一般拓扑学

第 2 课. 可数集、直线的拓扑

张德学

2025.3.3

命题 1

任给 $x \in \mathbb{R}$, 区间 $(x-1, x]$ 包含唯一的整数.

证明.

由阿基米德性质我们可选取自然数 M 使得 $|x| < M$, 即 $-M < x < M$. 考虑自然数的子集

$$X := \{n \in \mathbb{N} : M - n \leqslant x\}.$$

因为 X 非空 $(2M \in X)$, 所以有最小元, 设为 n. 于是

$$M - n \leqslant x < M - n + 1,$$

即整数 $M - n$ 属于区间 $(x-1, x]$. 唯一性显然. □

命题 2

有理数集在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 也就是说, 若 $a < b$ 则存在有理数 r 满足 $a < r < b$.

证明.

不妨设 $a > 0$, 否则取自然数 N 使得 $a + N > 0$, 然后考虑 $a + N$ 与 $b + N$. 由阿基米德性质, 存在自然数 n 使得 $1/n < b - a$. 再由阿基米德性质, 由 $1/n$ 的整数倍构成的集合 $\{k/n : k \in \mathbb{N}\}$ 没有上界. 设 m/n 是该集合中第一个大于 a 的元素. 断言 $m/n < b$, 于是 $r = m/n$ 满足条件. 若不然, 则 $(m-1)/n \leqslant a$, $b \leqslant m/n$, 与 $1/n < b - a$ 矛盾. □

定理 3 (闭区间套定理)

若

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots$$

是一列单调降的闭区间, 则存在实数 c 使得对每个 n 都有 $c \in [a_n, b_n]$.

Outline

可数集

直线的拓扑

问题: 两个集合怎样比较大小?

问题: 两个集合怎样比较大小?

定义 (Cantor)

若存在双射 $f\colon X \to Y$, 则称集 X 与集 Y 等势.

等价地说, X 与 Y 等势当且仅当存在映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$, 满足

$$g \circ f = 1_X, \quad f \circ g = 1_Y.$$

例 4

- 实数集 $\mathbb{R}$ 与开区间 $(-1,1)$ 等势.
- 素数集与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.
- 整数集 $\mathbb{Z}$ 与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势.
- 任给集合 X, Y, 集 $X \times Y$ 与 $Y \times X$ 等势.

有限集与可数集

自然数集为我们提供了一个比较的标准.

定义

设 X 为集合.

(i) 若 $X = \varnothing$ 或者存在自然数 $n \geqslant 1$ 和双射 $f\colon X \to \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 则称 X 为有限集 (finite set).

(ii) 若存在双射 $f\colon X \to \mathbb{N}$, 则称 X 为可数无限集 (countably infinite set).

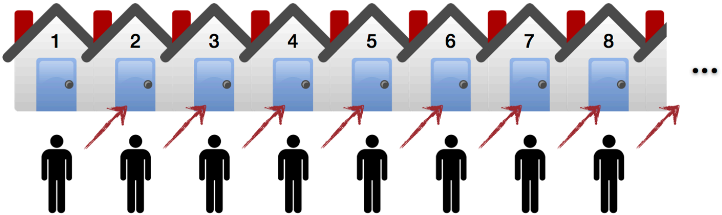
(iii) 若 X 是有限集或可数无限集, 则称 X 为可数集 (countable set), 否则称 X 为不可数集 (uncountable set).

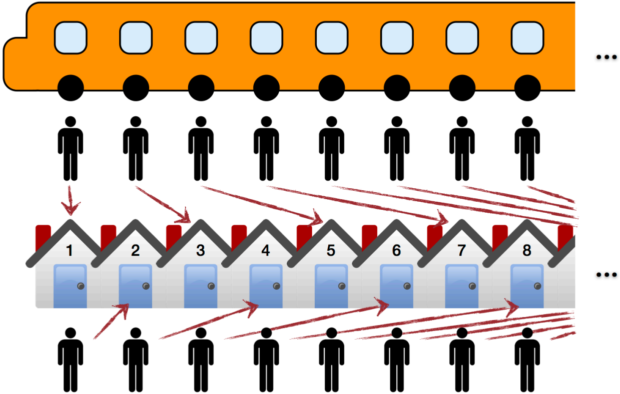
例 5

- 整数集和素数集都是可数集.
- 闭区间 $[0, 1]$ 中的有理数之集可数.

