Wegaufzeichnung mittels Beschleunigungs- und Kreiselsensoren

Idee

Die Idee meines Studienauftrages bestand darin mithilfe eines dreiachsigen Beschleunigungssensors und eines dreiachsigen Rotationssensors (Kreiselsensor) die Beschleunigung und Rotation meines Messgerätes in Abhängigkeit von der Zeit aufzeichnen und so ohne äußere Bezugspunkte, wie z.B. mittels GPS, seine Bewegung im Raum nachverfolgen zu können.
Mithilfe dieser Technik habe ich versucht die Strecke einer Achterbahn zu rekonstruieren.

Aufbau

Leider funktionierte die Platine mit den Sensoren nicht, sodass ich auf eine andere Messvorrichtung zurückgreifen musste bei der mir nur ein einachsiger Rotationssensor zur Verfügung stand. Und die zeitliche Auflösung nur bei etwa 60 Werten pro Sekunde lag.
Dennoch führte ich das Experiment durch, da sich mit einigen zusätzlichen Annahmen die sich aus der Bewegung auf einer Schiene ergeben, das Problem trotzdem berechnen lassen sollte.
Das Messgerät wurde während der Fahrt so platziert, dass es relativ zum Wagen der Achterbahn keine Bewegung durchführte. Dabei zeigten die Achsen des Beschleunigungssensors:
parallel zur Bewegungsrichtung und zu Beginn der Fahrt horizontal,
senkrecht zur Bewegungsrichtung und zu Beginn der Fahrt vertikal und
senkrecht zur Bewegungsrichtung und zu Beginn der Fahrt horizontal.
Der Kreiselsensor maß die Drehung um die Achse längs der Bewegungsrichtung.
Zudem wurde für jede Messung der Messreihe der Zeitwert mit abgespeichert.

Geplante Berechnung

Die gemessenen Beschleunigungen setzen sich zusammen aus der Erdbeschleunigung aufgrund der Gravitation und den Beschleunigungen die in Zusammenhang mit einer Änderung der Geschwindigkeit (insbesondere auch deren Richtung) auftreten.
Ausgehend von dieser Grundlage und mithilfe der Gesetze der klassischen Mechanik habe ich im folgenden Formeln entwickelt um die Bewegung im Kleinschrittverfahren anzunähern.
x,y und z seien Beschleunigungen und valpha, vbeta und vgamma Rotationsgeschwindigkeiten die wie in Abbildung 1 zu erkennen drei zueinander senkrechte Raumachsen als gemeinsame Grundlage haben.
Um aus diesen Werten die neue Position berechnen zu können ist es wichtig stets die vorherige Position, Geschwindigkeit und Orientierung zu kennen.

Diese speichere ich dazu in Form von einem Ortsvektor für die Position, einem Vektor für die Geschwindigkeit und drei Vektoren für die Ausrichtung des Messgerätes im Raum, wobei die Länge nicht relevant ist und daher als 1 festgelegt wird. Rein theoretisch würden für die Ausrichtung auch 2 Vektoren ausreichen, allerdings sind für spätere Berechnungen sowieso alle drei nötig, sodass es sinnvoll ist alle drei zu speichern, statt sie immer wieder neu zu berechnen, was die Lösung zweier linearer Gleichungssysteme und daher zu viel Rechenleistung erfordern würde. (Es kommt so zwar bei der Berechnung zu leichten Abweichungen der Winkel zwischen den Vektoren von optimalen 90°, aber diese liegen deutlich unter 1° und sind daher nicht weiter relevant.)
Als Startwerte dienen dabei:

```
posVektor   := (0,0,0) //ja ich weiß, Vektoren schreibt man eigentlich vertikal
vVektor     := (0,0,0) //sagen wir es handelt sich um für Vektoren stehende Tripel
gVektor     := (0,1,0)
rightVektor := (1,0,0)
topVektor   := (0,1,0)
frontVektor := (0,0,1)
```

Nun ist es nötig in jedem Schritt die neue Position, Geschwindigkeit und Orientierung zu berechnen.
Für die Änderung der Geschwindigkeit ist es wichtig zuerst die Schwerebeschleunigung in Form eines nach unten gerichteten Vektors mit der Länge g von den drei anderen Beschleunigungen abzuziehen. Dazu muss folgendes lineares Gleichungssystem gelöst werden:

```
rightVektor*gx + topVektor*gy + frontVektor*gz = gVektor
```

Die so ermittelten Teilerdbeschleunigungen gx, gy und gz können nun von x, y und z subtrahiert werden, so dass nur noch die mit einer Geschwindigkeitsänderung verbundenen Beschleunigungen übrig bleiben:

```
x := x - gx
y := y - gy
z := z - gz
```

