Aula 5 – Matriz Inversa

Definição: Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, então diremos que A é invertível (ou não singular) e que B é a inversa de A (A^{-1}).

Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A não é invertível.

Teorema: *Se A for uma matriz* nxn, *então A é invertível se e somente se* $det(A) \neq 0$.

Definição: Se A for uma matriz $nxn \ e \ c_{ij}$ o cofator de a_{ij} então a matriz:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

É denominada matriz dos cofatores de A.

A transposta dessa matriz é denominada a adjunta de A e denotada por $adj(A)$.

Teorema: Se A for uma matriz invertível, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{[det(A)]} \cdot adj(A)$$

Exemplo 1: $A \cdot B = C + E \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1}(C+E) \rightarrow B = A^{-1}(C+E)$

Exemplo 2: $A \cdot C = A \cdot D \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot C = A^{-1} \cdot A \cdot D \rightarrow C = D$

Exemplo 3: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} c_{11}=12 & c_{12}=6 & c_{13}=-16 \\ c_{21}=6 & c_{22}=2 & c_{23}=-10 \\ c_{31}=-16 & c_{32}=16 & c_{33}=16 \end{bmatrix}$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 0 + 12 + 4 + 12 + 36 - 0 = 64$$

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{-1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{32} & \frac{1}{12} & \frac{-5}{32} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Teorema: Se A for invertível, então:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{[det(a)]}$$