4.1.4 高阶导数

一、问题的提出

二、高阶导数的定义与记号

三、高阶导数的求法

四、小结

一、问题的提出

问题:变速直线运动的加速度.

设物体的运动规律为$s = s(t)$,则速度为:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

而加速度a是速度v对时间t的变化率

即 $$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$= v'(t) = [s'(t)]' = s''(t).$$

即加速度是位移对时间的导数的导数。

二、高阶导数的定义与记号

定义　如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导,即

$$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数.

记作　$y'', f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$

即　$y'' = (y')', f''(x) = (f'(x))'$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

类似地,

二阶导数的导数称为三阶导数,记作: $y''', f'''(x), \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

即 $y''' = (y'')', f'''(x) = (f''(x))'$

或 $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d^2y}{dx^2})$

三阶导数的导数称为四阶导数, 记作: $f^{(4)}(x), \ y^{(4)}, \ \dfrac{d^4y}{dx^4}$.

即 $y^{(4)} = (y''')', f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$

或 $\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{d^3y}{dx^3})$

一般地,

函数 $f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为函数$f(x)$的n阶导数,记作: $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$或$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$

即 $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ 或

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$称为零阶导数$f'(x)$称为一阶导数

三、高阶导数的求法

1.直接法 求高阶导数就是多接连地求导数.

例1. 设$y = ax^2 + bx + c$,求y'''

解 $y' = 2ax + b,\ y'' = 2a,\ y''' = 0.$

例2. 设 $y = \arctan x$, 求$y'', y''', y'''(0)$.

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \qquad y'''(0) = -2$$

例3. 设$y = f(\ln x)$, 求$y''(x)$.

解 $$y' = f'(\ln x)(\ln x)' = \frac{f'(\ln x)}{x}$$

$$y'' = \frac{[f'(\ln x)]'x - f'(\ln x)x'}{x^2}$$

$$= \frac{f''(\ln x) - f'(\ln x)}{x^2}$$

例4. 求幂函数的n阶导数公式

解　设 $y=x^{\alpha}\ (\alpha\in R)$　　$y'=\alpha x^{\alpha-1}$

$$y''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$y'''=(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})'=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

……

$$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\qquad(n\geq1)$$

若α为自然数n,则

$$y^{(n)}=(x^{n})^{(n)}=n!,\qquad y^{(n+1)}=(n!)'=0.$$

2. 观察、归纳法

求n阶导数时,求出1-3或4阶后,不要急于合并,分析结果的规律性,写出n阶导数.

例5. 设 $y=\ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ $\qquad y''=(-1)(1+x)^{-2}$

$y'''=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$ $\qquad y^{(4)}=(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$

……

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots(-n+1)(1+x)^{-n}$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n}} \qquad (n\geq 1,\ 0!=1)$$

例6. 设$y=\dfrac{1}{ax+b}\,(a\neq 0)$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(ax+b)^{-1}$

$$y'=(-1)(ax+b)^{-2}\cdot a$$

$$y''=(-1)(-2)(ax+b)^{-3}\cdot a^2$$

$$y'''=(-1)(-2)(-3)(ax+b)^{-4}\cdot a^3$$

$$\cdots\cdots$$

由归纳法可知

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(ax+b)^{-n-1}\cdot a^n$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

例7. 设 $y=\sin x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$

$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

同理可得 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

高阶导数的运算法则

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

设函数u和v具有n阶导数, 则

$$(1)\quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

$$(2)\quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$$

$$(3)\quad (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

$$= C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + C_n^n u v^{(n)}$$

$$(u\cdot v)' = u'v + uv'$$

$$(u\cdot v)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv''$$

$$= u''v + 2u'v' + uv''$$

$$(u\cdot v)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')'$$

$$= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv'''$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$\cdots\cdots$

$$(u\cdot v)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v''$$

$$+ C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + C_n^n u v^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

例8. 设 $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解 设$u = e^{2x}, v = x^2$,则由莱布尼兹公式知

$$y^{(20)} = C_{20}^0 (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + C_{20}^1 (e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)' + C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + C_{20}^3 (e^{2x})^{(17)} \cdot (x^2)''' + \cdots$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95)$$

练习: 设$y = (3x^2 - 2)\sin 2x$, 求$y^{(100)}$.

3.间接法 利用已知的高阶导数公式, 通过四则运算, 变量代换等方法, 求出n阶导.

几个初等函数的高阶导数

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\frac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ $\qquad (\frac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

例9. 设 $y=\dfrac{1}{2x^2+x-1}$, 求$y^{(n)}$.

