第3章　多元函数微分学

一元函数微分学

$\downarrow$ 推广

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

3.1 多元函数的极限与连续性

一、 区域

1. 邻域

点集$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}$,称为点 P_0 的**δ邻域.**

例如, 在平面上,

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$ (圆邻域)

在空间中,

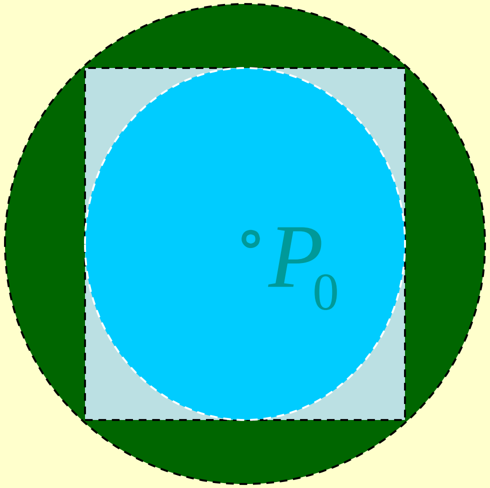
$$U(P_0,\delta)=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta\}$$

(球邻域)

说明： 若不需要强调邻域半径δ ，也可写成$U(P_0)$.

点 P_0 的**去心邻域**记为$\overset{\circ}{U}(P_0)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$

在讨论实际问题中也常使用方邻域, 因为方邻域与圆邻域可以互相包含.

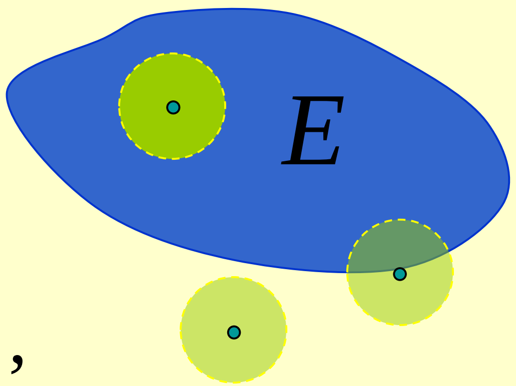


平面上的方邻域为

$$U(P_0,\delta\ ) = \{ (x, y) \mid |x - x_0| < \delta\ ,\ |y - y_0| < \delta\ \}$$

2. 平面点集

(1) 内点、外点、边界点

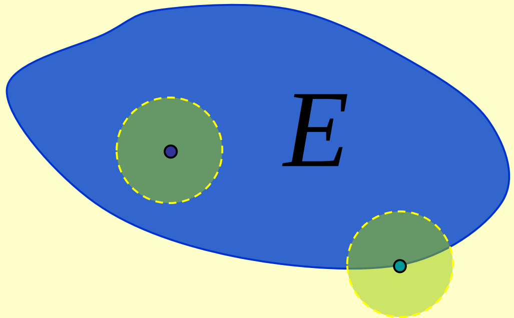


设有点集 E 及一点 P:

- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的**内点**;
- 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的**外点** ;
- 若对点 P 的**任一**邻域 $U(P)$ 既含 E中的内点也含 E 的外点 , 则称 P 为 E 的**边界点** .

显然, E 的内点必属于 E , E 的外点必不属于 E , E 的边界点可能属于 E, 也可能不属于 E .

(2) 聚点



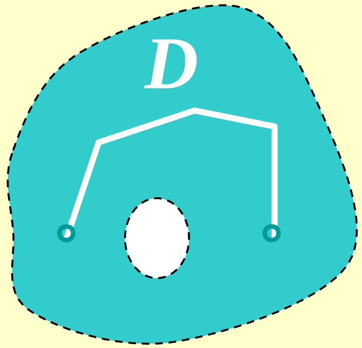
若对任意给定的δ，点P 的去心邻域$\overset{\circ}{U}(P,\delta)$内总有$E$ 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**.

聚点可以属于 E，也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

所有聚点所成的点集成为 E 的**导集**.

