定积分小结与典型例题

华中科技大学数学与统计学院　韩志斌

December 12, 2021

一、主要内容

1. 定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

注：为了便于计算, 取特殊的分割T: n等分区间$[a,b]$, 有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f[a+\frac{b-a}{n}(i-1)]\frac{b-a}{n}.$$

2. 函数的可积性理论（可积的条件）

（1）可积的必要条件：若函数$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

（2）可积的充要条件：

1° 可积的第一充要条件：有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$上的上积分与下积分相等, 即$S=s$.

2° 可积的第二充要条件（可积准则）：有界函数$f(x)$在$[a,b]$上可积$\Leftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$, 存在分割T, 使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中$\omega_i = M_i - m_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为$f(x)$在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅.

（3）可积的充分条件（可积函数类）：下列三类函数在$[a, b]$上必可积：

1° 在$[a, b]$上连续的函数；

2° 在$[a, b]$上单调的函数；

3° 在$[a, b]$上有界且只有有限个间断点的函数.

3. 定积分的性质: 线性性质, 乘积性质, 区间可加性, 积分保号性, 绝对可积性, 估值性质, 积分中值定理.

（1）积分第一中值定理：设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续, $g(x)$在$[a, b]$上可积且不变号, 则$\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论：设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续, 则至少存在一点$\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

注：称$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的平均值.

（2）积分第二中值定理：设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积

1° 若函数$g(x)$在$[a,b]$上单调减, 且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx;$$

2° 若函数$g(x)$在$[a,b]$上单调增, 且$g(x) \geq 0$, 则$\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx;$$

3° 若函数$g(x)$在$[a,b]$上单调, 则$\exists \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

4. 微积分学基本定理

（1）若$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上连续.

（2）（原函数存在定理，微积分学基本定理）

若$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则$F(x) = \int_a^x f(t)dt$在$[a,b]$上可导, 且

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

注：若$f(x)$连续, $a(x), b(x)$可导, 则$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$可导, 且

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x).$$

（3）Newton-Leibniz公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b.$

5.定积分的换元积分法和分部积分法(略)

6.有关定积分的若干等式

(1) (对称区间上奇偶函数的积分) 设函数$f(x)$在区间$[-a,a]$上连续, 则

1° 当$f(x)$为奇函数时, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$;

2° 当$f(x)$为偶函数时, $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 若$f(x)$是周期为T的连续函数, 则

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

(4) 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续, 则

1° $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$;

2° $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}\\ 1, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

7.有关定积分的若干不等式

(1) Cauchy-Schwarz不等式：设函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

(2) Minkowski不等式：设函数$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上可积, $p \ge 1$, 则

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(3) Hadamard不等式：设$f(x)$ 是区间$[a,b]$ 上连续的凸函数, 则$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

二、典型例题

1. 用定积分的定义求极限

例1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

解： 因 $\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\le\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\le\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}(i=1,2,\cdots,n)$, 有

$$\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=-\frac{\cos\pi x}{\pi}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

由迫敛性知原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\dfrac{2}{\pi}$.

注： 若分割T取n等分, 并取ξ_i为小区间的左端点, 则有计算公式

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{i-1}{n}(b-a))\frac{b-a}{n}.$$

2. **定积分的计算**

定积分一般是通过原函数（不定积分）用Newton-Leibniz公式来计算. 很多函数的原函数不是初等函数, 对它们进行不定积分是"积不出来"的, 但在某些特定区间上计算其定积分的值却是可以计算的, 因为在使用换元积分法或分部积分法时, 有些积分可以相互抵消或者通过设成未知数解出来.

例2. 计算下列定积分

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}\mathrm{d}x,$ (2) $\displaystyle\int_0^1 t\left(\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx\right)dt,$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x(1+x^{2013})(e^x-e^{-x})dx,$ (4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

解：(1)利用 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$(令$t=a-x$即得证), 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{e^x+e^{1-x}}dx &= \int_0^1 \frac{1-x}{e^x+e^{1-x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{1-x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x}{e+e^{2x}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(e^x)}{(\sqrt{e})^2+(e^x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{e}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{e}}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{e}}\left(\arctan\sqrt{e}-\arctan\frac{1}{\sqrt{e}}\right).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\left(\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx\right)dt &= \int_0^1\left(\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx\right)d\left(\frac{1}{2}t^2\right)\\ &= \frac{1}{2}t^2\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 t^2 d\left(\int_1^{t^2} e^{-x^2}dx\right)\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 2t^3e^{-t^4}dt = -\frac{1}{4}e^{-t^4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(e^{-1}-1\right).\end{aligned}$$

（3）利用对称区间上奇偶函数的积分性质(先拆成两项, 略. 答案: $4/e$.)

