$$b_i = \int_\Omega f . \omega^{(i)} . dx$$

- d'une manière plus explicite

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_T} \underbrace{\int_{R_k} \left(\nabla\omega^{(i)} \nabla\omega^{(j)} + \omega^{(i)}\omega^{(j)} \right) dx}_{A_{ij}(R_k)}$$

- d'une manière plus explicite

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_T} \underbrace{\int_{R_k} \left(\nabla\omega^{(i)}\nabla\omega^{(j)} + \omega^{(i)}\omega^{(j)}\right) dx}_{A_{ij}(R_k)}$$

- et

$$b_i = \sum_{k=1}^{N_T} \underbrace{\int_{R_k} f.\omega^{(i)}.dx}_{b_i(R_k)}$$

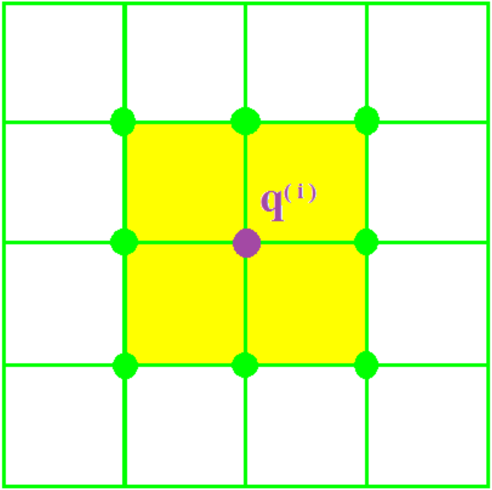
- d'une manière plus explicite

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_T} \underbrace{\int_{R_k} \left(\nabla\omega^{(i)} \nabla\omega^{(j)} + \omega^{(i)}\omega^{(j)} \right) dx}_{A_{ij}(R_k)}$$

- et

$$b_i = \sum_{k=1}^{N_T} \underbrace{\int_{R_k} f.\omega^{(i)}.dx}_{b_i(R_k)}$$

- Cette écriture montre que le calcul des coéfficients de la matrice et du second membre se ramène à une somme de contributions élémentaires $A_{ij}\left(R_k\right)$ et $b_i\left(R_k\right)$ sur chacun des rectangles de la triangulation



Contribution des éléments élémentaires

- Soit un rectangle R_k de la triangulation et on note par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ et $A^{(4)}$ ses sommets.

- Soit un rectangle R_k de la triangulation et on note par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ et $A^{(4)}$ ses sommets.
- On calcule 4 polynômes $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ et $p^{(4)}$ définis sur le rectangle R_k vérifiant

- Soit un rectangle R_k de la triangulation et on note par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ et $A^{(4)}$ ses sommets.
- On calcule 4 polynômes $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$ et $p^{(4)}$ définis sur le rectangle R_k vérifiant
- $$p^{(i)} \in Q^1 \text{ et } p^{(i)}\left(A^{(j)}\right) = \delta_{ij} \;\; i, j = 1, \ldots, 4$$

Si on pose $X = (x, y)$, on trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} p^{(1)}(X) & = & \dfrac{1}{h_1 . h_2}\left(x - x_1^{(2)}\right)\left(y - x_2^{(4)}\right) \\ p^{(2)}(X) & = & -\dfrac{1}{h_1 . h_2}\left(x - x_1^{(1)}\right)\left(y - x_2^{(4)}\right) \\ p^{(3)}(X) & = & \dfrac{1}{h_1 . h_2}\left(x - x_1^{(1)}\right)\left(y - x_2^{(1)}\right) \\ p^{(4)}(X) & = & -\dfrac{1}{h_1 . h_2}\left(x - x_1^{(2)}\right)\left(y - x_2^{(1)}\right) \end{array}\right. \tag{2}$$

avec $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right)$ les coordonnées du sommet $A^{(i)}$.

Définition

Un élément fini c'est la donnée d'un triplet $(T, P(T), \Sigma(T))$, *où*

1. T *est une partie compacte connexe et d'intérieur non vide du plan;*

Définition

Un élément fini c'est la donnée d'un triplet $(T, P(T), \Sigma(T))$, *où*

1. T *est une partie compacte connexe et d'intérieur non vide du plan;*
2. $P(T)$ *est un espace vectoriel de dimension finie formé de polynôme définis sur* T *à valeurs réelles;*

Définition

Un élément fini c'est la donnée d'un triplet $(T, P(T), \Sigma(T))$, *où*

1. T *est une partie compacte connexe et d'intérieur non vide du plan;*
2. $P(T)$ *est un espace vectoriel de dimension finie formé de polynôme définis sur* T *à valeurs réelles;*
3. $\Sigma(T)$ *est un espace vectoriel de dimension* d *finie formé de formes linéaires définies sur* $P(T)$.

