

QCDのラグランジアン密度の導出

しん

February 8, 2026

1 はじめに

本稿の目的は格子 QCD を実装するために、学んでいくものの一つである QCD のラグランジアンを定義することである。そのために、まずは自由なディラック場のラグランジアン密度を導出し、次にゲージ対称性を導入することで QCD のラグランジアン密度を得る。

2 Lie 群と $SU(3)$ ゲージ理論

まず、QCD は強い相互作用を記述する理論である。強い相互作用はクォークとグルーオンの相互作用を記述する。クォークはフェルミ粒子であり、スピン $1/2$ を持つ。したがって、クォーク場はディラック場として記述される。

次に、クォークは 3 つのカラー自由度を持つ。これらのカラー自由度は $SU(3)$ 群によって記述される。したがって、QCD は $SU(3)$ のゲージ理論である。

以上より、QCD は $SU(3)$ のゲージ理論であり、クォーク場はディラック場として記述されることが示された。

ここで $\lambda_a (a = 1, 2, \dots, 8)$ を $SU(3)$ の生成子とし、 $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ と定義する。 λ は Gell-Mann 行列と呼ばれる。また、 $\mathfrak{su}(3)$ を回転を加え、生成子 T_a の線形結合で表されるリー代数とする。すると、任意の $U \in SU(3)$ は以下のように表される。

$$U = e^{i\theta_a T_a}$$

ここで、 θ_a は実数である。

3 ディラック場のラグランジアン密度

ディラック方程式は以下のように与えられる。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

ここで、 ψ はディラックスピノル、 m は質量、 γ^μ はディラック行列である。
この時、第一項が運動項、第二項が質量項である。

これをもとに、ラグランジアン密度を以下のように仮定する。

$$\mathcal{L} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi$$

しかし、ラグランジアンはスカラーを返す関数である必要があるため、4次スピノルを返すこの関数は不適である。ここで、このスピノルをスカラーに直すために、共役スピノル $\bar{\psi}$ を導入する必要がある。他にも $\bar{\psi}$ は以下の特性を満たす必要がある

- ローレンツ変換に対して不变であること
- エルミート共役を取ったときに、ラグランジアン密度が実数になること

これらの条件を満たすものとして、以下のように定義される。

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

これを用いて、ラグランジアン密度は以下のように修正される。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

これが自由なディラック場のラグランジアン密度である。

4 QCDのラグランジアン密度

次に、QCDのラグランジアン密度を導出する。QCDのラグランジアンに要請したい条件は以下の通りである。

- ローレンツ不变であること
- ゲージ対称性を持つこと
- 自由なディラック場のラグランジアン密度を含むこと

4.1 局所ゲージ対称性の導入

前節によって、QCDはSU(3)のゲージ理論であることが示された。したがって、QCDのラグランジアン密度はSU(3)の局所ゲージ対称性を持つ必要がある。まず、ディラック場

のラグランジアン密度において、ディラック場 $\psi(x)$ は以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = SU(3)\psi(x) \\
&= e^{i\theta_a(x)T_a}\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a(x)T_a\right)\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right)\psi(x) \\
&\equiv U(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

補助的に $\bar{\psi}U(x)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}' &= (\psi')^\dagger\gamma^0 \\
&= (U(x)\psi)^\dagger\gamma^0 \\
&= \psi^\dagger U^\dagger(x)\gamma^0 \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)
\end{aligned}$$

ここで、 $\theta_a(x)$ は C^∞ 級の実関数である。この変換は局所ゲージ変換と呼ばれる。この変換に対して、ラグランジアン密度が不变である必要があるため、実際に変換を適用してみる。

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'$$

ここで、一度展開し、

$$\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi'$$

の各項を計算する。まず、運動項を計算する。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu\partial_\mu(U(x)\psi) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu[(\partial_\mu U(x))\psi + U(x)\partial_\mu\psi] \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned}$$

次に、質量項を計算する。

$$\begin{aligned}
-m\bar{\psi}'\psi' &= -m\bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)\psi \\
&= -m\bar{\psi}\psi
\end{aligned}$$

以上より、ラグランジアン密度の変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + (\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \mathcal{L}
\end{aligned}$$

ここで、第二項は元のラグランジアン密度である。よって、ラグランジアン密度は局所ゲージ変換に対して不变ではないことが分かる。したがって、ラグランジアン密度を修正する必要がある。

