函数值域怎么玩儿

更多资讯参见《高考调研》 32页——33页《专题研究函数的值域》

函数**值域的概念**：函数的函数值y的所有取值组成的集合就是函数的值域.

1 求一般函数的值域

1.1 观察法

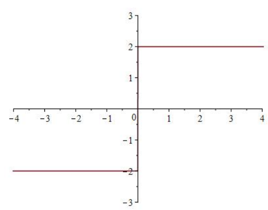
直接观察函数解析式就能得答案

例1. (1)$y=x^2, y=|x|, y=\sqrt{x}$的值域都是 $\underline{[0,+\infty)}$.

解析 1. 不管x取什么值，$x^2, |x|, \sqrt{x}$一定都大于等于0.

$$(2)y=\begin{cases} 2 & (x>0), \\ 0 & (x=0), \\ -2 & (x<0) \end{cases}$$，的值域为 $\underline{\{\text{-2,0,2}\}}$.

解析 2. 这个分段函数里面只出现了$2,0,-2$这三个值，一眼就能看答案。如果不能肯定，画个图出来也行。



$$(3)y=\begin{cases} 1 & (x\text{为有理数}), \\ -1 & (x\text{为无理数}) \end{cases}$$ 的值域为$\underline{\{\text{-1,1}\}}$.

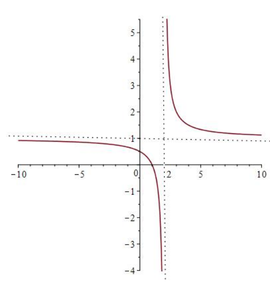
思考题1

(1)$y=|x-1|$的值域为$\underline{[0,+\infty)}$;

(2)$y=(x-1)^2+2$的值域为$\underline{[2,+\infty)}$;

(3)$y=\frac{1}{x-2}+1$的值域为$\underline{(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$.

解析 3. 此题相当于将函数$y=\frac{1}{x}$的图象向右平移2个单位，再向上平移1个单位.



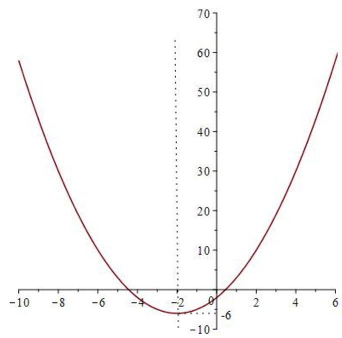
1.2 配方法

当所求函数为二次函数类（即形如$F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$的函数）的值域时，常用配方法

例2. 求下列函数的值域.

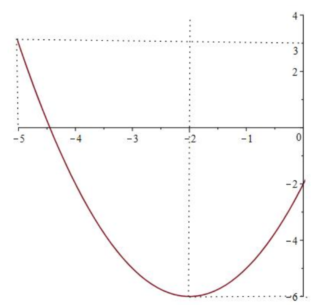
(1)$y=x^2+4x-2, x\in\mathbf{R}$; 答案：$[-6,+\infty)$

解析 4. $y=x^2+4x-2$这个式子可以配成顶点式$y=(x+2)^2-6$, 那么它的图象也就出来了：



看图一分析，马上得到，当$x\in\mathbf{R}$时，函数最小值为-6, 没有最大值，所以值域为$[-6,+\infty)$.

(2)$y=x^2+4x-2, x\in[-5,0)$; 答案：$[-6,3]$



(3)$y=x^2+4x-2, x\in[-6,-3]$; 答案：$[-5,10]$

(4)$y=x^2+4x-2, x\in[0,2]$. 答案：$[-2,10]$

思考题2

(1)函数$y=x^4+x^2+1$的值域是$\underline{[1,+\infty)}$; $y=x^4-x^2+1$的值域是$\underline{[\frac{3}{4},+\infty)}$.

解析 5. **对于函数$\mathbf{y=x^4+x^2+1}$** 这个式子可以配成顶点式 $y=(x^2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$（这里自变量$x$的取值范围默认是全体实数范围），但是要**注意**这里x^2始终大于等于 0, 也就是说 $x^2+\frac{1}{2}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 那么 $(x^2+\frac{1}{2})^2$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$, 则 $(x^2+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ 的最小值为1, 没有最大值，那么这个函数的值域就是 $[1,+\infty)$.

对于函数$\mathbf{y=x^4-x^2+1}$ 这个式子和上面的式子的不同之处在于上面的式子是 $+\mathbf{x^2}$, 下面的式子是 $-\mathbf{x^2}$. 下面这个式子可以配成顶点式 $y=(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$（这里自变量$x$的取值范围默认是全体实数范围），虽然这里 x^2 依然大于等于 0, 但是当 $x^2=\frac{1}{2}$ 时，

$(x^2-\frac{1}{2})^2$ 就可以等于 0 了，$(x^2-\frac{1}{2})^2$ 的取值范围就是 $[0,+\infty)$, 那么整体的 $(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ 的取值范围就是 $[\frac{3}{4},+\infty)$, 这也就是函数的值域.