一个有限集不可能和它的真子集等势, 但是, 一个无限集可以和它的真子集等势! 这是有限与无限的一个重要差别.

Hilbert 旅馆




1
2
3
4
5
6
7
8
...
...

命题 6 (刻画可数集)

设 X 为非空集. 下列等价:

(1) X 可数.

(2) 存在单射 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{N}$.

(3) 存在满射 $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$.

证明.

(1) $\Leftrightarrow$ (2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

推论 7

自然数集与它自身的笛卡儿乘积 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数. 一般地, 两个可数集的笛卡儿乘积可数.

推论 7

自然数集与它自身的笛卡儿乘积 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数. 一般地, 两个可数集的笛卡儿乘积可数.

推论 8

可数个可数集的并可数.

例 9

有理数集可数.

例 9

有理数集可数.

- 可数个可数集的并.

例 9

有理数集可数.

- 可数个可数集的并.
- 把每个有理数 x 写成最简分数 $p(x)/q(x)$ 的形式, 其中 $q(x) \geqslant 1$. 则

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x \mapsto (p(x), q(x))$$

  是单射.

例 9

有理数集可数.

- 可数个可数集的并.
- 把每个有理数 x 写成最简分数 $p(x)/q(x)$ 的形式, 其中 $q(x) \geqslant 1$. 则

  $$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad x \mapsto (p(x), q(x))$$

  是单射.
-
  $$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$
- $\ldots$

例 10

- 代数数之集可数.

例 10

- 代数数之集可数.
- 集

$$\mathrm{List}(\mathbb{N}) := \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{N}^n$$

  可数.

例 10

- 代数数之集可数.
- 集
$$\mathrm{List}(\mathbb{N}) := \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{N}^n$$
可数.
- 集
$$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ 是有限集}\}$$
可数.

实数集 $\mathbb{R}$ 是否可数?

实数集 $\mathbb{R}$ 是否可数?

定理 11 (Cantor)

实数集 $\mathbb{R}$ 不可数.

证明.

证明闭区间 $[0,1]$ 不可数. $\square$

定理 12 (Cantor)

任给集合 X, 不存在满射 $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. 特别的, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 不可数.

比较: 集

$$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) := \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ 是有限集}\}$$

可数.

实数集 $\mathbb{R}$ 与自然数集的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 都是不可数集, 谁大?

实数集 $\mathbb{R}$ 与自然数集的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 都是不可数集, 谁大?

定理 13

$\mathbb{R}$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 等势.

引理 14 (Bernstein-Schröder 定理)

如果存在从 X 到 Y 的单射, 也存在从 Y 到 X 的单射, 那么 X 与 Y 等势.

例 15 ($[0,1]$ 与 $[0,1]\times[0,1]$ 等势)

例 15 ($[0,1]$ 与 $[0,1]\times[0,1]$ 等势)

把闭区间 $[0,1]$ 中的每个实数 r 写成无限小数的形式, 除 $r=0$ 以外, 都不以无穷多个 0 结束:

$$r = 0.a_1a_2a_3\cdots, \quad a_n \in \{0,1,\cdots,9\}.$$

例如,

$$\frac{\pi}{4} = 0.785398\cdots, \ \frac{1}{4} = 0.24999\cdots, \ 1 = 0.999\cdots.$$

例 15 ($[0,1]$ 与 $[0,1]\times[0,1]$ 等势)

把闭区间 $[0,1]$ 中的每个实数 r 写成无限小数的形式, 除 $r=0$ 以外, 都不以无穷多个 0 结束:

$$r = 0.a_1a_2a_3\cdots, \quad a_n \in \{0,1,\cdots,9\}.$$

例如,

$$\frac{\pi}{4} = 0.785398\cdots, \ \frac{1}{4} = 0.24999\cdots, \ 1 = 0.999\cdots.$$