（4）利用 $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$, 答案: $\frac{\pi^2}{2}$.

例3. 求 $I_n = \int_0^\pi \cos^n \cos nxdx \ (n \in N^+)$.

解：利用分部积分得到递推公式, 计算如下：

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^\pi \cos^n x\cos nxdx = \frac{\cos^n x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin nx\cdot\cos^n x\cdot\sin xdx\\ &= \int_0^\pi \cos^{n-1} x(\sin nx\sin x + \cos nx\cos x)dx - I_n\\ &= \int_0^\pi \cos^{n-1} x\cos(n-1)xdx = I_{n-1} - I_n,\end{aligned}$$

所以

$$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

又$I_0 = \int_0^{\pi} 1\, dx = \pi,$

故$I_n = \frac{1}{2} I_{n-1} = \frac{1}{2^2} I_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^n} I_0 = \frac{\pi}{2^n}.$

练习1：

计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\alpha} x}\,(\alpha > 0);$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx;$

(3) $\int_0^{n\pi} x|\sin x| dx;$ (4) $\int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right|^5 x^n (1-x)^n dx.$

答案：(1)$\frac{\pi}{4}$, (2)$\frac{\pi - 1}{4}$, (3)$n^2\pi$, (4)$\frac{2}{(n+1)(n+2(n+3)}(\frac{1}{4})^{n+3}$.

3. 函数的可积性

证明函数可积的方法有：用定义和可积的充要条件. 在论证某些抽象函数的可积性时, 常采用第二充要条件（可积准则）. 通常的思路是找到区间$[a,b]$的某个分割T, 使得$f(x)$的振幅和$\sum\limits_{T}^{\omega_i\Delta x_i}$能任意小. 为此, 常把分割$T$的小区间分成$T_1$和$T_2$两部分, 在$T_1$上使得$f(x)$的振幅可任意小, 在$T_2$上$f(x)$的振幅保持有界而小区间的长度和可任意小.

三个可积函数类的证明是很好的范例.

注：单调函数即使有无穷多个间断点, 也仍然是可积的. 若$f(x)$有无穷个间断点, 又不单调, 是否一定不可积呢？请看下例.

例4. 设$f(x)$在$[a,b]$上有界, $\{a_n\}\subset[a,b]$, 且有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 证明：若$f(x)$ 在$[a,b]$上只有$a_n(n=1,2,\cdots)$为其间断点, 则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

证：设$|f(x)|\leq M, x\in[a,b]$.由追敛性知$c\in[a,b]$, 为叙述方便起见, 不妨设$c=a$.于是,

$$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\text{当}n>N,a\leq a_n<a+\frac{\varepsilon}{4M}.$$

由于$f(x)$在$\left[a+\dfrac{\varepsilon}{4M},b\right]$上至多只有$N$ 个间断点, 因此可积. 故对上述$\varepsilon>0$, 存在$\left[a+\dfrac{\varepsilon}{4M},b\right]$的分割$T_1$, 使得

$$\sum_{T_1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又$f(x)$在$\left[a,a+\frac{\varepsilon}{4M}\right]$上的振幅$\omega_0 \le 2M$, 把$T_1$与$\left[a,a+\frac{\varepsilon}{4M}\right]$合并成区间$[a,b]$的分割$T$后, 必有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \omega_0 \frac{\varepsilon}{4M} + \sum_T \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故由可积的第二充分条件（即可积准则）知$f(x)$在$[a,b]$上可积.

例5. 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 可积, 问：$|f(x)|$和$f^2(x)$在$[a,b]$ 上是否可积？反之, 若$|f(x)|$或$f^2(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, 能否推出$f(x)$ 在$[a,b]$ 可积？若成立, 请给出证明, 若不成立, 举出反例.

解：若$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$|f(x)|$和$f^2(x)$在$[a,b]$上均可积, 但反之不真.

