数字图像处理

第 7 章

小波变换和多分辨处理

前章小结

- 彩色基础
  - 人眼的彩色感知
- 彩色模型
  - 面向物理实现RGB、CMY
  - 面向视觉感受HIS
  - 彩色空间变换
- 彩色增强
  - 真彩色、伪彩色
- 彩色变换
- 插值与外推

本章主要内容

- 多分辨率概念
  - 图像金字塔、子带编码
- 小波变换基本概念
  - 小波概念
  - Haar小波
  - 多分辨分析与小波构造
- 小波变换在图像处理中应用实例

本章基本要求

- 基本要求
  - 掌握小波分析有关概念
    - 小波函数，多分辨分析，小波构造，小波变换及离散实现
  - 通过实践环节
    - 实现离散一、二维小波变换
    - 图像小波分解和图像小波重构。

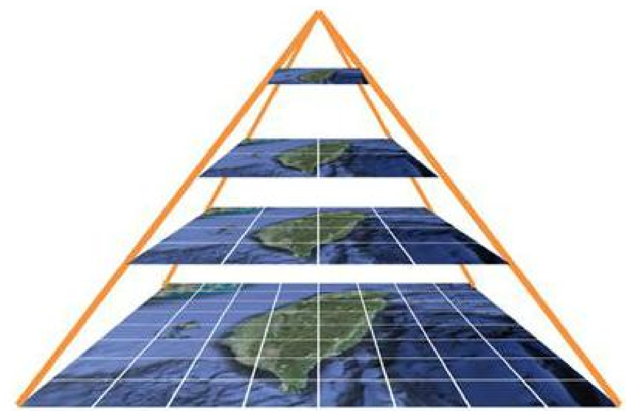
§7.1 多分辨率概念

- 1.多分辨率意义
  - 目标具有特定的形状
  - 形状具有不同的大小
  - 大目标可以在低分辨率下观察
  - 小目标需要在高分辨率下观察
  - 具有多分辨率的识别系统才能最有效的识别目标
  - 人眼视觉对目标的感知具有多分辨率的能力

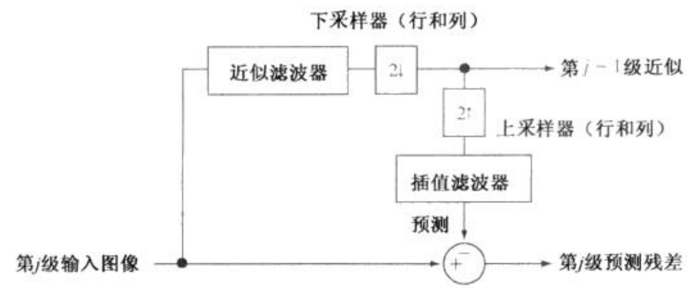
§ 7.1 多分辨率概念

- 2.图像金字塔
  - 逐级建立近似图像
  - 不同级别图像可识别

    不同尺寸目标



  - *J-1*级近似与*J* 级残差
    - 高斯金字塔
    - 拉普拉斯金字塔
  - 金字塔表示的应用
    - 识别和编码



§7.1 多分辨率概念

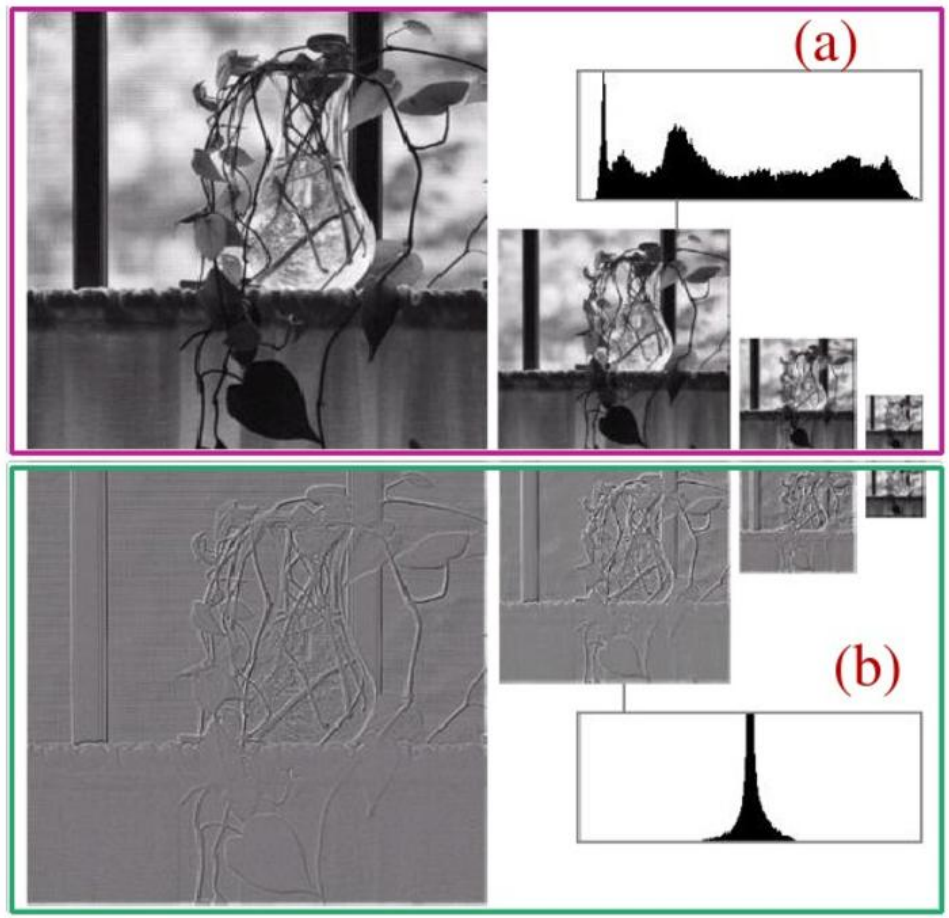
图象的高斯近似值金字塔，分辨率分别为：512×512，256×256，128×128，64×64。

