2016级《一元分析学》期中考试试卷A卷

院(系)_______ 班级_______ 学号_______ 姓名_______

考试日期：2016.11.21

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得分	
评阅人	

一. 填空题(每小题4分，共20分)

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^3+1}\sin(n!)}{n^2+1}=\underline{0}$.

   解: 上下同时除以n^2,由$\sin x$的有界性及夹挤原理，得极限为0。

2. $x_1=4$,$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{4}{x_n})$,设集合$E=\{x_n|n=1,2,...\}$, 则

   $\sup E=\underline{4}$, $\inf E=\underline{2}$.

   解：$x_n>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{4}{x_n})\geq\sqrt{x_n*\frac{4}{x_n}}\geq2$, 易得$x_n$单减（$n\geq2$）,有下界。由单调有界定理，$x_n$收敛，其极限是2。由$x_n$单减当$n\geq2$. 得其上确界是4，下确界是2。

3. 已知$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x+a}-3}{x-2}, & x>2\\ x+b, & x\leq2\end{cases}$ 在$x=2$处连续，则

   $a=\underline{7}$, $b=\underline{-\frac{11}{6}}$.

   解：$\lim_{x\to2^-}\frac{\sqrt{x+a}-3}{x-2}$存在。故$\lim_{x\to2^-}\sqrt{x+a}-3=\sqrt{2+a}-3=$

0, 解得：$a=7$. 再由$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{6}$. 最后，由函数在$x=2$处的连续性，$2+b=\frac{1}{6}$，得$b=-\frac{11}{6}$

4. $y=(x^3-1)\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$的导数为$\underline{3x^2\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+(x^3-1)\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$.

5. 阿基米德螺线$r=2\theta$在$\theta=\frac{\pi}{2}$时的切线方程为$\underline{y-\pi=-\frac{2}{\pi}x}$.

解：$x=2\theta\cos\theta$, $y=2\theta\sin\theta$. $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2\sin\theta+2\theta\cos\theta}{2\cos\theta-2\theta\sin\theta}$. 当$\theta=\frac{\pi}{2}$, 点为$(0,\pi)$，切线的斜率为$-\frac{2}{\pi}$, 得切线为：$y-\pi=-\frac{2}{\pi}x$

得分	
评阅人	

二. 选择题(每小题4分,共12分)

1. 当$x \to 0^+$时，与$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$等价的无穷小量为$\underline{C}$

   (A) $x^{\frac{1}{2}}$ (B) $x^{\frac{1}{4}}$ (C) $x^{\frac{1}{8}}$ (D) $x^{\frac{1}{3}}$

   解：当$x \to 0^+$时，x是比$\sqrt{x}$更高阶的无穷小量，故$x+\sqrt{x}=\sqrt{x}(1+o(1))$. 依次类推，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}}$

2. 设$f(x)=\cos(x+|\sin x|)$,则在$x=0$处有$\underline{C}$

   (A) $f'(0)=2$ (B) $f'(0)=1$ (C) $f'(0)=0$ (D) $f(x)$不可导

   解：$f(0)=1, \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x-|\sin x|)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(x-|\sin x|)^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$.(上式用到等价无穷小代换) 故$f'(0)=0$。

3. 设复合函数$f(g(x))$满足$\lim_{x\to 0} f(g(x))=A$,且有$\lim_{x\to 0} g(x)=b$,则

   $f(x)$在$x=b$处连续是$f(b)=A$的$\underline{A}$

   (A) 充分条件 (B) 必要条件

   (C) 充要条件 (D) 即非充分也非必要条件

   解：由连续函数求极限+复合函数求极限的定理，充分性是显然的。必要性没有。如$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $g(x)\equiv 0$, 有$\lim_{x\to 2} f(g(x))=0 \quad b=0$, 但是$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在。

得分	
评阅人	

三. 计算题(每小题6分,共30分)

1. 已知$y=x^{\ln x}$, 求y'.

   解$\ln y=\ln x\ln x$. 等式两边对x求导, $\frac{y'}{y}=2\frac{\ln x}{x}$. 故$y'=2x^{\ln x-1}\ln x$
.

2. 计算$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^{\csc 2x}$.

   解:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\tfrac{1-x}{1+2x}\right)^{\csc 2x} &= \lim_{x\to 0} e^{\csc 2x\ln\frac{1-x}{1+2x}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)-\ln(1+2x)}{\sin 2x}}\\ &= e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1+2x}}{2\cos 2x}}\\ &= e^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

3. 设$f(x)=\frac{x}{2x^2+3x+1}$，求$f^{(n)}(x)$.

   解：对函数做真分式分解;

$$\frac{x}{2x^2+3x+1}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+1}$$

易得$A=-1$, $B=1$, 而$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}$. $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n 2^n n!(2x+1)^{-n-1}$. 故

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!(x+1)^{-n-1}-(-2)^n n!(2x+1)^{-n-1}.$$

4. 设$y^2+2\ln y=x^4$确定函数$y(x)$, 计算d^2y.

   解：等式两边对x求微分

$$2ydy+2\frac{dy}{y}=4x^3dx \tag{0.1}$$

解得：$dy=\frac{2x^3ydx}{y^2+1}$ 等式(0.1)两边对x继续求微分，得

$$(dy)^2+yd^2y-\frac{(dy)^2}{y^2}+\frac{d^2y}{y}=6x^2dx^2$$

解得(带入dy的表达式)

$$d^2y = \frac{y}{y^2+1}(6x^2dx^2 + (\frac{1}{y^2} - 1)dy^2) = \frac{6x^2y(y^2+1)^2 + 4x^6y(1-y^2)}{(y^2+1)^3}dx^2$$

5. 计算$\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x+x+2}{x^3}$.