Définition

- *Un élément fini* $(T, P(T), \Sigma(T))$ *est dit unisolvant si étant donnés* d *nombres réels* $\alpha_1, ..., \alpha_d$*, il existe un unique polynôme* p *de l'espace* $P(T)$ *tel que pour chaque* $i \in \{1, ..., d\}$ *on ait* $\varphi_i(p) = \alpha_i$*,où* $(\varphi_1, ..., \varphi_d)$ *est une base* $\Sigma(T)$*. L'espace* $\Sigma(T)$ *définit alors ce qu'on appelle les degrés de liberté des fonctions de* $P(T)$*.*

Remarque

Définition

- *Un élément fini* $(T, P(T), \Sigma(T))$ *est dit unisolvant si étant donnés* d *nombres réels* $\alpha_1, ..., \alpha_d$, *il existe un unique polynôme p de l'espace* $P(T)$ *tel que pour chaque* $i \in \{1, ..., d\}$ *on ait* $\varphi_i(p) = \alpha_i$,*où* $(\varphi_1, ..., \varphi_d)$ *est une base* $\Sigma(T)$. *L'espace* $\Sigma(T)$ *définit alors ce qu'on appelle les degrés de liberté des fonctions de* $P(T)$.

Remarque

- *On peut associer aux polynômes définis par (2) les formes linéaires suivantes*

$$\left(p^{(i)}\right)^* : \begin{array}{ccc} Q^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longrightarrow & p\left(A^{(i)}\right) \end{array} \quad i = 1, , , 4$$

Remarque

Par abus de notation on confondera $\left(p^{(i)}\right)^*$ *avec* $p\left(A^{(i)}\right)$ $(i = 1, , , 4)$

Proposition

L'élément fini $(T, P(T), \Sigma(T))$ *où*

1. $T = R_k$

est unisolvant.

Remarque

Par abus de notation on confondera $\left(p^{(i)}\right)^*$ *avec* $p\left(A^{(i)}\right)$ $(i = 1, , , 4)$

Proposition

L'élément fini $(T, P(T), \Sigma(T))$ *où*

1. $T = R_k$
2. $P(T) = Q^1$

est unisolvant.

Remarque

Par abus de notation on confondera $\left(p^{(i)}\right)^*$ *avec* $p\left(A^{(i)}\right)$ $(i = 1,,,4)$

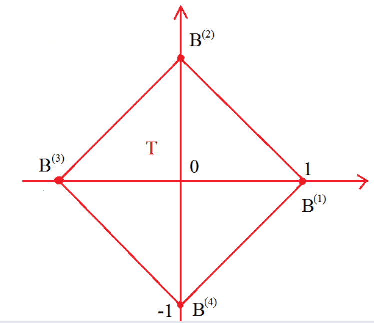
Proposition

L'élément fini $(T, P(T), \Sigma(T))$ *où*

1. $T = R_k$
2. $P(T) = Q^1$
3. $\Sigma(T) = \left\{p\left(A^{(1)}\right), p\left(A^{(2)}\right), p\left(A^{(3)}\right), p\left(A^{(4)}\right)\right\}$

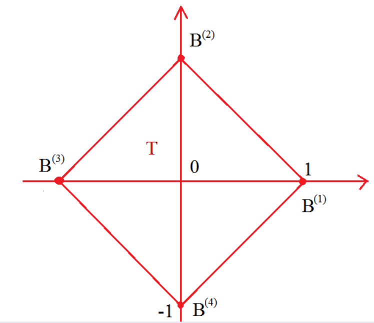
est unisolvant.

