一般拓扑学

第 1 课: 集合、映射、实数

张德学

2025. 2. 24

Outline

为什么学习一般拓扑学

集合

映射

关系

实数公理

拓扑学是干嘛的?

拓扑学研究连续函数.

拓扑学是干嘛的?

拓扑学研究连续函数.

拓扑学研究一般空间之间的连续函数, 不只是欧氏空间的子集之间的连续函数.

拓扑学是干嘛的?

拓扑学研究连续函数.

拓扑学研究一般空间之间的连续函数, 不只是欧氏空间的子集之间的连续函数.

有必要吗?

令

$$[\mathbb{R} \to \mathbb{R}] = \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ 连续}\}.$$

则 $[\mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ 是线性空间, 但不是有限维的, 因此不是欧氏空间的子集.

令

$$[\mathbb{R}\to\mathbb{R}]=\{f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\mid f\ \text{连续}\}.$$

则 $[\mathbb{R}\to\mathbb{R}]$ 是线性空间, 但不是有限维的, 因此不是欧氏空间的子集.

问计值映射

$$\mathrm{ev}\colon [\mathbb{R}\to\mathbb{R}]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad (f,x)\mapsto f(x)$$

是否连续?

这个问题告诉我们有必要把连续函数的概念从欧氏空间推广到一般的空间.

相关概念: 函数列的逐点收敛和一致收敛.

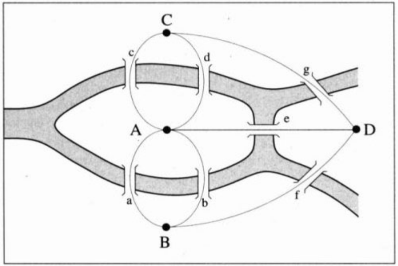
拓扑学关心的是, 空间在连续形变下保持不变的性质.

拓扑学关心的是, 空间在连续形变下保持不变的性质.

三组例子:

- $[0,1]$ 与 $[0,2]$;
- $(-1,1)$ 与 $(-\infty,\infty)$;
- $[0,1]$ 与 $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

Königsberg 七桥问题: 拓扑学起源之一

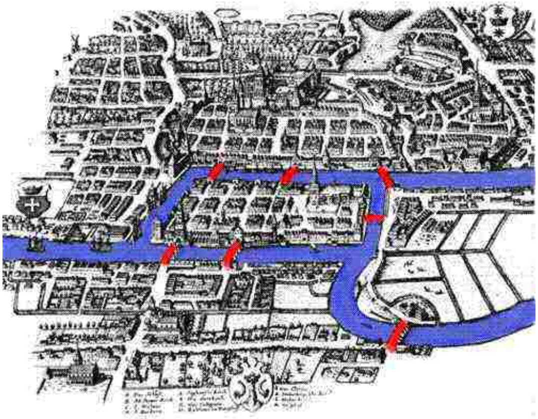


The Seven Bridges of Königsberg is a historically notable problem in mathematics. Its negative resolution by Leonhard Euler in 1735 laid the foundations of graph theory and prefigured the idea of topology.[1] — Wiki

[1] The word "Topology" originated from the Greek word "topos" (place, site).

Leonhard Euler, 1707-1783

欧拉时代的 Königsberg



橡皮几何学: 拓扑学的直观解释

It is worthy repeating that geometry is the art of reasoning well from badly drawn figures; however, these figures, if they are not to deceive us, must satisfy certain conditions; the proportions may be grossly altered, but the relative positions of the different parts must not be upset.

The use of figures is, above all, then, for the purpose of making known certain relations between the objects that we study, and these relations are those which occupy the branch of geometry that we have called *Analysis situs*, and which describes the relative situation of points and lines on surfaces, without consideration of their magnitude.

— Henri Poincaré, Analysis situs, 1895.

Henri Poincaré, 1854–1912

拓扑学是一个年轻的数学分支, 包括:

- 一般拓扑 (General Topology), 也称点集拓扑 (Point-Set Topology)
- 组合拓扑 (Combinatorial Topology)
- 代数拓扑 (Algebraic Topology)
- 微分拓扑 (Differential Topology)
- ...

一般拓扑学

拓扑学的一个分支, 现代数学最基础的内容与最基本的工具之一.

- 拓扑空间
- 连续映射
- 收敛与极限
- 拓扑等价
- ...

