4.3.6 曲线的渐近线与函数的图像

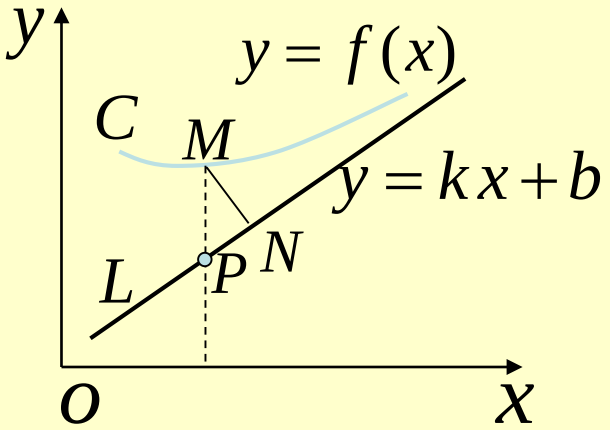
一、 曲线的渐近线

二、 函数的图像

一、曲线的渐近线

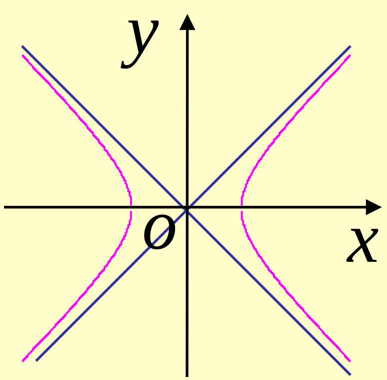
定义 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线 .

或为"纵坐标差"



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a} \pm \dfrac{y}{b} = 0$



但抛物线 $y = x^2$ 无渐近线 .

1. 水平与铅直渐近线

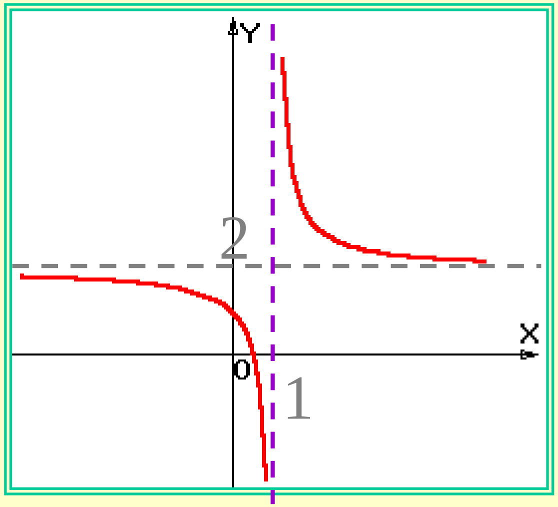
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或$x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

(或$x\to x_0^-$)

例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线.



解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x-1}+2)=2$

$\therefore y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{x-1}+2)=\infty$, $\therefore x=1$为垂直渐近线.

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$, 则曲线 $y=f(x)$ 有 **斜渐近线** $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} x[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}]=0$$

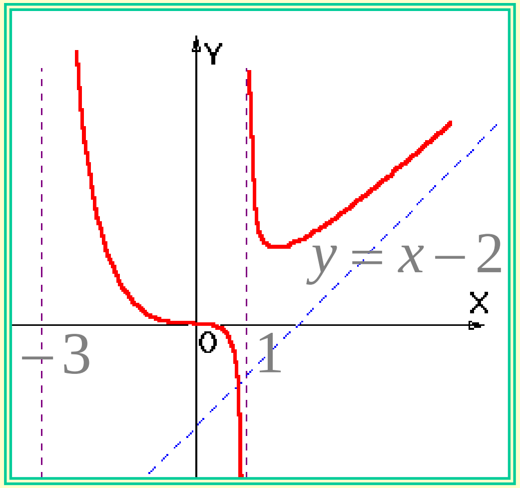
$\Downarrow$

$$k=\lim_{x\to+\infty}[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}]$$

$$\therefore \quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$ 的渐近线 .



