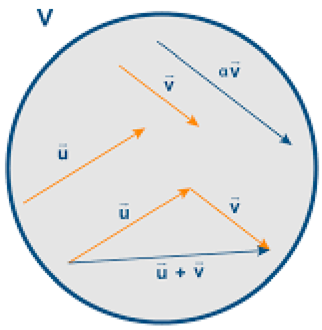
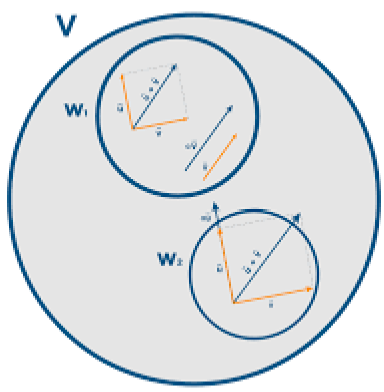
Álgebra Linear – Subespaços Vetoriais

Teorema – Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes forem atendidas:

$$a - Se\ \vec{u}\ e\ \vec{v}\ forem\ vetores\ em\ W\ ,\ Então\ \vec{u}+\vec{v}\ está\ em\ W\ .$$
$$b - Se\ a\ for\ uma\ escalar\ qualquer\ e\ \vec{u}\ algum\ vetor\ de\ W\ ,\ então\ a\vec{u}\ está\ em\ W\ .$$



Espaço Vetorial



Subespaços Vetoriais $(w_1\ e\ w_2)$

Exemplo:

Verificar se todos os vetores na forma $(a,0,0)$ formam um subespaço de $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) .

$$\begin{array}{cc} (a) & \\ \vec{u}=(u,0,0) & (b) \\ \vec{v}=(u,0,0) & a\vec{u}=(au,0,0) \\ \vec{u}+\vec{v}=(u+v,0,0) & \end{array}$$

Portanto, os vetores a forma $(a,0,0)$ formam um subespaço de $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) .

Exemplo:

Verificar se o conjunto das matrizes 2x2 invertíveis formam um subespaço do espaço vetorial das matrizes 2x2.

$$(a)$$
$$A \rightarrow det(A) \neq 0 \;\; e \;\; B \rightarrow det(B) \neq 0$$
$$A+B \rightarrow det(A+B) \neq 0$$
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\; e \;\; B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$det(A+B)=0$$

$$(b)$$
$$a \in \mathbb{R} \;\; e \;\; A_{2x2}(det(A) \neq 0)$$
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$a \cdot A = 0 \cdot A = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$det(a \cdot A)=0$$

Portanto, o conjunto das matrizes 2x2 invertíveis **não formam** um subespaço do espaço vetorial das matrizes 2x2.

Definição – Dizemos que um vetor $\vec{w}$ num espaço vetorial V é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ em V se $\vec{w}$ puder ser expresso na forma:

$$\vec{w} = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + ... n \cdot v_n$$

Em que a,b,…,n são escalares.

Esses escalares são denominados coeficientes da combinação linear.

Exemplo

Mostre que $\vec{w}=(2,1)$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(0,1)$

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$
$$(2,1)=(a,0)+(0,b)$$
$$(2,1)=(a,b)$$
$$\vec{w}=2 \cdot \vec{u}+\vec{v}$$

Exemplo

Mostre que $\vec{w}=(9,2,7)$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}=(1,2,-1)$, $\vec{v}=(6,4,2)$

$$\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$
$$(9,2,7)=a(1,2,-1)+b(6,4,2)$$
$$(9,2,7)=(a,2a,-a)+(6b,4b,2b)$$
$$(9,2,7)=(a+6b,2a+4b,2b-a)$$
$$\begin{cases} a+6b=9 \\ 2a+4b=-2 \\ -a+2b=7 \end{cases}$$
$$L_1+L_3 \rightarrow 8b=16 \rightarrow b=2$$
$$L_2=2a+4*2=2 \rightarrow 2a=-6 \rightarrow a=-3$$
$$\vec{w}=-3 \cdot \vec{u}+2 \cdot \vec{v}$$