ניתוח זמן ריצה של אלגוריתמים רקורסיביים

נוסחאות נסיגה

מה נלמד?

- ניתוח זמן ריצה של אלגוריתמים רקורסיביים
  - אסטרטגיית הפרד ומשול
- נוסחת מסיגה – מהי?
- פתרון של נוסחאות נסיגה

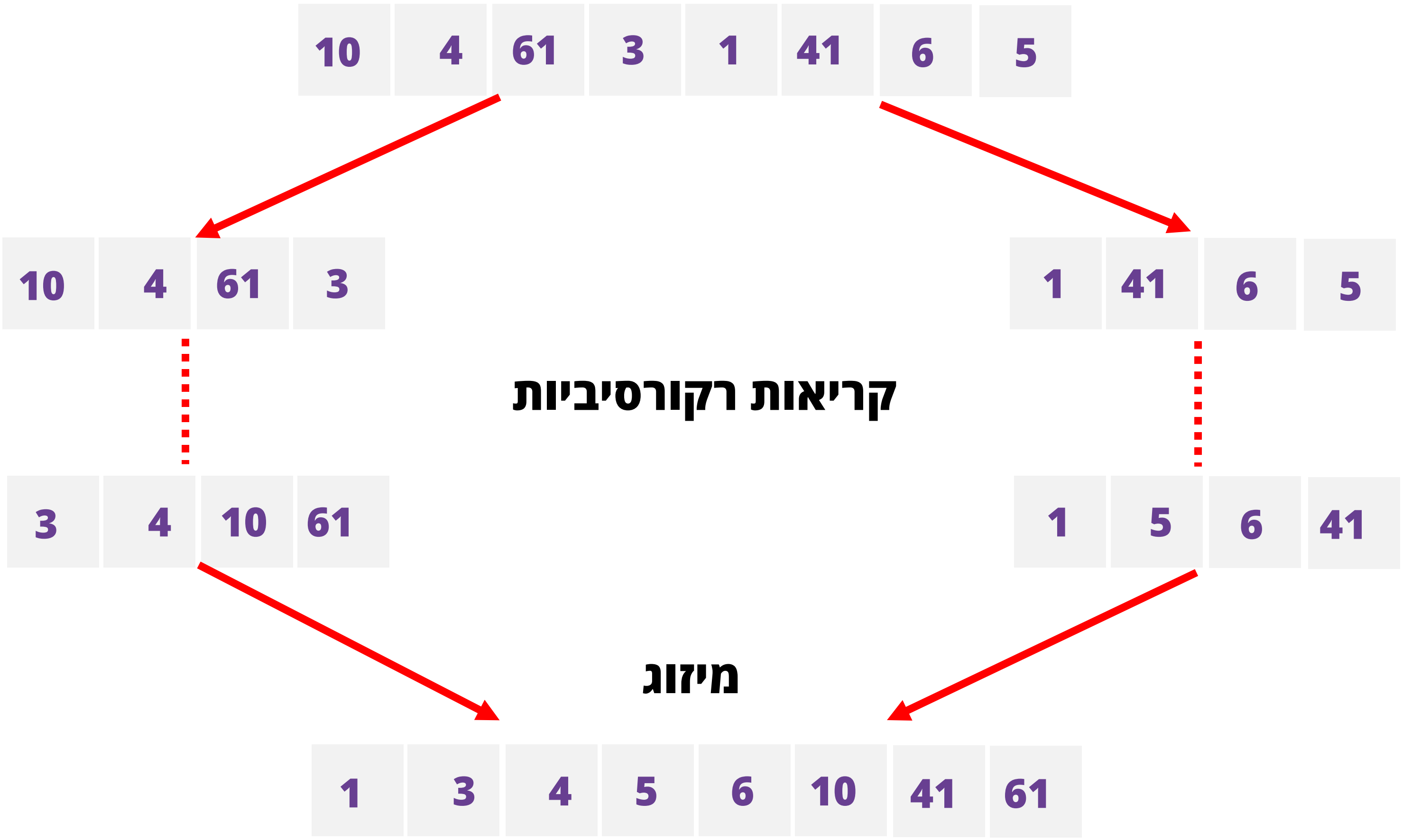
הפרד ומשול לפי רומא העתיקה

צירוף של פסיכולוגיה מדינית, אסטרטגיה צבאית ואסטרטגיה כלכלית שלפיהן ניתן להשיג ולשמור על עוצמתו של השולט על ידי פיצול העוצמה המצויה בידי האחרים לנתחים קטנים. כל נתח שיווצר כתוצאה מהפיצול יהיה בעל עוצמה נמוכה מאשר הגוף שהיה קיים בעבר

גישת הפרד ומשול

- **הפרד :** חלק את הבעיה למספר תת-בעיות
- **משול :** פתור את תת-הבעיות באופן רקורסיבי;
  אם הבעיה קטנה פתור ישירות
- **צרף :** צרף את הפתרונות של תת-הבעיות לפתרון מלא לבעיה המקורית

מיון מיזוג



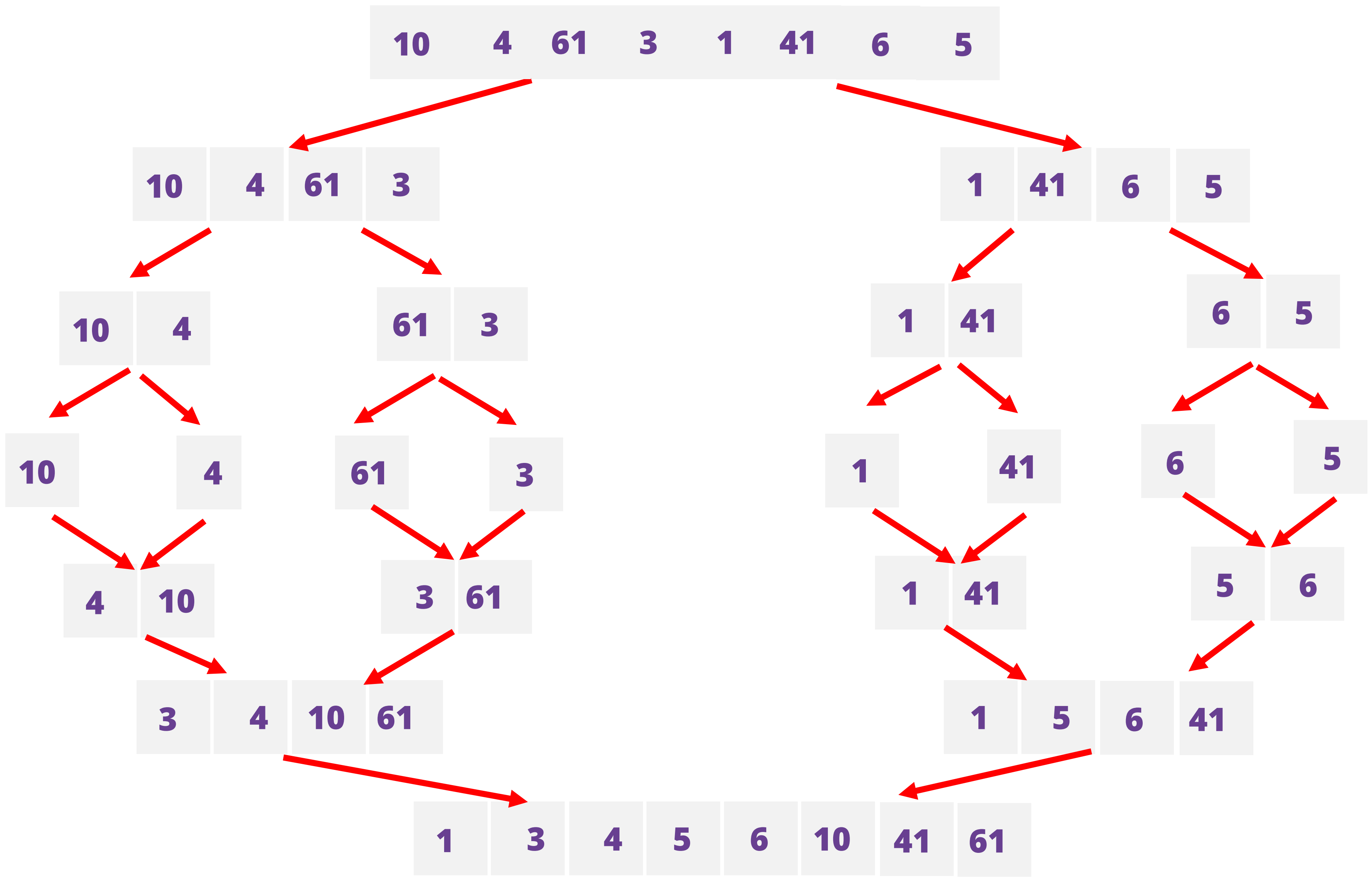
10 4 61 3 1 41 6 5
10 4 61 3
1 41 6 5
קריאות רקורסיביות
3 4 10 61
1 5 6 41
מיזוג
1 3 4 5 6 10 41 61

תיאור מילולי

בהינתן מערך A בגודל n

1. **אם A בגודל 0 או 1 – חזור (המערך כבר ממוין)**
2. **מיין באופן רקורסיבי את $n/2$ האיברים הראשונים**
3. **מיין באופן רקורסיבי את $n/2$ האיברים האחרונים**
4. **מזג את שני החלקים הממוינים**

דוגמה


10 4 61 3 1 41 6 5
10 4 61 3
1 41 6 5
10 4
61 3
1 41
6 5
10
4
61
3
1
41
6
5
4 10
3 61
1 41
5 6
3 4 10 61
1 5 6 41
1 3 4 5 6 10 41 61

פסאודו - קוד

Merge-Sort$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

1. if $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{r}$
2. $\quad\boldsymbol{q} \leftarrow \left\lfloor \frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r})}{\mathbf{2}} \right\rfloor$
3. $\quad$ Merge-Sort $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$
4. $\quad$ Merge-Sort $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{q} + \mathbf{1}, \boldsymbol{r})$
5. $\quad$ Merge$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$

