5.2.3 微积分学基本定理

1. 牛顿 – 莱布尼兹公式

2. 定积分的换元积分法与分部积分法

1. 牛顿 – 莱布尼兹公式

（I）变限积分与原函数的存在性

设 f 在 $[a, b]$上可积, 根据定积分的性质4, 对任何$x\in(a, b)$, f在$[a, x]$上也可积. 于是,由

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad x\in[a,b] \qquad (1)$$

定义了一个以积分上限x为自变量的函数,称为变上限积分.

类似地,又可定义变下限积分:

$$\psi(x)=\int_x^b f(t)dt,\quad x\in[a,b]. \qquad (2)$$

定理1 若f在$[a, b]$上可积，则变上限积分定义的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, x\in[a,b]$$ 在$[a, b]$上连续. 是否可导？

证 对$[a, b]$上任一确定的点x，只要$x+\Delta x\in[a, b]$，

有 $$\Delta\Phi=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

因f在$[a, b]$上有界，可设 $|f(t)|\le M, t\in[a,b]$，

于是，当$\Delta x>0$时有

$$|\Delta\Phi|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\le\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\le M\Delta x;$$

当$\Delta x<0$时则有 $|\Delta\Phi|\le M|\Delta x|$，由此得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0,$$

即证得在点x连续.由x的任意性，在$[a, b]$上处处连续.

定理2 (原函数存在定理)

若f在$[a, b]$上连续， 则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ x\in[a,b]$

在$[a, b]$上处处可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),x\in[a,b].$$

证：对$[a, b]$上任一确定的x， 当$\Delta x\neq 0$ 且 $x+\Delta x\in[a, b]$时,

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}[\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt]=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$

$$=f(x+\theta\Delta x),0\le\theta\le 1.$$ ——积分中值定理

由于f在点x连续,故有 $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\theta\Delta x)=f(x).$

由x在$[a, b]$上的任意性，可知Φ是f在$[a, b]$上的一个原函数.

1) 定理2 证明了连续函数的原函数是存在的. 同时为通过原函数计算定积分开辟了道路 .

2) 变限积分求导公式:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(b(x))b'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

解： 原式 $=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\dfrac{1}{2e}$

例2. 确定常数 a , b , c 的值, 使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}\,t}=c\quad(c\neq 0).\qquad \boxed{\frac{0}{0}}$$

解: $\because\ x\to 0$时, $ax-\sin x\to 0$, $c\neq 0$, $\therefore\ b=0.$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c$$

$c\neq 0$, 故 $a=1.$ 又由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, 得 $c=\frac{1}{2}.$

例3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)>0$, **证明**

$$F(x)=\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

只要证

$F'(x)>0$

证: $$F'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\cdot(x-\xi)\,f(\xi)\,x}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$(0<\xi<x)$

$\therefore\quad F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数.

例 4. 设 $f(x)$在[0,1]上连续，且 $f(x)<1$. 证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1 \quad \text{在 [0, 1] 上恰有一个解.}$$

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1,$

$\because F(x)\in C[0,1],$ 且$F(0)=-1<0,$

$$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0,$$

所以$F(x)=0$在[0,1]上至少有一个解；

又 $\because F'(x)=2-f(x)>0,\ \therefore F(x)$在[0,1]上单调增加，

所以$F(x)=0$在[0,1]上至多有一个解；

所以$F(x)=0$即原方程在[0,1]上恰有一个解. 证毕

（II）牛顿 – 莱布尼兹公式

定理3 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ **(Newton - Leibniz公式)**

证：根据定理 2, $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，**故**

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

令 $x = a$, 得 $C = F(a)$, **因此** $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, **得**

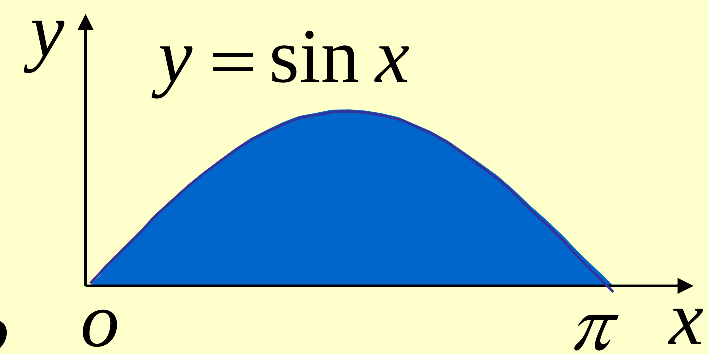
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{记作}}{=\!=} [F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

牛顿—莱布尼兹公式常写成

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

牛顿——莱布尼兹公式不仅为定积分计算提供了一个有效的方法，而且在理论上把定积分与不定积分联系起来.

