QCDのラグランジアン密度の導出

しん

January 12, 2026

1　はじめに

本稿の目的は格子QCDを実装するために、学んでいくものの一つであるQCDのラグランジアンを定義することである。そのために、まずは自由なディラック場のラグランジアン密度を導出し、次にゲージ対称性を導入することでQCDのラグランジアン密度を得る。

2　Lie群とSU(3)ゲージ理論

まず、QCDは強い相互作用を記述する理論である。強い相互作用はクォークとグルーオンの相互作用を記述する。クォークはフェルミ粒子であり、スピン1/2を持つ。したがって、クォーク場はディラック場として記述される。
次に、クォークは3つのカラー自由度を持つ。これらのカラー自由度はSU(3)群によって記述される。したがって、QCDはSU(3)のゲージ理論である。
以上より、QCDはSU(3)のゲージ理論であり、クォーク場はディラック場として記述されることが示された。

　ここで$\lambda_a (a = 1, 2, \ldots, 8)$をSU(3)の生成子とし、$T_a = \frac{\lambda_a}{2}$と定義する。$\lambda$はGell-Mann行列と呼ばれる。また、$\mathfrak{su}(3)$を回転を加え、生成子$T_a$の線形結合で表されるリー代数とする。すると、任意の$U \in SU(3)$は以下のように表される。

$$U = e^{i\theta_a T_a}$$

ここで、θ_aは実数である。

3　ディラック場のラグランジアン密度

ディラック方程式は以下のように与えられる。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

ここで、ψはディラックスピノル、mは質量、γ^μはディラック行列である。
この時、第一項が運動項、第二項が質量項である。

これをもとに、ラグランジアン密度を以下のように仮定する。

$$\mathcal{L} = i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi$$

しかし、ラグランジアンはスカラーを返す関数である必要があるため、4 次スピノルを返すこの関数は不適である。ここで、このスピノルをスカラーに直すために、共役スピノル $\bar{\psi}$ を導入する必要がある。他にも $\bar{\psi}$ は以下の特性を満たす必要がある

- ローレンツ変換に対して不変であること
- エルミート共役を取ったときに、ラグランジアン密度が実数になること

これらの条件を満たすものとして、以下のように定義される。

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$$

これを用いて、ラグランジアン密度は以下のように修正される。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi$$

これが自由なディラック場のラグランジアン密度である。

4 QCD のラグランジアン密度

次に、QCD のラグランジアン密度を導出する。QCD のラグランジアンに要請したい条件は以下の通りである。

- ローレンツ不変であること
- ゲージ対称性を持つこと
- 自由なディラック場のラグランジアン密度を含むこと

4.1 局所ゲージ対称性の導入

前節によって、QCD は SU(3) のゲージ理論であるであることが示された。したがって、QCD のラグランジアン密度は SU(3) の局所ゲージ対称性を持つ必要がある。まず、ディ

ラック場のラグランジアン密度において、ディラック場 $\psi(x)$ は以下のように変換される。

$$
\begin{aligned}
\psi(x) \to \psi'(x) &= SU(3)\psi(x) \\
&= e^{i\theta_a(x)T_a}\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^{8}\theta_a(x)T_a\right)\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^{8}\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right)\psi(x) \\
&\equiv U(x)\psi(x)
\end{aligned}
$$

補助的に $\bar{\psi}U(x)$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}' &= (\psi')^\dagger\gamma^0 \\
&= (U(x)\psi)^\dagger\gamma^0 \\
&= \psi^\dagger U^\dagger(x)\gamma^0 \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)
\end{aligned}
$$

ここで、$\theta_a(x)$ は C^∞ 級の実関数である。この変換は局所ゲージ変換と呼ばれる。この変換に対して、ラグランジアン密度が不変である必要があるため、実際に変換を適用してみる。

$$
\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'
$$

ここで、一度展開し、

$$
\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi'
$$

の各項を計算する。まず、運動項を計算する。

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu\partial_\mu(U(x)\psi) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu[(\partial_\mu U(x))\psi + U(x)\partial_\mu\psi] \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned}
$$

次に、質量項を計算する。

$$
\begin{aligned}
-m\bar{\psi}'\psi' &= -m\bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)\psi \\
&= -m\bar{\psi}\psi
\end{aligned}
$$

