4.3 Taylor 公 式

用多项式近似表示函数 — 应用 $\begin{cases}\text{理论分析}\\ \text{近似计算}\end{cases}$

一、Taylor多项式的建立

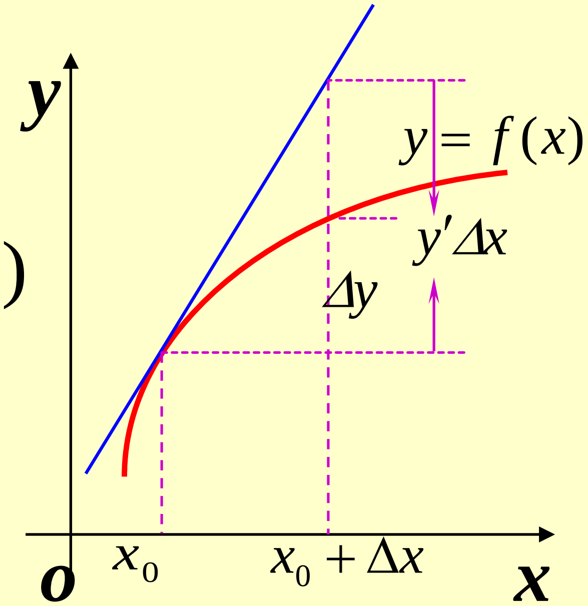
二、Taylor定理

三、Taylor公式的应用举例

一、Taylor多项式的建立

$f(x)$在x_0 可导, 则

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$



所以在x_0 附近，有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

称 $T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

为函数$f(x)$ 在$x=x_0$ 附近的线性逼近(局部以直代曲).

问题：（1）一个函数应满足什么条件才能用多项式逼近？

（2）若能用多项式逼近，其系数如何确定？

（3）误差是多少？

结论：（1）$f(x)$ 可用多项式函数 $T_n(x)$ 逼近；

（2）项数越多逼近程度越好；

（3） $f(x)$ 与 $T_n(x)$ 存在误差。

设函数 $f(x)$ 在点x_0存在直到n阶导数. 确定多项式函数

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

使得在 $x=x_0$ 附近, 误差 $f(x)-T_n(x)$ “更小”.

好近似程度越来越

1.若在 x_0 点相交

$$T_n(x_0)=f(x_0)$$

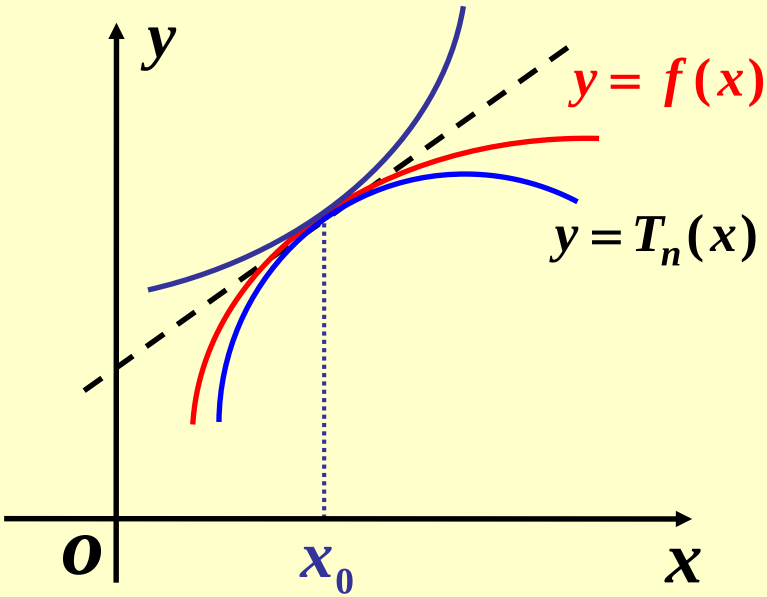
2.若有相同的切线

$$T_n'(x_0)=f'(x_0)$$

3.若弯曲方向相同

$$T_n''(x_0)=f''(x_0)$$

…… ……



要求: $T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad(k=0,1,2,\cdots,n).$

设函数$f(x)$ 在点x_0存在直到n阶导数.

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

令 $$T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad (k=0,1,2,\cdots,n).$$

注意到 $T_n^{(k)}(x_0)=k!a_k\ \ (k=0,1,2,\cdots,n),$

所以有 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (k=0,1,2,\cdots,n).$

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称上式为函数$f(x)$在x_0的**Taylor多项式**,

$\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ \ (k=0,1,2,\cdots n)$ 称为**Taylor系数**.

