4.2.1 直线与圆的位置关系

杨习

shineyoung7@163.com

知识回顾

知识回顾

点到直线的距离公式： $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

知识回顾

点到直线的距离公式： $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$

圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

知识回顾

点到直线的距离公式： $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$

圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$

知识回顾

点到直线的距离公式： $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$

圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$

圆心：

$$(\frac{D}{-2}, \frac{E}{-2})$$

知识回顾

点到直线的距离公式： $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

圆的标准方程： $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$

圆的一般方程： $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\ (D^2+E^2-4F>0)$

圆心：

$$(\frac{D}{-2}, \frac{E}{-2})$$

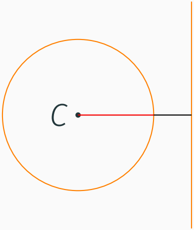
半径：

$$r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$$

直线与圆的位置关系

线圆位置关系

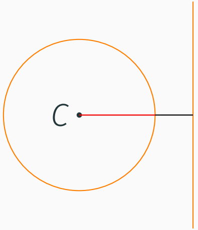
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相离

线圆位置关系

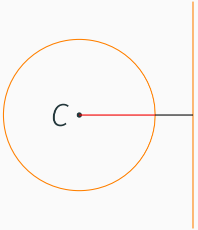
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相离
- $d > r$

线圆位置关系

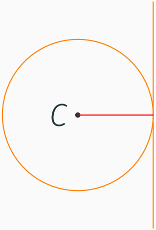
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相离
- $d > r$
- 没有交点

线圆位置关系

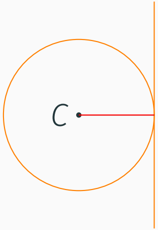
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相切

线圆位置关系

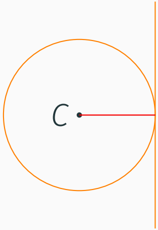
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相切
- $d = r$

线圆位置关系

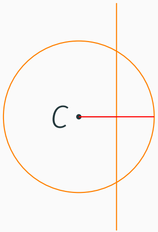
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相切
- $d = r$
- 有一个交点

线圆位置关系

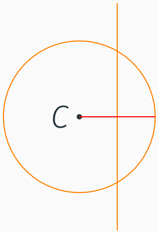
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相交

线圆位置关系

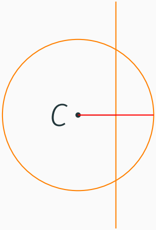
圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相交
- $d < r$

线圆位置关系

圆心到直线的距离: d, 圆的半径: r



- 相交
- $d < r$
- 有两个交点

直线与圆的位置关系判定方法

几何法判定

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$
直线 $l:Ax+By+C=0$

1. 借助圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系进行判定：

- $d>r \iff$ 相离

几何法判定

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$
直线 $l:Ax+By+C=0$

1. 借助圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系进行判定:

- $d>r \Longleftrightarrow$ 相离
- $d=r \Longleftrightarrow$ 相切

几何法判定

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$
直线 $l:Ax+By+C=0$

1. 借助圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系进行判定：

- $d>r \Longleftrightarrow$ 相离
- $d=r \Longleftrightarrow$ 相切
- $d<r \Longleftrightarrow$ 相交

几何法判定

圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$
直线 $l:Ax+By+C=0$

1. 借助圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系进行判定：

- $d>r \Longleftrightarrow$ 相离
- $d=r \Longleftrightarrow$ 相切
- $d<r \Longleftrightarrow$ 相交

$$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C : x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

直线 $l : x + y - 2 = 0$

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$

直线 $l: x+y-2=0$

解: 由题知，圆心坐标为 $(1,0)$, 圆的半径 $r=5$

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$

直线 $l: x+y-2=0$

解: 由题知，圆心坐标为 $(1,0)$, 圆的半径 $r=5$

则圆心到直圆心到直线的距离

$$d=\frac{|1+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

直线 $l: x + y - 2 = 0$

解: 由题知，圆心坐标为 $(1, 0)$, 圆的半径 $r = 5$

则圆心到直圆心到直线的距离

$$d = \frac{|1 + 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} < r$$

故直线与圆相交.

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$

直线 $l: x+y-2=0$

解: 由题知，圆心坐标为 $(1,0)$, 圆的半径 $r=5$

则圆心到直圆心到直线的距离

$$d=\frac{|1+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}<r$$

故直线与圆相交.

练习 1: 圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$ 直线 $l: 4x-3y+21=0$

几何法判定——例题

例 1. 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$

直线 $l: x+y-2=0$

解: 由题知，圆心坐标为 $(1,0)$, 圆的半径 $r=5$

则圆心到直圆心到直线的距离

$$d=\frac{|1+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}<r$$

故直线与圆相交.

