5.3 定积分的应用

5.3.1 定积分的微元法

5.3.2 平面图形的面积

5.3.3 平行截面体的体积

5.3.4 平面曲线的弧长

5.3.5 旋转曲面的面积

5.3.1 定积分的微元法

1、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间$[a, b]$上的某分布 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a, b]$ 具有可加性，即可通过

"分割、近似、求和、取极限"

表示为 $U = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2、如何应用定积分解决问题？

第一步 利用“化整为零，以常代变”求出局部量的近似值 —— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“积零为整，无限累加”求出整体量的精确值 —— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法成为**微元法**(或**元素法**)

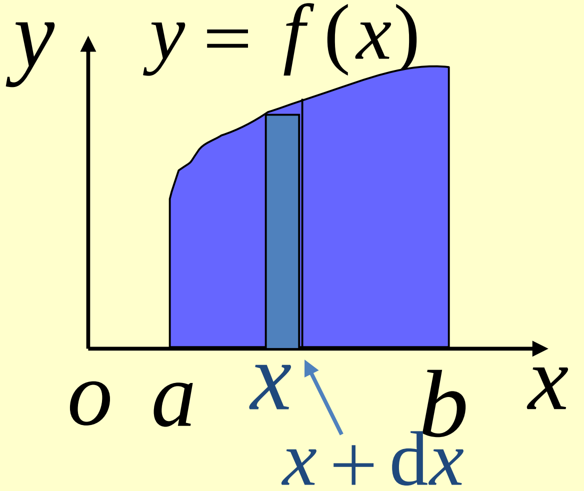
元素的几何形状常取为: 条, 带, 段, 环, 扇, 片, 壳 等

5.3.2. 平面图形的面积

1) 直角坐标情形

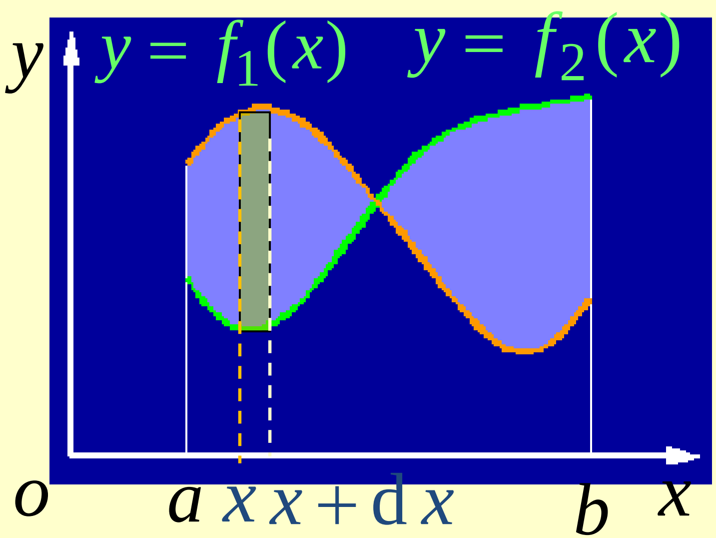
设曲线 $y = f(x)\,(\geq 0)$ 与直线 $x = a, x = b\ (a < b)$ 及 x 轴所围曲边梯形面积为 A，则 $\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



右下图所示图形面积为

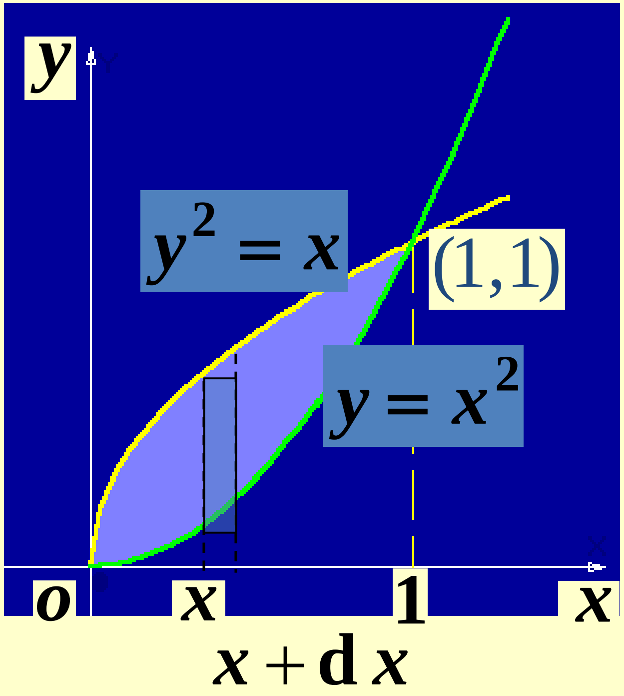
$$A = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| \mathrm{d}x$$



例1. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$

得交点 $(0,0),(1,1)$



$\therefore\quad \boxed{A = \int_0^1} \left(\sqrt{x} - x^2\right)\mathrm{d}x$

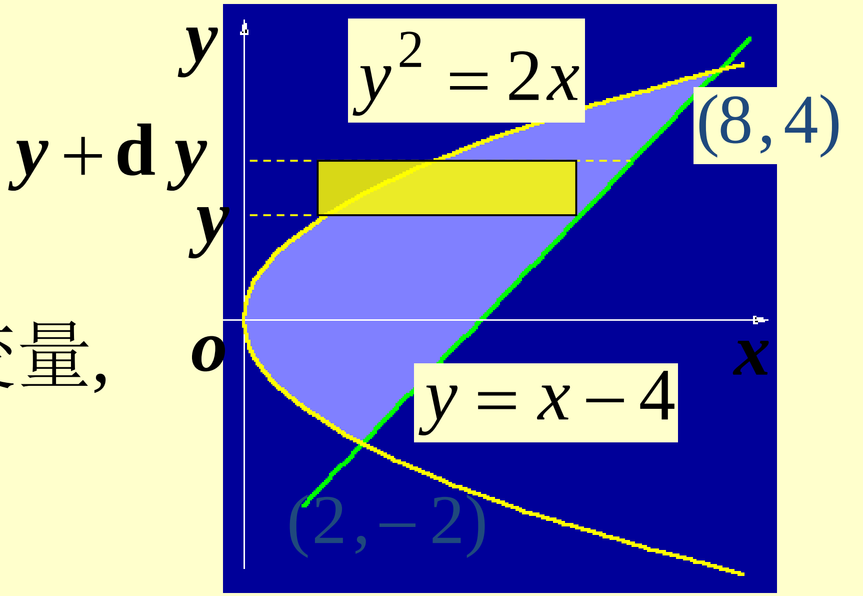
$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}$

例2. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积 .

解: 由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点

$(2,-2),(8,4)$



为简便计算, 选取 y 作积分变量, 则有

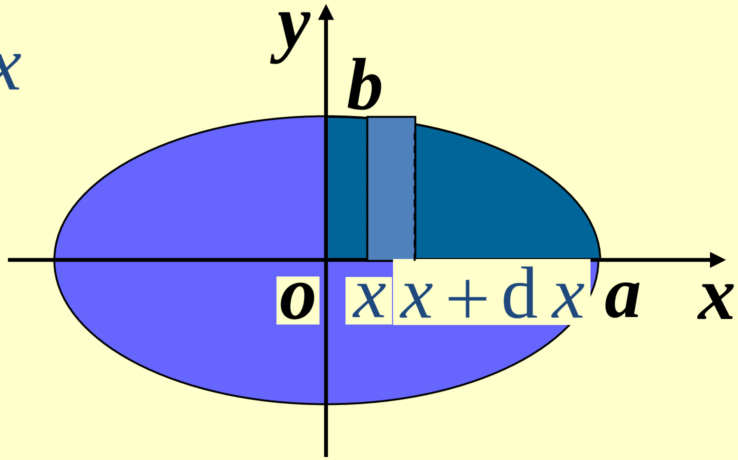
$$\therefore \quad A=\int_{-2}^{4}(y+4-\tfrac{1}{2}y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积.