(2) 求下列函数的值域.

① $y=\sqrt{-x^2+4x-1}$; 答案：$[0,\sqrt{3}]$

解析 6. 只要解决了根号下面的那一整个式子的取值范围，相应的函数值 y 的取值范围也确定了.

而 $-x^2+4x-1$ 的顶点式表示就是 $-(x-2)^2+3$, 图象开口向下，其最大值就是 3, 又因为 $-x^2+4x-1$ 在根号下面，所以它一定大于等于 0. 规范的解答书写过程如下：

解：$\because y=\sqrt{-x^2+4x-1}$

$\therefore y=\sqrt{-(x-2)^2+3}$

又$\because 0\leqslant -(x-2)^2+3\leqslant 3$

$\therefore 0\leqslant \sqrt{-(x-2)^2+3}\leqslant \sqrt{3}$

$\therefore$ 该函数的值域为 $[0,\sqrt{3}]$.

② $y=2-\sqrt{4x-x^2}(0\leqslant x\leqslant 4)$; 答案：$[0,2]$

解析 7. 同样的，先把 $4x-x^2$ 的取值范围找出来，因为这是一个二次函数式，可以直接画出它在$0\leqslant x\leqslant 4$ 这段范围对应的图象，接着找出这个整体的取值范围，然后一步步地变到 $2-\sqrt{4x-x^2}$ 的形式去. 规范的解答书写过程如下：

解：$\because 0\leqslant x\leqslant 4$

$\therefore 0\leqslant 4x-x^2\leqslant 4$

$\therefore 0\leqslant \sqrt{4x-x^2}\leqslant 2$

$\therefore -2\leqslant -\sqrt{4x-x^2}\leqslant 0$

$\therefore 0\leqslant 2-\sqrt{4x-x^2}\leqslant 2$

$\therefore$ 该函数的值域为$[0,2]$.

1.3 换元法

就一句话，用 t 去替换掉复杂带根号的那一坨

例3. 求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域. 答案：$(-\infty,\frac{1}{2}]$

解析 8. 这个式子和上面思考题*2 (2)* ② $y=2-\sqrt{4x-x^2}$ 那个式子的一个很大的区别点在于，其中一个式子**根号**里面外面都有 x, 而另一个式子只有**根号**里面才有 x, 所以两种题目的解法是不一样的，大家不要弄混淆了. 规范的解答书写过程如下：

解：令 $t=\sqrt{1-2x}(t\geqslant 0)$,

则 $t^2=1-2x$

$2x=1-t^2$

$x=\frac{1-t^2}{2}$

$\therefore y=\frac{1-t^2}{2}-t$

$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2-t$

$y=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$

$\because t\geqslant 0$

$\therefore -\frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$
$\therefore y \leqslant \frac{1}{2}$
$\therefore$ 该函数的值域为 $(-\infty, \frac{1}{2}]$

思考题3 求下列函数的值域.
(1) $y = 2x - 3 + \sqrt{4x - 13}$; 答案：$[\frac{7}{2}, +\infty)$
(2) $y = 2x - 1 - \sqrt{13 - 4x}$; 答案：$(-\infty, \frac{11}{2}]$
(3) $y = (x-2)^2 + 2|x-2| - 1$; 答案：$[-1, +\infty)$

解析 9. 这道题里面，$(x-2)^2$ 就相当于是 $(|x-2|)^2$，那么这个式子就可以改写为 $y = (|x-2|)^2 + 2|x-2| - 1$. 用 t 去替换 $|x-2|$，并且 $t \geqslant 0$，就可以得到 $y = t^2 + 2t - 1$，把这个二次函数式解出来就行. 规范的解答书写过程如下：
解：$\because y = (x-2)^2 + 2|x-2| - 1$
$\therefore y = (|x-2|)^2 + 2|x-2| - 1$
令 $t = |x-2| (t \geqslant 0)$，则
$y = t^2 + 2t - 1$
$y = (t+1)^2 - 2$
$\because$ 当 $t \geqslant 0$ 时，
$(t+1)^2 - 2 \geqslant -2$
$\therefore y \geqslant -2$
$\therefore$ 该函数的值域为 $[-2, +\infty)$.

1.4 分离常数法

将式子改写为一个经过上下左右平移的反比例函数式
例4. 求函数 $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的值域. 答案：$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

解析 10. 规范的解答书写过程如下：
解：$\because y = \frac{x+1}{x+2}$
$\therefore y = \frac{x+2-1}{x+2}$
$y = 1 - \frac{1}{x+2}$
$y = -\frac{1}{x+2} + 1$
$\therefore$ 该函数的值域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

思考题4 求函数 $y = \frac{5-x}{2x+5}$ 的值域. 答案：$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

解析 11. 将这个函数式变形为
$$y = \frac{-\frac{1}{2}(2x+5) + \frac{15}{2}}{2x+5}$$
就能得出答案了.