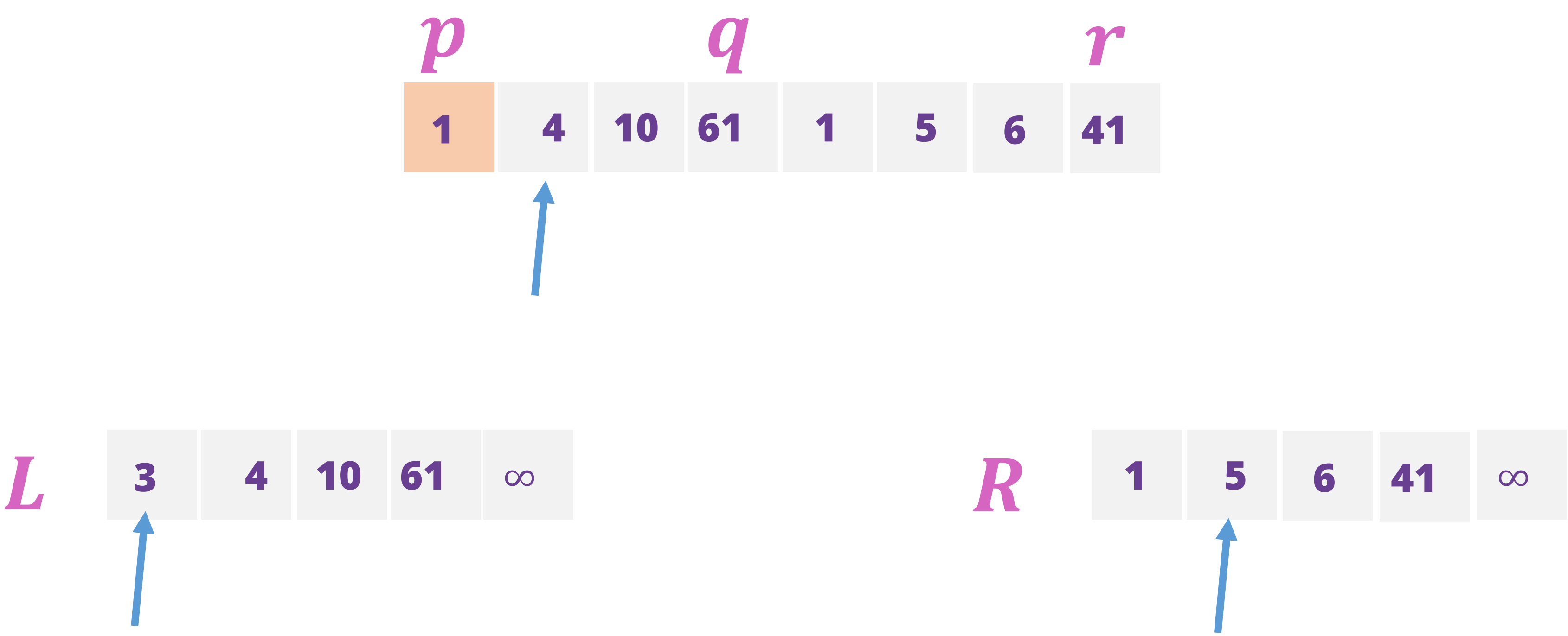
מיזוג

p			q				r
3	4	10	61	1	5	6	41

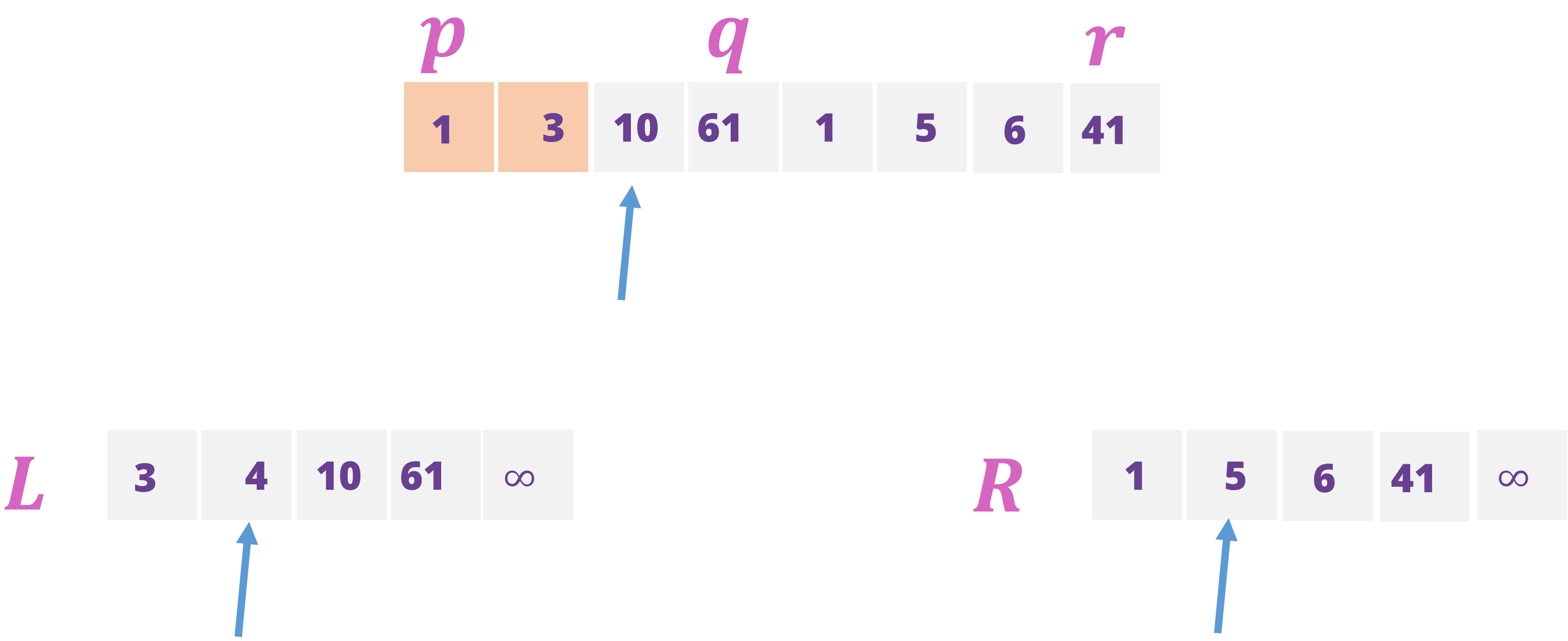
L					
	3	4	10	61	∞

R					
	1	5	6	41	∞

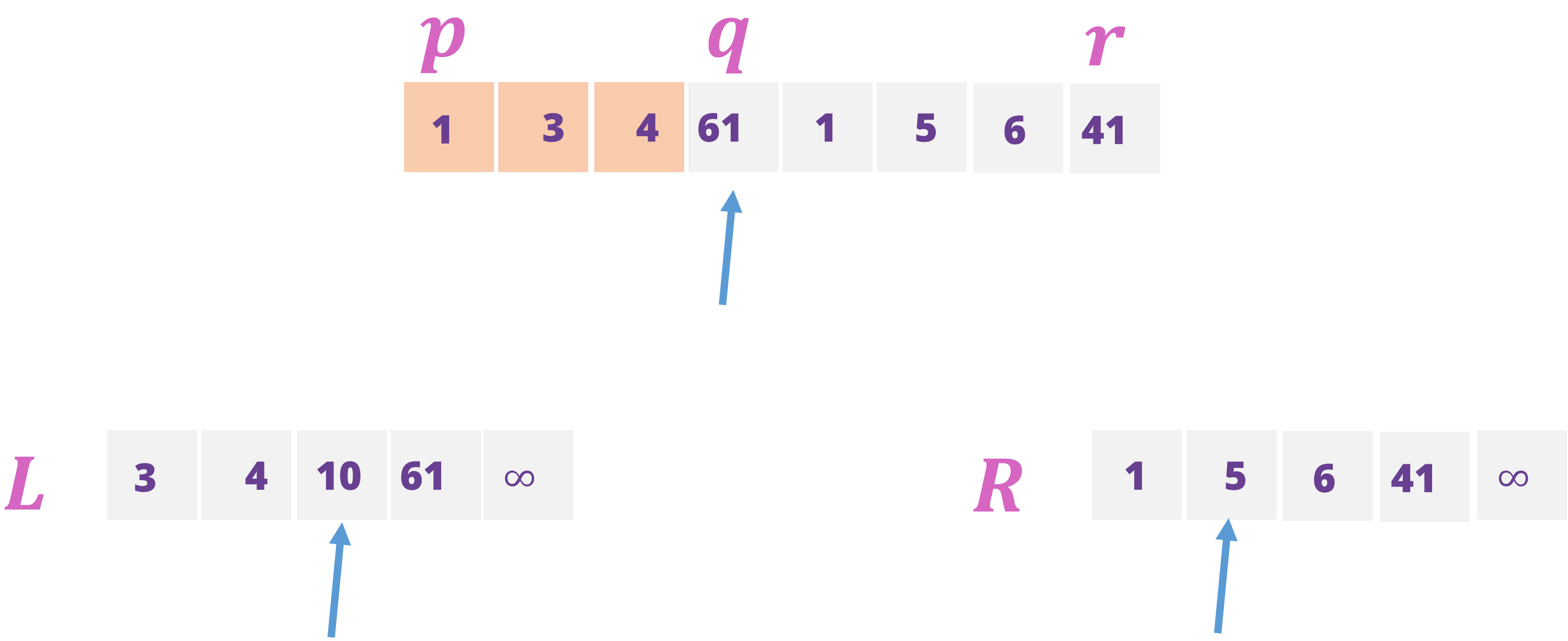
מיזוג



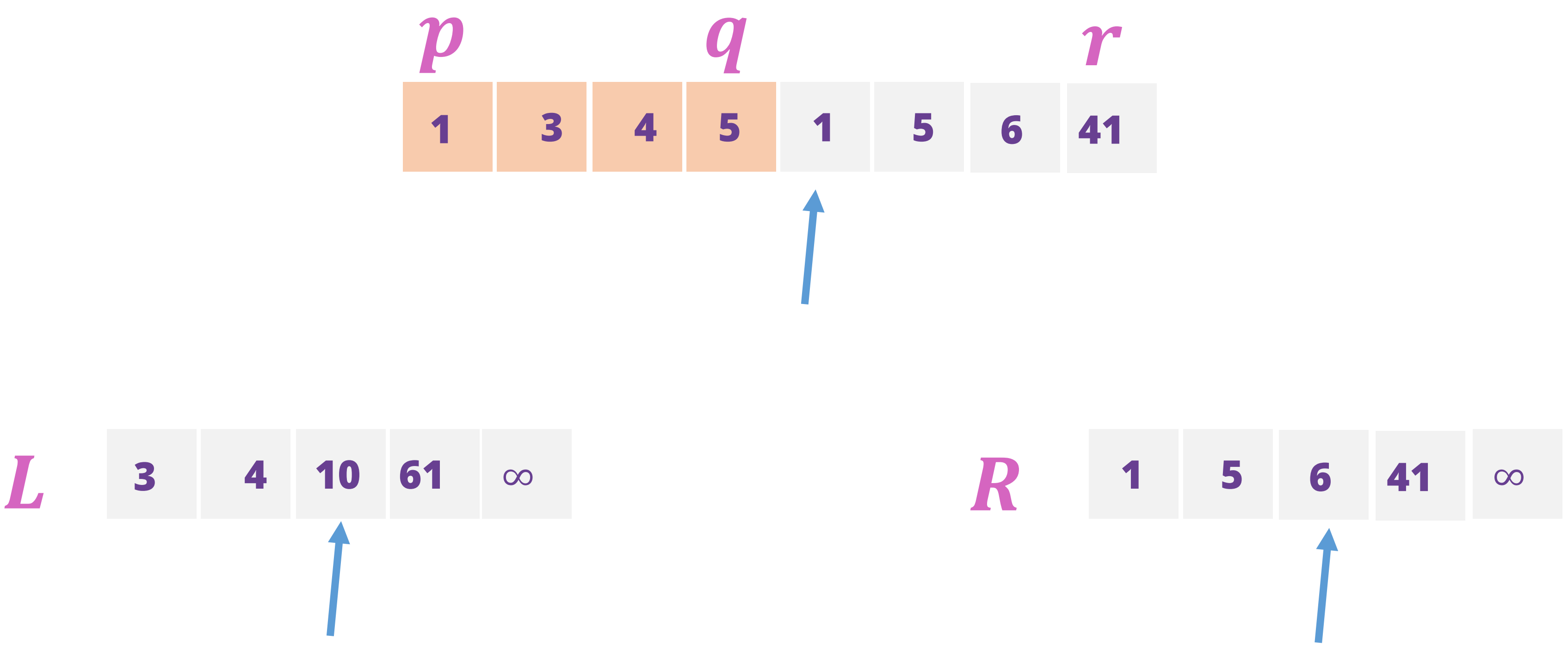
מיזוג



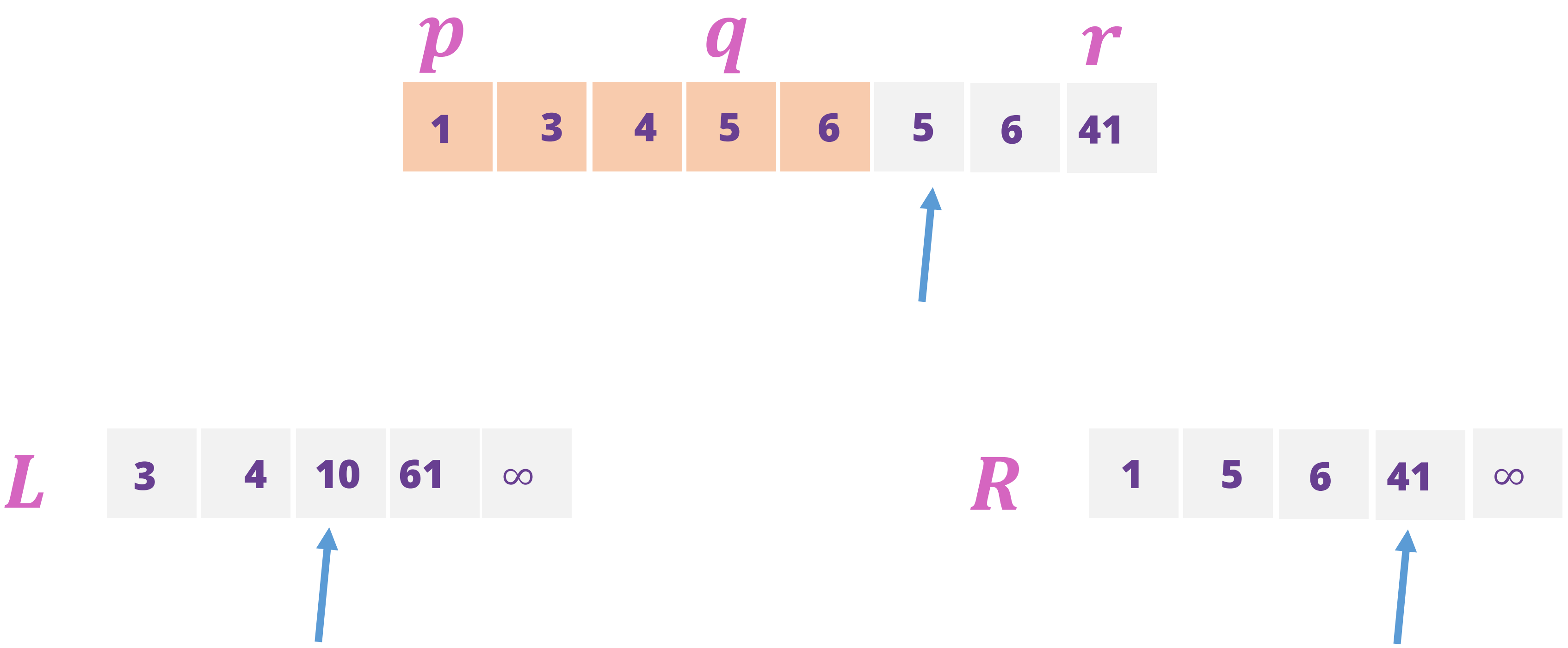
מיזוג



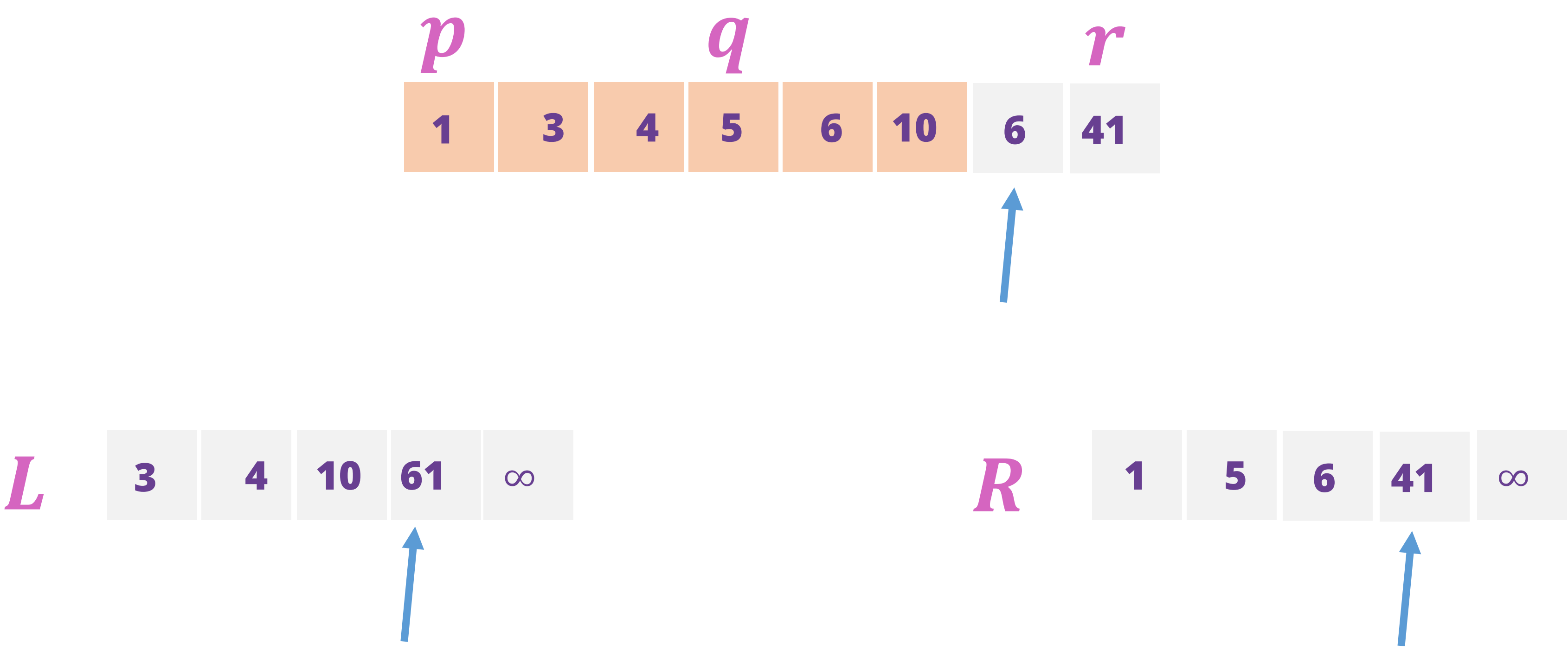
מיזוג



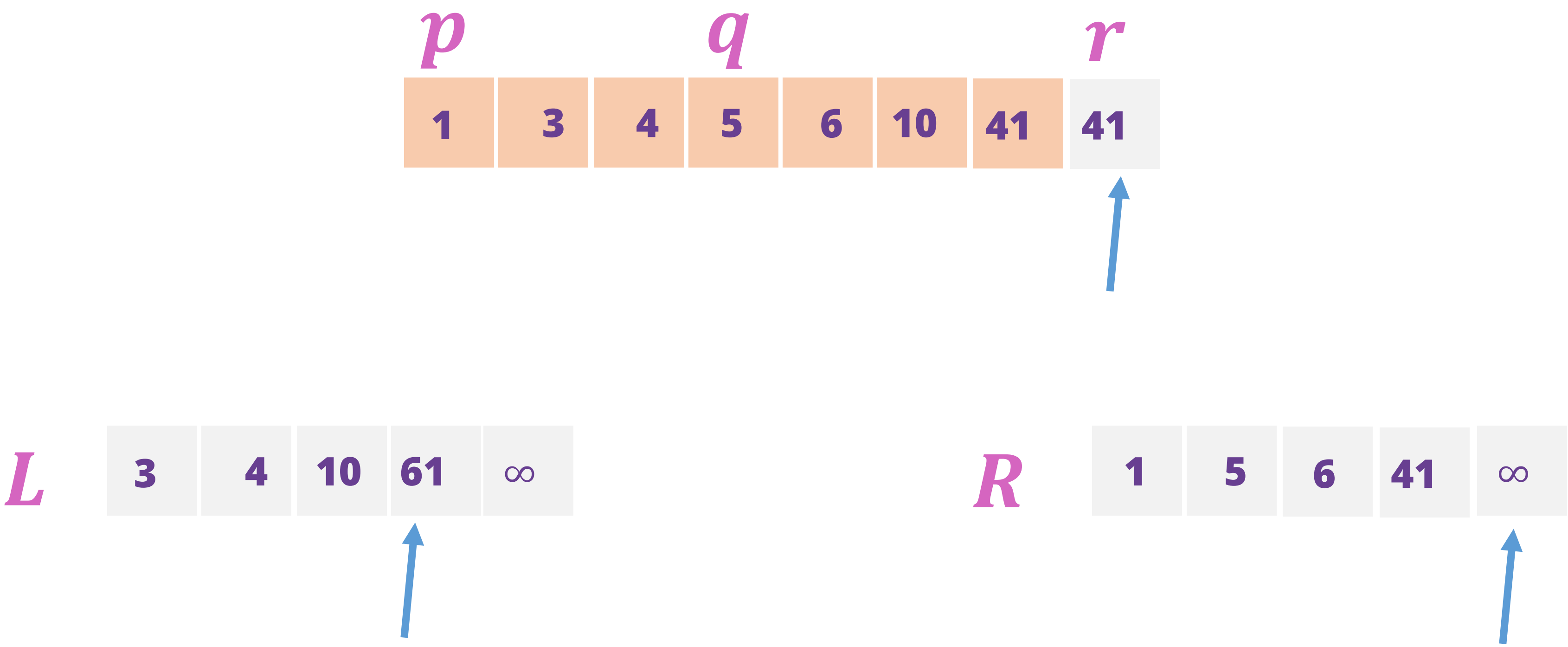