解: 利用对称性, 有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$

$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$



利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

应用定积分换元法得

$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

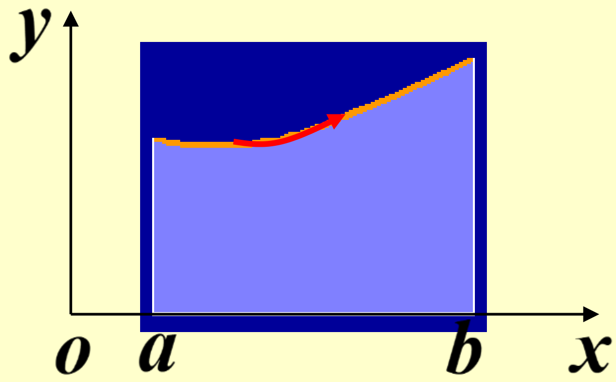
$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 **$a = b$** 时得圆面积公式

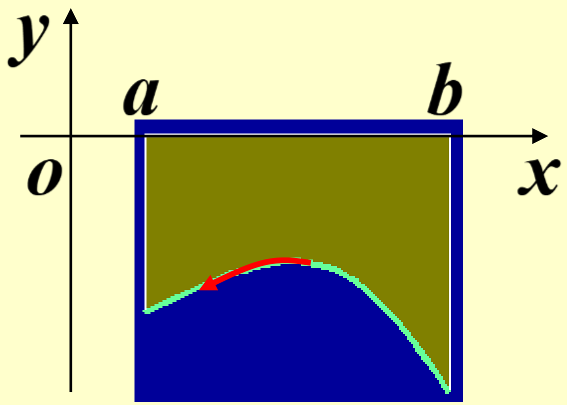
一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出时，按顺时针方向规定起点和终点的参数值 t_1, t_2



(t_1 对应 $x = a$)



(t_1 对应 $x = b$)

则曲边梯形面积 $A = \int_a^b y\,dx \overset{x=\phi(t)}{=} \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\cdot\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

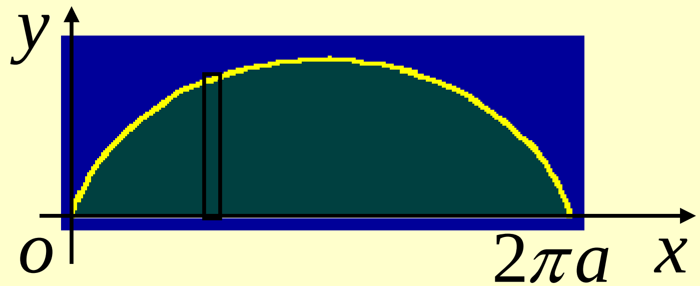
例4. 求由摆线 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ (a > 0)$

的一拱与 x 轴所围平面图形的面积 .

解: $A = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$

$= a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t$

$= 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$



$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$ (令 $u = \frac{t}{2}$)

$= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}u$

$= 16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$

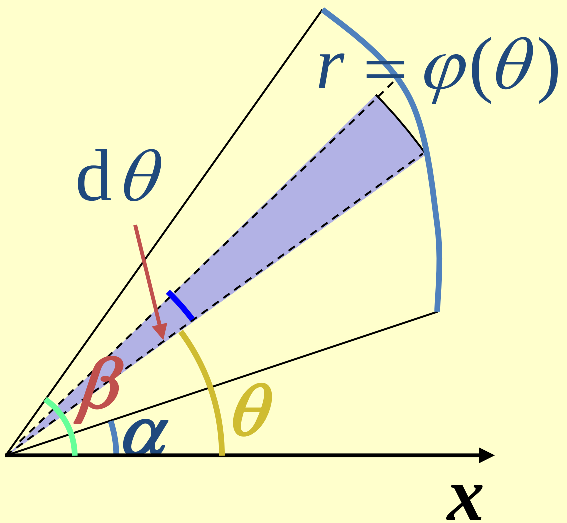
2) 极坐标情形

设 $\varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta],\varphi(\theta)\ge 0$，求由曲线 $r=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的曲边扇形的面积 .

在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

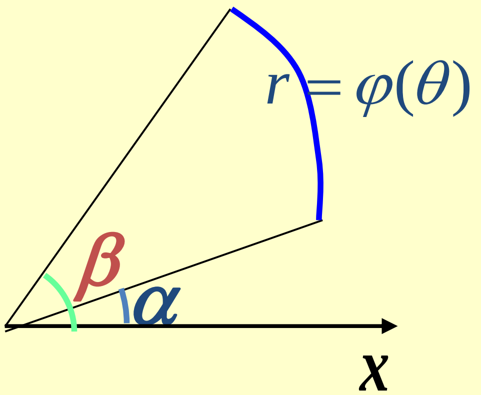


所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

曲线 $r=\varphi(\theta) \quad \varphi(\theta)\in C[\alpha,\beta]$

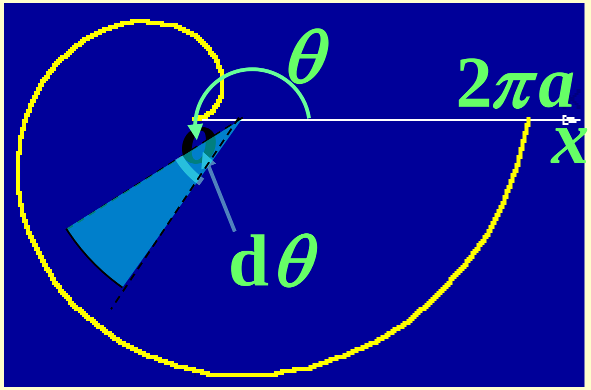
$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^{2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$



例5. 计算阿基米德螺线 $r=a\theta \ (a>0)$

对应 θ 从 0 变 到 2π 所围图形面积 .

解: $A=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^{2}\,\mathrm{d}\theta$



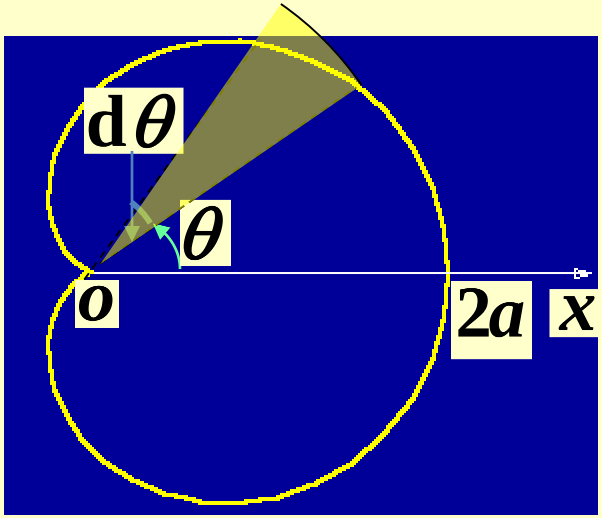
$$=\frac{a^{2}}{2}\left[\frac{1}{3}\theta^{3}\right]_{0}^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{3}\pi^{3}a^{2}$$

例6. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ \ (a>0)$ 所围图形的面积 .

解: $A = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta$

(利用对称性)



$= a^2 \int_0^{\pi} 4\cos^4 \frac{\theta}{2} \,\mathrm{d}\theta$

令 $t = \frac{\theta}{2}$

$= 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

$= 8a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^2$

例7. 计算心形线 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r=a$ 所围图形的面积 .

$1+2\cos\theta+\cos^2\theta$

$\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

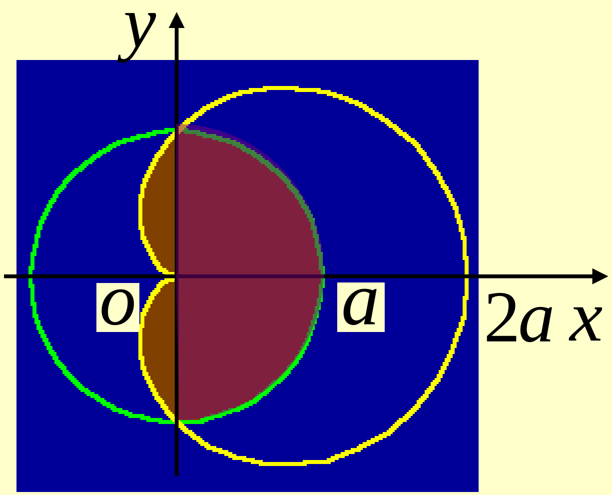
解: 利用对称性 , 所求面积

$$A=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+a^2(\frac{3}{4}\pi-2)$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^2-2a^2$$