证明：因$f(x)$在$[a,b]$上有界, 所以$\exists M > 0, \forall x \in [a,b]$, 有$|f(x)| \le M$. 对$[a,b]$的分割$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 记

$$\omega_i(f) = M_i - m_i = \sup_{x\in\Delta x_i} f(x) - \inf_{x\in\Delta x_i} f(x)$$

为f在小区间$\Delta x_i = [x_i - x_{i-1}]$上的振幅, 又对$\forall x, y = [x_i - x_{i-1}]$, 有

$$||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|,$$

$$\begin{aligned}\left|f^2(x) - f^2(y)\right| &\le |f(x_i) + f(y)|\,|f(x) - f(y)| \\ &\le [|f(x)| + |f(y)|]\,|f(x) - f(y)| \le 2M\,|f(x) - f(y)|,\end{aligned}$$

因而

$$\omega_i(|f|) = \sup_{x,y\in\Delta x_i}\{|f(x)|-|f(y)|\} \le \sup_{x,y\in\Delta x_i}\{|f(x)-f(y)|\} \le \omega_i(f),$$

$$\omega_i(f^2) = \sup_{x,y\in\Delta x_i}\{|f^2(x)-f^2(y)|\} \le 2M\sup_{x,y\in\Delta x_i}\{|f(x)-f(y)|\} \le 2M\omega_i(f).$$

若$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$\forall\varepsilon>0$, $\exists[a,b]$的分割T, 使得$\sum\limits_T\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon$,从而有

$$\sum_T\omega_i(|f|)\Delta x_i \le \sum_T\omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon$$

及

$$\sum_T\omega_i(f^2)\Delta x_i \le 2M\sum_T\omega_i(f)\Delta x_i < 2M\varepsilon,$$

故$|f(x)|$和$f^2(x)$均在$[a,b]$上可积.

反例: $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ -1, & x\text{为无理数}\end{cases}$, 读者自行验证.

注：在证明过程中, 讨论函数f的振幅时, 用到了如下命题：若f在区间I上有界, 则

$$\sup_{x\in I}f(x)-\inf_{x\in I}f(x) = \sup_{x_1,x_2\in I}|f(x_1)-f(x_2)|.$$

请读者自证之.

4. **变上限积分及其导数的应用**

例6. 设f为连续可微函数, 试求$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x (x-t)f'(t)dt$, 并用此结果求

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin t dt$$

.

解：因

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-t)f'(t)dt &= \int_a^x (x-t)df(t) = (x-t)f(t)\Big|_a^x + \int_a^x f(t)dt \\ &= (a-x)f(a) + \int_a^x f(t)dt,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f'(t)dt = -f(a) + f(x) = f(x) - f(a).$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)\sin t dt = -\cos(x) + \cos 0 = 1 - \cos x.$$

例7. 设f在$(-\infty,+\infty)$上为连续函数.证明：f是周期函数（周期为2π）的充要条件为积分$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x+y)dx$与$y$无关.

证 令$x+y=u$, 得

$$F(y)=\int_0^{2\pi} f(x+y)dx=\int_y^{2\pi+y} f(u)du=\int_0^{2\pi+y} f(u)du-\int_0^{y} f(u)du,$$

$$\Rightarrow F'(y)=f(2\pi+y)-f(y).$$

若$F(y)$与y无关, 即$F(y)\equiv C$, 则$F'(y)\equiv 0$, 亦即

$$f(2\pi+y)=f(y),\ \forall y\in(-\infty,+\infty),$$

所以f是以2π为周期的周期函数.

反之, 若f是以2π为周期的周期函数, 则满足

$$f(2\pi+y)=f(y),\ \forall y\in(-\infty,+\infty),$$

又可推知$F'(y)\equiv 0$, 说明$F(y)=\int_0^{2\pi} f(x+y)dx$ 与y 无关.

例8. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增, $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt(a<x\le b)$, $F(a)=f(a)$, 证明：$F(x)$在$[a,b]$上单调增.

证：对$\forall x\in[a,b]$, 由积分中值定理, 有

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\frac{1}{x-a}\cdot f(\xi)(x-a)=f(\xi),\ (a<\xi<x)$$

当$x\to a^+$时, $\xi\to a^+$, 且有$\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(\xi)=f(a)=F(a)$,

所以$F(x)$在a点右连续, 从而在$[a,b]$上连续.

又由题设知, $F(x)$在$(a,b]$上可导, 且

$$F'(x)=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}=\frac{\int_a^x[f(x)-f(t)]dt}{(x-a)^2},\ (a<x\le b)$$

因$a\le t\le x$, f单调增, 所以$f(x)-f(t)\ge 0$, $\displaystyle\int_a^x[f(x)-f(t)]dt\ge 0$, 从而$F'(x)\ge 0\ (a<x\le b)$, 再由$F(x)$ 在$[a,b]$ 上的连续性知, $F(x)$在$[a,b]$上单调增.