Topological spaces show up naturally in almost every branch of mathematics. This has made topology one of the great unifying ideas and one of the great tools of mathematics.

一般拓扑学的“特点”

- 抽象
- 公理化方法
- 太多的概念, 还有一些“奇奇怪怪”的例子
- …
- 写证明

教材

张德学, 一般拓扑学基础, 第二版. 科学出版社, 2021. （2024, 2025 印刷）

(这学期讲授前八章大部分内容, 后两章是为不相信一般拓扑很简单的同学准备的.)

参考书: 任何一本关于一般拓扑的教材都行，例如：

- C. Adams, R. Franzosa, Introduction to Topology, Pure and Applied. Pearson Education Inc., 2008.
- G. Buskes, A. van Rooij, Topological Spaces: From Distance to Neighborhood. Springer, 1997.
- J.R. Munkres, Topology, Second Edition. Pearson Education Inc., 2000.
- ……

成绩评定

期末成绩 50% + 平时成绩 50%

按学校要求, 根据情况设置强制及格线

助教: 孟一凡

Outline

- 为什么学习一般拓扑学
- 集合
- 映射
- 关系
- 实数公理

一点点逻辑

设 p, q 为两个命题, 可能为真也可能为假.

考虑命题 “若 p 则 q” ($p \Rightarrow q$) 的真假:

一点点逻辑

设 p, q 为两个命题, 可能为真也可能为假.

考虑命题 “若 p 则 q” $(p \Rightarrow q)$ 的真假:

- p 真, q 真; $p \Rightarrow q$ 真.
- p 真, q 假; $p \Rightarrow q$ 假.
- p 假, q 真; $p \Rightarrow q$ 真.
- p 假, q 假; $p \Rightarrow q$ 真.

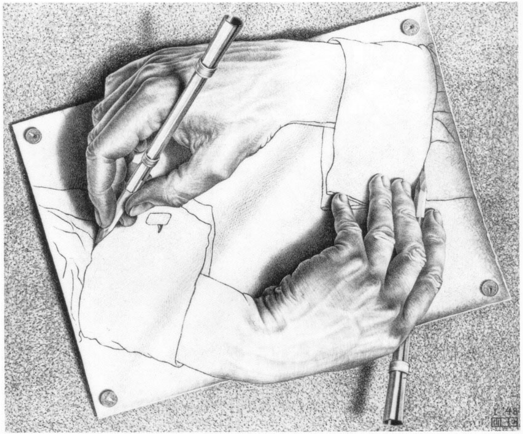
- 若 $2+3=5$, 则 $\sin\pi=0$.
- 若 $2+3=5$, 则 $\sin\pi=11$.
- 若 $2+3=7$, 则 $\sin\pi=0$.
- 若 $2+3=7$, 则 $\sin\pi=11$.

集合论: “数学基础"

集合论使得我们能 “有效” 地谈论无穷.

集合是初始概念 (primitive notion), 没有定义.

M. C. Escher: 互绘的手



集合没有定义, 我们通过确定关于集合能做些什么来认识和研究集合.[2]

[2] The meaning of a word is its use in the language. — Ludwig Wittgenstein

集合没有定义, 我们通过确定关于集合能做些什么来认识和研究集合.[2]

Georg Cantor 的规则（朴素集论）:

任给性质 P, 所有具有性质 P 的对象构成一个集合, 即

$$\{x : P(x)\}$$

是一个集合.

[2] The meaning of a word is its use in the language. — Ludwig Wittgenstein

集合没有定义, 我们通过确定关于集合能做些什么来认识和研究集合.[2]

Georg Cantor 的规则（朴素集论）:

任给性质 P, 所有具有性质 P 的对象构成一个集合, 即

$$\{x : P(x)\}$$

是一个集合.

