函数的连续性

内容提要

一、函数在一点的连续性

若函数 f 在某个 $U(x_0)$ 内有定义，f 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $=f(\lim\limits_{x\to x_0} x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

若 f 在某个 $U_+(x_0)$ 内有定义，f 在点 x_0 右连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，或 $f(x_0+0)=f(x_0)$.

若 f 在某个 $U_-(x_0)$ 内有定义，f 在点 x_0 左连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，或 $f(x_0-0)=f(x_0)$.

f 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f$ 在点 x_0 左、右连续.

二、间断点的类型

对于间断点 x_0：

若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在 x_0 处间断，x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

1. **第一类间断点**

$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在.

2. **第二类间断点**

$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在.

三、连续函数的局部性质

1. **局部有界性**

若函数 f 在点 x_0 连续,则 f 在某邻域 $U(x_0)$ 内有界.

2. **局部保号性**

若函数 f 在点 x_0 连续,且 $f(x_0)>0$(或 <0),则对任何正数 $r<f(x_0)$(或 $-r>f(x_0)$),存在某 $U(x_0)$,使得对一切 $x\in U(x_0)$,有

$$f(x)>r(\text{或 } f(x)<-r).$$

3. **四则运算**

若函数 f 和 g 在点 x_0 连续,则 $f\pm g$,$f\cdot g$,$\frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$ 也都在点 x_0 连续.

4. **复合函数的连续性**

若函数 f 在点 x_0 连续,g 在点 u_0 连续,$u_0=f(x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0} f(x))=g(f(x_0)) \tag{4.1}$$

5. **公式复合函数的连续性的推广形式**

当点 x_0 为内函数 f 的可去间断点时,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$,且外函数 g 在 $u=a$ 处连续,则

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

(上式对 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$,$x\to x_0^+$,$x\to x_0^-$ 同样成立)

四、闭区间上连续函数的整体性质

1. **有界性定理和最大、最小值定理**

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上有界,并取到最大、最小值.

2. **介值定理和根的存在定理**

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$. 这就是根的存在定理,介值定理是根的存在定理的推广.

3. **反函数的连续定理**

若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续,则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续.

4. **一致连续性定理**

若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对任何 $x',x''\in[a,b]$,只要 $|x'-x''|<\delta$,就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

五、初等函数的连续性

1. **指数函数的连续性**

在初等数学中指数函数 a^x 当 x 为有理数时已有定义,利用确界原理可以将 a^x 的定义域扩充到 x 为任何实数的情况:

$$a^x = \sup_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\} \quad (a>1)$$

$$a^x = \inf_{r<x}\{a^r \mid r\text{为有理数}\} \quad (0<a<1)$$

这样定义的实数指数函数同样有如下运算法则：

$$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta} \qquad (a^{\alpha})=a^{\beta}\alpha\beta$$

(1)**指数函数** $a^x(a>0,a\neq1)$**在** R **上连续，且满足**

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty(a>1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x=0(0<a<1)$$

(2)**对数函数** $\log_a x$ **在其定义域**$(0,+\infty)$**内也连续，且**

$$\lim_{x\to0^+}\log_a x=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty \quad (a>1)$$

$$\lim_{x\to0^+}\log_a x=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty \quad (0<a<1)$$

2. 指数函数的连续性在求极限中的应用

(1)**设** $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b$，**则**

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=a^b$$

(2)**设** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} v_n=b$，**则**

$$\lim_{n\to\infty} u_n{}^{v_n}=a^b$$

3. 初等函数的连续性

一切基本初等函数都是其定义域上的连续函数，任何初等函数都是在其定义区间上的连续函数.

典型例题与解题技巧

【例 1】 用一致连续定义证明：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x}$**在**$[0,1]$**上一致连续；**

(2) $f(x)=\sin x$ **在**$(-\infty,+\infty)$**上一致连续；**

(3) $f(x)=\sin x^2$ **在**$(-\infty,+\infty)$**上不一致连续.**

分析 **本题利用了一致连续性的定义.**

证明 (1) $\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|=\dfrac{|x_1-x_2|}{x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}}}\leqslant\dfrac{|x_1-x_2|}{\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2})^2}$

即 $\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|^3\leqslant4|x_1-x_2|$，$\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|\leqslant4^{\frac{1}{3}}|x_1-x_2|^{\frac{1}{3}}$

$$x_1^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}}x_1^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}(x_1^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}})^2+\frac{1}{4}(x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}})^2\geqslant\frac{1}{4}(x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}})^2$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\dfrac{\varepsilon^3}{4}$，**当** $|x_1-x_2|<\delta$ **时**，$\left|\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_2}\right|<\varepsilon$

(2) $|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\dfrac{x_1-x_2}{2}\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\right|$

$$\leqslant2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$.

(3)取 $x_1=\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}},x_2=\sqrt{2n\pi}$，易见 $|\sin x_1^2-\sin x_2^2|=1$.

但
$$|x_1-x_2|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi}}<\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$$

$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2},\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},x_1=\sqrt{2\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}},x_2=\sqrt{2\mathrm{n}\pi}$

$|x_1-x_2|<\delta$，但 $|\sin x_1^2-\sin x_2^2|=1\geqslant\varepsilon_0$.

【例 2】 试证方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少 $\exists$ 一个 ξ，使得它不超过 $b+a$.

分析 本题主要利用连续函数的性质.

证明 令 $F(x)=x-a\sin x-b$，显然 $F(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续，则 $F(0)=-b<0$，($\because b>0$)

$F(a+b)=(a+b)-a\sin(a+b)-b=a[1-\sin(a+b)]\geqslant 0$

(ⅰ)若 $1-\sin(a+b)=0$，则 $\xi=a+b$ 即为方程的正根；

(ⅱ)若 $2-\sin(a+b)\neq 0$，则 $F(a+b)>0$，于是
$$F(0)\cdot F(a+b)<0$$

由零值定理可知，$\exists$ 一个 $\xi\in(0,a+b)$，使得 $F(\xi)=0$.

即 $\xi-a\sin\xi-b=0$，亦即 $\xi=a\sin\xi+b,0<\xi<a+b$ 命题得证.

历年考研真题评析

【题 1】 (北京大学，2006 年)设 $f(x)$ 在 $[a,a+2\alpha]$ 上连续，证明：存在 $x\in[a,a+\alpha]$，使得
$$f(x+\alpha)-f(x)=\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)-f(a)].\qquad ①$$

分析 本题主要考察连续函数的性质.

证明 令
$$g(y)=f(y+\alpha)-f(y)-\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)-f(a)]$$

则 $g(a)=f(a+\alpha)-\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)+f(a)],g(a+\alpha)=\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)+f(a)]-f(a+\alpha)$

$\therefore$
$$g(a)\cdot g(a+\alpha)\leqslant 0$$

(1)若 $g(a)=0$，则
$$f(a+\alpha)-f(a)=\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)-f(a)]$$

则①式成立.