例9. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 且$f(x)>0$,又$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$,

证明：$F(x)$在$[a,b]$内有且仅有一个实根.

证： 由题设条件可得

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}=2, x\in[a,b]$$

可知, $F(x)$在$[a,b]$上严格单调增. 又知$F(x)$在$[a,b]$上连续, 且有

$$F(a)=\int_a^a f(t)\ dt+\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{dt}{f(t)}<0,$$

$$F(b)=\int_a^b f(t)\ dt+\int_b^b \frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b f(t)dt>0,$$

由零点定理可知, $\exists\xi\in[a,b]$, 使得$F(\xi)=0$, 即$F(x)$在$[a,b]$内至少有一个实根, 再由$F(x)$的单调性, 根是唯一的.

练习2：

1. （首届，决赛）设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，由积分中值公式有

$$\int_a^x f(x)dx=(x-a)f(\xi)\ (a\leq\xi\leq x<b),$$

若导数$f'_+(a)$存在且非零，则$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\xi-a}{x-a}$的值等于$\dfrac{1}{2}$.

2. 设$f(x)=\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{x}dx$, 求$f'(0)$.

3. 设$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导, 且满足$\displaystyle\int_0^x tf(t)dt=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)dt$, 求$f(x)$.

4. 设f在$[a,b]$上连续、递增.证明：

$$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

（提示：作辅助函数$F(t)=\displaystyle\int_a^t xf(x)dx-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)dx$.

5. **积分中值定理的应用**

例10. 设$f(x)$在$[a,b]$ 上可微, 且满足$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$, 证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证：由$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=0$ 及积分中值定理知$\exists\xi_1\in[0,\dfrac{1}{2}]$,使得

$$f(1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\xi_1 f(\xi_1)=0, \text{即} \quad f(1)=\xi_1 f(\xi_1).$$

令$F(x)=xf(x)$, 则$F(x)$ 在$[a,b]$ 上可微, 且$F(\xi_1)=\xi_1 f(\xi_1)=f(1)=F(1)$.

在$[\xi_1,1]$上对$F(x)$用罗尔定理, 有

$$F'(\xi)=0, \xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1),$$

即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0, \xi\in(0,1), \text{或} f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}, \xi\in(0,1).$$

例11. 设f在$[-\pi,\pi]$上为递减函数. 证明：

（1）$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nxdx \geq 0$;　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n+1)xdx \leq 0$.

证: 令$g(x)=f(x)-f(\pi)$, 则g 在$[-\pi,\pi]$ 上为非负、递减函数.利用积分第二中值定理, $\exists\xi\in[-\pi,\pi]$, 使

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2nxdx &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin 2nxdx + f(\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nxdx \\ &= g(-\pi)\int_{-\pi}^{\xi}\sin 2nxdx + 0 = \frac{g(-\pi)}{2n}(1-\cos 2n\xi) \geq 0.\end{aligned}$$

又$\exists\eta\in[-\pi,\pi]$, 使

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2n+1)xdx &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(2n+1)xdx + f(\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2n+1)xdx \\ &= g(-\pi)\int_{-\pi}^{\eta}\sin(2nx+1)dx + 0 \\ &= \frac{g(-\pi)}{2n+1}[-1-\cos(2n+1)\eta] \leq 0.\end{aligned}$$

6. 含有定积分的等式

例12.设$f(x)$在$[0,1]$上连续, 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(\cos x + \sin x)dx.$$

证：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x \ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x \ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x \ \mathrm{d}x,$$

令$x = \dfrac{\pi}{2} - t$, 则$2x = \pi - 2t$, $dx = -dt$, 有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(\sin(\pi - 2t))\cos(\frac{\pi}{2} - t)d(-t)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2t)\sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x dx\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x \ \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x \ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x \ \mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(\cos x + \sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例13. 设$f(x)$关于$x=T$对称, 且$a<T<b$, 试证明:

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx.$$

证明：因

$$\int_a^{2T-b} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{2T-b} f(x)dx,$$

令$x=2T-t$, 注意到$f(2T-t)=f(t)$, 故有

$$\int_T^{2T-b} f(x)dx = -\int_T^b f(2T-t)dt = -\int_T^b f(t)dt = -\int_T^b f(x)dx,$$

所以

$$\begin{aligned} 2\int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx &= 2\int_T^b f(x)dx + \int_a^T f(x)dx - \int_T^b f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

例14. 证明：当$a>1$时, 有$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}dx=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}dx.$

证明：令$x^2=t$, 则$x=\sqrt{t}$, $dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$,

$$\begin{aligned}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}dx &= \int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{1}{\sqrt{t}2\sqrt{t}}dt=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}dt\\ &= \frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

在第二个积分中, 令$t=\frac{a^2}{u}$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t} &= \frac{1}{2}\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\cdot\frac{u}{a^2}\cdot a^2(-\frac{1}{u^2})du\\ &= \frac{1}{2}\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)(-\frac{1}{u})du=\frac{1}{2}\int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

将上式代入第一个等式即得原式成立.

