极限与连续思考题

(答案或提示)

一、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(1+x)-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^{x} = \ln e = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\frac{x^2}{2})^{\frac{1}{x^2}}.$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\exp(\frac{1}{x^2}\ln(\cos x-\frac{x^2}{2})) = \exp(\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(1+\cos x-\frac{x^2}{2}-1))$

$$= \exp(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{x^2}{2}-1}{x^2}) = \exp(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{-1}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}).$

解：原式=$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1} = \dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x}).$

解：原式=$\lim\limits_{x\to+\infty} 2\cos(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})\sin(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\cos(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})\sin\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = 0.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})} = 0.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}.$

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+3x)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}{\ln(1+3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{3x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 2x^2}{3x} = \dfrac{1}{6}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$.

解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n\ln\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)\right]=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right]=e^2.$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x}-(1+x)}$.

解：令 $t=\sqrt[3]{1+3x}$，则 $x=\frac{1}{3}(t^3-1)$.

原式$=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\frac{1}{9}(t^3-1)^2}{t-\frac{t^3+2}{3}}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{t\to1}\dfrac{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}{(t-1)^2(t+2)}=-1.$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}}\dfrac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2x}{1-x}}-1}{\sqrt[3]{1+\frac{2x}{1-x}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{2x}{1-x}}{\frac{1}{3}\frac{2x}{1-x}}=\dfrac{3}{2}.$

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+\tan x}-\sqrt{2+\sin x}}{x^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}})=-1$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a,b,c>0).$

解：令 $A=\max\{a,b,c\}$，则 $\dfrac{1}{3}A^x\le\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\le A^x$，$\dfrac{A}{3^{\frac{1}{x}}}\le\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\le A$，

由迫敛性知，原式$=A=\max\{a,b,c\}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}-x).$

解：令 $x=\dfrac{1}{t}$ ，则

原式$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[n]{(1+t)(1+2t)\cdots(1+nt)}-1}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt[n]{1+(1+2+\cdots+n)t+o(t)}-1}{t}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{n}[(1+2+\cdots+n)t+o(t)]}{t}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x+x^2)^{\frac{1}{n}}-1}{\sin2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{n}(x+x^2)}{2x}=\dfrac{1}{2n}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n\quad(|x|<1).$

解：原式$=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln(1+\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n}{n})\right]\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n})\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}x\frac{1-x^n}{1-x}\right\}=e^{\frac{x}{1-x}}.$$

16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos2x\cdots\cos nx}{x^2}\quad(n\in N^+).$

解：由 $1-\cos x=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ ，得 $\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，所以

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)][1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)]\cdots[1-\frac{1}{2}(nx)^2+o(x^2)]}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}[x^2+(2x)^2+\cdots+(nx)^2]+o(x^2)}{x^2}=\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ $(n\in N^{+})$.

解：因 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[k]{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[k]{1+(x-1)}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{k}(x-1)}{x-1}=\dfrac{1}{k}$，故

原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)$ ($[x]$为取整函数).

解：因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln[e^{\frac{2}{x}}(1+e^{-\frac{2}{x}})]}{\ln[e^{\frac{1}{x}}(1+e^{-\frac{1}{x}})]}-0=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2}{x}+\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})}=2.$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}-2[x]\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}+2=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+2=2.$

所以，原式=2.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}$.

解：

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}-1}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\frac{1}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}=\frac{1}{4}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}=\frac{1}{4}.$$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解法 1：利用 $(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x\ (x\to 0)$ 和 $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{3}=3.
\end{aligned}
$$

解法 2：$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2\ (x\to 0)\ \Rightarrow\ \cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)(x\to 0)$，

$$\sqrt{\cos 2x}-1=\sqrt{1+(\cos 2x-1)}-1\sim\frac{1}{2}(\cos 2x-1)\sim-\frac{1}{2}\frac{1}{2}(2x)^2=-x^2(x\to 0)$$

$\Rightarrow\ \sqrt{\cos 2x}=1-x^2+o(x^2)$，　　同理有　$\sqrt[3]{\cos 3x}=1-\dfrac{3}{2}x^2+o(x^2)$.

$$
\begin{aligned}
\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}&=(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))(1-x^2+o(x^2))(1-\frac{3}{2}x^2+o(x^2))\\
&=1-3x^2+o(x^2)\ (x\to 0).
\end{aligned}
$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-3x^2+o(x^2))}{x^2}=3.$$

二、确定 c 和 α，使下列无穷小量等价于 cx^{α}.

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\ (x\to 0^+)$；

2. $f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-e^{2x}\ (x\to 0^+)$.

3. $f(x)=\ln\cos x-\arctan x^2\ (x\to 0)$.

提示：

1. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}=x^{\frac{1}{8}}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}}\sim x^{\frac{1}{8}}(x\to 0^+)$.

2. $f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-e^{2x}=(\sqrt{1+x\sqrt{x}}-1)-(e^{2x}-1)(x\to 0^+)$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x)-(2x+o(x))=-2x+o(x)\sim -2x(x\to 0^+)\ .$$

3. $f(x)=\ln\cos x-\arctan x^2=\ln(1+(\cos x-1))-\arctan x^2$

$$=\cos x-1+o(\cos x-1)-\arctan x^2$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+o(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(x^2+o(x^2))(x\to 0)$$

$$=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\sim-\frac{3}{2}x^2\ (x\to 0).$$

另解:

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x-\arctan x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}$

所以 $f(x)\sim-\dfrac{3}{2}x^2(x\to 0)$.

三、(1) 请给出当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 是非无穷大量的正面陈述.

(2) 请给出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq A$ 的正面陈述.

解：(1) 因为，当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 是无穷大量 $\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$

$$\Leftrightarrow\ \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x\in U^o(x_0,\delta),\text{有}|f(x)|>M.$$

所以，当 $x\to x_0$ 时， $f(x)$ 是非无穷大量

$$\Leftrightarrow\ \exists M_0>0,\forall\delta>0,\exists x'\in U^o(x_0,\delta),\text{使得}|f(x')|\le M_0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A\ \Leftrightarrow\ \exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x'\in U^o(x_0,\delta),\text{使得}|f(x')-A|\ge\varepsilon_0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\neq A\ \Leftrightarrow\ \exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x',\text{当}|x'|>X\text{时},\text{有}|f(x')-A|\ge\varepsilon_0.$

四、设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 是单调增且有上界，证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

证：由确界原理知， $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有上确界 A. 记 $A=\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，

下证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A.$

由确界定义知， $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists x'\in[a,+\infty)$ ，使得 $f(x')>A-\varepsilon$.

取 $X = Max\{x', |a|+1\}$，则必有 $X > 0$且$X > x'$. 当 $x > X$ 时，由 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 的单调增性质，有

$$A - \varepsilon < f(x') \le f(X) \le f(x) \le A < A + \varepsilon,$$

即 $$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

由极限定义知 $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

五、证明：若 $f(x)$ 为定义在 R 上的周期函数，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，则 $f(x) \equiv 0\ (x \in R)$.

证：设 $f(x)$ 的周期为 T. 因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$，所以

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x > X, \text{有} |f(x)| < \varepsilon.$$

任取 $x_0 \in R$，$\exists n \in N^+$，使得 $x = x_0 + nT > X$，由 $f(x)$ 的周期性，有

$$|f(x_0)| = |f(x_0 + nT)| = |f(x)| < \varepsilon,$$

令 $\varepsilon \to 0$，得 $f(x_0) = 0$. 由 x_0 的任意性知，$f(x) \equiv 0\ (x \in R)$.