מיזוג



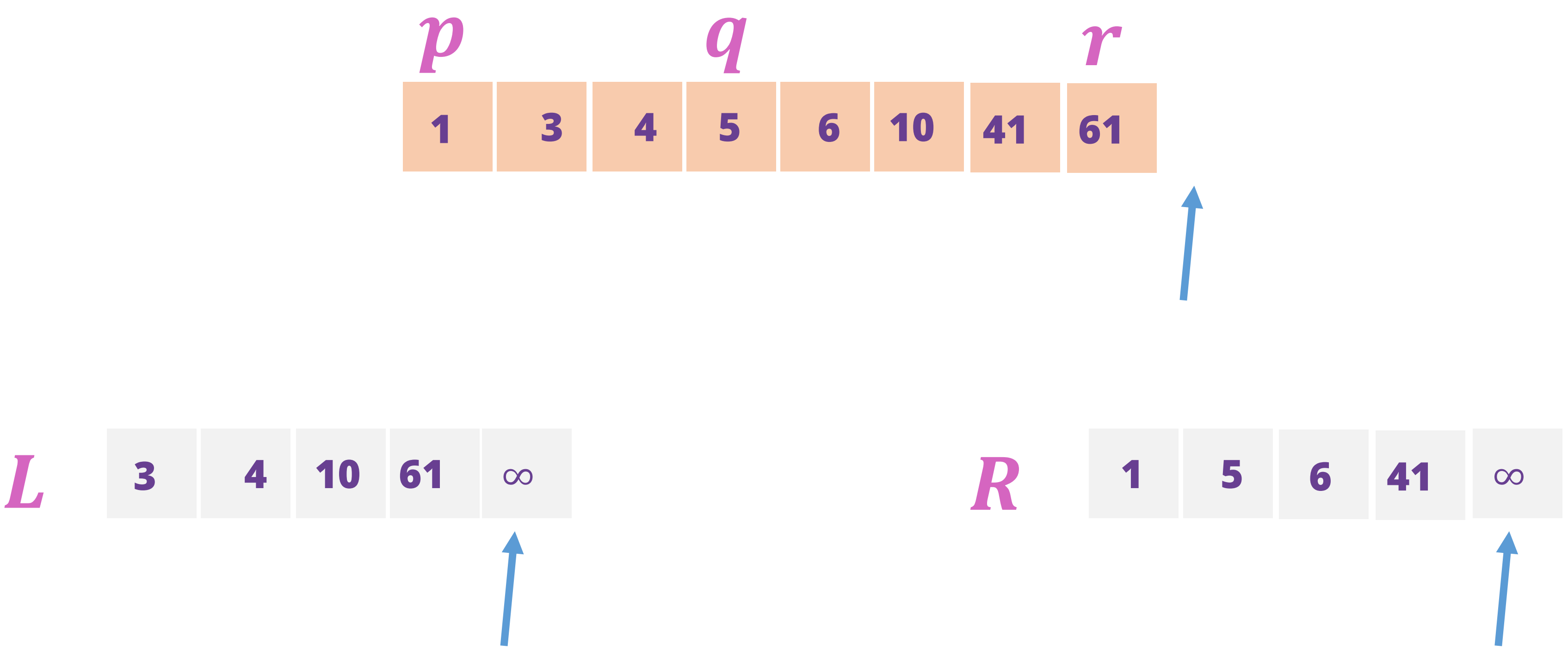
מיזוג



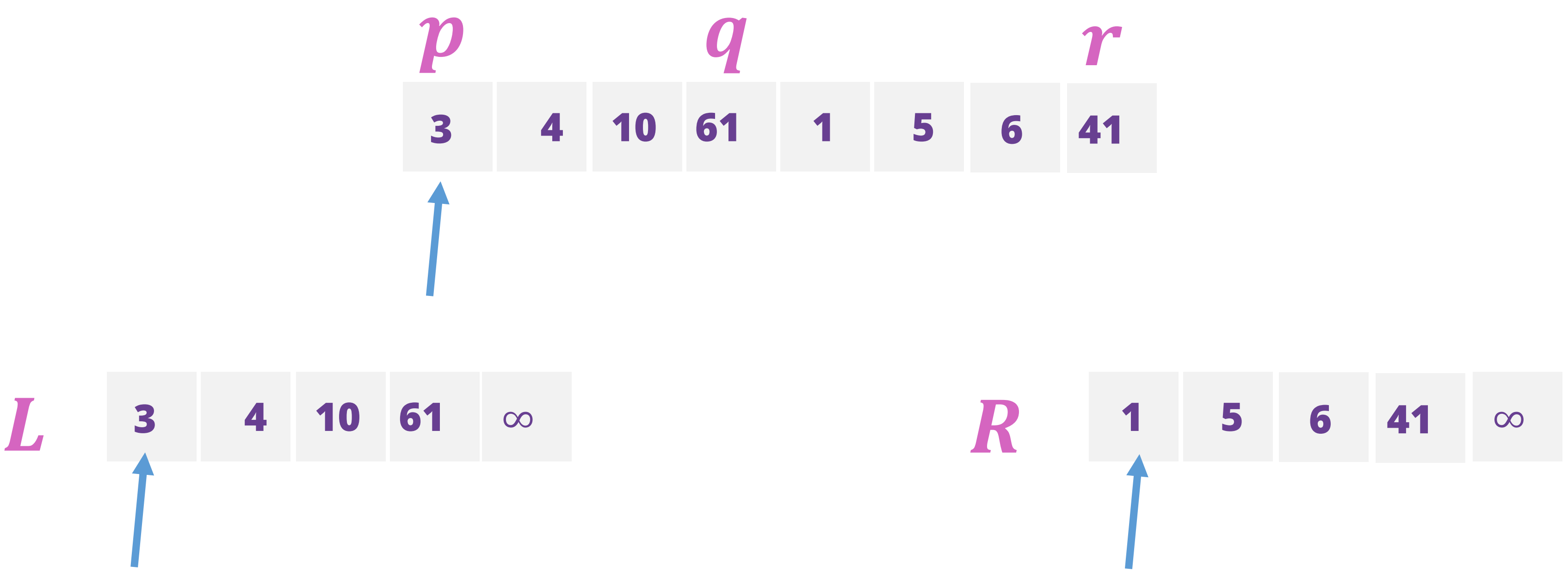
מיזוג



מיזוג



מיזוג - זמן ריצה



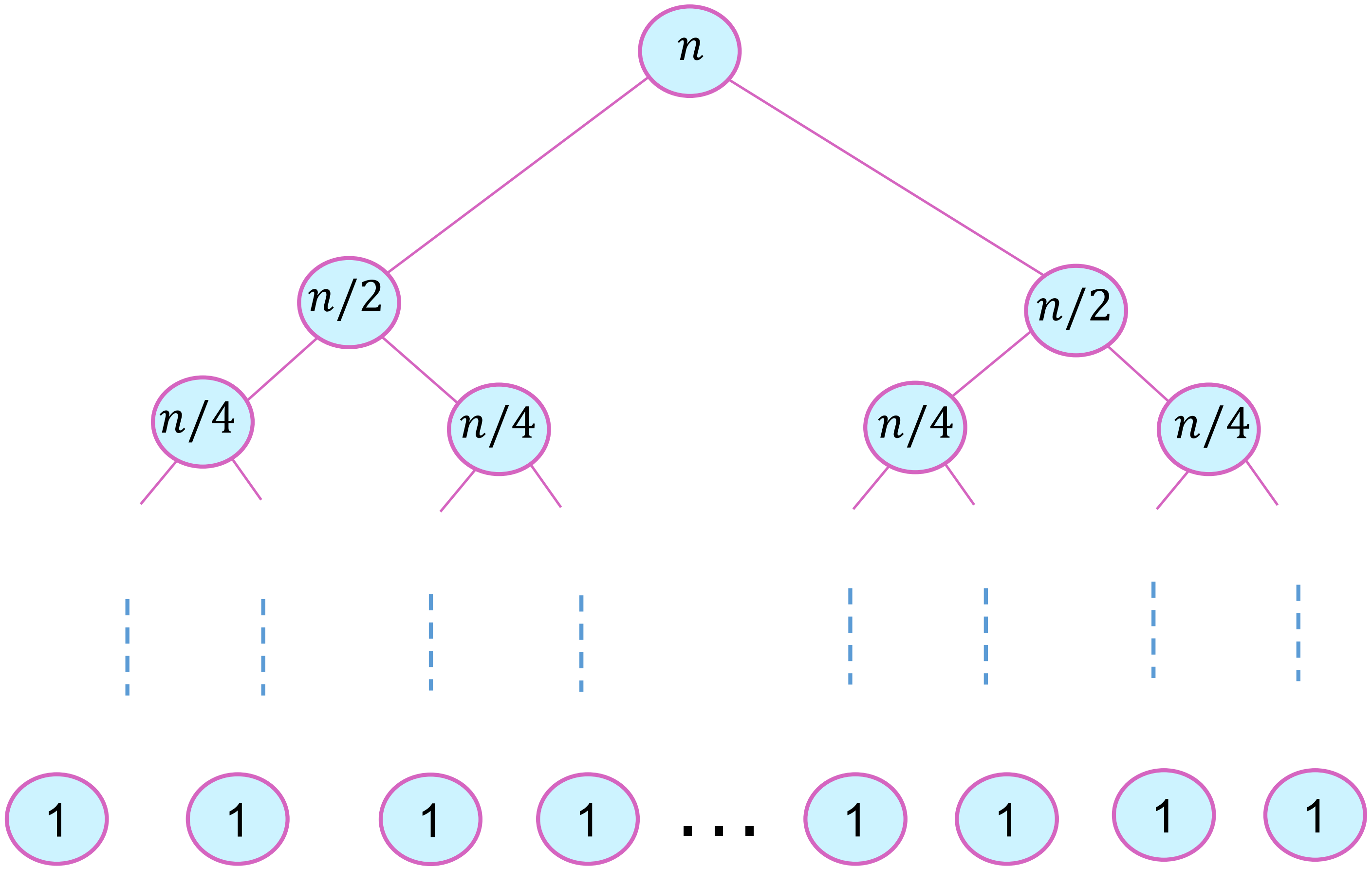
$$T(n) = an$$

n - מספר האיברים שממזגים

a - קבוע

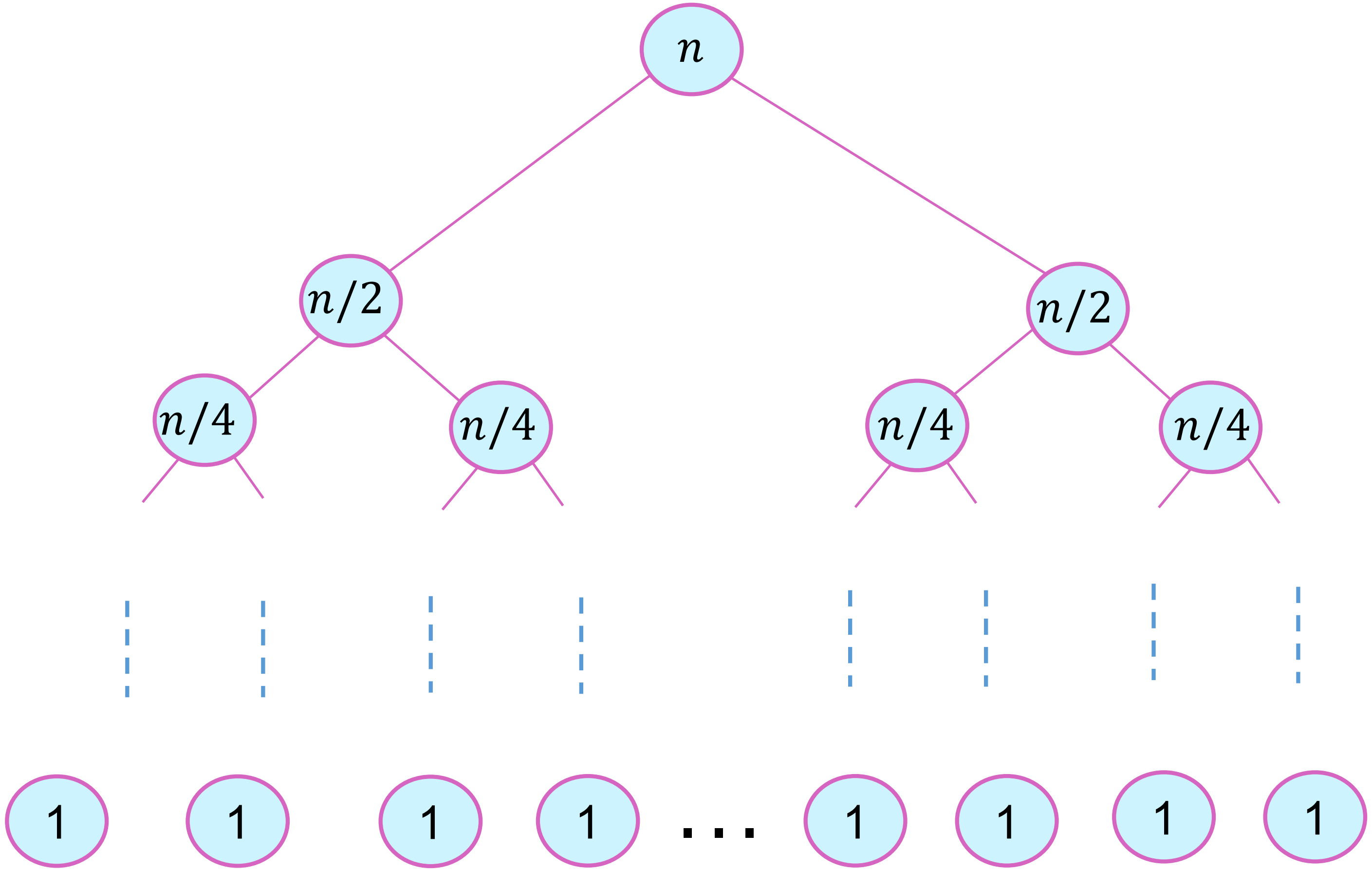
מיון מיזוג – זמן ריצה

רמה	מספר תת בעיות
0	1
1	2
2	4



שאלה:

- כמה רמות יש בעץ הרקורסיה (כפונקציה של n, גודל המערך)?