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)}$, $\lim\limits_{\substack{x\to-3 \\ (或 x\to 1)}} y=\infty$,

所以有铅直渐近线 $x=-3$ 及 $x=1$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-3}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\quad y=x-2$ 为曲线的斜渐近线 .

注: 如果

(1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在;　　或

(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$ 不存在,

可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线

二、函数的图像

函数作图的步骤:

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$，并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 **0** 和不存在的点；

3. 列表判别增减及凹凸区间，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形 .

例3. 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的性态，并作出其图像.

解: 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由于 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+1}$,

故曲线与坐标交于 $(1,0),(-1,0),(0,1)$.

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

不可导点为: $x=\pm1$.

由 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-\dfrac{1}{3}$.

$$f''(x)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

根据 $f'(x), f''(x)$ 的符号, 列表讨论函数 $f(x)$ 的性态:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

不可导点为: $x=\pm 1.$

解 $f'(x)=0$ 得稳定点 $x=-\frac{1}{3}.$

$$f''(x)=-\frac{8}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}\cdot\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$$

根据 $f'(x), f''(x)$ 的符号,列表讨论函数 $f(x)$ 的性态:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f''(x)$	$+$	不存在	$-$	$-$	$-$	不存在	$-$
$f(x)$	凸、增		凹、增	极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	凹、减	极小值 0	凹、增

函数在$x=\pm1$处连续，且$f'(\pm1)=\infty$,所以在 $x=\pm1$

处有垂直切线.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}}{x}=1$$

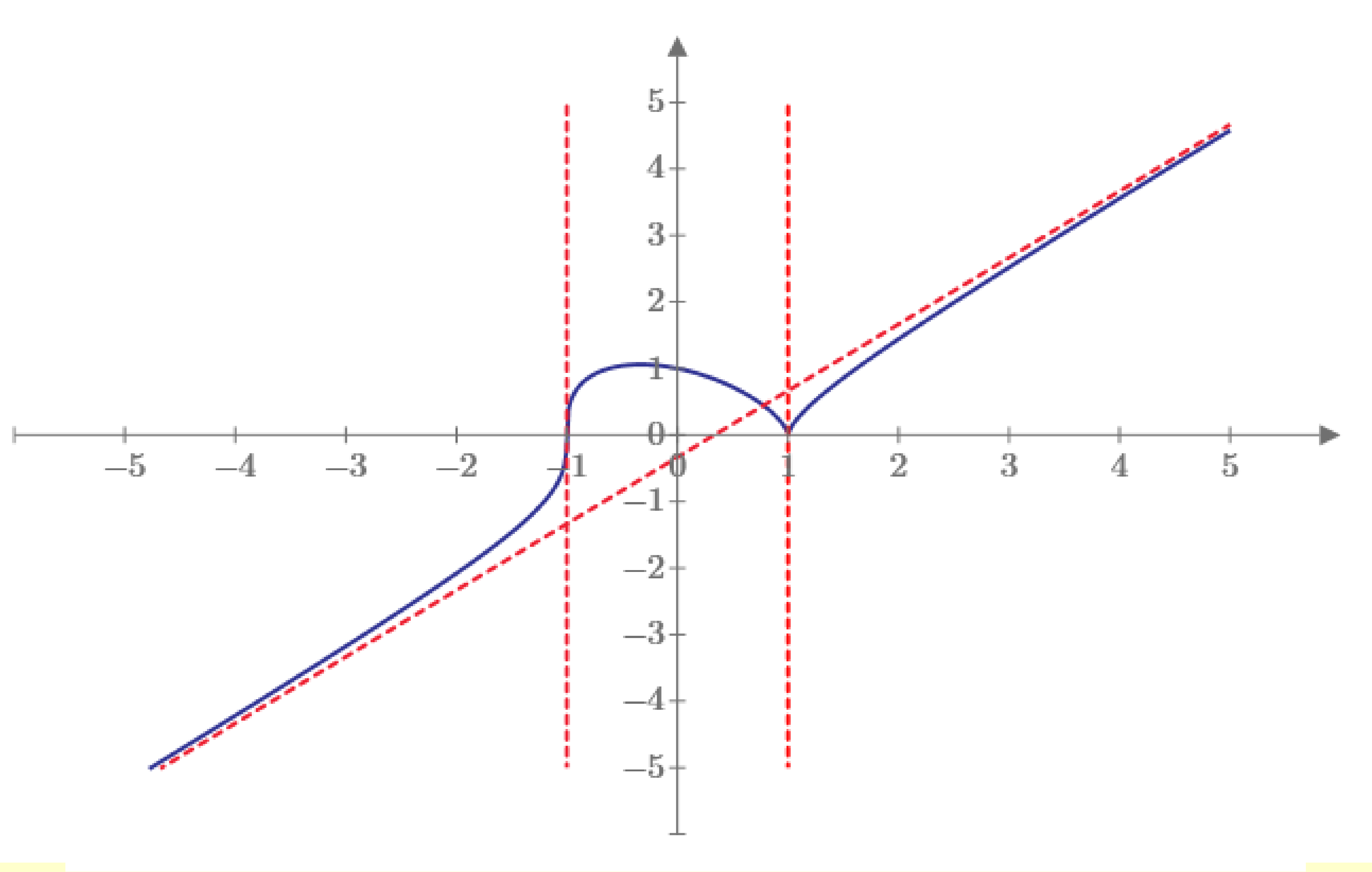
$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x[\sqrt[3]{1+(-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})}-1]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{3}(-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3})=-\frac{1}{3}.$$

故曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$有渐近线 $y=x-\frac{1}{3}$.

结合上述分析, 作函数图象如下:



例4. 描绘方程 $(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形.

解: 1) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$

2) 求关键点

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$ 令 $y'=0$ 得 $x=-1,3$;

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

3) 列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y	$\nearrow$	-2	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$
		(极大)				(极小)	

4) 求渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 1} y=\infty$, $\therefore x=1$ 为铅直渐近线

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\quad y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

又因 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$,

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 为斜渐近线

5) 求特殊点

x	0	2
y	$-\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

$$y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

6）绘图

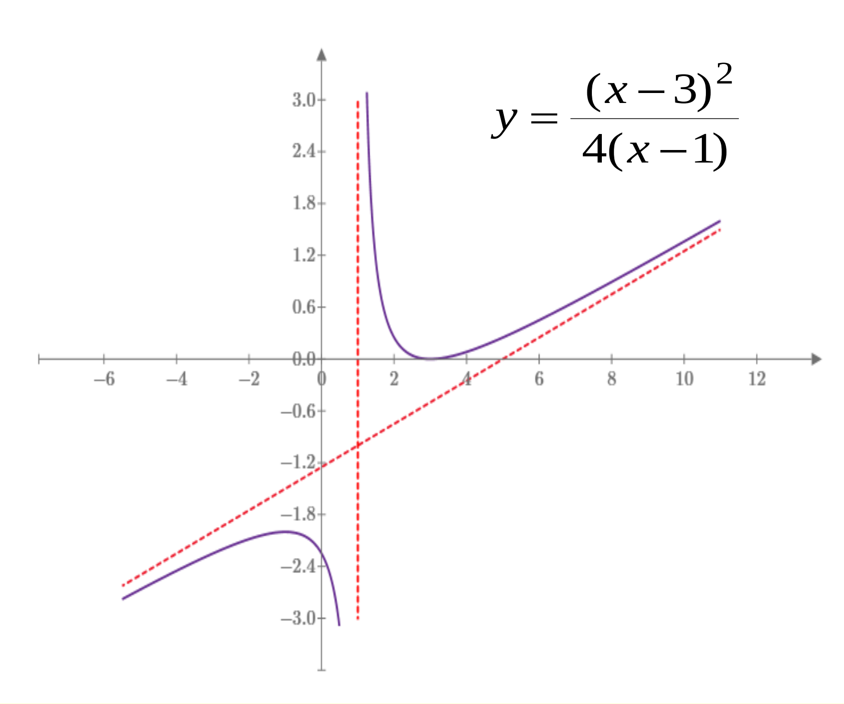
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y	$\nearrow$	-2 (极大)	$\searrow$	无定义	$\searrow$	0 (极小)	$\nearrow$

