[24-2수통] 1차 과제물 (교재 1장, 3장)

이름 : 심순용
학번 : 2021240737
소속 : 경영학과

1장 연습문제 :

(a) A: $30\% \times \frac{1}{100} = 0.3\%$
B: $50\% \times \frac{2}{100} = 1\%$ +
C: $20\% \times \frac{3}{100} = 0.6\%$ +
] 1.9%

$P(\text{불량}) = 0.019$

(b) $P(\text{기계B}|\text{불량}) = \dfrac{P(\text{불량}|\text{기계B})\,P(\text{기계B})}{P(\text{불량})}$

$= \dfrac{0.02 \times 0.5}{0.019} = \dfrac{0.01}{0.019} = 0.5263\cdots$

52.63%

1.9 (a) pmf 이니까 합 사용 : $c\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ (등비급수)

$\rightarrow c \times \dfrac{1}{1-2/3} = 1 \rightarrow c \times 3 = 1 \quad \therefore c = \frac{1}{3}$

CDF: $F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

(b) pdf 니까 적분 사용 : $c\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = 1$

$\rightarrow c\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1 = 1 \rightarrow c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 1 \quad \therefore c = 12$

CDF: $F(x) = \int_0^x 12t^2(1-t)\,dt$

(c) 이것도 pdf : $c\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2|x|)\,dx = 1$

$\rightarrow 2c\int_0^{\infty} \exp(-2|x|)\,dx = 1 \rightarrow 2c \times \frac{1}{2} = 1, \quad \therefore c = 1$

CDF: $F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \exp(-2|t|)\,dt, & x \ge 0 \\ \int_{x}^{\infty} \exp(-2|t|)\,dt; & x < 0 \end{cases}$

1.13 $E[(X-a)^2] = E[X^2 - 2aX + a^2]$

$= E(X^2) - 2aE(X) + a^2$

여기서 $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\rightarrow E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2$ 이므로

$= Var(X) + [E(X)]^2 - 2aE(X) + a^2$

$= Var(X) + \underbrace{(E(X)-a)^2}_{a=E(X)\text{ 일 때 0이 되므로}}$

1.15 $M_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \exp\{(t+1)x\}\,dx = \frac{1}{2t+2}, & x < 0 \\ \int_0^{\infty} \exp\{(t-2)x\}\,dx = \frac{1}{2-t}, & x > 0 \end{cases}$

$\therefore M_X(t) = \dfrac{2t+2+2-t}{(2t+2)(2-t)} = \dfrac{t+4}{-2t^2+2t+4}$

3장 연습문제 :

3.1 $\dfrac{f(x)}{f(x-1)} = \dfrac{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}{\binom{n}{x-1}p^{(x-1)}(1-p)^{n-x+1}} = \dfrac{(n-x+1)}{x}\dfrac{p}{1-p} \ge 1$

$\rightarrow (n-x+1)\frac{p}{1-p} \ge x \rightarrow (n-x+1)p \ge x(1-p)$

$\rightarrow np - px + p \ge x - px \rightarrow (n+1)p \ge x$

$f(x) \ge f(x-1)$ 을 만족하는 x의 조건: $(n+1)p \ge x$

n과 p가 주어졌을 때는 x만 변수이므로 $f(x)$와 $f(x-1)$을

비교하는 건 x를 하나씩 증가시키며 최대점을 탐색하는 것과 같다.

그리고 최대점은 증가가 멈추는 지점이므로 $(n+1)p \ge x$ 인 최대 정수여야 한다.

3.8 $W_1 \sim Geo(p)$, $W_r \sim Negbin(r, p)$

$E(W_1) = \frac{1}{p}$ $\quad E(W_r) = r/p$

$V(W_1) = \frac{1-p}{p^2}$ $\quad V(W_r) = r(1-p)/p^2$

$$Cov(W_1, W_r) = \underbrace{E(W_1 W_r)}_{E(W_1^2) = \frac{2-p}{p^2}} - \underbrace{E(W_1)E(W_r)}_{p^{-1} \times rp^{-1}}$$

(기하분포의 비기억성, 음이항분포의 가법성)

$$= \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p}\frac{r}{p} = \frac{2-p-r}{p^2}$$

EXPLORER: 수리통계학

강의노트
- Orientation.ipynb
- 통계_분포.ipynb
- 확률변수.ipynb

강의자료
- 02_확률변수.pdf
- 03_여러분포.pdf
- 04_결합분포.pdf

실습
- 24-2수통_과제1차(1장,3장).hwp
- 실습1.ipynb

실습1.ipynb

실습 > 실습1.ipynb > ...

+ Code + Markdown | Run All Clear All Outputs | Outline ...

P.137 연습문제 3.13

$$P(X > x+y | X > x) = P(X > y)$$

x 시점 이후 y 시점이 지난 시점에 고장날 확률은 그냥 원점에서부터 y 시점에 고장날 확률과 동일하다.

$$P(X > x+y | X > x) = P(X > y)$$
$$\frac{P(X > x+y, X > x)}{P(X > x)} \rightarrow \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)}$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = Exp(1/\lambda)$$

$$\int_{x+y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \rightarrow 1 - \int_0^{x+y} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$\lambda x = t,\ \lambda dx = dt$$
$$1 - \int_0^{\lambda(x+y)} e^{-t} dt$$
$$\int_0^{\lambda(x+y)} e^{-t} dt = -e^{\lambda(x+y)} - 1$$
$$\therefore e^{\lambda(x+y)}$$

$$P(X > x+y) = e^{\lambda(x+y)},\ P(X > x) = e^{\lambda(x)}$$
$$\frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = e^{\lambda y} = P(X > y)$$

3.18 (a) $\log(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\exp(\log(X)) = X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$

$$E(X^k) = E(\exp[\underbrace{\log(x)}_{\text{정규분포 따름}} k])$$

적률 생성 함수의 정의 : $E(e^{tx})$, 정규분포: $\exp(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$

$t = k$, $x = \log(x)$로 변경하면

$\rightarrow E(X^k) = \exp(k\mu + \frac{1}{2}k^2\sigma^2)$ 으로 맞아 떨어진다.