(3) 开区域及闭区域

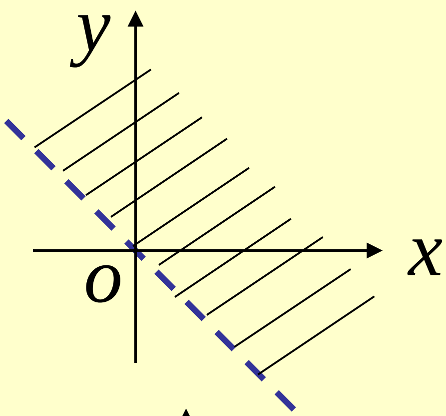
- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集;
- E 的边界点的全体称为 E 的边界, 记作∂E ;
- 若点集 $E \supset \partial E$, 则称 E 为闭集;
- 若集 D 中任意两点都可用一完全属于 D 的折线相连 , 则称 D 是连通的 ;
- 连通的开集称为开区域 ,简称区域 ;
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

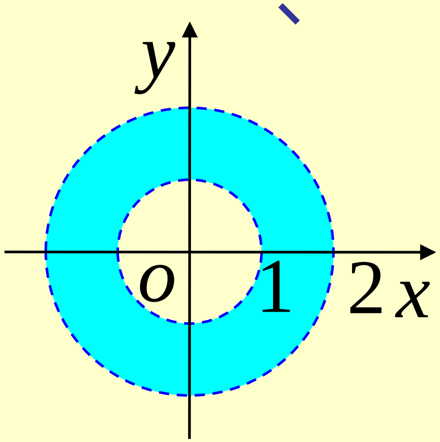


例如，在平面上

- $\{(x,y)\mid x+y>0\}$
- $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$

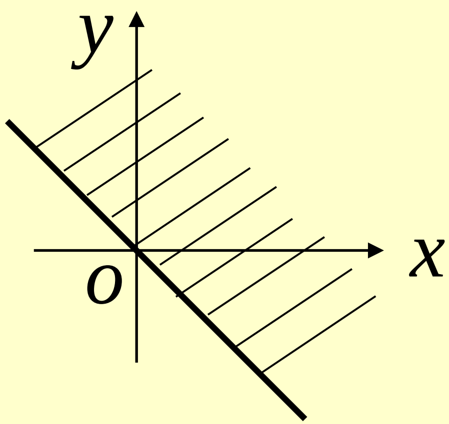
开区域

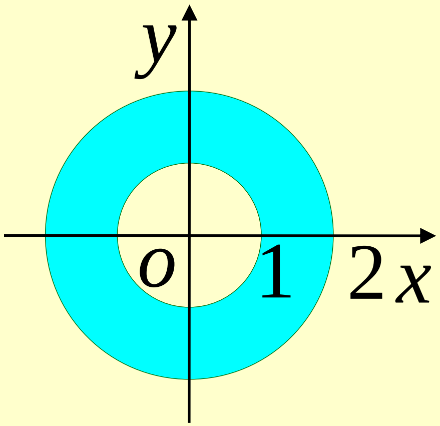




- $\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$

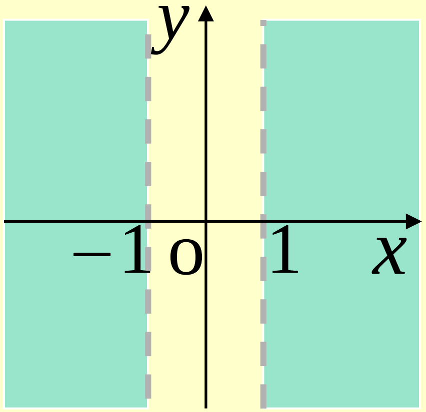
闭区域





♣ 整个平面是最大的开域，也是最大的闭域；

♣ 点集 $\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|>1\right\}$ 是开集，但非区域．



- 对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|\le K$，则称 D 为**有界区域**，否则称为**无区界域**．

3. *n* 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 ***n* 维空间**, 记作 R^n,即

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^n &= \mathrm{R}\times\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R}\\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}\end{aligned}$$

n 维空间中的每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为空间中的一个**点**, 数 x_k 称为该点的第 k 个**坐标** .

