第1章 复数与复变函数

§ 1.1 复数和复数运算

　§ 1.1.1 复数及其四则运算

　§ 1.1.2 复数的几何表示

　§ 1.1.3 复数的乘幂与方根

§ 1.2 初等复变函数

　§ 1.2.1 复变函数的定义

　§ 1.2.2 初等复变函数的定义和基本性质

§ 1.1 复数和复数运算

§ 1.1.1 复数及其四则运算

Real number

1. 基本概念

定义. 称形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$的数为复数(Complex number). 其中i是虚数单位, 满足$i^2=-1$; x和y均为实数, 分别称为复数z的实部 (Real part)和虚部 (Imaginary part), 记为 $x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$. 全体复数的集合记为$\mathbb{C}$.

虚部为0的复数就是实数, 即$x+i0=x$, 故实数集是复数集的子集, 即$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$;

当$x=0$且$y\neq0$时, $0+iy=iy$ 称为纯虚数. 注: 有时也认为$0+0i$ 既是实数0也是纯虚数$i0$.

称$x+iy$ 和 $x-iy$互为共轭复数, 若其中一个记为z, 则另一个记为记为$\bar{z}$ (或 z^*).

$z_1=z_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$;

复数不能比较大小!

注: 符号"$\Longleftrightarrow$" 表示 "当且仅当"

2. 四则运算 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则

加减法: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

显然减法是加法的逆运算, 即 $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$

乘法: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$, 特别有 $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

定义: 称非负实数 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 为复数 $z=x+iy$ 的模(或绝对值), 记为 $|z|$.

除法(设 $z_2 \neq 0$): $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

(分母实数化)

直接验证可知, 这样定义的除法是乘法的逆运算, 即 $z_2 \cdot \dfrac{z_1}{z_2} = z_1$

显然, 以上定义的四则运算是实数域的四则运算在复数域中的直接推广, 且实数域中成立的交换律, 结合律, 分配律在复数域中也成立.

3. 共轭复数性质　设$z=x+iy$，　则$\bar{z}=x-iy$

i) $\overline{\bar{z}}=z$;

ii) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，　$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

iii) $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$;

iv) z为实数$\Leftrightarrow z=\bar{z}$.

v) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z=2x$，　$z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z=2iy$，　即，$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

例. 证明实系数多项式$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$的根共轭存在.

证明. 设z_0是$P(z)$的根，即$P(z_0)=0$. 因$P(z)$的各系数$a_1, a_2, \ldots, a_n$都是实数，故

$$P(\bar{z}_0)=(\bar{z}_0)^n+a_1(\bar{z}_0)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\bar{z}_0)+a_n=\overline{z_0^n}+\overline{a_1}\,\overline{z_0^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\bar{z}_0+\overline{a_n}$$

$$=\overline{(z_0)^n+a_1(z_0)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(z_0)+a_n}=\overline{P(z_0)}=0.$$

即$P(\bar{z}_0)=0$，从而$\bar{z}_0$也是$P(z)$的根.

4. 复数模的关系式, 三角不等式

i) $\forall z\in\mathbb{C},\ |z|=|-z|=|\bar{z}|\geq 0;$　　ii) $|z|=0 \Longleftrightarrow z=0$

iii) $\begin{cases}|x|\leq|z| \\ |y|\leq|z|\end{cases},\quad |z|\leq|x|+|y|;$

iv) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$　由iv)和乘除法的互逆关系有 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|};$

v) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|,$　由v)可推出更多实用的不等式:

$$|z_1|-|z_2|\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|;\qquad |z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

上面的不等式统称为三角不等式, 可从几何上直观理解(见几何表示)

下面用模的定义证明iv)和v):

证明: iv) $|z_1z_2|^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$

$$=x_1^2(x_2^2+y_2^2)+y_1^2(x_2^2+y_2^2)=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|z_1|^2|z_2|^2$$

即, $|z_1z_2|^2=|z_1|^2|z_2|^2$，故 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

v) $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$

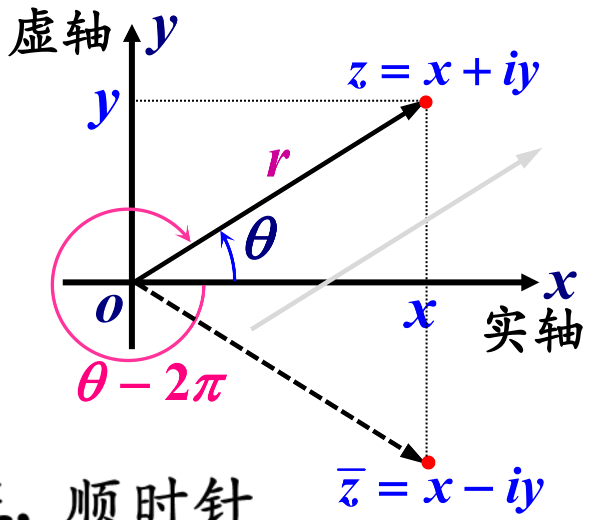
$$=(z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2)+(\overline{z}_1z_2+z_1\overline{z}_2)=(z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2)+(\overline{z}_1z_2+\overline{\overline{z}_1z_2})$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(\overline{z}_1z_2)\le|z_1|^2+|z_2|^2+2|\overline{z}_1z_2|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

即, $|z_1+z_2|^2\le(|z_1|+|z_2|)^2$，故 $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

§ 1.1.2 复数的几何表示



1. 复平面

表示复数的平面称为复平面.

$$z = x + iy \Longleftrightarrow 点(x, y) \Longleftrightarrow 自由向量(x\vec{i} + y\vec{j}) = \overrightarrow{Oz}$$

称向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的模 r 为复数 z 的模, 记为 $|z|$, 即 $|z| = |\overrightarrow{Oz}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

实轴正向到向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的旋转角 θ (单位: 弧度; 符号: 逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负) 称为复数 z 的辐角(Argument), 记为 $\mathrm{Arg}\, z$ 或 $\mathrm{Arg}(z)$.

每一个非零复数 z 的辐角有无穷多个, 彼此相差 2π 的整数倍. 若其中一个辐角为 θ, 则 $\mathrm{Arg}\, z = \theta + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

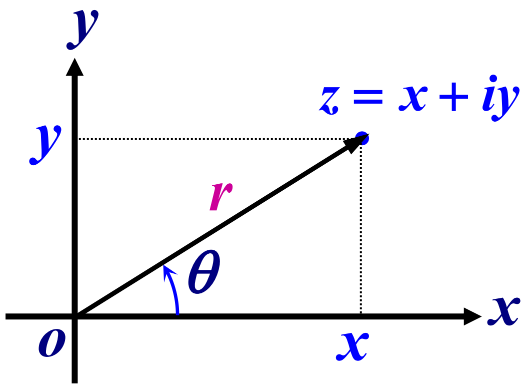
通常称落在区间 $(-\pi, \pi]$ 的辐角值为 z 的辐角主值, 记为 $\arg z$ 或 $\arg(z)$. 显然 $\arg z$ 由 z 唯一确定, 而 $\mathrm{Arg}\, z$ 就表示辐角一般值, 且有 $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

复数0的模为0, 辐角不定.