Wenn man diese Beschleunigungen jetzt mit der Zeitspanne dt seit der letzten Messung multipliziert kommt man so auf die Änderung der Geschwindigkeit und der Position:

```
vVektor   := vVektor + Vektor(x,y,z)*dt
posVektor := posVektor + vVektor*dt
```

Allerdings dürfen auch nicht die Drehungen vernachlässigt werden. Mit ein wenig Überlegen kommt man zu dem Schluss, dass bei einer Drehung um eine Achse sich die beiden anderen Achsen, welche senkrecht zur Rotationsachse stehen um ihren Mittelpunkt drehen (s.Abb.2). Dies lässt sich leicht mithilfe der Winkelfunktionen berechnen:

```
alpha = valpha*dt
beta  = vbeta *dt
gamma = vgamma*dt
```

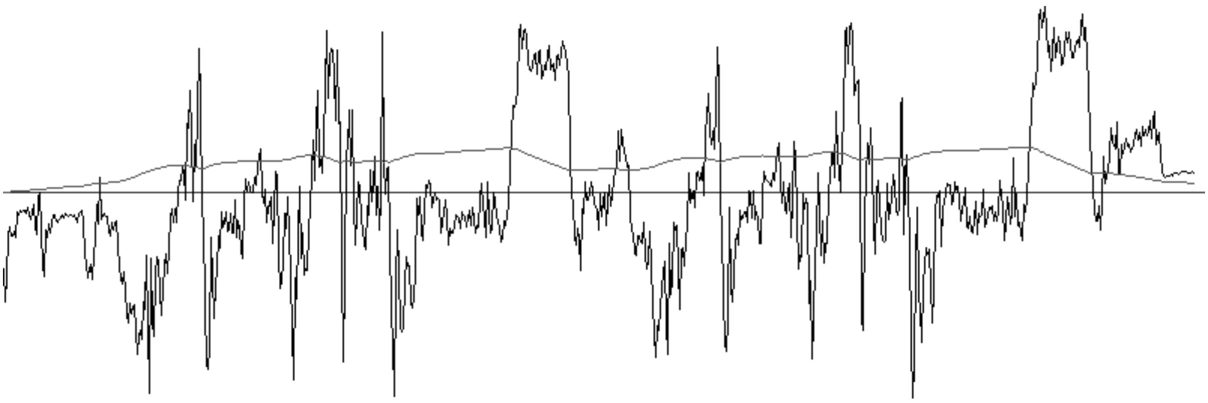
```
topVektor,frontVektor   := topVektor*cos(alpha)+frontVektor*
                           sin(alpha), frontVektor*cos(alpha)+
                           topVektor*sin(alpha)
frontVektor,rightVektor := frontVektor*cos(beta)+rightVektor*
                           sin(beta), rightVektor*cos(beta)+
                           frontVektor*sin(beta)
topVektor,rightVektor   := topVektor*cos(gamma)+rightVektor*
                           sin(gamma), rightVektor*cos(gamma)+
                           topVektor*sin(gamma)
```

Mithilfe dieser Schrittfolge sollte es möglich sein jede beliebige Bewegung eines entsprechenden Messgerätes im Raum zu rekonstruieren.

Tatsächliche Berechnung

Leider hatte ich wie bereits erwähnt nicht die nötigen Sensoren um obige Methode ohne Einschränkungen nutzen zu können. Daher benötigte ich einige weitere Grundannahmen um eine andere Methode zu ermöglichen.
So kann man (zumindest näherungsweise) davon ausgehen, dass sich durch die Bewegung auf der Schiene jegliche Änderung des Betrags der Geschwindigkeit direkt auf den Messwert entlang der Front-Achse des Beschleunigungssensors auswirkt (z).
Außerdem sollten Kurven keinen Einfluss auf diesen Wert haben, sodass sich durch einfache Anwendung des Kleinschrittverfahrens die Geschwindigkeit zu jedem Moment der Messung ermitteln lässt:

```
v = v+z*dt
```



Sehr schön lässt sich hier übrigens schon erkennen, dass ich zwei Runden mit der Achterbahn gefahren bin.

Die Drehung um die Frontachse sollte sich mittels des einen Rotationssensors und der obigen Formeln berechnen lassen:

```
topVektor,rightVektor := topVektor*cos(rot*dt)+rightVektor*
                         sin(rot*dt), rightVektor*cos(rot*dt)+
                         topVektor*sin(rot*dt)
```

