Álgebra Linear – Independência Linear

Definição – Se $S=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial:

$$k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\dots+k_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1=0,k_2=0,\dots,k_n=0$$

Dizemos que essa é a solução trivial
Se essa for a única solução, dizemos que S é um conjunto linearmente independente.
Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um conjunto linearmente independente.

Ex: Determine se os vetores

$$\vec{v}_1=(1,-2,3),\ \ \vec{v}_2=(5,6,-1),\ \ \vec{v}_3=(3,2,1)$$

São linearmente independentes ou dependentes.

$$a\vec{v}_1+b\vec{v}_2+c\vec{v}_3=\vec{0}$$
$$a(1,-2,3)+b(5,6,-1)+c(3,2,1)=(0,0,0)$$
$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ -2 & 6 & 2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$a=0,b=0,c=0\ para\ ser\ \ LI$$

Vamos usar a Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & ! & 0\\ -2 & 6 & 2 & ! & 0\\ 3 & -1 & 1 & ! & 0\end{bmatrix}\ \begin{matrix}L_1\\ L_2=L_2+2L_1\\ L_3=L_3-3L_1\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & ! & 0\\ 0 & 16 & 8 & ! & 0\\ 0 & -16 & -8 & ! & 0\end{bmatrix}\ \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3=L_3+L_2\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 5 & 3 & ! & 0\\ 0 & 16 & 8 & ! & 0\\ 0 & 0 & 0 & ! & 0\end{bmatrix}$$

$\rightarrow 1\ variável\ \ livre$
$Infinitas\ \ soluções$

$$\begin{matrix}16b+8c=0\\ 8c=-16b\\ c=-2b\end{matrix}\qquad\begin{matrix}a+5b+3c=0\\ a+5b-6b=0\\ a-b=0\\ a=b\end{matrix}$$

$$R=(b,b,-2b)$$

Wronskiano

Definição – Se $\vec{f}_1=\vec{f}_1(x),\vec{f}_2(x),\dots\vec{f}_n(x)$ forem funções n-1 vezes deriváveis no intervalo $(-\infty,+\infty)$, então o determinante:

$$w(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1^1(x) & f_2^1(x) & \dots & f_n^1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^n(x) & f_2^n(x) & \dots & f_n^n(x) \end{bmatrix}$$

É denominado Wrongskiano de $\vec{f}_1(x),\vec{f}_2(x),\dots,\vec{f}_3(x)$
Se o Wrongskiano não for identificado zero em $(-\infty,+\infty)$, então as funções são linearmente independentes.

Ex: Use o Wrongskiano para mostra que:

$$\vec{f}_1=x \quad e \quad \vec{f}_2=sen(x)$$

São LI ou LD

$$w(x)=\begin{bmatrix} x & sen(x) \\ 1(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

$$w(x)=xcos(x)-sen(x)$$
$$w(\pi)=\pi-1-0$$
$$w(\pi)=-\pi$$

$$p/x=0$$
$$w(0)=0*(-1)+0$$
$$w(0)=0$$

Base

Definição – Se V for um espaço vetorial qualquer e $S=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_3)$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma base de V se valerem as duas condições a seguir:

$$(a)S\ é\ LI$$
$$(b)S\ gera\ V$$

Ex (Base canônica)
Verifique se:

$$\vec{e}_1=(1,0,0),\vec{e}_1=(0,1,0)\ \ e\ \ \vec{e}_1=(0,0,1)$$

Formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

$$(a)$$
$$a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c=0,b=0,a=0$$

$$(b)$$
$$(x,y,z)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$$
$$(x,y,z)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$$
$$(x,y,z)=(a,b,c)$$
$$(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$$

Portanto, os vetores são LI (a) e geram o R³ (b), ou seja, é uma base do R³