注1. 后面若无特别说明总是规定 $-\pi < \arg z \le \pi$, 但有时也规定 $0 \le \arg z < 2\pi$;
注2. $\mathrm{Arg}\, z$ 表示辐角一般值(集合), 但有时也表示某一特定的辐角.

若已知$|z|=r$, $\arg z=\theta$, 由直角坐标和极坐标的关系, 有 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$

则 $z=x+iy$可表示为 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$



引入欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 则$z$又可表示为 $z=re^{i\theta}$

综上, 复数z有三种表示式:

(1) 代数表示式 $z=x+iy$

其中$x=\mathrm{Re}(z)$, $y=\mathrm{Im}(z)$, 对应直角坐标, 故复数的代数表示式也称为直角坐标表示式.

(2) 三角表示式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

(3) 指数表示式 $z=re^{i\theta}$

其中$r=|z|$为非负实数, 由三角函数的周期性知实数θ可取为z的任一辐角, 即$\theta=\mathrm{Arg}(z)$.

复数的三角表示式和指数表示式统称为极坐标表示式.

利用复数的代数式和指数式, 可将实数集上定义的函数和运算自然推广到复数集. 三角式可看作代数式和指数式间的过渡.

欧拉公式推导:

$$\because e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore e^{i\theta} \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

*还可定义矩阵指数: 设A为n阶方阵, 规定 $A^0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

则 $e^A \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$

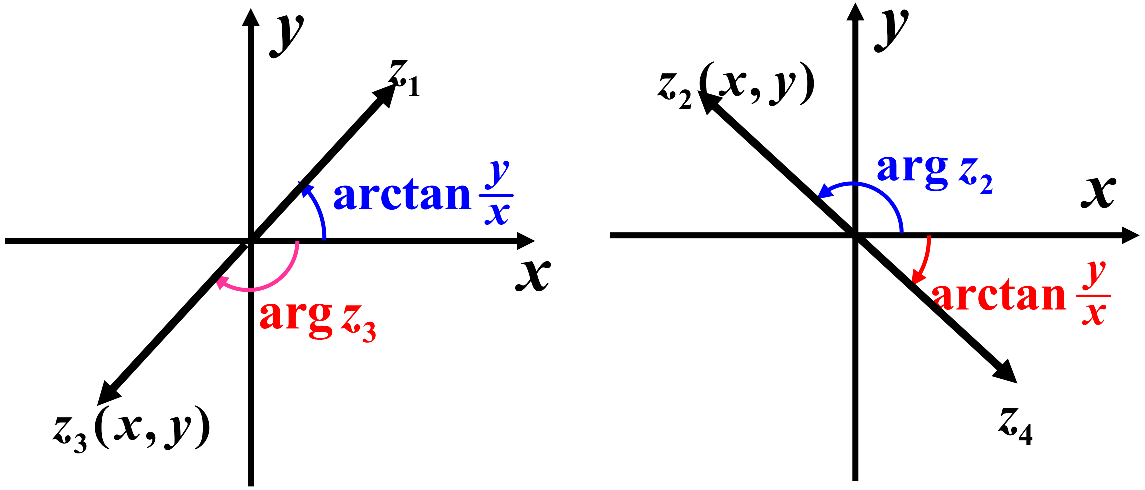
注. 可证明矩阵级数是收敛的.

如何将直角坐标表示式 $x+iy$ 转化为极坐标表示 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 或 $re^{i\theta}$？

显然, $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$, $\theta=\arg z+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

若规定 $-\pi<\arg z\le\pi$, 由于 $-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$, 故 $\arg z$ 与 $\arctan\frac{y}{x}$ 有如下关系：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0, y\ge 0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0\end{cases}$$

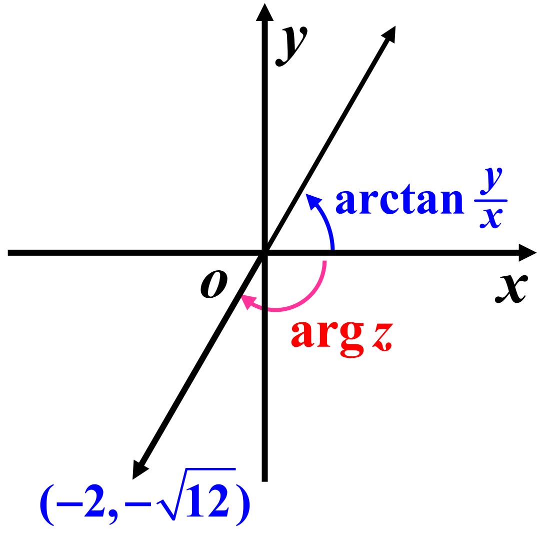


例. $2=2e^{2k\pi i}$, $-1=e^{(2k+1)\pi i}$, $i=e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})i}$, $-3i=3e^{(2k\pi-\frac{\pi}{2})i}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

例. 已知$z=-2-\sqrt{12}\,i$，求$|z|$和$\operatorname{Arg} z$，并写出z的三角表示与指数表示式.

解. $|z|=r=\sqrt{(-2)^2+(-\sqrt{12})^2}=\sqrt{4+12}=4$

$$\arg z=\arctan\left(\frac{-\sqrt{12}}{-2}\right)-\pi=\arctan\sqrt{3}-\pi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$



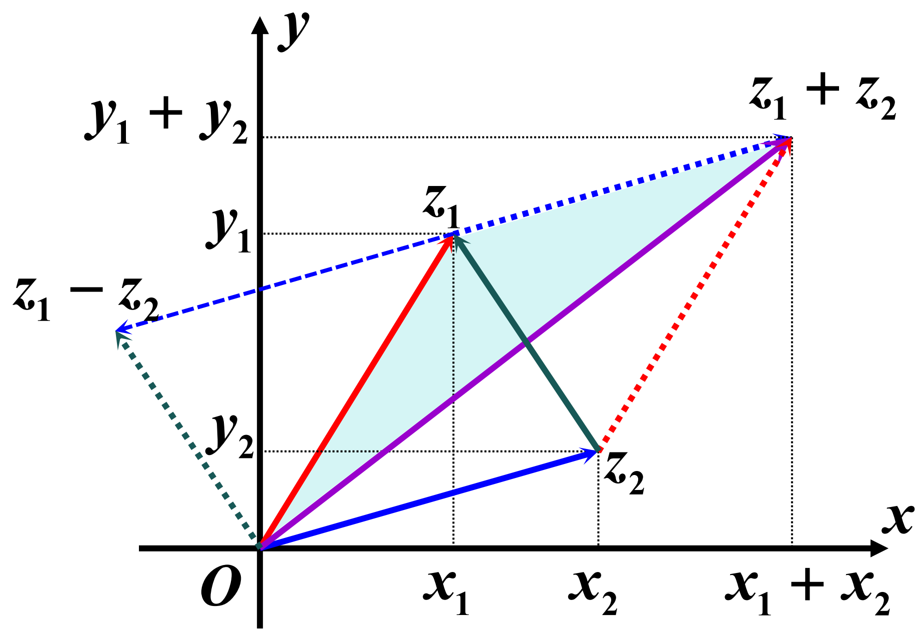
$$\therefore \operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{2\pi}{3},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

z的三角式为 $z=4[\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})]$ 　　指数式为$z=4e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

说明: 三角式和指数式中的辐角可以为z的任一辐角$\operatorname{Arg} z$，故也可以写成

$$z=4(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=4e^{(2k\pi-\frac{2\pi}{3})i}=4e^{(2k\pi+\frac{4\pi}{3})i},$$ 其中k为任意整数.