5.3.3 平行截面体的体积

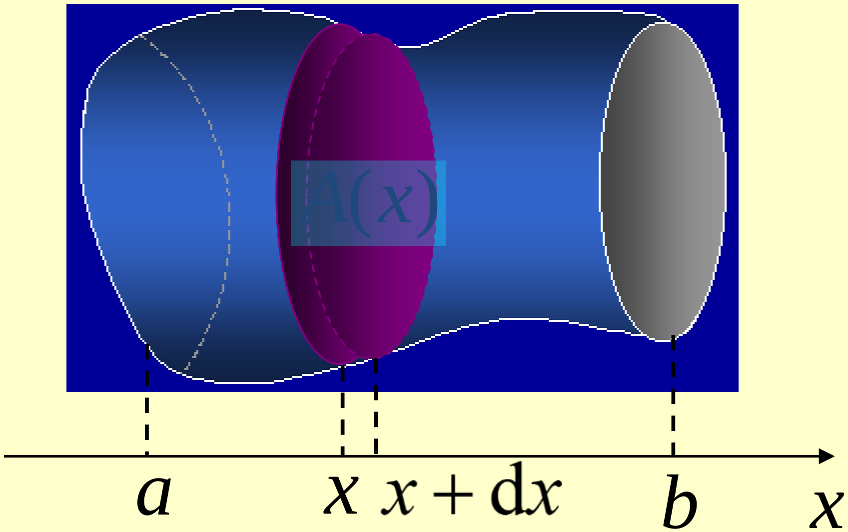
1)平行截面体

设所给立体垂直于**x** 轴的截面面积为**A(x)**,$A(x)$在$[a,b]$上连续,则对应于小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



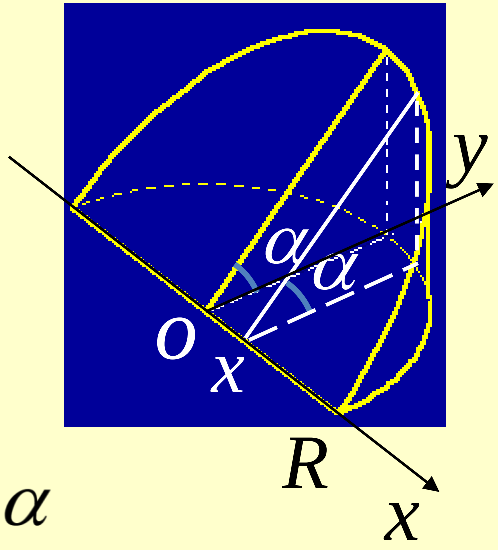
例1. 一平面经过半径为R 的圆柱体的底圆中心 , 并与底面交成 α 角, 计算该平面截圆柱体所得立体的体积 .

解: 如图所示取坐标系, 则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2$$

垂直于x 轴 的截面是直角三角形, 其面积为

$$A(x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha \quad (-R \le x \le R)$$



利用对称性

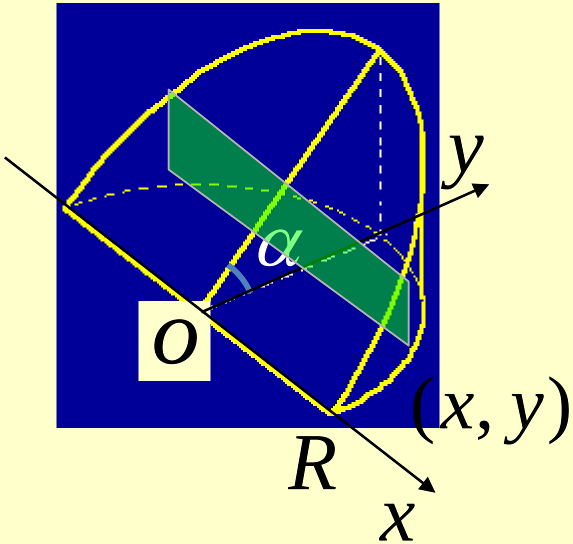
$$V = 2\int_0^R \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha\,\mathrm{d}\,x$$

$$= 2\tan\alpha\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^R = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

思考: 可否选择 y 作积分变量 ?

此时截面面积函数是什么 ?

如何用定积分表示体积 ?



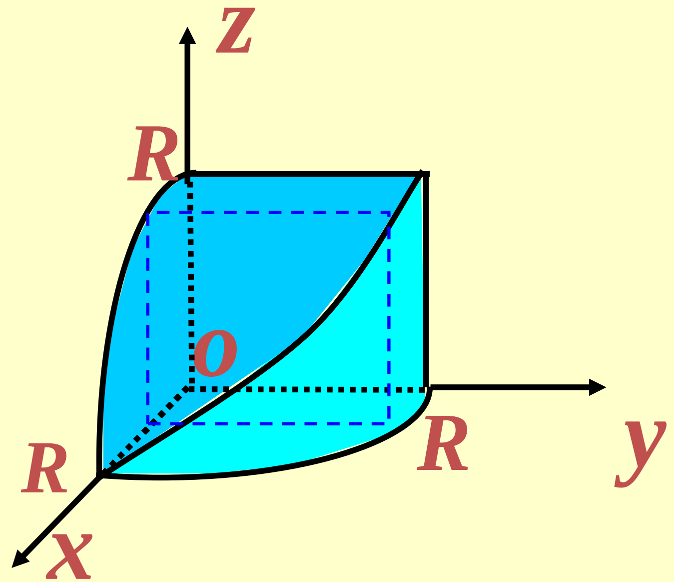
提示:

$$A(y) = 2x \cdot y \tan\alpha$$

$$= 2\tan\alpha \cdot y\sqrt{R^2 - y^2}$$

$$V = 2\tan\alpha \cdot \int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\, \mathrm{d}y$$

例2. 求两个圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围的立体的体积。



解: 所求立体在第一卦限如图.

由对称性所求立体体积为其在第一卦限的8倍.

在 $x\in[0,R]$ 处立体的截面为正方形

$x\in[0,R]$处立体的截面函数为

$$A(x)=R^2-x^2,$$

$$V=8\int_0^a (R^2-x^2)dx=\frac{16}{3}R^3.$$

祖暅原理

“夫叠棊(qí)成立积，缘幂势既同，则积不容异”．

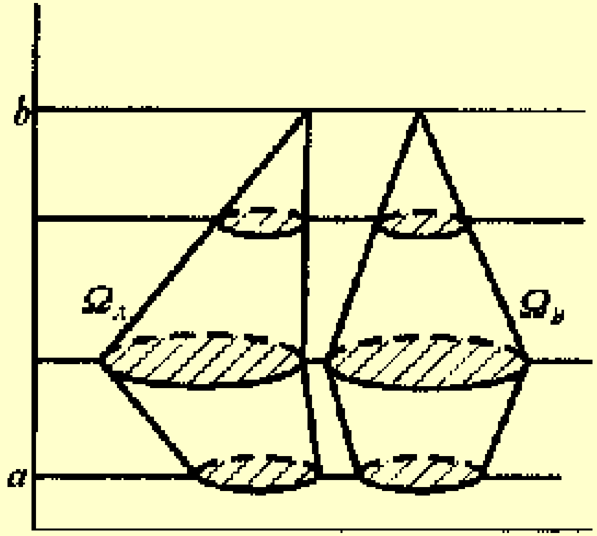
设 Ω_A,Ω_B 为位于同一区间 $[a,b]$ 上的两个立体,

其体积分别为 V_A,V_B.

若在 $[a,b]$ 的它们的截面面积函数 $A(x)=B(x)$

皆连续，且 $A(x)=B(x)$

则 $V_B=V_A$.

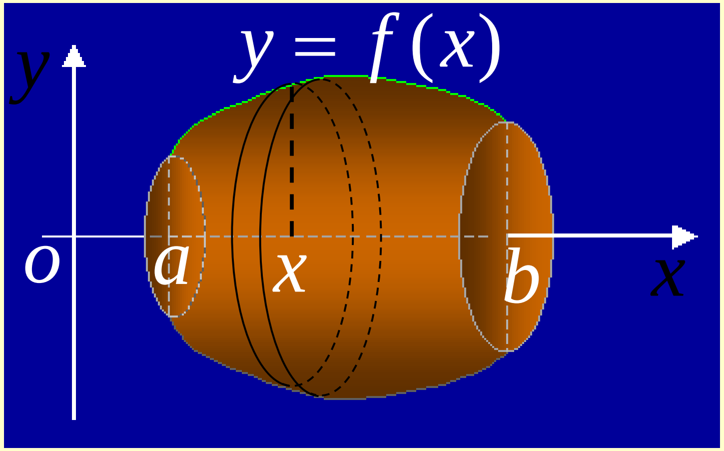


2) 旋转体的体积

当考虑连续曲线段 $y=f(x)\ (a\le x\le b)$ 绕 x 轴

轴旋转一周围成的立体体积时,有

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

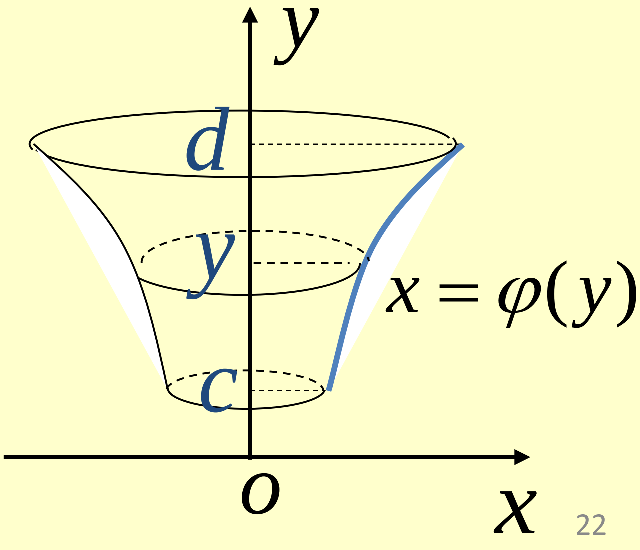


当考虑连续曲线段

$$x=\varphi(y)\ (c\le y\le d)$$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时,

有 $$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$$



例4. 试用上述公导出圆锥体积公式.

