

# QCDのラグランジアン密度の導出

しん

January 12, 2026

## 1 はじめに

本稿の目的は格子 QCD を実装するために、学んでいくものの一つである QCD のラグランジアンを定義することである。そのために、まずは自由なディラック場のラグランジアン密度を導出し、次にゲージ対称性を導入することで QCD のラグランジアン密度を得る。

## 2 Lie 群と $SU(3)$ ゲージ理論

まず、QCD は強い相互作用を記述する理論である。強い相互作用はクォークとグルーボンの相互作用を記述する。クォークはフェルミ粒子であり、スピン  $1/2$  を持つ。したがって、クォーク場はディラック場として記述される。

次に、クォークは 3 つのカラー自由度を持つ。これらのカラー自由度は  $SU(3)$  群によって記述される。したがって、QCD は  $SU(3)$  のゲージ理論である。

以上より、QCD は  $SU(3)$  のゲージ理論であり、クォーク場はディラック場として記述されることが示された。

ここで  $\lambda_a (a = 1, 2, \dots, 8)$  を  $SU(3)$  の生成子とし、 $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$  と定義する。 $\lambda$  は Gell-Mann 行列と呼ばれる。また、 $\mathfrak{su}(3)$  を回転を加え、生成子  $T_a$  の線形結合で表されるリー代数とする。すると、任意の  $U \in SU(3)$  は以下のように表される。

$$U = e^{i\theta_a T_a}$$

ここで、 $\theta_a$  は実数である。

## 3 ディラック場のラグランジアン密度

ディラック方程式は以下のように与えられる。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

ここで、 $\psi$  はディラックスピノル、 $m$  は質量、 $\gamma^\mu$  はディラック行列である。  
この時、第一項が運動項、第二項が質量項である。

これをもとに、ラグランジアン密度を以下のように仮定する。

$$\mathcal{L} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi$$

しかし、ラグランジアンはスカラーを返す関数である必要があるため、4次スピノルを返すこの関数は不適である。ここで、このスピノルをスカラーに直すために、共役スピノル $\bar{\psi}$ を導入する必要がある。他にも $\bar{\psi}$ は以下の特性を満たす必要がある

- ローレンツ変換に対して不变であること
- エルミート共役を取ったときに、ラグランジアン密度が実数になること

これらの条件を満たすものとして、以下のように定義される。

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

これを用いて、ラグランジアン密度は以下のように修正される。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$$

これが自由なディラック場のラグランジアン密度である。

## 4 QCDのラグランジアン密度

次に、QCDのラグランジアン密度を導出する。QCDのラグランジアンに要請したい条件は以下の通りである。

- ローレンツ不变であること
- ゲージ対称性を持つこと
- 自由なディラック場のラグランジアン密度を含むこと

### 4.1 局所ゲージ対称性の導入

前節によって、QCDはSU(3)のゲージ理論であることが示された。したがって、QCDのラグランジアン密度はSU(3)の局所ゲージ対称性を持つ必要がある。まず、ディラック場

のラグランジアン密度において、ディラック場  $\psi(x)$  は以下のように変換される。

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = SU(3)\psi(x) \\
&= e^{i\theta_a(x)T_a}\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a(x)T_a\right)\psi(x) \\
&= \exp\left(i\sum_{a=1}^8\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right)\psi(x) \\
&\equiv U(x)\psi(x)
\end{aligned}$$

補助的に  $\bar{\psi}U(x)$  を計算する。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}' &= (\psi')^\dagger\gamma^0 \\
&= (U(x)\psi)^\dagger\gamma^0 \\
&= \psi^\dagger U^\dagger(x)\gamma^0 \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)
\end{aligned}$$

ここで、 $\theta_a(x)$  は  $C^\infty$  級の実関数である。この変換は局所ゲージ変換と呼ばれる。この変換に対して、ラグランジアン密度が不变である必要があるため、実際に変換を適用してみる。

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'$$

ここで、一度展開し、

$$\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\bar{\psi}'\psi'$$

の各項を計算する。まず、運動項を計算する。

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu\partial_\mu(U(x)\psi) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu[(\partial_\mu U(x))\psi + U(x)\partial_\mu\psi] \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned}$$

次に、質量項を計算する。

$$\begin{aligned}
-m\bar{\psi}'\psi' &= -m\bar{\psi}U^\dagger(x)U(x)\psi \\
&= -m\bar{\psi}\psi
\end{aligned}$$