2. 四则运算的几何意义



i) 加减法↔向量加减

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

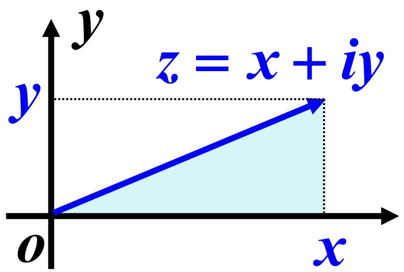
$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)=z_1+(-z_2)$$

z_1-z_2表示以z_2为起点,以z_1为终点的向量$\overrightarrow{z_2z_1}$.

$|z_1-z_2|$表示z_1和z_2两点间的距离,$\mathrm{Arg}(z_1-z_2)$表示向量的倾角.

三角不等式: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ 三角形两边之和大于(等于)第三边

不等式 $\begin{cases}|x|\le|z|,\\|y|\le|z|\end{cases}$; $|z|\le|x|+|y|$, 对应直角三角形边长关系.



ii) 乘除法$\leftrightarrow$向量伸缩旋转

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $\quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

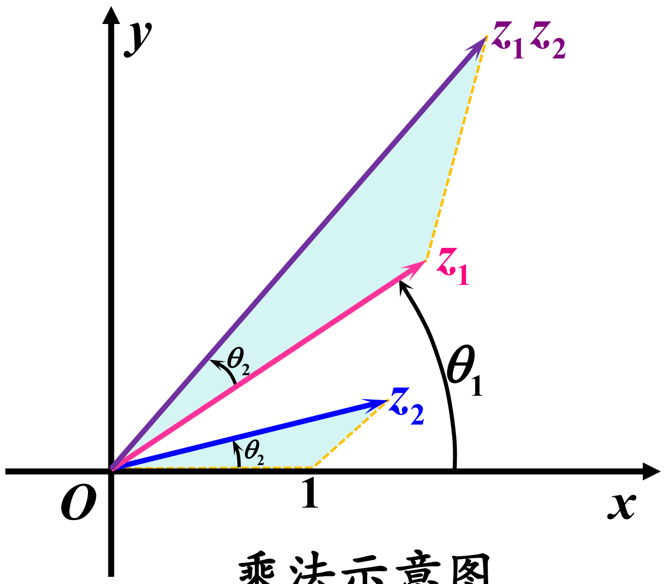
$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)]$$

$$= \underline{r_1 r_2}[\cos(\underline{\theta_1+\theta_2}) + i\sin(\underline{\theta_1+\theta_2})]$$

两个复数相乘, 就是它们的模相乘(伸缩), 辐角相加(旋转), 即

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \end{cases}$$



乘法示意图

注. 关于辐角的等式是集合等式, 指等号两边对应的点集相同. 若将Arg改为arg, 则等号一般不成立.

当$z_2\neq 0$时，$\dfrac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$，　　$\therefore \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|\cdot|z_2|=|z_1|$，　$\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Arg}(z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)$

于是，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，　$\mathrm{Arg}(\dfrac{z_1}{z_2})=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)$，（关于辐角的等式是集合等式）

即，$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$.　两个复数相除，就是它们的模相除(伸缩)，辐角相减(反向旋转).

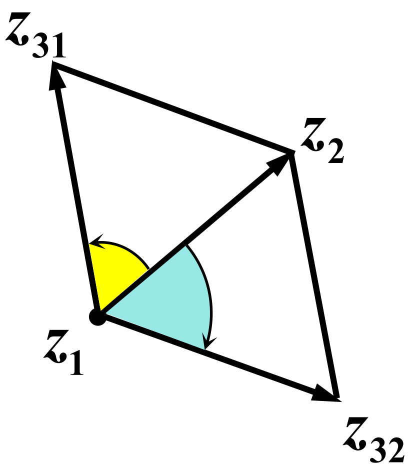
小结：指数形式下复数的乘除法结果显得非常自然，即

$$z_1z_2=(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2})=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},\qquad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

令$r_1=r_2=1$即可看出，欧拉公式定义的纯虚指数与实指数有相同的加减运算法则.

*例. 已知正三角形的两个顶点分别为$z_1=1$与$z_2=2+i$, 求另一个顶点z_3.

解. $$z_{31}-z_1=(z_2-z_1)e^{\frac{\pi}{3}i}=(1+i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$



$$\therefore z_{31}=(1+i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+z_1=(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

同理 $$z_{32}-z_1=(z_2-z_1)e^{-\frac{\pi}{3}i}=(1+i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

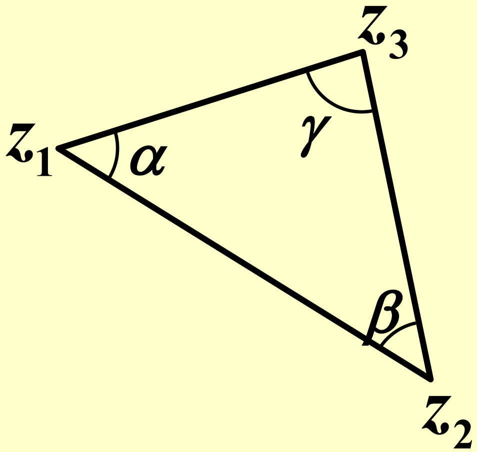
$$\therefore z_{32}=(1+i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+z_1=(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

*例. 利用复数证明三角形内角和等于π.

证明. $\alpha = \angle z_3 z_1 z_2 = \operatorname{Arg}(z_3 - z_1) - \operatorname{Arg}(z_2 - z_1) = \operatorname{Arg}\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$\beta = \angle z_1 z_2 z_3 = \operatorname{Arg}\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$, $\quad \gamma = \angle z_2 z_3 z_1 = \operatorname{Arg}\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$,

$\alpha + \beta + \gamma = \operatorname{Arg}\left[\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} \cdot \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right] = \operatorname{Arg}(-1)$



$\because 0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi,\ 0 < \gamma < \pi,$

$\therefore 0 < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi,$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \operatorname{Arg}(-1) = \pi$

例. 将复数 $z=\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$ 写成三角式和指数式.

解法1. $|z|=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}}=1,\quad \arg z=\arctan(\cdots)=-\frac{3\pi}{10},\qquad \therefore z=\cdots$

解法2. 直接变形为 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\ (r\ge 0)$:

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}\ =\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$-\cos\frac{\pi}{5}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{3\pi}{10}\ =\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\therefore z=\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)=e^{-\frac{3\pi}{10}i}.$$

解法3. 直接变形为 $re^{i\theta}\ (r\ge 0)$

$$z=(-i)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)i}=e^{-\frac{3\pi}{10}i}=\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{或 } z=e^{\frac{3\pi}{2}i}\cdot e^{\frac{\pi}{5}i}=e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)i}=e^{\frac{17\pi}{10}i}=\cdots$$

例. $z=1+\cos\varphi+i\sin\varphi,(\varphi\in\mathbb{R},\cos\varphi\neq-1)$, 求$|z|$ 和$\operatorname{Arg} z$.