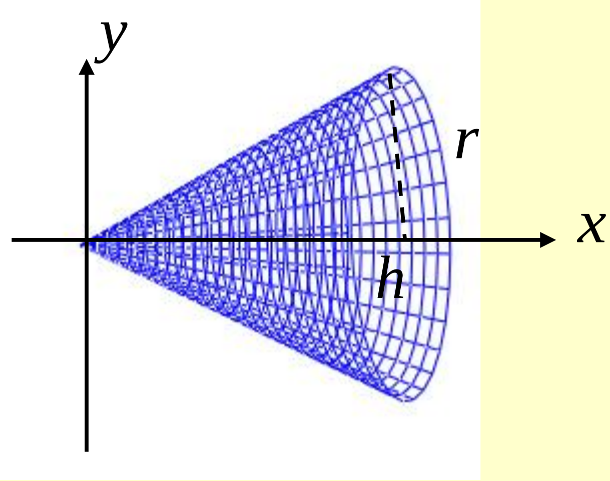
解: 设正圆锥的高为h，底圆半径为r，

可视为曲线 $y=\frac{r}{h}x, x\in[0,h]$

绕 x 轴一周围成的立体，

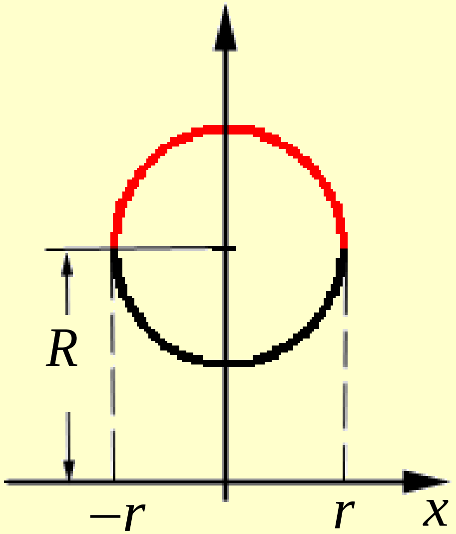
故其体积为

$$V=\pi\int_0^h(\frac{r}{h}x)^2dx=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$



S1

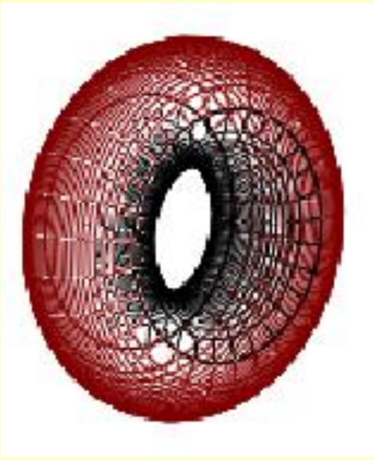
例5. 求圆 $x^2+(R-y)^2 \le r^2 (0<r<R)$ 绕 x 轴一周所得的环状立体的体积.



解: 圆 $x^2+(R-y)^2 \le r^2 (0<r<R)$ 的上、下半圆分别为

$$y=R+\sqrt{r^2-x^2}, x\in[-r,r],$$

$$y=R-\sqrt{x^2-r^2}, x\in[-r,r].$$



故所求的体积为

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(R+\sqrt{r^2-x^2})^2 dx-\pi\int_{-r}^{r}(R-\sqrt{r^2-x^2})^2 dx$$

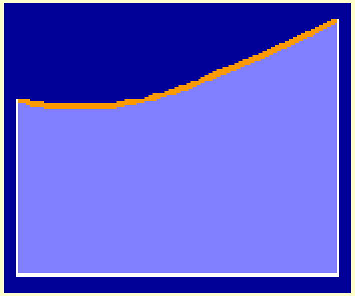
$$=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx=2\pi^2 r^2 R.$$

即为 $V=2\pi R\cdot\pi r^2.$

(以 r 为半径, $2\pi R$ 为高的圆柱体的体积).

注1： 若曲边梯形的曲边为参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in[\alpha,\beta]$$

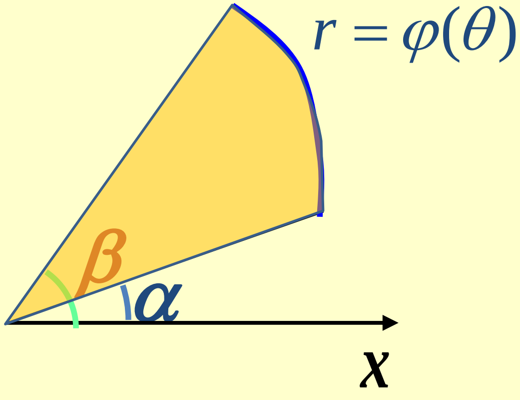


则该曲曲边梯形绕 x 轴旋转一周所围成立体的体积为：

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi^{2}(t)\,|\varphi'(t)|\,dt$$

注2： 由极坐标曲线围成的平面图形：

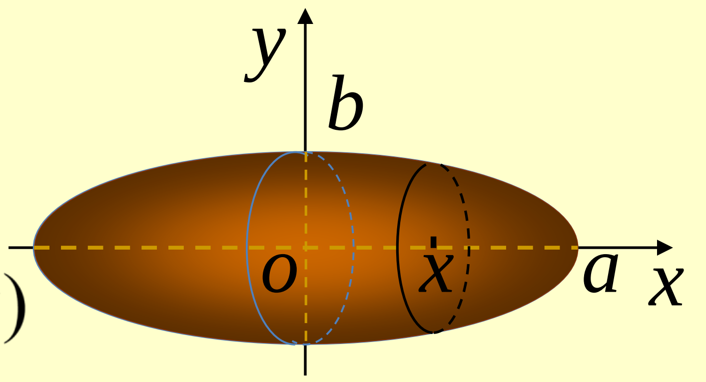
$$D: 0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi, 0\le r=r(\theta)$$



绕极轴旋转一周所成的立体的体积为：

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}r^{3}(\theta)\sin\theta d\theta.$$

例6. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积.



解: 方法1 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$

则 $V=2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x$

(利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

方法2 利用椭圆参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

则 $V = 2\int_0^a \pi y^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2 \sin^3 t \,\mathrm{d}t$

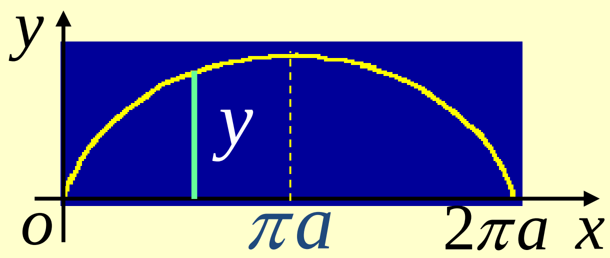
$$= 2\pi ab^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当 $b = a$ 时，就得半径为 a 的球体的体积 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

例7. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积．

解: 绕 x 轴旋转而成的体积为



$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$

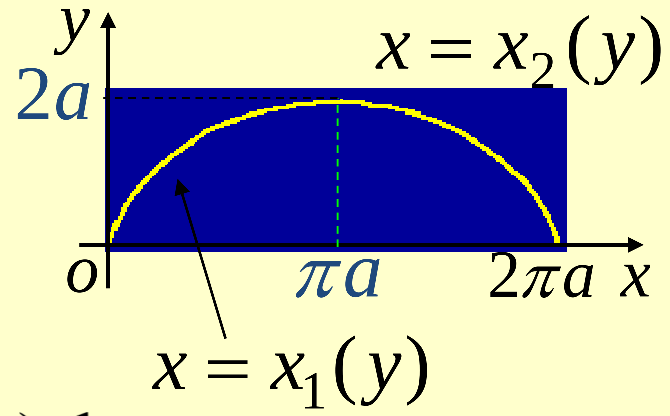
利用对称性

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 \,\mathrm{d}t = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \quad (\text{令 } u = \frac{t}{2})$$

$$= 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u \,\mathrm{d}u = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0)$$