(2)若 $g(a+\alpha)=0$，则
$$f[(a+\alpha)+\alpha]-f(a+\alpha)=\frac{1}{2}[f(a+2\alpha)-f(a)]$$

①式也成立.

(3)若
$$g(a)\cdot g(a+\alpha)<0$$

则由 $g(x)$ 连续及连续函数的零值定理，也存在 $x\in(a,a+\alpha)$ 使 $g(x)=0$. 从而①式仍然成立.

综上所述结论得证.

【题 3】（广西师范大学，2005 年）设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$.

试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

分析 本题主要考察介值定理的应用.

证明 不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，且 $x<x_n$.

$\because f(x)$ 在 $[x_1,x_n]\subset(a,b)$ 上连续

$\therefore f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，且有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,x\in[x_1,x_n]$$

显然有

$$m\leqslant f(x_1)\leqslant M$$
$$m\leqslant f(x_2)\leqslant M$$
$$\vdots$$
$$m\leqslant f(x_n)\leqslant M$$

$\therefore$

$$nm\leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nM$$

$\Rightarrow$

$$m\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\leqslant M$$

由介质定理，在 $[x_1,x_n]\subset(a,b)$ 上存在一个 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

课后习题全解

§1 连续性概念

○1. 按定义证明下列函数在其定义域内连续：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=|x|$.

证明 (1) 对 $\forall x_0\in D,D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由于

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}=f(x_0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，即 $f(x)$ 在 D 内连续.

(2) 对 $\forall x_0\in D,D=\mathbf{R}$，由于

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\sqrt{x^2}=\sqrt{x_0^2}=|x_0|=f(x_0)$$

故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，即 $f(x)$ 在 D 内连续.

◎2. 指出下列函数的间断点并说明其类型：

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$；

(3) $f(x)=[|\cos x|]$；　　(4) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$；

(5) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$；　　(6) $f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ -x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$

分析 间断点分为第一类与第二类，判断间断点的类.

解 (1) $x=0$ 时，$f(x)$ 无定义，且

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

(2) $x=0$ 时，$f(x)$ 无定义，且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{\sin x}{x}\right]=-1$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点.

(3) 当 $x=n\pi$ 时，$\quad f(x)=[|\cos n\pi|]=1$

当 $x\neq n\pi$ 时，由于 $|\cos n\pi|<1$，故

$$f(x)=[|\cos n\pi|]=0$$

且 $$\lim_{x\to n\pi} f(x)=\lim_{x\to n\pi}[|\cos x|]=\lim_{x\to n\pi}0=0\neq f(n\pi)$$

故 $x=n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

(4) 当 $x=0$ 时，$$f(x)=\operatorname{sgn}|x|=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$$f(x)=\operatorname{sgn}|x|=1$$

且 $$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}|x|=\lim_{x\to 0}1=1\neq f(0)$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类可去间断点.

(5) 当 $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=0$$

当 $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=1$$

当 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{3\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=-1$$

且当 $x_0=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}(\cos x)=1,\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}(\cos x)=-1$$

当 $x_0=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 时

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sng}(\cos x)=-1,\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}(\cos x)=1$$

故 $x_0=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是函数 f 的第一类跳跃间断点.

(6) 当 $x=0$ 时，$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 均不存在，故 $\forall x_0\in\mathbf{R}-\{0\}$ 均为 f 的第二类间断点.

(7) $\lim\limits_{x\to -7^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -7^-}\dfrac{1}{x+7}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1=f(1),$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1} = 0.$$

故 $x=-7$ 为 f 的第二类间断点，$x=1$ 为 f 的第一类跳跃间断点.

○3. **延拓下列函数，使其在 R 上连续：**

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$； (2) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$； (3) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$.

解 (1) $x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点，但

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$$

故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 2) \\ 12 & (x=2)\end{cases}$$

则 F 在 R 上连续.

(2) $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，但

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 0) \\ \dfrac{1}{2} & (x=0)\end{cases}$$

则 F 在 R 上连续.

(3) $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点，但

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，定义

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

则 F 在 R 上连续.

●4. **证明：若 f 在点 x_0 连续，则 $|f|$ 与 f^2 也在点 x_0 连续. 又问：若 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续，那么 f 在 I 上是否必连续？**

分析 要证 f^2 连续，证 $f^2=f\cdot f$ 即可. 要证 $|f|$ 连续，证 $|f|=\sqrt{f^2}$ 即可，$|f|$ 或 f^2 连续不一定有 f 连续.

证明 由 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，从而

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = f^2(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)} = \sqrt{f^2(x_0)} = |f(x_0)|$$

即 $|f|$ 与 f^2 也在 $x=x_0$ 连续.

构造函数
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geqslant 0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

则有
$$|f(x)|=1,\ f^2(x)=1,\ \forall x\in \mathbf{R}$$

即 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 R 上连续，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续. 因此，由 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续不能断定 f 在 I 上必连续. 当然 $|f|$ 或 f^2 在 I 上连续，f 亦有可能是在 I 上连续的，这只要将 f 取为连续函数即可.

小结　注意本题不连续函数的构造，这是难点，为以后学习微分，积分，甚至实变函数打下基础.

◎5. 设当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\equiv g(x)$，而 $f(0)\neq g(0)$. 证明：f 与 g 两者中至多有一个在 $x=0$ 连续.

分析　利用反证法证明.

证明　反证法：设 f 与 g 均在 $x=0$ 连续，则有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),\quad \lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$$

而
$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0} 0=0$$

因此
$$\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to 0} f(x)-\lim_{x\to 0} g(x)=f(0)-g(0)=0$$

即 $f(0)=g(0)$ 与题设矛盾. 故 f 与 g 不可能同时在 $x=0$ 连续.

◎6. 设 f 为区间 I 上的单调函数. 证明：若 $x_0\in I$ 为 f 的间断点，则 x_0 必是 f 的第一类间断点.

分析　设 f 为 $U^0(x_0)$ 上单调有界函数，利用确界与极限关系，证明左右极限均存在，x_0 为间断点.