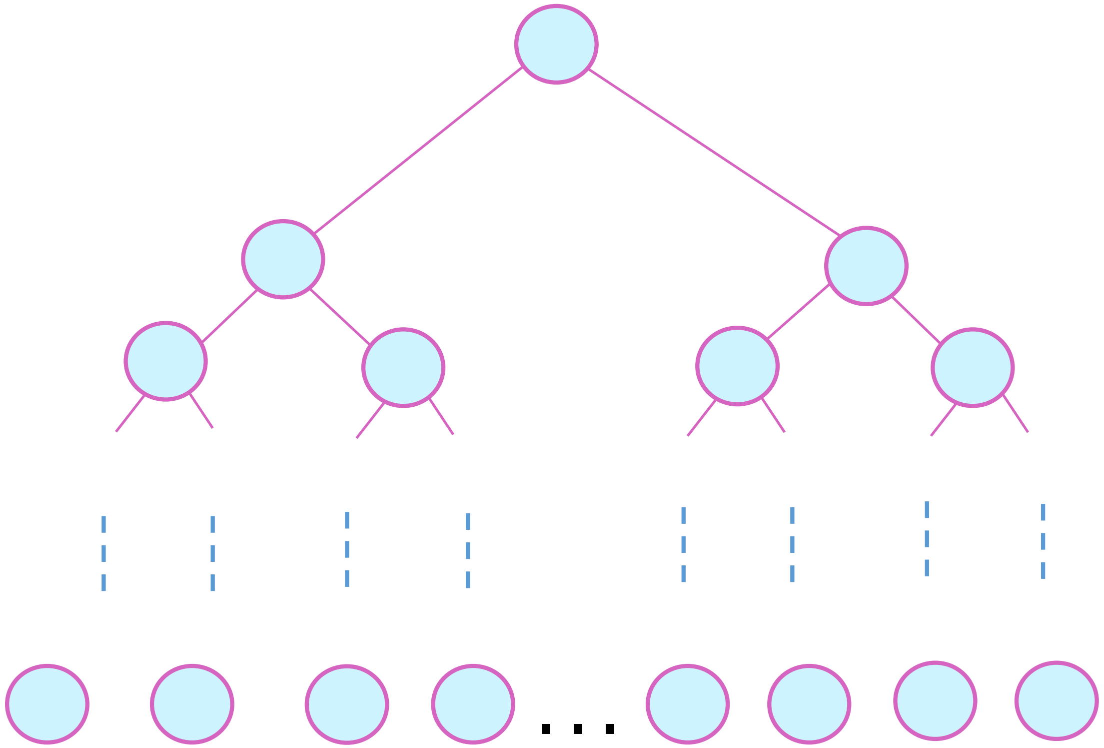


1. $n/2$
2. מספר קבוע
3. n
4. $\log n$

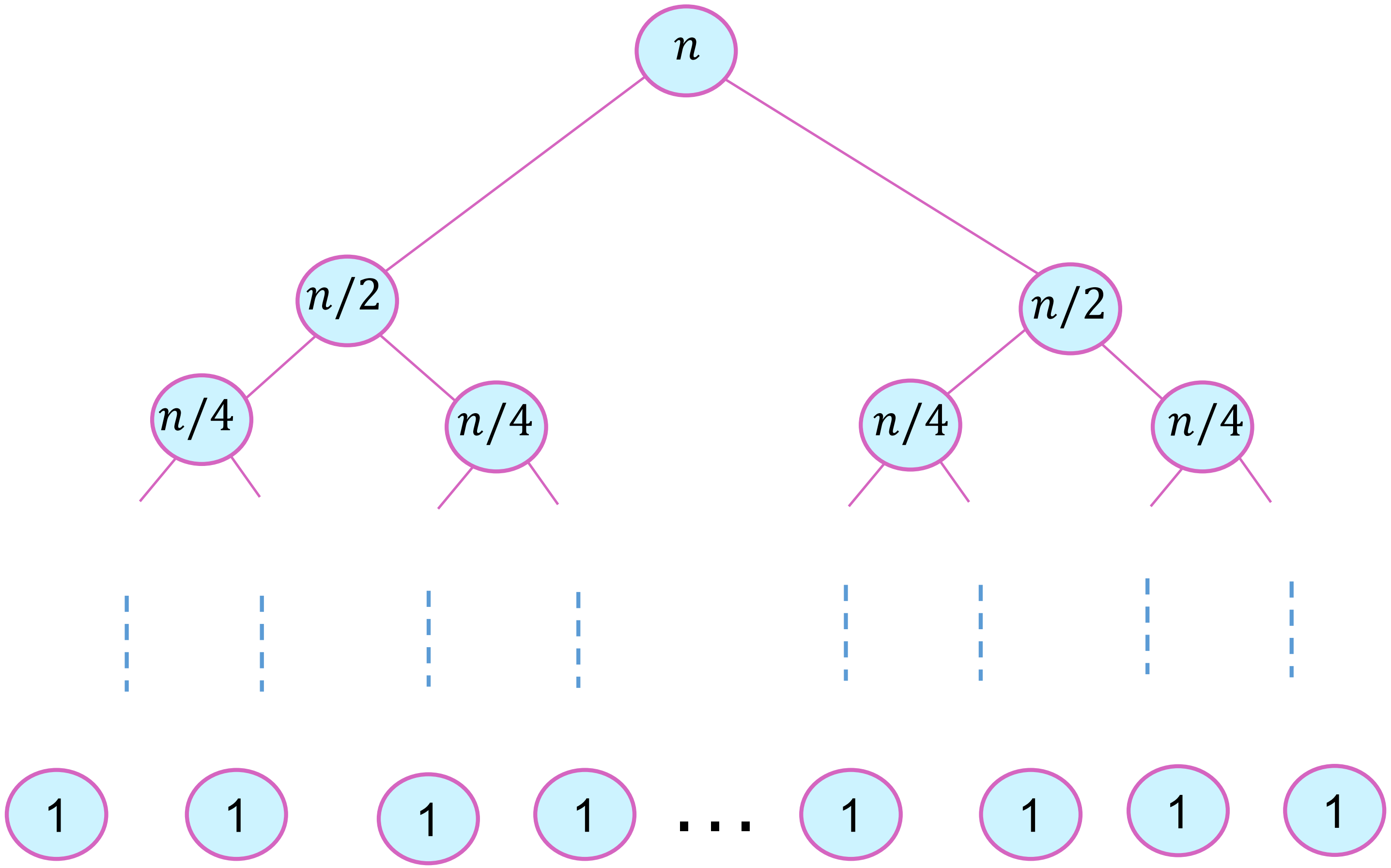
שאלה

- השלימו במקומות הריקים. ברמה i יש _____ תת בעיות, כל אחת בגודל _____ .

1. 2^i תת בעיות , כל אחת בגודל i
2. $\frac{n}{2^i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל 2^i
3. 2^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{2^i}$
4. $\frac{n}{i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{2^i}$



מיון מיזוג – זמן ריצה



רמה	עלות
0	an
1	$2 \cdot \left(a\frac{n}{2}\right)$
2	$4 \cdot \left(a\frac{n}{4}\right)$
i	$2^i \cdot \left(a\frac{n}{2^i}\right)$

מיון מיזוג – זמן ריצה

- עלות העבודה בכל רמה היא an
- יש $\log n$ רמות בעץ
- זמן ריצה הכולל של מיון מיזוג הוא $T(n) = an \cdot \log n = O(n \log n)$

נוסחת נסיגה

- זמן ריצה של אלגוריתם רקורסיבי ניתן לתאר באמצעות **נוסחה נסיגה (recurrence equation)**
- **נוסחת נסיגה** היא נוסחה שמגדירה פונקציה באופן רקורסיבי, דהיינו באמצעות הערכים שפונקציה מקבלת על קלטים קטנים יותר.
- דוגמה: סדרת מספרי פיבונצ'י

$$\mathbf{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots}$$

$$\boldsymbol{F(n) = F(n-1) + F(n-2)\,, n \geq 2}$$

נוסחת נסיגה

כל נוסחת נסיגה כוללת שני חלקים:

1. תנאי/יי ההתחלה הקובעים את הערכים של פונקציה על קלטים התחלתיים
2. נוסחה המגדירה את הפונקציה באופן רקורסיבי

תנאיי ההתחלה

$$\boldsymbol{F(0) = 0}$$
$$\boldsymbol{F(1) = 1}$$

נוסחה

$$\boldsymbol{F(n) = F(n-1) + F(n-2)\,,\, n \geq 2}$$

מהו הקשר בין מספרי פיבונצ'י לארנבים?

- זוג ארנבים ממליט כל חודש זוג ארנבים חדש. כל זוג ארנבים חדש מחכה חודש עד לתחילת ההמלטות. אם מכניסים לגן סגור זוג חדש של ארנבים, כמה זוגות של ארנבים יהיו בסוף השנה?

חודש

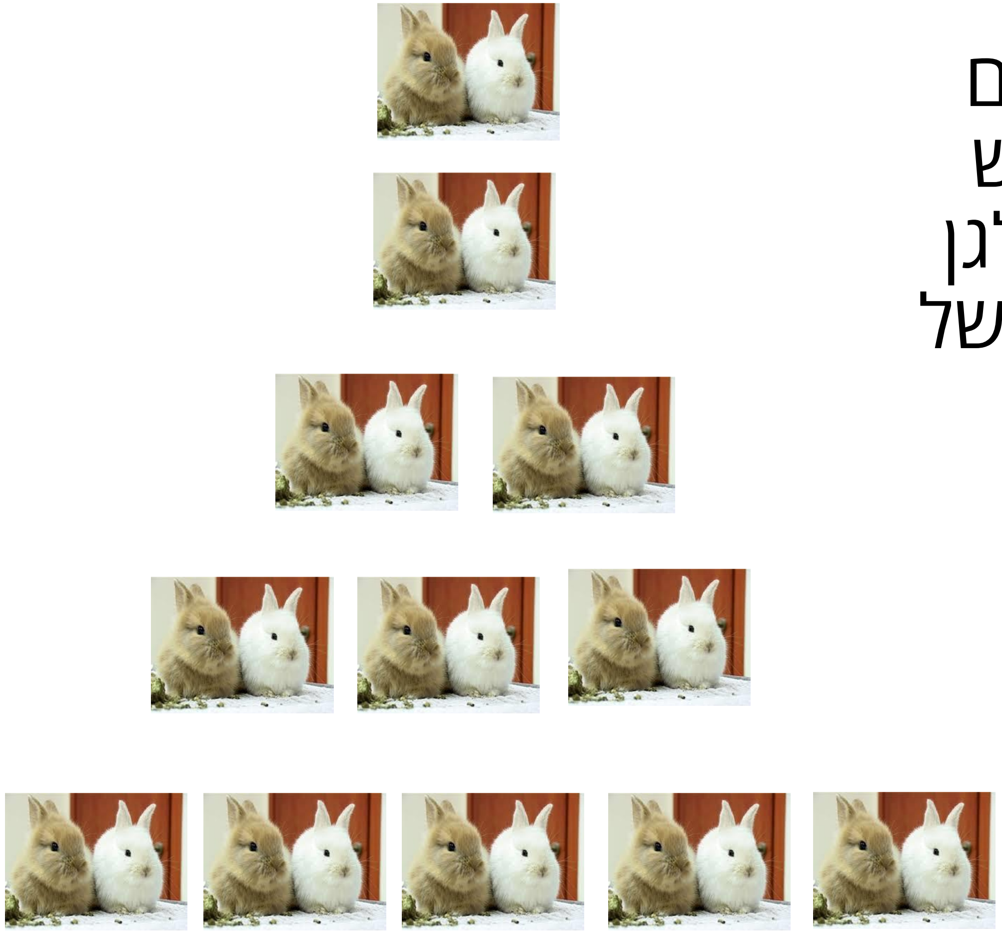
1

2

3

4

5



...

מיון מיזוג

Merge-Sort$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$

1. if $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{r}$
2. $\boldsymbol{q} \leftarrow \left\lfloor \frac{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{2}} \right\rfloor$
3. Merge-Sort $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ $\boldsymbol{T(n/2)}$
4. Merge-Sort $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{q}+\boldsymbol{1}, \boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{T(n/2)}$
5. Merge$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{an}$

$T(n)$ זמן ריצה של מיון מיזוג על מערך הקלט בגודל n

מיון מיזוג

Merge-Sort(A, p, r)

1. if $p < r$
2. $\quad q \leftarrow \left\lfloor \frac{(p+r)}{2} \right\rfloor$
3. $\quad$ Merge-Sort (A, p, q)
4. $\quad$ Merge-Sort $(A, q+1, r)$
5. $\quad$ Merge(A, p, q, r)

$$T(n) = \Theta(1), n = 0 \ or \ n = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, n \geq 2$$

פתרון נוסחאות נסיגה

$$\boldsymbol{T(n) = \Theta(1), n = 0 \; or \; n = 1}$$

$$\boldsymbol{T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, n \geq 2}$$

מהו סדר גודל של הפונקציה $T(n)$?

כיצד נמצא את הנוסחה המפורשת ?

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה (Iteration Method)
- שיטת עץ הרקורסיה (Recursion Tree Method) - **אופציונאלי**
- שיטת ההצבה (Substitution Method)
- שיטת האב/מאסטר (Master Method)

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה
- שיטת עץ הרקורסיה
- שיטת ההצבה
- שיטת האב/מאסטר

שיטת האיטרציה

הרעיון

- להציב שוב ושוב את הנוסחה בעצמה
עד אשר מגיעים אל תנאי ההתחלה
- לחסום את הסכום שהתקבל באמצעות שיטות
למציאת חסמים של סכומים

דוגמה 1

הפתרון

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1$$

$$T(n) = T(n-1) + n =$$
$$= T(n-2) + (n-1) + n$$
$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$$

Type equation here.

שאלה

איך תראה הנוסחה אחרי i צעדים של הצבה חוזרת?

$$T(n) = T(n-1) + n =$$

$$= T(n-2) + (n-1) + n$$

$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$$

= [אחרי i צעדים] =

1. $T(i) + \sum_{k=1}^{i} k$
2. $T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k$
3. $T(n-i) + \sum_{k=1}^{i} k$
4. $T(i) + \sum_{k=1}^{n-(i-1)} k$

דוגמה 1

אחרי כמה צעדים נעצור?