绕 y 轴旋转而成的体积为

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

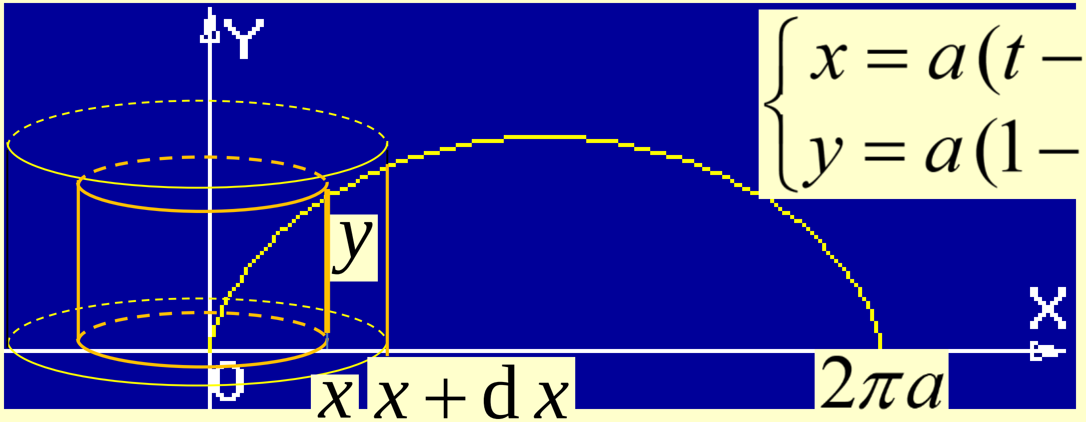
注意上下限！

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2 (t - \sin t)^2 \cdot a \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$ 注

说明: V_y 也可按柱壳法求出



柱面面积 $2\pi x \cdot y$　　　柱壳体积 $2\pi xy \cdot \mathrm{d}x$

$$V_y = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t) \cdot a^2 (1-\cos t)^2 \mathrm{d}\,t$$

$$V_y = \cdots$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot a^2 (1 - \cos t)^2 \,\mathrm{d}t$$

$$= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin^4 \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t$$

$$\Big\downarrow \text{令 } u = \frac{t}{2}$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} (2u - \sin 2u) \sin^4 u \,\mathrm{d}u$$

$$\Big\downarrow \text{令 } v = u - \frac{\pi}{2}$$

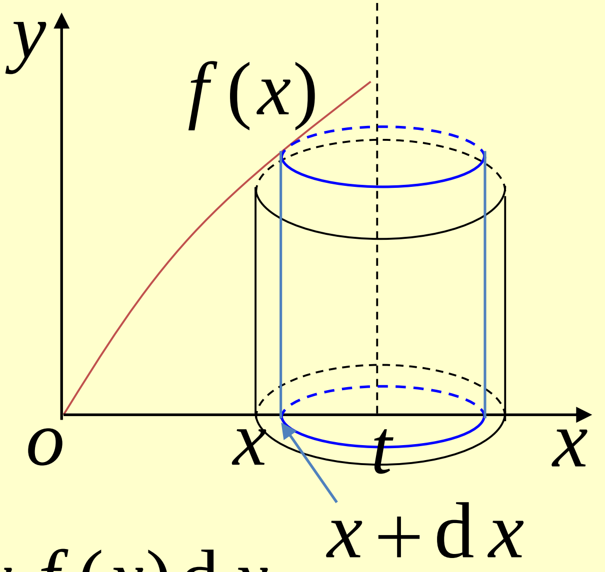
$$= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\underline{2v} + \underline{\pi} + \underline{\sin 2v}) \underline{\cos^4 v} \,\mathrm{d}v = 6\pi^3 a^3$$

偶函数

奇函数

例8. 设 $y=f(x)$ 在 $x\geq 0$ 时为连续的非负函数，且 $f(0)=0$, $V(t)$ 表示 $y=f(x)$, $x=t\,(>0)$ 及 x 轴所围图形绕直线 $x=t$ 旋转一周所成旋转体体积，证明:

$$V''(t)=2\pi f(t).$$



证: 利用柱壳法

$$\mathrm{d}V=2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

则 $$V(t)=\int_0^t 2\pi(t-x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi t\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^t x\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

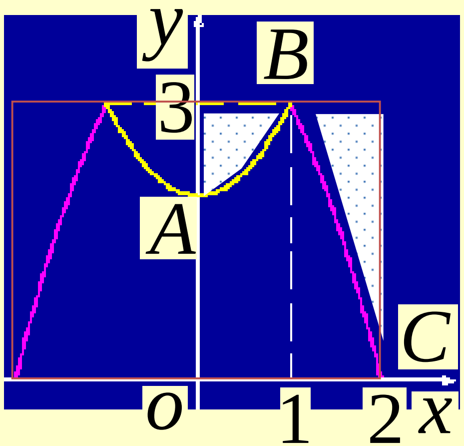
$$V'(t)=2\pi\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x+\cancel{2\pi t\,f(t)}-\cancel{2\pi t\,f(t)}$$

故 $V''(t)=2\pi f(t)$

例9. 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 **x** 轴围成的封闭图形绕直线 **y＝3** 旋转得的旋转体体积.

解: 利用对称性，在第一象限

$$y=\begin{cases} x^2+2, & 0\le x\le 1 \\ 4-x^2, & 1< x\le 2 \end{cases}$$



故旋转体体积为

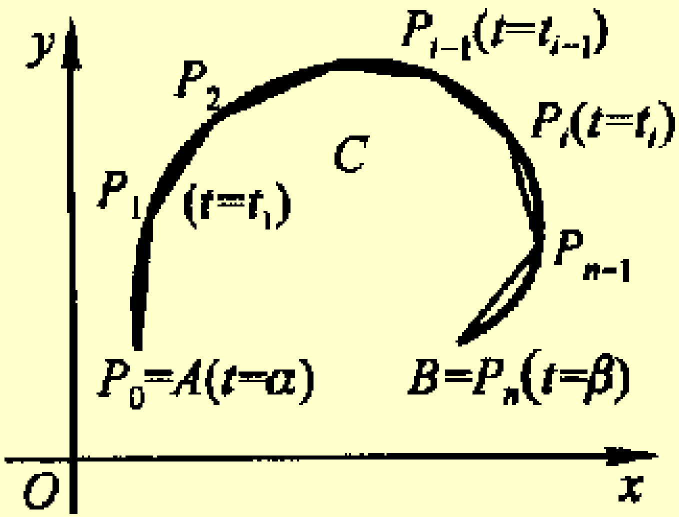
$$V=\pi\cdot 3^2\cdot 4-2\int_0^1 \pi[3-(x^2+2)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$-2\int_1^2 \pi[3-(4-x^2)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=36\pi-2\pi\int_0^2 (x^2-1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi$$

5.3.4 平面曲线的弧长

1) 平面曲线弧长的定义



设平面曲线 $C=\overset{\frown}{AB}$, 作C 上的分割T:

$$A=P_0,P_1,P_2,\cdots P_{n-1},P_n=B$$

用$|P_{i-1}P_i|$表示连结 P_{i-1},P_i 的线段

$(i=1,2,\cdots,n)$.

记 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}|P_{i-1}P_i|,\quad s_T=\sum\limits_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|.$

定义1 对于曲线C上的任意分割T,如果存在极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}s_T=s,$$

则称C是可求长的,并称 s 为曲线C 的弧长.

2) 光滑曲线

定义2 设平面曲线C的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta],$$

若 $x(t), y(t)$ 都在 $[\alpha, \beta]$ 连续可微, 且 $x'(t), y'(t)$ 不同时为零, 则称C为光滑曲线.

(C为光滑曲线:C上任一点都存在切线.)

定理1 设曲线C由参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$$

若C是光滑曲线, 则C是可求长的, 且弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

证明：（略）

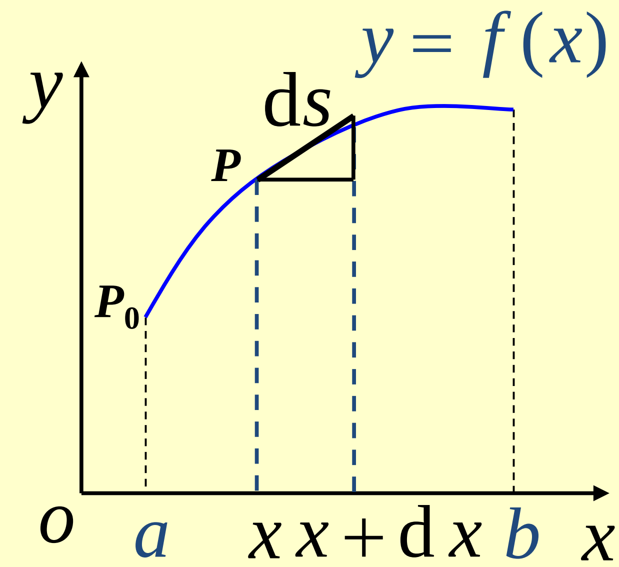
3) 弧微分

若把公式中的积分上限改为t，就得到曲线

由端点P_0到动点$P(x(t)), y(t))$的弧长，即

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}d\tau$$

由于被积函数是连续的，因此,



$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

特别称 $s(t)$ 的微分 ds 为弧微分.