●金字塔的分辨率越低，伴随的细节越少；

●低分辨率图像用于分析大的结构或图像的整体内容，高分辨率图像用于分析单个物体的特性。

相应拉普拉斯预测残差金字塔，分辨率分别为：512×512，256×256，128×128，64×64。

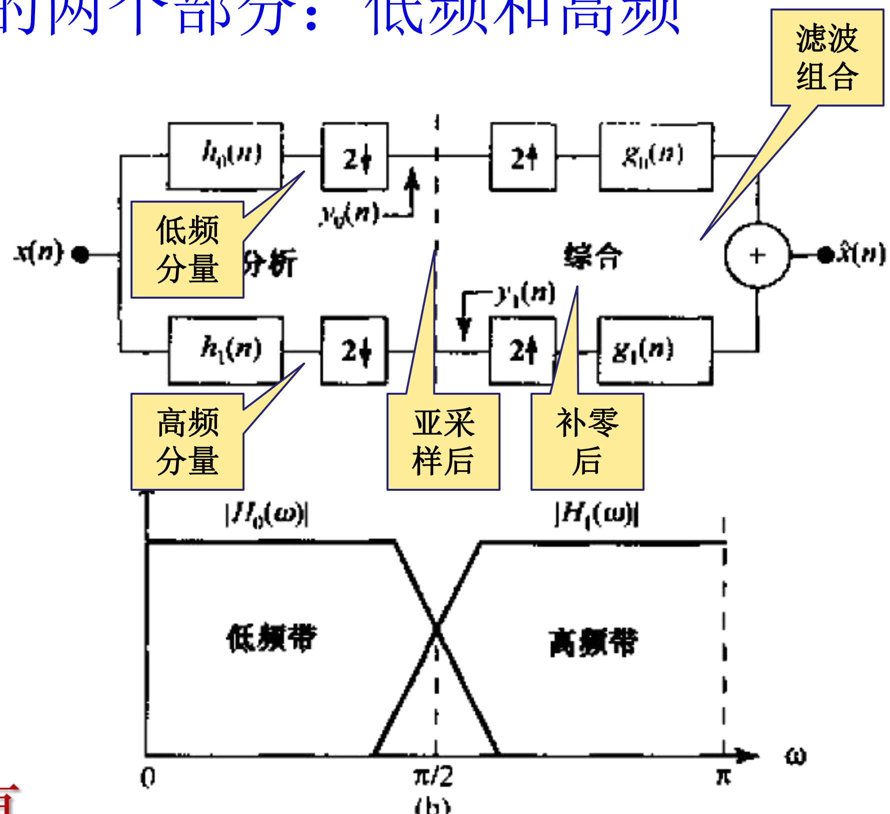
●从低级开始通过内插和滤波获得高级高斯金字塔的预测残差图象。



§7.1 多分辨率概念

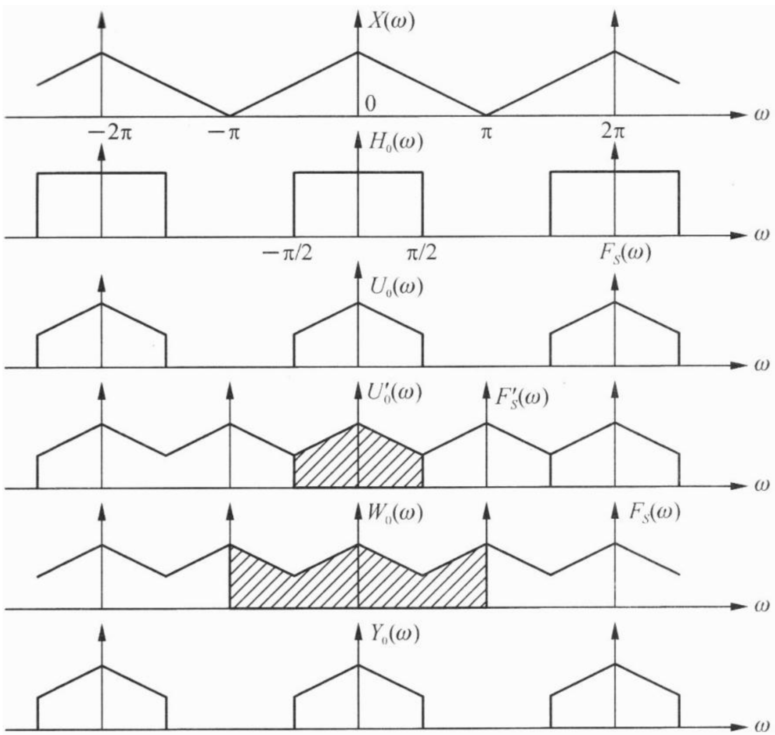
- 3.子带编码
  - 金字塔分解的两个方面：近似和残差
  - 信息在频域上与此对应的两个部分：低频和高频
- 3.1一维子带编码
  - 一维信号分解
    - 低频
    - 高频
  - 亚采样
    - 总数据量不上升
  - 补零
  - 滤波内插合成信号

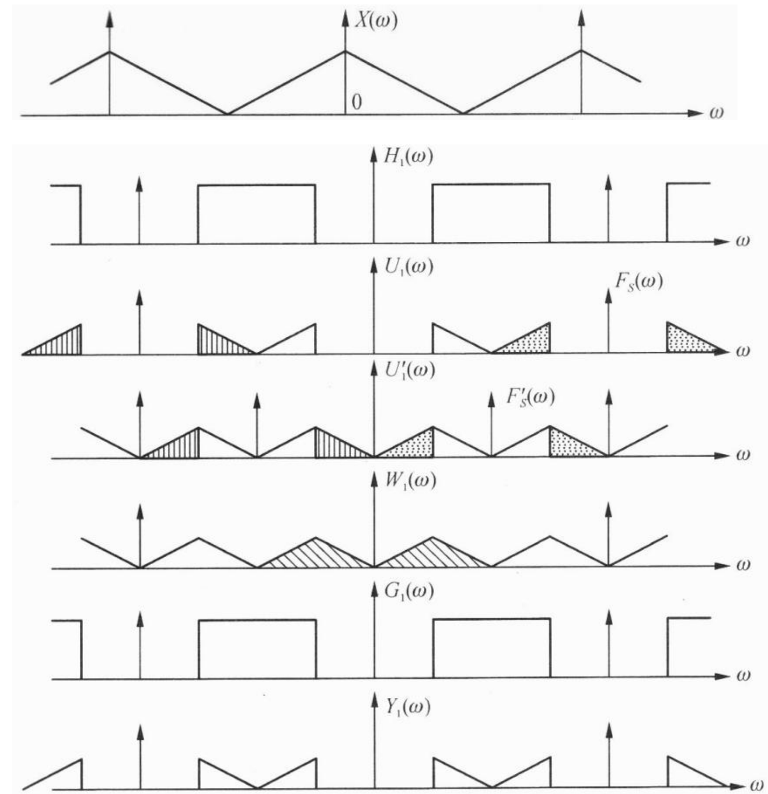
设计好可以无失真恢复

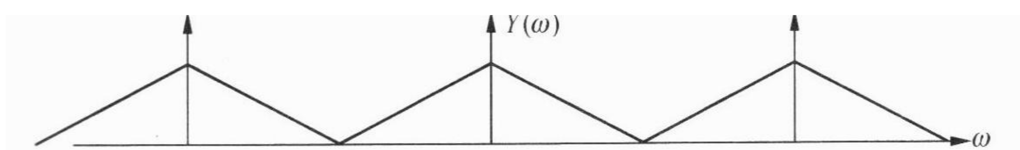


§7.1 多分辨率概念

➢ 3.2理想一维子带编码图解







§ 7.1 多分辨率概念

- 3.3子带编码无失真条件

$w_k(n)$表示经过亚抽样，补零后的恢复信号，k=0,1

$$w_k(n)=\begin{cases}u_k(n), n\text{为偶数}\\0, \quad n\text{为奇数}\end{cases}$$

- 数学表达 $w_k(n)=0.5\left[1+(-1)^{n}\right]u_k(n)$
- Z变换 $\because Z\left\{(-1)^n x(n)\right\}=X(-z), \quad \therefore W_k(z)=0.5\left[U_k(z)+U_k(-z)\right]$