铅直渐近线 $x=1$

斜渐近线 $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点

x	0	2
y	$-\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$



例5. 描绘函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **的图形.**

解: 1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, **图形对称于** y **轴.**

2) 求关键点

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y'' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 1$

3) 判别曲线形态

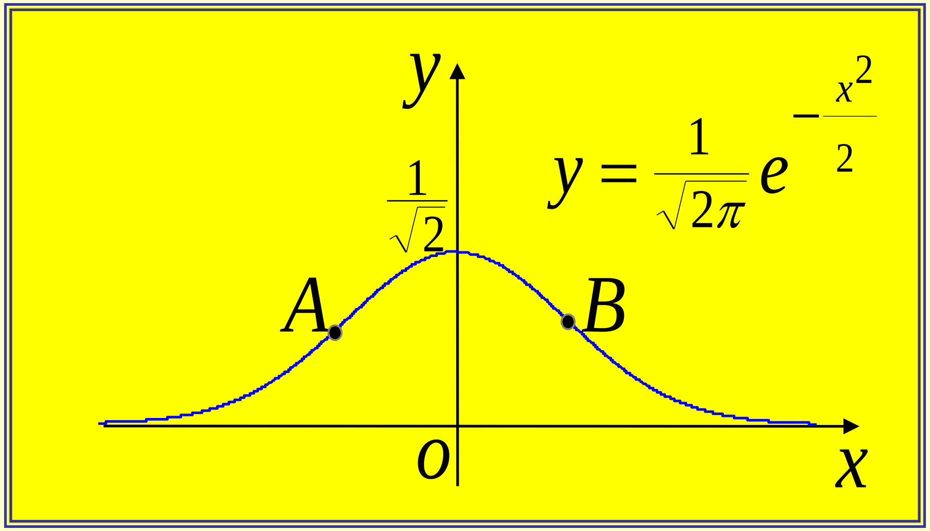
x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$		$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	
	(极大)		(拐点)	

4) 求渐近线

$$\lim_{x\to\infty} y = 0 \qquad \therefore y = 0 \text{ 为水平渐近线}$$

5) 作图

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	0	$-$		$-$
y''		$-$	0	$+$
y	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	↘
	(极大)		(拐点)	



内容小结

1. 曲线渐近线的求法

水平渐近线； 垂直渐近线;

斜渐近线

2. 函数图形的描绘 —— 按作图步骤进行

思考与练习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线; (B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$

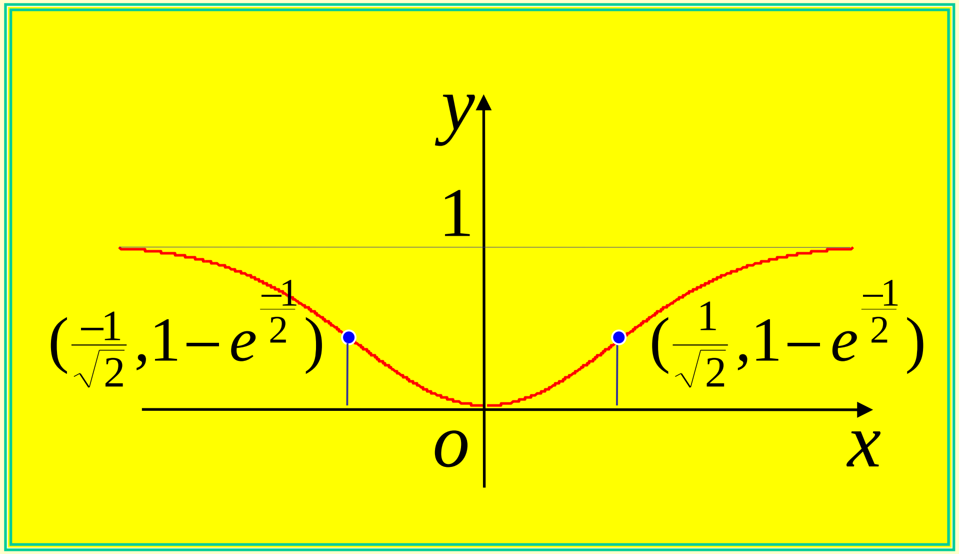
2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的凹区间是 $\underline{\quad(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\quad}$，