1.5 判别式法

把函数式转化为关于x的二次方程，通过已知方程有实根，即判定 $\Delta \geqslant 0$，从而求得原函数的值域.

例5 求函数 $y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ 的值域. 答案：$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

解析 12. 将这个函数式改写为关于 x 的二次方程，具体的解答过程如下：
解：$\because y=\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$ *(其中 $x^2+2x-3\neq 0$, 也即 $x\neq -1$ 和 3)*
$\therefore (x^2+2x-3)y=x^2-2x+3$
$\therefore yx^2+2yx-3y=x^2-2x+3$
$\therefore (y-1)x^2+2(y+1)x-3(y+1)=0$
① 当 $y=1$ 时，$x=\frac{3}{2}$ 在定义域内
② 当 $y\neq 1$ 时，$\Delta\geqslant 0$,
即 $(2(y+1))^2-4(y-1)(-3(y+1))\geqslant 0$
$\therefore y\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $y\leqslant -1$
$\therefore$ 该函数的值域为 $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

思考题5 求下列函数的值域.
(1) $y=\frac{2x^2-6x+5}{2x^2-6x+6}$; 答案：$[\frac{1}{3},1)$
(2) $y=\frac{2x^2+2x+5}{x^2+x+1}$; 答案：$(2,6]$

1.6 单调性法

若函数在某个区间内具有单调性，则可借助单调性求值域. 常用于对勾函数求值域.

例6 求函数 $y=x+\frac{2}{x}(0<x<1)$ 的值域. 答案：$(3,+\infty)$

解析 13. 这就是一个对勾函数，我们可以直接画出它的图象来找出值域，也可以通过严谨的推导过程来获得答案，规范的解答书写过程如下：
解：任取$x_1,x_2\in(0,1)$, 设 $x_1<x_2$
$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{2}{x_1}-(x_2+\frac{2}{x_2})$
$=x_1-x_2+\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}$
$=(x_1-x_2)+2(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})$
$=(x_1-x_2)+2(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2})$
$=(x_1-x_2)(1-\frac{2}{x_1x_2})$
$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-2)}{x_1x_2}$
$\because x_1<x_2 \quad \therefore x_1-x_2<0$
又 $\because 0<x<1 \quad \therefore x_1x_2>0, x_1x_2-2<0$
$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$
$\therefore f(x_1)>f(x_2)$
$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数
当 $x=1$ 时，$f(1)=3$
$\therefore$ 该函数的值域为 $(3,+\infty)$.

思考题6 求函数 $y=x+\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的值域. 答案：$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

1.7 数形结合法

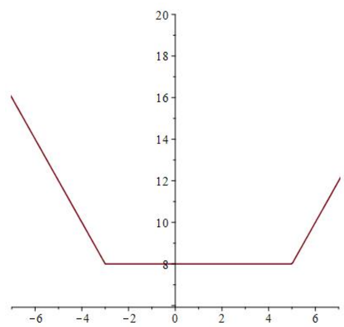
常见用于形如$f(x) = |g(x)| + |h(x)|$的函数，关键就在于去掉“| |”符号，x 应当如何取值.

例7 求函数 $y = |x+3| + |x-5|$ 的值域. 答案：$[8, +\infty)$

解析 14. 想要去掉式子中的“| |”符号，就得先搞清楚，当 x 取何值时，去掉绝对值符号要变号，之后就以这些刚好要变号的值作为分界点，对不同 x 取值情况进行讨论，就能写出一个分段函数了，写出来之后，把分段函数的图象画出来就成. 具体解答过程如下：

解：$\because y = |x+3| + |x-5|$

$$\therefore y = \begin{cases} -2x+2 & (x < -3) \\ 8 & (-3 \leqslant x < 5) \\ 2x-2 & (x \geqslant 5) \end{cases}$$



$\therefore$ 该函数的值域为 $[8, +\infty)$.

思考题7 求函数 $y = |x-2| - |x+1|$ 的值域. 答案：$[-3, 3]$

解析 15. 该函数式改写为分段函数为： $y = \begin{cases} 3 & (x < -1) \\ -2x+1 & (-1 \leqslant x < 2) \\ -3 & (x \geqslant 2) \end{cases}$

之后画出分段函数图象来就能判断出函数值域. 当然你也可以牢记下面关于**求分段函数的值域**的那一句话.

2 求分段函数的值域

分段函数的值域为每一区间函数的值域的并集

3 求复合函数的值域

复合函数的值域即为外层函数的值域