# 54. 什么是拓扑学

原载《科学》第29卷第3期,上海,1947年。

## 1. 绪言

近代纯粹数学的两大柱石,是拓扑学(Topology)与抽象代数。何以这两方面是数学的基础呢?这问题并不容易答复,姑举以下要点来说明:

第一,所谓近代数学的特征,是研究范围的扩大。数学研究的主要对象,不外为数与图形的性质,在数的观念的发展中,自然数与命分数当然最早。但古代希腊人的数学,例如欧几里得的几何原本,即有极完全的非命分数论。此后因方程式的研究而有虚数,因理论力学的发展而有四元(或矢量代数),因量子力学的应用而有其他种类的复数。系统既然增加,就有必要区别其异同,而加以整个的讨论。这是抽象代数的缘起。至于就图形论,古代希腊人所研究的是直线、圆周与其他简单曲线。但近代研究的范围,则是极广义的图形。所研究的图形未必是曲线或曲面;如是曲线,亦未必有切线。仔细想来,则何谓曲线,就并不是容易答复的问题。这些基本概念的澄清和由此引出的结论,都是拓扑学研究的对象。

第二,从基本上说,每一种数学研究的对象,都是一个集合和集合中的元在某种运算下的性质。因运算的种类不同,所得性质亦异。试取实数为例。加法与乘法都是运算,通常称为代数的运算。但如取一组实数 $A$,而命 $\bar{A}$ 为一切实数,可为 $A$ 中实数的极限者,则由 $A$ 到 $\bar{A}$ 也是一种运算,称为拓扑运算。在此例中,拓扑运算包含极限观念,因此拓扑学包含了若干分析中的基本定理。集合中同时有代数的与拓扑的运算者,在应用上很重要,在研究上至有兴趣。最简单的例是所谓拓扑群。拓扑群的理论,近来极受一般人的注意。

第三,在十八、十九两世纪中,复变函数论、微分方程式论、变分学、与代数几何学等,都有很大的进步。但从近代观点而论,这些科目中必须参加拓扑学的观念与方法,才能给人以深刻的认识。最近重要的贡献,如 Ahlfors 之于复变函数论,Poincare、Birkhoff、Leray、Schauder 之于微分方程式论,Morse、Douglas、Lusternik、Schnirelmann 之于变分学,Lefschetz、van der Waerden、Hodge 之于代数几何学,都是基于拓扑学观念的引进。

拓扑学内容甚广,其概念非短文所可说明。本文不作系统的叙述,只随意选择

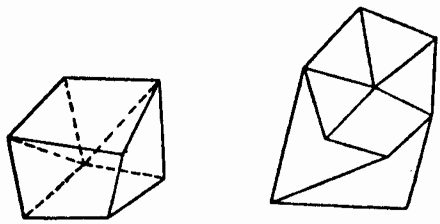
若干较重要的问题,加以讨论。

## 2. 尤拉公式

第一本关于拓扑学的书,是 Listing 的 Vorstudien zur Topologie,于 1847 年出版,距今将近百年。但在此书出版以前,关于拓扑学的零碎结果,已有若干。最重要的是所谓尤拉公式(Euler's Formula)。尤拉公式的对象,是一个简单多面体。命 $v$、$e$、$s$ 依次为该多面体的顶点数、边数与面数,则该公式是

$$v - e + s = 2。\tag{1}$$

这公式在初等几何学书中,就有证明。以下的证明中,包含极简单而有用的观念。



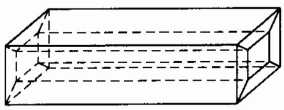
原来的多面体　　　　去顶面铺平后形状

图 1

我们去掉所论多面体的一面,而将剩余部分铺在平面上(图 1)。在铺平的时候,不妨准许边与面的形状有变更,但其数目与其相互的关系不变。这手续显然不影响尤拉公式的准确性,亦显然可能。