定义映射 $f\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 如下:

$$(0.a_1a_2a_3\cdots, 0.b_1b_2b_3\cdots) \quad \mapsto \quad 0.a_1b_1a_2b_2\cdots,$$

则 f 是单射. 由于 $g\colon [0,1]\to[0,1]\times[0,1]$, $t\mapsto(t,0)$ 也是单射, 由 Bernstein-Schröder 定理知, $[0,1]$ 与 $[0,1]\times[0,1]$ 等势.

1874 年 Cantor 开始考虑闭区间与正方形是否等势这一问题, 该问题源于对 “维数” 这一概念的探讨. 1877 年在给 Dedekind 的一封信中 Cantor 给出了肯定的回答. Cantor 对自己的发现感到吃惊, 他在信中写道:

Je le vois, mais je ne le crois pas!

(I see it, but I don’t believe it!)

定理 13 的证明.

定义 $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ 如下:

$$f(A) = \begin{cases} 0, & A = \varnothing; \\ \sum\limits_{n \in A} 10^{-n}, & A \neq \varnothing. \end{cases}$$

定义 $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 如下:

$$h(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}.$$

容易验证 f 和 h 都是单射.

因为 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 等势, 由 Bernstein-Schröder 定理, $\mathbb{R}$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 等势. $\square$

连续统假设

Cantor: $\mathbb{R}$ 的子集要么可数, 要么与 $\mathbb{R}$ 等势. (连续统假设)

连续统假设

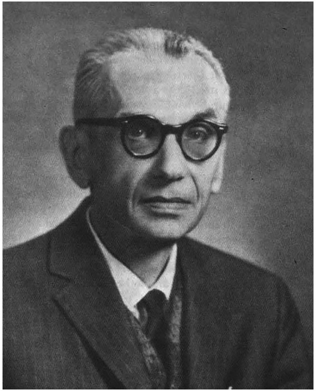
Cantor: $\mathbb{R}$ 的子集要么可数, 要么与 $\mathbb{R}$ 等势. (连续统假设)

Kurt Gödel: 连续统假设与 ZFC 不矛盾. (1940)

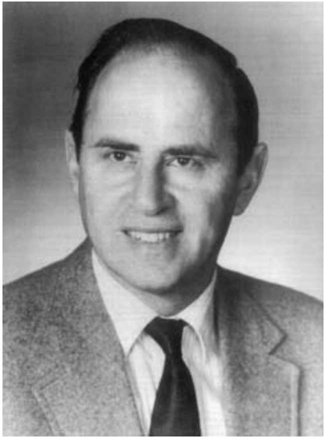
Paul Cohen: 连续统假设的否命题与 ZFC 也不矛盾. (1963)

换种现代的说法, 连续统假设独立于 ZFC 系统, 即只从 ZFC 系统的公理出发我们不能判定连续统假设是否成立.

Kurt Gödel, 1906-1978



Paul Cohen, 1934-2007



The continuum hypotheses, as told in Stanford Encyclopedia of Philosophy:

The continuum hypotheses (CH) is one of the most central open problems in set theory, one that is important for both mathematical and philosophical reasons.

The problem actually arose with the birth of set theory; indeed, in many respects it stimulated the birth of set theory. In 1874 Cantor had shown that there is a one-to-one correspondence between the natural numbers and the algebraic numbers.

More surprisingly, he showed that there is no one-to-one correspondence between the natural numbers and the real numbers. Taking the existence of a one-to-one correspondence as a criterion for when two sets have the same size (something he certainly did by 1878), this result shows that there is more than one level of infinity and thus gave birth to the higher infinite in mathematics. Cantor immediately tried to determine whether there were any infinite sets of real numbers that were of intermediate size, that is, whether there was an infinite set of real numbers that could not be put into one-to-one correspondence with the natural numbers and could not be put into one-to-one correspondence with the real numbers.