二、Taylor定理

定理1 设 $f(x)$ 在区间 I 上存在 $n+1$ 阶导数,则对任意 $x, x_0 \in I$,存在介于 x_0, x 之间的 ξ，使得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.} \quad \textbf{(1)}$$

——带Lagrange型余项的Taylor公式

证明分析：记

$$R_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n],$$

$$Q(x) = (x - x_0)^{n+1},$$

即要证：
$$\frac{R_n(x)}{Q(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

连续用 $n+1$ 次Cauchy中值定理

证明：记

$$R_n(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n],$$

$$Q(x) = (x-x_0)^{n+1},$$

注意到: $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),\quad Q^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots\cdots R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$Q(x_0) = Q'(x_0) = \cdots\cdots Q^{(n)}(x_0) = 0$$

连续用n+1次Cauchy中值定理:

$$\frac{R_n(x)}{Q(x)} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{Q(x) - Q(x_0)} = \frac{R_n'(\xi_1)}{Q'(\xi_1)} = \frac{R_n'(\xi_1) - R_n'(x_0)}{Q'(\xi_1) - Q'(x_0)} = \frac{R_n''(\xi_2)}{Q''(\xi_2)}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{Q^{(n)}(\xi_n) - Q^{(n)}(x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{Q^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

定理1 设 $f(x)$ 在区间 I 上存在**n+1阶导数,则对任意** $x, x_0 \in I$,

存在介于 x_0, x 之间的 ξ，使得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad \textbf{(1)}$$

$\boxed{R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$ 称为**Lagrange型余项.**

注1 ξ 也可表为: $\xi = x_0 + \theta(x-x_0), (0<\theta<1)$, 这时

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} (0<\theta<1).$$

注2 $x_0 = 0$ 时，称(1)为带Lagrange型余项的**Maclaurin公式**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} (0<\theta<1).$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

注3 **特例:**

(1) 当 $n = 0$ 时, Taylor公式变为

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

给出拉Lagrange值定理

(2) 当 $n = 1$ 时, Taylor公式变为

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2}$$

常用公式

(ξ 在 x_0 与 x 之间)

注4 Peano型余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

——Lagrange型余项

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

则 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ ——Peano型余项

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

——带Peano型余项的Taylor公式

$x_0=0$时，$\boxed{f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)}$

——带Peano型余项的Maclaurin公式

定理2 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在直到 n 阶导数, 则有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\boxed{o((x-x_0)^n)} \qquad (2)$$

——带Peano型余项的Taylor公式

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

证明分析

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n) \Longleftrightarrow f(x)-T_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

记 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, $Q_n(x)=(x-x_0)^n$, 用洛必达法则

定理2 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 存在直到**n**阶导数, 则有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (2)$$

证: 设 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$, $Q_n(x)=(x-x_0)^n$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{Q_n'(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{(n-1)}(x)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)}$$

$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right]=0,$$ 故得证.

小结:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} & (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})\\ o[(x-x_0)^n]\end{cases}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\begin{cases}\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} & (0<\theta<1)\\ o(x^n)\end{cases}$$

将函数展开为Taylor公式(Maclaurin公式)

(1) 直接展开法

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$$

例1. 求 $f(x)=e^x$ 的Maclaurin公式.

解: $f(x)=e^x$, 则 $f^{(k)}(x)=e^x$, $f^{(k)}(0)=e^0=1$,

所以 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)$

或 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

例2. 求 $f(x)=\sin x$ 的Maclaurin公式.

解: $f(x)=\sin x$, 则 $f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$,

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{k-1}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k\end{cases}$$

$$R_{2n}(x)=\frac{\sin(\theta x+\frac{2n+1}{2}\pi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\underline{(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

或 $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\underline{o(x^{2n})}$$

常见的**Maclaurin**公式(带**Lagrange**型余项)　$(0<\theta<1)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \boxed{\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}, \quad x \in R$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \boxed{(-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}}, \; x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \boxed{(-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}}, \quad x \in R$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \boxed{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}}, \quad x > -1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+ \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}}, \quad x > -1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}$$

$$+\boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},}\quad x>-1$$

$\boldsymbol{\alpha=-1}$
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\qquad x<1$$

$\boldsymbol{\alpha=-\frac{1}{2}}$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{2}-\cdots+(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}+$$

$$\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}}\qquad x>-1$$

$\boldsymbol{\alpha=\frac{1}{2}}$
$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{n}+$$

$$\cdots+(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}\qquad x>-1$$

常见的Maclaurin公式(带Peano型余项)：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad e^{\tan x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^7)$$

$$\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^7)$$

(2) 间接展开法 (利用已知的Taylor公式)

例3. 写出 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的**Maclaurin**公式, 并求 $f^{(98)}(0), f^{(99)}(0)$.

