2.2.1 等差数列的概念与通项公式

备课人：杨习

0.1 知识与技能

1. 通过实例，把握等差数列的特点，理解等差数列的概念，能根据定义判断一个数列是等差数列;
2. 探索并掌握等差数列的通项公式，及通项公式的简单应用.

0.2 情感态度与价值观

通过等差数列概念的归纳概括，培养学生的观察、分析资料的能力，积极思维，追求新知的创新意识.

0.3 过程与方法

1. 合作探究, 让学生对生活中实际问题分析, 引导学生通过观察, 推导, 归纳抽象出等差数列的概念;
2. 通过探索, 推导等差数列的通项公式, 并解决相应的问题;
3. 让学生用所学的知识解决相关的问题，归纳整理本节所学知识.

1 教学重难点

重点 理解等差数列的概念, 探索并掌握等差数列的通项公式;

难点 等差数列通项公式推导.

2 教学过程

2.1 复习引入

数列的概念：数列是按照一定顺序排列的一列数。

数列的分类方式：首先我们可以按照它的项数多少来进行分类，可以分为有穷数列和无穷数列；同时我们可以按照项数的变化来进行分类，分为递增数列、递减数列，还有常数列和摆动数列。

数列的通项公式：它表示的是数列的第 n 项 a_n 和序号 n 之间的对应关系，我们用一个式子把这个关系呈现出来，这个式子就是通项公式。

这是咱们上两节课所讲的主要知识，接下来我们进入今天的内容，我们先来观察这样几个生活中的例子：
姚明在刚进 NBA 时他在一周里每天需要训练的罚球个数是这样的，第一天他训练的罚球数是 6000 个，第二天是 6500 个，第三天是 7000 个，第四天，7500，第五天 8000，第六天 8500，第七天 9000，由此我们得到一个数列 6000, 6500, 7000, 7500, 8000, 8500, 9000。那我们又来看下一个例子。
女式运动鞋的尺码数是这样的，22, 22.5, 23, 23.5, 24, 24.5, 25。由此我们又得到一个数列。
上一次我跟大家讲过哈雷彗星的回归，在 1682 年的时候哈雷第一次发现并记录了这颗彗星，在 1758 年的时候又有一次记录，1834 年又是一次，接着是？1910 年，再往下，1986 年，再往下？2062 年。在这儿，我们又得到一个数列。

【小组探究，提问环节】
接下来我们把刚才提到的三个数列放在一起，请大家观察一下，这些数列有什么样的共同特点？我们先同桌之间互相讨论一下。接下来请一位同学来帮我归纳一下。

共同特征：从第二项起，每一项与它前面一项的差等于同一个常数（即等差）；（注：每相邻两项的差相等——应指明作差的顺序是后项减前项），我们给具有这种特征的数列一个名字——等差数列。（*板书：本节课标题 2.2 等差数列*）

2.2 探究新知

2.2.1 等差数列的定义

等差数列: 一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数就叫做等差数列的公差（常用小写字母“d”表示）。

【提问环节】
练习：判断下列数列中哪些是等差数列，哪些不是？如果是，写出公差 d, 如果不是，说明理由。

1. 数列 4, 7, 10, 13, 16, . . .;　　公差是 3
2. 数列 6, 4, 2, 0, -2, -4;　　公差是-2
3. 数列 1, 1, 1, 1, 1;　　公差是 0
4. 数列 -3, -2, -1, 1, 2, 3.　　不是

判断一个数列是不是等差数列，主要是根据定义来判断每一项（从第 2 项起）与它的前一项的差是不是同一个常数, 而且公差可以是正数，负数，也可以为 0.

接下来我们来总结一下当公差 d 取不同值时数列具有什么样的特点：

$d > 0$ **时,** $\{a_n\}$ 为递增数列;

$d < 0$ **时,** $\{a_n\}$ 为递减数列;

$d = 0$ **时,** $\{a_n\}$ 为常数列.