当所有坐标 $x_k = 0$ 时，称该元素为 R^n 中的零元,记作 O .

R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与点 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的**距离**记作 $\rho(x,y)$ 或 $\|x-y\|$，规定为

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与零元 O 的距离为

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

当 $n=1,2,3$ 时，$\|x\|$ 通常记作 $|x|$.

R^n 中的变元 x 与定元 a 满足 $\|x-a\|\to 0$ 记作 $x\to a$.

R^n 中点 a 的 **δ 邻域**为

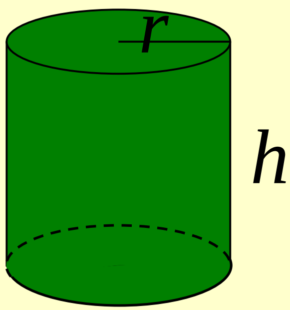
$$U(a,\delta)=\{\,x\mid x\in\mathrm{R}^n,\rho(x,a)<\delta\,\}$$

二、多元函数的概念

引例:

- 圆柱体的体积

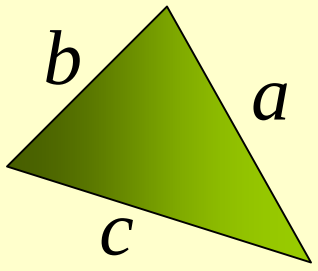
$$V = \pi r^2 h, \quad \{(r,h) \mid r>0, h>0\}$$



- 定量理想气体的压强

$$p = \frac{RT}{V} \quad (R\text{为常数}), \quad \{(V,T) \mid V>0, T>T_0\}$$

- 三角形面积的海伦公式 $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$



$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\{(a,b,c) \mid a>0, b>0, c>0, a+b>c\}$$

定义1. 设非空点集$D \subset \mathrm{R}^n$, 映射$f: D \mapsto \mathrm{R}$称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集$\{u \mid u = f(P), P \in D\}$称为函数的**值域** .

特别地，当 $n = 2$ 时, 有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$$

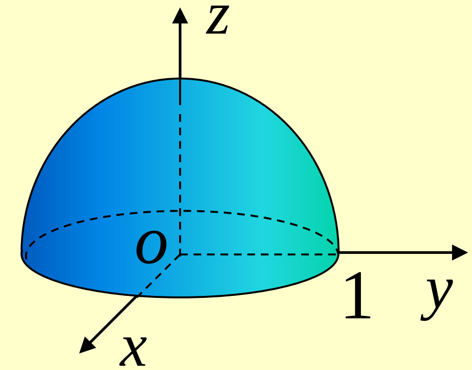
当 $n = 3$ 时，有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$$

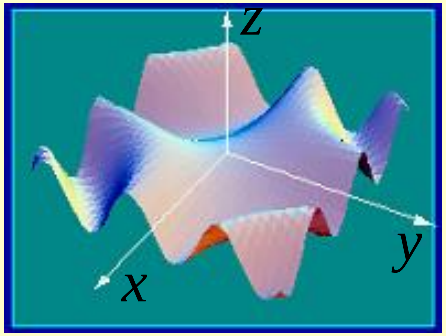
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为圆域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.



又如, $z=\sin(xy),(x,y)\in \mathrm{R}^2$



说明: 二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$

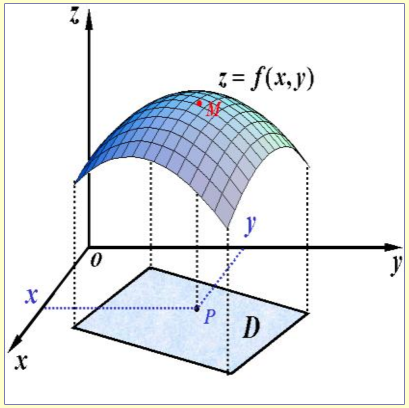
的图形一般为空间曲面 Σ.

