1. 由X_1与X_2等势，Y_1与Y_2等势，

存在双射 $f: X_1 \longrightarrow X_2$ 和双射 $g: Y_1 \longrightarrow Y_2$

定义 $h: X_1 \times Y_1 \longrightarrow X_2 \times Y_1$

$$(x, y) \longmapsto (f(x), g(y)).$$

容易验证，h是双射. 所以 $X_1 \times Y_1$与$X_2 \times Y_2$等势.

2. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是双射.

定义 $\varphi: P(X) \longrightarrow P(Y)$

$$X' \longmapsto f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$$

由f是双射，容易验证 φ是双射. 从而 $P(X)$和$P(Y)$等势.

3. 定义：$f: A = \{x \mid \sin x \in \mathbb{Q}, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0,1]$

$$x \longmapsto \sin x$$

由A的定义，f是良定义的，因为 $\sin x$是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$到$[0,1]$的双射.

所以f是A到 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 的双射. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$是可数集.

因此A可数.

4. 记 $\mathbb{P}$为无理数集. $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

定义 $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}$

$$x \longmapsto \begin{cases} (2n-1)\sqrt{2} & x = r_n \\ 2n\sqrt{2} & x = n\sqrt{2} \\ x & x \text{ 其它} \end{cases}$$

容易验证 φ是双射. 从而 $\mathbb{P}$和$\mathbb{R}$等势

5. 若存在 $a \in X$，使得 $f(a) = A$

若 $a \in A$，构造 $\{x_n\}$. $x_n = a$ 对任意的n. 则对每个n，都有 $x_{n+1} = a \in A = f(a) = f(x_n)$.

从而a不是路径有限元. $a \notin A$. 矛盾.

若 $a \notin A$. 则存在 $\{x_n\}$. $x_0 = a$. 则 $x_{n+1} \in f(x_n)$. 从而 $x_1 \in f(x_0) = A$.

x_1是路径有限元. 但由x_1的定义. x_1不是路径有限元. 矛盾.

因此不存在$a\in X$, 使得$f(a)=A$.

6. 令$K_x=\bigcup\{(a,b)\mid x\in(a,b)\subseteq U\}$. K_x是开集的并. 从而是开集.

①. 先证K_{x_0}是开区间.

若K_{x_0}无上界, 则$\forall x>x_0$ $\exists M>x$. $M\in K_{x_0}$.

$\exists(\hat{a},\hat{b})\subseteq U$, $M\in(\hat{a},\hat{b})$. 且$x_0\in(\hat{a},\hat{b})$. 由$x<x_0<M$, 则$x_0\in(\hat{a},\hat{b})$.

因此$[x_0,+\infty)\subseteq U$.

类似的. 若K_{x_0}无下界, 则$(-\infty,x_0]\subseteq U$.

若K_{x_0}有上界, 因为U是开集. 所以存在$\varepsilon>0$. $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subseteq U$. $x_0\in K_{x_0}$.

设$\hat{b}=\sup K_{x_0}$. $\forall x_0<x<\hat{b}$. 由$\hat{b}$是上确界, $\exists y\in(x,\hat{b})$. $y\in K_{x_0}$.

又由$x_0<x<y$, 从而$x\in K_{x_0}$.

若$\hat{b}\in K_{x_0}$. 则$\exists(s,t)\subset U$. $\hat{b}\in(s,t)$. $x_0\in(s,t)$. 则$x_0<\hat{b}<t$.

从而$\exists r\in(\hat{b},t)$. $r\in K_{x_0}$. 与$\hat{b}$是上确界矛盾.

因此$\hat{b}\notin K_{x_0}$.

对K_{x_0}无下界有类似的讨论.

综上, K_{x_0}只能是下述情况中的一种.

1. $K_{x_0}=\mathbb{R}$ 2. $K_{x_0}=(a,+\infty)$. 3. $K_{x_0}=(-\infty,b)$ 4. $K_{x_0}=(a,b)$

若$K_{x_1}\cap K_{x_2}\neq\emptyset$.

设$K_{x_1}=(a_1,b_1)$. $K_{x_2}=(a_2,b_2)$. (a_1,a_2可以为$-\infty$. b_1,b_2可以为∞).

不妨$a_2<b_1\le b_2$. 则有$K_{x_1}\cup K_{x_2}=(\min(a_1,a_2),b_2)\subseteq U$.

$x_1\in K_{x_1}\cup K_{x_2}$. 因此. 由$b$是上确界, $b_2\le b_1\Rightarrow b_1=b_2$.

类似的有$a_1=a_2$. 从而$K_{x_1}=K_{x_2}$

因此U是一些不交开区间的并

每个开区间都包含一个有理数. 从而开区间至多可数个.

7. 令$g(x)=f(x)-x$ 则$g(x)$连续.

$g(a)\le0$ $g(b)\ge0$ 由介值定理.

$\exists c\in[a,b]$. $f(c)=c$