2.2.4 无穷小量与无穷大量

一、无穷小(量)

二、无穷大(量)

三、无穷小(量)与无穷大(量)的关系

四、无穷小的比较 阶

五、小结

一、无穷小量

1、定义: 极限为0的变量称为该极限过程中的无穷小(量).

定义 1 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ(或正数X),使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)|<\varepsilon$,

那末 称函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷小,

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ (或$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$).

无穷小的等价定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时，
总有$|f(x)|<\varepsilon.$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$当$|x|>X$时，
总有$|f(x)|<\varepsilon.$

例如,

$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0,$ $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0,$ $\therefore$ 函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0,$ $\therefore$ 数列 $\{\dfrac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注: （1）无穷小是变量,不能与很小的数混淆;

（2）0是可以作为无穷小的唯一的数;

（3）谈到无穷小量, 不能脱离极限过程.

2、无穷小与函数极限的关系:

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小.

证 必要性　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 令 $\alpha(x)=f(x)-A,$

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$　　$\therefore f(x)=A+\alpha(x).$

充分性　设 $f(x)=A+\alpha(x),$

其中$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(A+\alpha(x)) = A+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = A.$

意义:将一般极限问题转化为特殊极限问题(无穷小).

3、无穷小的运算性质:

定理2 （1）有限个无穷小之和、差、积是无穷小.

（2）有界量与无穷小之积是无穷小.

证:（1）设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, 显然由极限运算法则

有 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)\pm\beta(x))=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\beta(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0.$

（2）设函数u在$U^0(x_0,\delta_1)$内有界，即$|u|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

$\Rightarrow\quad 0<|u\cdot\alpha|=M|\alpha|\to 0$

$\therefore$当$x\to x_0$时,$u\cdot\alpha$为无穷小.

推论1 在自变量的同一变化过程中，有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如，当$x \to 0$时，$x\sin\frac{1}{x}, x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小

注意 无穷多个无穷小的和与积未必是无穷小.

例如，$n \to \infty$时，$\frac{1}{n}$是无穷小，

但n个$\frac{1}{n}$之和为1不是无穷小.

二、无穷大

在某极限过程中绝对值无限增大的变量称为<u>无穷大（量）</u>.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$，

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为无穷大，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

无穷大的等价定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow$$

$\forall M>0, \exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,

总有 $|f(x)|>M$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow$$

$\forall M>0, \exists X>0$, 当$|x|>X$ 时,

总有 $|f(x)|>M$.

特殊情形：正无穷大，负无穷大.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty)$$

如： $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $f(x) > M.$

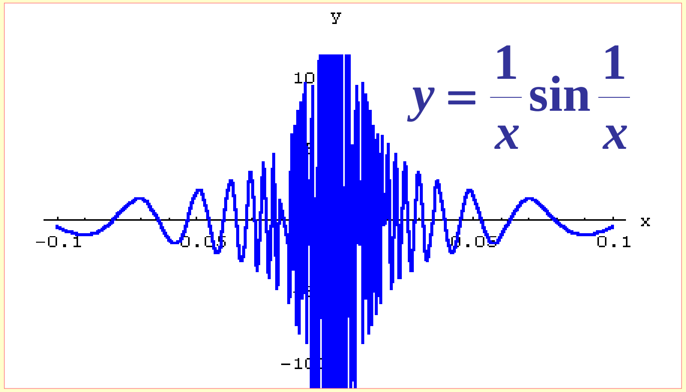
注意 （1）无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 是极限不存在的一种特殊情形.

（3）无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

例如, 当$x \to 0$时, $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

是一个无界变量, 但不是无穷大.



(1) $\forall M > 0$, 取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$

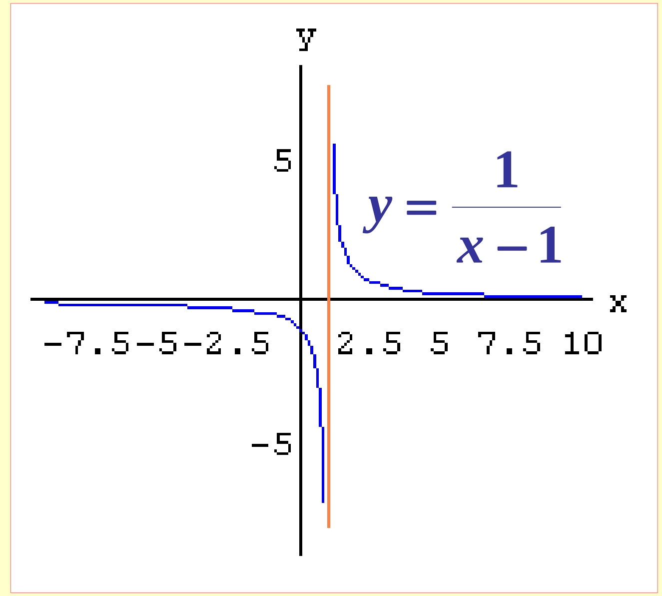
$y(x_k) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 当$k$充分大时, $y(x_k) > M$. y无界,