这个规则很简单, 也符合我们对 “集合” 的直观理解和 “预期”, 但是

[2] The meaning of a word is its use in the language. — Ludwig Wittgenstein

罗素悖论: 朴素集论的挑战

令

$$R = \{x : x \notin x\}.$$

问

$$R \in R\,?$$

罗素悖论: 朴素集论的挑战

令

$$R = \{x : x \notin x\}.$$

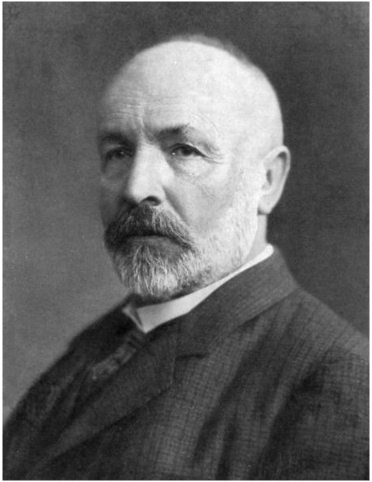
问

$$R \in R\ ?$$

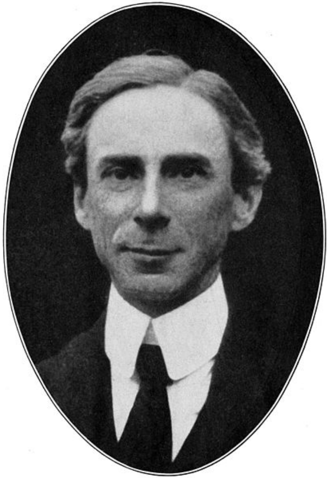
罗素悖论: R 既不能是它自己的元素, 又不能不是它自己的元素.

罗素悖论导致了所谓的 “第三次数学危机”.

Georg Cantor, 1845-1918



Bertrand Russell, 1872-1970



David Hilbert, 1862-1943

No one shall expel us from the Paradise that Cantor has created.

公理集合论

由罗素悖论,

$$\{x : P(x)\}$$

不能作为产生集合的规则.

集合产生规则的研究导致了公理集合论:

每一条集论公理本质上就是断言存在满足某种性质的集合.

两个集论公理体系

ZFC Zermelo-Fraenkel + Axiom of Choice

(primitive notions: sets, belonging to)

VBG von Neumann-Bernays-Gödel

(primitive notions: sets, classes, belonging to)

集合相等

集 X 与集 Y 相等当且仅当它们含有相同的元素:

$$X = Y \iff (x \in X \Leftrightarrow x \in Y).$$

换言之, 一个集合由它的元素完全确定.

要证明两个集合相等只需证明它们有相同的元素.

集合相等

集 X 与集 Y 相等当且仅当它们含有相同的元素:

$$X = Y \iff (x \in X \Leftrightarrow x \in Y).$$

换言之, 一个集合由它的元素完全确定.

要证明两个集合相等只需证明它们有相同的元素.

子集.

分离模式

若 X 是集合, P 是某种性质, 则

$$\{x \in X : P(x)\}$$

是一个集合, 它表示 X 中所有具有性质 P 的元素之集.

例 1

- 任给集合 X,
$$\{x \in X : x \neq x\}$$
是一个集合, 它不含任何元素, 称为空集, 用 $\varnothing$ 表示.

例 1

- 任给集合 X,

$$\{x \in X : x \neq x\}$$

  是一个集合, 它不含任何元素, 称为空集, 用 $\varnothing$ 表示.

- 任给集合 X, Y,

$$\{x \in X : x \notin Y\}$$

  是 X 的一个子集, 它表示所有属于 X 但不属于 Y 的对象之集, 称为 X 与 Y 的差, 记为 $X \setminus Y$.

幂集

任给集合 X, X 的所有子集作为元素构成一个集合

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\},$$

称为 X 的幂集.

幂集

任给集合 X, X 的所有子集作为元素构成一个集合

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\},$$

称为 X 的幂集.

例 2

$\mathcal{P}(\varnothing)$; $\mathcal{P}\mathcal{P}(\varnothing)$.

笛卡儿乘积

任给集合 X 和 Y, 所有第一个分量属于 X, 第二个分量属于 Y 的序对 (x, y) 构成一个集合, 记作 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

该集合称为 X 和 Y 的笛卡儿乘积.

笛卡儿乘积

任给集合 X 和 Y, 所有第一个分量属于 X, 第二个分量属于 Y 的序对 (x, y) 构成一个集合, 记作 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

该集合称为 X 和 Y 的笛卡儿乘积.

例 3

若 $A = \{a, b\}, X = \{x, y\}$, 则 $A \times X =$

笛卡儿乘积

任给集合 X 和 Y, 所有第一个分量属于 X, 第二个分量属于 Y 的序对 (x, y) 构成一个集合, 记作 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

该集合称为 X 和 Y 的笛卡儿乘积.