注：若C是光滑曲线, 其方程为

1. 参数方程 $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$ **则弧长为**

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

2. 直角坐标方程 $y = f(x), x \in [a, b],$

则其参数方程为 $x = x, y = f(x), x \in [a, b],$

则弧长为 $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$

3. 极坐标方程 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta],$ 则其参数方程为

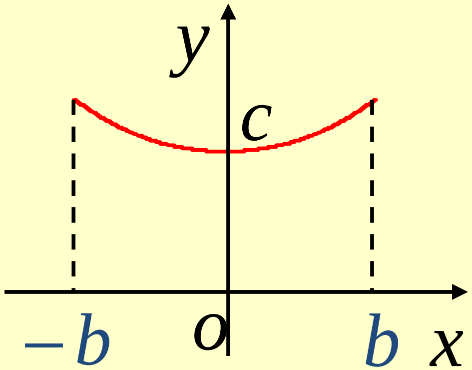
$$x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta, \theta \in [\alpha, \beta]$$

则弧长为 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta.$

例1. 两根电线杆之间的电线, 由于其本身的重量, 下垂成悬链线. 悬链线方程为

$$y = c\,\mathrm{ch}\frac{x}{c} \quad (-b \le x \le b)$$

求这一段弧长.



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{c}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad s = 2\int_0^b \mathrm{ch}\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x = 2c\left[\mathrm{sh}\frac{x}{c}\right]_0^b$$

$$= 2c\,\mathrm{sh}\frac{b}{c}$$

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$$

$$(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$$

例2. 求连续曲线段 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}\,t$ 的弧长.

解: $\because\ \cos x \geq 0,\ \therefore\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+y'^{2}}\,\mathrm{d}x$$

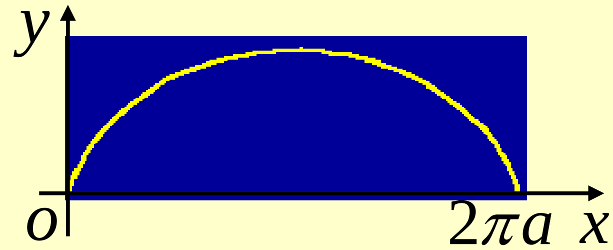
$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\sqrt{\cos x})^{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=2\sqrt{2}\left[2\sin\tfrac{x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4$$

例3. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 一拱 $(0 \le t \le 2\pi)$ 的弧长 .



解: $\mathrm{d}s = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t$

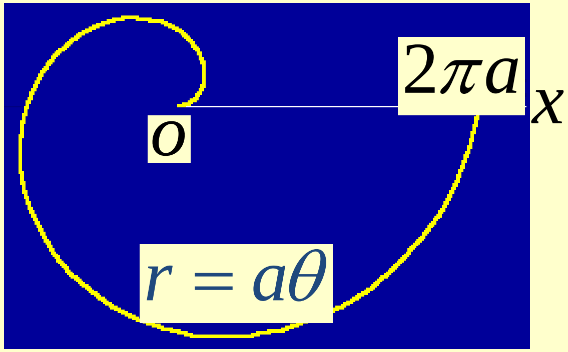
$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\;\mathrm{d}t$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

例4. 求阿基米德螺线 $r=a\theta\ \ (a>0)$ **相应于** $0\le\theta\le 2\pi$ **一段的弧长.**



解: $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

$$=\sqrt{a^2\theta^2+a^2}\ \mathrm{d}\theta$$

$$=a\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad s=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$$ **(P305 公式26)**

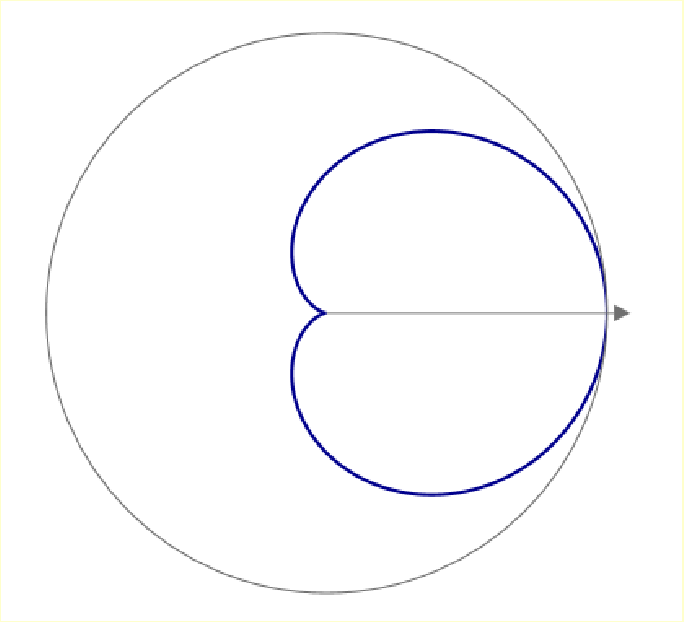
$$=a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^{2\pi}$$

$$=a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$$

例5. 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 的周长.

解: 由公式得

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1+\cos\theta)}\, d\theta \ = \mathbf{4}\boldsymbol{a}.$$



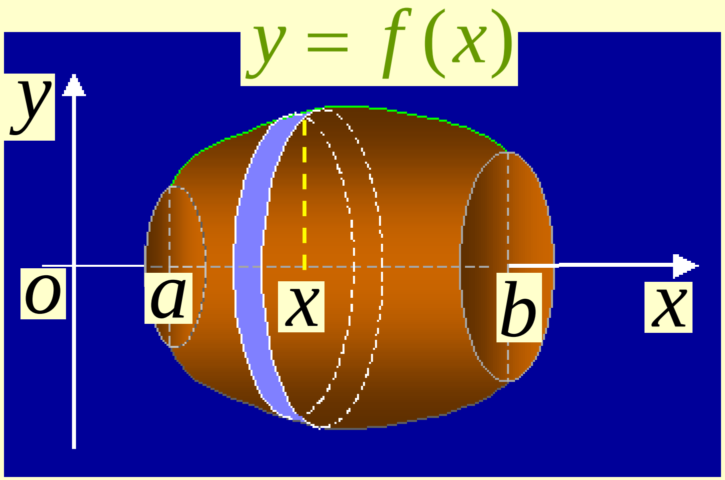
5.3.5 旋转曲面的面积

设平面光滑曲线 $y=f(x)\in C^1[a,b]$, 且 $f(x)\geq 0$, 求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积 .

取**面积元素**: 位于 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上的圆台的侧面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$



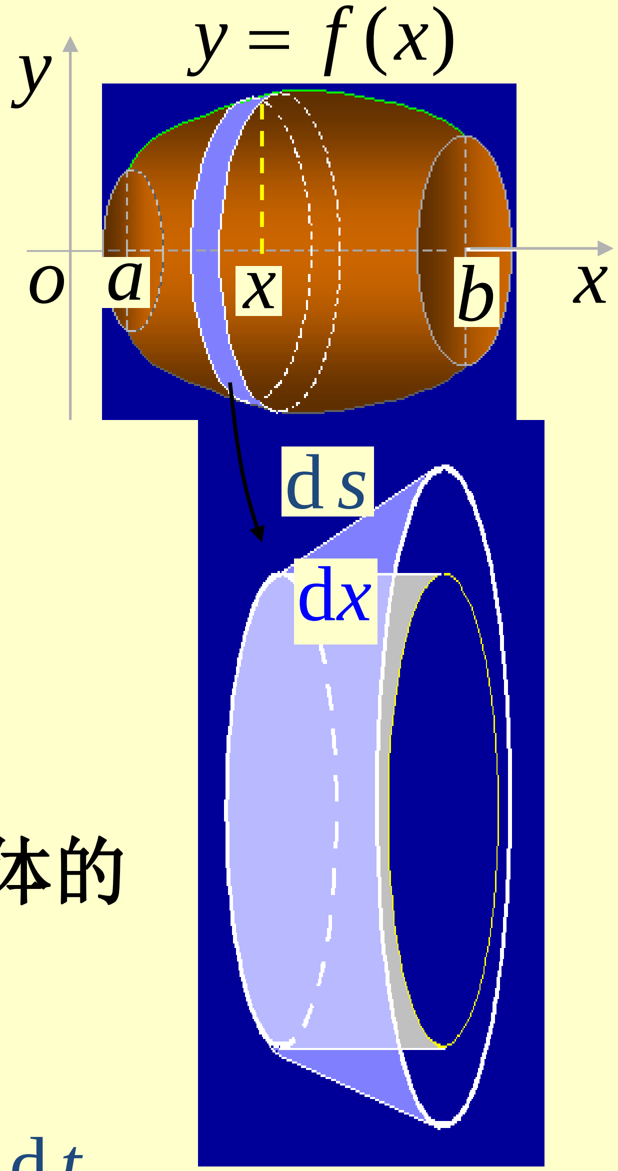
积分后得旋转体的面积

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

注意：侧面积元素

$$\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s \neq 2\pi y\,\mathrm{d}x$$

因为$2\pi y\,\mathrm{d}x$ 不是薄片侧面积$\triangle S$ 的的线性主部 .