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1$$

הפתרון

$$T(n) = T(n-1) + n =$$
$$= T(n-2) + (n-1) + n$$
$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$$
$$= [\text{אחרי } i \text{ צעדים}] = T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k$$

שאלה

אחרי כמה צעדים התהליך יעצור?

$$T(n) = T(n-1) + n =$$
$$= T(n-2) + (n-1) + n$$
$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$$
$$= [\text{אחרי } i \text{ צעדים}] = T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k$$

1. התהליך הינו אינסופי, לא יעצור לעולם
2. התהליך יעצור אחרי מספר קבוע של צעדים (לא תלוי ב-n)
3. התהליך יעצור אחרי $n-1$ צעדים
4. התהליך יעצור אחרי $\log n$ צעדים

דוגמה 1

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + n, \quad n > 1$$

נעצור כאשר נגיע ל-$T(1)$,
כלומר $i = n - 1$

הפתרון

$$T(n) = T(n-1) + n =$$
$$= T(n-2) + (n-1) + n$$
$$= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n =$$
$$= [\text{אחרי } i \text{ צעדים}] = T(n-i) + \sum_{k=n-(i-1)}^{n} k$$
$$= T(1) + \sum_{k=2}^{n} k = \Theta(n^2)$$

דוגמה 2

הפתרון

$T(1) = b,$ $b > 0$ קבוע

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an, \quad n > 1$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an =$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{an}{2}\right] + an = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2an =$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{an}{2^2}\right] + 2an = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3an =$$ [אחרי i צעדים] =

$$= 2^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + ian =$$

דוגמה 2

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + an =$$

$$= 2\left[2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{an}{2}\right] + an = 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2an =$$

$$= 2^2\left[2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{an}{2^2}\right] + an = 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 3an =$$ [אחרי i צעדים] =

$$= 2^i\, T\left(\frac{n}{2^i}\right) + ian =$$

$$= 2^{\log n}\, T(1) + \log n \cdot an =$$

$$= n \cdot b + an \cdot \log n = \Theta(n\log n)$$

נעצור כאשר נגיע ל-$T(1)$,
כלומר $i = \log n$

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה
- שיטת עץ הרקורסיה
- שיטת ההצבה
- שיטת האב/מאסטר

שיטת עץ הרקורסיה

- השתמשנו בשיטה זו בניתוח זמן ריצה של מיון מיזוג
- המחשה של פיתוח איטרטיבי באמצעות הצבה חוזרת
- שימוש בעץ הרקורסיה יכול לעזור לנהל את החישובים בצורה יעילה

הרעיון

- מציירים עץ של קריאות רקורסיביות
- מחשבים את כמות העבודה בכל רמה של העץ
- מחשבים את כמות העבודה הכוללת בעץ

דוגמה 1

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 1$$

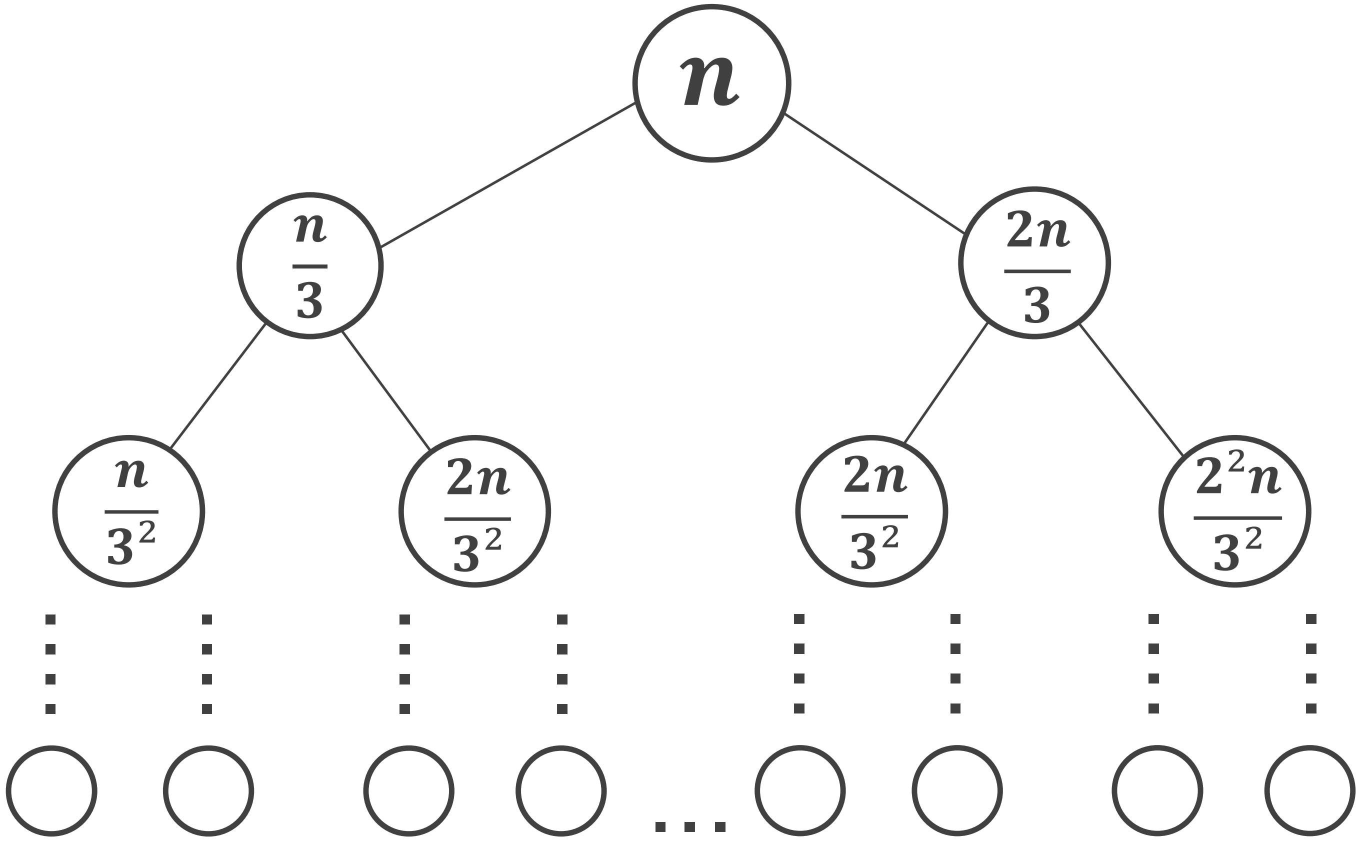
n

רמה

עלות

דוגמה 1

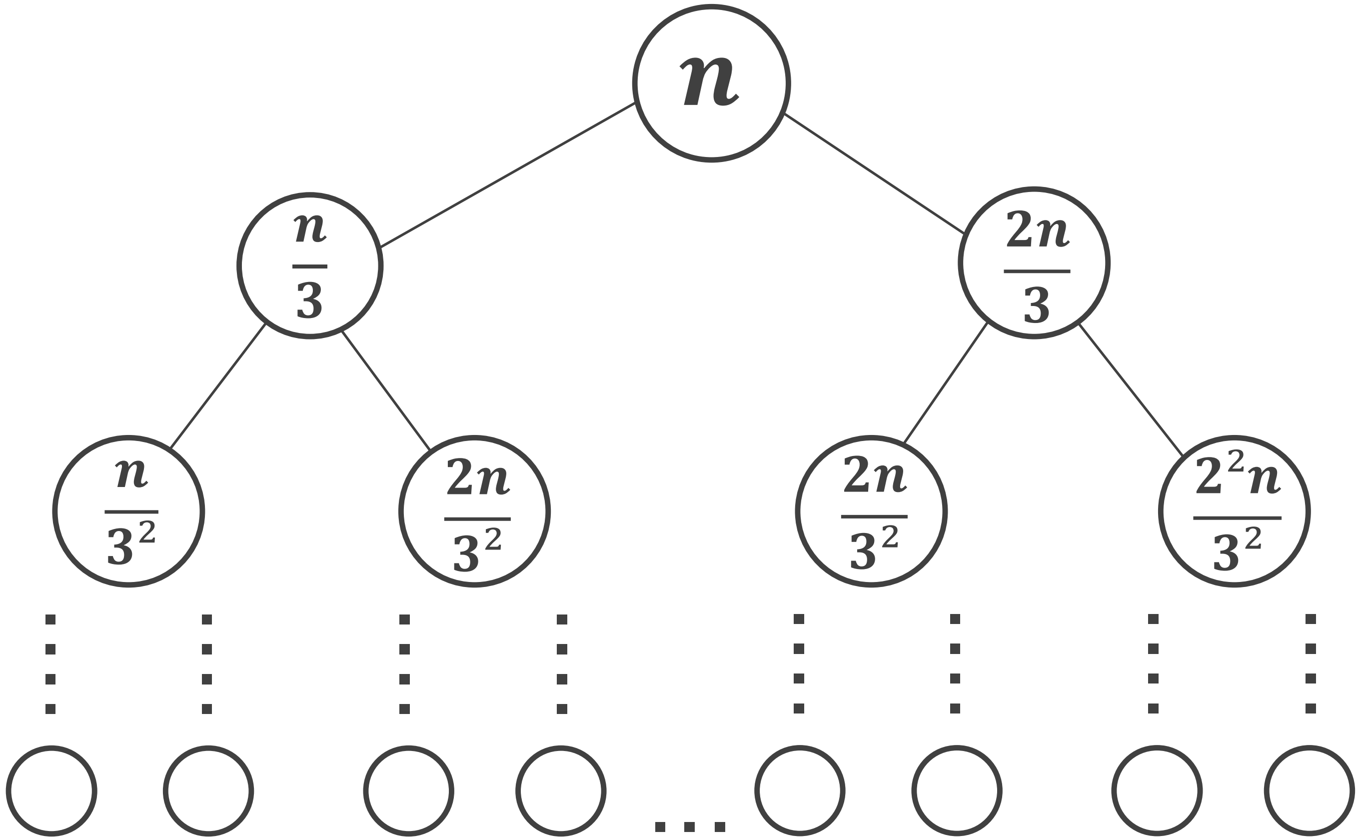
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 1$$



רמה	עלות
0	n
1	n
2	n

שאלה

כמה רמות יש בעץ הרקורסיה (כפונקציה של n)?

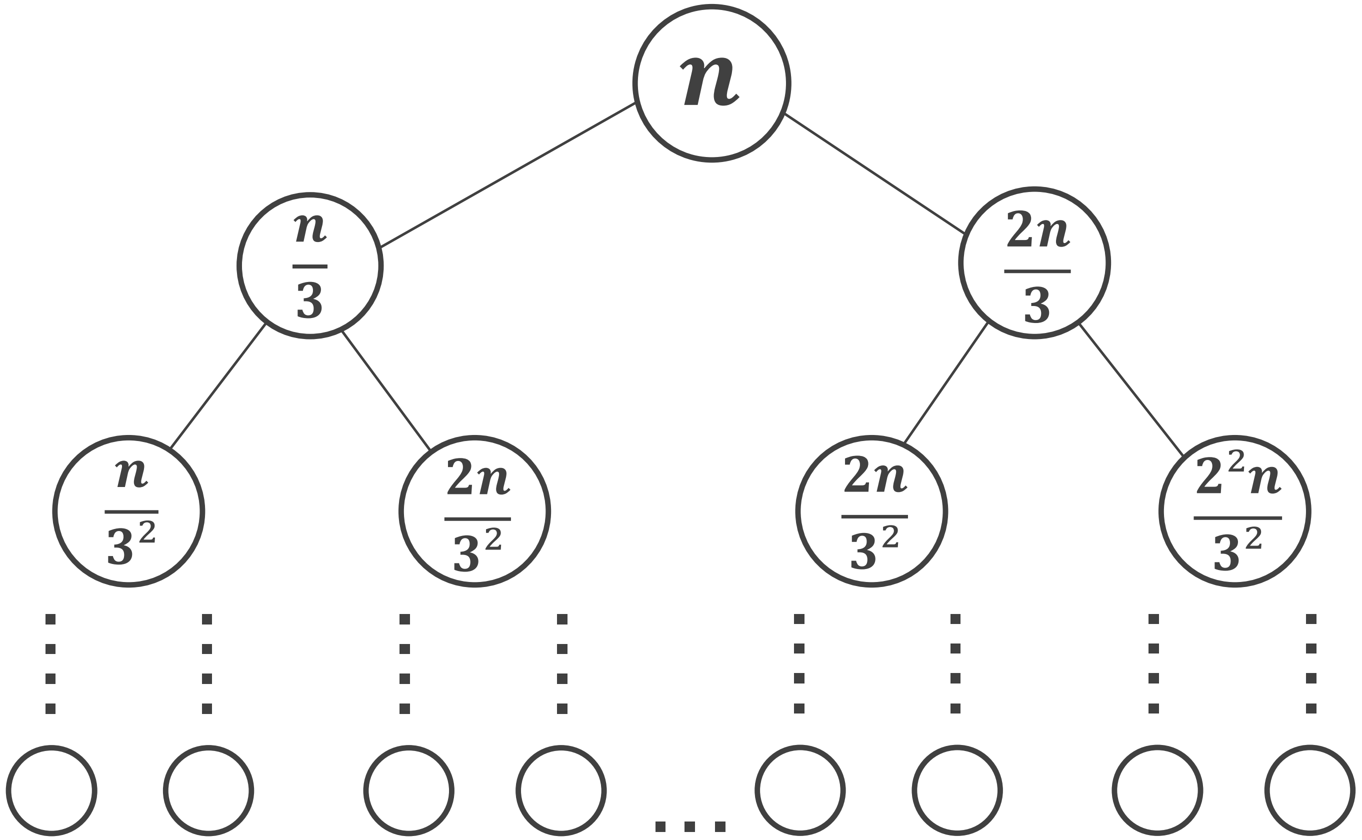


1. $\log_3 n$
2. n
3. $\log_{\frac{3}{2}} n$
4. $\frac{2n}{3}$

דוגמה 1

$T(1) = 1$

$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \;\; n > 1$



רמה	עלות
0	n
1	n
2	n
i	n

דוגמה 1

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 1$$

- יש $\log_{\frac{3}{2}} n$ רמות בעץ
- כמות העבודה הכוללת בכל רמה היא לכל היותר n
- הפתרון לנוסחת הנסיגה הוא $T(n) = n\log_{\frac{3}{2}} n = O(n \log n)$

דוגמה 2

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + an, \quad n > 1, a = const$$

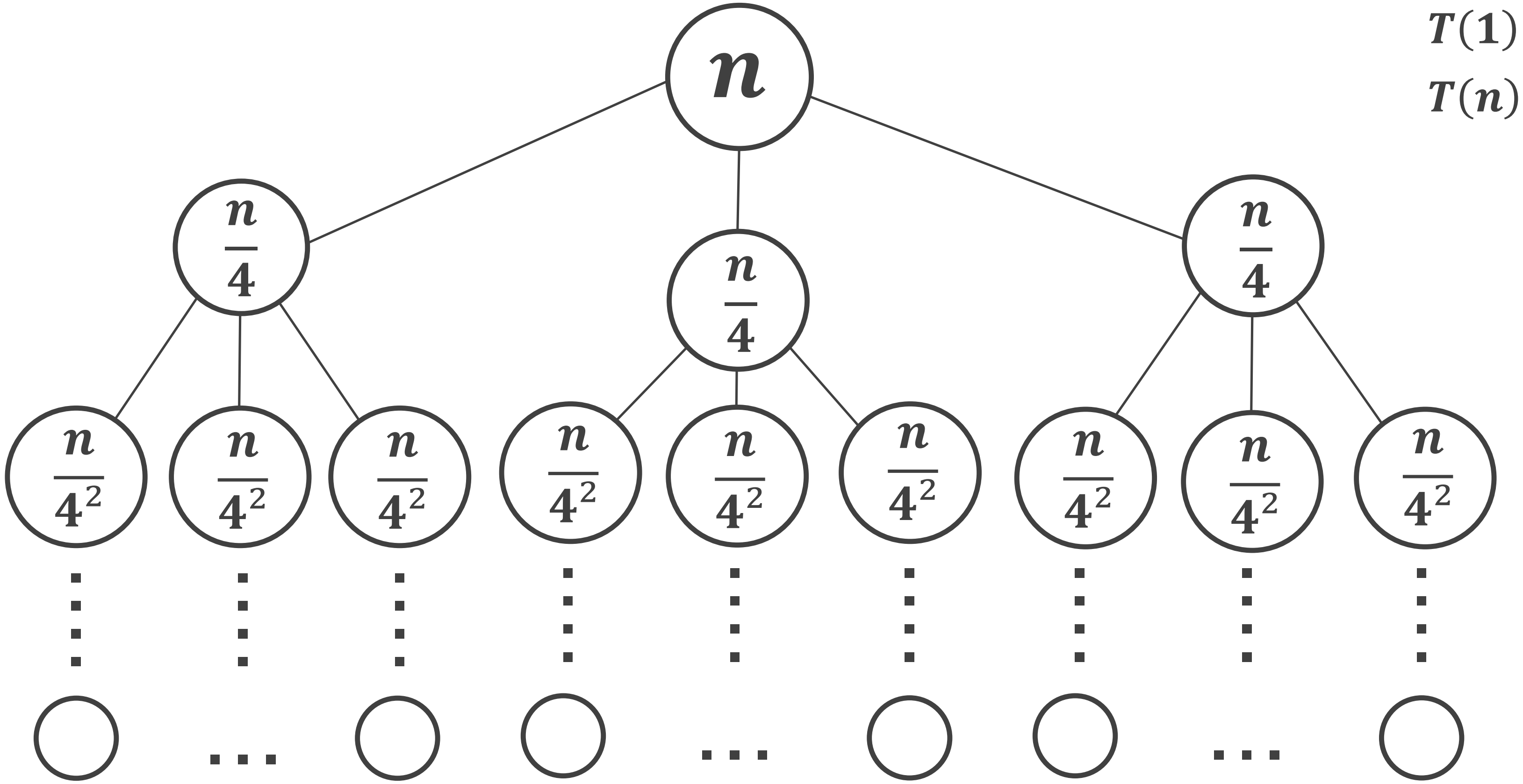
n

רמה | עלות העבודה

דוגמה 1

$T(1) = 1$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + an, \quad n > 1, a = const$

