シグモイド関数の微分

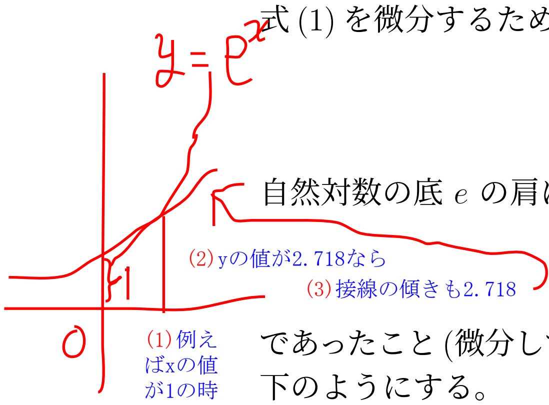
ロジスティック回帰に用いられるロジスティック関数，別名シグモイド関数は以下の式 1 で与えられます。

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \tag{1}$$

分子がfで分母がgだけど，分子は1なので微分すると0になるから無視。
分母の微分はxの前にマイナスが付いているので e の-x 乗をxで微分すると －e の-x乗となる。ところが（2）式分子の第2項の前に-が付いているのでマイナス×マイナスでマイナスが消える

式 (1) を微分するためには，商の微分の公式[1]

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'g - g'f}{(g)^2} \tag{2}$$



自然対数の底 e の肩に x が乗った指数関数の微分が

$$\frac{de^x}{d\,x} = e^x \tag{3}$$

であったこと (微分しても微分しても同じ形をしている) を思い出して，以下のようにする。

(4) 式は分母が2乗だから2回分の掛け算に分解すると (5) 式になる

(5) 式の第一因子はロジスティック関数そのものなのでf(x)と書き換える。第2因子には１を足して１を引くというトリックを使う。

$$\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, & (4)\\
&= \frac{1}{(1+e^{-x})} \times \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})}, & (5)\\
&= f(x) \times \frac{1+e^{-x}-1}{(1+e^{-x})}, & (6)\\
&= f(x) \times \left(1 - \frac{1}{(1+e^{-x})}\right), & (7)\\
&= f(x)\,(1-f(x)). & (8)
\end{aligned}$$

[1] e.g. `mathtrain.jp/syonobibun`

(6) 式の第２因子を約分して１を前に出すと
1-ロジスティック関数になっている