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球

$$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

图形为 R^4 空间中的超曲面.



三、多元函数的极限

定义2. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathrm{R}^n$, P_0 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数 δ，对一切 $P\in D\cap \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad (\text{也称为 } n \text{ 重极限})$$

当 $n=2$ 时，记 $\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

例1. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0)$

求证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|\le x^2+y^2$ 要证 $<\varepsilon$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，总有

$$|f(x,y)-0|\le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad , & xy=0 \end{cases}$

求证：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证： $\because 0<|f(x,y)| \leq \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} \right|$

$$\leq |x|+|y| \to 0$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

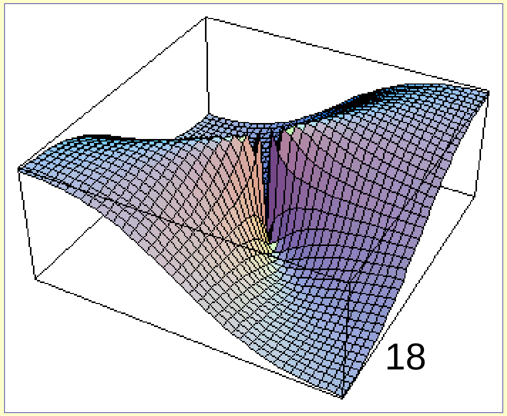
- 若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 函数趋于不同值或有的极限不存在, 则可以断定函数极限不存在 .

例3. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x}^2}{\cancel{x}^2+k^2\cancel{x}^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

***k* 值不同极限不同 !**



故 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点极限不存在 .

- 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ **不同.**

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在,推不出其它二者存在.

例如, $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 显然

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=0,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0$$

但由例3 知它在(0,0)点二重极限不存在 .

四、 多元函数的连续性

定义3. 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上, 聚点 $P_0 \in D$, 如果存在

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续, 否则称为不连续, 此时 P_0 称为间断点 .

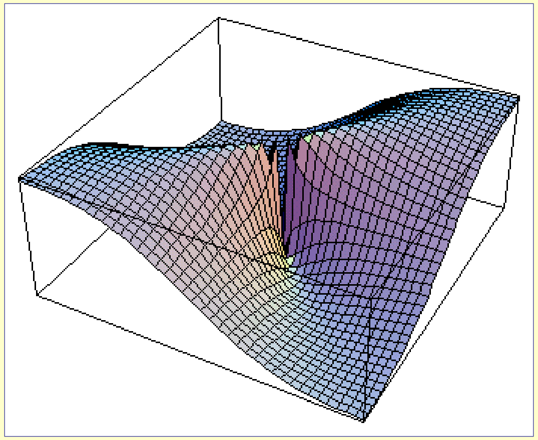
如果函数在 D 上各点处都连续, 则称此函数在 D 上连续.

例如, 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0) 极限不存在, 故 (0, 0)为其间断点.

又如, 函数



$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论: 一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理: 若 $f(P)$ 在**有界闭域** D 上**连续**, 则

(1) $\exists\, K > 0$, 使 $|f(P)| \le K$, $P \in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu \in [m, M], \exists\, Q \in D$, 使 $f(Q) = \mu$;

(介值定理)

* (4) $f(P)$ 必在 D 上一致连续 . (一致连续性定理)

(证明略)

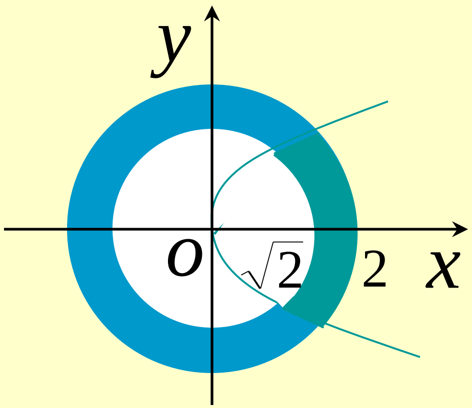
例5. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(\sqrt{xy+1})^2-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}$

例6. 求函数 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的连续域.