例5. 计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成的面积 .



解: $A=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} = -[-1-1] = 2$$

定积分与和式极限:

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

取 $T=\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\cdot\frac{b-a}{n},\cdots,a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n},b\}$ ——N等分

$$\xi_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n),\ \|T\|=\frac{b-a}{n},$

$$\|T\|\to 0 \Longleftrightarrow n\to\infty$$

故 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+i\cdot\frac{b-a}{n})\cdot\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$

例6. 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n}$$

可看作函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上作n等分的分割,

取 $\xi_i=\frac{i}{n},\Delta x_i=\frac{1}{n}$ 所作的积分和的极限.

而函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在区间$[0,1]$ 可积,故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

牛顿-莱布尼兹公式的几点注记

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 且 $F(x)$ 为 $f(x)$在区间 $[a,b]$上的原函数, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

注: 1) 对F 可减弱为: 在$[a,b]$连续, 在 (a,b)可导,且

$$F'(x) = f(x), x \in (a,b).$$

2) 对f 还可减弱为: $f(x)$在$[a,b]$可积(不一定连续).

3) 定积分只与被积函数 f 与积分区间$[a,b]$有关,而与积分变量用什么符号表示无关,即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

例如 $\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a \quad \int_a^b e^u du = e^u \Big|_a^b = e^b - e^a.$

例7. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(a)=0$ ，

证明： $$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2(x)dx.$$

证 由**Newton-Leibniz**公式，对$\forall x\in[a,b]$ ，有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x 1\cdot f'(t)dt,$$

再由**Cauchy-Schwarz**不等式，得

$$f^2(x)\le\int_a^x 1^2 dt\int_a^x f'^2(t)dt\le(x-a)\int_a^b f'^2(t)dt,$$

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\int_a^b (x-a)dx\int_a^b f'^2(x)dx=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b f'^2(x)dx.$$

例8. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $f(x)$.

解： 定积分为常数，故应用积分法定此常数 .

设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=a$, $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=b$, 则

$$f(x)=x^2-bx+2a$$

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{b}{2}+2a$$

$$b=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{bx^2}{2}+2ax\right]_0^2=\frac{8}{3}-2b+4a$$

$$\Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ b=\frac{4}{3} \Longrightarrow f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

例9. 求 $I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **的递推公式(n为正整数) .**

解： $I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx-\sin 2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

所以 $I_n=I_{n-1}+\frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1}\quad(n=2,3,\cdots)$

其中 $I_1=\int_0^{\pi/2}2\cos x\,\mathrm{d}x=2.$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

思考与练习

1. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}.$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

(3) 设 $f(x)$在$[0,1]$上可积， 且$f(x)>0$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$.

2. **设** $T_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{t}{n}+\sin\dfrac{2t}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n-1}{n}t\right).$

求$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

练 习 题 1

一、填空题：

1、 $\dfrac{d}{dx}\left(\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=$________ .

2、 $\int_a^x(\dfrac{d}{dx}f(x))dx=$____________ .

3、 $\dfrac{d}{dx}\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(t^2+1)dt=$________ .

4、 $\int_0^2 f(x)dx=$_____，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\le x\le 1\\ 2-x,1<x<2\end{cases}$.

5、设 $I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx$,

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx$,

（1）、当$m=n$时， $I_1=$__ ,I_2 =______ ，

（2）、当$m\neq n$时，$I_1=$___ ,I_2 =______ .

6、设$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nxdx$,

（1）、当$m=n$时，$I_3=$_____ ，

（2）、当$m\neq n$时，$I_3=$______ .

7、$\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx=$______ .

8、$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=$______ .

9、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos t^2dt}{x}=$________ .

二、求导数：

1、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$ ；

2、设 $\begin{cases} x=\int_1^{t^2} u\ln u du, \\ y=\int_{t^2}^1 u^2\ln u du, \end{cases}(t>1)$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ；

3、$\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$ ；

4、设 $g(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{dx}{1+x^3}$，求 $g''(1)$.

三、计算下列各定积分：

1、$\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^2})dx$；　　2、$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

3、$\int_{-1}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$；　　4、$\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$.

四、求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$；　　2、$\lim\limits_{x\to+0} \frac{\int_0^{x^{\frac{1}{2}}} (1-\cos t^2)dt}{x^{\frac{5}{2}}}$.