解. $\because 1+\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2},\quad \sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$$\therefore z=2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})=2\cos\frac{\varphi}{2}e^{\frac{\varphi}{2}i}$$

当$\cos\frac{\varphi}{2}>0$, $\quad |z|=2\cos\frac{\varphi}{2},\quad \operatorname{Arg} z=\frac{\varphi}{2}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

当$\cos\frac{\varphi}{2}<0$, $\quad z=(-2\cos\frac{\varphi}{2})(e^{\frac{\varphi}{2}i}\cdot e^{\pi i})=(-2\cos\frac{\varphi}{2})e^{(\frac{\varphi}{2}+\pi)i}$

$$\therefore |z|=-2\cos\frac{\varphi}{2},\quad \operatorname{Arg} z=\frac{\varphi}{2}+(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

§ 1.1.3 复数的乘幂与方根

设 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$，则 $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$

1. 乘幂

设n为正整数. 称n个相同复数z的乘积为z的n次幂, 记为 z^n (也叫z的n次方).

当$z=0$时, 显然有 $z^n=0$; 当$z\neq0$时, 设$|z|=r$, $\arg z=\theta$, 即 $z = r e^{i\theta}$, 则

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1}$$

当$z\neq0$时, 规定 $z^0=1$, $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$, 则当$z\neq0$时(1)式对任意整数n均成立.

注. n为整数时, (1)式中θ也可取为z的任一其它辐角$\mathrm{Arg}\, z$.

由(1), 当$|z|=1$时有

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta} \tag{2}$$

公式(2)称为<u>棣莫弗(De Moivre)公式</u>.

*例. 试用$\cos\theta$和 $\sin\theta$表示$\cos3\theta$和$\sin3\theta$.

解. 由棣莫弗公式, $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos3\theta + i\sin3\theta$ (1)

公式(1)左边按二项式展开得

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \quad (2)$$

比较(1)(2)的实部和虚部得

$$\begin{cases} \cos3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$$

2. 方根　　设n为大于等于2的整数, z为给定复数.

方程$w^n = z$的所有根w的全体称为z的**n次方根**, 记为$\sqrt[n]{z}$; 当n=2时, 记为$\sqrt{z}$.

i) 当z=0, 方程$w^n = 0$有唯一根w=0;

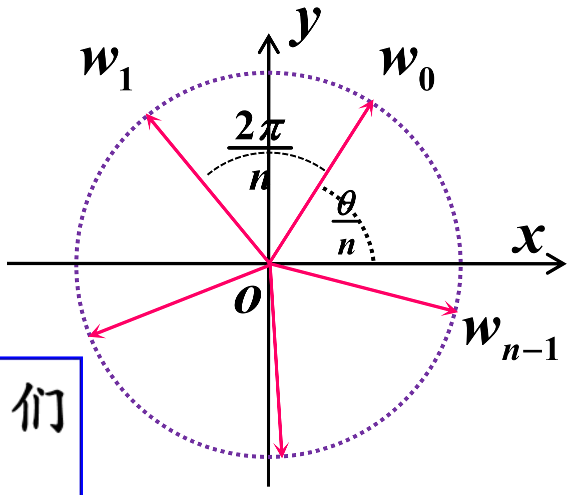
ii) 当z≠0, 设 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$ $(r>0, \rho>0)$, 则

$$w^n = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \varphi = \varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

这里表示算术根(正实根).

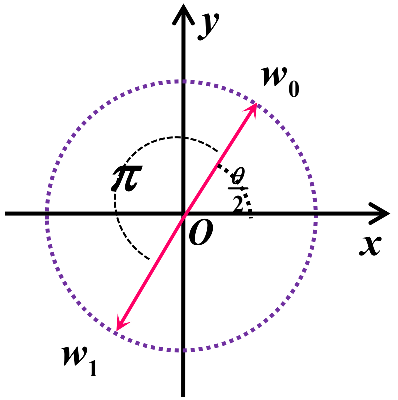
$$\therefore w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}\right)$$

记$w_0 = (\sqrt[n]{z})_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$, 则$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} w_0$



每一个非零复数z有且仅有n个不同的n次方根w_k (k=0,1, …, n−1), 它们均匀分布在以原点为圆心, 半径为$\sqrt[n]{r}$ 的圆周上.

注. 一般地, 记号$\sqrt[n]{z}$与记号$\{(\sqrt[n]{z})_k, k=0,1,\ldots,n-1\}$都表示$z$的$n$次方根的全体, 有时也用$\sqrt[n]{z}$表示某一特定的$n$次方根.



当n=2时, $w_0=(\sqrt{z})_0=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}=\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$,

$w_1=(\sqrt{z})_1=\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta+2\pi}{2})}=e^{\pi i}(\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}})=-w_0$, 故, $\sqrt{z}=\pm w_0$

3. 幂与根小结(指数形式下的自然定义): 设$z\neq 0, |z|=r, \arg z=\theta$:

1) $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$时, $z^n=(re^{i\theta})^n\triangleq r^n e^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$,

2) $n=2,3,\cdots$时, $\sqrt[n]{z}\triangleq z^{\frac{1}{n}}=[re^{i(\theta+2k\pi)}]^{\frac{1}{n}}\triangleq r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$, $k=0,1,\cdots,n-1.$

例. 求 $(-1-i)^{-3}$ 和 $\sqrt[3]{-8}$ 的值.

$$(\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i})^{-3}=(\sqrt{2})^{-3}e^{-\frac{15\pi}{4}i}$$

解. 1) $\because |-1-i|=\sqrt{2},\ \arg(-1-i)=-\dfrac{3\pi}{4}$

$$\therefore (-1-i)^{-3}=(\sqrt{2}\,e^{-\frac{3\pi}{4}i})^{-3}=(\sqrt{2})^{-3}e^{\frac{9\pi}{4}i}=2^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{4}(1+i).$$

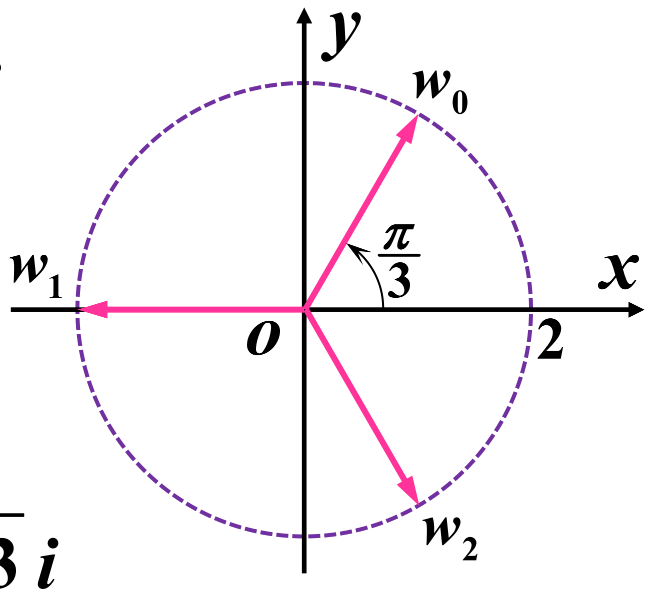
2) $\because |-8|=8,\ \arg(-8)=\pi,$

$$\therefore\ \sqrt[3]{-8}=[8e^{(\pi+2k\pi)i}]^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}i},\qquad k=0,1,2.$$