解: $\begin{cases} \left|3-x^2-y^2\right| \le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2 \le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$



五、内容小结

1. 区域

- 邻域 : $U(P_0,\delta)$, $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集
- R^n空间

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$P \in D \subset \mathrm{R}^n$$

常用 $\begin{cases} \text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数} \end{cases}$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |PP_0| < \delta \text{时},$$
$$\text{有} |f(P) - A| < \varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

有界定理； 最值定理； 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

练习题 1. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解法1 令 $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{uv} \\ x = \dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$$

$$\downarrow \quad u = \frac{y^2}{x},\ v = xy$$

$$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

1. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

$$\boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$$

解法2 令 $\begin{cases} xy = \dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$$

即 $$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在？

解: 利用$\ln(1+xy)\sim xy$，取 $y = x^{\alpha} - x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} \frac{x^2 y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+2} - x^3}{x^{\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(x^2 - x^{3-\alpha}) = \begin{cases} -1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha < 3 \\ \infty, & \alpha > 3 \end{cases}$$

所以极限不存在.

3. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, $f(x,y)$ 为初等函数 , 故连续.

又 $$0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\ge 2|xy|}$$

由夹逼准则得

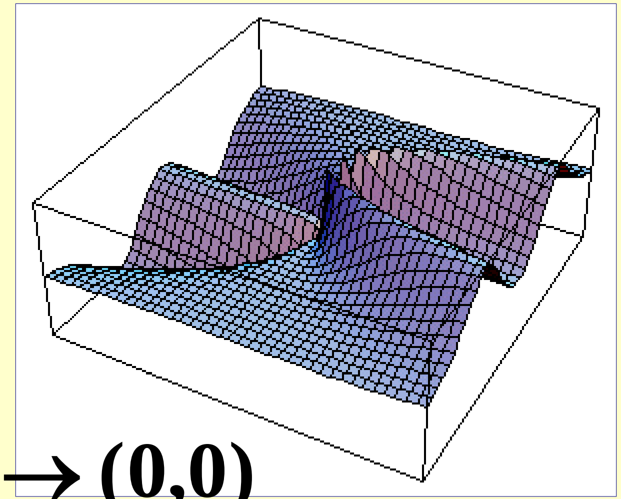
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续 .

思考题

若点(x, y)沿着无数多条平面曲线趋向于点(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$都趋向于 A，能否断定$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$？

思考题解答



不能.

例 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$， $(x,y)\to(0,0)$

取 $y=kx$, $\quad f(x,kx)=\dfrac{x^3\cdot k^2x^2}{(x^2+k^4x^4)^2}\xrightarrow{x\to 0}0$

但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

原因为若取$x=y^2$, $\quad f(y^2,y)=\dfrac{y^6y^2}{(y^4+y^4)^2}\to\dfrac{1}{4}$.

练 习 题

一、填空题:

1、若 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}$，则 $f(tx,ty)=$_____.

2、若 $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2xy}$，则 $f(2,-3)=$____________;

$f(1,\frac{y}{x})=$____________________.

3、若 $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\,(y>0)$，则 $f(x)=$__________.

4、若 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$____________.

函数 $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域是____________.

6、函数$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$的定义域是________________.

7、函数$z=\arcsin\dfrac{y}{x}$的定义域是__________________.

8、函数$z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$的间断点是___________________.

二、求下列各极限:

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

2、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

3、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

三、证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

四、证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$不存在 .

练习题答案

一、 1、 $t^2 f(x,y)$; 2、$-\frac{13}{12}$， $f(x,y)$;

3、 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; 4、 $x^2\frac{1-y}{1+y}$;

5、$\{(x,y)|0<x^2+y^2<1, y^2\le 4x\}$;

6、$\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x^2\ge y\}$;

7、$\{(x,y)|x>0, -x\le y\le x\}$

$\cup\{(x,y)|x<0, x\le y\le -x\}$;

8、$\{(x,y)|y^2-2x=0\}$.

二、1、$-\frac{1}{4}$; 2、0; 3、$+\infty$.