$$\because U_k(z)=H_k(z)X(z), \quad \therefore W_k(z)=0.5\left[H_k(z)X(z)+H_k(-z)X(-z)\right]$$

$$Y_k(z)=G_k(z)W_k(z)=0.5\left[G_k(z)H_k(z)X(z)+G_k(z)H_k(-z)X(-z)\right]$$

$$Y(z)=Y_0(z)+Y_1(z)=G_0(z)W_0(z)+G_1(z)W_1(z)$$

$$=0.5\left[G_0(z)H_0(z)X(z)+G_0(z)H_0(-z)X(-z)\right]+0.5\left[G_1(z)H_1(z)X(z)+G_1(z)H_1(-z)X(-z)\right]$$

$$=0.5\left[G_0(z)H_0(z)+G_1(z)H_1(z)\right]X(z)+0.5\left[G_0(z)H_0(-z)+G_1(z)H_1(-z)\right]X(-z)$$

$e^{j\omega}$代替z，$e^{j(\omega+\pi)}$代替$-z$

$$Y(\omega)=0.5\left[G_0(\omega)H_0(\omega)+G_1(\omega)H_1(\omega)\right]X(\omega)+0.5\left[G_0(\omega)H_0(\omega+\pi)+G_1(\omega)H_1(\omega+\pi)\right]X(\omega+\pi)$$

若$Y(\omega)=X(\omega)$，则需要：

$$\begin{cases}G_0(\omega)H_0(\omega)+G_1(\omega)H_1(\omega)=1\\G_0(\omega)H_0(\omega+\pi)+G_1(\omega)H_1(\omega+\pi)=0\end{cases}$$

- 无失真重建条件
- **4**个滤波器，只有**2**个约束条件
- 求解有一定的“自由度”

§ 7.1 多分辨率概念

3.4满足子带编码无失真条件实例

条件

若$Y(\omega)=\mathrm{X}(\omega)$，则需要：

$$\begin{cases} G_0(\omega)H_0(\omega)+G_1(\omega)H_1(\omega)=1 \\ G_0(\omega)H_0(\omega+\pi)+G_1(\omega)H_1(\omega+\pi)=0 \end{cases}$$

选定：

$$\begin{cases} H_1(\omega)=e^{j\omega}H_0(\pi-\omega) \\ G_0(\omega)=H_0(-\omega) \\ G_1(\omega)=H_1(-\omega) \end{cases}$$

对应时域：

$$\begin{cases} h_1(n)=(-1)^{1-n}h_0(1-n) \\ h_0(n)=g_0(-n) \\ h_1(n)=g_1(-n) \end{cases}$$

验证：

$$\begin{aligned} &G_0(\omega)H_0(\omega+\pi)+G_1(\omega)H_1(\omega+\pi) \\ &=H_0(-\omega)H_0(\omega+\pi)+H_1(-\omega)H_1(\omega+\pi) \\ &=H_0(-\omega)H_0(\omega+\pi)+e^{-j\omega}H_0(\omega+\pi)e^{j(\omega+\pi)}H_0(-(\omega+\pi)+\pi) \\ &=H_0(-\omega)H_0(\omega+\pi)+e^{j\pi}H_0(\omega+\pi)H_0(-\omega)=0 \end{aligned}$$

§7.1 多分辨率概念

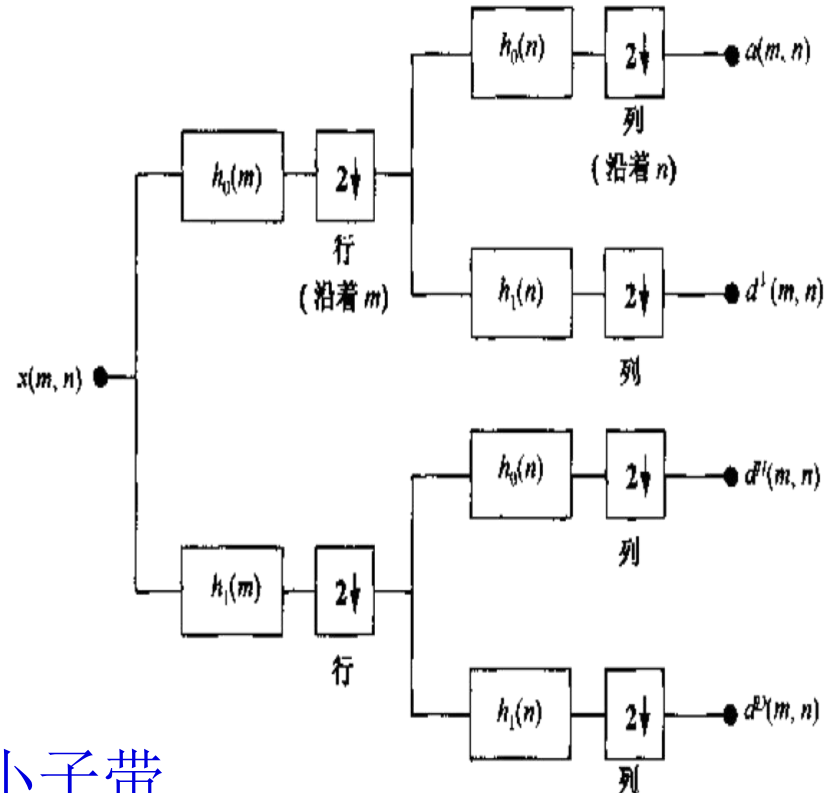
- 4.图像的二维子带分解
  - 水平、垂直可分离的分解
  - 首先沿垂直方向逐行分解
  - 然后在水平方向逐列分解
  - 生成的4个分量

    $a(m,n)$近似值

    $d^{V}(m,n)$垂直细节分量

    $d^{H}(m,n)$水平细节分量

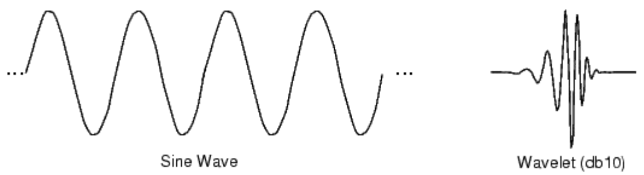
    $d^{D}(m,n)$对角细节分量



  - 子带还可以继续分解为更小子带

§7.2 小波变换概念

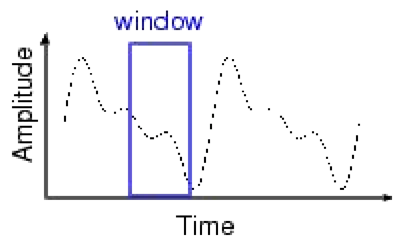
- 1.小波概念
  - 定义：有限间隔内且平均值为0 的一种函数，相对正弦波而言，称其为“小波”