解: $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$, 将 $-\dfrac{x^2}{2}$ 代入, 得

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}+o(x^{2n}).$$

由**Taylor**公式系数的定义: $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=1,2,\cdots,n).$

x^{98}, x^{99} 的系数分别为:

$$a_{98}=\frac{1}{98!}f^{(98)}(0)=(-1)^{49}\frac{1}{2^{49}\cdot 49!},\qquad a_{99}=\frac{1}{99!}f^{(99)}(0)=0.$$

进而得: $f^{(98)}(0)=-\dfrac{98!}{2^{49}\cdot 49!}$, $f^{(99)}(0)=0.$

例4. **求** $\ln x$ **在** $x=2$ **处的Taylor公式.**

(注意: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ **)**

解: $\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln(1+\frac{x-2}{2})$,

而 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$,

所以
$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x-2)^2+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n).$$

其它例子(间接展开)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o(x^n)$$

(1) $$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

(2) $$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

(3) $$\frac{1}{ax+b}=\frac{1}{b}\frac{1}{1+\frac{a}{b}x}=\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{n}(-\frac{a}{b}x)^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-a)^k}{b^{k+1}}x^k+o(x^n)$$

(4) $$\frac{1}{1-x-2x^2}=\frac{1}{(1+x)(1-2x)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{2}{3}\frac{1}{1-2x}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(-x)^k+o(x^n)+\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}(2x)^k+o(x^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k+2^{k+1}}{3}x^k+o(x^n)$$

(5) $$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\{1-[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k}+o(x)^{2n}]\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})$$

(6) $(x+1)e^x = xe^x + e^x$

$$= x[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)]$$

$$+[1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)]$$

$$=1+(\frac{1}{1!}+1)x+(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!})x^2+\cdots(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!})x^n+o(x^n)$$

(7) 将$f(x)=\frac{1}{x}$在$x_0=2$处展成Taylor公式.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-\frac{x-2}{2})^k+o((x-2)^n)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+o((x-2)^n)$$

(8) 设$f(x)=x^3\sin x$,求$f^{(6)}(0)$和$f^{(9)}(0)$.

解 $$f(x)=x^3\sin x=x^3\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k+2}}{(2k-1)!}+o(x^{2n-1})$$

又$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k+o(x^n)$

比较x^k的系数得$f^{(k)}(0)=k!a_k$

$$k=6,\ f^{(6)}(0)=6!\times\frac{(-1)^{2-1}}{(2\times 2-1)!}=-\frac{6!}{3!}=-120$$

$$k=9,\ f^{(9)}(0)=9!\times 0=0$$

三、Taylor公式的应用举例

（1）利用Taylor公式求极限

例5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\quad e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o(x^5)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^4}{12} + o(x^5)}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$.

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\ (x \to 0)$$

例6. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2-x)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^4-1}\right]$

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^2-x)[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})]\right.$

$$\left.-x^2[1-\frac{1}{2x^4}+o(x^{-4})]\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^2}+o(x^{-2})\right]=-\frac{1}{2}.$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)$$

例7. 设 $f''(0)$ **存在，** $f'(0)\neq 0$**，求极限：**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{f(x)-f(0)}-\frac{1}{xf'(0)}\right).$$

解： $\because f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2),$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(0)-[f(x)-f(0)]}{[f(x)-f(0)]xf'(0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)}{xf'(0)[f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}f''(0)x^2+o(x^2)}{f'^2(0)x^2+o(x^2)}=-\frac{f''(0)}{2f'^2(0)}.$$

(2)利用Taylor公式求无穷小的阶与主部

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^r}=c\neq 0 \Rightarrow f(x)=\overset{\text{主部}}{cx^r}+o(x^{\overset{\text{阶}}{r}})\ \ (x\to 0)$$