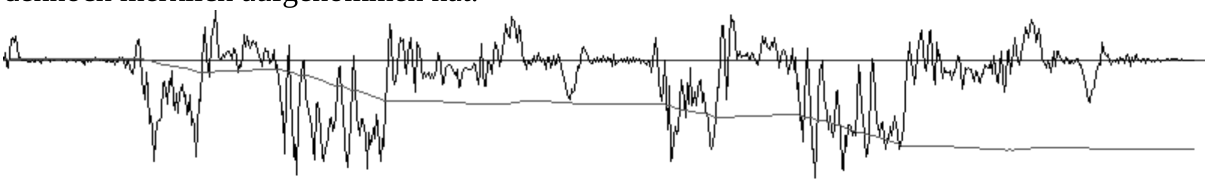
Die Drehungen um die anderen beiden Achsen lassen sich durch die seitlichen Beschleunigungen ermitteln, welche, da wir uns auf einer Schiene bewegen, Resultat einer Kreisbewegung o.ä. Bewegung (Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung) sind.
Eine solche Bewegung sollte sich annähern lassen, indem man als neue Bewegungsrichtung die bisherige Bewegungsrichtung mit dem Produkt aus dt und seitlicher Beschleunigung addiert und die Länge der Vektoren danach normalisiert:

```
frontVektor,rightVektor := frontVektor*v+rightVektor*x*dt,
                           rightVektor*v-frontVektor*x*dt
frontVektor = frontVektor/|frontVektor|
rightVektor = rightVektor/|rightVektor|

frontVektor,topVektor := frontVektor*v+topVektor*y*dt,
                         topVektor*v-frontVektor*y*dt
frontVektor = frontVektor/|frontVektor|
topVektor   = topVektor  /|topVektor  |
```

Auswertung

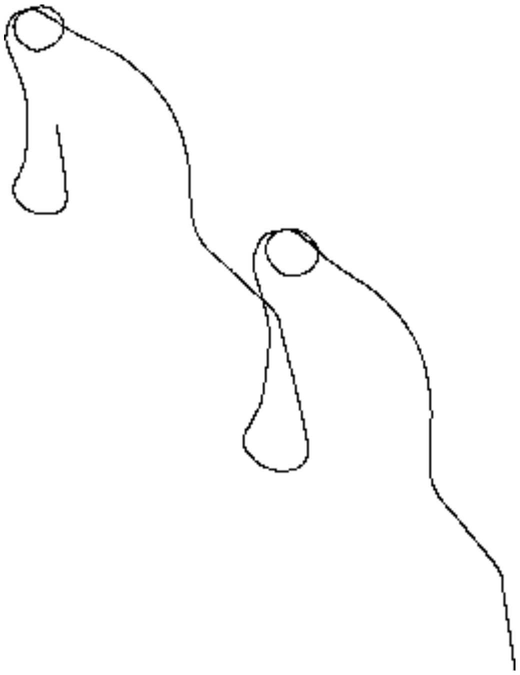
Leider lässt sich feststellen, dass, wenn man sich als Ergebnis dieser Methode die Spur der Position in einem Koordinatensystem in der Draufsicht anschaut, diese keine Achterbahn ergeben. Dies liegt unter anderem daran, dass eine Drehung um eine andere als die vertikale Achse die Richtung aus der die Wirkung der Schwerkraft angenommen wird verändern und sich, da die Schwerkraft Einfluss auf die weitere Bewegung im nächsten Schritt hat, Fehler schnell addieren und so das Ergebnis unbrauchbar machen.
Auch lässt sich bei Betrachtung der Rotation feststellen, dass diese nicht um einen bestimmten Wert pendelt, sondern einen starken Trend in die eine Richtung hat. Dies lässt sich bei genauerer Überlegung dadurch erklären, dass der Sensor vermutlich fehlerhafterweise nicht genau entlang der Bewegungsrichtung gehalten wurde, sondern leicht nach oben gekippt, so dass er die Rotation um die vertikale Achse zwar nicht sehr stark, aber dennoch merklich aufgenommen hat.



Mit einigem Probieren ist es mir aber letztlich doch gelungen zwei Bilder zu erzeugen, die die ursprüngliche Achterbahnform verhältnismäßig gut erahnen lassen.

Das erste ist lediglich aus den seitlichen Beschleunigungen ermittelt und der Geschwindigkeit ermittelt, ohne den Rotationssensor oder die vertikale Beschleunigung zu beachten. Als Fehlerquelle bei dieser Methode vermute ich insbesondere, dass nicht nur die Kurven, sondern auch die Drehung um die Längsachse zu Beschleunigungen geführt haben, da das Messgerät natürlich nicht genau auf der Schiene gehalten werden konnte.

Das zweite Bild beruht auf der Tatsache, dass der Rotationssensor die Drehung um die vertikale Achse mit aufgenommen hat. Durch einfaches Addieren der Geschwindigkeit multipliziert mit der Richtung der gemessenen Rotation konnte die Position aufgezeichnet werden.
Dabei wurde bei beiden Bildern die Geschwindigkeit rückwärts rekonstruiert, da der Abbremsvorgang weniger Fehler verursachte als das Beschleunigen und das Hochziehen am Anfang.



Weitere Diagramme in Farbe und die erhobenen Rohdaten sind auf Nachfrage erhältlich.