例 3

若 $A = \{a, b\}, X = \{x, y\}$, 则 $A \times X =$

任给集合 X, $X \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times X$.

集族的并与交

设 I 为集合. 若对每个 $i \in I$ 都指定了一个集合 A_i, 则称这些 A_i 的全体为一个以 I 为指标集的集族, 记为 $\{A_i\}_{i \in I}$.

集族的并与交

设 I 为集合. 若对每个 $i \in I$ 都指定了一个集合 A_i, 则称这些 A_i 的全体为一个以 I 为指标集的集族, 记为 $\{A_i\}_{i\in I}$.

设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ 为一个集族. 所有 A_i 的元素放在一起构成一个集合, 即

$$\{x : \exists\, i \in I, x \in A_i\}$$

是一个集合, 称为集族 $\mathcal{A}$ 的并, 记为 $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ 或者 $\bigcup \mathcal{A}$.

设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ 为集族并且指标集 I 不是空集. 所有 A_i 共同的元素构成一个集合, 即

$$\{x : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

是一个集合, 称为集族 $\mathcal{A}$ 的交, 记为 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ 或者 $\bigcap \mathcal{A}$.

命题 4

设 A, X 为集合, $\{B_i\}_{i\in I}$ 为指标集非空的集族.

(a) $A \cap \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$; $A \cup \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.

(b) $X \setminus \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus B_i)$; $X \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(X \setminus B_i)$.

(c) $X \times \bigcap_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(X \times B_i)$; $X \times \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I}(X \times B_i)$.

Outline

为什么学习一般拓扑学

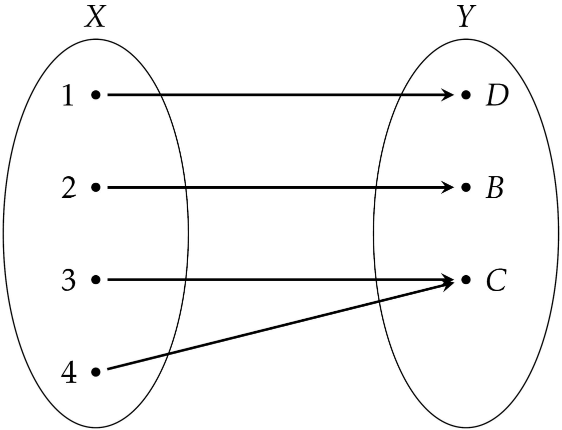
集合

映射

关系

实数公理

映射



恒等映射 $1_X\colon X \to X$

恒等映射 $1_X\colon X \to X$

映射的复合

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

恒等映射 $1_X\colon X \to X$

映射的复合

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

设 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z, h\colon Z \to W$ 为映射, 则

(i) $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$.

(ii) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

定义

设 $f\colon X \to Y$ 为映射.

- 若对所有的 $x_1, x_2 \in X$ 都有
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$
则称 f 为单射;
- 若对每个 $y \in Y$ 都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为满射;
- 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射.

定理 5

映射 $f\colon X \to Y$ 是双射当且仅当存在映射 $g\colon Y \to X$ 满足

$$g \circ f = 1_X, \ f \circ g = 1_Y.$$

满足条件的映射 g 是唯一的, 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}.

定理 5

映射 $f\colon X \to Y$ 是双射当且仅当存在映射 $g\colon Y \to X$ 满足

$$g \circ f = 1_X,\ f \circ g = 1_Y.$$

满足条件的映射 g 是唯一的, 称为 f 的逆映射, 记作 f^{-1}.

若 $f^{-1}\colon Y \to X$ 是 $f\colon X \to Y$ 的逆映射, 则 f^{-1} 也是双射并且 $(f^{-1})^{-1} = f$.

像与原像

设 $f\colon X \to Y$ 是映射. 对 X 的任意子集 A 和 Y 的任意子集 B, 令

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}; \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

集 $f(A)$ 称为 A 在 f 下的像; 集 $f^{-1}(B)$ 称为 B 在 f 下的原像 (或逆像).

命题 6

设 $f\colon X \to Y$ 是映射.

(a) 任给 $A \subseteq X, B \subseteq Y$, $f(A) \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq f^{-1}(B)$.