即, $w_0=2e^{\frac{\pi}{3}i}=2(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}\,i$

$$w_1=2e^{\frac{\pi+2\pi}{3}i}=2e^{\pi i}=-2$$

$$w_2=2e^{\frac{\pi+4\pi}{3}i}=2e^{\frac{5\pi}{3}i}=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=1-\sqrt{3}\,i$$



例. 解方程 $z^2+2iz-(2-\sqrt{3}i)=0.$

这里代表两个值

解. $z^2+2iz=2-\sqrt{3}i$ (配方) $\Rightarrow (z+i)^2=1-\sqrt{3}i \quad \Rightarrow z+i=\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

$$\because w_0=(\sqrt{1-\sqrt{3}i})_0=[2e^{-\frac{\pi}{3}i}]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{6}i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$w_1=(\sqrt{1-\sqrt{3}i})_1=-w_0=-(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

故原方程的解集为: $z=-i\pm w_0$

即, $z_1=-i+(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\frac{\sqrt{6}}{2}-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})i,$

$z_2=-i-(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})i.$

§ 1.2 初等复变函数

§ 1.2.1 复变函数的定义

定义. 若对复平面的点集E中的每一个复数z, 按照某种对应法则, 有一个或多个复数w与之对应, 则在E上确定了一个复变函数$w=f(z)$.

自变量z的取值范围E即为定义域. 因变量w取值全体所成集合F称为$w=f(z)$的值域.

对定义域E中某复数z, 若只有一个因变量w与之对应, 则称$f(z)$在点z是单值的; 若有多个w与之对应, 则称$f(z)$在点z是多值的. 若$f(z)$在E中每一点都是单值的, 则称$w=f(z)$是单值函数; 否则称为多值函数.

若对E内任意两点$z_1\neq z_2$, 有$f(z_1)\neq f(z_2)$, 则称$w=f(z)$在E上是单叶函数; 否则称为多叶函数.

设 $z = x + iy$, $w = u + iv$, 则$w = f(z)$可以写成 $w = u(x, y) + iv(x, y)$

若z 为极坐标形式 $z = re^{i\theta}$, 则$w = f(z)$又可以写成 $w = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

例如: $f(z) = z^2$

$\Rightarrow \quad w = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2i\,xy \qquad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$

或 $\quad w = (re^{i\theta})^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \qquad u(r,\theta) = r^2\cos 2\theta, \quad v(r,\theta) = r^2\sin 2\theta$

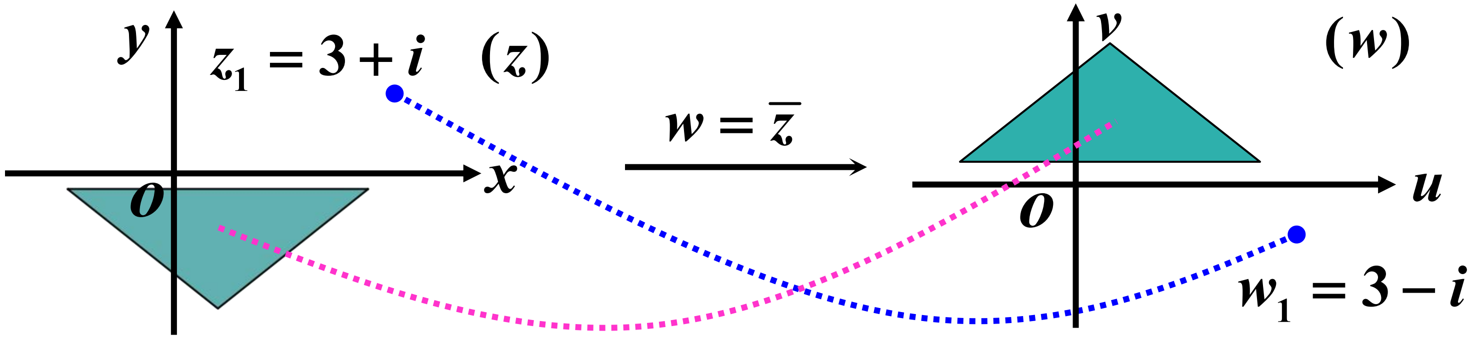
$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \qquad u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$

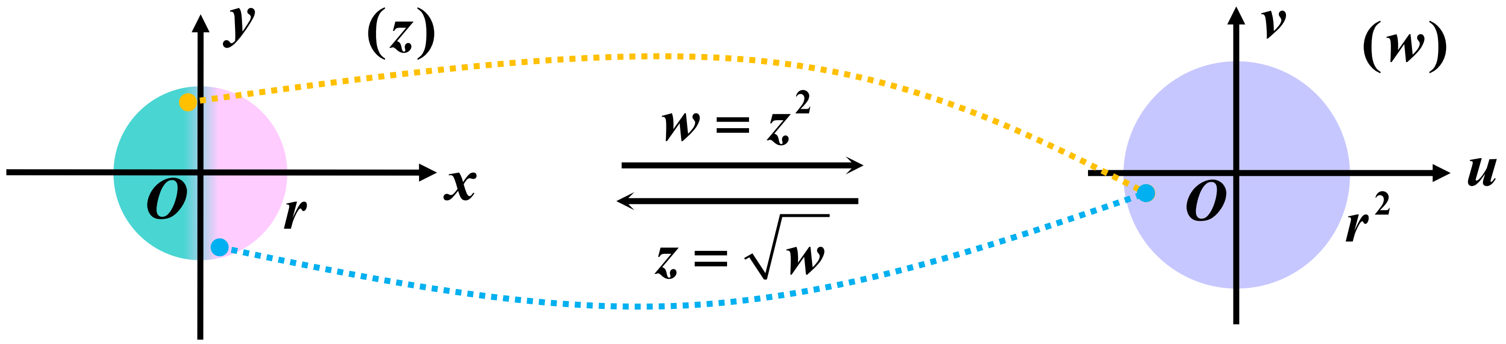
$f(z) = \overline{z} = x - iy \qquad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$

又如: $f(z) = (x^2 + y^2) + ixy = (z\cdot\overline{z}) + i\cdot\dfrac{z+\overline{z}}{2}\cdot\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = z\cdot\overline{z} + \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{4}$

复变函数$w=f(z)$可看作从z平面上的点集到w平面上的点集间的一个对应关系(称为**映射**或**变换**), 与z对应的点$w=f(z)$称为z的**像**, z称为$w=f(z)$的**原像**.

例如.





若由$w=f(z)$确定了从w平面上的点集F到z平面上的点集E的**逆映射**, 此逆映射称为$w=f(z)$的**反函数**, 记为 $z=f^{-1}(w)$. 多叶函数的反函数是多值函数.

多值函数可以通过某种约定而分解为若干单值函数, 称为单值分支. <u>今后若无特别说明, 所讨论的函数都是单值函数</u>.

