

第5章 一元积分学

积分 — 微分的逆运算

5.1 不定积分

5.2 定积分

5.3 定积分的应用

5.4 反常积分

5.1 不定积分

5.1.1 不定积分的概念

5.1.2 换元积分法与分部积分法

5.1.3 有理函数与可化为有理函数的不定积分

5.1 不定积分

一、原函数与不定积分的概念

定义： 如果对 $\forall x \in I$, 都有 $F'(x) = f(x)$, 那么 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 在区间 I 内一个原函数

例 $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

$\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的原函数.

原函数存在定理: (Page132 定理5.2.4)

$[a,b]$ 上的连续函数有原函数.

问题: (1) 原函数是否唯一?

(2) 若不唯一它们之间有什么联系?

答案：

(1) 若 $F'(x) = f(x)$ ，则对于任意常数 C ，
 $F(x) + C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

(2) 若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，
则 $F(x) - G(x) = C$
(C 为任意常数)

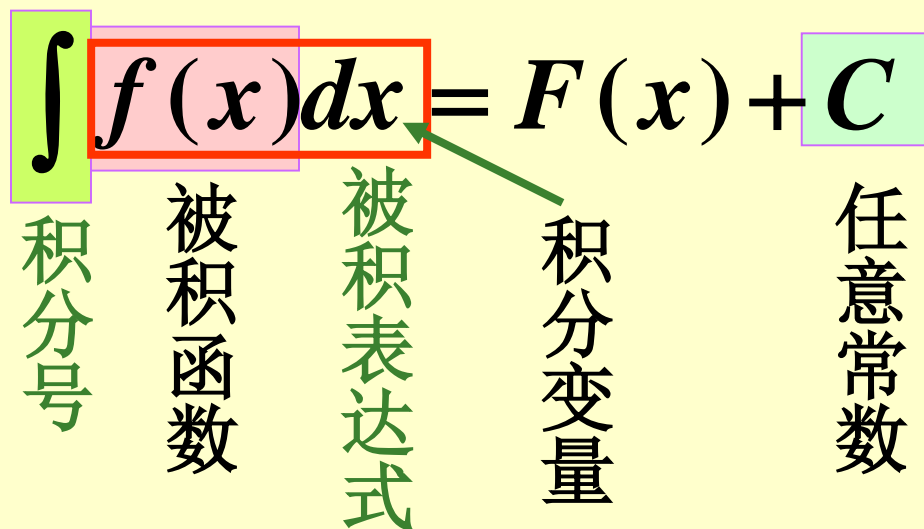
不定积分的定义：

函数 $f(x)$ 在区间 I 内的全体原函数

称为 $f(x)$ 在区间 I 内的 **不定积分**，记为 $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号 被积函数 被积表达式 积分变量 任意常数

A diagram illustrating the components of the indefinite integral formula. The formula is $\int f(x)dx = F(x) + C$. The integral symbol \int is enclosed in a light green box, with the label '积分号' (Integral Sign) below it. The function $f(x)$ is enclosed in a light purple box, with the label '被积函数' (Integrand) below it. The expression $f(x)dx$ is enclosed in a red box, with the label '被积表达式' (Integrand Expression) below it. The variable x in dx has a green arrow pointing to it from the label '积分变量' (Integration Variable) below. The constant C is enclosed in a light green box, with the label '任意常数' (Arbitrary Constant) below it.

