Álgebra Linear – Vetor Coordenado

Definição – Se $V=(\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_n)$ for uma base de um espaço vetorial V e se :

$$\vec{v}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+...+c_n\vec{v}_n$$

É a expressão de um vetor $\vec{v}$ em termos da base S, então as escalares $c_1,c_2,...,c_n$ são denominados coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base S. O vetor $(c_1,c_2,...,c_n)$ é denominado vetor de coordenadas de $\vec{v}$ em relação a S e denotado por: $(\vec{v})_s=(c_1,c_2,...,c_n)$.

(Espaço vetorial [$\mathbb{R}^3$] → Base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$)
← ($\vec{v}_4$) →

$\vec{v}_4=a\vec{v}_1+b\vec{v}_2+c\vec{v}_3$ → $(\vec{v}_4)_{base}=(a,b,c)$ → Sempre teremos solução.

Exemplo

a) Encontre o vetor de coordenadas de $\vec{v}=(5,-1,9)$ em relação a base S, onde $S=\{(1,2,1),(2,9,0),(3,3,4)\}$

Solução

$$(5,-1,9)=a(1,2,1)+b(2,9,0)+c(3,3,4)\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\2&9&3\\1&0&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\9\end{bmatrix}$$

Para a linha (3), temos:

$$a+4c=9$$
$$a=9-4c$$

Para a linha (1), temos:

$$a+2b+3c=5$$
$$9-4c+2b+3c=5$$
$$2b-c=-4\quad c=4+2b$$

Para a linha (2), temos:

$$2a+9b+3c=-1$$
$$18-8c+9b+3c=-1$$
$$-5c+9b=-19$$
$$-20-10b+9b=-19$$
$$-b=1$$
$$b=-1$$

Sabemos que: $c=4+2b\rightarrow c=4-2\rightarrow c=2$

Também sabemos que: $a=9-4c\rightarrow a=9-8\rightarrow a=1$

Portanto: $(\vec{v})_s=(1,-1,2)$

b) Encontre o vetor em $\mathbb{R}^3$ cujo vetor de coordenadas em relação à base S é $(\vec{v})_s=(-1,5,2)$

$$(x,y,z)=-1(1,2,1)+3(2,9,0)+2(3,3,4)$$
$$(x,y,z)=(-1+6+6,-2+27+6,-1+0+8)$$
$$(x,y,z)=(11,31,17)$$

Base B’ $\leftrightarrow$ **Espaço Vetorial** $\leftrightarrow$ **Base B**

$(\vec{v}_4)_B{}'$ $\leftrightarrow$ $(\vec{v}_4)_B$

P

Mudança de Base

Problema da mudança de base:

- Se V for um vetor num espaço vetorial V e se mudarmos a base de V de uma base B para uma base B’, qual a relação entre os vetores coordenados $[\vec{v}]_b$ e $[\vec{v}]_b{}'$?

Se mudarmos a base de um espaço vetorial V de alguma base B’ = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$ para uma base nova B = $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$, então, dado qualquer $\vec{v}$ em V, o vetor velho de coordenadas $[\vec{v}]_b{}'$ está relacionada com o novo vetor de coordenadas $[\vec{v}]_b$ pela equação:

$$[\vec{v}]_b=P[\vec{v}]_b$$

Onde as colunas de P são os vetores coordenadas dos vetores da base nova em relação a base velha.

PB $\rightarrow$ B’ (Mudança de B para B’).
PB’ $\rightarrow$ B (Mudança de B’ para B).

Exemplo

Considerando as bases $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\},B'=\{\vec{u}'_1,\vec{u}'_2\}$ de R³, onde:

$$\vec{u}_1=(1,0),\vec{u}_2=(0,1),\vec{u}'_1=(1,1)\vec{u}'_2=(2,1)$$

a) Encontre a matriz de transição de B’ para B.
PB’ $\rightarrow$ B

$$(1,1)=a(1,0)+b(0,1) \qquad (2,1)=c(1,0)+d(0,1)$$
$$a=1,b=1 \qquad c=2,d=1$$

$$P_b{}'\rightarrow B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Encontre a matriz de transição de B para B’.
PB $\rightarrow$ B’

$$(1,0)=a(1,1)+b(2,1)$$
$$\begin{cases}a+2b=1\\ a+b=0\end{cases}$$

Subtraindo a linha 1 pela 2, temo b = 1. a+b=0 $\rightarrow$ a=-1

$$(0,1)=c(1,1)+d(2,1)$$
$$\begin{cases}c+2d=0 \qquad d=-1\\ c+d=1 \qquad c-1=1\rightarrow c=2\end{cases} \qquad P_b{}'\rightarrow B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$