证明　若 f 为区间 I 上单调增函数，取 $U^\circ(x_0)\subset I$，且满足 $\forall x\in U^\circ(x_0)$，$\exists x_1,x_2\in I$，使 $x_1<x<x_2$，则 f 在 $U^\circ(x_0)$ 上为有界函数. 由第三章 §3 中习题 5 知

$$f(x_0+0)=\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)} f(x),\quad f(x_0-0)=\sup_{x\in U^\circ_-(x_0)} f(x)$$

即 f 在 x_0 左、右极限均存在，因此 x_0 若为 f 的间断点，则 x_0 必为 f 的第一类间断点. 若 f 为区间 I 上单调减函数，则令 $F(x)=-f(x)$，则 $F(x)$ 为 I 上单调增函数，从而

$$f(x_0+0)=-F(x_0+0)=-\inf_{x\in U^\circ_+(x_0)}\{-f(x)\}=\sup_{x\in U^\circ_+(x_0)} f(x)$$

$$f(x_0-0)=-F(x_0-0)=-\sup_{x\in U^\circ_-(x_0)}\{-f(x)\}=\inf_{x\in U^\circ_-(x_0)} f(x)$$

因此，结论同样成立.

◎7. 设函数 f 只有可去间断点，定义 $g(x)=\lim\limits_{y\to x} f(y)$. 证明 g 为连续函数.

分析　利用复合函数求极限问题证明，注意添项法在绝对值不等式中的运用. $g(x)-g(x_0)=g(x)-f(y)+f(y)-g(x_0)$.

证明　任取 $x_0\in D(f)$，$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=g(x_0)$ 得 $\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0;\delta)$ 时有

$$|f(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

而由 $\lim\limits_{y\to x} f(y)=g(x)$ 得 $\exists\delta_1>0$，使 $U(x;\delta_1)\subset U(x_0;\delta)$ 且 $\exists\delta_2>0$，当 $y\in U(x;\delta_2)$ 时，有

$$|f(y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta'=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $y\in U(x;\delta')\subset U(x_0;\delta)$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故有
$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)|&=|g(x)-f(y)+f(y)-g(x_0)|\\&\leqslant|f(y)-g(x_0)|+|f(y)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

故有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，由 x_0 的任意性知 g 为连续函数.

◎8. 设 f 为 **R** 上的单调函数，定义 $g(x)=f(x+0)$. 证明 g 在 **R** 上每一点都右连续.

分析 要证 g 在 R 上右连续即 $\forall x_0$ 有 $|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$. 利用 $g(x)=f(x+0)$ 证 $|f(x+0)-f(x_0+0)|<\varepsilon$. 再利用 f 在 R 上的单调性及极限定义.

证明 假设 f 为 **R** 上的单调增函数. 任取 $x_0\in\mathbf{R}$，$\forall\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在，知 $\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时有

$$|f(x)-f(x_0+0)|<\varepsilon$$

由 f 为 **R** 上的单调增函数，知 $f(x)\leqslant f(x+0)$，$\forall x\in\mathbf{R}$ 且对于满足条件 $x_0<x<x'<x_0+\delta$ 的 x' 有

$$f(x)\leqslant f(x+0)\leqslant f(x')$$

即有 $$f(x_0)\leqslant f(x_0+0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0)\leqslant f(x')$$

从而 $$|g(x)-g(x_0)|=|f(x+0)-f(x_0+0)|\leqslant|f(x')-f(x_0+0)|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=g(x_0)$，由 x_0 的任意性，得 g 为 **R** 上右连续函数.

若 f 为 **R** 上的单调减函数，取 $F=-f$，则 F 为 **R** 上单调增函数，且为 **R** 上右连续函数，故易知 f 为 **R** 上右连续函数.

$\boxed{●9.}$ 举出定义在 $[0,1]$ 上分别符合下述要求的函数：

(1) 只在 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点不连续的函数；

(2) 只在 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{4}$ 三点连续的函数；

(3) 只在 $\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$ 上间断的函数；

(4) 只在 $x=0$ 右连续，而在其他点都不连续的函数.

分析 (1) 利用分段函数在 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)$ 为某一常量. (2) 利用狄利克雷函数. (3) 利用 $\left[\dfrac{1}{x}\right]$，分段函数思想. (4) 利用狄利克雷函数.

解 (1) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)} & \left(x\neq\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right),\\[2ex] 1 & \left(x=\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}\quad \forall x\in[0,1]$$

(2) $$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)D(x),\ \forall x\in[0,1]$$

(3) $$f(x)=\begin{cases}x\left[\dfrac{1}{x}\right] & (x\neq 0,1)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x=1)\end{cases},\ \forall x\in[0,1].$$

(4) $f(x)=xD(x)$，$\forall x\in[0,1]$

小结 构造函数是数学学习中的难点，通常要考虑间断点，可采用分段函数法和特殊函数法，本

题中(2)(4)都用了 $D(x)$.

§2 连续函数的性质

○1. 讨论复合函数 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 的连续性,设

(1) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=1+x^2$;　　(2) $f(x)=\operatorname{sgn} x, g(x)=(1-x^2)x$.

解　(1) $f\circ g(x)=f[g(x)]=\operatorname{sgn}(1+x^2)\equiv 1$

$f\circ g$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续

$$g\circ f(x)=g[f(x)]=1+[\operatorname{sgn} x]^2=\begin{cases}2 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

$g\circ f$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上连续. $x=0$ 为其第一类可去间断点.

(2) $g\circ f(x)=g[f(x)]=[1-(\operatorname{sgn} x)^2]\cdot\operatorname{sgn} x\equiv 0$

$g\circ f$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\operatorname{sgn}[x(1-x^2)]=\begin{cases}1 & (x\in(-\infty,-1)\cup(0,1))\\ 0 & (x=0,x=\pm 1)\\ -1 & (x\in(-1,0)\cup(1,+\infty))\end{cases}$$

$f\circ g$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续. $x=0,x=\pm 1$ 为其第一类跳跃间断点.

◎2. 设 f,g 在点 x_0 连续,证明:

(1) 若 $f(x_0)>g(x_0)$,则存在 $U(x_0;\delta)$,使在其内有 $f(x)>g(x)$;

(2) 若在某 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)>g(x)$,则 $f(x_0)\geqslant g(x_0)$.

分析　(1) 构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$. 利用 f,g 在 x_0 点的连续性与局部保号性.

(2) 利用 f,g 在 x_0 连续及极限保不等式性证明.

证明　(1) 设 $F(x)=f(x)-g(x)$,由连续函数性质知,$F(x)$ 在 x_0 连续,而

$$F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)>0$$

由连续函数的局部保号性得 $\exists U(x_0;\delta)$,使得

$\forall x\in U(x_0;\delta)$　　$F(x)>0$

即　　$f(x)>g(x)$

(2) 由于 f,g 在点 x_0 连续,故

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

由题设条件,据函数极限保不等式性得　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

即　　$f(x_0)\geqslant g(x_0)$

○3. 设 f,g 在区间 I 上连续,记

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad G(x)=\min\{f(x),g(x)\}.$$

证明 F 和 G 也都在 I 上连续.