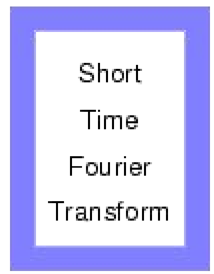


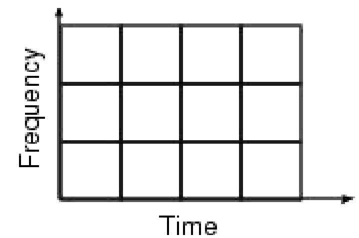
  - 正弦波的信号分解
    - 正弦波具有无限持续时间
    - 信号可用正交的正弦函数集表示-频域(傅里叶)变换
    - 有限信号用无限信号表示的不便
    - 傅里叶变换只有频域信息，没有时域信息

§ 7.2 小波变换概念

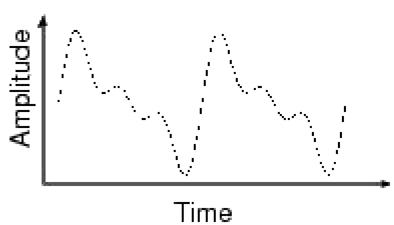
- 短时傅里叶变换（STFT）
  - 在傅里叶变换的基础上，同时反映时间信息

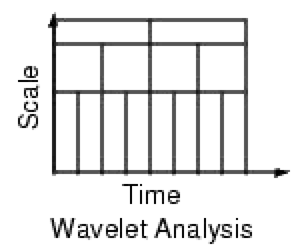






- 小波的信号分解
  - 集合的构造
    - 基函数尺度变化：分辨率（频域）的概念
    - 奇函数的位移：时域信息的反映
  - 信号可以分解为小波集合的表示-小波变换



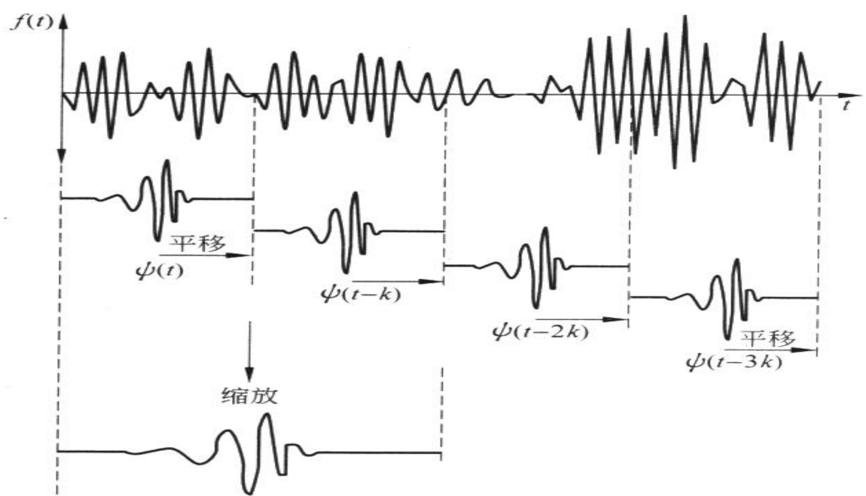


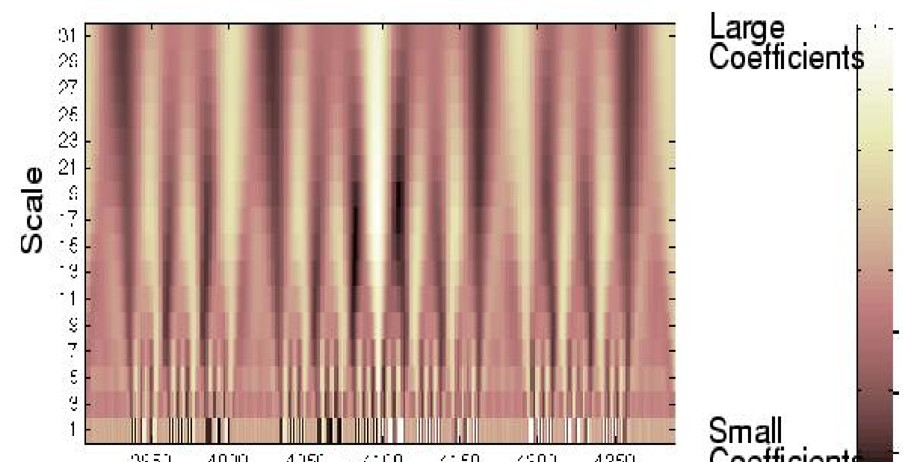
§ 7.2 小波变换概念

- 2.小波变换
  - 2.1连续变换（*continuous wavelet transform*）
    - 傅里叶变换 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}dt$
      - 变换结果是频率的函数，反映了信号频率的构成
    - 用经过尺度和位移扩展的小波集合对信号变换
      - 结果同时反映了信号的尺度（频率）和位置信息

$$C(scale, position)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(scale, position, t)dt$$

