

# QCD のラグランジアンから格子 QCD の作用への導出

しん

(Dated: February 11, 2026)

本稿では QCD のラグランジアンから格子 QCD の作用を導出する過程について説明する。

## I. LATTICE QCD の作用

はじめに、QCD のラグランジアンは以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (1)$$

### A. 連続理論の作用

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} \quad (2)$$

### B. 格子の定義と積分和への変換

格子間隔を  $a$  とし、格子点を

$$x_\mu = n_\mu a \quad (n_0 \dots \mu \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

で定義する（以後  $\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向の単位ベクトル）。このとき、積分は以下のように和に置き換えられる。

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_n \quad (4)$$

より、作用は

$$S \rightarrow S_{lattice} = a^4 \sum_n \mathcal{L}_{QCD}(n) \quad (5)$$

と離散化される。

### C. ゲージ場：リンク変数とプラケット

格子上ではゲージ場はリンク変数

$$U_\mu(x) \in SU(3), \quad \therefore U_\mu(x) = \exp(iag A_\mu(x + a\hat{\mu})) \quad (6)$$

で表される。これは、格子点  $x$  から  $x + a\hat{\mu}$  へのリンクに対応する。ここで  $iag A_\mu$  は  $SU(3)$  の生成子に展開される。 $A_\mu(x)$  はゲージ場であり、 $g$  は結合定数である。また、 $(x + a\hat{\mu})$  はリンクの中点を表す。次にプラケットは、

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) \quad (7)$$

で定義される。プラケットとは格子上の最小の閉じたループであり、ゲージ場の曲率を表す。これは  $x \rightarrow \mu \rightarrow \mu\nu \rightarrow \nu \rightarrow x$  の閉じた周回を表す。これは、テイラー展開により

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp(i a^2 g F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \quad (8)$$

と表され、 $F_{\mu\nu}$  は場の強さテンソルである。

## D. 格子 QCD の作用の導出

格子 QCD の作用は、ウィルソン作用として知られている。導出は付録に示すが、結果は以下の通りである。

$$S_{lattice} = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left( 1 - \frac{1}{3} \text{Retr} U_{\mu\nu}(x) \right) \quad (9)$$

一般に、 $\beta = \frac{6}{g^2}$  である。 $\mu < \nu$  は各プラケットを一度だけ数えるための条件である。これを

$\mu, \nu$   
と示してしまうと、各プラケットが二度数えられてしまう。

## II. LATTICE QCD におけるフェルミオン

格子 QCD におけるフェルミオンの取り扱いは、wilson フェルミオンや staggered フェルミオンなど、いくつかの方法が存在する。

- Wilson フェルミオン: フェルミオンのダブリング問題を解決するために、ウィルソン項を導入する方法。
- Staggered フェルミオン: フェルミオンの自由度を減らし、計算コストを削減する方法。
- Domain Wall フェルミオン: 5 次元格子を用いて、カイラル対称性を保つ方法。
- Overlap フェルミオン: カイラル対称性を厳密に保つ方法。

今回は Wilson フェルミオンについて簡単に説明する。Wilson フェルミオンの作用は以下のように与えられる。

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) \left( m + \frac{4r}{a} \right) \psi(x) - \frac{a^3}{2} \sum_{x, \mu} [\bar{\psi}(x)(r\gamma_\mu)U_\mu(x)\psi(x + a\hat{\mu}) + \bar{\psi}(x + a\hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_\mu^\dagger(x)\psi(x)] \quad (10)$$

ここで、 $r$  はウィルソンパラメータであり、通常  $r = 1$  と設定される。

### III. 付録 WILSON 作用の導出

ウィルソン作用の導出は以下の通りである。まず、場の強さテンソル  $F_{\mu\nu}$  は

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (11)$$

で定義される。格子上では、 $F_{\mu\nu}$  はプラケット  $U_{\mu\nu}$  式(7)を用いて近似される。テイラーテンソルにより、

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp(ia^2 g F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \quad (12)$$

が得られる。次に、作用について解きたいため、 $U_{\mu\nu}$  のトレスを計算し、無次元化する。また、 $U_{\mu\nu}$  はユニタリ行列であるため、複素数を含むが、複素数の作用は定義できないため、実部を取る。

$$\text{Retr}U_{\mu\nu}(x) = \text{Retr} \exp(ia^2 g F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \quad (13)$$

これをテイラーテンソルにより、

$$\text{Retr} \left( 1 + ia^2 g F_{\mu\nu}(x) - \frac{a^4 g^2}{2} F_{\mu\nu}^2(x) + \mathcal{O}(a^6) \right) \quad (14)$$

となる。ここで、 $F_{\mu\nu}$  は SU(3) の生成子に展開されるため、 $\text{Retr}F_{\mu\nu} = 0$  であることを利用すると 1 次の項が消えるため、

$$\text{Retr}U_{\mu\nu}(x) = \text{Retr} \left( 1 - \frac{a^4 g^2}{2} F_{\mu\nu}^2(x) + \mathcal{O}(a^6) \right) \quad (15)$$

となる。さらに、ここで 1 は  $3 \times 3$  の単位行列であるため、 $\text{Retr}1 = 3$  であることを利用すると、

$$\text{Retr}U_{\mu\nu}(x) = 3 - \frac{a^4 g^2}{2} \text{Retr}(F_{\mu\nu}^2(x)) + \mathcal{O}(a^6) \quad (16)$$

が得られる。ここで、定数項 3 は作用に寄与しないため、 $\text{Retr}U_{\mu\nu}(x)$  から引く。その時、1 に対する偏差として表すため、

$$1 - \frac{1}{3} \text{Retr}U_{\mu\nu}(x) \approx \frac{a^4 g^2}{6} \text{Retr}(F_{\mu\nu}^2(x)) \quad (17)$$

と整理される。これを作用式(2)に代入すると、

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} \approx \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (18)$$

となる。これを格子上に離散化すると、

$$S_{lattice} = \beta \sum_{x, \mu < \nu} \left( 1 - \frac{1}{3} \text{Retr}U_{\mu\nu}(x) \right) \quad (19)$$

が得られる。ここで、 $\beta$  は以下のように定義される。 $\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$  の係数を一致させるためである。実際に

$$\beta \cdot \frac{a^4 g^2}{6} = \frac{1}{4} a^4 \quad (20)$$

であるため、

$$\beta = \frac{6}{g^2} \quad (21)$$

が得られる。