(2) 取 $x_{k'} = \dfrac{1}{2k'\pi}$ $(k' = 0,1,2,3,\cdots)$

当 k' 充分大时, $x_{k'} < \delta$,

但 $y(x_{k'}) = 2k'\pi \sin 2k'\pi = 0 < M$. y不是无穷大.

例　证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty.$



证　$\forall M > 0.$ 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > M,$

只要 $|x-1| < \dfrac{1}{M},$　　取 $\delta = \dfrac{1}{M},$

当 $0 < |x-1| < \delta = \dfrac{1}{M}$ 时，　就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right| > M.$　$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty.$

定义：如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的垂直渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

定理3 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0\,(f(x)\neq 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty.$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$

$\therefore \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon},$ 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$.

$\therefore \forall M>0, \exists \delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时

恒有$|f(x)|<\dfrac{1}{M}$, 由于 $f(x)\neq 0$, 从而 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|>M$.

$\therefore$ 当$x\to x_0$时,$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

意义 关于无穷大的讨论,都可归结为关于无穷小的讨论.

四、无穷小的比较　阶

例如，当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x, x^2\sin\frac{1}{x}$都是无穷小.

观察各极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,$$　x^2比$3x$要快得多；

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$　$\sin x$与x大致相同；

（$\frac{0}{0}$型）

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$　不存在.　不可比.

极限不同，反映了趋向于零的“快慢”程度不同.

1. 定义: 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小,

记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 就说 β 与 α 是同阶的无穷小;

记作 $\beta = O(\alpha)$;

特殊地, 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小;

记作 $\beta \sim \alpha$;

(4) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$，就说 β 是 α 的 k 阶无穷小.

例如，

$\because \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{3x} = 0$, 即 $x^2 = o(3x)\ (x \to 0)$.

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，x^2 是比 $3x$ 高阶的无穷小；

$\because \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 即 $\sin x \sim x\ (x \to 0)$.

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

注：数学分析中的“同阶无穷小”和“O”符号比这里的含义要广泛.

2. 若存在正数 K 和 L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant L,$$

则称 f 与 g 为当 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量. 特别当

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时，f 与 g 必为同阶无穷小量.

若无穷小量 f 与 g 满足关系式

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant L, \quad x \in U^\circ(x_0),$$

则记作

$$f(x) = O(g(x)) \ (x \to x_0).$$

特别，若 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 内有界，则记为

$$f(x) = O(1) \ (x \to x_0).$$

特别，f 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1) \ (x \to x_0).$$

例1. 证明: 当$x \to 0$时, $\tan x - \sin x$为x的三阶无穷小.

解 $\because \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \tan x - \sin x$为$x$的三阶无穷小.

定理1 (1) $\beta \sim \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$, 称 α 是 β 的主要部分.

(2) $\beta = o(\alpha) \Rightarrow \beta + \alpha \sim \alpha$ (和取大原理).

证: (1) 必要性　　设 $\alpha \sim \beta$,

$$\lim \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0,$$

$\therefore \quad \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

充分性　　设 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim\left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1,$$

$\therefore \quad \alpha \sim \beta$.

(2) 由（1）即可推得.

关于无穷小的一些运算：

设 α，$\beta>0$ ，则当 $x\to 0$ 时，有

$$c\cdot o(x)=o(x);\qquad o(cx)=o(x)\ \ (c\neq 0);$$

$$o(x^{\alpha})\pm o(x^{\beta})=o(x^{\min\{\alpha,\ \beta\}});\qquad o(x^{\alpha})\cdot o(x^{\beta})=o(x^{\alpha+\beta});$$

$$O(x^{\alpha})\pm O(x^{\beta})=O(x^{\min\{\alpha,\beta\}});\qquad O(x^{\alpha})\cdot O(x^{\beta})=O(x^{\alpha+\beta});$$