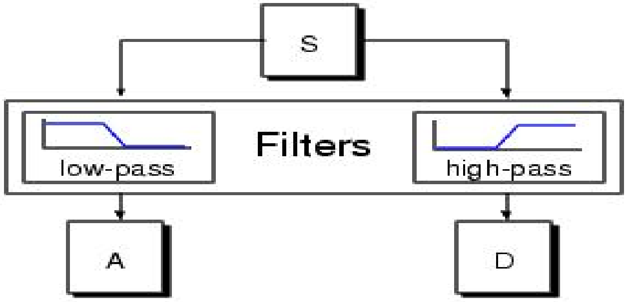
尺度变化为a，位移为k的小波函数表示为：$\psi(a(t-k))$





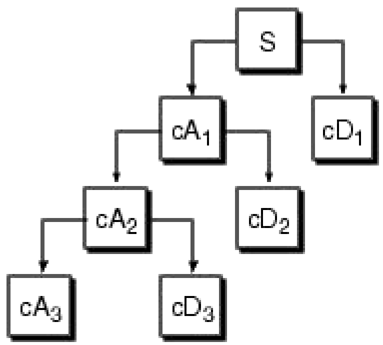
§ 7.2 小波变换概念

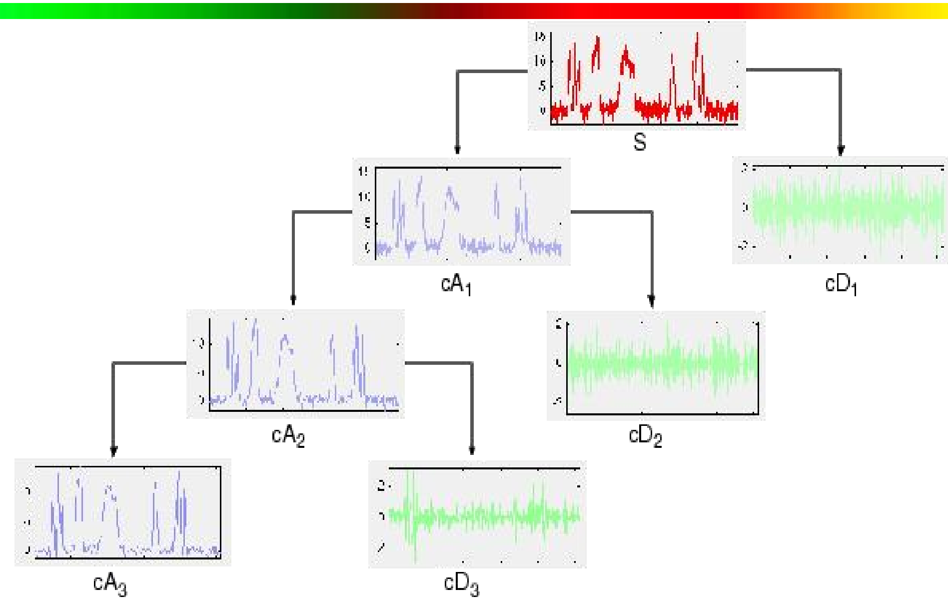
- 2.2离散变换（*discrete wavelet transform*）
  - 连续小波变换的计算量是很大的
  - 缩放因子和位移参数都选择 $2^j(j>0\text{的整数})$
  - 连续的小波变换成为离散的小波变换
- 2.3离散小波变换与子带编码
  - 以缩放因子按2的倍数变化，相当于
    （子带编码的概念）
  - 执行离散小波变化的有效方法
    - Mallat算法：双通道子带编码
    - 低通得到近似信息(approximations),高通得到细节信息(detail)



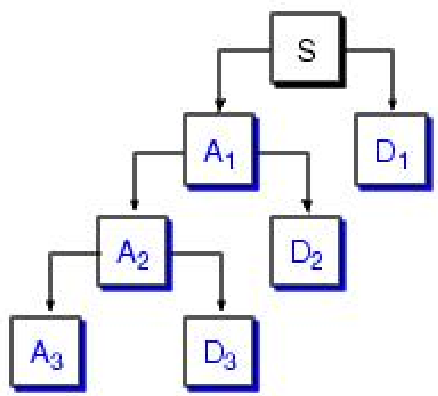
§ 7.2 小波变换概念

➤ 2.4小波分解树





➤ 2.5小波重构



$$
\begin{aligned}
S &= A_1 + D_1 \\
&= A_2 + D_2 + D_1 \\
&= A_3 + D_3 + D_2 + D_1
\end{aligned}
$$

§ 7.2 小波变换概念

➤ 2.6小波变换的数学定义

母小波：$\psi(x)$

经过缩放和平移得到小波基函数　$\psi_{a,b}(x)=|a|^{-\frac{1}{2}}\psi(\frac{x-b}{a})$

其中：a为缩放参数、b为平移参数

函数$f(x)$用小波$\psi(x)$为基的连续小波变换为：

$$W(a,b)=<f,\psi_{a,b}>=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{x-b}{a})dx$$

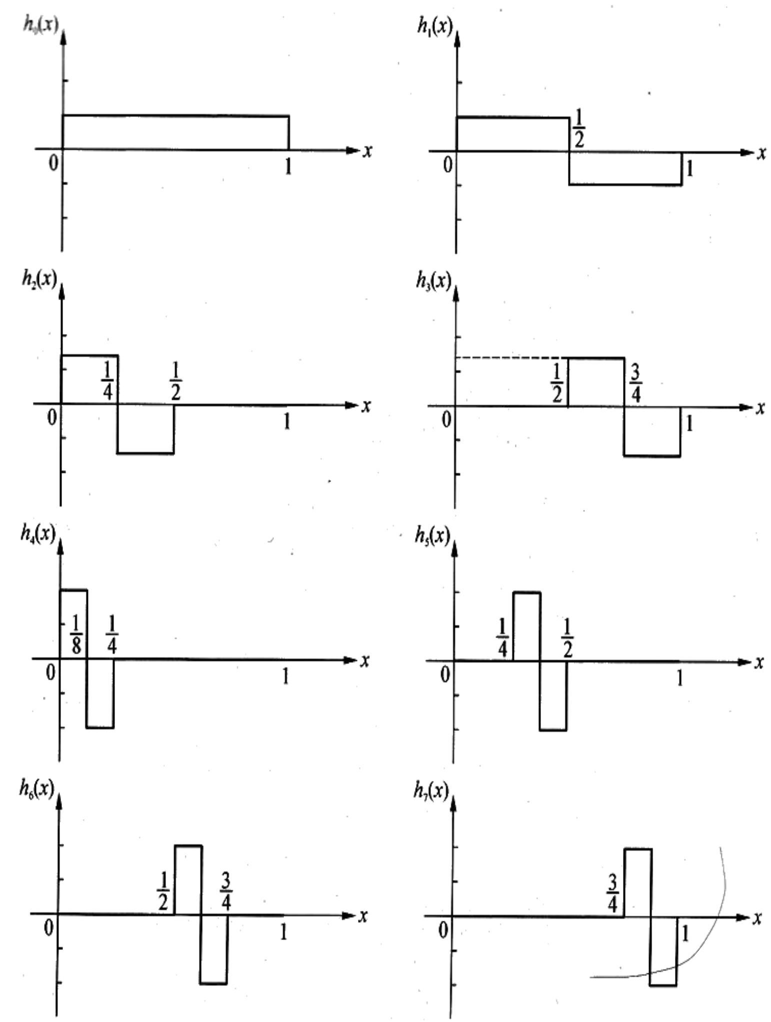
当$a=2^j$和$b=ia$的情况下

连续小波基成为离散的小波基函数

$$\psi_i^j(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x-i),\quad \text{其中}i\text{为平移参数，}j\text{为缩放因子}$$

