

## 2.2 等差数列

备课人：杨习

### 1 教学重难点及三维目标

**重点** 理解等差数列的概念, 探索并掌握等差数列的通项公式;

**难点** 等差数列通项公式推导.

#### 1.1 知识与技能

1. 通过实例, 把握等差数列的特点, 理解等差数列的概念, 能根据定义判断一个数列是等差数列;
2. 探索并掌握等差数列的通项公式, 及通项公式的简单应用.

#### 1.2 情感态度与价值观

通过等差数列概念的归纳概括, 培养学生的观察、分析资料的能力, 积极思维, 追求新知的创新意识.

#### 1.3 过程与方法

1. 合作探究, 让学生对生活中实际问题分析, 引导学生通过观察, 推导, 归纳抽象出等差数列的概念;
2. 通过探索, 推导等差数列的通项公式, 并解决相应的问题;
3. 让学生用所学的知识解决相关的问题, 归纳整理本节所学知识.

## 2 教学过程

### 2.1 复习引入

【复习旧知】

- 数列的概念
- 数列的分类方式
- 数列的通项公式

【生活中的数列】

姚明刚进 NBA 时一周里每天需要训练的罚球个数: 第一天 6000 个, 第二天 6500 个, 第三天 7000 个, 第四天 7500, 第五天 8000, 第六天 8500, 第七天 9000.

女式运动鞋的尺码数: 22, 22.5, 23, 23.5, 24, 24.5, 25.

哈雷彗星的回归年份: 1682 年, 1758 年, 1834 年, 1910 年, 1986 年, 2062 年.

【小组探究, 提问环节】

观察这些数列有什么样的共同特点?

共同特征：从第二项起，每一项与它前面一项的差等于同一个常数（即等差）；（注：每相邻两项的差相等——应指明作差的顺序是后项减前项），我们给具有这种特征的数列一个名字——等差数列。（板书：本节课标题 2.2 等差数列）

## 2.2 探究新知

### 2.2.1 等差数列的定义

**等差数列：**一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数就叫做等差数列的公差（常用小写字母“ $d$ ”表示）。

#### 【提问环节】

练习：判断下列数列中哪些是等差数列，哪些不是？如果是，写出公差  $d$ ，如果不是，说明理由。

1. 数列 4, 7, 10, 13, 16, ...; 公差是 3
2. 数列 6, 4, 2, 0, -2, -4; 公差是-2
3. 数列 1, 1, 1, 1, 1; 公差是 0
4. 数列 -3, -2, -1, 1, 2, 3. 不是

判断一个数列是不是等差数列，主要是根据定义来判断每一项（从第 2 项起）与它的前一项的差是不是同一个常数，而且公差可以是正数，负数，也可以为 0.

当公差  $d$  取不同值时数列具有的特点：

$d > 0$  时， $\{a_n\}$  为递增数列；

$d < 0$  时， $\{a_n\}$  为递减数列；

$d = 0$  时， $\{a_n\}$  为常数列.

复述一遍等差数列的定义。

#### 【提问环节】

请大家思考一下是否可以用递推公式来描述等差数列的定义呢？（板书 1. 定义）

#### 【思考】

等差数列的递推公式是这样的，那等差数列是否有通项公式呢？它的通项公式又是什么样子的呢？

### 2.2.2 等差数列的通项公式

如果一个数列  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  是等差数列，它的公差是  $d$ ：

#### 【提问环节】

根据定义找一下  $a_2$  和  $a_1$  之间有什么样的关系？

不完全归纳法：

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

#### 【思考】

是否还有其它办法来推导等差数列的通项公式？（板书：2. 通项公式及累加法）

累加法:

根据定义有:

$$a_2 - a_1 = d$$

$$a_3 - a_2 = d$$

$$a_4 - a_3 = d$$

$$a_5 - a_4 = d$$

$$\vdots$$

$$a_n - a_{n-1} = d$$

等号两边分别相加得:  $a_n - a_1 = (n-1)d$ , 所以  $a_n = a_1 + (n-1)d$ .

【提问环节】

这个式子里面涉及到的独立的量有哪些?

数学思想——“知三求一”的方程思想求解等差数列相关问题。

## 2.3 例题分析

题型一: 求通项  $a_n$

例 1.(1)  $a_1 = 1, d = 2, n = 10$ , 求  $a_{10} = ?$

解:  $a_{10} = a_1 + 9d = 19$

进一步提问:  $a_n = ?$

解:  $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

(2) 已知等差数列  $8, 5, 2, \dots$  求  $a_n$  及  $a_{20}$ .

解: 由题知,

$$a_1 = 8$$

$$d = 5 - 8 = -3$$

$$\text{因此 } a_n = 8 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 11$$

$$\text{故 } a_{20} = -49$$

练习 1: 已知等差数列  $3, 7, 11, \dots$ , 则

$$a_n = 4n - 1 \quad a_4 = 15 \quad a_{10} = 39$$

题型二: 求首项  $a_1$

例 2. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_{20} = -49, d = -3$ , 求首项  $a_1$ .

解: 由  $a_{20} = a_1 + 19d$

$$\text{得 } a_1 = 8$$

练习 2:  $a_4 = 15, d = 3, a_1 = ?$

解:  $a_1 = 6$

题型三: 求项数  $n$

例 3. 判断  $-400$  是不是等差数列  $-5, -9, -13, \dots$  的项? 如果是, 是第几项?

解:  $a_1 = -5, d = -4, a_n = -5 + (n-1) \cdot (-4)$

假设  $-400$  是该等差数列中的第  $n$  项,

$$\text{则 } -400 = -5 + (n-1) \cdot (-4)$$

解之得,  $n = \frac{399}{4}$  (不是正整数)

所以  $-400$  不是这个数列的项.

练习 3:  $100$  是不是等差数列  $2, 9, 16, \dots$  的项? 如果是, 是第几项? 如果不是, 说明理由.

解: 是, 第 15 项

#### 题型四：列方程组求基本量

例 4. 在等差数列中, 已知  $a_5 = 10, a_{12} = 31$ , 求首项  $a_1$  与公差  $d$ .

解: 由题意知

$$\begin{cases} 10 = a_1 + 4d \\ 31 = a_1 + 11d \end{cases}$$

解方程组得:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$

【拓展训练】例 5. 数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $a_p = q, a_q = p$  ( $p, q \in \mathbf{N}^*$ , 且  $p \neq q$ ), 求  $a_{p+q}$ .

## 2.4 课堂小结

一个定义  $a_{n+1} - a_n = d$

一个方法 累加法

一个公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$

一个思想 方程思想

## 3 课后作业

《教材》40 页 习题 2.2 A 组 1, 3, 4 题 B 组 2 题

探究性作业: 在自己身边找出一个等差数列的例子, 找出它的首项、公差.