铺平后在平面上所得是一个多边形,和其中的一个网。这个网的顶点数、边数与面数,依次是 $v' = v, e' = e$,与 $s' = s - 1$。如去掉网内一边,则或者 $e'$ 与 $s'$ 各减少一,或者 $v'$ 与 $e'$ 各减少一,每次 $v' - e' + s'$ 都不变。但连续应用这手续后,最后所得是一个简单多边形,他的顶点数等于边数,而他的面数是一。所以 $v' - e' + s' = 1$,而尤拉公式由此证明。

在公式(1)中我们假定所论多面体是简单的。去了这个假设,这公式显然不确。图 2 的多面体就是一例。



$v = 16,\ e = 32,\ s = 16$

$v - e + s = 0$。

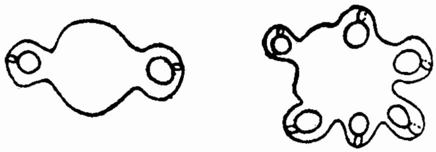
图 2

要推广尤拉公式到非简单的多面体,拓扑学的观念就很重要了。拓扑学中的主要观念是拓扑变换。我们不必对拓扑变换给一个严格的定义,只说这是一个一一的绵续的变换。要想像这种变换,可假定曲面是用橡皮做成的。任意一个把橡皮拉长或缩短的变换,只要不把橡皮拉破,就是拓扑变换。两个图形可用拓扑变

换互相变换者，称为相拓的。根据这个定义，球面与椭圆面是相拓的，球面与立方体的面是相拓的，图 2 所示多面体与环面亦是相拓的。实际上我们有以下的普通定理：

三维空间内两面的曲面可用拓扑变换变成球面上装 $p$ 个环的法式。

定理中所谓两面的意义，下节当再说明，所谓球面上装环的曲面，可看图 3 自明。



$p=2$ $p=6$

图 3

法式中的环数 $p$ 叫做曲面的类(genus)。上面所述的定理，其实不难证明。比较难证明的，还是底下的定理：

两个相拓的曲面，其类相等。

换句话说，类这个整数，经过拓扑变换后不变。研究拓扑学的一个主要目的，是要求拓扑变换下的不变式。类就是第一个重要的例子。

根据上面的讨论，设多面体的类是 $p$，而他的顶点数、边数与面数依次是 $v$、$e$、$s$。则推广后的尤拉公式表示这四个数间的关系，而是下面的形状：

$$v - e + s = 2 - 2p。\tag{2}$$

要证明这个公式，先将每个环切开，而在所截面的两端，各装上一面(图 4)。如此则所装的面数是 $2p$。经此手续后所得多面体的类是零，而公式(1)适用。应用公式(1)可得

$$v - e + (s + 2p) = 2,$$

即为公式(2)。

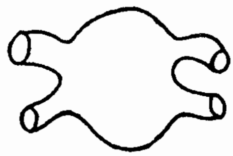


图 4

## 3. 单面曲面

所谓曲面是两面的，指以下的性质：曲面有正反两面。自面上正面(或反面)一点如用曲线连至反面(或正面)一点，则该曲线或需穿过曲面，或需与曲面的界线相交。

由普通常识往往会觉得三维空间内的曲面都是两面的。例如球面、柱面等都如此。但这观念是错误的。空间内实在有许多不能分正反面的曲面。最早发现这事实的是德国几何学家 Mobius.

Mobius所造的单面曲面,称为Mobius条,其作法至为简单。我们取长方形$ABCD$,如图5,而将$AD$边与$CB$边依图中方向黏在一起。所得曲面就是Mobius条,以曲线$ABDC$为界线。读者试用纸条造此曲面,不难发现从面上一点可用曲线连至其反面的点,而不穿过曲面的界线。