请同学们又来帮我复述一遍等差数列的定义。

【提问环节】
请大家思考一下是否可以用递推公式来描述等差数列的定义呢？（*板书 1. 定义及递推公式*）

$a_n - a_{n-1} = d$(d 是常数, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+$) 或 $a_{n+1} - a_n = d$(d 是常数, $n \in \mathbf{N}_+$)

【思考】
等差数列的递推公式是这样的，那等差数列是否有通项公式呢？它的通项公式又是什么样子的呢？

2.2.2 等差数列的通项公式

如果一个数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ 是等差数列，它的公差是 d:

【提问环节】
请一位同学根据定义来帮我找一下 a_2 和 a_1 之间有什么样的关系？

不完全归纳法:

$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$
$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$
$\vdots \qquad \vdots$
$a_n = a_1 + (n-1)d$

【思考】

是否还有其他办法来推导等差数列的通项公式？（*板书：2. 通项公式及累加法*）

累加法：

根据定义有：

$a_2 - a_1 = d$
$a_3 - a_2 = d$
$a_4 - a_3 = d$
$a_5 - a_4 = d$
$\vdots \qquad \vdots$
$a_n - a_{n-1} = d$

等号两边分别相加得：$a_n - a_1 = (n-1)d$，所以 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

请大家再一起念一遍等差数列的通项公式。

【提问环节】

接下来我们把我们得出来的第一个通项公式列出来，我想请一位同学帮我找一找这个式子里面涉及到的独立的量有哪些？

我们可以看到只要知道知道其中三个量，我们就可以求出另外一个量来了。在这里我们就用到了这样一个重要的数学思想——知三求一。

2.3 例题分析

题型一：求通项 a_n

【邀请同学上台板演】

例 1.(1) $a_1 = 1, d = 2, n = 10$, 求 $a_{10} =$?

解: $a_{10} = a_1 + 9d = 19$

进一步提问：$a_n =$?

解：$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

(2) 已知等差数列 $8, 5, 2, \ldots$ 求 a_n 及 a_{20}.

解: 由题知,

$a_1 = 8$

$d = 5 - 8 = -3$

因此 $a_n = 8 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 11$

故 $a_{20} = -49$

练习 1: 已知等差数列 $3, 7, 11, \ldots$, 则

$a_n = \underline{4n-1}$ $\qquad a_4 = \underline{15}$ $\qquad a_{10} = \underline{39}$

题型二：求首项 a_1

【邀请同学上台板演】

例 2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{20} = -49, d = -3$, 求首项 a_1.

解: 由 $a_{20} = a_1 + 19d$

得 $a_1 = 8$

练习 2: $a_4=15, d=3,\ a_1=?$

解：$a_1=6$

题型三：求项数 n

例 3. 判断 -400 是不是等差数列 $-5,-9,-13,\ldots$ 的项? 如果是, 是第几项?

解: $a_1=-5,\ d=-4,\ a_n=-5+(n-1)\cdot(-4)$

假设 -400 是该等差数列中的第 n 项,

则 $-400=-5+(n-1)\cdot(-4)$

解之得, $n=\frac{399}{4}$　　(不是正整数)

所以 -400 不是这个数列的项.

练习 3: 100 是不是等差数列 $2,9,16,\ldots$ 的项? 如果是, 是第几项? 如果不是, 说明理由.

解：是, 第 15 项

题型四：列方程组求基本量

例 4. 在等差数列中, 已知 $a_5=10, a_{12}=31$, 求首项 a_1 与公差 d.

解: 由题意知

$$\begin{cases} 10=a_1+4d \\ 31=a_1+11d \end{cases}$$

解方程组得:

$$\begin{cases} a_1=-2 \\ d=3 \end{cases}$$

2.4 课堂小结

通过这节课的学习，需要大家掌握的知识只有以下四点：

一个定义 $a_{n+1}-a_n=d$

一个方法 累加法（这是我们今后求通项公式时可以用到的一个方法）

一个公式 $a_n=a_1+(n-1)d$

一个思想 方程思想

3 课后作业

《教材》40 页　**习题 2.2**　A 组 1，3，4 题　B 组 2 题

探究性作业：在自己身边找出一个等差数列的例子，找出它的首项、公差.