(b) 任给 $A \subseteq X, B \subseteq Y$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

(d) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

(e) 任给 X 的子集族 $\{A_j\}_{j\in J}$, $f\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} f(A_j)$.

(f) 任给 Y 的子集族 $\{B_j\}_{j\in J}$, $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(g) 任给 Y 的子集族 $\{B_j\}_{j\in J}$, $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(h) 任给 $B \subseteq Y$, $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

限制与值限制

设 $f\colon X \to Y$ 是映射. 任给 X 的子集 A, 把 f 的定义域限制在 A 上得到的映射称为 f 在 A 上的限制, 记为

$$f|A\colon A \to Y.$$

把 f 的值域限制在它的像集 $f(X)$ 上得到的映射称为 f 的值限制, 记为

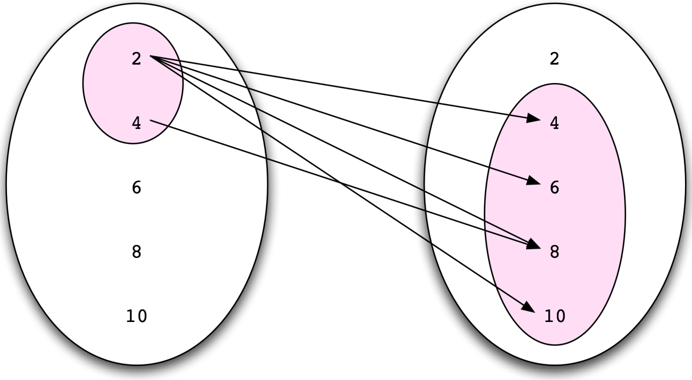
$$f^{\circ}\colon X \to f(X).$$

显然, f 是它的值限制 f° 与含入映射 $f(X) \to Y$ 的复合. 这表明, 每个映射都能写出一个满射与一个单射的复合.

Outline

- 为什么学习一般拓扑学
- 集合
- 映射
- 关系
- 实数公理

关系



设 X, Y 为集合.

笛卡儿乘积 $X \times Y$ 的一个子集 R 称为 X 到 Y 的一个关系; 也用 xRy 表示 $(x, y) \in R$.

当 $X = Y$ 时, 称 R 为 X 上的 (二元) 关系.

若 $R \subseteq X \times Y$ 是 X 到 Y 的关系, 则

$$R^{\mathrm{op}} \coloneqq \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

是 Y 到 X 的关系, 称为 R 的对偶关系. 显然 $(R^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = R$.

- 集合 X 上的恒等关系 $\mathrm{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

- 集合 X 上的恒等关系 $\mathrm{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}$.
- 空关系 $\varnothing \subseteq X \times Y$.

- 集合 X 上的恒等关系 $\mathrm{id}_X = \{(x,x) : x \in X\}$.
- 空关系 $\varnothing \subseteq X \times Y$.
- 任给映射 $f\colon X \to Y$,

$$f_* = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

是 X 到 Y 的一个关系, 称为 f 的图像.

命题 7

设 $R \subseteq X \times Y$ 为 X 到 Y 的关系. 存在映射 $f\colon X \to Y$ 使得 R 是 f 的图像, 即 $R = f_*$, 当且仅当 R 满足:

(F1) 任给 $x \in X$, 存在 $y \in Y$ 满足 $(x, y) \in R$;

(F2) 若 $(x, y_1), (x, y_2) \in R$, 则 $y_1 = y_2$.

- 空集 $\varnothing$ 到任意集合 X 有唯一的映射 (图像是空关系).
- 任意非空集到空集没有映射 (非空集到空集的空关系不满足 (F1)).

Outline

- 为什么学习一般拓扑学
- 集合
- 映射
- 关系
- 实数公理

什么是实数?

什么是实数?

直线上的一个点?

有理数的一个戴德金分割?

或者 $\cdots$?

实数是什么并不重要, 重要的是关于实数我们能做什么.[3]

例如, 两个实数可以相加, 可以相乘, 可以比较大小, $\cdots$

[3] Don't look for the meanings; look for the use. — Ludwig Wittgensten

实数是什么并不重要, 重要的是关于实数我们能做什么.[3]

例如, 两个实数可以相加, 可以相乘, 可以比较大小, $\cdots$

实数公理就是以 "公理" 的形式规定关于实数我们能做什么.