例8. $$x-\sin x = x-[x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)]$$

$$=\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3\ (x\to 0)$$

$$x-\ln(1+x)=x-[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$$

例9. 求无穷小量$f(x)=e-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x\to 0)$的阶与主部

解 $$f(x)=e-(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)]=1-\frac{1}{2}x+o(x)$$

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{1-\frac{1}{2}x+o(x)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2}x+o(x)}$$

$$=e[1+(-\frac{1}{2}x+o(x))+\frac{1}{2!}(-\frac{1}{2}x+o(x))^2+o(-\frac{1}{2}x+o(x))]$$

$$=e-\frac{e}{2}x+o(x)$$

主部

1阶

$$f(x)=e-(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-[e-\frac{e}{2}x+o(x)]=\frac{e}{2}x+o(x)$$

(3) Taylor公式在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

M 为 $\left| f^{(n+1)}(x) \right|$ 在包含 0 , x 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

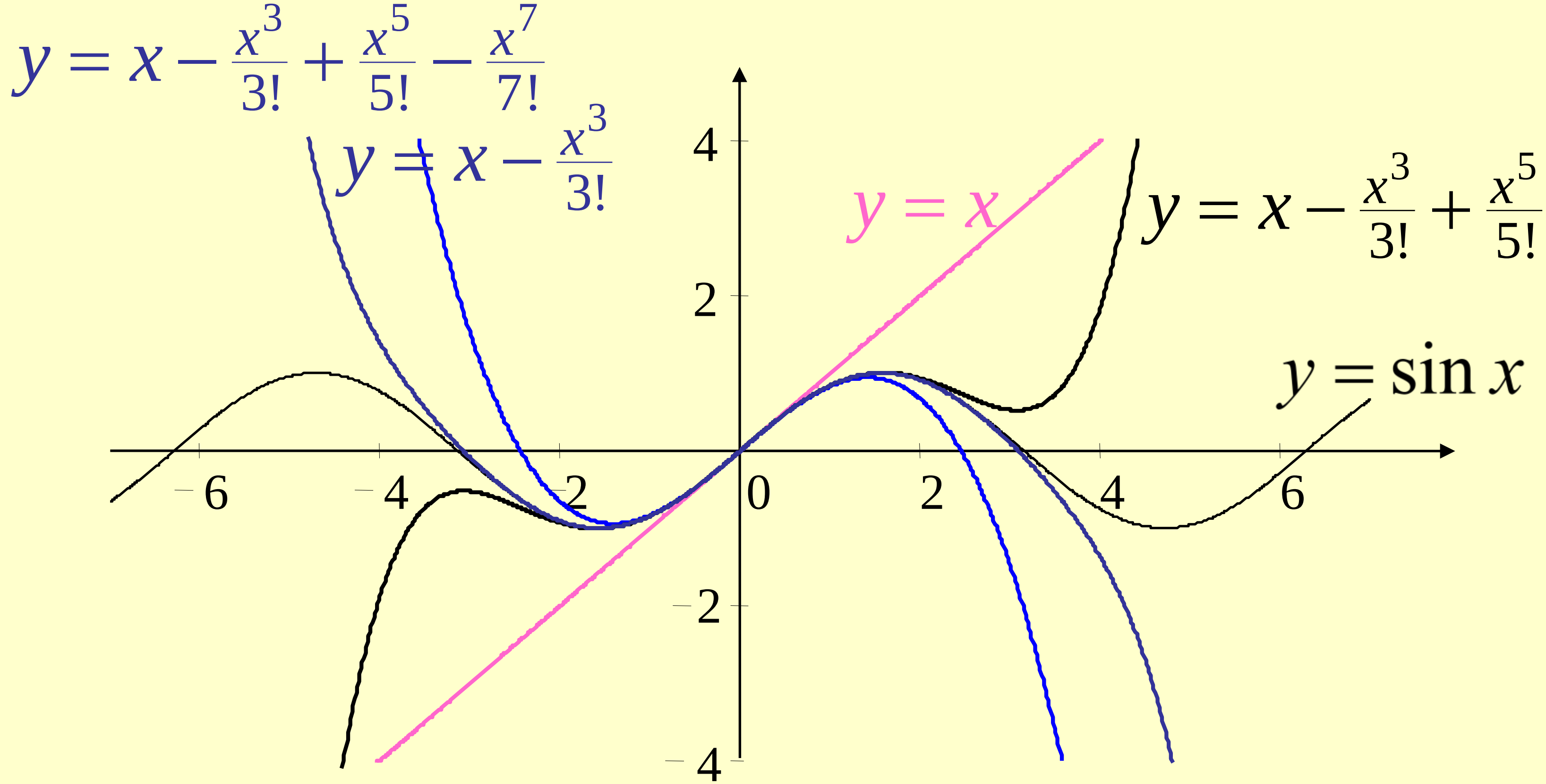
1) 已知 x 和误差限 , 要求确定项数 n ;

2) 已知项数 n 和 x , 计算近似值并估计误差;

3) 已知项数 n 和误差限 , 确定公式中 x 的适用范围.