The continuum hypothesis (under one formulation) is simply the statement that there is no such set of real numbers. It was through his attempt to prove this hypothesis that led Cantor do develop set theory into a sophisticated branch of mathematics.

Despite his efforts Cantor could not resolve CH. The problem persisted and was considered so important by Hilbert that he placed it first on his famous list of open problems to be faced by the 20th century. Hilbert also struggled to resolve CH, again without success. Ultimately, this lack of progress was explained by the combined results of Gödel and Cohen, which together showed that CH cannot be resolved on the basis of the axioms that mathematicians were employing; in modern terms, CH is independent of Zermelo-Fraenkel set theory extended with the Axiom of Choice (ZFC).

Outline

可数集

直线的拓扑

数列的极限

实数集 $\mathbb{R}$ 的一个序列 (也称为一个数列) 指自然数集到它的一个映射

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

习惯上把 $f(n)$ 写作 x_n, 因此一个序列也写作 $\{x_n\}_n$ 或者 $(x_n)_n$.

定义

设 $\{x_n\}_n$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个序列, $U \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 若存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, 始终有 $x_n \in U$, 则称 $\{x_n\}_n$ 终在 U (eventually in U).
- 若对每个 $\epsilon > 0$, $\{x_n\}_n$ 都终在开区间 $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, 则称 a 是 $\{x_n\}_n$ 的一个极限或者称 $\{x_n\}_n$ 收敛于 a.

符号 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 表示 a 是 $\{x_n\}_n$ 的极限, 也记作 $x_n \to a$.

命题 16

$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$; 任给 $x \in \mathbb{R}$, $x = \lim_{n\to\infty} [nx]/n$.

设 D 为 $\mathbb{R}$ 的一个子集, $\{x_n\}_n$ 为一个序列.

- 若 $\{x_n\}_n$ 的每一项都属于 D, 则称 $\{x_n\}_n$ 是 D 的序列.
- 若 $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 严格单调增, 则称

$$\{x_{\alpha(n)}\}_n$$

  为 $\{x_n\}_n$ 的一个子列.

命题 17

若 $\{x_n\}_n$ 收敛于 a, 则它的每个子列也收敛于 a.

闭集

定义

设 $D \subseteq \mathbb{R}$. 若 D 的序列的极限都属于 D, 则称 D 为闭集.

换言之, 闭集对序列的极限封闭.

闭集

定义

设 $D \subseteq \mathbb{R}$. 若 D 的序列的极限都属于 D, 则称 D 为闭集.

换言之, 闭集对序列的极限封闭.

命题 18

空集 $\varnothing$, 全集 $\mathbb{R}$ 都是闭集; 两个闭集的并是闭集; 一族闭集的交是闭集.

开集

定义

设 $U \subseteq \mathbb{R}$. 若 U 的补集 $\mathbb{R} \setminus U$ 是闭集, 则称 U 为开集.

开集

定义

设 $U \subseteq \mathbb{R}$. 若 U 的补集 $\mathbb{R} \setminus U$ 是闭集, 则称 U 为开集.

命题 19

空集 $\varnothing$, 全集 $\mathbb{R}$ 都是开集; 两个开集的交是开集; 一族开集的并是开集.

开集

定义

设 $U \subseteq \mathbb{R}$. 若 U 的补集 $\mathbb{R} \setminus U$ 是闭集, 则称 U 为开集.

命题 19

空集 $\varnothing$, 全集 $\mathbb{R}$ 都是开集; 两个开集的交是开集; 一族开集的并是开集.

命题 20

设 $U \subseteq \mathbb{R}$. 下列等价:

(1) U 是开集.

(2) 任给 $x \in U$, 存在开区间 (a_x, b_x) 满足 $x \in (a_x, b_x) \subseteq U$.

(3) 任给数列 $\{x_n\}_n$, 若 $\{x_n\}_n$ 收敛于 U 的一个点, 则 $\{x_n\}_n$ 终在 U.