[3] Don't look for the meanings; look for the use. — Ludwig Wittgensten

实数是什么并不重要，重要的是关于实数我们能做什么.[3]

例如，两个实数可以相加，可以相乘，可以比较大小，$\cdots$

实数公理就是以“公理”的形式规定关于实数我们能做什么.

为什么是这些公理，而不是其他？

[3] Don't look for the meanings; look for the use. — Ludwig Wittgensten

实数是什么并不重要, 重要的是关于实数我们能做什么.[3]

例如, 两个实数可以相加, 可以相乘, 可以比较大小, $\cdots$

实数公理就是以 "公理" 的形式规定关于实数我们能做什么.

为什么是这些公理, 而不是其他?

- 这些公理很好地反映了我们对 "实数" 的期望.
- 更重要的一点是, 在这些公理下, 实数很好玩, 很有趣, 从它们出发能建立深刻的数学理论.

[3] Don't look for the meanings; look for the use. — Ludwig Wittgensten

实数公理

全体实数构成一个集合, 用 $\mathbb{R}$ 表示.

公理 I $\mathbb{R}$ 是一个域.

公理 II $\mathbb{R}$ 是一个全序域.

公理 III $\mathbb{R}$ 的每个有上界的非空子集有最小上界.

实数公理

全体实数构成一个集合, 用 $\mathbb{R}$ 表示.

公理 I $\mathbb{R}$ 是一个域.

公理 II $\mathbb{R}$ 是一个全序域.

公理 III $\mathbb{R}$ 的每个有上界的非空子集有最小上界.

这三条公理可以概括为一句话: 实数集是一个完备的全序域.

公理 I $\mathbb{R}$ 是一个域.

公理 I $\mathbb{R}$ 是一个域.

这条公理说 $\mathbb{R}$ 是一个集合, 有两个指定元 — 0 和 1 $(0 \neq 1)$, 有两个二元运算 — 加法 $+$ 和乘法 $\cdot$, 并且满足以下条件:

(Ia) $(\mathbb{R}, +, 0)$ 是交换群;

(Ib) $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ 是交换的幺半群;

(Ic) 乘法对加法分配: 任给 $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

(Id) 若 $x \neq 0$, 则存在唯一的元素 (记为 x^{-1}) 满足 $x \cdot x^{-1} = 1$.

公理 II $\mathbb{R}$ 是一个全序域.

公理 II $\mathbb{R}$ 是一个全序域.

这条公理说集 $\mathbb{R}$ 上有一个二元关系 $\leqslant$ 满足以下条件:

(IIa) $x \leqslant x$; (自反性)

(IIb) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$; (传递性)

(IIc) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则 $x = y$; (反对称性)

(IId) 若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$; (全序)

(IIe) 若 $x \leqslant y$ 且 $z \in \mathbb{R}$, 则 $x + z \leqslant y + z$;

(IIf) 若 $0 \leqslant x$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \cdot y \leqslant x \cdot z$.

公理 III $\mathbb{R}$ 的每个有上界的非空子集有最小上界.

公理 III　$\mathbb{R}$ 的每个有上界的非空子集有最小上界.

这条公理称为实数的完备性公理.

设 A 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $a \in \mathbb{R}$.

- 若任给 $x \in A$ 都有 $x \leqslant a$, 则称 a 为 A 的一个上界.
- 若 a 是 A 的上界, 并且任给 A 的上界 b, 恒有 $a \leqslant b$, 则称 a 为 A 的最小上界 (或上确界).

记号 $\sup A$ 表示 A 的最小上界.

一些记号

$$2 := 1 + 1, \quad 3 := 2 + 1, \cdots$$

$$2x := x + x, \quad 3x := 2x + x, \cdots$$

$$x^2 := x \cdot x, \quad x^3 := x^2 \cdot x, \cdots$$

$$x - y := x + (-y), \quad x/y = xy^{-1} \ (y \neq 0), \cdots$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$$

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

三个简单的性质

(i) $x \cdot 0 = 0$.

证明.

因为 $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot 0 - x \cdot 0 \\ &= (x \cdot 0 + x \cdot 0) - x \cdot 0 \\ &= x \cdot 0 + (x \cdot 0 - x \cdot 0) \\ &= x \cdot 0 + 0 \\ &= x \cdot 0. \end{aligned}$$

□

(ii) $(-1)^2 = 1$. (负负得正)

证明.