五、设 $f(x)$为连续函数，证明:

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x\left(\int_0^t f(u)du\right)dt\ .$$

六、求函数 $f(x)=\int_0^x \frac{3t+1}{t^2-t+1}dt$ 在区间$[0,1]$上的最大值与最小值 .

七、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, 当 0\le x\le \pi 时,\\ 0, 当 x<0 或 x>\pi 时,\end{cases}$

求$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$在$(-\infty,+\infty)$内的表达式 .

八、设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且 $f(x)>0$,

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x \frac{dt}{f(t)}$$,证明:

(1)、$F'(x)\geq 2$;

(2)、方程$F(x)=0$在(a,b)内有且仅有一个根 .

练习题1 答案

一、1、0；　2、$f(x)-f(a)$；　3、$-\sqrt[3]{x}\ln(x^2+1)$　；

4、$\frac{5}{6}$；　5、(1)π, π；　(2) 0, 0；

7、$45\frac{1}{6}$；　8、$\frac{\pi}{6}$；　9、1.

二、1、$\frac{\cos x}{\sin x-1}$；　2、$-\frac{1}{2t^2\ln t}$；

3、$(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$；　4、$-2$.

三、1、$2\frac{5}{8}$；　2、$\frac{\pi}{3}$；　3、$\frac{\pi}{4}+1$　；　4、4.

四、1、0；　　　　2、$\frac{1}{10}$.

六、$\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$,　0.

七、$\phi(x)=\begin{cases}0\,,\ x<0\\ \frac{1}{2}(1-\cos x)\,,\ 0\le x\le\pi.\\ 1\,,\ x>\pi\end{cases}$

2. 定积分的换元积分法与分部积分法

(1) 定积分的换元积分法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在连续的导数, 且满足 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(2) 定积分分部积分法

若 $u(x), v(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续可微函数, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

(1) 定积分的换元法

定理1 设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 单值函数 $x=\varphi(t)$ 满足:

1) $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

2) 在 $[\alpha,\beta]$ 上 $a\le\varphi(t)\le b$,

则 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

证: 所证等式两边被积函数都连续, 因此积分都存在, 且它们的原函数也存在. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的原函数, 因此有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]$$

$$=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

说明:

1) 当$\beta < \alpha$, 即区间换为$[\beta,\alpha]$时， 定理 1 仍成立 .

2) 必需注意换元必换限 , 原函数中的变量不必代回 .

3) 换元公式也可反过来使用 , 即

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\text{令 } x = \varphi(t))$$

或配元 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\underline{\varphi'(t)\,\mathrm{d}t} = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\mathrm{d}\varphi(t)$

$\boxed{\text{配元不换限}}$

例1 计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

解: 令 $x=\sin t$, 则当 $x:\ 0 \longrightarrow 1$ 时, $t:\ 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$,

$dx=\cos t\,dt$, 所以

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

例2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt.$

解: 令 $x=\cos t$, 则当 $t:\ 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $x:\ 1 \longrightarrow 0.$

$dx=-\sin t\,dt$, 所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt=-\int_1^0 x^2 dx=\int_0^1 x^2 dx=\frac{1}{3}.$$

例3 证明 $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2$

证: $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}dt \;=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\cdot\left(\cos t\cos\frac{\pi}{4}+\sin t\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t dt$$

令 $u=\frac{\pi}{4}-t$, 则当 $t:\;0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$ 时, $u:\;\frac{\pi}{4}\longrightarrow 0.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-t)dt\;=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos u(-du)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u du$$

所以 $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}dt=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

例4 计算 $J=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^1 \ln(1+x)d(\arctan x).$

令 $x=\tan t$, 则当 $x:\ 0 \longrightarrow 1$ 时, $t:\ 0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$. $dt=\frac{1}{1+x^2}dx,$

所以 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$

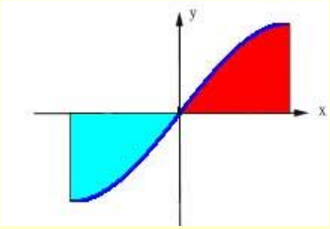
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{\cos t+\sin t}{\cos t}dt$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

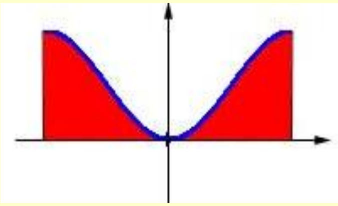
例5 设 $f(x)$ 在$[-a,a]$上可积.证明:

偶倍奇零

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0;$



(2) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$



证: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$

令 $x=-t$, 则当 $x:-a \longrightarrow 0$ 时, $t:a \longrightarrow 0$, $dx=-dt$,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx = \begin{cases} 0, & f\text{为奇函数} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f\text{为偶函数} \end{cases}$$