凸区间是 $\underline{\quad(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}})\text{ 及 }(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)\quad}$，

拐点为 $\underline{\quad(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},1-e^{\frac{-1}{2}})\quad}$，渐近线 $\underline{\quad y=1\quad}$.

提示:

$$y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$$



3. 求笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy$ **的渐近线 .**

解: 令 $y=tx$, 代入原方程得曲线的参数方程 :

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\qquad t\neq -1$$

当$x\to\infty$时$t\to -1$, 因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to -1}\frac{3at^2}{1+t^3}\Big/\frac{3at}{1+t^3}=-1$$

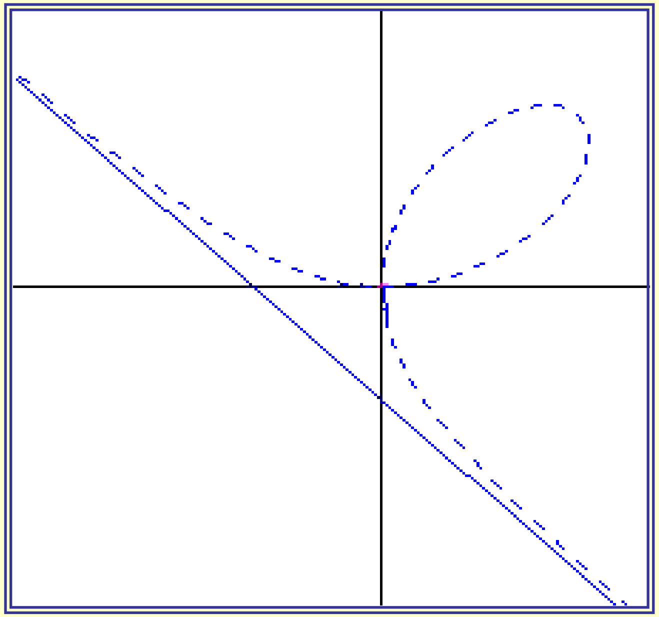
$$\lim_{x\to\infty}[y-(-x)]=\lim_{t\to -1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to -1}\frac{3at\cancel{(1+t)}}{\cancel{(1+t)}(1-t+t^2)}$$

$$=-a$$

所以笛卡儿叶形线有斜渐近线 $y=-x-a$

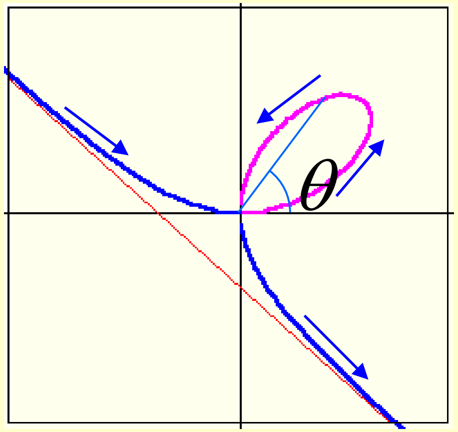
笛卡儿叶形线

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \neq -1$$



参数的几何意义：

$$t = \tan\theta$$



$$t \in (-\infty, -1) \to \theta \in (-\tfrac{\pi}{2}, -\tfrac{\pi}{4})$$

图形在第四象限

$$t \in (-1, 0] \to \theta \in (\tfrac{3\pi}{4}, \pi]$$

图形在第二象限

$$t \in [0, +\infty) \to \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

图形在第一象限

思考题

1. 两坐标轴 $x = 0, y = 0$ 是否都是函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的渐近线？