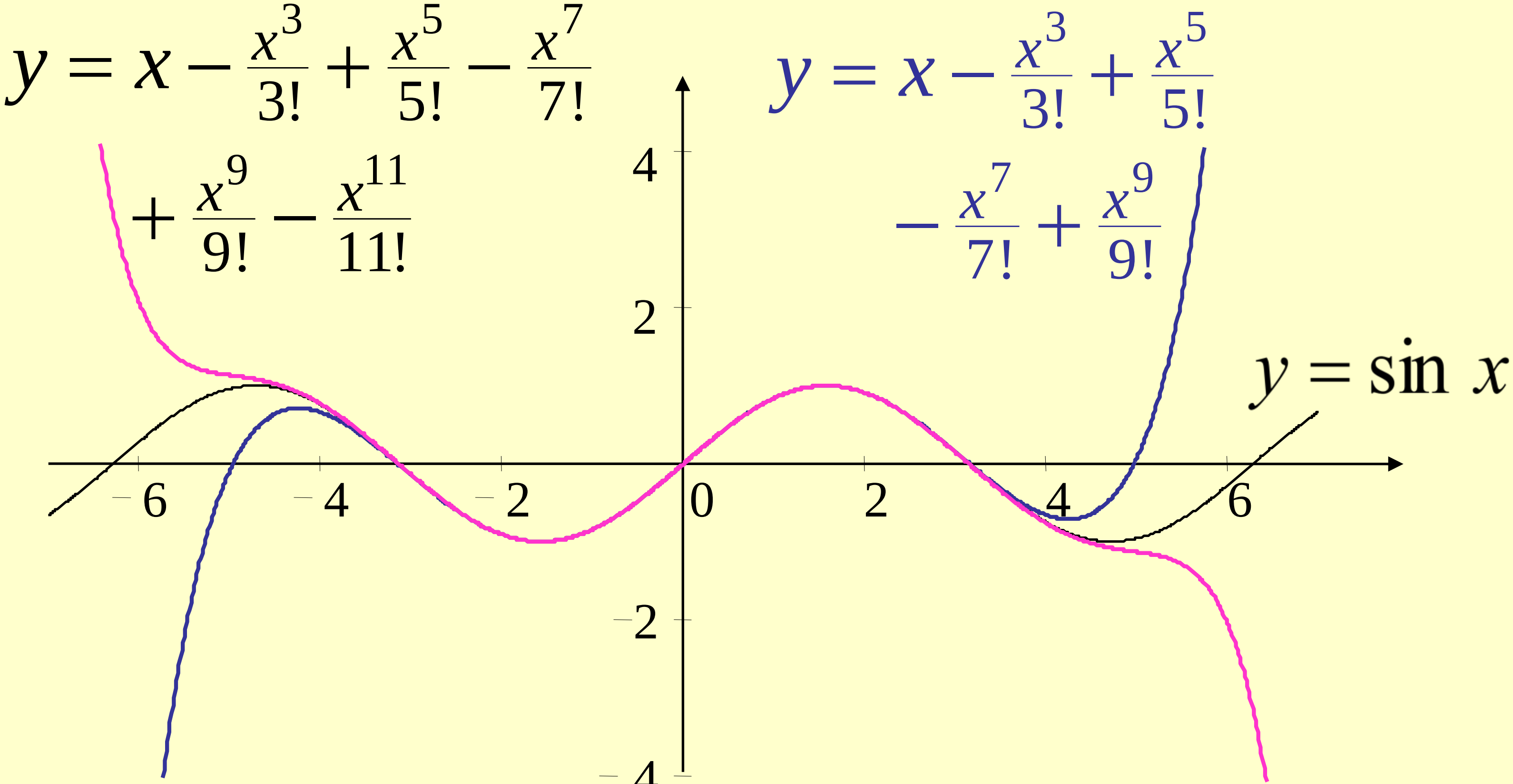
Taylor多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



Taylor多项式逼近 $\sin x$

$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + o(x^{2n})$$



例10. 计算无理数 ***e*** 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

解: 已知 e^x 的**Maclaurin**公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

令 ***x*** **= 1**，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

由于 $0 < e^{\theta} < e < 3$, 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 ***n*** **= 9** 时上式成立，因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718281$$

例11. 证明 e 为无理数 .