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

解 $y=\dfrac{1}{2x^2+x-1}=\dfrac{1}{(x+1)(2x-1)}$

$$=\frac{A}{x+1}-\frac{B}{2x-1}=\frac{(2A+B)x+(B-A)}{(x+1)(2x-1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2A+B=0\\ B-A=1\end{cases}\quad\Rightarrow A=-\frac{1}{3},B=\frac{2}{3}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{2x-1}$$

$$\therefore y^{(n)}=-\frac{1}{3}(\frac{1}{x+1})^{(n)}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2x-1})^{n}=-\frac{1}{3}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{2}{3}\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x-1)^{n+1}}$$

思考：设 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2-x-1}$，求 $f^{(2021)}(0)$.

4、隐函数的高阶导数

例10. 设$f(x)$可导，且$f'(x)\neq 1$, $y=y(x)$由 $y=f(x+y)$确定，求y''.

解　由$y=f(x+y)$两边对x求导得

$$y'=f'(x+y)(1+y')$$

$$\Rightarrow y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=\frac{1}{1-f'(x+y)}-1$$

$$\Rightarrow y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-f'(x+y)}-1\right)=-\frac{-f''\cdot(1+y')}{(1-f')^2}$$

$$=\frac{f''}{(1-f')^3}.$$

例11. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 确定，求 $y''(0)$.

解: 方程两边对 x 求导，得

$$e^y y' + y + xy' = 0 \qquad ①$$

再求导, 得

$$e^y y'^2 + (e^y + x)y'' + 2y' = 0 \qquad ②$$

当 $x = 0$ 时, $y = 1$, 故由 ① 得

$$e^{y(0)} y'(0) + y(0) + 0 \cdot y'(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{e}$$

再代入 ② 得0 $\quad y''(0) = \frac{1}{e^2}$

5. 由参数方程所确定的函数的高阶导数

一阶导数仍然是参数方程: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\omega(t) \end{cases}$

同样得到函数 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 的二阶导数 $\quad y' \xrightarrow{\omega} t \xrightarrow{\varphi^{-1}} x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\omega(t))=\frac{d\omega/dt}{dx/dt}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

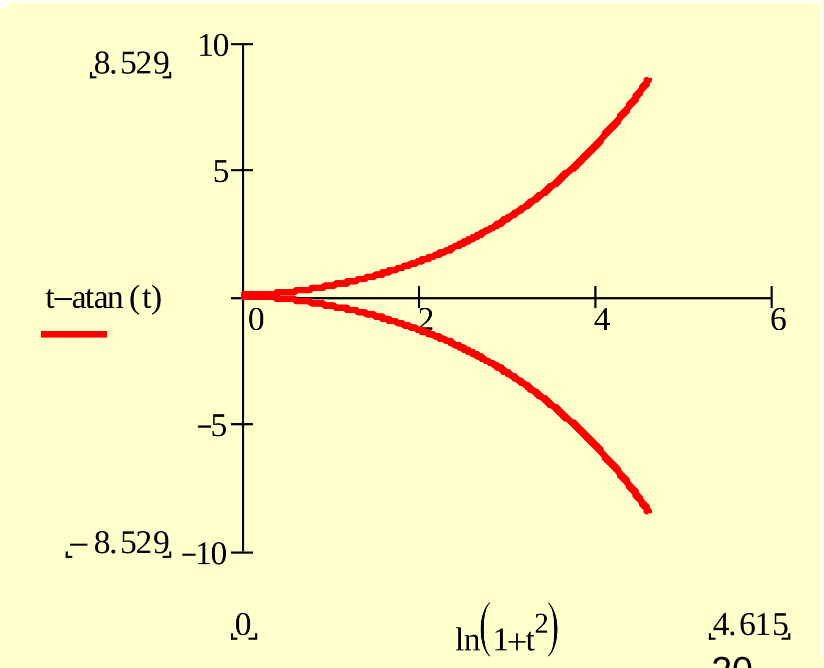
三阶以上的导数可如此类推。

例12. 求由方程$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$表示的函数的二阶导数

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}$$



例13. 设$y=y(x)$由$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$确定，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{[tf'(t)-f(t)]'}{[f'(t)]'}$$