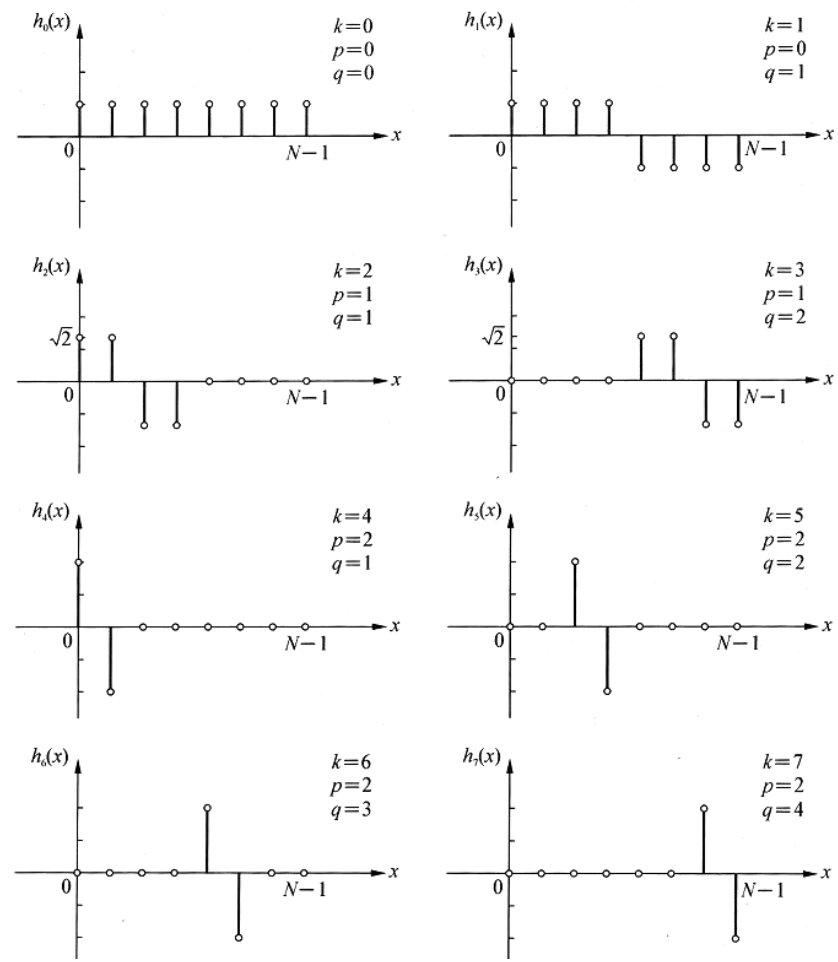
§7.3哈尔小波

- 1.哈尔函数
  - 哈尔变换基函数
    - $h_0(x)$是直流成分
    - $h_1(x)$是母小波
    - 其他为具有不同尺度和位移的小波基函数



§7.3哈尔小波

- 2.离散哈尔变换基函数
  - N=8离散基函数举例
  - 基函数有8个，相互正交
  - 波形尺度p分别有0，1，2
  - 尺度越大，位移项越大
  - 基函数高度
    - 基础为 $\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$，
    - 尺度缩小一倍，高度扩大 $\sqrt{2}$
    - 尺度为 1，高度为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$
    - 尺度为2，高度为 $\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{8}}=\frac{2}{\sqrt{8}}$
  - q为同尺度下的基函数索引



§7.3哈尔小波

➢3.离散哈尔变换的变换矩阵

- ➢将图示化的变换基函数，采用解析的方式表示
- ➢N=8举例，可以构造一个8X8的变换矩阵

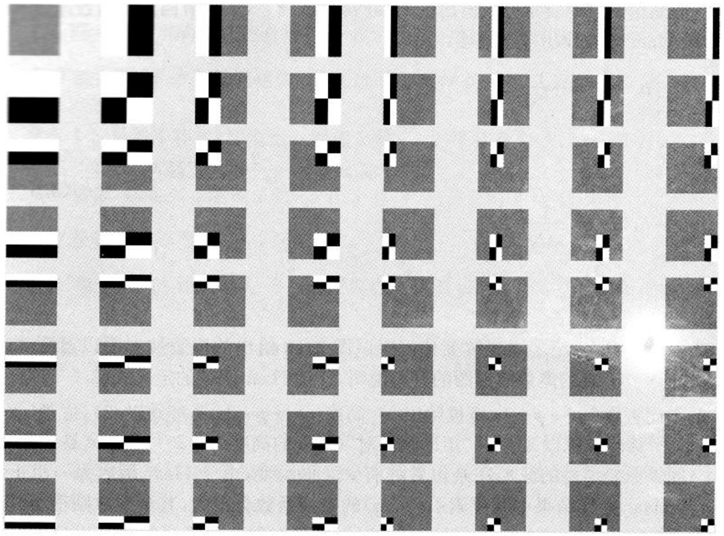
$$\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- ➢对于N=2

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

§7.3哈尔小波

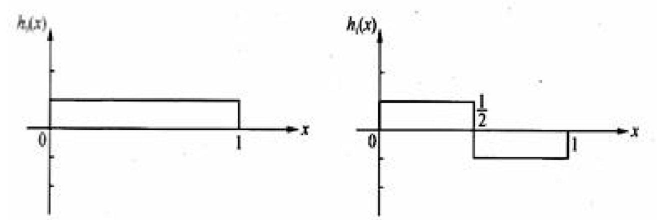
- 4. 2-D哈尔变换基函数
  - 构造可分离、对称的2-D哈尔变换
  - 将1-D哈尔基函数扩展
  - 给出N=8的2-D哈尔变换基函数