练习 1: 圆 $C: x^2+y^2-2x-24=0$ 直线 $l: 4x-3y+21=0$

$d=5=r$

代数法判定

2. 借助直线与圆的公共点的个数进行判定:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Longrightarrow \textbf{关于 } x(y) \textbf{ 的一元二次方程}$$

则其解的个数对应于线圆交点个数

- $\Delta < 0 \Longleftrightarrow$ 没有交点 $\Longleftrightarrow$ 相离

代数法判定

2. 借助直线与圆的公共点的个数进行判定：

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \Longrightarrow \textbf{关于 } x(y) \textbf{ 的一元二次方程}$$

则其解的个数对应于线圆交点个数

- $\Delta < 0 \Longleftrightarrow$ 没有交点 $\Longleftrightarrow$ 相离
- $\Delta = 0 \Longleftrightarrow$ 一个交点 $\Longleftrightarrow$ 相切

代数法判定

2. 借助直线与圆的公共点的个数进行判定：

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \\ Ax+By+C=0 \end{cases} \implies \textbf{关于 } x(y) \textbf{ 的一元二次方程}$$

则其解的个数对应于线圆交点个数

- $\Delta < 0 \iff$ 没有交点 $\iff$ 相离
- $\Delta = 0 \iff$ 一个交点 $\iff$ 相切
- $\Delta > 0 \iff$ 两个交点 $\iff$ 相交

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

解得 $5x^2 + 4x - 3 = 0$

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2+y^2=4$

直线 $l: y=2x+1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=2x+1 \end{cases}$$

解得 $5x^2+4x-3=0$

则其 $\Delta=76>0$

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

解得 $5x^2 + 4x - 3 = 0$

则其 $\Delta = 76 > 0$

故直线与圆相交.

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

解得 $5x^2 + 4x - 3 = 0$

则其 $\Delta = 76 > 0$

故直线与圆相交.

练习 2: 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 直线 $l: x + y - 2 = 0$

代数法判定——例题

例 2: 判断直线 l 与圆 C 的位置关系:

圆 $C: x^2 + y^2 = 4$

直线 $l: y = 2x + 1$

解: 由题知，联立方程组:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

解得 $5x^2 + 4x - 3 = 0$

则其 $\Delta = 76 > 0$

故直线与圆相交.

练习 2: 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 直线 $l: x + y - 2 = 0$

$2x^2 - 6x + 3 = 0$ 相交

直线与圆的位置关系判定

- 相离 $\Longleftrightarrow d > r \Longleftrightarrow \Delta < 0$

直线与圆的位置关系判定

- 相离 $\Longleftrightarrow d > r \Longleftrightarrow \Delta < 0$
- 相切 $\Longleftrightarrow d = r \Longleftrightarrow \Delta = 0$

直线与圆的位置关系判定

- 相离 $\iff d > r \iff \Delta < 0$
- 相切 $\iff d = r \iff \Delta = 0$
- 相交 $\iff d < r \iff \Delta > 0$

例题研究

例 3: 若直线 $ax + y = 1$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 有两个不同的交点，则 a 的取值范围是________.

例题研究

例 3: 若直线 $ax + y = 1$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 有两个不同的交点，则 a 的取值范围是$\underline{(-\infty, 0)}$.

练习 3: 直线 $y = kx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 没有公共点，则 k 的取值范围是

例题研究

例 3: 若直线 $ax+y=1$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 有两个不同的交点，则 a 的取值范围是$\underline{(-\infty,0)}$.

练习 3: 直线 $y=kx+2$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点，则 k 的取值范围是$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

弦长问题

例 4:求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

弦长问题

例 4:求直线 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 被圆 $x^2+y^2=4$ 截得的弦长.

例 5: 直线过点 $(4,0)$, 且被圆 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 所截得的弦长最长，求直线的方程为.

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

相离 $\iff d > r \iff \Delta < 0$

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

相离 $\iff d > r \iff \Delta < 0$

相切 $\iff d = r \iff \Delta = 0$

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

$$
\begin{aligned}
&\textbf{相离} \iff d > r \iff \Delta < 0\\
&\textbf{相切} \iff d = r \iff \Delta = 0\\
&\textbf{相交} \iff d < r \iff \Delta > 0
\end{aligned}
$$

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

$$\begin{aligned}
\textbf{相离} &\iff d > r \iff \Delta < 0 \\
\textbf{相切} &\iff d = r \iff \Delta = 0 \\
\textbf{相交} &\iff d < r \iff \Delta > 0
\end{aligned}$$

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定:

$$
\begin{aligned}
\textbf{相离} &\iff d > r \iff \Delta < 0 \\
\textbf{相切} &\iff d = r \iff \Delta = 0 \\
\textbf{相交} &\iff d < r \iff \Delta > 0
\end{aligned}
$$

圆心到直线的距离

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

知识小结

1. 直线与圆的位置关系判定：

$$\begin{aligned}
&\textbf{相离} \iff d > r \iff \Delta < 0\\
&\textbf{相切} \iff d = r \iff \Delta = 0\\
&\textbf{相交} \iff d < r \iff \Delta > 0
\end{aligned}$$

圆心到直线的距离

$$d = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases} \Longrightarrow \textbf{关于 } x(y) \textbf{ 的一元二次方程}$$

判别式 Δ

课后作业

《课时作业（二十八）》