4.2.1 直线与圆的位置关系

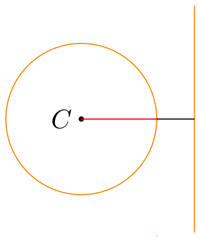
0.1 教学重难点

重点 熟练掌握直线与圆的位置关系及其判定办法，能切实解决弦长问题，切线问题;

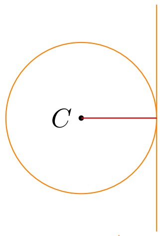
难点 灵活应用直线与圆的位置关系及其判定办法求解相关题目.

1 直线与圆的位置关系

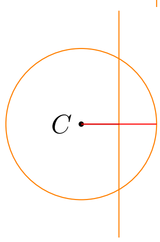
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相离
- $d > r$
- 没有交点



- 相切
- $d = r$
- 有一个交点



- 相交
- $d < r$
- 有两个交点

2 直线与圆的位置关系判定方法

圆 $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (r > 0)$
直线 $l : Ax + By + C = 0$

2.1 几何法判定

借助圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系进行判定：

- $d > r \iff$ 相离
- $d = r \iff$ 相切
- $d < r \iff$ 相交

提醒：

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2.1.1 几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:
圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$
直线 $l: x+y-2=0.$

练习 1: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系: 圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$, 直线 $l: 4x-3y+21=0.$

2.2 代数法判定

借助直线与圆的公共点的个数进行判定：

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ Ax+By+C=0\end{cases} \Longrightarrow \text{关于 } x(y) \text{ 的一元二次方程}$$

则其**解的个数**对应于**线圆交点个数**

- $\Delta<0 \Longleftrightarrow$ 没有交点 $\Longleftrightarrow$ 相离
- $\Delta=0 \Longleftrightarrow$ 一个交点 $\Longleftrightarrow$ 相切
- $\Delta>0 \Longleftrightarrow$ 两个交点 $\Longleftrightarrow$ 相交

2.2.1 代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系: 圆 $C: x^2+y^2=4$, 直线 $l: y=2x+1.$

练习 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系: 圆 $C: x^2+y^2-2x-1=0$, 直线 $l: x+y-2=0.$

2.3 例题研究

例 3: 若直线 $ax+y=1$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 有两个不同的交点，求 a 的取值范围.

练习 3: 直线 $y=kx+2$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点，则 k 的取值范围是_____.

2.3.1 弦长问题

例 4:求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

例 5: 直线过点 $(4,0)$, 且被圆 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 所截得的弦长最长，求直线的方程为.

2.4 知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

相离 $\Longleftrightarrow d > r \Longleftrightarrow \Delta < 0$

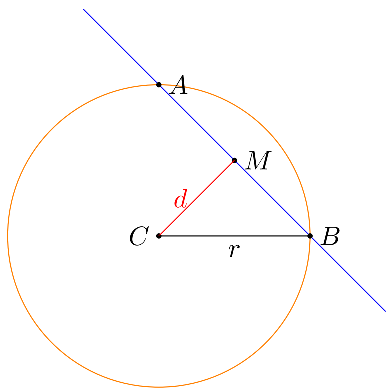
相切 $\Longleftrightarrow d = r \Longleftrightarrow \Delta = 0$

相交 $\Longleftrightarrow d < r \Longleftrightarrow \Delta > 0$

其中，**判别式** Δ 的来源：

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{关于 } x(y) \text{ 的一元二次方程}$$

2. 弦长问题：



半径：r, 弦心距：d

弦长：$|AB| = 2|BM| = 2\sqrt{r^2-d^2}$

课后作业

《课时作业（二十八）》