§7.3哈尔小波

5. 单层 2-D哈尔变换

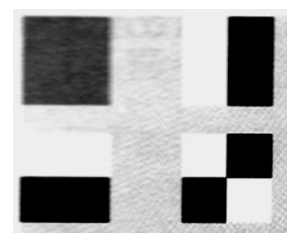
- 1-D基函数波形



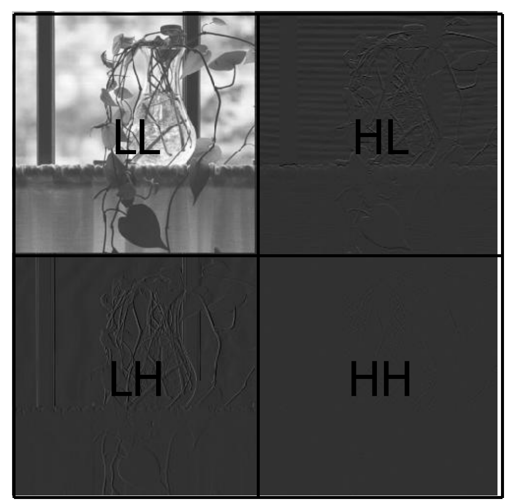
- 1-D基函数

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

- 2-D扩展



- 单层变换结果



*LL*平滑近似

*LH*垂直细节分量（水平近似）

*HL*水平细节分量（垂直近似）

*HH*对角细节分量

此分解可推广到多层

§ 7.4小波变换的应用

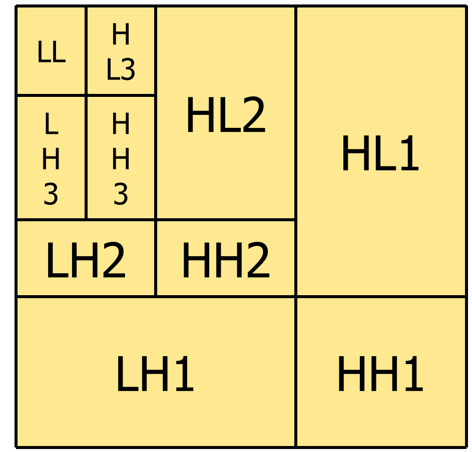
- 1.小波变换在图像处理中的应用
  - 小波变换结果

    *LL*平滑近似

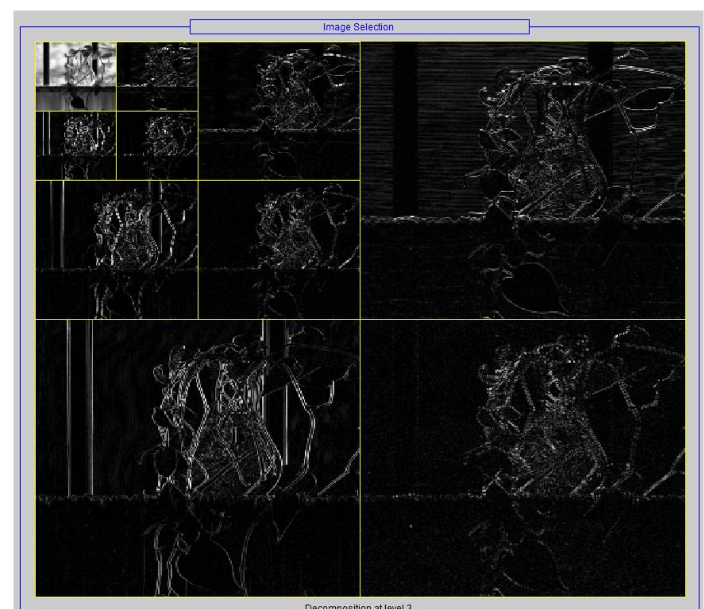
    *LH*垂直分量

    *HL*水平分量

    *HH*对角分量



  - 小波变换处理步骤
    - 计算图像小波变换
    - 修改变换参数
    - 计算反变换
  - 基本matlab函数
    - 正变换 dwt2
    - 逆变换idwt2

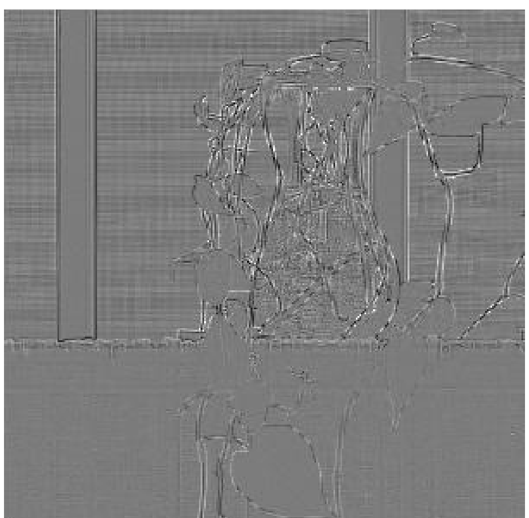


§ 7.4小波变换的应用

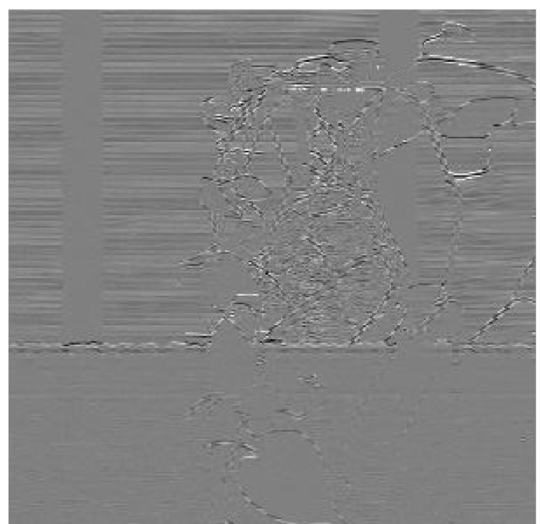
2.边界提取

- 处理机理：
  - 边界属于细节信息，对变换以后的数据，舍弃近似数据，保留细节数据，可以达到提取边界的目的
- 算法推广：
  - 若只保留某一方向的细节数据，可以提取方向性边界

