オイラー=ラグランジュの運動方程式について

しん

December 8, 2025

はじめに

本稿の目的は格子 QCD を再現するために、学んでいくものの一つとして、ラグランジアンというものに触れたが、それ自身の中核をなすオイラー=ラグランジュの運動方程式を理解していなかったため、それの導出をすることである。

1　汎函数

汎函数とは関数空間 C^n から 0 階テンソルに対する写像として定義される

$$S[u] : \mathrm{C}^n \to \mathbb{C}\mathrm{or}\mathbb{R}$$

note: 関数を引数にとって、数値を返す関数全般のこと
汎函数の微分は以下のように定義される

$$\begin{aligned}\delta S[u;h] &:= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{S[u+\epsilon h]-S[u]}{\epsilon}\\ &= \frac{d}{d\epsilon}S[u+\epsilon h]\Big|_{\epsilon=0}\end{aligned}$$

ここで用いられる $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{S[u+\epsilon h]-S[u]}{\epsilon}$ は、方向微分のエッセンスでできていて、gâteau 微分 (ガトー微分) を用いている。
note: 関数空間などの、多次元空間の微分について考える時、従来の全微分や偏微分について考えることが難しい (無限回の操作や無限個の定数が必要になる)。そのため、ガトー微分では、ある特定の方向への変化に注目し、その方向を含む平面（2 次元グラフ）における微分を考えることで、この問題を回避している。

2 EL-equation

作用汎函数 S と、その関数 $\mathcal{L}$ は以下のように定義される

$$S[\mathcal{L}] : \mathrm{C}^n (1 \leqq n) \to \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^{fd} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
$$(v_i, m_{i,\mu}, x) \mapsto \mathcal{L}\left(v_i, m_{i,\mu}, x\right)$$

最小作用の原理によって以下の式が与えられる。

$$S[\mathcal{L}] = \int_\Omega \mathcal{L}(u, \partial u, x) dx$$

EL 方程式とは適当な境界条件の下で汎関数の停留条件 $\delta S[u] = 0$ から導かれる方程式である。
停留条件を満たす解を $u = \bar{u}(x)$ とおく、積分領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ でのみ 0 となる $\eta(x)$ を定義する。

$$\eta(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega),$$

この時、停留条件は $S[u_\epsilon]$ が ϵ について極値をとることと同値であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon} S[u_\epsilon; \eta] &= \frac{d}{d\epsilon} S[\bar{u}(x) + \epsilon\eta(x)]\Big|_{\epsilon=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\eta(x)$ は Ω の内部で任意の滑らかな関数とする。
u を微小変化させた関数 $u_\epsilon(x)$ は以下のように定義される。

$$u_\epsilon(x) = \bar{u}(x) + \epsilon\eta(x)$$

実際に $\frac{d}{d\epsilon} S[u_\epsilon; \eta]$ の微分を連鎖率を用いて計算する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon} S[u_\epsilon; \eta] &= \frac{d}{d\epsilon} \int_\Omega \mathcal{L}(u_\epsilon(x), \partial u_\epsilon(x), x) dx\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \int_\Omega \mathcal{L}(\bar{u} + \epsilon\eta(x), \partial\bar{u} + \epsilon\partial\eta(x), x) dx\Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_\Omega \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x)\eta_i(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}} \frac{\partial \eta_i}{\partial x^\mu} \right\} dx\Big|_{\epsilon=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\eta_i(x)$ は境界で 0 になるので、$\eta_i(x)$ で括り出すために第二項で部分積分を行う。
note: これするともう片方の項に微分を押し付けられるから便利

$$A_{i,\mu}(x) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x)$$

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A_{i,\mu}(x)\partial_\mu \eta_i(x)dx &= [A_{i,\mu}(x)\eta_i(x)]_{\partial\Omega} - \int_\Omega \eta_i(x)\partial_\mu A_{i,\mu}(x)dx \\
&= 0 - \int_\Omega \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x)\right)dx \\
&= -\int_\Omega \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x)\right)dx
\end{aligned}$$

よって、$\frac{d}{d\epsilon}S[u_\epsilon;\eta]$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\epsilon}S[u_\epsilon;\eta] &= \int_\Omega \eta_i(x)\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}}(u_\epsilon, \partial u_\epsilon, x)\right)\right\}dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

今まで $\eta_i(x)$ を境界で 0 になる関数として定義して進めてきたが、本来は任意の関数である。よって、上式が任意の $\eta_i(x)$ であっても成り立つためには、$\{\cdot\}$ が 0 であることを示せばよい。
以上より、オイラー=ラグランジュの運動方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(u(x), \partial u(x), x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}}(u(x), \partial u(x), x)\right) = 0$$

引数を省略して、以下のように表されることが多い。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m_{i,\mu}} = 0$$