$$o(x)\pm o(x)=o(x);\qquad o(x)\pm O(x)=O(x);$$

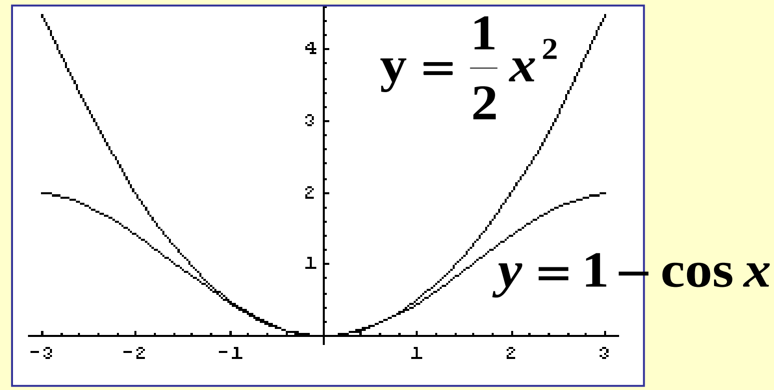
$$o(o(x))=o(x);\qquad (o(x))^{k}=o(x^{k})\ \ \ (k>0);$$

用等价无穷小可给出函数的近似表达式.

例如，　当$x \to 0$时，　$\sin x \sim x$，　$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

$$\sin x = x + o(x),$$

$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$



常用等价无穷小：当$x \to 0$时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x)$$

$$x \sim e^x - 1,\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x\ (\alpha \neq 0)$$

常用等价无穷小:　　当$x \to 0$时,

$$\sin x \sim x, \qquad \arcsin x \sim x,$$

$$\tan x \sim x, \qquad \arctan x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$$

即当$x \to 0$时,

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x$$

$$\sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

例 2． 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=u$,　即 $x=\ln(1+u)$,

则当 $x\to 0$ 时,有 $u\to 0$,

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

即，当 $x\to 0$ 时，　$e^x-1\sim x$.

2. 等价无穷小代换

定理 2 (等价无穷小代换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

定理 2′ （等价无穷小代换）：

如果当 $x \to x_0(x_0^{\pm},\infty,\pm\infty)$ 时，$f(x) \sim g(x)$，则

$$(1)\ \lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x);$$

$$(2)\ \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

注：若未定式的分子或分母为若干个因子的乘积，则可对其中的任意一个或几个无穷小因子作等价无穷小代换，而不会改变原式的极限.

例 3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时, $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, $\tan 2x \sim 2x$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1)\arcsin\dfrac{x}{2}}{(x+1)(1-\cos x^{\frac{3}{4}})}$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$$

解 当$x\to 0$时， $\arcsin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$,

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}\sqrt{x}$$

$$1-\cos x^{\frac{3}{4}}\sim\frac{1}{2}(x^{\frac{3}{4}})^{2}=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sqrt{x}\cdot\frac{x}{2}}{(x+1)\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}.$$

注：不能滥用等价无穷小代换.

切记，只可对函数的**因子**作等价无穷小代换，对于代数和中各无穷小不能分别代换(实际上，代换时需附加条件)，即.

若 $u \sim u', v \sim v'$ 且有 $\boxed{\lim \dfrac{u}{v} = l \neq -1}$

则 $u + v \sim u' + v'$

事实上，由 $\lim \dfrac{u}{v} = l,$ 得 $\lim \dfrac{u'}{v} = l,$

故 $\lim \dfrac{u+v}{u'+v'} = \lim \dfrac{\dfrac{u}{v}+1}{\dfrac{u'}{v}+\dfrac{v'}{v}} = \dfrac{l+1}{l+1} = 1.$

例 5．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

错解 当$x\to 0$时，$\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$.

$$\text{原式} \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{(2x)^3} = 0.$$

解 当$x\to 0$时，$\sin 2x \sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim \frac{1}{2}x^3,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

3. 无穷小的阶与主部

定义：如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0, k>0$，就说 β 是 α 的 k 阶的无穷小，这时 $\beta = C\alpha^k + o(\alpha^k)(\alpha\to 0)$，$C\alpha^k$ 为 β 的主部。

如：若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^k}=C$，即 $f(x)=Cx^k+o(x^k)(x\to 0)$，称 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小，Cx^k 是 $f(x)$ 的主部．

阶

例：$$1-\cos x = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{\text{主部}} + o(x^{\boxed{2}}).$$

求无穷小的阶与主部

例： (1) $\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim x \cdot \frac{1}{2}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^3 (x \to 0),$$

$\therefore$ 主部为$\frac{1}{2}x^3$，阶为3.