例6. 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 原式 $=\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx}_{\text{偶函数}}+\underbrace{\int_{-1}^{1}\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx}_{\text{奇函数}}$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=4\int_0^1\frac{x^2(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)}dx$$

$$=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})dx=4-4\underbrace{\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx}_{\text{单位圆的面积}}$$

$$=4-\pi$$

例 7. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$；

（2）$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

由此计算 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证（1）$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

（2） $$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \overset{x=\pi-t}{=} -\int_{\pi}^{0}(\pi - t) f[\sin(\pi - t)]dt$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - t) f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt$$

$$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

(2) 定积分的分部积分法

定理2. 设 $u(x), v(x) \in C^1[a, b]$, 则

$$\int_a^b u(x) v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,\mathrm{d}x$$

证: $\because\ [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$\Big\downarrow$ 两端在 $[a,b]$ 上积分

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_a^b u(x) v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x)\,\mathrm{d}x$$

例8. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, \mathrm{d}x$.

解: 原式 $= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi}{12} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

例9. 计算 $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

解: $\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{1}{3} (x^3 \ln x |_1^e - \int_1^e x^3 \cdot \frac{1}{x} dx)$

$$= \frac{1}{3} (e^3 - \frac{1}{3} x^3 |_1^e) = \frac{1}{9} (2e^3 + 1).$$

例10. 计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx.$

解 $$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2+x)^2}dx = -\int_0^1 \ln(1+x)d\frac{1}{2+x}$$

$$= -\left[\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2+x}d\ln(1+x)$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \int_0^1 \boxed{\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{1+x}dx} \longrightarrow \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$$

$$= -\frac{\ln 2}{3} + \left[\ln(1+x) - \ln(2+x)\right]_0^1 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3.$$

例11. 计算 $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$

解: $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} t^3 e^t (-\frac{1}{t^2}) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t de^t = te^t \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

例12. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解　因为$\frac{\sin t}{t}$没有初等形式的原函数（积分正弦），

无法直接求出 $f(x)$，所以采用分部积分法

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2)=\frac{1}{2}\left[x^2f(x)\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2df(x)$$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2d(x^2)=\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

例13. 证明 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

证: 令 $t=\frac{\pi}{2}-x$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^n(\tfrac{\pi}{2}-t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

令 $u=\sin^{n-1}x,\ v'=\sin x$, 则 $u'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x$,

$v=-\cos x$

$$\therefore\quad I_n=\underbrace{[-\cos x\cdot\sin^{n-1}x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}x$$

$$= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x}$$

由此得递推公式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

于是 $I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1$$

而 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, $\quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1$

故所证结论成立.

瓦里斯(Wallis)公式: $$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}.$$

证: $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx.$$

即 $$\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}<\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

$$A_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m}=B_m$$

$$0<B_m-A_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m(2m+1)}<\frac{1}{2m}\cdot\frac{\pi}{2}\to 0(m\to\infty).$$

所以 $\lim\limits_{m\to\infty}(B_m-A_m)=0$, 而 $0<\dfrac{\pi}{2}-A_m<B_m-A_m$,

故得 $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1}.$$

内容小结

$$\text{基本积分法}\begin{cases}\text{换元积分法}\\ \text{分部积分法}\end{cases}$$

换元必换限
配元不换限
边积边代限

思考与练习

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = \underline{\ \sin^{100}x\ }$

提示：令 $u = x - t$，则

$$\int_0^x \sin^{100}(x-t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^0 \sin^{100}u\,\mathrm{d}u$$

2. 设 $f(t)\in C_1$, $f(1)=0$, $\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=\ln x$, 求 $f(e)$.

解法1 $\ln x=\int_1^{x^3} f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x^3)-f(1)=f(x^3)$

令 $u=x^3$, 得 $f(u)=\ln\sqrt[3]{u}=\frac{1}{3}\ln u \Longrightarrow f(e)=\frac{1}{3}$

解法2 对已知等式两边求导,

得 $3x^2 f'(x^3)=\frac{1}{x}$

令 $u=x^3$, 得 $f'(u)=\frac{1}{3u}$

$$\therefore\quad f(e)=\int_1^e f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^e \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}$$

思考: 若改题为

$$\int_1^{x^3} f'(\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t=\ln x$$

$$f(e)=?$$

提示: 两边求导, 得

$$f'(x)=\frac{1}{3x^3}$$

$$f(e)=\int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x$$

3. 设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$,

求 $\int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^1 x \underline{f''(2x)\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}f'(2x)$ **(分部积分)**

$$= \frac{1}{2}\left[\, x f'(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(2x)\,\mathrm{d}x \,\right]$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1$$

$$= 2$$

4. 证明 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$ 是以π为周期的函数.