例15. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可微, 其中$a<0<b$, 证明：$\exists\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi).$$

证明：记$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, 则$F(a)=0, F'(x)=f(x), F''(x)=f'(x)$, 将$F(x)$ 分别在$x=a$ 和$x=b$ 处展开成二阶Taylor公式, 有

$$F(x)=F(a)+F'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}[F''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_1)(x-a)^3], \xi_1\in(a,x),$$

$$F(x)=F(b)+F'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}[F''(b)(x-b)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi_2)(x-b)^3], \xi_2\in(x,b),$$

$x=0$代入以上两式并相减, 再结合$F(x)$与$f(x)$的关系, 有

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]+\frac{1}{3!}[(b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)],$$

其中$\xi_1\in(a,0)$, $\quad\xi_2\in(0,b)$.

又$f''(x)$在$[a,b]$上连续, 记$m=\min\limits_{x\in[a,b]}\{f''(x)\}$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f''(x)\}$, 则

$$m(b^3-a^3)\le b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)\le M(b^3-a^2),$$

由闭区间上连续函数的介值定理, $\exists \xi \in [a,b]$使得

$$f''(\xi)=\frac{b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)}{b^3-a^3},\quad \text{即}\quad b^3f''(\xi_2)-a^3f''(\xi_1)=(b^3-a^3)f''(\xi),$$

故有

$$\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2f'(b)-a^2f'(a)]+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi).$$

练习：

1.（第三届、决赛，第二题）设$f(x)$在$[a,b]$上有两阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，证明：$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\displaystyle\int_a^x(x-t)f''(t)dt,\ \forall x\in[a,b].$

7. 含有定积分的不等式

例16. 设f在$[0,1]$上连续且单调减, 证明: 对任意$a \in (0,1)$, 有$a\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^a f(x)\,dx$.

证法1 因为$\int_0^a f(x)\,dx \overset{x=at}{=} a\int_0^1 f(at)\,dt = a\int_0^1 f(ax)\,dx$, 所以

$$I = a\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = a\int_0^1 [f(x) - f(ax)]\,dx,$$

再由$ax < x$, 及f单调减和定积分的不等式性质可得$I \le 0$.

证法2

$$\begin{aligned} I &= a\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx + a\int_a^1 f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx \\ &= (a-1)\int_0^a f(x)\,dx + a\int_a^1 f(x)\,dx, \end{aligned}$$

由定积分的中值定理, $\exists\xi_1 \in [0,a]$, 使得$\int_0^a f(x)dx = af(\xi_1)$, $\exists\xi_2 \in [a,1]$, 使得$\int_a^1 f(x)dx = (1-a)f(\xi_2)$, 故有

$$I = a(a-1)f(\xi_1) + a(1-a)f(\xi_2) = a(a-1)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \le 0.$$

例17. 设函数f在区间$[a,b]$上存在连续的导函数,证明：

$$\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\} \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| + \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

证明：因为f在区间$[a,b]$ 上连续, 故$|f|$ 在区间$[a,b]$ 上连续, 所以, 存在$x_0\in[a,b]$, 使得

$$|f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}.$$

又由积分第一中值定理, $\exists\xi\in[a,b]$, 使得$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx.$

不妨设$\xi\le x_0$, 从而有

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\} &= |f(x_0)| = |f(\xi)+[f(x_0)-f(\xi)]| \\
&\le |f(\xi)| + |f(x_0)-f(\xi)| \\
&= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_\xi^{x_0} f'(x)\,dx\right| \\
&\le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| + \int_\xi^{x_0} |f'(x)|\,dx \\
&\le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| + \int_a^b |f'(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

例18. 设$f(x)$ 在$[a,b]$ 上有定义, 且对$[a,b]$ 上任意两点x,y, 有$|f(x)-f(y)|\le|x-y|$. 试证明：$f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|\le\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

证明：因$\forall x\in[a,b]$, $|\Delta f|=|f(x+\Delta x)-f(x)|\le|\Delta x|$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$, 所以$f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续, 故$f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