Exemple

- 

Elément fini non unisolvant

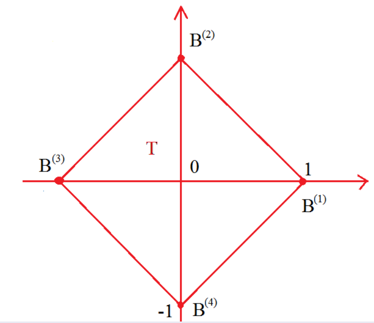
Exemple

- 

Elément fini non unisolvant

- avec $P(T) = Q^1 = vect\{1, x, y, xy\}$

Exemple

- 

Elément fini non unisolvant

- *avec* $P(T) = Q^1 = vect\{1, x, y, xy\}$
- *il suffit de considérer* $p(x, y) = xy$

Remarque

Soit $q^{(i)}$ *un sommet ,* $\omega^{(i)}$ *la fonction chapeau associé et* R_k *un élément de la triangulation de sommets* $\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}\right\}$

1. *si* $q^{(i)} \in R_k$ *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k}$ *coincide avec l'un des* $p^{(i)}$ *définis par (2)*

Remarque

Soit $q^{(i)}$ *un sommet ,* $\omega^{(i)}$ *la fonction chapeau associé et* R_k *un élément de la triangulation de sommets* $\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}\right\}$

1. *si* $q^{(i)} \in R_k$ *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k}$ *coincide avec l'un des* $p^{(i)}$ *définis par (2)*
   - *si par exmple* $q^{(i)}$ *coincide avec le sommet* $A^{(1)}$ *de* R_k *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k} = p^{(1)}$

Remarque

Soit $q^{(i)}$ *un sommet ,* $\omega^{(i)}$ *la fonction chapeau associé et* R_k *un élément de la triangulation de sommets* $\left\{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}\right\}$

1. *si* $q^{(i)} \in R_k$ *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k}$ *coincide avec l'un des* $p^{(i)}$ *définis par (2)*
   - *si par exmple* $q^{(i)}$ *coincide avec le sommet* $A^{(1)}$ *de* R_k *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k} = p^{(1)}$
2. *si* $q^{(i)} \notin R_k$ *alors* $\omega^{(i)}\Big|_{R_k} = 0$

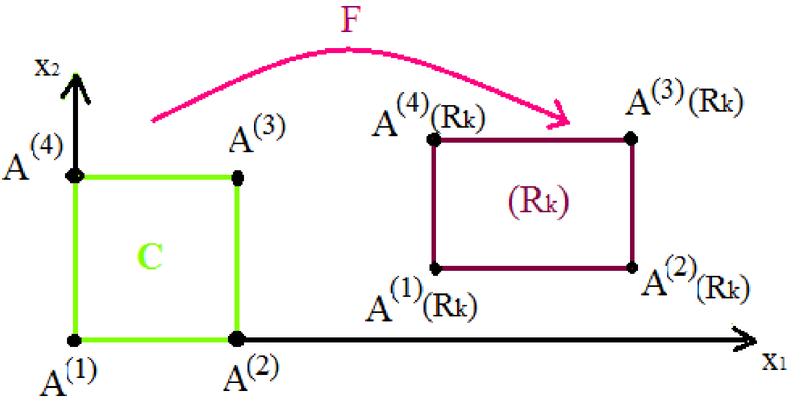
- Parfois on est amené à utiliser des polynômes de degré elevé (ex : EDP d'ordre supérieur à 2)

- Parfois on est amené à utiliser des polynômes de degré elevé (ex : EDP d'ordre supérieur à 2)
- Les calculs deviennent compliqués

- Parfois on est amené à utiliser des polynômes de degré elevé (ex : EDP d'ordre supérieur à 2)
- Les calculs deviennent compliqués
- Solution?

- Parfois on est amené à utiliser des polynômes de degré elevé (ex : EDP d'ordre supérieur à 2)
- Les calculs deviennent compliqués
- Solution?
- Calculer les fonctions de base ω_i une fois pour toutes sur l'élément de référence $[0, 1] \times [0, 1]$

- Parfois on est amené à utiliser des polynômes de degré elevé (ex : EDP d'ordre supérieur à 2)
- Les calculs deviennent compliqués
- Solution?
- Calculer les fonctions de base ω_i une fois pour toutes sur l'élément de référence $[0, 1] \times [0, 1]$
- Puis transposer les calculs par homotétie et translation à tous les rectangles de la triangulation.