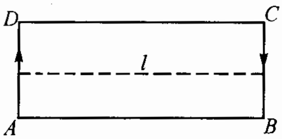


图5

读者试将此曲面沿正中的线$l$剪断,即可得一新的曲面。若更将该新曲面同样沿正中的线剪断,可再得有趣的结果。

与曲面单双面的性质有密切关系而并不完全相当的性质,是所谓定向性(Orientation)。在曲面上一点有两个钟表方向,或顺或逆。试确定其中一个,则用绵续性,该钟表方向可移至面上邻近的点。将该钟表方向沿一封闭的曲线推展,而回到原点,则在原点所得的钟表方向,有时可与原来的相反。曲面有此性质者,称为不定向的。若在曲面上一点确定钟表方向后,无论沿何曲线推展,反至原点,结果恒得原来的钟表方向者,该曲面称为定向的。通常几何学中所论曲面大多是定向的。不定向的曲面中,Mobius条即是一例(图6)。如果世界在一不定向的曲面上,有时走了一圈回来。书上字母的次序可以完全相反。

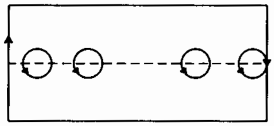


图6

Mobius条是一个有界线的不定向的单面曲面。封闭的曲面中,有以后两性质者,最简单的是Klein壶,他的作法如次:取长方形$ABCD$(图7)。先将$AD$与$BC$两边按图中方向黏住,得一柱面。再黏住$AB$与$CD$二边。所得封闭的曲面称为Klein壶。这曲面在空间有一自交的曲线。我们不难证明:这曲面是单面的与不定向的。

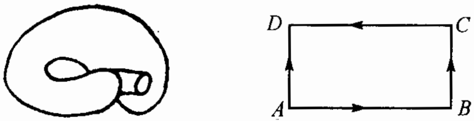


图7

## 4. 四色问题

拓扑学中一个浅近而至今未曾解决的问题,是所谓四色问题。这问题的兴趣由于他的困难,其重要性实不及许多其他未决的基本问题。

在地图上着色,习惯常将两个有一边相共的区域涂上不同的颜色。由经验得知,无论地图如何复杂,恒可用四种颜色将一切区域着色,使合于相邻区域获得不同颜色的条件。数学家中最早建议证明此定理的,有Mobius(1840)、De Morgan(1850)、Cayley(1878)等。但经过百余年的时间,这定理的确否,仍未能断定。

要讨论四色问题,我们首先观察:平面上的四色问题与球面上的四色问题,是

相当的。假设平面上的地图都可用四种颜色着色，使相邻区域获得不同的颜色。则对于球面上的任一地图，我们可取出一个区域；而将所剩的区域铺平在平面上（如证明尤拉公式时的办法）。在铺平的手续中，区域的形状可以变化，但其相互位置不变。铺平以后所得地图如一大洲，而取出的区域则如海洋。依假设，此平面上的地图可用四种颜色着色，故原来球面上的图亦可，反之，用同样方法，可以证明，如球面上的四色问题解决，则平面上的亦然。

经此段讨论后，我们可先将问题推广，假设地图系画在一个 $p$ 类的两面曲面上。命 $n(p)$ 为有以下性质的最小的数：曲面上的任意地图，可用 $n(p)$ 个颜色着色，使相邻区域获得不同的颜色。此定义并不保证 $n(p)$ 必为有限的。四色问题的推测，为 $n(0)=4$。

关于地图着色问题，我们要证次之定理：

命 $m$ 为一整数，合于次之条件：对于任意整数 $s>m$，有不等式

$$ms>6(s+2p-2)。$$

如这样的整数 $m$ 存在（我们易证其为存在），则 $p$ 类的两面曲面上的任意地图，都可用 $m$ 个颜色着色，使相邻区域获得不同的颜色。

要证此定理，假设地图中的顶点数、边数与面数，依次是 $v$、$e$、$s$。若 $s\leqslant m$，此定理显然为真。我们因此应用数学归纳法，假设此定理对于面数小于 $s$ 的地图，业已证明。