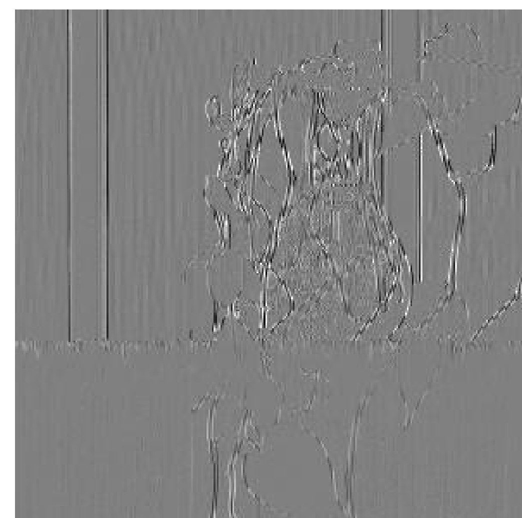
边界提取



水平边界

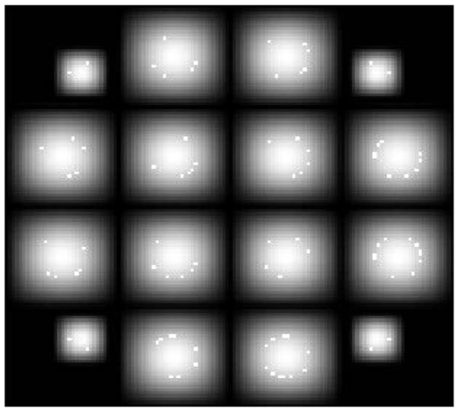


垂直垂直

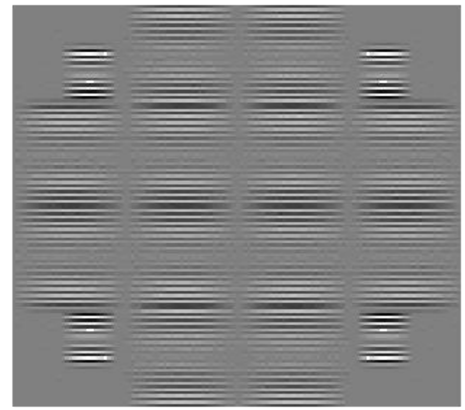


§7.4小波变换的应用-边界检测

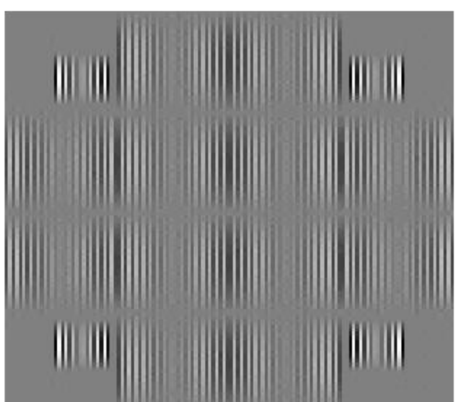
原始图像



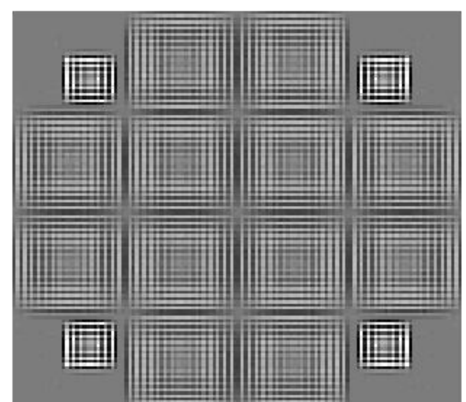
水平边界



垂直垂直



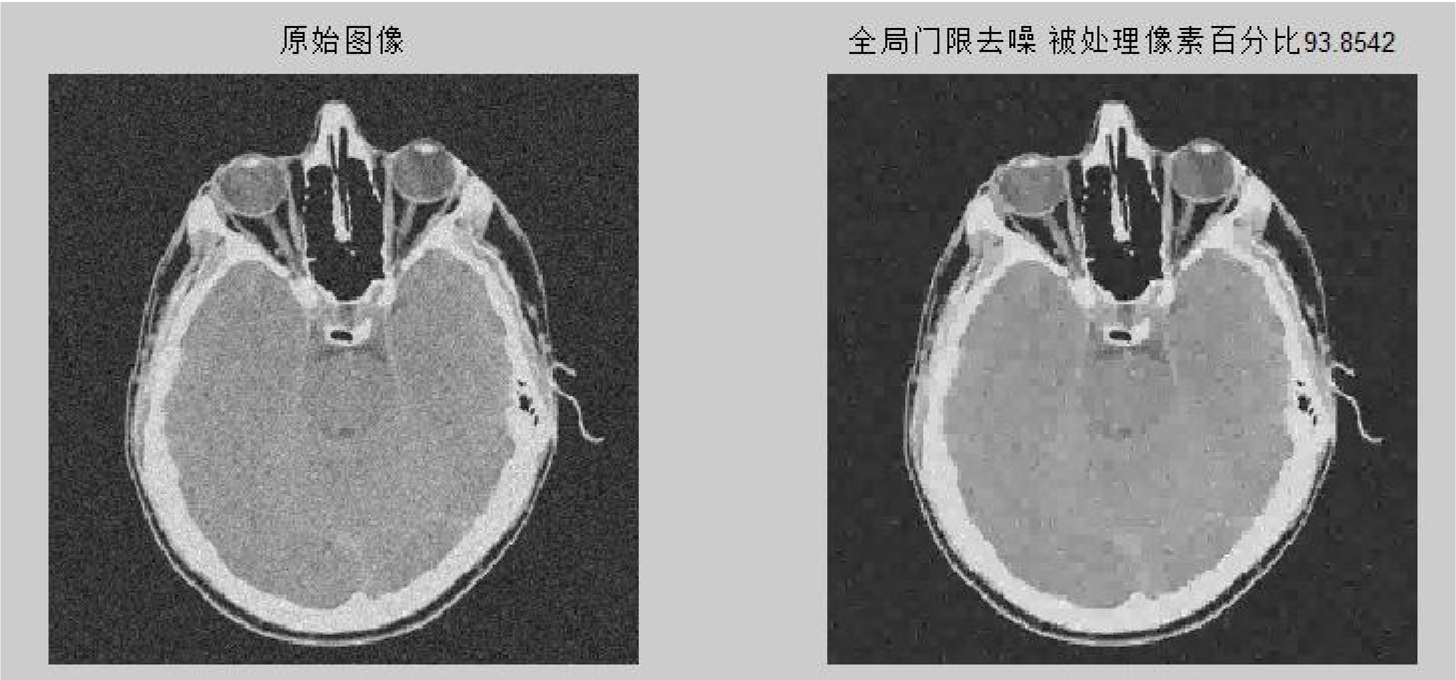
边界提取



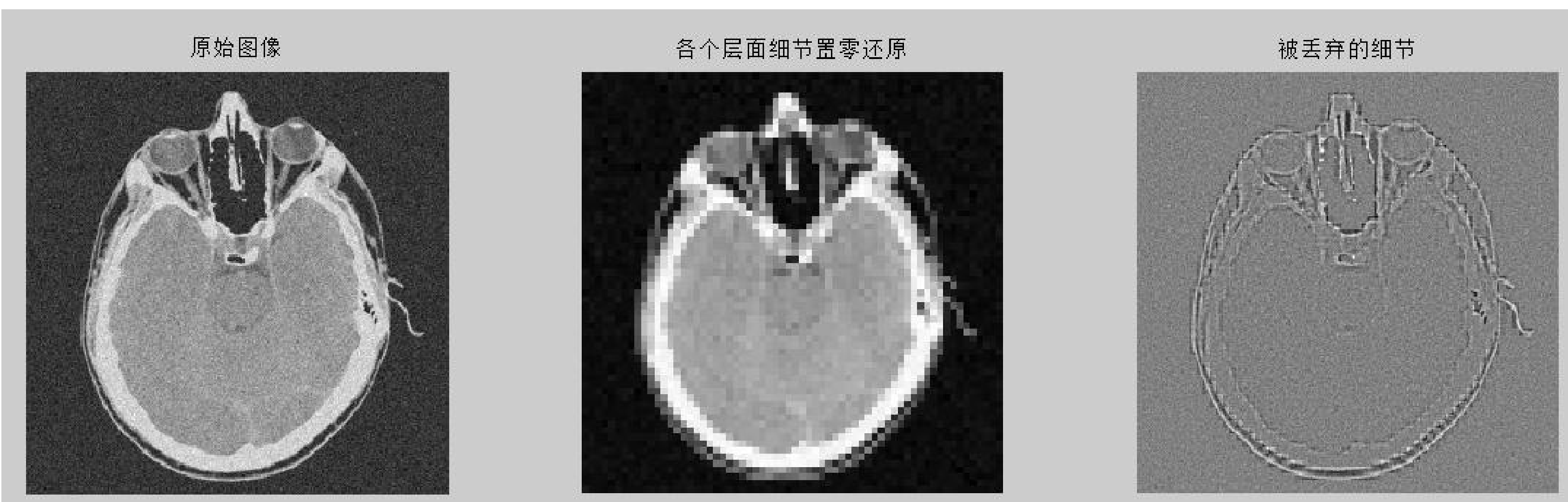
§7.4小波变换的应用

3.图像去噪

- 处理机理：
  - 噪声具有细节特征，存在于变换后的细节分量中，选择合适的尺度的细节分量进行门限化处理，可以达到去噪目的



§7.4小波变换的应用-去噪



§ 7.4小波变换的应用

- 4.图像编码
  - 处理机理：
    - 小波变化后，大量数据反映细节内容。舍弃一定的细节信息不影响反变换的观察效果
    - 细节信息数据动态范围小，适合采用短码字的量化压缩
- 5.图像的融合
  - 处理机理
    - 同一目标，不同方式获得的图像，可反映其多维度信息
    - 融合处理能在一幅图像上反映更丰富的信息
    - 融合的步骤一般包括
      - 预处理，去除噪声
      - 配准，位置校准
      - 在变换域进行信息取舍，反变换得到融合结果

本章小结

- 多分辨率概念
  - 金字塔表示
  - 子带编码
- 小波变换的概念
  - 基于小波的信号分解概念
  - 小波基函数
  - 小波变换
  - 哈尔小波
- 小波变换的应用