又由题设知, $$|f(x)-f(a)|\le x-a(x\ge a),$$

或 $$f(a)-(x-a)\le f(x)\le f(a)+(x-a),$$

由定积分的不等式性质, 有

$$\int_a^b[f(a)-(x-a)]dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b[f(a)+(x-a)]dx,$$

$$-\frac{(b-a)^2}{2}\le\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\le\frac{(b-a)^2}{2},$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|\le\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

例19. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$f(a)=f(b)=0$, 证明：

$$4\int_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)^2, \text{其中} M=\sup_{a\le x\le b}|f'(x)|.$$

证：对$\forall x\in(a,b)$, 由假设及Lagrange中值定理有

$$f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),\ \xi_1\in(a,x)$$

$$f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi_2),\ \xi_2\in(x,b)$$

因$M=\sup\limits_{a<x<b}|f'(x)|$, 故$|f'(\xi_1)|\le M,\quad |f'(\xi_2)|\le M$, 得

$$|f(x)|\le(x-a)M,\quad |f(x)|\le(b-x)M,$$

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|dx\\ &\le M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx=\frac{M}{4}(b-a)^2,\end{aligned}$$

即

$$4\int_a^b|f(x)|dx\le M(b-a)^2.$$

例20. 证明：$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0.$

证明：$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin u \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \sin u \frac{1}{\sqrt{u}} du + \int_{\pi}^{2\pi} \sin u \frac{1}{\sqrt{u}} du\right],$

对于等式右边的第二个积分, 令$u = t + \pi$, 则有

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin u \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\pi} \sin(t+\pi) \frac{1}{\sqrt{t+\pi}} dt = -\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} dt.$$

所以

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} dt\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} (\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}}) \sin t dt\right] > 0.$$

例21. 设$f(x)$在$[a,b]$上具有二阶连续导数, $f(a)=f(b)=0$, 且在(a,b)内$f''(x)<0$, 证明：

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{4}{b-a}.$$

证明：由题设知$f(x)$在(a,b)内是凹函数（其图形是上凸的），且$f(x)>0, \forall x\in(a,b)$. 记$f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)>0$, $x_0\in(a,b)$. 对$f(x)$在$[a,x_0]$ 和$[x_0,b]$ 上分别用Lagrange中值定理, 有

$$\frac{f(x_0)}{x_0-a}=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=f'(\xi_1),\ a<\xi_1<x_0$$

$$-\frac{f(x_0)}{b-x_0}=\frac{f(b)-f(x_0))}{b-x_0}=f'(\xi_2),\ x_0<\xi_2<b$$

又因在(a,b)内$f''(x)<0$, 所以$f'(x)$ 在$[a,b]$ 上严格单调减, 有$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, 故

$$\begin{aligned}\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx &\geq \frac{1}{f(x_0)}\int_a^b |f''(x)|\,dx \geq \frac{1}{f(x_0)}\int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)|\,dx \\ &\geq \frac{1}{f(x_0)}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)dx\right| = \frac{1}{f(x_0)}\,|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)| \\ &= \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{f(x_0)} = \frac{1}{f(x_0)}\left(\frac{f(x_0)}{b-x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0-a}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{b-a}{(b-x)(x_0-a)},$$

又

$$\begin{aligned}(b-x)(x_0-a) &= (\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a+b}{2} - x_0)^2 - ab \\ &\le \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab-4ab) = \frac{1}{4}(b-a)^2.\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \ge= \frac{b-a}{(b-x)(x_0-a)} \ge \frac{4}{b-a}.$$

例22.（第三届、预赛，第二题）设$f_1, f_2, \cdots f_n$ 为$[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证：存在$\xi \in [0,1]$，使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)dx.$$

证明：记$a_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx,\ k = 1, 2, \cdots, n$. 当某个$a_k = 0$ 时，结论是平凡的.

下设$a_k > 0$ $(\forall k = 1, 2, \cdots n)$. 由平均值不等式，有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k} dx = 1.$$

由此立即可得存在$\xi \in [0,1]$，使得 $\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1$. 结论得证.