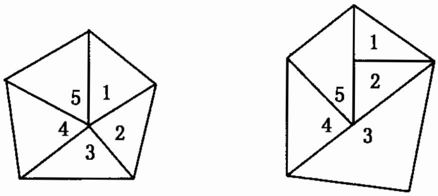



图 8

我们首先将地图约略改变（图 8），使在每个顶点，只有三面。这手续显然不影响曲面的类，地图的面数，和用来着图的颜色的数目。但顶点数与边数，或有改变。该二数我们仍用 $v$ 与 $e$ 表示。如经每顶点恰有三边，则图中边数是 $\frac{3}{2}v$。因此有 $3v=2e$，而

$$6(s+2p-2)=6(e-v)=6e-4e=2e。$$

由是得 $ms>2e$。由此不等式可知地图上必有一个区域，其边数小于 $m$。因否则即谓每区域至少有 $m$ 个边，而总边数至少是 $ms$；但这样把每边算了两次，遂得 $ms\leqslant 2e$，与上之不等式不合。

设 $D$ 为边数小于 $m$ 的区域。将 $D$ 缩成一点，曲面的类数不变。但所得地图，

其面数是 $s-1$。依假设此地图可用 $m$ 个颜色着色。故原来地图将区域 $D$ 除去后也可用 $m$ 个颜色着色。但 $D$ 至多只与 $m-1$ 个区域相邻,故必有一个颜色存在,可以着 $D$。因此证明以上的定理。

我们现在设法求最小的整数 $m$,合于定理中的条件者。先将不等式写作

$$m > 6\left(1+\frac{2p-2}{s}\right)。$$

若 $p=0$,则 $m=6$;若 $p=1$,则 $m=7$;若 $p=2$,则不等式右端随 $s$ 之增加而减少,其最大值相当于 $s=m+1$。故 $m$ 适合不等式

$$m > 6\left(1+\frac{2p-2}{m+1}\right)$$

或

$$m^2-5m > 12p-6。$$

命 $[x]$ 代表小于 $x$ 的最大的整数。则合于以上不等式的 $m$ 是

$$m=\left[\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{48p+1}\right],$$

当 $1\leqslant p\leqslant 6$ 时,$m$ 的值可列如下表:

| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

假设 $1\leqslant p\leqslant 6$,而命 $m$ 表上表中相当的数。则以上定理谓任何地图可用 $m$ 个颜色着色,即 $n(p)\leqslant m$。同时我们不难于相当的曲面上,作一地图,不能用少于 $m$ 个颜色着色。故 $n(p)=m, 1\leqslant p\leqslant 6$。换言之,对于类等于一至六的两面曲面,地图问题业已完全解决。

很奇怪的事,是对于零类的曲面,即球面,以上定理只说 $n(0)\leqslant 6$,但推测为 $n(0)=4$。这有名的“四色问题”仍旧是数学上的难题之一。

## 5. 维的理论

几何学中一个基本的概念,是几何图形的维(dimension)。这问题初看似很简单。例如,点是零维的,直线或曲线是一维的,平面或曲面是二维的,空间是三维的。但我们如取直线上坐标为命分数的一切点,或坐标是非命分数的一切点,他们的维是多少,就不易断定。如取更为复杂的点集,则确定他们的维数,可成极难的问题。

任何有意义的维的定义,总要使直线的维是一,平面的维是二。如细想何以直线的维是一,首先想得到的理由,必因直线上的点,可用一个坐标来确定。但这问题并不如此简单。实际上 Cantor 曾证明下面的定理:

单位线段上的点与单位正方形上的点间，可建立一个一一的对应关系。

这个奇怪的结果的证明，非常简单，可约略说明如下：我们将单位线段上的点用坐标 $t$ 确定，$0 \leqslant t \leqslant 1$。而将单位正方形上的点用坐标 $x$、$y$ 确定，$0 \leqslant x, y \leqslant 1$。每个坐标($t$ 或 $x$ 或 $y$)可展成小数如次：

$$t = 0.a_1a_2a_3\cdots, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant 9, \quad k = 1,2,\cdots。$$