§ 1.2.2 初等复变函数的定义和基本性质

一元初等实函数回顾($x, y\in\mathbb{R}$):

e为自然常数, $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=2.718281828459\ldots$

1)指数函数: $y=a^x$ (常数$a>0$且$a\neq 1$), $y=e^x=\exp x$

2)对数函数: $y=\log_a x$ (当$a=e$, 记为$y=\ln x$)

3)幂函数: $y=x^\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$是常数)

4)三角函数: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x, \cdots$

5)反三角函数: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x, \cdots$

以上五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数. 例如, 双曲函数:

$$\mathrm{sh}\, x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \mathrm{ch}\, x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\quad \mathrm{th}\, x=\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}=\cdots$$

利用欧拉公式, 可将初等实函数定义域和值域自然地推广到复数域中.

1. 指数函数和对数函数

i) 指数函数 (exponential function)

分析: 对任意实数a, b有$e^{a+b}= e^a\cdot e^b$, 因此可以规定$e^{x+iy}= e^x\cdot e^{iy}$, 又由欧拉公式有$e^{iy}=\cos y+i\sin y$, 故定义复指数函数为:

$$w=e^z \triangleq e^x(\cos y+i\sin y),\quad 其中z=x+iy$$

1) 当z为实数x时与实指数函数e^x定义一致, e^z也记为$\exp(z)$.

2) $|e^z|=e^x$, (因$e^x>0$, 故$e^z\neq 0$), $\mathrm{Arg}\,(e^z)=y$

3) 运算法则: $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$.

证: $e^{z_1}e^{z_2}=(e^{x_1}e^{iy_1})(e^{x_2}e^{iy_2})$
$=e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}=e^{z_1+z_2}$

4) 指数函数e^z以$2\pi i$为基本周期, 即 $e^{z+2k\pi i}=e^z\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

事实上, $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow e^{z_1-z_2}=1\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi i\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

ii) 对数函数(logarithmic function)

定义：设 $z\neq 0$, 若复数 w 满足 $e^w=z$, 则称w为z的对数, 记为$w=\mathrm{Ln}\,z$.

设$w=u+iv$, 由指数函数性质2)有，$e^w=z \Longleftrightarrow \begin{cases} e^u=|z|, \text{ 即} u=\ln|z| \\ v=\mathrm{Arg}\,z \end{cases}$

$$\therefore\ \mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

每个非零复数z有无穷多对数 $\mathrm{Ln}\,z$．通常规定$-\pi<\arg z\leq\pi$，并称 $\ln|z|+i\arg z$ 为$\mathrm{Ln}\,z$的主值, 记为 $\ln z$, 即

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,$$

称 $\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$为$\mathrm{Ln}\,z$的一个单值分支, 记为$(\mathrm{Ln}\,z)_k$, 即

$$(\mathrm{Ln}\,z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)=\ln z+2k\pi i$$

当z为正实数x时, $\mathrm{Ln}\,x$的主值与x的实对数一致.

例. $\mathrm{Ln}\,2=\ln 2+2k\pi i,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\ln(-2)=\ln 2+\pi i,\qquad \mathrm{Ln}(-2)=\ln 2+(2k+1)\pi i,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\ln(-3+4i)=\ln 5+(\pi-\arctan\frac{4}{3})i$

$\mathrm{Ln}(2e^{\frac{5}{6}\pi i})=\ln 2+(\frac{5\pi}{6}+2k\pi)i,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

运算法则: $\begin{cases}\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2\\ \mathrm{Ln}(\frac{z_1}{z_2})=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2\end{cases}\qquad (z_1,z_2\neq 0)$

注1: 上面运算法则的等号两边都是指多值, 相等是指两边对应的点集完全一致, 若将$\mathrm{Ln}z$换成$\ln z$或$(\mathrm{Ln}z)_k$, 则等号未必成立. (试举例说明)

注2: 当$n\neq1$时 $\mathrm{Ln}(z^n)$ 和 $n\mathrm{Ln}z$ 即使在多值意义下一般也不等. (试举例说明)

*注1的反例:

设$z_1=2e^{\frac{5}{6}\pi i}$, $z_2=3e^{\frac{1}{3}\pi i}$,

则 $\ln z_1+\ln z_2=(\ln 2+\frac{5\pi}{6}i)+(\ln 3+\frac{\pi}{3}i)=(\ln 2+\ln 3)+(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})i=\ln 6+\frac{7\pi}{6}i$

$\because z_1z_2=6e^{\frac{7}{6}\pi i}=6e^{-\frac{5}{6}\pi i}$, $\quad\therefore \ln(z_1z_2)=\ln 6-\frac{5\pi}{6}i\neq\ln z_1+\ln z_2$

*注2的反例($n=2$):

设$|z|=r, \arg z=\theta$, 则$|z^2|=r^2, \mathrm{Arg}(z^2)=2\theta+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\therefore\quad \mathrm{Ln}(z^2)=\ln(r^2)+i(2\theta+2k\pi)=2\ln r+i(2\theta+2k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$2\,\mathrm{Ln}\,z=2\,[\ln r+i(\theta+2k\pi)]=2\ln r+i(2\theta+4k\pi),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$\therefore\quad \mathrm{Ln}(z^2)\neq 2\,\mathrm{Ln}\,z.$ 实际上, $\mathrm{Ln}(z^2)\supset 2\,\mathrm{Ln}\,z.$

2. 一般幂函数

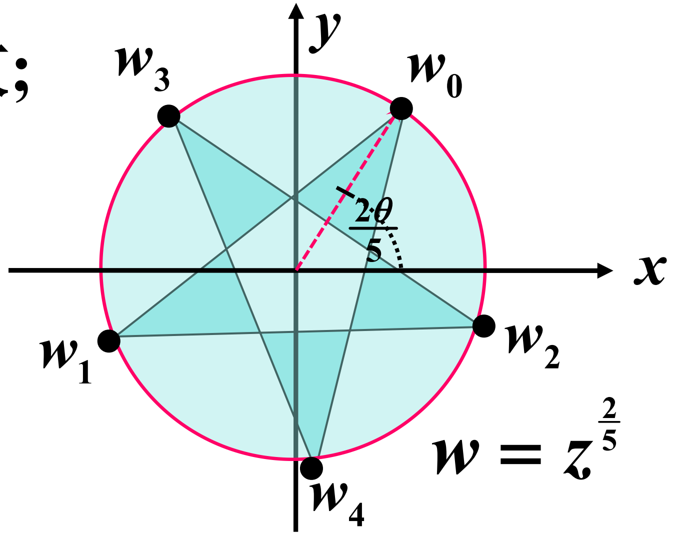
设b为任意给定复数, 对复变量 $z\neq0$, 定义z的b次幂函数为: $w=z^b\triangleq e^{b\,\mathrm{Ln}\,z}$

因Ln z 多值, 故z^b有可能是多值的, 设$|z|=r$, $\arg z=\theta$, 记

$$w_k=(z^b)_k=e^{b(\mathrm{Ln}\,z)_k}=e^{b[\ln r+i(\theta+2k\pi)]},\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

① 当b为整数n, 对任意整数k, $w_k=(z^n)_k=e^{n\ln r}e^{in(\theta+2k\pi)}=r^ne^{in\theta}=w_0$,

