Álgebra Linear – Autovalores e Autovetores

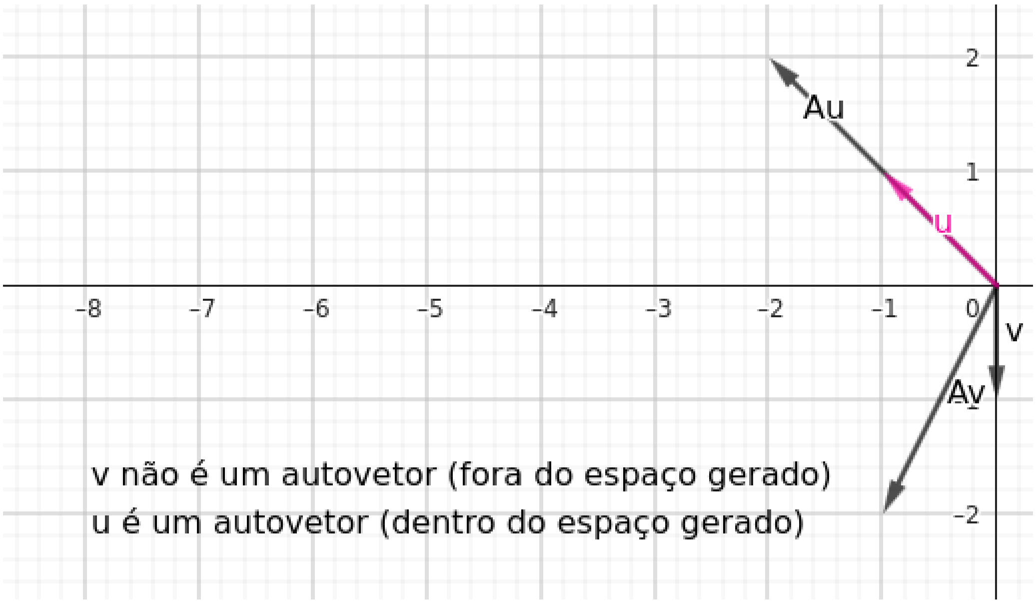
Definição – Se A for uma matriz nxn , então um vetor <u>**NÃO NULO**</u> $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ é denominado autovetor de A se $A\vec{x}$ for um múltiplo escalar de $\vec{x}$, isto é:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Onde λ representa o escalar e é denominado autovetor de A. Dizemos que $\vec{x}$ é um autovetor associado a λ .

$$\begin{array}{ccccc} A & \vec{x} & . & \vec{x} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$2 \quad é \quad autovalor(\lambda), \ \vec{x} \quad é \quad autovetor$$

Ex: Considere a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e os vetores $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



TEOREMA

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$$
$$A\vec{x}=\lambda I\vec{x}=\vec{0}$$
$$(A-\lambda I)\vec{x}=\vec{0}$$
$$(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)\vec{x}=(A-\lambda I)\vec{0}$$
$$I\vec{x}=\vec{0}$$
$$\vec{x}=\vec{0}$$

Como o autovetor não pode ser igual a zero, temos que a matriz não pode ser inversa, portanto seu determinante não pode ser diferente de zero, assim temos:

$$det(A-\lambda I)=0$$

Se A for uma matriz nxn , então λ é um autovalor de A se, e somente se, λ satisfaz a equação:

$$det(A-\lambda I)=0$$

Essa equação é a equação característica de A.

Ex: Encontre os autovalores e autovetores associados a matriz A.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\lambda\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

Portanto, temos que verificar se $det\begin{bmatrix}3-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)-0=0$$
$$6-5\lambda+\lambda^2=0$$
$$\frac{(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})}{(2a)}\rightarrow\frac{(5\pm\sqrt{1})}{2}\rightarrow\frac{(5+1)}{2}=3$$
$$\rightarrow\frac{(5-1)}{2}=2$$

Ou seja, temos $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=2$

$$Para\ \ \lambda_1=3,\ \ temos:$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$^{o}x_2=0$$
$$-x_2=0\rightarrow x_2=0$$
$$x_1=x_1(livre)$$
$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}=x_1\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$Para\ \ \lambda_2=2,\ \ temos:$$
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$
$$^{o}x_1+x_2=0$$
$$x_1=-x_2$$
$$x_2=x_2\ \ (livre)$$
$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\ x_2\end{bmatrix}=x_2\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$