要使这个小数的表示法能完全确定，我们假设每个有尽的小数都写成无尽小数，其末尾数字全为 9(例如 $1 = 0.999\cdots$，$0.21 = 0.20999\cdots$)。经此了解，我们更将每小数分段，每段包含一串零及最后一个不等于零的数字。假设经分段以后坐标 $t$、$x$、$y$ 写成下面的形状：

$$t = 0.A_1A_2A_3\cdots,$$
$$x = 0.B_1B_2B_3\cdots,$$
$$y = 0.C_1C_2C_3\cdots,$$

式中每个大写字母表示一段。用此表示法线段与正方形间的对应关系如次：线段上点 $t$ 在正方形上的对应点是

$$x = 0.A_1A_3A_5\cdots,$$
$$y = 0.A_2A_4A_6\cdots;$$

正方形上点($x$, $y$)在线段上的对应点是

$$t = 0.B_1C_1B_2C_2\cdots。$$

这样确定的对应关系显然是一一的，因此证明以上 Cantor 的定理。

如果我们坚持线段的维是一，正方形的维是二，则 Cantor 定理表示维在一一的变换下，可以改变。

以上的一一变换自然毁坏线段与正方形的绵续性。换言之，该项变换并非绵续的。如果我们限于绵续的变换，图形的维能否改变?

关于这个问题 Peano 有重要的贡献。Peano 证明下面的定理：

有一绵续的(但非一一的)点变换存在，将单位线段变至单位正方形。

由于 Peano 的贡献，单位线段的任何绵续图影(map)叫做 Peano 曲线。但我们须要注意：Peano 曲线与通常观念下的曲线，可以迥然不同。例如，以上的定理就说单位正方形是一个 Peano 曲线。

要证明上面的定理，我们把线段分为四等份，而依其由左至右的次序，用 $I_1$、$I_2$、$I_3$、$I_4$ 表示。更将每个分线段分为四等份，如此一直分下去。每将线段分一次后所得的四个分线段，我们按由左至右的次序，用新的下标 1、2、3、4 表示。例如，倘原来分线段是 $I_{pqrs}$，则四个小分线段是 $I_{pqrs1}$、$I_{pqrs2}$、$I_{pqrs3}$、$I_{pqrs4}$。如果线段上每点

$P$ 可写成一串线段的极限点,如下状:

$$I_p > I_{pq} > I_{pqr} > \cdots,\ p,q,r,\cdots = 1,2,3,4, \tag{3}$$

式中的符号 > 表示"包含"。

用同样方法我们可将单位正方形分成四个相等的小正方形,而继续的分下去,如图所示(图 9)。这样正方形中一点 $P^*$ 也可写成一串正方形的极限点,如:

$$S_p > S_{pq} > S_{pqr} > \cdots,\ p,q,r,\cdots = 1,2,3,4。 \tag{4}$$

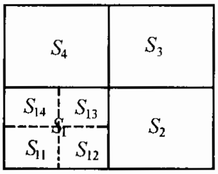



图 9

这样的表示 $P$ 与 $P^*$ 的方法,并不完全确定,即同一点可以写作两不同串的极限点。例如

$$I_2 > I_{24} > I_{244} > I_{2444} > \cdots$$
$$I_3 > I_{31} > I_{311} > I_{3111} > \cdots$$

就有同一极限点。但我们不难证明:如线段上两串(3)有同一极限点,则用相同两组下标所得的两串(4)也有同一极限点。所以我们可叫串(4)的极限点做串(3)的极限点的对应点。所得是一个变换,把单位线段变为单位正方形。

这个变换可以证明是绵续的,因此证明以上的定理。但是这变换并不是一一的,即线段上不同的点,可以变成正方形中同一点。

总结以上的结果,我们证明:在一一(而不绵续)的变换下,和在绵续(而不一一)的变换下,单位线段与单位正方形都可互相变换。

一一而又绵续的变换,叫做拓扑变换。在拓扑变换下,单位线段与单位正方形是否可以互相变换?