4.2 修正されたラグランジアン密度

前節で見たように、単純な微分を用いたラグランジアン密度をゲージ変換すると、以下の「余分な項（ゴミ）」が現れてしまった。

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi$$

この項を打ち消してゲージ不变性を回復させるために、ラグランジアン密度に新たな相互作用項を加えることを考える。

まず、通常の微分 ∂_μ を、未知の補正項 (\cdot) を含んだ共変微分 D_μ に置き換える。

$$D_\mu = \partial_\mu + (\cdot)$$

この (\cdot) は、変換によって現れるゴミを相殺するためのものである。この (\cdot) が 3×3 行列として振る舞う必要があるため、Lie 代数の基底 T_a と、新しい場 $A_\mu^a(x)$ 、結合定数 g を用いて以下のように定義してみる。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a \equiv \partial_\mu - igA_\mu$$

この新しい共変微分を用いたラグランジアン密度を \mathcal{L}_{new} とする。

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

ここで、第二項 $g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ が、ゴミを消すために追加した新しい項である。

では、この \mathcal{L}_{new} がゲージ変換に対して不变になる条件（ゴミがきれいに消える条件）を求める。ゲージ変換を行い、項を展開する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{new}} &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' + g\bar{\psi}'\gamma^\mu A'_\mu\psi' \\ &= (\mathcal{L}_{\text{orig}} + \underbrace{\bar{\psi}U^\dagger i\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi}_{\text{元のゴミ}}) + g(\bar{\psi}U^\dagger)\gamma^\mu A'_\mu(U\psi) \\ &= \mathcal{L}_{\text{orig}} + \bar{\psi}i\gamma^\mu (U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U)\psi \end{aligned}$$

この式が、変換前の形 $(\mathcal{L}_{\text{orig}} + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)$ に戻るために括弧の中身が $-igA_\mu$ になればよい。すなわち、以下の等式が成立する必要がある。

$$U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U = -igA_\mu$$

この式を、未知の場 A'_μ について解く。全体に左から U を掛け、符号を整理すると、

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U) - igA'_\mu U &= -igUA_\mu \\ -igA'_\mu U &= -igUA_\mu - (\partial_\mu U) \\ A'_\mu U &= UA_\mu + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U) \\ A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \end{aligned}$$

この結果は以下のことを意味する。「もし、新しく導入した場 A'_μ が、上記のルールに従って変換してくれるならば、ラグランジアンから発生するゴミは完全に相殺され、ゲージ不变性が保たれる」

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{new}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{new}} &= \mathcal{L}_{\text{new}} \end{aligned}$$

以上より、Quark と Gluon の相互作用を含む QCD のラグランジアン密度は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

ここで、共変微分は以下のように定義される。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$$

これはつまり

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$$

である。

さらに、ラグランジアンが $SU(3)$ の局所ゲージ対称性を持つためには、Gluon 場自身の運動項も必要である。そのために、 $D_\mu\psi(x)$ が

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)$$

というゲージ変換を満たす必要がある。これを満たすために、共変微分同士の交換子を考える。

$$D'_\mu\psi'(x) = \left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^{a'}(x) \right] U(x)\psi(x)$$

せっかくなので共変性を活かして（展開してゴミを消して...）書き直すと、

$$D'_\mu\psi'(x) = U(x) \left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a(x) \right] \psi(x)$$

となる。これは簡単に

$$D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)$$

であり、以下のような等式を満たす必要がある。

$$\left[\partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) \right] U(x) \psi(x) = U(x) \left[\partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \right] \psi(x)$$

これを展開すると、右辺は

$$U(x) \partial_\mu \psi(x) - ig U(x) \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \psi(x)$$

となり、左辺は

$$\partial_\mu U(x) \psi(x) + U(x) \partial_\mu \psi(x) - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) U(x) \psi(x)$$

となる。これらを等式に代入し、整理すると、

$$\partial_\mu U(x) \psi(x) - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) U(x) \psi(x) = -ig U(x) \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \psi(x)$$

となる。ここで、両辺を $\psi(x)$ で割り、 $\frac{\lambda_a}{2}$ でくくると、

$$-ig A_\mu^{a'}(x) U(x) = -ig U(x) A_\mu^a(x) - \partial_\mu U(x)$$

となる。これを $A_\mu^{a'}(x)$ について解くと、

$$A_\mu^{a'}(x) = U(x) A_\mu^a(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x)$$

となり、前節で求めた変換則

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger$$

と一致する。したがって、共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T_a$$

され、ここで D_μ の変換則は

$$D'_\mu = U(x) D_\mu U^\dagger(x)$$

である。 $(\psi$ を省いた形) ここで、 A_μ^a は Gluon 場であり、 T_a は SU(3) の生成子である。よって、ここまで ラグランジアンは以下のように記述される。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi} [i \gamma^\mu (D_\mu \psi) - m \psi]$$

しかし、これは Quark と Gluon の相互作用のみを記述しており、Gluon 場自身の運動項が含まれていない。そこで、次節で Gluon 場の運動項を導入する。