邻域

定义

设 $V \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. 若存在开区间 (a, b) 满足 $x \in (a, b) \subseteq V$, 则称 V 为 x 的一个邻域.

- U 是开集当且仅当 U 是它的每个点的邻域.
- 序列 $\{x_n\}_n$ 收敛于 x 当且仅当 $\{x_n\}_n$ 终在 x 的每一个邻域.

邻近点

定义

设 $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. 若 A 与 x 的每个邻域都相交, 则称 x 为 A 的邻近点.

设 $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

- x 是 A 的邻近点当且仅当 A 有序列收敛于 x.
- A 是闭集当且仅当 A 的邻近点都属于 A.

实数集 $\mathbb{R}$ 的开集、闭集、邻域、序列极限可相互描述, 这意味着他们是实数集的某种结构的不同侧面, 这种结构就是实数集的拓扑结构.

连续映射

设 $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to E$, $a \in D$.

- 若任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 满足

  $$x \in D, |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \epsilon,$$

  则称 f 在 a 处连续.
- 若 f 在 D 的每一点处连续, 则称 f 在 D 上连续.

定理 21 (连续 = 保持极限)

设 $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to E$, $a \in D$. 则 f 在 a 处连续当且仅当对 D 的任意序列 $\{x_n\}_n$ 都有

$$x_n \to a \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(a).$$

定理 22 (实数集 $\mathbb{R}$ 连通)

若 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集并且 $\mathbb{R} = A \cup B$, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 c 同时是 A 和 B 的邻近点. 换言之, $\mathbb{R}$ 不能写成两个非空的不交闭集的并.

类似可证每个闭区间 $[a, b]$ 不能写成两个非空的不交闭集的并.

定理 22 (实数集 $\mathbb{R}$ 连通)

若 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集并且 $\mathbb{R} = A \cup B$, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得 c 同时是 A 和 B 的邻近点. 换言之, $\mathbb{R}$ 不能写成两个非空的不交闭集的并.

类似可证每个闭区间 $[a, b]$ 不能写成两个非空的不交闭集的并.

推论 23 (介值定理)

设 $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续. 若实数 p 满足 $f(a) \leqslant p \leqslant f(b)$ 或者满足 $f(a) \geqslant p \geqslant f(b)$, 则存在 $z \in [a, b]$ 使得 $f(z) = p$.

作业

1.3 (1, 2, 3, 5, 6)

1. 验证若 X_1 与 X_2 等势, Y_1 与 Y_2 等势, 则 $X_1 \times Y_1$ 与 $X_2 \times Y_2$ 等势.

2. 证明若 X 与 Y 等势, 则 $\mathcal{P}(X)$ 与 $\mathcal{P}(Y)$ 等势.

3. 证明集 $\{x \in [-\pi/2,\ \pi/2] : \sin x \in \mathbb{Q}\}$ 可数.

5. 证明无理数集与实数集等势.

6. (定理 1.3.12 的另一证明方法) 设 $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ 是一个映射, $x \in X$. 若不存在 X 的序列 $\{x_n\}_n$ 满足 $x_0 = x$ 并且对每个 n 都有 $x_{n+1} \in f(x_n)$, 则称 x 为路径有限元. 令 A 表示 X 的全体路径有限元之集. 证明不存在 $a \in X$ 满足 $f(a) = A$.

2.1 (1, 2)

1. 证明实数集 $\mathbb{R}$ 的每个开集 U 都能写成可数个两两不交的开区间的并. (提示: 任给 $x \in U$, 令 $K_x = \bigcup\{(a, b) : x \in (a, b) \subseteq U\}$. 说明这些 K_x 都是开区间, 并且要么相等, 要么不交.)

2. 证明闭区间到它自身的连续函数有不动点; 也就是说, 若 $f \colon [a, b] \to [a, b]$ 连续, 则存在 $z \in [a, b]$ 满足 $f(z) = z$.

预习

2.1 (序列紧, Cantor 集), 2.2.