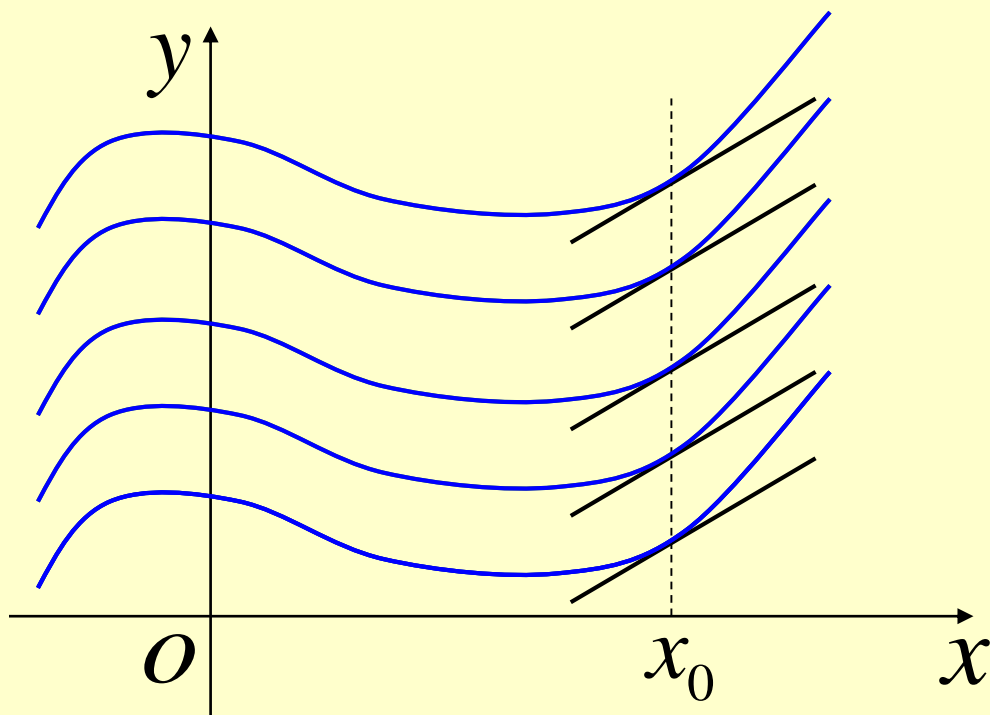
函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的 **积分曲线**.

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

$\int f(x) dx$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例1 求 $\int \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 $\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C.$$

由不定积分的定义, 可知

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x), \quad d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx,$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

结论: 微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

先积后导全消掉, 先导后积常数要.

二、基本积分表

$$(1) \quad \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \quad \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C;$$

说明: $x > 0, \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$

$$x < 0, [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad \therefore \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

$$(4) \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C;$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$$

$$(6) \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$(7) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$(10) \quad \int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$(11) \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$

$$(12) \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$(13) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$(14) \quad \int \sinh x dx = \cosh x + C;$$

$$(15) \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C;$$

例2 求积分 $\int x^2 \sqrt{x} dx$.

解 $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx$

根据积分公式 (2) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

\downarrow

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C.$$

三、不定积分的性质

$$(1) \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \because \left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right]' \\ &= \left[\int f(x) dx \right]' \pm \left[\int g(x) dx \right]' = f(x) \pm g(x). \end{aligned}$$

\therefore 等式成立. (可推广到有限多个函数和)

$$(2) \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

(k 是常数, $k \neq 0$)

例3 求积分 $\int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx$.

解
$$\begin{aligned} & \int (\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}) dx \\ &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C \end{aligned}$$

例4 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

解 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例5 求积分 $\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$.

解
$$\int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{1}{1 + 2\cos^2 x - 1} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x + C.$$

说明： 以上两例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

例 6 已知一曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率为 $\sec^2 x + \sin x$ ，且此曲线与 y 轴的交点为 $(0, 5)$ ，求此曲线的方程.

解 $\because \frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \sin x,$
 $\therefore y = \int (\sec^2 x + \sin x) dx$
 $= \tan x - \cos x + C,$

$$\because y(0) = 5, \quad \therefore C = 6,$$

所求曲线方程为 $y = \tan x - \cos x + 6.$

例7 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ 1+x, & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$

解: $x \geq 0$ 时, $\int f(x)dx = e^x + c_1$

$$x < 0 \text{ 时, } \int f(x)dx = x + \frac{x^2}{2} + c_2$$

$$\because F \text{ 在 } x=0 \text{ 连续, } \therefore \lim_{x \rightarrow 0} e^x + c_1 = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{x^2}{2} + c_2.$$

$$\therefore c_2 = c_1 + 1, \quad \therefore F(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x \geq 0 \\ x + \frac{x^2}{2} + 1 + c_1, & x < 0 \end{cases}$$

四、小结

原函数的概念: $F'(x) = f(x)$

不定积分的概念: $\int f(x)dx = F(x) + C$

基本积分表(1)

求微分与求积分的互逆关系

不定积分的性质

思考题

符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否存在原函数？为什么？

思考题解答

不存在.

假设有原函数 $F(x)$
$$F(x) = \begin{cases} x + C, & x > 0 \\ C, & x = 0 \\ -x + C, & x < 0 \end{cases}$$

但 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不可微, 故假设错误

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在原函数.

结论

每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.