这问题的答案是"不可"。理由是这样的:假设有拓扑变换 $t$ 存在,把单位线段,变为单位正方形,命 $M$ 为线段的中点,$t(M)$为 $M$ 在正方形中的对应点。$M$ 把线段分为两部分。但无论 $t(M)$的位置若何,$t(M)$并不把正方形分成两部分。所以这样的变换不能存在。

这证明并不严格。要得严格的证明,须要确定所谓"部分"的意义。但上面所说,确是证明的基本事实。

在高度空间中以上定理的推广,可以述成下状:命 $E_m$ 表示 $m$ 维欧几里得空间内的单位立方体(即若空间的坐标是 $x_1,\cdots,x_m$,单位立方体中的点,合于条件 $0 \leqslant x_k \leqslant 1, k = 1,\cdots,m$)。则当 $m \neq n$,没有拓扑变换存在,把 $E_m$ 变为 $E_n$。

有了这个定理,维的理论才算奠定了基础。但这个定理的证明很困难,经过了极长时间才获成功。第一个证明这个定理是荷兰数学家 Brouwer。

## 6. 定点定理

设在一定的空间内施行绵续的变换。我们的问题是有没有点存在,他的对应

点是他自己？这样的点叫做定点。

绵续的变换未必有定点。坐标为 $x$、$y$ 的欧儿里得平面上的移动，即是一例。但 Brouwer 曾证明下面的定理：

$n$ 维欧氏空间内单位立方体 $E_n$ 中的任何绵续变换，必有一个定点。

这个有名的定点定理，引起了晚近无数的研究工作。我们首先说明，这定理如果真确，则当 $E_n$ 经过一拓扑变换后，仍是真确。所以我们可把定理中的立方体，换为单位球体。若空间的坐标是 $x_1, \cdots, x_n$，则单位球体中的点是适合以下不等式的一切点：

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1。$$

我们要指示 $n = 2$ 时这定理的一个证明，其程序大约如次：假设有一绵续变换存在，把平面上单位圆盘（即圆上和圆内）的点，变为单位圆盘的点，并假设每点的对应点都不是他自己。我们要证明这是不可能。

根据后一假设，我们可将圆盘上每点用一矢量连到他的对应点，这矢量永不等于零。我们讨论圆盘上以圆心为心的一族同心圆。当一点沿族中一个圆周移动时，把这点连到对应点的矢量也跟着转动。如这点顺钟表方向完成一周，则该矢量亦作若干周。假设此周数为 $p$，其符号或正或负，视所作周数系顺钟表方向或逆钟表方向而定。命 $r$ 表示该同心圆周的半径 $(0 \leqslant r \leqslant 1)$，则 $p$ 为 $r$ 的函数。这函数显然是绵续的，又是整数。所以必然是常数。但当 $r = 0$ 时，同心圆周只有一点，其矢量所作周数是零。所以 $p = 0$。因此得知，当一点沿单位圆周绕行一圈后，该点矢量所作的圈数是零。

要确定单位圆周上一点 $P$，可自圆心 $O$ 作一固定的半径，而连接半径 $OP$（图 10）。命此两半径间的角度为 $\varphi$，$0 \leqslant \varphi < 2\pi$，则 $P$ 的位置可用角度 $\varphi$ 确定。

现在设 $P'$ 为 $P$ 的对应点，$\omega$ 为 $PO$ 与 $PP'$ 间的角度。则 $\omega$ 是 $\varphi$ 的绵续函数。这函数并适合不等式 $0 \leqslant \omega < \dfrac{\pi}{2}$，

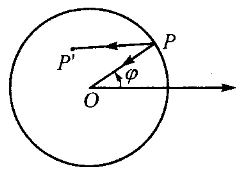


图 10

命 $t$ 为 0 与 1 间之一实变数。经过 $P$ 作矢量 $\vec{v}(t)$，与矢量 $\overrightarrow{PO}$ 成角度 $t\omega$。对于每个的 $t$ 值，$0 \leqslant t \leqslant 1$，圆周上每点有一矢量 $\vec{v}(t)$，当 $P$ 点顺钟表方向作圆周一圈，矢量 $\vec{v}(t)$ 作 $p(t)$ 圈。但 $p(t)$ 为 $t$ 的绵续函数，且是整数，故必然是常数。在 $t = 0$ 时，放在 $P$ 点的矢量就是半径矢量 $\overrightarrow{PO}$。在此情形 $p(0) = 1$。所以 $p(t) = 1$，这结果与以上所说 $p = 0$ 相冲突。因此证明了 $n = 2$ 时的 Brouwer 定点定理。