8. **含有定积分的极限式**

例23. 设f在(A,B)上连续, $[a,b]\subset(A,B)$, 证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = f(b)-f(a).$$

证 设$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$. 由于$F(a)=0$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x+h)dx &= \int_{a+h}^{b+h} f(t)dt = \int_a^{b+h} f(t)dt - \int_a^{a+h} f(t)dt \\ &= F(b+h)-F(a+h),\end{aligned}$$

因此有 $$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[F(b+h)-F(a+h)-F(b)+F(a)\right].$$

再由f连续, 从而F可导, 便可证得

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx &= \lim_{h\to 0}\frac{F(b+h)-F(b)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} \\ &= F'(b)-F'(a) = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

证法2: $\int_a^b f(x+h)dx \overset{x+h=t}{=} \int_{a+h}^{b+h} f(t)dt = \int_{a+h}^{b+h} f(x)dx$, 故

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x+h)-f(x)]dx\\&=\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx-[\int_a^{a+h} f(x)dx+\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx+\int_{b+h}^{\ b} f(x)dx]\\&=\int_b^{b+h} f(x)dx-\int_a^{a+h} f(x)dx=f(\xi_1)h-f(\xi_2)h,\end{aligned}$$

其中, $\xi_1\in[b,b+h]$, $\xi_2\in[a,a+h]$. 令$h\to 0$, 再由$f(x)$的连续性知

$$\lim_{h\to 0}\int_a^{\ b}[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]dx=\lim_{h\to 0}[f(\xi_1)-f(\xi_2)]=f(b)-f(a).$$

注: 本题的一个易错的证法是

$$\lim_{h\to 0}\int_a^{\ \mathrm{b}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\int_a^{\ b}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=\int_a^b f'(x)dtx=f(b)-f(a).$$

错误在于第一步无根据地将积分与极限交换次序, 第二步将极限写成f的导数, 但f 只是连续函数, 并不一定可导. 第三步中即使f在可导, 其导函数也不一定可积, 因此不能用Newton-Leibniz公式.

例24. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=A.$$

证 明: 由已知条件知$f(x)$在$[0,+\infty)$ 上有界（见为什么？）, 不妨设$|f(x)|\ \le\ M$, $x\in[0,+\infty)$. 将$\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 拆成两项:

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt+\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt$$

其中, 第一项当$x\to+\infty$时必趋于0, 事实上

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt\right|\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt\right|\le\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}|f(t)|dt\le\frac{M}{\sqrt{x}}\to0(x\to+\infty).$$

对于第二项使用积分第一中值定理有, $\exists\xi_x\in[\sqrt{x},x]$, 使得

$$\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt=\frac{1}{x}(x-\sqrt{x})f(\xi_x),$$

由于$x\to+\infty$时, $\sqrt{x}\to+\infty$, 所以$\xi_x\to+\infty$, 从而有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})f(\xi_x)=A$$

故有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)dt=0+A=A.$$

注：本题的用洛必达法则亦可立即得出.

例25. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上可积, 且$g(x)\geq 0$, $f(x)\geq c>0$, 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx.$$

证明：由$f(x)$在$[a,b]$上可积知, 由$f(x)$在$[a,b]$上有界, 记

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x),\quad m=\inf_{x\in[a,b]} f(x),$$

则$M\geq m\geq c>0$, 且$\forall x\in[a,b]$, 有$m\leq f(x)\leq M$. 因而

$$\sqrt[n]{m}g(x)\leq g(x)\sqrt[n]{f(x)}\leq \sqrt[n]{M}g(x),$$

于是

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)dx\leq \int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx\leq \sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)dx.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \sqrt[n]{M}g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_a^b g(x)dx.$$

例26. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续, 且$\forall x\in(a,b)$, 有$|f(x)|<1$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx=0.$$

证明：对$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{\varepsilon,\dfrac{b-a}{3}\}>0$, 由题设条件知$|f(x)|$ 在$[a+\delta,b-\delta]\subset(a,b)$上能够取到最大值, 记

$$f(x_0)=\max_{x\in[a+\delta,b-\delta]}|f(x)|,$$

则有$|f(x_0)|<1$. 因而

$$\lim_{n\to\infty}|f^n(x_0)|=\lim_{n\to\infty}|f(x_0)|^n=0,$$

即对上述$\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 对$\forall n>N$, 有$|f(x_0)|^n<\varepsilon$. 于是对与$\forall n>N$, 有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f^n(x)dx\right| &= \left|\int_a^{a+\delta} f^n(x)dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta} f^n(x)dx+\int_{b-\delta}^{b} f^n(x)dx\right|\\ &\le \int_a^{a+\delta}|f^n(x)|\,dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x_0)|^n\,dx+\int_{b-\delta}^{b}|f^n(x)|\,dx\\ &< \delta+(b-a-2\delta)\varepsilon+\delta<(b-a+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f^n(x)dx=0.$