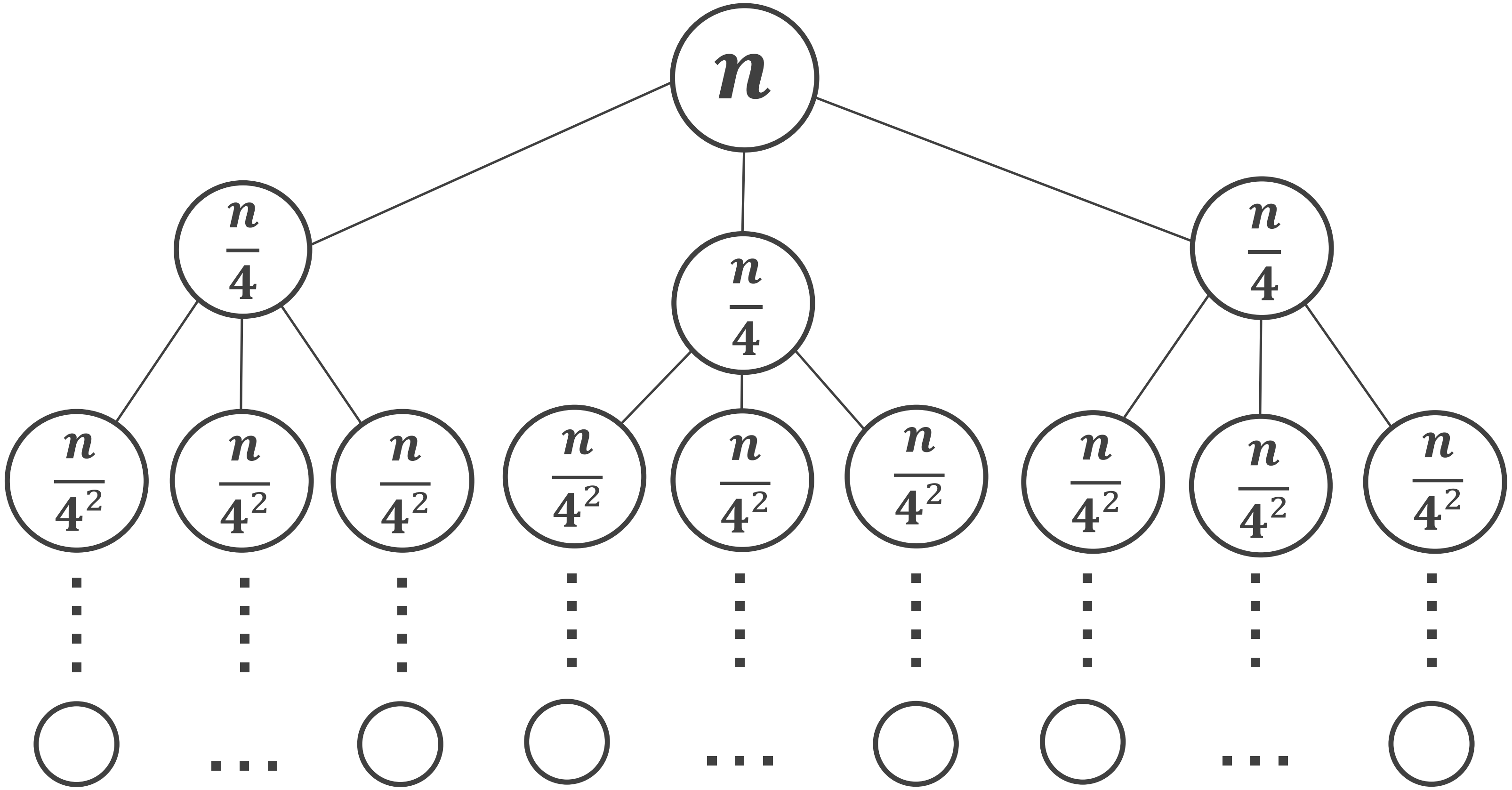


רמה	עלות העבודה
0	an
1	$\frac{3an}{4}$
2	$\frac{3^2an}{4^2}$

השלימו

$T(1) = 1$
$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + an$

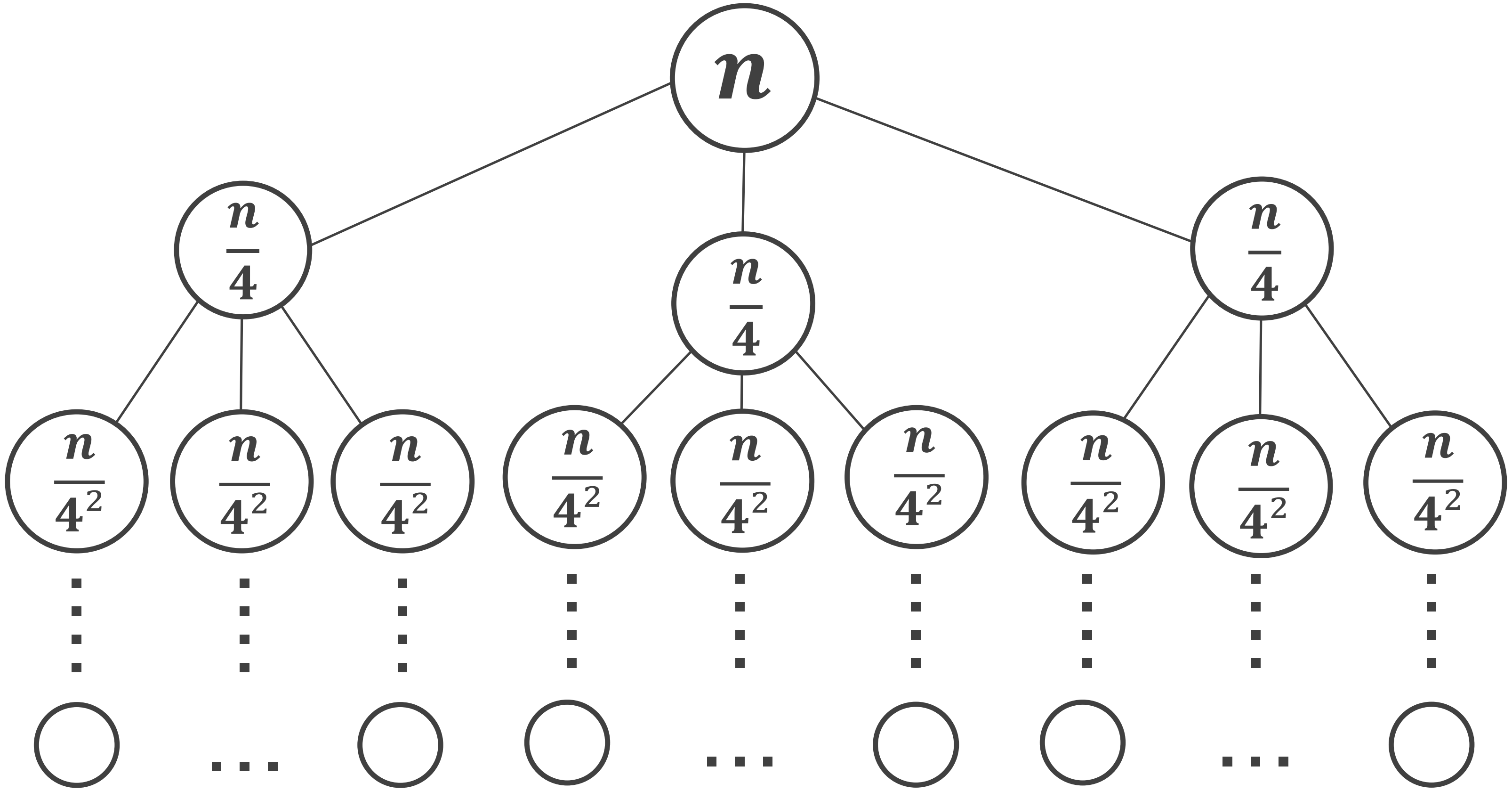
כמות העבודה הכוללת ברמה i היא: ____________________



1. $\log_4 n$
2. $\frac{3^i an}{4^i}$
3. n

דוגמה 2

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + an, \quad n > 1, a = const$$



רמה	עלות העבודה
0	an
1	$\frac{3an}{4}$
2	$\frac{3^2an}{4^2}$
i	$\frac{3^ian}{4^i}$

דוגמה 2

$T(1) = 1$

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + an, \quad n > 1, a = const$

רמה	עלות העבודה
0	an
1	$\frac{3an}{4}$
2	$\frac{3^2 an}{4^2}$
i	$\frac{3^i an}{4^i}$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3^i an}{4^i}\right) =$$

$$= an \sum_{i=0}^{\log_4 n} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

$$\leq an \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i =$$

$$= O(n)$$

סכום סדרה הנדסית
אינסופית יורדת

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה
- שיטת עץ הרקורסיה
- שיטת ההצבה
- שיטת האב/מאסטר

שיטת ההצבה
Substitution method

- בשיטה זו מנחשים את הפתרון של המשוואה הרקורסיבית, ומוכיחים אותו (לרוב באינדוקציה)
- בהוכחה באינדוקציה, מוצאים את הקבועים של זמן הריצה

דוגמה 1: מיון מיזוג

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad n > 1$$

ניחוש: $T(n) = \Theta(n \log n)$

- **נוכיח בנפרד את החסם העליון (O) ואת החסם התחתון (Ω)**
  - נוכיח באינדוקציה ש- $T(n) \leq c\, n \log n$ עבור קבוע c חיובי
  - נוכיח באינדוקציה ש- $T(n) \geq d\, n \log n$ עבור קבוע d חיובי

דוגמה 1: מיון מיזוג

חסם עליון: $T(n) \leq c\, n \log n$

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad n > 1$$

הוכחה

- בסיס: $n = 1$
  - לפי הנוסחה $T(1) = 1$. האם $T(1) \leq c \cdot 1 \cdot \log 1$?
- $n = 2$

$T(2) = 2T(1) + 2 = 4 \leq c \cdot 2 \cdot \log 2 = 2c$. מתקיים עבור $c \geq 2$.

- הנחה: נניח שהחסם נכון לכל $2 \leq m < n$, כלומר נניח ש- $T(m) \leq c\, m \log m$
- הוכחת האינדוקציה: נוכיח את החסם עבור $m = n$, כלומר נוכיח ש- $T(n) \leq c\, n \log n$

דוגמה 1: מיון מיזוג

חסם עליון: $T(n) \leq c\, n \log n$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad n > 1$$

הוכחה

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2\left(c \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}\right) + n = cn(\log n - \log 2) + n =$

$$= cn\log n - cn + n = cn\log n + n(1-c) \leq cn\log n\,, \quad c >= 1$$

מ.ש.ל

- הוכחנו ש- $T(n) = O(n \log n)$

דוגמה 1: מיון מיזוג
חסם תחתון: $T(n) \geq d\, n \log n$

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad n > 1$$

הוכחה

- בסיס: $n = 2$

$T(2) = 2T(1) + 2 = 4 \geq d \cdot 2 \cdot \log 2 = 2d$. מתקיים עבור $0 < d \leq 2$.

- הנחה: נניח שהחסם נכון לכל $2 \leq m < n$, כלומר נניח ש- $T(m) \geq d\, m \log m$
- הוכחת האינדוקציה: נוכיח את החסם עבור $m = n$, כלומר נוכיח ש- $T(n) \geq d\, n \log n$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \geq 2\left(d \cdot \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2}\right) + n = dn(\log n - \log 2) + n =$$
$$= dn\log n - dn + n = dn\log n + n(1-d) \geq dn\log n, \quad 0 < d \leq 1$$

הוכחנו ש- $T(n) = \Omega(n \log n)$

מ.ש.ל

דוגמה 1: מיון מיזוג

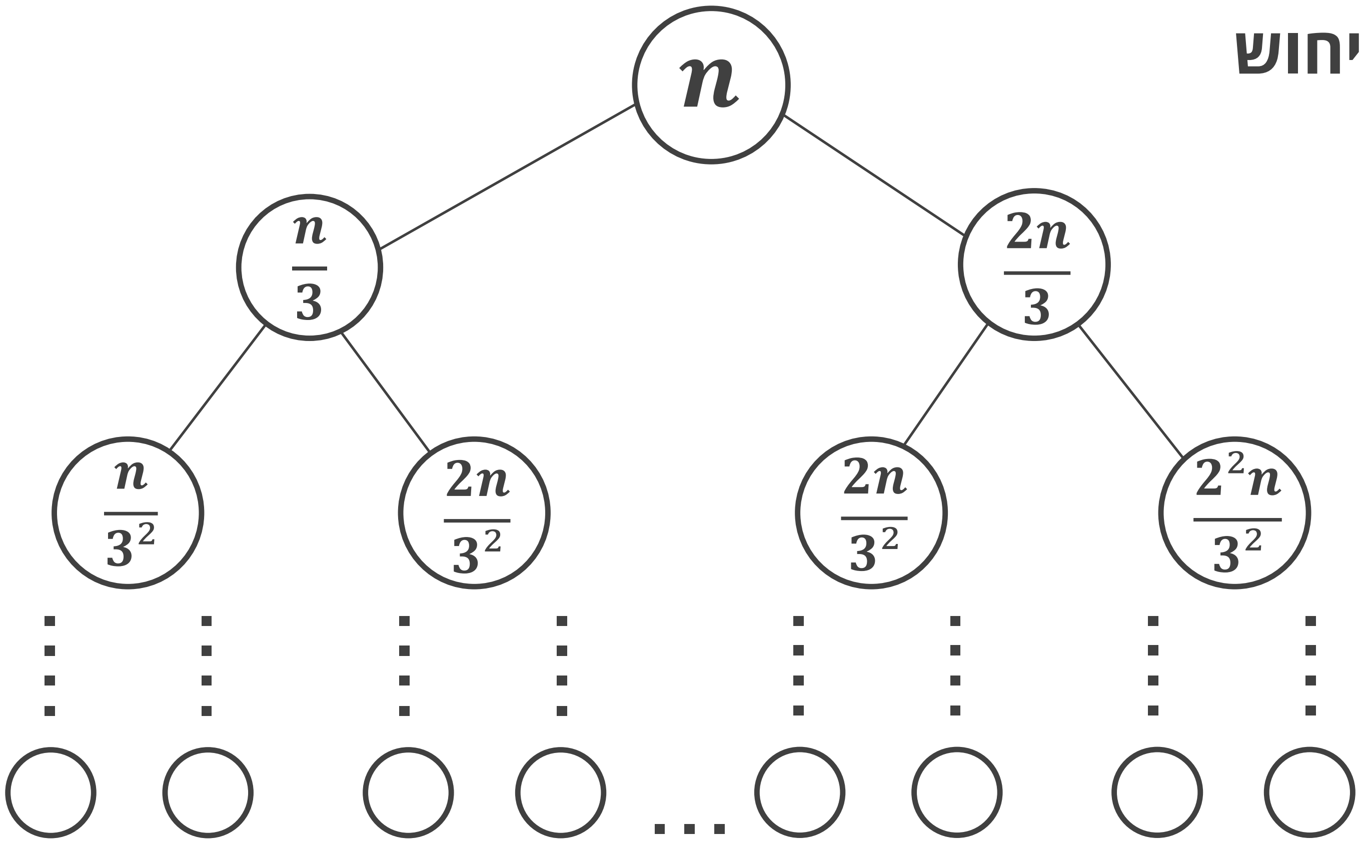
$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n, \quad n > 1$$