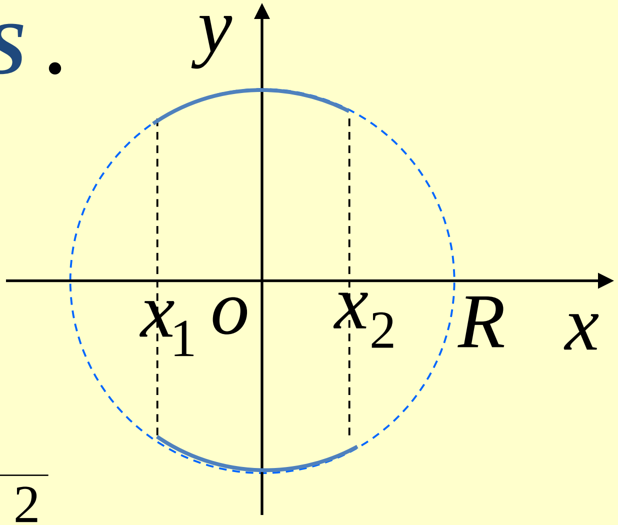
若光滑曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

给出，则它绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

例1. 计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 在 $x\in[x_1,x_2]\subset[-R,R]$ 上绕 x 轴旋转一周所得的球台的侧面积 S .



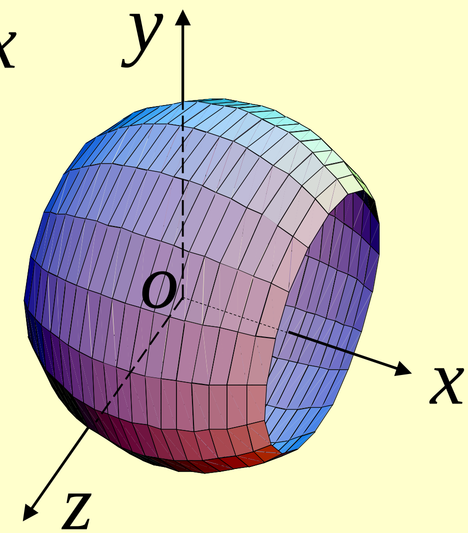
解: 对曲线弧

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\ x\in[x_1,x_2]$$

应用公式得

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_{x_1}^{x_2}R\,\mathrm{d}x=2\pi R(x_2-x_1)$$



当球台高 $h=2R$ 时, 得球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

例2. 求由星形线 $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的表面积 S.

解: 利用对称性

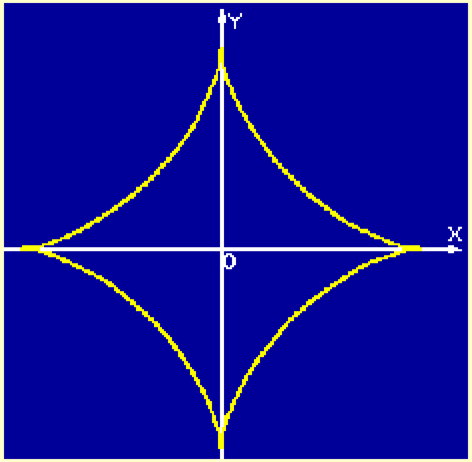
$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t$$

$$\cdot\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=12\pi a^2\left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{12}{5}\pi a^2$$



内容小结

1. 平面图形的面积

上下限按顺时针方向确定

边界方程
- 直角坐标方程
- 参数方程 $A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
- 极坐标方程 $A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

2. 平面曲线的弧长

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小

弧微分: $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

曲线方程
- 直角坐标方程
- 参数方程方程
- 极坐标方程 $\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

3. 已知平行截面面面积函数的立体体积

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

⟹ **旋转体的体积**

$$y = y(x)\begin{cases} \text{绕 } x \text{ 轴}：A(x) = \pi y^2 \\ \text{绕 } y \text{ 轴}：A(x) = 2\pi xy \quad \text{(柱壳法)} \end{cases}$$

4. 旋转体的侧面积

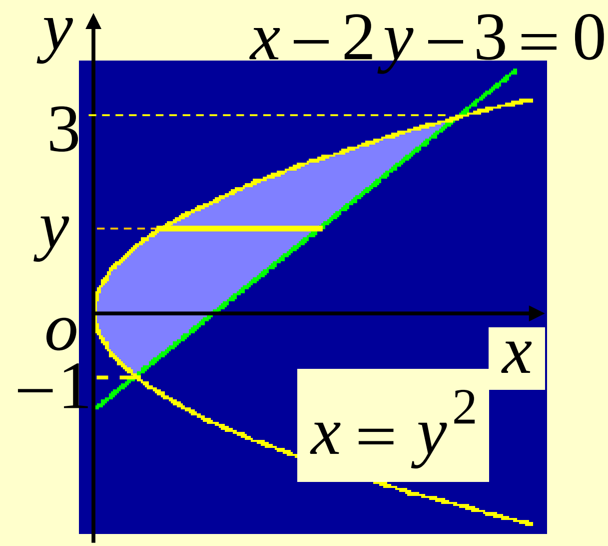
$y = y(x)$ 绕 x 轴旋转，侧面积元素为 $\mathrm{d}S = 2\pi y\,\mathrm{d}s$

(注意在不同坐标系下 ds 的表达式)

思考与练习

1.用定积分表示图中阴影部分的面积 A 及边界长 s .

提示: 交点为$(1,-1),(9,3)$，以 x 为积分变量，则要分两段积分，故以 y 为积分变量.



$$A=\int_{-1}^{3}\left[\,(2y+3)-y^2\,\right]\mathrm{d}y=\frac{32}{3}$$

弧线段部分　　　　直线段部分

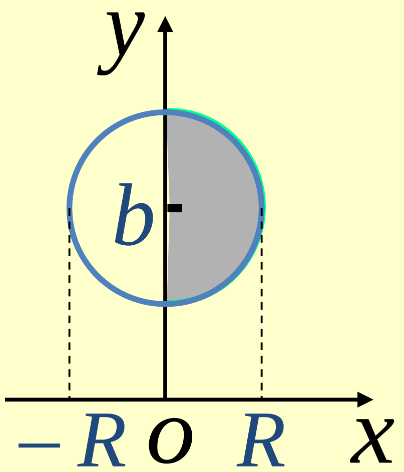
$$s=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^{3}\sqrt{1+2^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=3\sqrt{37}+5\sqrt{5}+\frac{1}{4}\left[\ln(6+\sqrt{37})+\ln(2+\sqrt{5})\right]$$

2. 试用定积分求圆 $x^2+(y-b)^2=R^2\ \ (R<b)$ **绕 x 轴旋转而成的环体体积 V 及表面积 S .**

提示: $\frac{\text{上}}{\text{下}}$ 半圆为 $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$$y'=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$



求体积 :

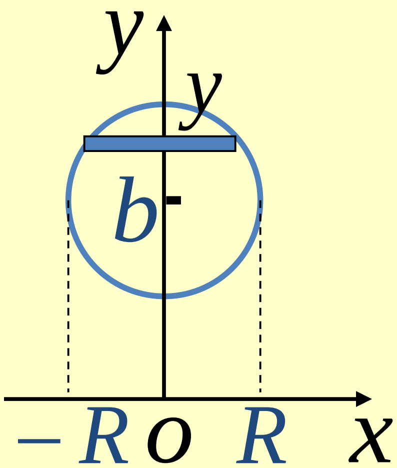
方法1 利用对称性

$$V=2\int_0^R \pi\left[(b+\sqrt{R^2-x^2})^2-(b-\sqrt{R^2-x^2})^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2R^2b$$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{上}}{\text{下}}$半圆为 $y=b\pm\sqrt{R^2-x^2}$， $y'=\mp\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$