注：本题采用数列极限的定义证明所要的结论, 技巧是将积分区间分成三段, 使每一段上的积分的绝对值放大后都能任意小. 本题的结论是以下结论的一般情形：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{e}\ln^n x dx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{x^n}{1+x}dx=0.$$

例27. 设$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的连续的周期函数, 周期为T, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$$

证明：对$\forall x>0$, $\exists n\in N^+$ 及$x_0\in[0,T)$, 使得$x=nT+x_0$, 于是由周期函数的积分性质, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt &= \frac{1}{nT+x_0}\int_0^{nT+x_0} f(t)dt=\frac{1}{nT+x_0}\left[\int_0^{nT} f(t)dt+\int_{nT}^{nT+x_0} f(t)dt\right]\\ &= \frac{n}{nT+x_0}\int_0^T f(t)dt+\frac{1}{nT+x_0}\int_0^{x_0} f(t)dt,\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{nT+x_0}=\frac{1}{T}$ 及

$$\left|\frac{1}{nT+x_0}\int_0^{x_0} f(t)dt\right|\le\frac{1}{nT+x_0}\int_0^{x_0}|f(t)|\,dt\le\frac{1}{nT+x_0}\int_0^T|f(t)|\,dt\to0(n\to\infty),$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{nT+x_0}\int_0^T f(t)dt+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+x_0}\int_0^{x_0} f(t)dt\\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt+0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.\end{aligned}$$

9. 一些杂题

例28. 证明：若f在$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$，则至少存在两点$x_1, x_2 \in (a,b)$，使得$f(x_1) = f(x_2) = 0$.

证: 若在(a,b)内$f(x) \neq 0$, 则由f连续, 恒使$f(x) > 0$ 或$f(x) < 0$. 于是又使$\int_a^b f(x)dx > 0$(或 < 0), 这与$\int_a^b f(x)dx = 0$ 相矛盾. 所以$\exists x_1 \in (a,b)$, 使得$f(x_1) = 0$.

若f在(a,b)内只有一个零点x_1, 不妨设$f(x) \begin{cases} > 0, x \in (a, x_1), \\ < 0, x \in (x_1, a). \end{cases}$

再令$g(x) = (x - x_1)f(x), x \in [a,b]$. 易知$g(x)$在$(a,b)$内除$x_1$外处处为负, 从而

$$0 > \int_a^b g(x)dx = \int_a^b xf(x)dx - x_1 \int_a^b f(x)dx = 0,$$

又得矛盾. 所以f在(a,b)内除x_1外至少另有一个零点x_2.

例29. 设f是$[0,1]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$, $\int_0^1 x^k f(x)dx = 0(k = 0,1,\cdots,n)$. 证明：

$$\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)| \geq 2^n(n+1).$$

证: 由于

$$\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-x\right)^n dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2^n(n+1)},$$

因此由条件可得

$$\begin{aligned} 1 &= \left|\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)dx\right| \leq \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n .\left|f(x)\right| dx \\ &= \left|f(\xi)\right| . \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n dx = \left|f(\xi)\right| . \frac{1}{2^n(n+1)} (0 \leq \xi \leq 1), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(\xi)| \geq 2^n(n+1),$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)| \geq |f(\xi)| \geq 2^n(n+1).$$

例30. 是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数$f(x)$满足$f(0)=f(2)=1$, $|f'(x)|\le 1$, $|\int_0^2 f(x)dx|\le 1$? 请说明理由.

证：不存在. 用反证法证明. 若存在如此$f(x)$, 则当$x\in(0,1)$时，

$$f(x)=1+f'(\xi_1)x,\ 0<\xi_1<x.$$

由$|f'(x)|\le 1$, 推得$f(x)\ge 1-x\,(x\in[0,1])$, 从而对$x\in[0,1]$ 该式成立.

同理，$x\in[1,2]$时，$f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2)$, $\Rightarrow f(x)\ge 1+(x-2)=x-1$, $x\in[1,2]$.

$\therefore \int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx>\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx=1$. 矛盾.

例31. 设$|f(x)|\le\pi, f'(x)\ge m>0\,(a\le x\le b)$. 证明：$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|\le \frac{2}{m}$.

证：由已知，f在$[a,b]$上严格增，从而反函数, 记$A=f(a), B=f(b)$, φ为f的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m}.$$

又$|f(x)|\le\pi$, $\therefore -\pi\le A<B\le\pi$, 故

$$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|=\left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y dy\right|\le\int_0^\pi \frac{1}{m}\sin y dy=\frac{2}{m}\,(x=\varphi(y)).$$