$$=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t$$

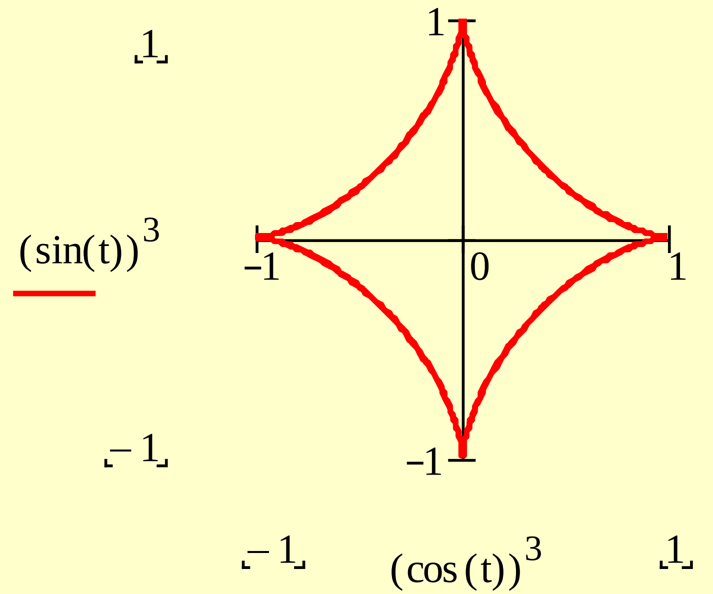
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y'_x)/dt}{dx/dt}=\frac{[t]'}{[f'(t)]'}=\frac{1}{f''(t)}$$

例14. 求由方程$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$表示的函数的二阶导数.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$

$$= \frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}$$

$$= -\tan t$$



星形线（star-like curve)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}$$

例15. 设$y=y(x)$由极坐标方程$r=e^{\theta}$确定，求y''_x.

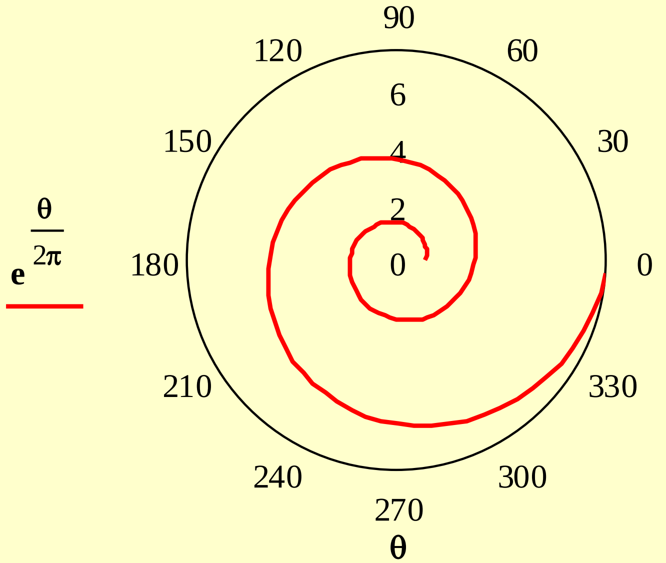
解 $r=r(\theta) \Rightarrow \begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

$$y'_x=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{(e^{\theta}\sin\theta)'}{(e^{\theta}\cos\theta)'}$$

$$=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$y''_x=\frac{(y'_x)'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\left(\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)'_\theta}{(e^{\theta}\cos\theta)'_\theta}$$

$$=\frac{2}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^3}$$



对数螺线

思考题

设$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，由$y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ $\quad (\varphi'(t) \neq 0)$

可知$y''_x = \dfrac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$，对吗？

思考题解答

不对.

$$y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$$

6. 分段函数的高阶导数

例16. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ ______ .

解: $$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\ge 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\because\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^3-0}{x}=0 \qquad f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3-0}{x}=0$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\ge 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

6. 分段函数的高阶导数

例16. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，求使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$ __**2**__ .

解:

$$f(x)=\begin{cases}4x^3, & x\geq 0\\ 2x^3, & x<0\end{cases}\qquad f'(x)=\begin{cases}12x^2, & x\geq 0\\ 6x^2, & x<0\end{cases}$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{6x^2}{x}=0$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2}{x}=0$$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}24x, & x\geq 0\\ 12x, & x<0\end{cases}$$

但是 $f'''_-(0)=12$，$f'''_+(0)=24$，$\therefore\ f'''(0)$ 不存在 .

7. 反函数的高阶导数:

例17. 试从 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{y'}$ 导出 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$.

解: $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

$$=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

同样可求 $\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3}$

8. 杂例

例18. 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解: $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y'=1$ (用莱布尼兹公式)

$$(1+x^2)\,y^{(n+1)}+n\cdot 2x\,y^{(n)}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot 2\,y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$, 得 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)\,y^{(n-1)}(0)\ \ (n=1,2,\cdots)$

由 $y(0)=0$, 得 $y''(0)=0,\ y^{(4)}(0)=0,\ \cdots,\ y^{(2m)}(0)=0$

由 $y'(0)=1$, 得 $y^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!\,y'(0)\ \ (m=0,1,2,\cdots)$

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2m\\ (-1)^m(2m)!, & n=2m+1\end{cases}$$

例19. 设 $y = e^{ax}\sin bx$ (a, b为常数), 求 $y^{(n)}$.

