Matrizes e Operações Matriciais

Definição – Uma matriz é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as entradas da matriz.

Exemplos de Matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

1x4 3x2 2x1 1x1

O tamanho de uma matriz é descrito em termos do número de linhas e de colunas que ela contém. A entrada que ocorre na linha *i* e coluna *j* de uma matriz é denotado por:

4x4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A entrada na linha *i* e na coluna *j* de uma matriz **A** é denotada por:

$$(A)_{ij} = a_{ij}$$

Exemplos:

Considerando:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$A_{11} = 2 \qquad A_{21} = 7$$

Dizemos que uma matriz **A** com *n* linhas e *n* colunas é uma matriz quadrada de ordem *n* e que as entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}$ constituem a diagonal principal de **A**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definição – Duas matrizes são definidas como sendo iguais se tiverem o **mesmo tamanho** e suas **entradas correspondentes forem iguais**

Exemplo: Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, B é valido se x = 5, enquanto C nunca é valido pelo tamanho

Definição: Se **A** e **B** são matrizes de mesmo tamanho, então a soma **A + B** é a matriz obtida somando as entradas de **B** às entradas correspondentes de **A**, e a diferença **A – B** é a matriz obtida subtraindo as entradas de **B** das entradas correspondentes de **A**.

Matrizes de tamanho distintos não podem ser somadas ou subtraídas.

Exemplo:

$$Sendo\ A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} e\ B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$, **encontre**:

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Definição – Se **A** for uma matriz e **c** um escalar, então o produto **cA** é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz **A** por **c**. Dizemos que a matriz **cA** é um múltiplo escalar de **A.**

Exemplo:

$$Seja\ A=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e\ c=3$$, **encontre:**

$$cA=\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{c}A=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definição – Se **A** for uma matriz *m x r* e **B** for uma matriz *r x n*, então o produto **AB** é a matriz *m x n* cujas entradas são determinadas como segue: Para obter a entrada na linha *i* e a coluna *j* de **AB**, destacamos a linha *i* de **A** e a coluna *j* de **B**. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes.

A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas de **A** seja igual ao número de linhas de **B** para que seja possível formar o produto **AB.**

$$\begin{gathered} A \quad\ B \\ m\ x\ r \quad\ r\ x\ n \\ r=r \\ m\ e\ n\ são\ a\ ordem\ de\ AB \end{gathered}$$

Exemplo

3x2 **2x2**

$$Considerando\ A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e\ B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$, determine **AB**.

$$AB=\begin{bmatrix} (3*4)+(0*0) & (3*-1)+(0*2) \\ (-1*4)+(2*0) & (-1*-1)+(2*2) \\ (1*4)+(1*0) & (1*-1)+(1*2) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$