(2) $\ln\cos\sqrt[3]{x} = \ln(1+\underline{\cos\sqrt[3]{x}-1}) \sim \cos\sqrt[3]{x} - 1$

$$\sim -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x})^2 = -\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} (x \to 0),$$

$\therefore$ 主部为$-\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}$，阶为$\frac{2}{3}$.

(3) $\sqrt[m]{1+x}\sqrt[n]{1-x}-1\ (x\to 0)\ (m\neq n)$

解 $\because \sqrt[m]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{m}x$ 或 $\sqrt[m]{1+x}=1+\dfrac{1}{m}x+o(x)$

同理 $\sqrt[n]{1-x}=1-\dfrac{1}{n}x+o(x)\ (x\to 0)$

$$\therefore \sqrt[m]{1+x}\sqrt[n]{1-x}-1=(1+\frac{1}{m}x+o(x))(1-\frac{1}{n}x+o(x))-1$$

$$=\cancel{1}+\frac{1}{m}x+\underline{o(x)}-\frac{1}{n}x-\underline{\frac{1}{mn}x^2}-\underline{\frac{1}{n}x\cdot o(x)}+\underline{o(x)}$$

$$+\underline{\frac{1}{m}x\cdot o(x)}+\underline{o(x)o(x)}-\cancel{1}=(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})x+o(x)$$

$\therefore$ 主部为$(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n})x$，阶为 1.

(4) 已知$\sin 2x - 2\sin x = O(x^n)\ (x \to 0)$，求$n$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x(\cos x - 1)}{x^n}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(-\frac{1}{2}x^2)}{x^n} = -\lim_{x\to 0} x^{3-n} = l \neq 0$$

$\therefore$ 取$n = 3$.

无穷小的比较

设 α, β 对同一自变量的变化过程为无穷小, 且 $\alpha \neq 0$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的高阶无穷小} \\ \infty, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的低阶无穷小} \\ C\,(\neq 0), & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的同阶无穷小} \\ 1, & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的等价无穷小} \end{cases}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, \qquad \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 阶无穷小}$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0 \iff \beta \sim C\alpha^k \iff \beta = \underbrace{C\alpha^k}_{\text{主部}} + o(\alpha^k)$$

阶

4.常用求极限的方法

（1）用定义验证极限；

（2）用四则运算法则求极限；

（3）用夹逼准则、单调有界准则求极限；

（4）用两个重要极限求极限；

（5）用无穷小的性质和等价无穷小替换法求极限；

（6）用左、右极限求分段函数的极限；

（7）用变量代换法求复合函数的极限；

（8）用函数的连续性求极限。

……

五、小结

1. 无穷小与无穷大的概念

无穷小与无穷大是相对于极限过程而言的.

1、主要内容: 两个定义;四个定理;三个推论.

2、几点注意:

（1） 无穷小（ 大）是变量,不能与很小（大）的数混淆，零是唯一的无穷小的数;

（2）无穷多个无穷小的代数和（乘积）未必是无穷小;

（3） 无界变量未必是无穷大.

2、无穷小的比较

高(低)阶无穷小；等价无穷小；无穷小的阶.

反映了同一过程中，两无穷小趋于零的速度快慢，但并不是所有的无穷小都可进行比较.

3、等价无穷小的代换

求极限的又一种方法，注意适用条件.

练 习 题

一、填空题:

1、凡无穷小量皆以__________为极限.

2、在__________条件下,直线 $y=c$ 是函数

$y=f(x)$ 的水平渐近线 .

3、$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ ________ $f(x)=A+\alpha$,

(其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$) .

4、在同一过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,

则______是无穷小 .

二、根据定义证明 : 当 $x\to 0$ 时,函数 $y=\dfrac{1+2x}{x}$

是无穷大,问 x 应满足什么条件,能使 $|y|>10^4$.

三、证明函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但当 $x\to+0$ 时，这个函数不是无穷大．

练习题答案

一、1、0；　　2、$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\to\pm\infty}} f(x)=C$；

3、$\Leftrightarrow$；　　4、$\dfrac{1}{f(x)}$.

二、$0<|x|<\dfrac{1}{10^4+2}$.

思考题

任何两个无穷小都可以比较吗?

思考题解答

不能. 例当 $x \to +\infty$时

$$f(x)=\frac{1}{x},\qquad g(x)=\frac{\sin x}{x}$$ 都是无穷小量

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在且不为无穷大

故当 $x \to +\infty$时 $f(x)$和$g(x)$不能比较.