correspondance avec l'élément de référence C

Soit C le carré unité de sommets $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}$ et R_k un réctangle quelconque de la triangulation de sommets
$A^{(1)}(R_k), A^{(2)}(R_k), A^{(3)}(R_k), A^{(4)}(R_k)$
Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$F(x) = A^{(1)}(R_k) + x_1.\overrightarrow{A^{(1)}(R_k)\, A^{(2)}(R_k)} + x_2.\overrightarrow{A^{(1)}(R_k)\, A^{(4)}(R_k)}$$

on a

$$F(C) = R_k$$

Sur le carré C, les fonctions de base de l'approximation par éléments finis Q^1 associées aux degrés de liberté $\left\{p\left(A^{(1)}\right), p\left(A^{(2)}\right), p\left(A^{(3)}\right), p\left(A^{(4)}\right)\right\}$ sont données par

$$\begin{cases} p_1(x) &=& (1-x_1)(1-x_2) \\ p_2(x) &=& x_1(1-x_2) \\ p_3(x) &=& x_1.x_2 \\ p_4(x) &=& (1-x_1)\,x_2 \end{cases}$$

- et on a

$$p^{(i)}(x) = p_i\left(\frac{x_1 - x_1^{(1)}(R_k)}{x_1^{(2)}(R_k) - x_1^{(1)}(R_k)}, \frac{x_2 - x_2^{(1)}(R_k)}{x_2^{(4)}(R_k) - x_2^{(1)}(R_k)}\right)$$

- et on a

$$p^{(i)}(x) = p_i\left(\frac{x_1 - x_1^{(1)}(R_k)}{x_1^{(2)}(R_k) - x_1^{(1)}(R_k)}, \frac{x_2 - x_2^{(1)}(R_k)}{x_2^{(4)}(R_k) - x_2^{(1)}(R_k)}\right)$$

- on souligne que les fonctions $p^{(i)}$ sont celles données par (2)

On se propose de calculer l'élément A_{ii} de la matrice A sur un élément R_k du maillage, en effet

$$A_{ii} = \int_{R_k} \left| \nabla \omega^{(i)} \right|^2 .dx + \int_{R_k} \left[\omega^{(i)} \right]^2 dx$$

pour simplifier, on supposera que le noeud $q^{(i)}$ coincide avec le sommet $A^{(3)}(R_k)$

donc pour $x \in R_k$ $\omega^{(i)}(x) = p^{(3)}(x) = p_3(y) = y_1.y_2$

avec $y = F^{-1}(x) = \left(\dfrac{x_1 - x_1^{(1)}(R_k)}{h_1}, \dfrac{x_2 - x_2^{(1)}(R_k)}{h_2} \right)$

on rappel que $p^{(3)} \circ F = p_3$ i.,e., $p^{(3)} = p_3 \circ F^{-1}$

$\Longrightarrow$

$$\int_{R_k} \left|\nabla\omega^{(i)}\right|^2 .dx = \frac{h_1 . h_2}{3}\left[\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2\right]$$

et

$$\int_{R_k} \left[\omega^{(i)}\right]^2 dx = \frac{h_1 . h_2}{9}$$

le résultat est indépendant de k
d'où

$$A_{ii} = 4.A_{ii}\left(R_k\right) = 4.\frac{h_1 . h_2}{3}\left[\left(\frac{1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2\right] + 4.\frac{h_1 . h_2}{9}$$

les fonctions de base p_i $(i = 1, ..., 4)$ sont exactement les produits tensoriels des fonctions de base ω_0 et ω_1 de l'approximation par éléments finis $P1$ en dimension 1 sur le segment unité
on a

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= \omega_0(x_1)\,\omega_0(x_2) \\
p_2(x) &= \omega_1(x_1)\,\omega_0(x_2) \\
p_3(x) &= \omega_1(x_1)\,\omega_1(x_2) \\
p_4(x) &= \omega_0(x_1)\,\omega_1(x_2)
\end{aligned}$$

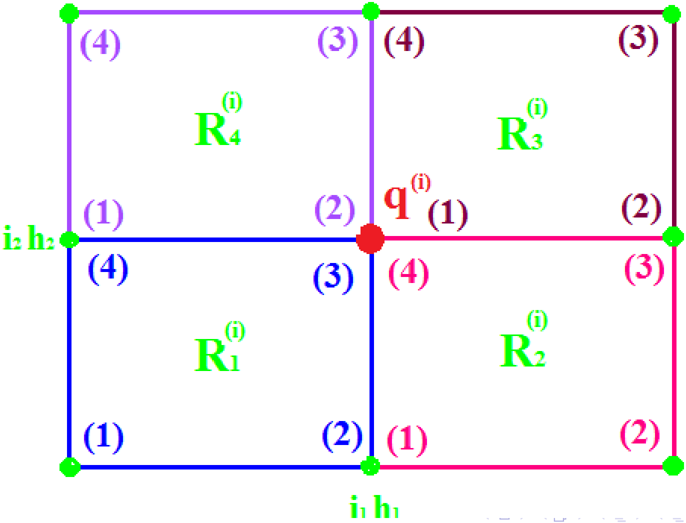
De même pour

$$\omega^{(i)}(x) = \omega^{(i_1)}(x_1)\,\omega^{(i_2)}(x_2)$$

avec

$$q^{(i)} = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 h_1 \\ i_2 h_2 \end{pmatrix}$$

le support de de $\omega^{(i)}$ est la réunion des 4 réctangles qui ont $q^{(i)}$ comme sommet commun : $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_3^{(i)}$ et $R_4^{(i)}$ et donc