方法2　用柱壳法

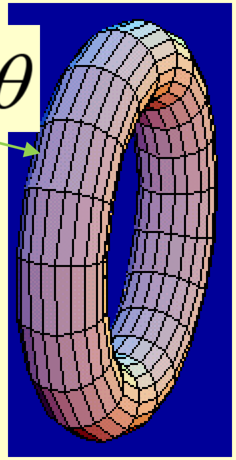


$$\mathrm{d}V=2\pi y\cdot 2x\cdot \mathrm{d}y$$

$$V=4\pi\int_{b-R}^{b+R} y\sqrt{R^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\pi^2R^2b$$

$$\mathrm{d}V=\pi R^2\cdot b\,\mathrm{d}\theta$$



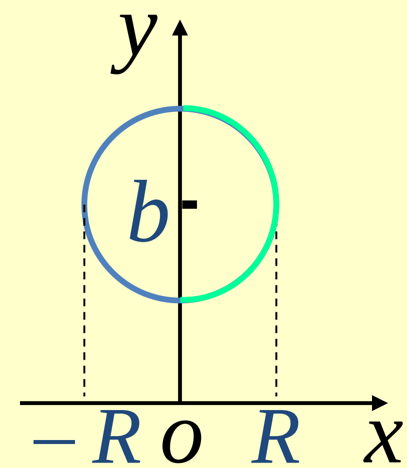
说明: 上式可变形为

$$V=\pi R^2\cdot 2\pi b=\int_0^{2\pi}\pi R^2\cdot b\,\mathrm{d}\theta$$

此式反映了环体微元的另一种取法(如图所示).

$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{上}}{\text{下}}$半圆为 $y = b \pm \sqrt{R^2 - x^2}$，$y' = \mp \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

求侧面积：



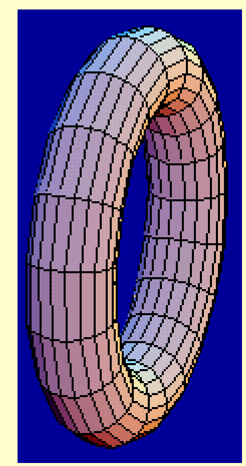
利用对称性

$$S = 2\int_0^R 2\pi\left(b + \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+ 2\int_0^R 2\pi\left(b - \sqrt{R^2 - x^2}\right)\cdot\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

二者 y'^2 相同

$$= 8\pi b\int_0^R \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi^2 bR$$



上式也可写成 $S = 2\pi R\cdot 2\pi b = \int_0^{2\pi} 2\pi R\cdot b\,\mathrm{d}\theta$

它也反映了环面微元的另一种取法.

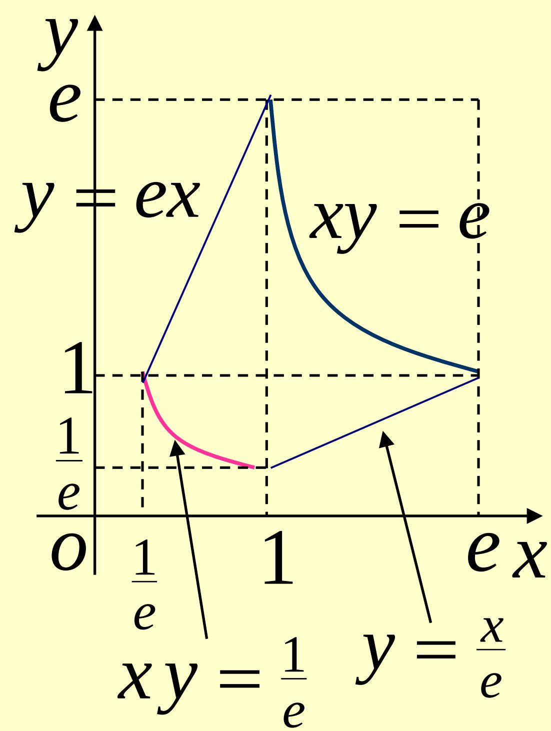
补充例题 1. 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围图形的面积.

解：显然 $|\ln x|\le 1,\ |\ln y|\le 1$

$$\Rightarrow\quad e^{-1}\le x\le e,\ e^{-1}\le y\le e$$

又 $$|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & 1\le x\le e\\ -\ln x, & e^{-1}\le x\le 1\end{cases}$$

$$|\ln y|=\begin{cases}\ln y, & 1\le y\le e\\ -\ln y, & e^{-1}\le y\le 1\end{cases}$$

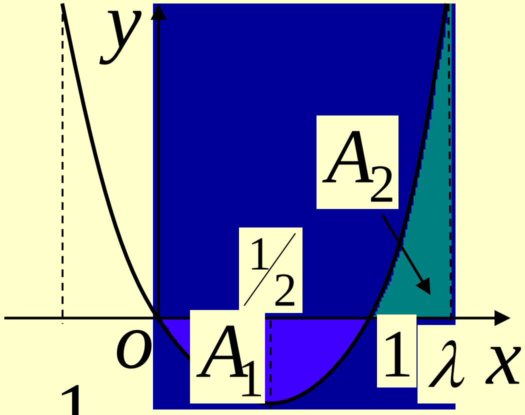


故在区域 $\begin{cases}e^{-1}\le x\le 1\\ e^{-1}\le y\le 1\end{cases}$ 中曲线为 $xy=\dfrac{1}{e}$, 同理其它.

面积为 $$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(ex-\frac{1}{ex}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{e}\left(\frac{e}{x}-\frac{x}{e}\right)\mathrm{d}x=e-\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$$

2. λ 为何值才能使 $y=x(x-1)$ 与 x 轴围成的面积等

于 $y=x(x-1)$ 与 $x=\lambda$ 及 x 轴围成的面积.



解: $y=x(x-1)$ **与 x 轴所围面积**

$$A_1=\int_0^1 -x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$$

$\lambda\ge 0$时,

$$A_2=\int_1^\lambda x(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{6}$$

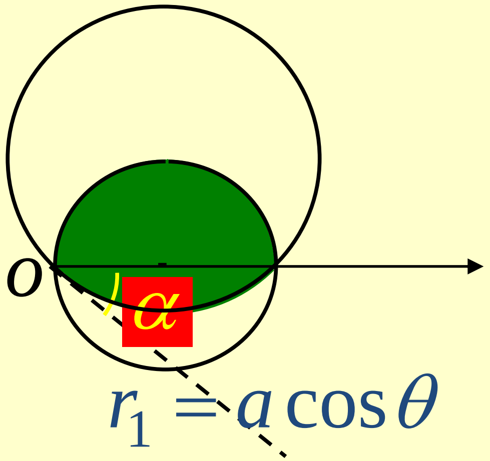
由 $A_1=A_2$, 得 $\lambda^2(\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{2})=0$, **故**

$$\lambda_1=\frac{3}{2},\quad \lambda_2=0$$

由图形的对称性, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$, $\lambda_4=1$ **也合于所求.**

3. 求曲线 $r_1 = a\cos\theta$ 与 $r_2 = a(\cos\theta + \sin\theta)$ 所围成图形的公共部分的面积 .

解：令 $r_2(\theta) = 0$，得 $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$



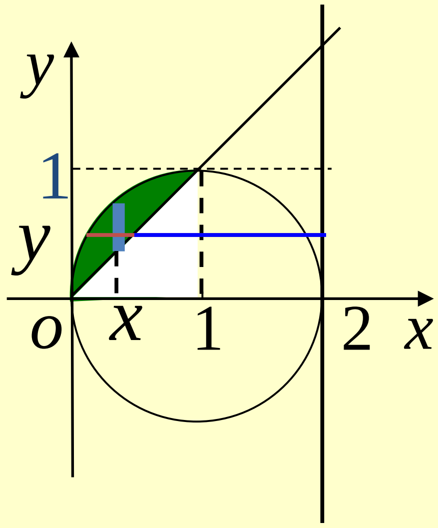
所围区域的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} [r_2(\theta)]^2 \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\cos\theta + \sin\theta)^2 \mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{8}a^2$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \frac{\pi}{8}a^2 = \frac{a^2(\pi - 1)}{4}$$

4. 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 与 $y\ge x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积 .



提示: 选 x 为积分变量.

旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi$$

若选 y 为积分变量, 则

$$V=\pi\int_0^1\left[2-(1-\sqrt{1-y^2})\right]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\,\mathrm{d}y$$