以上より、ラグランジアン密度の変換は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \big(\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\big) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

ここで、第二項は元のラグランジアン密度である。よって、ラグランジアン密度は局所ゲージ変換に対して不変ではないことが分かる。したがって、ラグランジアン密度を修正する必要がある。

4.2 修正されたラグランジアン密度

前節で見たように、単純な微分を用いたラグランジアン密度をゲージ変換すると、以下の「余分な項（ゴミ）」が現れてしまった。

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi$$

この項を打ち消してゲージ不変性を回復させるために、ラグランジアン密度に新たな相互作用項を加えることを考える。

まず、通常の微分 ∂_μ を、未知の補正項 $(\cdot)$ を含んだ共変微分 D_μ に置き換える。

$$D_\mu = \partial_\mu + (\cdot)$$

この $(\cdot)$ は、変換によって現れるゴミを相殺するためのものである。この $(\cdot)$ が 3×3 行列として振る舞う必要があるため、Lie 代数の基底 T_a と、新しい場 $A^a_\mu(x)$、結合定数 g を用いて以下のように定義してみる。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu T_a \equiv \partial_\mu - igA_\mu$$

この新しい共変微分を用いたラグランジアン密度を $\mathcal{L}_{\text{new}}$ とする。

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

ここで、第二項 $g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ が、ゴミを消すために追加した新しい項である。

では、この $\mathcal{L}_{\text{new}}$ がゲージ変換に対して不変になる条件（ゴミがきれいに消える条件）を求める。ゲージ変換を行い、項を展開する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{new}} &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' + g\bar{\psi}'\gamma^\mu A'_\mu\psi' \\
&= (\mathcal{L}_{\text{orig}} + \underbrace{\bar{\psi}U^\dagger i\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi}_{\text{元のゴミ}}) + g(\bar{\psi}U^\dagger)\gamma^\mu A'_\mu(U\psi) \\
&= \mathcal{L}_{\text{orig}} + \bar{\psi}i\gamma^\mu\left(U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U\right)\psi
\end{aligned}$$

この式が、変換前の形（$\mathcal{L}_{\text{orig}} + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$）に戻るためには、括弧の中身が $-igA_\mu$ になればよい。すなわち、以下の等式が成立する必要がある。

$$U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U = -igA_\mu$$

この式を、未知の場 A'_μ について解く。全体に左から U を掛け、符号を整理すると、

$$
\begin{aligned}
(\partial_\mu U) - igA'_\mu U &= -igUA_\mu \\
-igA'_\mu U &= -igUA_\mu - (\partial_\mu U) \\
A'_\mu U &= UA_\mu + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U) \\
A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger
\end{aligned}
$$

この結果は以下のことを意味する。「もし、新しく導入した場 A_μ が、上記のルールに従って変換してくれるならば、ラグランジアンから発生するゴミは完全に相殺され、ゲージ不変性が保たれる」

$$
\begin{aligned}
A_\mu \to A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \\
\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{new}} \to \mathcal{L}'_{\text{new}} = \mathcal{L}_{\text{new}}
\end{aligned}
$$

以上より、Quark と Gluon の相互作用を含む QCD のラグランジアン密度は以下のように与えられる。

$$
\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi
$$

ここで、共変微分は以下のように定義される。

$$
D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu T_a
$$

これはつまり

$$
D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu \frac{\lambda_a}{2}
$$

である。

さらに、ラグランジアンが SU(3) の局所ゲージ対称性を持つためには、Gluon 場自身の運動項も必要である。そのために、$D_\mu\psi(x)$ が

$$
D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)
$$

というゲージ変換を満たす必要がある。これを満たすために、共変微分同士の交換子を考える。

$$
D'_\mu\psi'(x) = \left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A^{a\prime}_\mu(x)\right]U(x)\psi(x)
$$

せっかくなので共変性を活かして (展開してゴミを消して...) 書き直すと、

$$
D'_\mu\psi'(x) = U(x)\left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A^a_\mu(x)\right]\psi(x)
$$

となる。これは簡単に

$$
D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)
$$

であり、以下のような等式を満たす必要がある。

$$\left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^{a\prime}(x)\right]U(x)\psi(x) = U(x)\left[\partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a(x)\right]\psi(x)$$

