1. Постановка задачи

Требуется написать программу, численно решающую двумерное уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,y)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t,u) \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le t \le T \\ u(x,y,t) = exp(-\frac{1}{\alpha^2}(x^2 - 2\beta xy + y^2)) \\ u(0,y,t) = u(0,y,0) \\ u(1,y,t) = u(1,y,0) \\ u(x,0,t) = u(x,0,0) \\ u(x,1,t) = u(x,1,0) \end{cases}$$

Функция $f(x,y,t,u)$ в первом варианте задания равна нулю.

Для решения задачи используется разностная схема типа крест. Шаг по координатам одинаковый, и определяется числом узлов сетки по координатный осям N. Шаг по времени требуется вычислить исходя из условий устойчивости схемы.

Из аргументов командной строки программа получает значения: T, N, α, β.

Результат решения записывается в файл result_фамилия.txt в виде матрицы чисел, отражающих значение $u(x,y,T)$ в узлах сетки. i-ая строка матрицы отражает значения $u(x,i,T)$.

Для удобства проверки результатов для записи в файл необходимо использовать следующую процедуру:

```
fprintf(fp, ”%8.3f”, u[i][j]);
```

Программа должна выводить в стандартный вывод время, потраченное на решение.

2. Последовательный алгоритм

Ниже приводится описание последовательного алгоритма для численного решения уравнения теплопроводности на основе явной разностной схемы.

Решение уравнения проводится в области $\Omega = \{x \in [0;L], y \in [0;L], t \in [0,T]\}$. Вводим в этой непрерывной области сетку с шагом τ по времени и h по координате. Пусть $K = \frac{T}{\tau}$, $N = \frac{L}{h}$. Решение уравнения будем искать в узлах выбранной сетки. Подмножество узлов сетки $\{(m,n,k) : 0 \le m \le N, 0 \le n \le N\}$ образует слой по времени с номеров k. Узлы этого слоя соответствуют моменту времени $t = k\tau$.

Используя стандартные разностные выражения для первой и второй производных исходное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{U(m,n,k+1)-U(m,n,k)}{\tau} = \frac{U(m-1,n,k)-2U(m,n,k)+U(m+1,n,k)}{h^2} + \frac{U(m,n-1,k)-2U(m,n,k)+U(m,n+1,k)}{h^2} + F(m,n,k) \\ U(m,n,0) = \Phi(m,n) \\ U(0,n,k) = \Phi(0,n) \\ U(N-1,n,k) = \Phi(N-1,n) \\ U(m,0,k) = \Phi(m,0) \\ U(m,N-1,k) = \Phi(m,N-1) \end{cases}$$

Эти уравнения позволяют вычислить значения $U(m,n,k+1)$ во всех точкая $k+1$-го слоя, используя известные значения $U(m,n,k)$ на k-ом слое.