以上より、ラグランジアン密度の変換は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + (\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi) \\
&= \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi + \mathcal{L}
\end{aligned}$$

ここで、第二項は元のラグランジアン密度である。よって、ラグランジアン密度は局所ゲージ変換に対して不变ではないことが分かる。したがって、ラグランジアン密度を修正する必要がある。

## 4.2 修正されたラグランジアン密度

前節で見たように、単純な微分を用いたラグランジアン密度をゲージ変換すると、以下の「余分な項（ゴミ）」が現れてしまった。

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}U^\dagger(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu U(x))\psi$$

この項を打ち消してゲージ不变性を回復させるために、ラグランジアン密度に新たな相互作用項を加えることを考える。

まず、通常の微分  $\partial_\mu$  を、未知の補正項  $(\cdot)$  を含んだ共変微分  $D_\mu$  に置き換える。

$$D_\mu = \partial_\mu + (\cdot)$$

この  $(\cdot)$  は、変換によって現れるゴミを相殺するためのものである。この  $(\cdot)$  が  $3 \times 3$  行列として振る舞う必要があるため、Lie 代数の基底  $T_a$  と、新しい場  $A_\mu^a(x)$ 、結合定数  $g$  を用いて以下のように定義してみる。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a \equiv \partial_\mu - igA_\mu$$

この新しい共変微分を用いたラグランジアン密度を  $\mathcal{L}_{\text{new}}$  とする。

$$\mathcal{L}_{\text{new}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$$

ここで、第二項  $g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$  が、ゴミを消すために追加した新しい項である。

では、この  $\mathcal{L}_{\text{new}}$  がゲージ変換に対して不变になる条件（ゴミがきれいに消える条件）を求める。ゲージ変換を行い、項を展開する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{new}} &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' + g\bar{\psi}'\gamma^\mu A'_\mu\psi' \\ &= (\mathcal{L}_{\text{orig}} + \underbrace{\bar{\psi}U^\dagger i\gamma^\mu(\partial_\mu U)\psi}_{\text{元のゴミ}}) + g(\bar{\psi}U^\dagger)\gamma^\mu A'_\mu(U\psi) \\ &= \mathcal{L}_{\text{orig}} + \bar{\psi}i\gamma^\mu (U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U)\psi \end{aligned}$$

この式が、変換前の形  $(\mathcal{L}_{\text{orig}} + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)$  に戻るために括弧の中身が  $-igA_\mu$  になればよい。すなわち、以下の等式が成立する必要がある。

$$U^\dagger(\partial_\mu U) - igU^\dagger A'_\mu U = -igA_\mu$$

この式を、未知の場  $A'_\mu$  について解く。全体に左から  $U$  を掛け、符号を整理すると、

$$\begin{aligned} (\partial_\mu U) - igA'_\mu U &= -igUA_\mu \\ -igA'_\mu U &= -igUA_\mu - (\partial_\mu U) \\ A'_\mu U &= UA_\mu + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U) \\ A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \end{aligned}$$

この結果は以下のことを意味する。「もし、新しく導入した場  $A'_\mu$  が、上記のルールに従って変換してくれるならば、ラグランジアンから発生するゴミは完全に相殺され、ゲージ不变性が保たれる」

$$\begin{aligned} A_\mu \rightarrow A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{new}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{new}} &= \mathcal{L}_{\text{new}} \end{aligned}$$

以上より、Quark と Gluon の相互作用を含む QCD のラグランジアン密度は以下のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

ここで、共変微分は以下のように定義される。

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$$

これはつまり

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$$

である。

さらに、ラグランジアンが  $SU(3)$  の局所ゲージ対称性を持つためには、Gluon 場自身の運動項も必要である。そのために、 $D_\mu\psi(x)$  が

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)$$

というゲージ変換を満たす必要がある。これを満たすために、共変微分同士の交換子を考える。

$$D'_\mu\psi'(x) = \left[ \partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^{a'}(x) \right] U(x)\psi(x)$$

せっかくなので共変性を活かして（展開してゴミを消して...）書き直すと、

$$D'_\mu\psi'(x) = U(x) \left[ \partial_\mu - ig\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a(x) \right] \psi(x)$$