これを展開すると、右辺は

$$U(x)\partial_\mu\psi(x) - igU(x)\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a(x)\psi(x)$$

となり、左辺は

$$\partial_\mu U(x)\psi(x) + U(x)\partial_\mu\psi(x) - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^{a\prime}(x)U(x)\psi(x)$$

となる。これらを等式に代入し、整理すると、

$$\partial_\mu U(x)\psi(x) - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^{a\prime}(x)U(x)\psi(x) = -igU(x)\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a(x)\psi(x)$$

となる。ここで、両辺を $\psi(x)$ で割り、$\frac{\lambda_a}{2}$ でくくると、

$$-igA_\mu^{a\prime}(x)U(x) = -igU(x)A_\mu^a(x) - \partial_\mu U(x)$$

となる。これを $A_\mu^{a\prime}(x)$ について解くと、

$$A_\mu^{a\prime}(x) = U(x)A_\mu^a(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)$$

となり、前節で求めた変換則

$$A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger$$

と一致する。したがって、共変微分は以下のように定義される。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$$

ここで、A_μ^a は Gluon 場であり、T_a は SU(3) の生成子である。

4.3 Gluon 場の運動項

最後に、Gluon 場自身の運動項を導入する。QED（電磁気学）の類推から、場の強さのテンソル $F_{\mu\nu}$ を構成し、その 2 乗をラグランジアンに加えることが予想される。しかし、QCD は非可換ゲージ理論であるため、単純な回転 $(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ だけではゲージ共変性を持たない。

そこで、共変微分 D_μ の交換子（Commutator）を計算することで、非可換性を含ん

だ自然な場の強さを導出する。共変微分の交換子をクォーク場 ψ に作用させる。

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = D_\mu(D_\nu\psi) - D_\nu(D_\mu\psi)$$

定義 $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ を代入して展開する。第一項は、積の微分法に注意すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_\mu(D_\nu\psi) &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu\psi - igA_\nu\psi) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\psi - ig(\partial_\mu A_\nu)\psi - igA_\nu(\partial_\mu\psi) - igA_\mu(\partial_\nu\psi) + (ig)^2 A_\mu A_\nu\psi \end{aligned}$$

第二項（添字 μ, ν を入れ替えたもの）を引き算すると、$\partial_\mu\partial_\nu\psi$ や $A_\nu(\partial_\mu\psi)$ などの項が相殺する。残る項を整理すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi + (ig)^2(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\psi \\ &= -ig\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]\right)\psi \end{aligned}$$

ここで、括弧の中身を**グルーオンの場の強さ（Field Strength Tensor）** $F_{\mu\nu}$ と定義する。

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

すなわち、共変微分の交換子は場の強さと以下の関係にある。

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}$$

ここで、$F_{\mu\nu}$ は行列値（Lie 代数の元）であるため、成分表示 $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a$ を考える。Lie 代数の交換関係 $[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$ を用いると、

$$-ig[A_\mu, A_\nu] = -igA^a_\mu A^b_\nu[T_a, T_b] = gf^{abc}A^a_\mu A^b_\nu T_c$$

となるため、各成分 $F^a_{\mu\nu}$ は以下のように書ける。

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

第三項の存在により、グルーオン場は自己相互作用を持つことがわかる。

最後に、この $F_{\mu\nu}$ を用いてゲージ不変かつローレンツ不変なラグランジアン密度を構成する。$F_{\mu\nu}$ はゲージ変換に対して $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$ と変換するため、トレースを取ることで不変量を作ることができる。ジェネレータの規格化条件 $\mathrm{Tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ を用いると、

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = F^a_{\mu\nu}F^{b\mu\nu}\mathrm{Tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

となる。場の量子論における運動項の標準的な正規化（係数が $-1/4$）に合わせるため、

グルーオン場のラグランジアン密度を以下のように定義する。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

5 結論

以上により、クォーク場とグルーオン場、およびそれらの相互作用を記述する QCD の完全なラグランジアン密度が導出された。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

ここで、

- $D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu T_a$
- $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$

である。第一項はクォークの運動とグルーオンとの相互作用を、第二項はグルーオンの運動と自己相互作用（3 点および 4 点相互作用）を表している。