利用 $0 = (1 + (-1))(1 + (-1))$. $\square$

(ii) $(-1)^2 = 1$. (负负得正)

证明.

利用 $0 = (1 + (-1))(1 + (-1))$. $\square$

(iii) $0 < 1$.

证明.

反证法. $\square$

自然数集, 整数集, 有理数集

自然数集 $\mathbb{N}$ 定义为 $\mathbb{R}$ 的满足以下条件的最小子集:

- $0, 1 \in \mathbb{N}$;
- 若 $x, y \in \mathbb{N}$ 则 $x + y \in \mathbb{N}$.

换言之, $\mathbb{N}$ 是 $\mathbb{R}$ 的包含 0 和 1 并且对加法封闭的最小子集:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

整数集 $\mathbb{Z}$ 定义为 $\mathbb{R}$ 的满足以下条件的最小子集:

- $1 \in \mathbb{Z}$;
- 若 $x, y \in \mathbb{Z}$ 则 $x - y \in \mathbb{Z}$.

换言之, $\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{R}$ 的包含 1 并且对减法封闭的最小子集:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}.$$

有理数集 $\mathbb{Q}$ 定义为 $\mathbb{R}$ 的满足以下条件的最小子集:

- $1 \in \mathbb{Q}$;
- 若 $x, y \in \mathbb{Q}$ 则 $x - y \in \mathbb{Q}$;
- 若 $x, y \in \mathbb{Q}$ 且 $x \neq 0$ 则 $y/x \in \mathbb{Q}$.

命题 8 (阿基米德性质)

任给实数 x, 存在自然数 n 使得 $x < n$. 换言之, $\mathbb{N}$ 没有上界.

命题 9 (Peano)

自然数集的每个非空子集有最小元.

命题 9 (Peano)

自然数集的每个非空子集有最小元.

证明.

设 A 是 $\mathbb{N}$ 的非空子集. 令

$$X = \{x \in \mathbb{R} : \forall n \in A, x \leqslant n\}.$$

由于 X 非空 $(0 \in X)$ 且有上界 (A 的每个元素都是它的上界), X 有最小上界, 设为 b. 由于 $b+1$ 不属于 X, 存在 $m \in A$ 满足 $m < b+1$. 任给 $n \in A$, 由于 $m-1 < b \leqslant n$, 而 m, n 都是自然数, 我们有 $m = (m-1)+1 \leqslant n$, 于是 m 是 A 的最小元. $\square$

命题 10

任给 $x \in \mathbb{R}$, 区间 $(x-1, x]$ 包含唯一的整数. 该整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$.

命题 10

任给 $x \in \mathbb{R}$, 区间 $(x-1, x]$ 包含唯一的整数. 该整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$.

证明.

由阿基米德性质我们可选取自然数 M 使得 $|x| < M$, 即 $-M < x < M$. 考虑自然数的子集

$$X := \{n \in \mathbb{N} : M - n \leqslant x\}.$$

因为 X 非空 $(2M \in X)$, 所以有最小元, 设为 n. 于是

$$M - n \leqslant x < M - n + 1,$$

即整数 $M - n$ 属于区间 $(x-1, x]$. 唯一性显然. $\square$

命题 11

有理数集在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 也就是说, 若 $a < b$ 则存在有理数 r 满足 $a < r < b$.

证明.

不妨设 $a > 0$, 否则取自然数 N 使得 $a + N > 0$, 然后考虑 $a + N$ 与 $b + N$. 由阿基米德性质, 存在自然数 n 使得 $1/n < b - a$. 再由阿基米德性质, 由 $1/n$ 的整数倍构成的集合 $\{k/n : k \in \mathbb{N}\}$ 没有上界. 设 m/n 是该集合中第一个大于 a 的元素. 断言 $m/n < b$, 于是 $r = m/n$ 满足条件. 若不然, 则 $(m-1)/n \leqslant a$ 并且 $b \leqslant m/n$, 于是 $1/n \geqslant b - a$, 矛盾. □

定理 12 (闭区间套定理)

若

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$$

是一列单调降的闭区间, 则存在实数 c 使得对每个自然数 n 都有 $c \in [a_n, b_n]$.

作业

练习 1.1 (1, 3, 6, 7, 11)

练习 1.2 (1, 4, 5)

预习

1.3, 2.1.