解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)e^x+x+2}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+(x-1)e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

上述是采用洛必达法则，也可用泰勒展示做此题。

得分	
评阅人	

四. 解答题(每小题7分,共14分)

1. 设若对一切$x > 0$, 都有$3f(x) + xf'(x) = 0$, 且$f(1) = 3$, 求$f(x)$.

解：分析，等式变形$\frac{f'}{f} = -\frac{3}{x}$. 左边为$\ln f(x)$ 的导数，右边为$-\ln x^3$的导数。得$(\ln f(x)x^3)' = 0$. 故构造$F(x) = x^3f(x)$, 则$F'(x) = 3x^2f(x) + x^3f'(x) = x^2(3f(x) + xf'(x)) = 0$, 故$F(x) = C$, 由条件$F(1) = C = 3$. 所以$f(x) = \frac{3}{x^3}$.

2. 讨论：函数$f(x) = x\sin x$在$(0, +\infty)$上的一致连续性，给出理由.

解：函数在$0, +\infty)$上不是一致连续的。取$x_n = 2n\pi$, $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, 得$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, 但是$|f(x_n) - f(y_n)| = (2n\pi + \frac{1}{n})\sin(2n\pi + \frac{1}{n}) \to 2\pi$当$n \to +\infty$. 所以$x\sin x$在$(0, +\infty)$上不是一致连续的。
分析：考察函数的导数$\sin x + x\cos x$. 在$\cos x = 1$的一个小邻域中，导数是大于$\frac{x}{2}$的（x充分大时），由拉格朗日中值定理，在$x = 2n\pi$的邻域中，即便取$x_n - y_n$充分小，也不能保证函数的差值充分小。

得分	
评阅人	

五. 证明题(每小题8分,共24分)

1. 用极限的定义($\epsilon-\delta$语言)证明：$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-2x}=\frac{1}{2}$.

证：$|\frac{x-2}{x^2-2x}-\frac{1}{2}|=|\frac{x-2}{2x}|$, 不妨设$|x-2|<1$, 则$1<x<3$. 对$\forall\epsilon>0$, 当$|x-2|<1$时, 令

$$|\frac{x-2}{x^2-2x}-\frac{1}{2}|=|\frac{x-2}{2x}|<\frac{|x-2|}{2}<\epsilon.$$

解得$|x-2|<2\epsilon$. 故有当$0<|x-2|<\delta=\min(1,2\epsilon)$时，总有

$$|\frac{x-2}{x^2-2x}-\frac{1}{2}|=|\frac{x-2}{2x}|<\epsilon$$

由定义，$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-2x}=\frac{1}{2}$。

2. 设$f(x)$在$[0,3]$中连续，在(0,3)中可导, 且有$f(0)=f(3)=0$，

$f(2)=3$, 则至少存在一个$\xi\in(0,3)$, 使得

$$f'(\xi)=1.$$

证法一：在$[0,2]$和$[2,3]$上用拉格朗日中值定理，存在$\xi_1\in(0,2)$　$\xi_2\in(2,3)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=3/2,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(3)}{2-3}=-3$$

再由导数的介值定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, 使得$f'(\xi)=0$
证法二：作$F(x)=f(x)-x$, 则函数在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$上可导。由$F(0)=0$,　$F(2)=1$,　$F(3)=-3$, 由连续函数的介值定理，存在$x_0\in(2,3)$, 使得$F(x_0)=0$, 再由罗尔定理，知存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,3)$, 使得$F'(\xi)=0$. 即$f(\xi)=1$

3. 若$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$的可微函数，且$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=A$

证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得$f'(\xi)=0$.
证法一：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且可导。假设不存在$f'(x)=0$的点，则由导数的介值定理，$f'(x)$不变号，不妨设$f'(x)>0$, 则函数在$(-\infty,+\infty)$上严格单增。（可由拉格朗日中值定理得到）。取任取$x_0<x_1$, 则$f(x_0)<f(x_1)$ 当$x>x_1$时。令$x\to+\infty$, 由极限的保不等式性,$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\geq f(x_1)>f(x_0)$, 同理$\lim_{x\to-\infty}f(x)\leq f(x_0)<f(x_1)$ 矛盾。故一定有$\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

证法二：若$f(x) \equiv A$, 命题显然成立。否则，一定存在$x_0 \in (-\infty,+\infty)$, 使得$f(x_0)=B\neq A$, 不妨设$B>A$, 证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有最大值，也是极大值，由费马定理，知存在$\xi \in (-\infty,+\infty)$, 使得$f'(\xi)=0$.

或由极限的性质，取$\epsilon = \frac{B-A}{2} > 0$. 则存在$M > x_0$, 使得$|f(x)-A| < \epsilon$ 当$x > M$时成立，即$f(x) < \frac{A+B}{2}$, 由连续函数的介值定理，存在$x_1 \in (x_0, M+1)$, 使得$f(x_1) = \frac{A+B}{2}$ 同样道理，存在$x_2 \in (-\infty, x_0)$, 使得$f(x_2) = \frac{A+B}{2}$. 由罗尔定理，存在$\xi \in (x_2,x_1) \subset (-\infty,+\infty)$, 使得$f'(\xi)=0$