我们要指出，以上证明中，后段的方法，叫做 deformation，是拓扑学中一个重要的方法。

Brouwer 定点定理是这类定理中最简单的一个。拓扑学的研究，因此定理而兴

起了无数波澜。

这类发展中最重要的结果,似乎是在分析和几何问题上的应用。我们姑举下面的问题为例:

线段 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的全体绵续函数 $f(x)$ 组成一个空间,通常叫做函数空间。试察下状的积分方程式

$$y(x) = \lambda\int_0^1 F(x, y(x))\mathrm{d}x + A(x),$$

其中 $F$、$A$ 都是已知的函数,$\lambda$ 是常数,$y(x)$ 是未知函数。这样的积分方程式叫做 Fredholm 式的积分方程式。如把方程式左端的函数 $y(x)$ 换为 $z(x)$,即确定函数空间的一个变换 $T$,把函数 $y(x)$ 变为 $z(x)$。而该积分方程式的解即相当于变换 $T$ 的一定点,说积分方程式有解,就等于说 $T$ 有定点。Birkhoff 与 Kellogg 证明在某种条件下,变换 $T$ 有定点。

Birkhoff 与 Kellogg 所证的定理,远比上述者为广。同样的把拓扑学应用到微分方程式的存在问题,Leray 与 Schauder 也有很重要的贡献。

函数空间的观念,是近代数学的一重要认识。近代数学的一特征,为推广研究的范围。例如,要研究一个函数,就先讨论全体函数所成的空间。要研究一个曲线,就先讨论全体曲线所成的空间。然后看平常空间中什么性质在这样广义的空间定义下仍得保存,再看所论的函数或曲线在空间中的特殊位置。

要说明这个观点,以上所论 Birkhoff - Kellogg 定理已是一例。但我们可再举 Morse 的 critical points 理论为例。在一个 $n$ 维空间内,如有一个绵续函数,则这函数的最大点、最小点,与稳定点(stationary points)间必有若干个关系,与空间的拓扑性质有关,而为一切绵续函数所必须适合。大致说来,这是 Morse 理论的主要部分。Morse 把这结果推广到函数空间,因此解决了变分学方面若干重要的问题。

## 7. 结论

以上所论,不过是若干零碎的结果。实际上拓扑学的范围,广大无边,前途发展,更是无限。作者写到此地,除希望习算同志,对于此门数学加以注重外,愿作若干简单的历史叙述。

以前的拓扑学者每把拓扑学划分为两支。第一是集合拓扑学,系把空间看成点的组合,而研究他的性质。这派的开创者,是德国的数学家 G. Cantor;第二是代数拓扑学,其开创者是 H. Poincare,其出发点系把空间看成由弯曲的多面体组成而进行研究,着重于这些多面体间的关系。但经近来拓扑学者的工作,这两支已渐有打成一片的趋势。

现尚生存最大的拓扑学者是荷兰数学家 Brouwer,二十年来最重要的两个学派,是波兰学派与美国学派。波兰派的领袖人物,有 Sierpinski, Kuratowski, Borsuk

等。美国派的领袖人物,有 Veblen, Alexander, Lefschetz 等。但是目前(即 1945 年左右)最活动的两个拓扑学家,是瑞士的 H. Hopf 与苏联的 L. Pontrjagin。英美拓扑学家中,近来最有成绩的,英国有牛津的 J. H. C. Whitehead,美国有哈佛的 H. Whitney。

至于拓扑学方面的书籍,初学者可从以下数书着手:

1. M. H. A. Newman, Elements of the Topology of Plane Sets
2. W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory
3. H. Seifert and W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie
4. P. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie

比较标准的书,可举以下数本:

5. O. Veblen, Analysis Situs
6. S. Lefschetz, Topology
7. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I
8. Kuratowski, Topologie I

所举的这些书自然不能包罗一切。但由此可以渐知此学的重要文献。

(一九四六年五月五日于上海中央研究院)