(4)
(3)
(4)
(3)
$R_4^{(i)}$
$R_3^{(i)}$
$q^{(i)}$
(1)
(2)
(1)
(2)
$i_2 h_2$
(4)
(3)
(4)
(3)
$R_1^{(i)}$
$R_2^{(i)}$
(1)
(2)
(1)
(2)
$i_1 h_1$

$$\omega^{(i)}(x) = \begin{cases} \omega_1\left(\dfrac{x_1-(i_1-1)\,h_1}{h_1}\right)\omega_1\left(\dfrac{x_2-(i_2-1)\,h_2}{h_2}\right) & si\ x\in R_1^{(i)} \\ \omega_0\left(\dfrac{x_1-i_1h_1}{h_1}\right)\omega_1\left(\dfrac{x_2-(i_2-1)\,h_2}{h_2}\right) & si\ x\in R_2^{(i)} \\ \omega_0\left(\dfrac{x_1-i_1h_1}{h_1}\right)\omega_0\left(\dfrac{x_2-i_2h_2}{h_2}\right) & si\ x\in R_3^{(i)} \\ \omega_1\left(\dfrac{x_1-(i_1-1)\,h_1}{h_1}\right)\omega_0\left(\dfrac{x_2-i_2h_2}{h_2}\right) & si\ x\in R_4^{(i)} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

la structure de la matrice dépend bien sûr de la numérotation des fonctions de base $\omega^{(i)}$
Par exemple, on numérote ces $N_i = N_1.N_2$ fonctions $\omega^{(i)} = \omega^{(i_1)} \otimes \omega^{(i_2)}$. avec $i_1 \in \{1, ..., N_1\}$ et $i_2 \in \{1, ..., N_2\}$ en balayant le maillage ligne par ligne.

$$
\begin{array}{l}
\omega^{(1)} \otimes \omega^{(1)}, \omega^{(2)} \otimes \omega^{(1)}, ...\omega^{(N_1)} \otimes \omega^{(1)} \\
\omega^{(1)} \otimes \omega^{(1)}, \omega^{(2)} \otimes \omega^{(1)}, ...\omega^{(N_1)} \otimes \omega^{(1)} \\
.... \\
\omega^{(1)} \otimes \omega^{(N_2)}, \omega^{(2)} \otimes \omega^{(N_2)}, ...\omega^{(N_1)} \otimes \omega^{(N_2)}
\end{array}
$$

Aisi la matrice A a une structure de N_2^2 bloc
chaque bloc est de taille N_1^2
Evidement, si la numérotation du balayage est faite colonne par colonne, les roles de N_1 et N_2 s'inversent.

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1,1)} & A^{(1,1)} & 0 & \cdots & & 0 \\ A^{(2,1)} & A^{(2,2)} & A^{(2,3)} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & \\ 0 & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \vdots & & A^{(N_2-1,N_2-2)} & A^{(N_2-1,N_2-1)} & A^{(N_2-1,N_2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{(N_2,N_2-1)} & A^{(N_2,N_2)} \end{pmatrix}$$

Sachant

$$A^{(k,l)} = \begin{pmatrix} A^{(k,l)}_{11} & A^{(k,l)}_{12} & 0 & \cdots & & 0 \\ A^{(k,l)}_{21} & A^{(k,l)}_{22} & A^{(k,l)}{}_{23} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & \\ 0 & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \vdots & & A^{(k,l)}_{N_1-1N_1-2} & A^{(k,l)}_{N_1-1N_1-1} & A^{(k,l)}_{N_1-1N_1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{(k,l)}_{N_1N_1-1} & A^{(k,l)}_{N_1N_1} \end{pmatrix}$$

et $\left(A^{(k,l)}\right)_{ij} = a\left(\omega^{(j)} \otimes \omega^{(l)}, \omega^{(i)} \otimes \omega^{(k)}\right)$

Séances de TP sur Matlab