证： $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u$

令 $u=t+\pi$

$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(t+\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以π为周期的周期函数.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，**试证** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$

解：右端 $=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}f'(x)$　　$\boxed{\text{分部积分积分}}$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-a)(x-b)f'(x)\right]\Big|_a^b$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)(2x-a-b)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_a^b (2x-a-b)\,\mathrm{d}f(x)$$　　$\boxed{\text{再次分部积分}}$

$$=-\frac{1}{2}\left[(2x-a-b)f(x)\right]\Big|_a^b+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\text{左端}$$

练 习 题 2

一、填空题：

1、$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin(x + \frac{\pi}{3}) dx =$ ______________________;

2、$\int_{0}^{\pi} (1 - \sin^{3}\theta) d\theta =$ ____________________;

3、$\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^{2}} dx =$ ________________;

4、$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^{2}}{\sqrt{1 - x^{2}}} dx =$ ______________;

5、$\int_{-5}^{5} \frac{x^{3}\sin^{2}x}{x^{4} + 2x^{2} + 1} dx =$ ______________.

二、计算下列定积分：

1、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos^3\varphi d\varphi$；　2、$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；

3、$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$；　4、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx$；

5、$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}dx$；　6、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\, dx$；

7、$\int_{-1}^{1} (x^2\sqrt{1-x^2} + x^3\sqrt{1+x^2})dx$；

8、$\int_0^2 \max\{x, x^3\}dx$；

9、$\int_0^2 x|x-\lambda|dx$　（λ 为参数）.

三、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & 当x\geq 0时,\\ \dfrac{1}{1+e^{x}}, & 当x<0时,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$.

四、设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,

证明 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$.

五、证明:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx.$$

六、证明：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx,$$

并求$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sin x}$.

七、设$f(x)$在$[0,1]$上连续，

证明 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} f(|\cos x|)dx$.

练习题2 答案

一、1、0；　2、$\pi-\frac{4}{3}$；　3、$\frac{\pi}{2}$；　4、$\frac{\pi^3}{32}$；　5、0.

二、1、$\frac{1}{4}$；　2、$\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$；　3、$1-2\ln 2$；　4、$\frac{4}{3}$；

5、$2\sqrt{2}$；　6、$\frac{3}{2}\pi$；　7、$\frac{\pi}{4}$；　8、$\frac{\pi}{8}$；

9、$\frac{17}{4}$；　10、当$\lambda\le 0$时，$\frac{8}{3}-2\lambda$；　当$0<\lambda\le 2$

时，$\frac{8}{3}-2\lambda+\frac{\lambda^3}{3}$；　当$\lambda>2$时，$-\frac{8}{3}+2\lambda$.

三、　$1+\ln(1+e^{-1})$.

六、　2.

练习题 3

一、填空题：

1、设 n 为正奇数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx =$ ____________；

2、设 n 为正偶数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$ ____________；

3、$\int_0^1 xe^{-x} dx =$ ______________；

4、$\int_1^e x \ln x dx =$ ______________；

5、$\int_0^1 x \arctan x dx =$ ____________ .

二、计算下列定积分：

1、$\int_1^e \sin(\ln x)\, dx$；

2、$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|\, dx$；

3、$J(m)=\int_0^{\pi} x\sin^m x dx$，（$m$ 为自然数）

4、$\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x dx$.

三、已知 $f(x)=\tan^2 x$, 求$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)f''(x)dx$.

四、若 $f''(x)$在$[0,\pi]$连续，$f(0)=2$，$f(\pi)=1$，

证明：$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=3$.

练习题3 答案

一、1、$\dfrac{(n-1)!!}{n!!}$；　2、$\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$；　3、$1-\dfrac{2}{e}$；

4、$\dfrac{1}{4}(e^2+1)$；　5、$(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{9})\pi+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

二、1、$\dfrac{e\sin 1-e\cos 1+1}{2}$；　2、$2(1-\dfrac{1}{e})$；

3、

$$J(m)=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m}\cdot\dfrac{\pi^2}{2}, m\text{为偶数}\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(m-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots m}\cdot\pi, m>1\text{为奇数}\end{cases};$$

4、$\begin{cases} 0, & \text{当}\, n\, \text{为正奇数时} \\ \dfrac{2(n-1)!!}{n!!}\pi, & \text{当}\, n\, \text{为正偶数时} \end{cases}$;

5、0.

三、8.