故 z^n是单值的, 且与 § 1.1.3由复数连乘定义的整幂一致;



② 当b为既约分数 $\frac{m}{n}$ $(n\geq2)$, 对任意整数k,

$$w_k=r^{\frac{m}{n}}e^{i\frac{m}{n}(\theta+2k\pi)}=r^{\frac{m}{n}}e^{i\cdot\frac{m}{n}\cdot\theta}e^{i\frac{m}{n}(2k\pi)}=w_0\,e^{i\cdot k\cdot\frac{m}{n}(2\pi)}$$

$\because e^{i\frac{m}{n}(2k\pi)}$ 有n个不同的值, 故w_k有且仅有n个不同的值,

分别对应$k=0,1,\ldots,n-1$; 当$b=\frac{1}{n}$, 与 § 1.1.3由整幂反函数(逆运算)定义的结果一致

③ 当b为无理数或虚部非零的复数时，z^b有无限多值，例如

$$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}1}=e^{\sqrt{2}(\ln 1+2k\pi i)}=e^{2\sqrt{2}k\pi i}=\cos(2\sqrt{2}k\pi)+i\sin(2\sqrt{2}k\pi),\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$(1+i)^i=e^{i\,\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i[\ln\sqrt{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i]}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}[\cos(\ln\sqrt{2})+i\sin(\ln\sqrt{2})],\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

综上, 当且仅当b不为整数时, z^b为多值(有限多值或无限多值), 多值情形下, 对应于k=0的值(即z的辐角取为arg z 时的值)称为 z^b 的主值.

注. 表达式 e^b分别作为指数函数 $e^z|_{z=b}$和幂函数 $z^b|_{z=e}$时, 有可能是不同的. 例如当b=1+i,

$$e^z\Big|_{z=1+i}=e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$$

$$z^{1+i}\Big|_{z=e}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}\,e}=e^{(1+i)(1+2k\pi i)}=e^{1-2k\pi}(\cos 1+i\sin 1),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

为避免混淆, e^b通常表示指数函数 $e^z|_{z=b}$, 也是幂函数的主值.

思考题. 设$|z|=r$, $\arg z=\theta$, 证明当b为实数时 z^b 可简化定义为:

$$z^b=[r\,e^{i(\theta+2k\pi)}]^b=r^b\,e^{ib(\theta+2k\pi)},$$

$$\text{其中}\begin{cases}k=0, & \text{当}b=n\ (\text{整数});\\ k=0,1,\cdots,n-1, & \text{当}b=\dfrac{m}{n}(\text{既约分数}, n\geq 2);\\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots, & \text{当}b\text{为无理数}.\end{cases}$$

这里 r^b表示实数意义下的乘幂. 若b为正实数, 可合理补充定义$0^b=0$.

3. 三角函数和双曲函数

i) 三角函数　分析: 根据欧拉公式, 对任意实数 x, 有 $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases}$,

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

定义复数z的正弦, 余弦函数为: $\sin z \triangleq \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z \triangleq \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

这样定义的正弦函数和余弦函数是实变量正余弦函数的推广, 易证如下性质:

1) 周期性: 以2π为基本周期; 2) 奇偶性: $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z$;

3) 零点分布: $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = (k + \frac{1}{2})\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

证. $\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow 2iz = \mathrm{Ln}(-1) = (\pi + 2k\pi)i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

4) 无界性: $|\sin z|$, $|\cos z|$无界.

证. $\because |e^{iz}|=|e^{-y+ix}|=e^{-y}$, $|e^{-iz}|=e^{y}$, $\therefore |\sin z|=\left|\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right|\geq \frac{1}{2}|e^{-y}-e^{y}|$

当$|y|$充分大, $|e^{-y}-e^{y}|$可大于任意指定的正数, 故$|\sin z|$无界; 同理, $|\cos z|$无界.

5) 与实函数一样, 其它三角函数可用正余弦函数定义:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \csc z=\frac{1}{\sin z}$$

6) 所有实变量的三角恒等式对复变量三角函数也成立. 例如

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\quad \sin 2z=2\sin z\cos z,\quad \cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

诱导公式: $\sin(z+\frac{\pi}{2})=\cos z, \cdots$ (奇变偶不变, 符号看象限)

例. 设z_0为已知复数, 求复数 z, 使其满足方程 $\cos z = \cos z_0$.

解. $\because \cos z - \cos z_0 = -2\sin\dfrac{z+z_0}{2}\sin\dfrac{z-z_0}{2}$

$$\therefore \cos z = \cos z_0 \Longleftrightarrow \cos z - \cos z_0 = 0 \Longleftrightarrow \sin\frac{z+z_0}{2} = 0 \text{或} \sin\frac{z-z_0}{2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{z+z_0}{2} = k\pi \text{ 或 } \frac{z-z_0}{2} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

即, $\cos z = \cos z_0 \Longleftrightarrow z = 2k\pi \pm z_0, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

同理可得, $\sin z = \sin z_0 \Longleftrightarrow z = k\pi + (-1)^k z_0, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

ii) 双曲函数

$$\sinh z = \operatorname{sh} z \triangleq \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \cosh z = \operatorname{ch} z \triangleq \frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\quad \tanh z = \operatorname{th} z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\cdots$$

分别称为双曲正弦, 双曲余弦, 双曲正切..., sh, ch, th是函数符号的简写.

双曲函数和三角函数可以互相转化: $\begin{cases}\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)\\ \sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)\\ \cos(iz) = \operatorname{ch}(z)\end{cases}$

双曲函数的性质可以由三角函数推出, 例如

1) 零点分布 $\operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i,\quad \operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow z = (k+\frac{1}{2})\pi i,\quad k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$

2) 奇偶性 $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,\quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z;$

3) 恒等式 $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,\cdots\cdots$

*例. 求 $\cos z$ 和 $\cos\bar{z}$ 的代数式，并求$|\cos z|^2$.

解法1. 由定义 $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\frac{1}{2}(e^{-y+ix}+e^{y-ix})=\cdots\cdots$

解法2.由三角恒等式和三角函数与双曲函数的关系

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\,\text{ch}\,y-i\sin x\,\text{sh}\,y$$

$$\cos\bar{z}=\cos(x-iy)=\cos x\cos iy+\sin x\sin iy=\cos x\,\text{ch}\,y+i\sin x\,\text{sh}\,y=\overline{\cos z}$$

$$|\cos z|^2=\cos^2 x\,\text{ch}^2 y+\sin^2 x\,\text{sh}^2 y$$

$$=\cos^2 x(\text{ch}^2 y-\text{sh}^2 y)+(\sin^2 x+\cos^2 x)\text{sh}^2 y$$

$$=\cos^2 x+\text{sh}^2 y$$

*思考题1：$\cos z$ 在哪些曲线上取实数? 在哪些曲线上取[–1,1]间的实数?

提示. $\because \cos z = \cos x \,\text{ch}\, y - i \sin x \,\text{sh}\, y$

$$\sin x \,\text{sh}\, y=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \text{或：}\quad \text{sh}\, y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$ (如图1)

思考题2：$\sin z$ 在哪些曲线上取实数? 在哪些曲线上取[–1,1]间的实数?