证明　由第一章总练习题 1 知

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

由本章 §1 习题 4 知,f 在点 x_0 连续,则 $|f|$ 亦在点 x_0 连续. 而 $f(x),g(x)$ 均在区间 I

上连续，因此 $f(x)-g(x)$ 在 I 上连续，故 $|f(x)-g(x)|$ 在 I 上连续. 由连续函数性质知，F，G 都在 I 上连续.

○4. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上连续函数，常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & \text{若 } f(x)<-c,\\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant c,\\ c, & \text{若 } |f(x)|>c.\end{cases}$$

证明 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

证明 $F(x)=\dfrac{1}{2}[|c+f(x)|-|c-f(x)|]$

由于 $f(x)$、常量函数 c 均在 $\mathbf{R}$ 上连续，故 $|c\pm f(x)|$ 亦在 $\mathbf{R}$ 上连续，进而 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

◎5. 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leqslant 0,\\ x+\pi, & x>0.\end{cases}$

证明：复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 连续，但 g 在 $x=0$ 不连续.

分析 利用复合函数连续性证明，注意复合函数定义域. 证 g 在 $x=0$ 不连续，只需左右极限在 $x=0$ 处不相等即可.

证明
$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi), & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi), & x>0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\sin x, & x\leqslant 0\\ -\sin x, & x>0\end{cases}=-\sin x, x\in\mathbf{R}$$

由于 $\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$f\circ g$ 在 $x=0$ 连续，而

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+\pi)=\pi,\quad \lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-\pi)=-\pi$$

故 g 在 $x=0$ 不连续.

●6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明：f 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 又问 f 在 $[a,+\infty)$ 上必有最大值或最小值吗？

分析 要证 f 在 $[a,+\infty]$ 上有界，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，$|f(x)|<|A|+1$，取 $[a,M]$ 再利用闭区间连续性质. f 在 $[a,+\infty]$ 上有界，不一定存在最值，利用分类讨论法.

证明 记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则对于 $\varepsilon_0=1$，$\exists M>\max\{a,0\}$，当 $x>M$ 时有

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1$$

即
$$|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1$$

又 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上连续，由闭区间连续函数性质知，$\exists B>0$，使 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上有

$$|f(x)|<B$$

故有
$$\forall x\in[a,+\infty),\ |f(x)|<\max\{|A|+1,B\}$$

从而 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

考察 $f(x)=\arctan x$，$g(x)=-\arctan x$，$x\in[0,+\infty)$，均满足本题条件. 但前者无最大值，后者无最小值. 故 f 在 $[a,+\infty)$ 上不一定有最大值，也不一定有最小值. 但 f 在 $[a,+\infty)$ 上至少有最大值、最小值之一.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（$A$ 为有限值），我们分类讨论.

ⅰ）存在 $x_0\in[a,+\infty)$，使 $f(x_0)>A$

取 $\varepsilon_0=\dfrac{f(x_0)-A}{2}$,则 $\exists M_1>0$,当 $x>M_1$ 且 $x>x_0$ 时有

$$A-\frac{f(x_0)-A}{2}<f(x)<A+\frac{f(x_0)-A}{2}$$

即 $$f(x)>\frac{3A-f(x_0)}{2}\quad 且\quad f(x)<\frac{f(x_0)+A}{2}<f(x_0)$$

而在 $[a,M_1]$ 上 $f(x)$ 有最大值 M

$$\forall x\in(M_1,+\infty),\quad f(x)<f(x_0)\leqslant M$$

故 $\forall x\in[a,+\infty)$, $f(x)<M$, M 为 $f(x)$ 的最大值.

ⅱ) 存在 $x_0\in[a,+\infty)$,使 $f(x_0)<A$

取 $\varepsilon_0=\dfrac{A-f(x_0)}{2}$,则 $\exists M_2>0$,当 $x>M_2$ 且 $x>x_0$ 时有

$$A-\frac{A-f(x_0)}{2}<f(x)<A+\frac{A-f(x_0)}{2}$$

即 $$\frac{A+f(x_0)}{2}<f(x)<\frac{3A-f(x_0)}{2}$$

故 $\forall x\in(M_2,+\infty)$ 有

$$f(x_0)<f(x)$$

而 $f(x)$ 在 $[a,M_2]$ 上取到最小值 m,对于 $\forall x\in(M_2,+\infty)$ 有

$$f(x)>f(x_0)\geqslant m$$

故对 $\forall x\in[a,+\infty)$, $f(x)\geqslant m$, m 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上最小值.

ⅲ) $f(x)\equiv A$, $\forall x\in[a,+\infty)$.

此时,A 既为 $f(x)$ 的最大值又为 $f(x)$ 的最小值.

小结 证在开区间上有界,采用在此区间内取一个闭区间,证明最值要利用单调性和有界性.

○7. 若对任何充分小的 $\varepsilon>0$, f 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续,能否由此推出 f 在 (a,b) 内连续.

解 $\forall x_0\in(a,b)$,取 $\varepsilon_0=\min\left\{\dfrac{x_0-a}{2},\dfrac{b-x_0}{2}\right\}$,则 $\varepsilon_0>0$ 且 $x_0\in[a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0]$. 由已知,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,由 x_0 的任意性得 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

○8. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x$; (2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\pi-x)\tan x=\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{4}\pi$

(2) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{1+2x}-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\dfrac{1\times\sqrt{1+2\times1}-\sqrt{1^2-1}}{1+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

◎9. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上连续,且对任何 $x\in[a,b]$, $f(x)\neq0$,则 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

分析 用反证法,应用零点定理得出与已知矛盾.

证明 反证法:若 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$ 使得 $f(x_1)<0$, $f(x_2)>0$,则由 f 在 $[a,b]$ 上连续得,f 在 $[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]$ 上连续. 由根的存在定理知

$$\exists\xi\in(\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\})\subset[a,b]$$

使得 $f(\xi)=0$,与题设矛盾. 故 f 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

●10. 证明:任一实系数奇次方程至少有一实根.

分析 构造一个奇次函数 $F(x)$ 使 $F(x_1)\cdot F(x_2)<0$，应用零点定理.