となる。これは簡単に

$$D'_\mu\psi'(x) = U(x)D_\mu\psi(x)$$

であり、以下のような等式を満たす必要がある。

$$\left[ \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) \right] U(x) \psi(x) = U(x) \left[ \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \right] \psi(x)$$

これを展開すると、右辺は

$$U(x) \partial_\mu \psi(x) - ig U(x) \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \psi(x)$$

となり、左辺は

$$\partial_\mu U(x) \psi(x) + U(x) \partial_\mu \psi(x) - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) U(x) \psi(x)$$

となる。これらを等式に代入し、整理すると、

$$\partial_\mu U(x) \psi(x) - ig \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^{a'}(x) U(x) \psi(x) = -ig U(x) \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a(x) \psi(x)$$

となる。ここで、両辺を  $\psi(x)$  で割り、 $\frac{\lambda_a}{2}$  でくくると、

$$-ig A_\mu^{a'}(x) U(x) = -ig U(x) A_\mu^a(x) - \partial_\mu U(x)$$

となる。これを  $A_\mu^{a'}(x)$  について解くと、

$$A_\mu^{a'}(x) = U(x) A_\mu^a(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x)$$

となり、前節で求めた変換則

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger$$

と一致する。したがって、共変微分は以下のように定義される。

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T_a$$

ここで、 $A_\mu^a$  は Gluon 場であり、 $T_a$  は SU(3) の生成子である。

### 4.3 Gluon 場の運動項

最後に、Gluon 場自身の運動項を導入する。QED（電磁気学）の類推から、場の強さのテンソル  $F_{\mu\nu}$  を構成し、その 2 乗をラグランジアンに加えることが予想される。しかし、QCD は非可換ゲージ理論であるため、単純な回転  $(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$  だけではゲージ共変性を持たない。

そこで、共変微分  $D_\mu$  の交換子（Commutator）を計算することで、非可換性を含ん

だ自然な場の強さを導出する。共変微分の交換子をクォーク場  $\psi$  に作用させる。

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = D_\mu(D_\nu\psi) - D_\nu(D_\mu\psi)$$

定義  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$  を代入して展開する。第一項は、積の微分法に注意すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} D_\mu(D_\nu\psi) &= (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu\psi - igA_\nu\psi) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu\psi - ig(\partial_\mu A_\nu)\psi - igA_\nu(\partial_\mu\psi) - igA_\mu(\partial_\nu\psi) + (ig)^2 A_\mu A_\nu \psi \end{aligned}$$

第二項（添字  $\mu, \nu$  を入れ替えたもの）を引き算すると、 $\partial_\mu\partial_\nu\psi$  や  $A_\nu(\partial_\mu\psi)$  などの項が相殺する。残る項を整理すると、以下のようにになる。

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\psi &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi + (ig)^2(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\psi \\ &= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu])\psi \end{aligned}$$

ここで、括弧の中身を\*\*グルーオンの場の強さ（Field Strength Tensor）\*\*  $F_{\mu\nu}$  と定義する。

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

すなわち、共変微分の交換子は場の強さと以下の関係にある。

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}$$

ここで、 $F_{\mu\nu}$  は行列値（Lie 代数の元）であるため、成分表示  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a$  を考える。Lie 代数の交換関係  $[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$  を用いると、

$$-ig[A_\mu, A_\nu] = -igA_\mu^a A_\nu^b [T_a, T_b] = gf^{abc} A_\mu^a A_\nu^b T_c$$

となるため、各成分  $F_{\mu\nu}^a$  は以下のように書ける。

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

第三項の存在により、グルーオン場は自己相互作用を持つことがわかる。

最後に、この  $F_{\mu\nu}$  を用いてゲージ不变かつローレンツ不变なラグランジアン密度を構成する。 $F_{\mu\nu}$  はゲージ変換に対して  $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$  と変換するため、トレースを取ることで不变量を作ることができる。ジェネレータの規格化条件  $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$  を用いると、

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

となる。場の量子論における運動項の標準的な正規化（係数が  $-1/4$ ）に合わせるため、

グルーオン場のラグランジアン密度を以下のように定義する。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

## 5 結論

以上により、クォーク場とグルーオン場、およびそれらの相互作用を記述する QCD の完全なラグランジアン密度が導出された。

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

ここで、

- $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$
- $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

である。第一項はクォークの運動とグルーオンとの相互作用を、第二項はグルーオンの運動と自己相互作用（3点および4点相互作用）を表している。