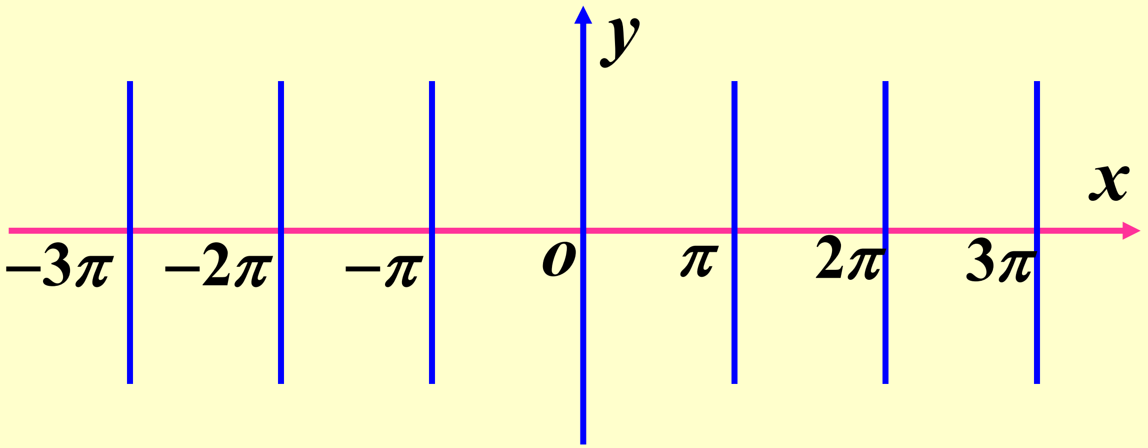


图1

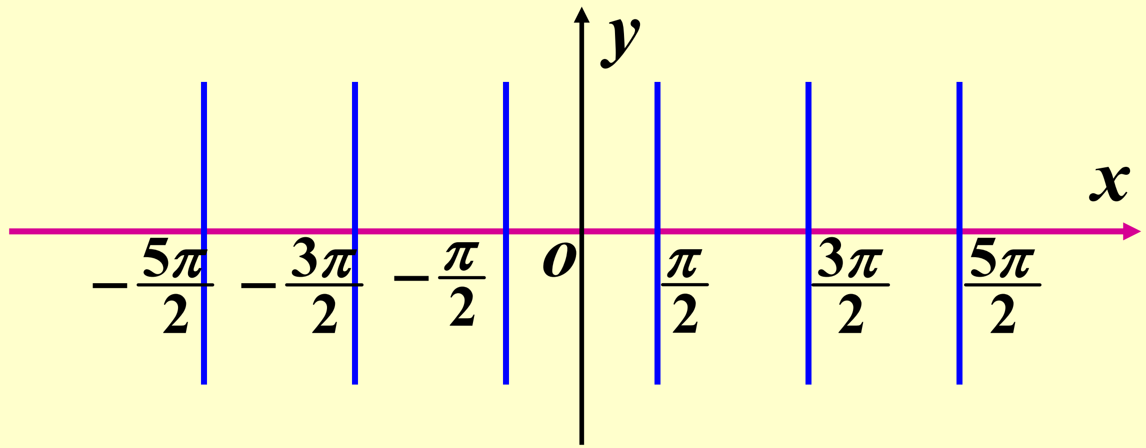


图2

*4. 反三角函数和反双曲函数

$$w=\mathrm{Arc}\sin z \Longleftrightarrow z=\sin w \quad \Longleftrightarrow z=\frac{1}{2i}(e^{iw}-e^{-iw}) \quad \Longleftrightarrow 2iz=e^{iw}-e^{-iw}$$

$$\Longleftrightarrow (e^{iw})^2-2iz(e^{iw})-1=0 \quad \Longleftrightarrow (e^{iw}-iz)^2=1-z^2 \Longleftrightarrow e^{iw}-iz=\sqrt{1-z^2}$$

这里代表开方的两个根

$$\Longleftrightarrow e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2} \quad \Longleftrightarrow iw=\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$$\therefore w=\mathrm{Arcsin}\, z \triangleq -i\,\mathrm{Ln}[iz+\sqrt{1-z^2}]$$

同理可得， $\mathrm{Arc}\cos z \triangleq -i\,\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$, $\quad \mathrm{Arc}\tan z \triangleq -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$

还可定义反双曲函数 Arcsinh z, Arccosh z, ……

初等复变函数小结

基本初等复变函数本质上只有指数函数和对数函数, 定义如下:

设Re(z)=x, Im(z)=y, $|z|$=r, arg(z)=θ, 则

1.指数函数 $w=\exp(z)=e^z \triangleq e^x(\cos y+i\sin y)$

2.对数函数 $w=\mathrm{Ln}\, z \triangleq \ln r+i(\theta+2k\pi)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

若按定义方式, 还可以将n次幂和方根(其中n=2,3, ...)算作基本初等函数:

3. n次幂 $w=z^n \triangleq (re^{i\theta})^n=r^n e^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

4. n次方根 $w=\sqrt[n]{z} \triangleq [re^{i(\theta+2k\pi)}]^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\cdots,n-1$

其它函数都可用这四种函数的四则运算和复合表示. 要注意, 当复合结构中有多值函数或多值函数的一个单值分支时, 实数域的运算法则在复数域中有可能不成立. 例如

$\ln(z_1z_2)\neq\ln z_1+\ln z_2$, 当$n$为整数且$n$≠1时, $\mathrm{Ln}(z^n)\neq n\,\mathrm{Ln}\, z$, $(z^n)^{\frac{1}{n}}\neq z^{n\cdot\frac{1}{n}}=z$

第1章作业

1. 求下列复数z的实部、虚部、模和辐角:

(1) $z=\frac{1+i}{2-i}$;　(2) $z=(2+3i)-i(1-i)$;

(3) $z=i(1-\sqrt{3}i)(1+i)$;　(4) $z=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})^{100}$;　(5) $z=\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^6}$;

2. 解下列方程:

(1) $z^2-4iz-(4-9i)=0$;　(2) $z^4+a^4=0,\ a>0$;　(3) $z^3+1+i=0$.

(4) $(1+z)^5=(1-z)^5$;

3.证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$ ，并说明其几何意义.

4. 将函数 $x^2-y^2-i(xy-x)$写成z的函数($z=x+iy$).

5.求下列各式的值(表示成$a+ib$的形式, 其中a, b为实数):

(1) e^{1+3i}; (2) $\mathrm{Ln}[(-1+i)^3]$; (3) $\ln[(-1+i)^3]$; (4) $(\sqrt{3}-i)^{\sqrt{2}}$; (5) 1^{3+4i}.

6. 解方程:

(1) $e^{\bar{z}}=1+\sqrt{3}i$; (2) $\ln z=\pi i$; (3) $\sin z+\cos z=0$; (4) $\sin z=2$

7. 用复数的指数式证明下列等式(其中$0<\theta<2\pi$):

(1) $$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=-\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

提示: $\because \cos k\theta+i\sin k\theta=e^{ik\theta}$ $\therefore (1)=\mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}]$, $(2)=\mathrm{Im}[\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}]$.