证明 设 $f(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_i\in\mathbf{R}$，$a_{2n+1}\neq 0$，则 $f(x)=0$，即

$$F(x)=x^{2n+1}+b_{2n}x^{2n}+\cdots+b_1x+b_0=0,\quad b_i=\frac{a_i}{a_{2n+1}}\in\mathbf{R}$$

令 $M=\max\{|b_{2n}|,|b_{2n-1}|,\cdots,|b_1|,|b_0|\}$，则

当 $x>1$ 时

$$F(x)\geqslant x^{2n+1}-Mx^{2n}-Mx^{2n-1}-\cdots-Mx-M>x^{2n+1}-(2n+1)Mx^{2n}$$
$$=x^{2n}[x-(2n+1)M]$$

故取 $x_1=(2n+1)M+1$，有

$$F(x_1)>x_1^{2n}>0$$

当 $x<-1$ 时

$$F(x)\leqslant x^{2n+1}+M|x|^{2n}+M|x|^{2n-1}+\cdots+M|x|+M<x^{2n+1}+(2n+1)Mx^{2n}$$
$$=x^{2n}[x+(2n+1)M]$$

故取 $x_2=-(2n+1)M-1$ 时，有

$$F(x_2)<-x_2^{2n}<0$$

而 $F(x)$ 在 $[x_2,x_1]$ 连续，且 $F(x_1)\cdot F(x_2)<0$. 由根的存在定理知 $\exists\,\xi\in(x_2,x_1)$ 使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$，故 $f(x)=0$ 至少有一实根.

小结 实际上，当 x 的绝对值充分大时，任一多项式的符号全视最高次幂项的符号而定.

○11. 试用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 上一致连续.

证明 $\forall\,\varepsilon>0$，由于 f,g 都在区间 I 上一致连续，故

$\exists\,\delta_1>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$\exists\,\delta_2>0$，当 $x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对于 $\forall\,x',x''\in I$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时

$$|f(x')+g(x')-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

故 $f+g$ 在 I 上一致连续.

◎12. 证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

分析 要证 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty]$ 上一致连续，只需取 $[a,b]\subset[0,+\infty)$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续即可.

证明 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $\delta_1=2\varepsilon$，则当 $x',x''\in[1,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|=|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\left|\frac{x'-x''}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\right|<\frac{1}{2}|x'-x''|<\varepsilon$$

而 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,2]$ 上一致连续. 则 $\exists\,\delta_2>0$，当 $x',x''\in[0,2]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\dfrac{1}{4}\right\}$，则 $\forall\,x',x''\in[0,+\infty)$，且 $|x'-x''|<\delta$ 时，x',x'' 或落在 $[0,2]$ 内，或落在 $[1,+\infty)$ 内. 因此，无论何种情况，均有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

即 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

◎13. 证明:$f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上一致连续,但在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

分析 证明 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续,只要取到合适的 δ 即可. 证 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续,取 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$ 且 $|x',x''|<\delta$,但 $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$ 即可.

证明 先证 $f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上一致连续.

$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2(|a|+|b|+1)}$,则当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|=|(x'+x'')(x'-x'')|\leqslant[|x'|+|x''|]\cdot\delta$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(|a|+|b|+1)}\cdot 2(|a|+|b|)<\varepsilon$$

故 $f(x)=x^2$ 在$[a,b]$上一致连续.

但 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

取 $\varepsilon_0=1$,无论 $\delta>0$ 取得多小,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ 知,只要 n 充分大总可以使 $x'=n+\dfrac{1}{n}$,$x''=n$ 的距离 $|x'-x''|=\dfrac{1}{n}<\delta$,但

$$|f(x')-f(x'')|=\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2=2+\left(\frac{1}{n}\right)^2>1=\varepsilon_0$$

故 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上非一致连续.

○14. 设函数 f 在区间 I 上满足利普希茨(Lipschitz)条件,即存在常数 $L>0$,使得对 I 上的任意两点 x',x'' 都有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

证明 f 在 I 上一致连续.

证明 对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}>0$,则对于 $\forall x',x''\in I$ 且 $|x'-x''|<\delta$,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|<\varepsilon$$

故 f 在 I 上一致连续.

◎15. 证明 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

分析 证 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,$|\sin x|\leqslant|x|$,利用利普希茨条件即可.

证明 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$|\sin x|\leqslant|x|$$

$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则 $\forall x',x''\in\mathbf{R}$,且 $|x'-x''|<\delta$ 时,有

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\leqslant 2\cdot\frac{|x'-x''|}{2}<\varepsilon$$

因此,$\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

○16. 设函数 f 满足第 6 题的条件. 证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 知,$\exists M>0$,当 $x>M$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon/2$$

故对于任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$,当 $x',x''>M$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

而 f 在$[a,M+1]$上连续,因此,f 在$[a,M+1]$上一致连续,即 $\exists\delta'>0$,当 $|x''-x'|<\delta'$,且 $x',x''\in[a,M+1]$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

取 $\delta=\min\left\{\delta',\dfrac{1}{4}\right\}$,则 $\forall x',x''\in[a,+\infty)$,当 $|x'-x''|<\delta$ 时,或者 $x',x''\in[a,M+1]$ 或者 $x',x''\in[M,+\infty)$,因此无论何种情况,均有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

故 f 在$(a,+\infty)$ 上一致连续.

◎17. 设函数 f 在$[0,2a]$上连续,且 $f(0)=f(2a)$. 证明:存在点 $x_0\in[0,a]$,使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

分析 构造 $F(x)=f(x+a)-f(x)$,由 $F(x)$ 在$[0,2a]$上连续,取 $F(0)$ 与 $F(a)$,使 $F(0)\cdot F(a)\leqslant 0$,当 $f(a)=f(0)$ 时结论已证;当 $f(a)\neq f(0)$ 时利用零点定理.

证明 构造函数 $F(x)=f(x+a)-f(x)$,则由 $f(x)$ 在$[0,2a]$上连续知,$f(x+a)$ 在$[0,a]$上连续,进而 $F(x)$ 在$[0,a]$上连续,且

$$F(0)=f(a)-f(0),\quad F(a)=f(2a)-f(a)=f(0)-f(a)$$

即

$$F(0)\cdot F(a)=-[f(a)-f(0)]^2$$

若 $f(a)=f(0)$,则 $f(a)=f(0)=f(2a)=f(a+a)$,即 $\exists x_0=a\in[0,a]$,使得

$$f(x_0)=f(x_0+a)$$

若 $f(a)\neq f(0)$,则 $F(0)\cdot F(a)<0$,由 $F(x)$ 在$[0,a]$上连续及根的存在定理知,$\exists x_0\in[0,a]$,使得 $F(x_0)=0$,即

$$f(x_0)=f(x_0+a)$$

综上所述,知 $\exists x_0\in[0,a]$ 使得

$$f(x_0)=f(x_0+a)$$

小结 $F(x)$ 在$[0,2a]$上连续,在其内的任何闭区间上也连续,取$[0,a]$,$F(0)$ 与 $F(a)$ 方向恰好相反,证明时要利用函数端点值.

◎18. 设 f 为$[a,b]$上的增函数,其值域为$[f(a),f(b)]$. 证明 f 在$[a,b]$上连续.

分析 由 f 在$[a,b]$上的增函数,比较值域的端点值即证.