4.3 Gluon 場の運動項

Gluon 場自身の運動項を導入するためには、ゲージ不变な量を構成する必要がある。そのために、共変微分の交換子を考える。これは、 $x \rightarrow \mu \rightarrow \nu \rightarrow x$ の閉じた無限小のループ (Lie 群!) を表す。具体的には、

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x)$$

を計算する。まず、共変微分

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$$

を用いると、

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] \\ &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu) - (\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu - ig\partial_\mu A_\nu - igA_\mu\partial_\nu + g^2 A_\mu A_\nu \\ &\quad - \partial_\nu\partial_\mu + ig\partial_\nu A_\mu + igA_\nu\partial_\mu - g^2 A_\nu A_\mu \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - ig(A_\mu\partial_\nu - A_\nu\partial_\mu) + g^2(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - g^2[A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

となる。ここで、 A_μ は Lie 代数の元 (生成子の線形結合) であるため、

$$A_\mu = A_\mu^a T_a$$

と展開できる。ここで、SU(3) 生成子の交換関係

$$[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$$

を考える。ここで、 f^{abc} は SU(3) の構造定数である。構造定数については、付録で詳しく説明する。これを用いると、

$$[A_\mu, A_\nu] = A_\mu^a A_\nu^b [T_a, T_b] = if^{abc} A_\mu^a A_\nu^b T_c$$

となる。

以上より、交換子は

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= -ig(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)T_a - g^2(if^{abc} A_\mu^b A_\nu^c T_a) \\ &= -ig [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c] T_a \end{aligned}$$

と書け、ここで $[.]$ を $F_{\mu\nu}^a$ と定義すると、

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a T_a$$

と表せる。ここで、 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ とおくと、

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}$$

となる。ここで、 D_μ の変換則

$$D'_\mu = U(x)D_\mu U^\dagger(x)$$

を用いると、交換子の変換則は

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$$

と変換するため、 $F_{\mu\nu}$ はゲージ変換に対して共変であることが分かる。したがって、 $F_{\mu\nu}$ を用いてゲージ不变量を構成することができる。この時、matrix2scalar にしたいため、操作として \det 、 Tr などが考えられる。しかし、 $SU(3)$ であるため、Special の性質として、 $\det(F_{\mu\nu}) = 1$ となり、スカラー量を得ることができない。そこで、 Tr を用いる。

$$\begin{aligned} \text{Tr}(F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}) &= \text{Tr}(UF_{\mu\nu}U^\dagger UF^{\mu\nu}U^\dagger) \\ &= \text{Tr}(UF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^\dagger) \\ &= \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^\dagger U) \\ &= \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \end{aligned}$$

となる。この時、単純に $\text{Tr}(F^2)$ を示しているが、AINシュタインの縮約を用いているため、 $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ と示している。ここで、トレースの巡回性（付録参照）を用いた。さらに、トレースの中身を行列から成分表示 $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$ に戻して計算すると、

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \text{Tr}(T_a T_b)$$

となる。生成子 $T_a = \lambda_a/2$ の定義と、Gell-Mann 行列の性質 $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}$ （付録参照）を用いると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T_a T_b) &= \text{Tr}\left(\frac{\lambda_a}{2} \frac{\lambda_b}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\delta_{ab} = \frac{1}{2}\delta_{ab} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

が得られる。電磁気学（ $U(1)$ ゲージ理論）との整合性から、成分表示におけるグルーオンの運動項の係数は $-1/4$ であることが望ましい。以上の結果から、QCD のゲージ場のラグランジアン密度は以下のように定義される。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

また、ここで $F_{\mu\nu}^a$ は場の強度テンソルであり、以下のように定義される。

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

これにクォークの項を加え、連続理論における QCD のフルラグランジアン密度が完成する。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

5 結論

以上により、クォーク場とグルーオン場、およびそれらの相互作用を記述する QCD の完全なラグランジアン密度が導出された。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

ここで、

- $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$
- $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

である。第一項はクォークの運動とグルーオンとの相互作用を、第二項はグルーオンの運動と自己相互作用（3点および4点相互作用）を表している。

6 付録

6.1 SU(3) の構造定数

構造定数とは、Lie 代数の生成子の交換関係を定義する実数のテンソルである。直感的に言うのであれば、構造定数は Lie 群の「ねじれ」や「曲がり具合」を表す量である。簡単に $SU(2)$ で、 $a = 1, b = 2, c = 3$ の場合を考えてみる。

$$[T_1, T_2] = if^{123}T_3$$

ここで、 $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$ (σ_i はパウリ行列) であるため、

$$\begin{aligned}[T_1, T_2] &= \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= iT_3 = if^{123}T_3, \quad f^{123} = 1\end{aligned}$$

となる。