2. 作出函数

$$f(x) = \begin{cases} (x^2)^x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

的略图，并指出此函数在 $x = 0$ 处是连续的.
试问此函数有极大值、极小值或拐点吗？

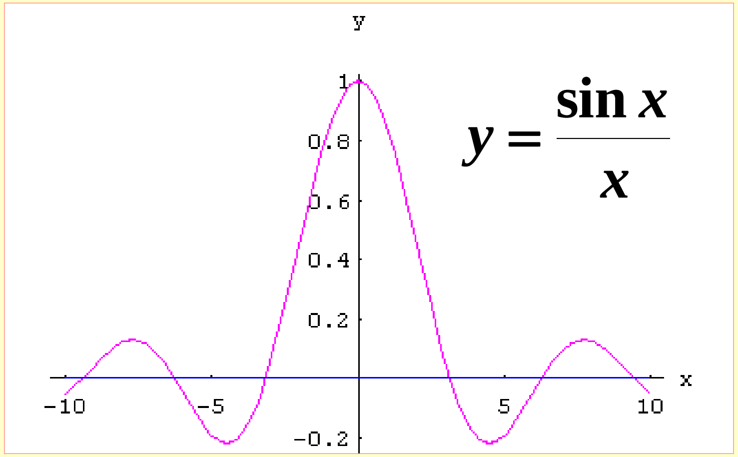
思考题1答案:

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

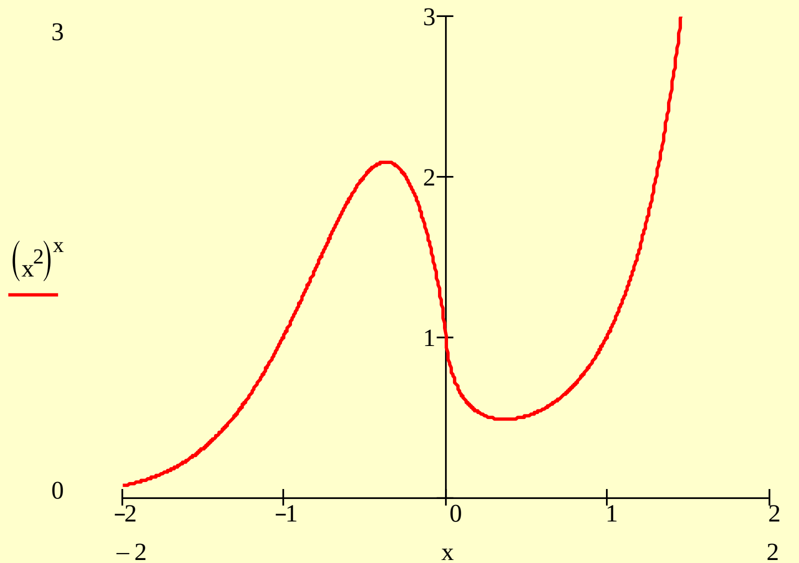
$\therefore\ y=0$ 是其图象的渐近线.

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\neq\infty$$

$\therefore\ x=0$ 不是其图象的渐近线.



思考题2答案：



极值点：$x=\pm\frac{1}{e}$

极大值：$e^{\frac{2}{e}}\approx 2.087$

极小值：$e^{-\frac{2}{e}}\approx 0.479$

拐点：$x_1=0$

$x2 := -0.808$ $\quad \left(2+\mathbf{ln}\left(\mathbf{x}^2\right)\right)^2+\frac{2}{\mathbf{x}}$ =0的根