证明 $\forall x_0\in[a,b]$,由 f 为$[a,b]$上的增函数及第三章 §3 习题 5 得知,$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在,且此时有

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0),\ \forall x_0\in(a,b)$$

或

$$f(b-0)\leqslant f(b),\quad \text{或}\quad f(a)\leqslant f(a+0)$$

若以上各式不等号有一个成立,不失一般性,设 $f(x_0)<f(x_0+0)$,则对于任意的 $\mu\in[f(x_0),f(x_0+0)]\subset[f(a),f(b)]$,将不存在 $x'\in[a,b]$,使得

$$f(x')=\mu$$

事实上,若 $\exists x'\in[a,b]$,使 $f(x')=\mu$,则 x' 必为以下三种情形之一:

ⅰ) $x'<x_0$,此时有 $f(x')\leqslant f(x_0)$

ⅱ) $x'>x_0$,此时有 $f(x')\geqslant f(x_0+0)$

故与$[f(a),f(b)]$为 f 的值域矛盾,因此,有

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0),f(b-0)=f(b),f(a)=f(a+0)$$

由 x_0 的任意性知,f 在$[a,b]$上连续.

◎19. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

分析 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在最大值和最小值. 利用连续函数介值定理.

证明 设 $f(x_i)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$，$f(x_j)=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$ 不失一般性，不妨设 $x_i<x_j$.

ⅰ）若 $f(x_i)=f(x_j)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$，此时有

$$f(x_k)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\quad k=1,2,\cdots,n$$

取 $\xi=x_k$ 即可.

ⅱ）若 $f(x_i)\neq f(x_j)$，则

$$f(x_j)<\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]<f(x_i)$$

由连续函数介值性定理知，$\exists\,\xi\in[x_i,x_j]\subset[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$$

由此本题得证.

○20. 证明 $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明 由本节习题 12 知，$f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，故对于 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，对于 $\forall\,x',x''\in[0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$，则有

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$$

即

$$|\cos\sqrt{x'}-\cos\sqrt{x''}|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\sin\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right|\leqslant|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$$

因此，$f(x)=\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

§3 初等函数的连续性

◎1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$； (5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}$.

分析 (2) 先分子有理化，再分子分母同除以 $\sqrt{x}$. (3) 先利用代换使 $t=\dfrac{1}{x}$，应用归结原则. (5) 利用对数求极限.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=\dfrac{e^0\cos 0+5}{1+0^2+\ln(1-0)}=6$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) 令 $t=\frac{1}{x}$,则当 $x\to0^+$ 时,$t\to+\infty$,故

$$\lim_{n\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}-\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}=\frac{2\sqrt{t+\sqrt{t}}}{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}+\sqrt{t-\sqrt{t+\sqrt{t}}}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{t\sqrt{t}}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{t}+\frac{1}{t\sqrt{t}}}}}=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}{1+\frac{1}{x}}}=1$

(5) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)\ \lim\limits_{x\to0}\exp\left[\ln(1+\sin x)\cos x\right]x=\lim\limits_{x\to0}\exp(\cot x\ln(1+\sin x))$

$$=\exp(\lim_{x\to0}\cos x\cdot\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}})$$

$$=\exp(1\cdot\ln e)=e$$

○2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp(b_n\ln a_n)=\exp(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\ln a_n)=e^{b\ln a}=a^b$

总练习题

●1. **设函数 f 在 (a,b) 连续,且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值. 证明:**

(1) f 在 (a,b) 内有界;

(2) 若存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$. 则 f 在 (a,b) 内能取到最大值.

分析 (1)把 (a,b) 分割成 $(a,a+\delta_1)$,$[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 和 $(b-\delta_2,b)$,分别证明在三个区间有界.

(2)构造 $F(x)$,∵ $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值,补充定义 $x=a$,$F(x)=f(a+0)$,$x=b$,$F(x)=f(b-0)$ 则 $F(x)=f(a+0)x=b$,$F(x)=f(b-0)$,则使 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,利用最值定理证明.

证明 (1)记 $f(a+0)=A$,$f(b-0)=B$,则对于 $\varepsilon_0=1$,$\exists\delta_1>0$,当 $a<x<a+\delta_1$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon_0=1,\text{即 } A-1<f(x)<A+1$$

取 $\max\{|A-1|,|A+1|\}=M_1$,则有

$$|f(x)|<M_1,x\in(a,a+\delta_1)$$

$\exists\delta_2>0$,当 $b-\delta_2<x<b$ 时,有 $|f(x)-B|<\varepsilon_0=1$

即

$$B-1<f(x)<B+1$$

取 $\max\{|B-1|,|B+1|\}=M_2$,则有

$$|f(x)|<M_2,x\in(b-\delta_2,b)$$

由 f 在 (a,b) 上连续,得 f 在 $[a+\delta_1,b-\delta_2]$ 上边续,故 $\exists M_3>0$,使得

$$|f(x)|<M_3,x\in[a_1+\delta_1,b-\delta_2]$$

综上所述,记 $M=\max\{M_1,M_2,M_3\}$,得 $\forall x\in(a,b)$ 有 $|f(x)|<M$,即 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

(2)构造辅助函数 $F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a\\ f(x), & a<x<b\\ f(b-0), & x=b\end{cases}$

则

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)=F(a)$$

$$\lim_{x\to b^-}F(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)=F(b)$$

且 $F(x)$ 在 (a,b) 上连续,得 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定取得最大值 M,则 $\exists\zeta\in[a,b]$,有 $F(\zeta)=M$,且 $\forall x\in[a,b]$ 均有 $F(x)\leqslant F(\zeta)$,注意到 $\xi\in(a,b)$,故

$$F(\zeta)\geqslant F(\xi)=f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$$

若 $F(\zeta)=F(\xi)=f(\xi)$,则 $f(\xi)$ 为 f 在 (a,b) 内的最大值,$\zeta\in(a,b)$.

若 $F(\zeta)>F(\xi)=f(\xi)\geqslant\max\{f(a+0),f(b-0)\}$,则 $\zeta\in(a,b)$,即 $f(\zeta)$ 为 f 在 (a,b) 内的最大值.

综上所述,知 f 在 (a,b) 内取到最大值.

小结 分割区间思想是证明函数有界的重要方法,函数端点存在有限值时,通常采用补充定义的方法构造函数.

◎2. 设函数 f 在 (a,b) 内连续,且 $f(a+0)=f(b-0)=+\infty$. 证明 f 在 (a,b) 内能取到最小值.

分析 $\because f(a+0)=f(b-0)=+\infty$,取 $M=\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\geqslant0$.

在 $x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 上 $f(x)>M$,在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上应用介值定理.