证: $$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

$\Big\downarrow$ 两边同乘 $n!$

$$n!e = \text{整数} + \frac{e^{\theta}}{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

假设 e 为有理数 $\dfrac{p}{q}$ (p , q 为正整数) ,

则当 $n \geq q$ 时, 等式左边为整数;

当 $n \geq 2$ 时, 等式右边不可能为整数.

矛盾！故 e 为无理数 .

(4) 利用Taylor公式证明不等式

例12. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证: $\because\ \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

关于抽象函数的不等式

联系f、f'、f''、f''',$\cdots$的关系的式子一般用 Taylor公式，如$n=1$时的一阶Taylor公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

例13. 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)|\le 4$,

证明： $\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{(b-a)^2}{2}.$

方法：在中间某点展开，再代入端点的值，
或在端点展开，再代入中间某点的值.

证明：记 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$, 将$f(x)$在x_0处展开成一阶Taylor公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$0=f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 \qquad (1)$$

$$0=f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2 \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \quad \Rightarrow \quad 0=2f(x_0)+\frac{(b-a)^2}{8}[f''\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

$$\Rightarrow \quad \left|f(x_0)\right|=\frac{(b-a)^2}{16}\left|f''\xi_1)+f''(\xi_2)\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{16}\left[\left|f''\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right]\le\frac{(b-a)^2}{2}$$

(5) 证明关于抽象函数的等式

例14. 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续的导数，证明：

$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

证明：记 $x_0=\frac{a+b}{2}$，将$f(x)$在x_0处展开成一阶Taylor公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 \qquad (1)$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2 \qquad (2)$$

$(1)+(2) \quad \Rightarrow$

$$f(a)+f(b)=2f(x_0)+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

$$f(a)-2f(x_0)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$$

$\because f''(x)$在$[a,b]$上连续, $\therefore$有

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x)\le\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\le\max_{x\in[a,b]} f''(x)$$

由介值定理, $\exists\xi\in[a,b]$, 使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$.

$$\Rightarrow \quad f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

(6) 杂例

例15. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有三阶导数，如果

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad 和 \quad \lim_{x\to+\infty} f'''(x)$$

都存在且有限，证明：

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0.$$

证：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x) = \beta.$ 由 Taylor 公式

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) + \frac{1}{6} f'''(\xi) \ \ (x < \xi < x+1), \qquad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{6} f'''(\eta) \ \ (x-1 < \eta < x).$$

以上两式相加，得

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{6}(f'''(\xi)-f'''(\eta)).$$

在上式中令 $x\to+\infty$ ，即得

$$2\alpha=2\alpha+\lim_{x\to+\infty}f''(x).$$

从而得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0.$ 再由 Taylor 定理，得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(\zeta)\ \ (x<\zeta<x+1).$$

在上式中令 $x\to+\infty$ ，即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0.$

再在 **(1)** 式中令 $x\to+\infty$，即得 $\alpha=\alpha+\dfrac{\beta}{6}.$

解得 $\beta=0,$ 即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0.$

例16. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(0)=1,\ f(1)=2,\ f'(\frac{1}{2})=0,$ 证明 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\left|f'''(\xi)\right|\ge 24.$

证: 由题设对 $x\in[0,1],$ 有

$$f(x)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})\,(x-\tfrac{1}{2})^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

$$=f(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})\,(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

(其中 ζ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1,$ 得

$$1 = f(0) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \tfrac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3 \qquad (\zeta_2 \in (\tfrac{1}{2}, 1))$$

下式减上式，得

$$1 = \frac{1}{48}\left[f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1) \right] \le \frac{1}{48}\left[\left| f'''(\zeta_2) \right| + \left| f'''(\zeta_1) \right| \right]$$

令 $\left| f'''(\xi) \right| = \max\left(\left| f'''(\zeta_2) \right|, \left| f'''(\zeta_1) \right| \right)$

$$\le \frac{1}{24}\left| f'''(\xi) \right| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow \left| f'''(\xi) \right| \ge 24$$