- הוכחנו ש- $T(n) = O(n\log n)$ וגם $T(n) = \Omega(n\log n)$
- לכן, $T(n) = \Theta(n\log n)$

דוגמה 2

$$T(1) = T(2) = T(3) = 1$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 3$$

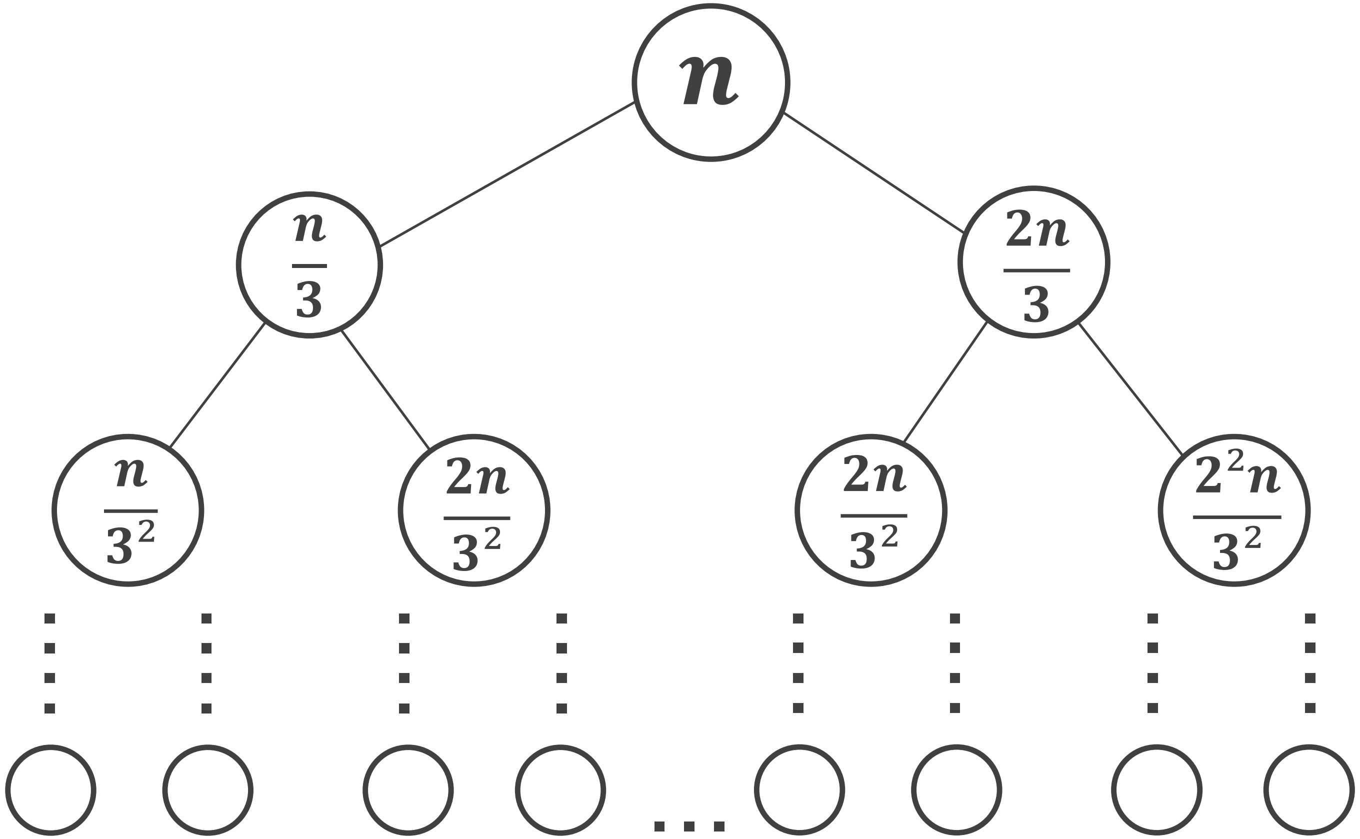
- ניעזר בעץ הרקורסיה כדי לקבל ניחוש



עלות	רמה
n	0
n	1
n	2

דוגמה 2

$$T(1) = T(2) = T(3) = 1$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 3$$



- יש $\log_{\frac{3}{2}} n$ רמות בעץ הרקורסיה
- מהן $\log_3 n$ רמות מלאות
- עלות העבודה בכל רמה $n \geq$
- ניחוש $T(n) = \Theta(n \log n)$

דוגמה 2:

חסם תחתון: $T(n) \geq d\, n \log n$

$$T(1) = T(2) = T(3) = 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 3$$

הוכחה

- בסיס:

$T(1) = 1 \geq d \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$. מתקיים עבור כל $d > 0$.

- הנחה: נניח שהטענה נכונה לכל $m < n$, כלומר נניח ש- $T(m) \geq d\, m \log m$
- הוכחת האינדוקציה: נוכיח את הטענה עבור $m = n$, כלומר נוכיח ש- $T(n) \geq d\, n \log n$

דוגמה 2:

חסם תחתון: $T(n) \geq dn\log n$

$$T(1) = T(2) = T(3) = 1$$
$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 3$$

הוכחה

- $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n \geq \left(d \cdot \frac{n}{3} \cdot \log\frac{n}{3}\right) + \left(d \cdot \frac{2n}{3} \cdot \log\frac{2n}{3}\right) + n$

$$= \left[\frac{dn}{3}\log n - \frac{dn}{3}\log 3\right] + \left[\frac{2dn}{3}\log n + \frac{2dn}{3}\log 2 - \frac{2dn}{3}\log 3\right] + n$$

$$= dn\log n - dn\log 3 + \frac{2dn}{3} + n = dn\log n + n\left(1 + \frac{2d}{3} - d\log 3\right)$$

$$\geq dn\log n, \qquad if \ \left(1 + \frac{2d}{3} - d\log 3\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \ d \leq \frac{1}{\log 3 - \frac{2}{3}}$$

מ.ש.ל

דוגמה 2:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n, \quad n > 3$$

- הראנו ש- $T(n) = O(n\log n)$ וגם $T(n) = \Omega(n\log n)$
- לכן, $T(n) = \Theta(n\log n)$

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

- שיטת האיטרציה
- שיטת עץ הרקורסיה
- שיטת ההצבה
- שיטת האב/מאסטר

שיטת המאסטר

- מתכון כללי לפתרון נוסחאות נסיגה מהצורה

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

$a \geq 1, b > 1$ קבועים

$f(n)$ **חיובית אסימפטוטית**

- **תנאי התחלה**

$n = const$ **עבור** $T(n) = const$

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ ✓

$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ ✓

$T(n) = T(n-1) + n$ ✗

$T(n) = nT(\frac{n}{2}) + n^2$ ✗

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-יד נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$**
2. **אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$**
3. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$**

משפט האב

$$f(n) \quad ? \quad n^{\log_b a}$$

משמעות	מקרה
$f(n) < n^{\log_b a}$	1. $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$
$f(n) \approx n^{\log_b a}$	2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$f(n) > n^{\log_b a}$	3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-יד נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-יד נוסחת הנסיגה

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$,
ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

דוגמה 1

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

שאלה

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

בנוסחה הנתונה מהם הערכים של a, b ו-$f(n)$?

1. $a = 2, \quad b = n, \quad f(n) = 4$
2. $a = 2, \quad b = 4, \quad f(n) = n$
3. $a = 4, \quad b = 2, \quad f(n) = n$

דוגמה 1

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

דוגמה 2

Merge Sort

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + dn$$

d קבוע

דוגמה 3

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{5}\right) + nlogn$$

דוגמה 4

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$$

משפט האב

- **יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-יד נוסחת הנסיגה:**

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{log_b a - \varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$**
2. **אם $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot \log n)$**
3. **אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$**

משפט האב

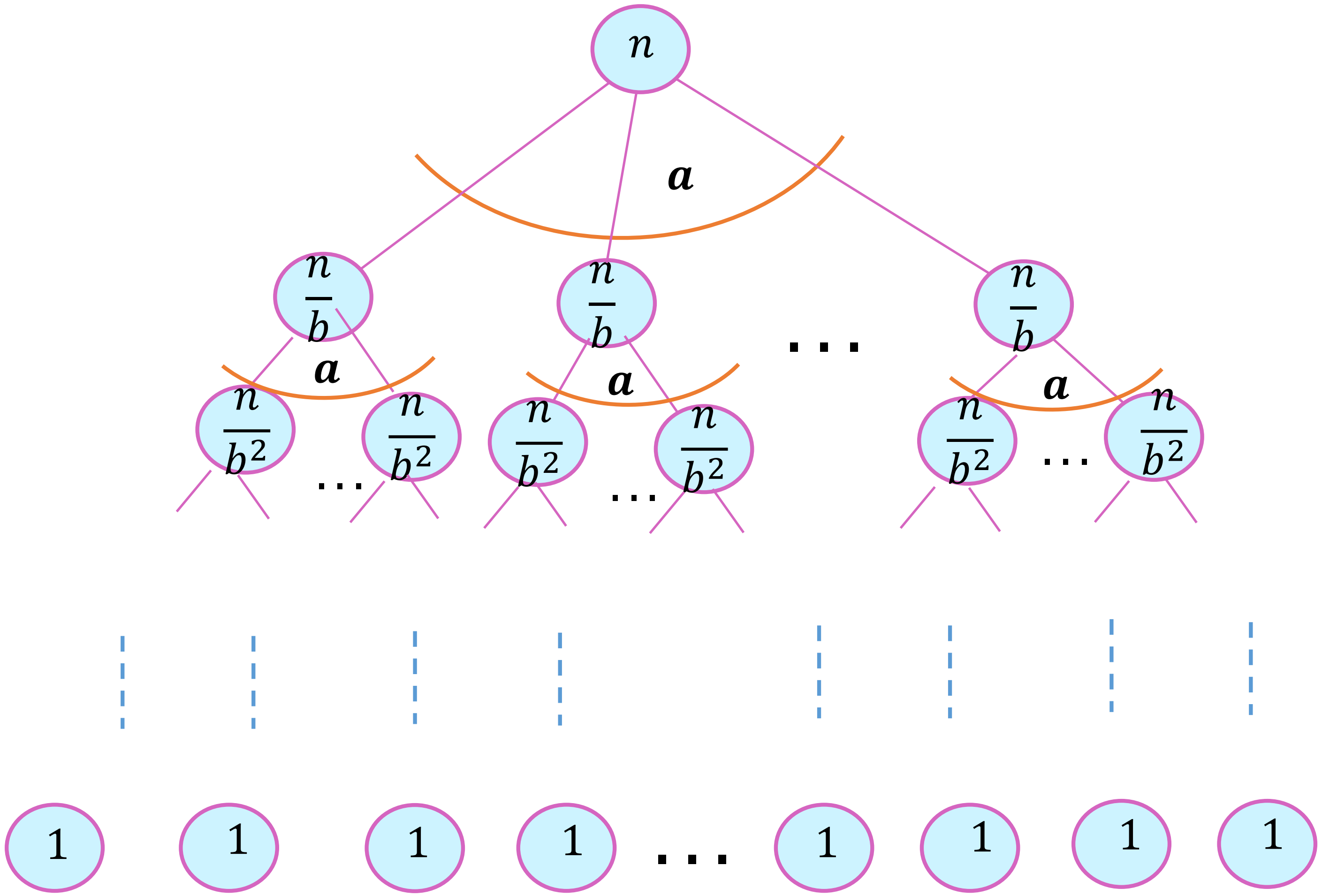
$$f(n) \quad ? \quad n^{\log_b a}$$

מקרה	משמעות
1. $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$	$f(n) < n^{\log_b a}$
2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	$f(n) \approx n^{\log_b a}$
3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$	$f(n) > n^{\log_b a}$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

עץ הרקורסיה

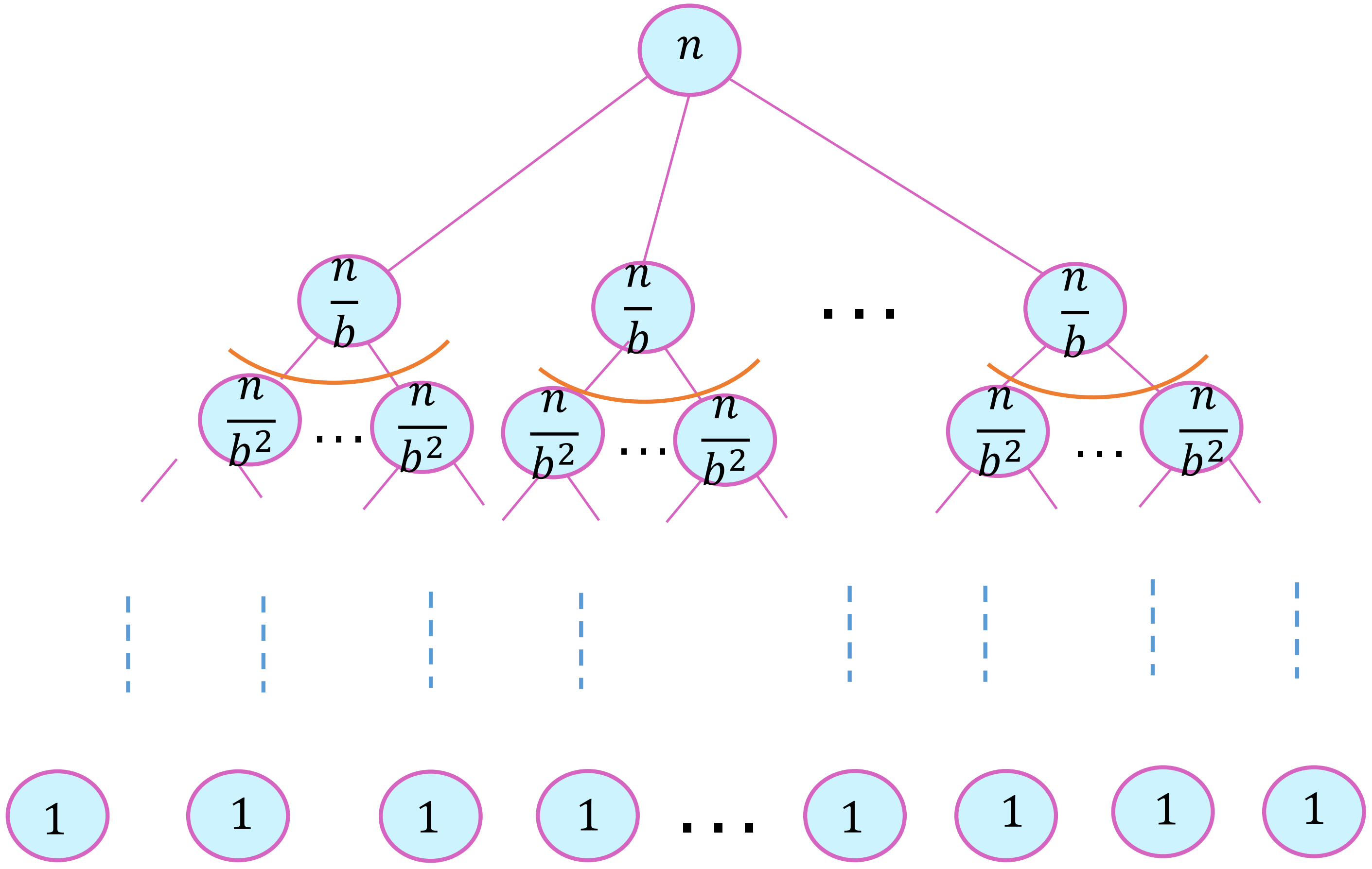
הנחה: $n = b^p$ **עבור** p **שלם**



רמה	מספר תת בעיות	עלות
0	1	$f(n)$
1	a	$af\left(\frac{n}{b}\right)$
2	a^2	$a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$

שאלה

- כמה רמות יש בעץ הרקורסיה (כפונקציה של n, גודל המערך)?