证明 取 $M=\left|f(\frac{a+b}{2})\right|\geqslant0$,由

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty\text{及}\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$$

知 $\exists\delta>0$,且 $\delta<\frac{1}{3}(b-a)$. 当 $x\in(a,a+\delta)$ 时,有

$$f(x)>M$$

当 $x\in(b-\delta,b)$ 时,有

$$f(x)>M$$

即 $\forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 有

$$f(x)>M>f(\frac{a+b}{2})$$

而 $f(x)$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续，故 $\exists\xi\in[a+\delta,b-\delta]$ 使 $\forall x\in[a+\delta,b-\delta]$ 有

$$f(\xi)\leqslant f(x)$$

而 $\frac{a+b}{2}\in[a+\delta,b-\delta]$，则有

$$f(\xi)\leqslant f(\frac{a+b}{2})<M<f(x),\forall x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$$

综上所述，$\forall x\in(a,b)$，有 $f(\xi)\leqslant f(x)$，即 f 在 $x=\xi$ 取到最小值，$\xi\in[a+\delta,b-\delta]\subset(a,b)$.

◎3. 设函数 f 在区间 I 上连续，证明：

(1)若对任何有理数 $r\in I$，有 $f(r)=0$，则在 I 上 $f(x)\equiv0$；

(2)若对任意两个有理数 $r_1,r_2,r_1<r_2$，有 $f(r_1)<f(r_2)$，则 f 在 I 上严格增.

分析 (1) f 在有理点上 $f(x_0)=0$ 且 f 在 I 上连续，由实数稠密性则在无理点上 $f=0$，$\therefore f\equiv0$.

(2)在任意两个有理数中，函数 $f(x)$ 严格增，f 在 I 上连续，利用实数连续性定理 $f(x)$ 在 I 上严格增.

证明 (1) $\forall x_0\in I$，若 x_0 为有理数，则

$$f(x_0)=0$$

若 x_0 为无理数，则存在有理数列 $\{r_n\}$，使 $r_n\in I,\forall n\in\mathrm{N}_+$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$，由 f 在 I 上连续，知

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

由归结原则，知

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=f(x_0)$$

而
$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

因此
$$f(x_0)=0.$$

由此，对于 $\forall x_0\in I$，有 $f(x_0)=0$，即在 I 上 $f(x)\equiv0$.

(2)对于 $\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$，存在有理数列 (r'_n)，使

$$r'_n<x_1+\frac{x_2-x_1}{2}\text{，且}\lim_{n\to\infty}r'_n=x_1.$$

存在有理数列 (r''_n) 使 $\lim\limits_{n\to\infty}r''_n=x_2$，且 $x_1+\frac{x_2-x_1}{2}<r''_n$

由于 f 在 I 上连续，故

$$\lim_{x\to x_1}f(x)=f(x_1),\lim_{x\to x_2}f(x)=f(x_2)$$

由归结原则，知

$$\lim_{x\to\infty}f(r'_n)=f(x_1),\lim_{n\to\infty}f(r''_n)=f(x_2)$$

而
$$r'_n<x_1+\frac{x_2-x_1}{2},r''_n>x_1+\frac{x_2-x_1}{2}$$

故 $\exists r_0$，使 $r'_n<r_0<r''_n$，由题意得

$$f(x_1)<f(r_0)<f(x_2)\Rightarrow f\text{ 在 }I\text{ 上严格增}$$

◎4. 设 a_1,a_2,a_3 为正数，$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$. 证明：方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$$

在区间(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根.

分析 先去分母,得一个关于 x 的一元二次方程 $F(x)=0$,利用代数基本定理.

证明 只需证方程

$$a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=0$$

在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根即可. 设

$$F(x)=a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

则 $F(x)=0$ 为一元二次方程. 由代数基本定理,知 $F(x)$至多有二个实根,而

$$F(\lambda_1)=a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)>0$$

$$F(\lambda_2)=a_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)<0$$

$$F(\lambda_3)=a_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)>0$$

由根的存在定理知,$F(x)=0$ 在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内至少各有一根. 故原方程在(λ_1,λ_2)与(λ_2,λ_3)内各有一根.

●5. 设 f 在$[a,b]$上连续,且对任何 $x\in[a,b]$,存在 $y\in[a,b]$,使得

$$|f(y)|<\frac{1}{2}|f(x)|.$$

证明:存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=0$.

分析 要证 $f(\xi)=0$ 可利用反证法. f 在$[a,b]$上连续,∴ $|f|$ 在$[a,b]$上也连续,利用最值定理和已知条件 $|f(x)|\geqslant|f(\xi)|$.

证明 由于 f 在$[a,b]$上连续,故$|f|$在$[a,b]$上连续. 由最值定理知,$|f|$在$[a,b]$上一定取得最小值 m,即 $\exists\,\xi\in[a,b]$,使得$|f(\xi)|=m$,且有

$$\forall\, x\in[a,b],\ |f(x)|\geqslant|f(\xi)|=m$$

下证 $m=0$.

反证法:若 $m\neq0$,即 $m>0$,则$|f(\xi)|=m>0$,由 $\xi\in[a,b]$,知 $\exists\, y\in[a,b]$,使得

$$|f(y)|<\frac{1}{2}|f(\xi)|<|f(\xi)|=m$$

与 m 为最小值矛盾,故 $m=0$,由此得

$$|f(\xi)|=0,\text{即 } f(\xi)=0,\xi\in[a,b]$$

结论得证.

小结 本题的结论与已知条件联系不大,应采用反证法证明,从 $|f(y)|<\frac{1}{2}|f(x)|$ 与最值定理矛盾,结论显然.

◎6. 设 f 在$[a,b]$上连续,$x_1,x_2\cdots,x_n\in[a,b]$,另有一组正数 $\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.
证明:存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$.

分析 本题可参照本章§219 题,这里 $f(\xi)$表示成 $f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)$的线性组合,并不影响介值定理证明.

证明 $f(x_i)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$

$f(x_j)=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$

不失一般性,设 $x_i<x_j$

ⅰ)若 $f(x_i)=f(x_j)$,则 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)$,此时有

$$f(x_k)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n),k=1,2,\cdots,n$$

取 $\xi=x_k$ 即可.

ii)若 $f(x_1)\neq f(x_j)$,则 $f(x_i)>f(x_j)$,故有

$$f(x_j)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)<f(x_i)$$

由连续函数介值性定理,知 $\exists\,\xi\in[x_i,x_j]\subset[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)$$

由此本题得证.

●7. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续,满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x$, $x\in[0,+\infty)$. 设 $a_1\geqslant 0$, $a_{n+1}=f(a_n)$, $n=1,2,\cdots$. 证明:

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=t$,则有 $f(t)=t$;

(3) 若条件改为 $0\leqslant f(x)<x$, $x\in(0,+\infty)$,则 $t=0$.