解: $y' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

$$= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx)$$

$$= e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

$$y'' = \sqrt{a^2+b^2}\,[ae^{ax}\sin(bx+\varphi) + be^{ax}\cos(bx+\varphi)]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+2\varphi)$$

$\cdots\cdots\cdots$ **(用归纳法)**

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi) \quad (\varphi = \arctan\frac{b}{a})$$

四、内容小结

1. 高阶导数的定义、记号;

2. 高阶导数的求法

(1) 逐阶求导法

(2) 利用归纳法

(3) 间接法 —— 利用已知的高阶导数公式

如:
$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

(4) 利用莱布尼兹公式:

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

思考题

设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$ ，

求 $f''(a)$.

思考题解答

$\because g(x)$ 可导

$\therefore f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$

$\because g''(x)$ 不一定存在　　　故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

补充例题

1. 如何求下列函数的 *n* 阶导数?

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ **解:** $y=-1+\dfrac{2}{1+x}$

$$y^{(n)}=2(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(2) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$ **解:** $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\geq 3$$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

提示： 令 $\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}$

$$A=(x-2)\cdot 原式\Big|_{x=2}=1$$

$$B=(x-1)\cdot 原式\Big|_{x=1}=-1$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

(4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

解： $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\tfrac{\pi}{2})$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

2. (填空题) **(1)** 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$，则

$f^{(n)}(2)=$ $\underline{\quad n!\frac{\sqrt{2}}{2}\quad}$

各项均含因子 **(x – 2)**

提示: $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}$

$$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}\boxed{+\cdots\cdots\cdots}$$

(2) 已知 $f(x)$ 任意阶可导，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当

$n\geq 2$ 时 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{n!\,[f(x)]^{n+1}}$

提示: $f''(x)=2f(x)f'(x)=2![f(x)]^3$

$$f'''(x)=2!\cdot 3[f(x)]^2 f'(x)=3!\,[f(x)]^4$$

……

思考判断题

设$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$,证明:$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$

又 $\dfrac{d^3x}{dy^3}=?$

答: $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y''}{(y')^5}$

练 习 题

一、 填空题：

1、设$x^3-2x^2y+5xy^2-5y+1=0$确定了y是x的函数，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=$__________，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$__________.

2、曲线$x^3+y^3-xy=7$在点（1，2）处的切线方程是____________.

3、曲线$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的法线方程__________.

4、已知$\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$________；$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}=$________.

5、设$xy=e^{x+y}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$__________.

二、　求下列方程所确定的隐函数 y 的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1、　$y = 1 + xe^y$；

2、　$y = \tan(x + y)$；

3、　$\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x} \quad (x > 0,\ y > 0)$.

三、　用对数求导法则求下列函数的导数：

1、　$y = x^{x^2}$；

2、　$y = \dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；

3、　$y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$.

四、求下列参数方程所确定的函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1、$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$；

2、$\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$ 设$f''(t)$存在且不为零．

五、求由参数方程$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$所确定的函数的

三阶导数$\dfrac{d^3y}{dx^3}$．

六、设$f(x)$满足$f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = \frac{3}{x}$，求$f'(x)$．

练习题答案

一、1、$-\frac{4}{3}$, $\frac{6x-4xy-8xy'-20yy'+10x(y')^2}{10xy-2x^2-5}$;

2、$x+11y-23=0$ 3、$\frac{\pi}{2}x-y+\frac{\pi}{2}=0$;

4、$\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}, -2-\sqrt{3}$; 5、$\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$.

二、1、$\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$;

2、$-2\csc^2(x+y)c\tan^3(x+y)$;

3、$\frac{y(\ln y+1)^2-x(\ln x+1)^2}{xy(\ln y+1)^3}$.

三、1、$x^{x^2+1}(2\ln x+1)$;

2、$\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}[\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}]$;

3、$\dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}[\dfrac{1}{x}+\cot x-\dfrac{e^x}{2(1-e^x)}]$.

四、1、$-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$;　　2、$\dfrac{1}{f''(t)}$.

五、$\dfrac{t^4-1}{8t^3}$.　　六、$2+\dfrac{1}{x^2}$.

思考题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ -x^2, x<0 \end{cases}$，求$f''(x)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0; \\ 0 & x=0. \end{cases}$ 求$f'(x)$, $f''(x)$. 又$f^{(n)}(0)=?$

3. 设多项式$p(x)$只有实零点, 求证:

   $(p'(x))^2\geq p(x)p''(x)$对一切$x\in R$成立.

4. 设 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}(n\in N^+)$，求 $f^{(n)}(1)$.

5. 设 $f_n(x)=x^n\ln x(n\in N^+)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$.