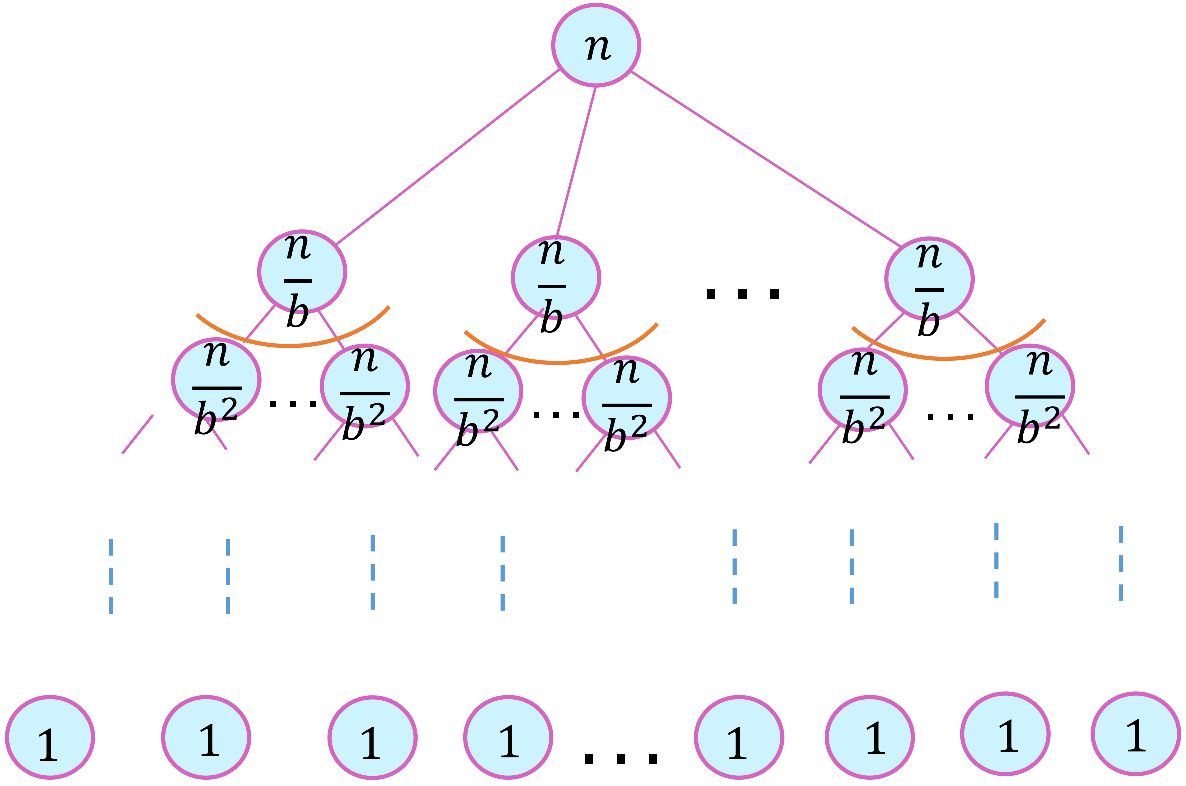


1. $\frac{n}{b}$
2. מספר קבוע
3. $\log_a n$
4. $\log_b n$
5. $\log_b a$

שאלה

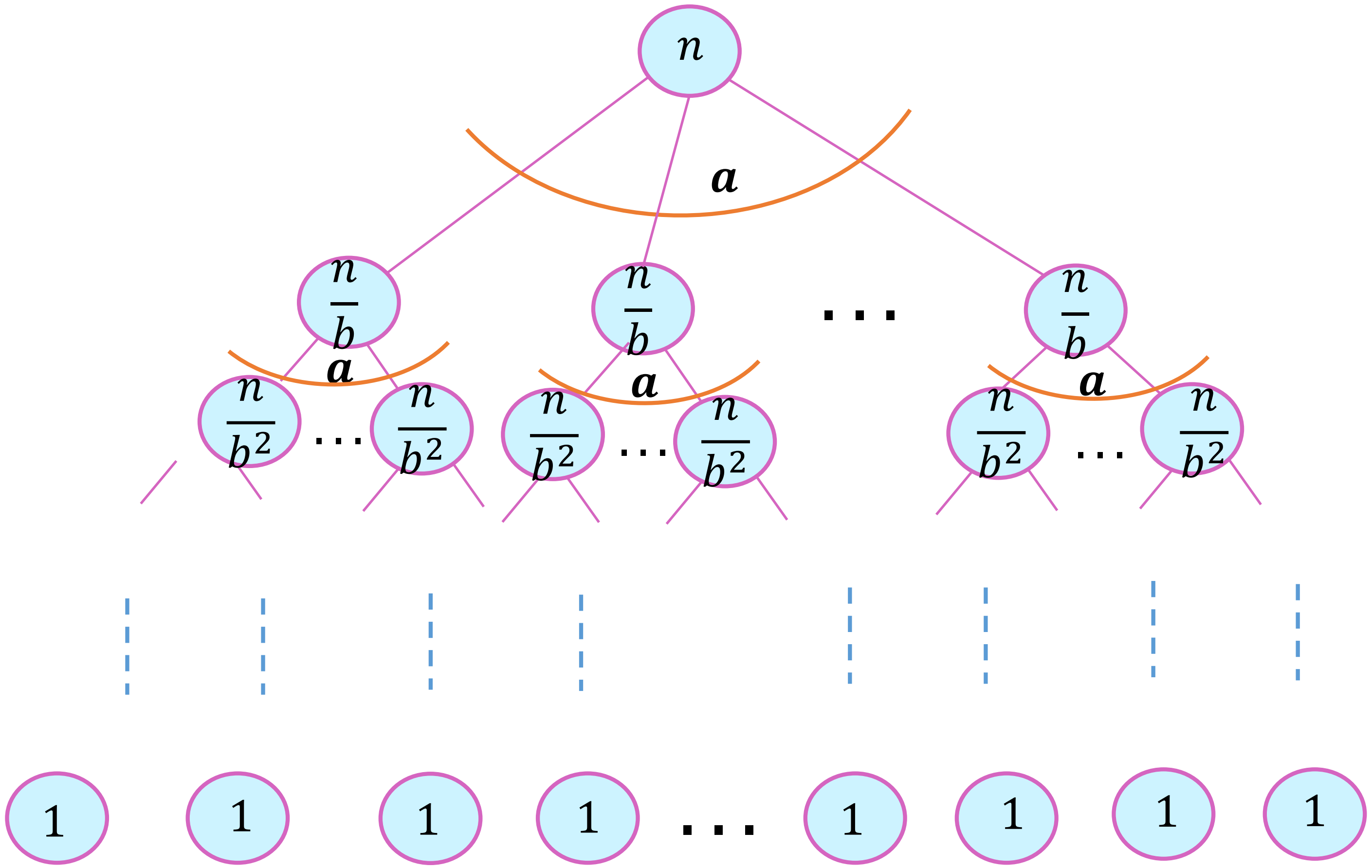
- **השלמו במקומות הריקים. ברמה i יש _____ תת בעיות, כל אחת בגודל _____ .**

1. **2^i תת בעיות , כל אחת בגודל i**
2. **$\frac{n}{b^i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל b^i**
3. **a^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{b^i}$**
4. **b^i תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{a^i}$**
5. **$\frac{n}{i}$ תת בעיות , כל אחת בגודל $\frac{n}{b^i}$**



עץ הרקורסיה

$$x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$$



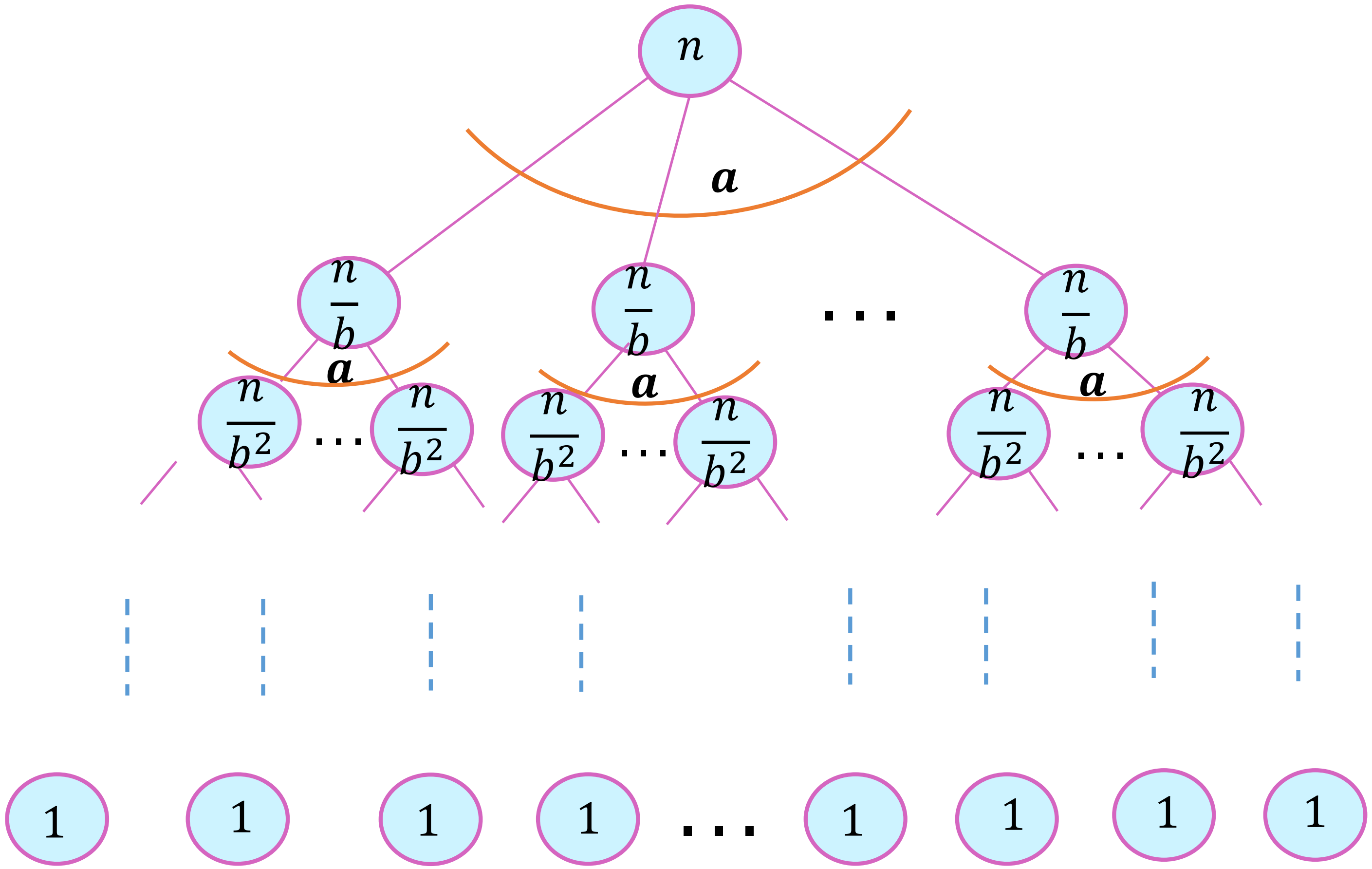
רמה	מספר תת בעיות	עלות
0	1	$f(n)$
1	a	$af\left(\frac{n}{b}\right)$
2	a^2	$a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$
	$\cdots$	
i	a^i	$a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)$
	$\cdots$	
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$a^{\log_b n} \cdot const$

שאלה

סמנו את כל הטענות הנכונות

1. **אם** $n^{\log_b a} > f(n)$**, עלות העבודה יורדת בירידה ברמה הרקורסיה**
2. **אם** $n^{\log_b a} < f(n)$**, עלות העבודה עולה בירידה ברמה הרקורסיה**
3. **אם** $f(n)$ **ו-** $n^{\log_b a}$ **שווים, עלות העבודה בכל אחת מהרמות זהה**
4. **לא ניתן להסיק מסקנה איך משתנה עלות העבודה בירידה מרמה לרמה**

עץ הרקורסיה



רמה	מספר תת בעיות	עלות
0	1	$f(n)$
1	a	$af\left(\frac{n}{b}\right)$
2	a^2	$a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right)$
	$\cdots$	
i	a^i	$a^if\left(\frac{n}{b^i}\right)$
	$\cdots$	
$\log_b n$	$a^{\log_b n}$ $\Vert$ $\boxed{n^{\log_b a}}$	$a^{\log_b n} \cdot const$

משפט האב

- יהיו $a \geq 1$ ו-$b > 1$ קבועים, תהי $f(n)$ פונקציה ותהי $T(n)$ פונקציה המוגדרת על שלמים האי-שליליים על-יד נוסחת הנסיגה:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = O(n^{log_b a - \varepsilon})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. אם $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, אזי $T(n) = \Theta(n^{log_b a} \cdot \log n)$
3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש- $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \varepsilon})$, ואם קיים קבוע $c < 1$ כך ש- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$, אזי $T(n) = \Theta(f(n))$

ניתוח זמני ריצה של אלגוריתמים

סיכום

השוואה בין מיון הכנסה ומיון מיזוג

מיון מערך בגודל n=1,000,000

אלגוריתם	זמן ריצה	סוג המחשב	מספר פעולות לשנייה	זמן ריצה בשניות
מיון הכנסה	$2n^2$	מחשב-על	100,000,000	$\frac{2\cdot(10^6)^2}{10^8} \approx 6\ hours$
מיון מיזוג	$50n\log n$	מחשב אישי	1,000,000	$\frac{50\cdot 10^6\cdot \log 10^6}{10^6}$ $\approx 17\ minutes$