分析 (1) f 在 $[0,+\infty)$ 上连续,满足 $0\leqslant f(x)\leqslant x$ 且 $a_{n+1}=f(a_n)$,利用单调有界定理. (2) 直接用连续性证. (3) 利用反证法.

证明 (1) 由 $0\leqslant f(x)\leqslant x$ 得

$$a_{n+1}=f(a_n)\leqslant a_n,\ \forall\, n\in\mathbf{N}_+$$

且

$$0\leqslant f(a_n)\leqslant a_n\leqslant a_1$$

故 $\{a_n\}$ 为单调递增且有界的数列. 由单调有界原理知 $\{a_n\}$ 为收敛数列.

(2) 由于 $a_{n+1}=f(a_n)$,且 $f(x)$ 为连续函数,故有

$$\lim_{x\to\infty} a_{n+1}=\lim_{x\to\infty} f(a_n)$$

因此得

$$t=f(t)$$

(3) 若 $0\leqslant f(x)<x$, $\forall\, x\in(0,+\infty)$,则 (1)(2) 结论仍然成立,且 $t\in[0,+\infty)$. 若 $t\neq 0$,则由 $f(t)<t$,且 $f(t)=t$,得到矛盾. 故 $t=0$.

小结 在 (1) 中, $f(x)$ 为压缩映射,可用压缩映射原理证.

●8. 设 f 在 $[0,1]$ 连续, $f(0)=f(1)$. 证明:对任何正整数 n,存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi).$$

分析 首先令 $n=1$ 或 $\xi=0$ 成立. 当 $n\neq 1$ 时构造辅助函数 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$. 利用介值定理证.

证明 若 $n=1$,则由 $f(0)=f(1)=f\left(\frac{1}{n}+0\right)$ 知, $\xi=0$ 即可.

若 $n\neq 1$,构造辅助函数

$$F(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x),\ \forall\, x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$$

则有

$$F(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)$$

$$F\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\quad (k=1,2,\cdots,n-2)$$

$$F\left(\frac{n-1}{n}\right)=F\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

由此

$$F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})$$

$$=[f(\frac{1}{n})-f(0)]+[f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})]+\cdots+[f(1)-f(1-\frac{1}{n})]$$

$$=f(1)-f(0)=0$$

由于 f 在$[0,1]$上连续,故 F 在$[0,1-\frac{1}{n}]$上连续. 由本章§2 习题 19 知

$\exists\xi\in[0,1]$,使

$$F(\xi)=\frac{1}{n}\left[F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})\right]=0$$

即
$$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$$

综上所述,对于 $\forall n\in\mathbf{N}_+$, $\exists\xi\in[0,1]$,使得

$$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$$

小结 对于形如 $f(x+x_0)=f(x)$应构造 $F(x)=f(x+x_0)-f(x)$,利用函数端点值和数学归纳法形成一组函数再叠加即可.

●9. 设 f 在 $x=0$ 连续,且对任何 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
证明:(1) f 在 $\mathbf{R}$ 上连续; (2) $f(x)=f(1)x$.

分析 (1)利用特殊值 $f(0)=0$, f 在 $x=0$ 连续及恒等式证明.

(2)令 r 为有理数,则为 $r=\frac{m}{n}$形式;当 r 为无理数时利用归结原则.

证明 (1)由已知 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,故

$$f(x+0)=f(x)=f(x)+f(0)$$

即 $f(0)=0$,且 f 在 $x=0$ 连续,得

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$$

对 $\forall x_0\in\mathbf{R}$,有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}[f(x-x_0)+f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)$$
$$=f(0)+f(x_0)=f(x_0)$$

得 f 在 $x=x_0$ 连续. 由此,f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

(2)先证对任何有理数 r,必有

$$f(rx)=rf(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$$

事实上,当 $r=\frac{m}{n}$时,$m,n\in\mathbf{N}_+$,有

$$f(mx)=f(x+(m-1)x)=f(x)+f[(m-1)x]=\cdots=mf(x)$$

$$f(x)=f(\frac{1}{n}x)+f(\frac{n-1}{n}x)=\cdots=nf(\frac{1}{n}x)$$

即
$$f(\frac{x}{n})=\frac{1}{n}f(x)$$

从而
$$f(\frac{m}{n}x)=mf(\frac{x}{n})=\frac{m}{n}f(x)$$

又由 $f(0)=0$,得

$$f(0)=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)=0$$

即 $f(-x)=-f(x)$，于是

$$f(-\frac{m}{n}x)=-f(\frac{m}{n}x)=-\frac{m}{n}f(x)$$

故有对任给有理数 r，成立

$$f(rx)=rf(x),x\in(-\infty,+\infty)$$

其次，我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c，有

$$f(cx)=cf(x)$$

设 c 为无理数，取一有理数列 $\{c_n\}$，使 $c_n\to c(n\to\infty)$，则

$$f(c_nx)=c_nf(x)(n=1,2,\cdots)$$

令 $n\to\infty$，f 由 $\mathbf{R}$ 上连续及归结原则，有

$$f(cx)=cf(x).$$

由此得 $\forall c\in\mathbf{R}$，有 $\quad f(cx)=cf(x),x\in\mathbf{R}$

即 $\quad f(x)=f(x\cdot 1)=f(1)x,\forall x\in\mathbf{R}$

小结 当 $x=0,g=0,\quad f(0)=0$；当 $x\neq 0,y=0,f(x+0)=f(x)$；当 $x=y,f(2x)=2f(x)$. 这些变形将有利于证明.

◎10. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f 在 0、1 两点连续，且对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x^2)=f(x)$. 证明 f 为常量函数.

分析 $f(x)$ 为偶函数，只需证 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)$ 为常量即可，$f(x^2)=f(x)$，把 x 逐渐放小，$f(x)=f(0)=f(1)$ 证得结论.

证明 $\forall x\in(0,+\infty)$，由 $f(x^2)=f(x)$ 得

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots$$

记 $x_n=x^{\frac{1}{2^n}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，由 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续及归结原则，得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(1)$$

则 $f(x)=f(x_n)$，故有

$$f(x)\equiv f(1),\forall x\in(0,+\infty)$$

$\forall x\in(-\infty,0)$，由 $f(x)=f(x^2)$，得

$$f(x)=f(x^2)=f[(-x)^2]=f(-x)=f(1)$$

从而 $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 有

$$f(x)=f(0)$$

由 f 在 $x=0$ 连续，得

$$f(0)=\lim_{n\to 0}f(x)=\lim_{n\to 0}f(1)=f(1)$$

由此，$\forall x\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)\equiv f(1)$，即 f 为常量函数.