1.2 函数列与函数项级数

一、函数列及其一致收敛性

二、一致收敛函数列的性质

三、函数项级数及其一致收敛性

四、一致收敛函数项级数的性质

一、函数列及其一致收敛性

设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x),$ (1)

是一列定义在同一数集 E 上的函数, 称为定义在E上的函数列.

以 $x_0 \in E$ 代入 (1), 可得数列

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots. \tag{2}$$

如果数列(2)收敛, 则称函数列(1)在点 x_0 收敛, x_0 称为函数列(1)的收敛点. 如果数列(2)发散, 则称函数列(1)在点x_0发散.

函数列： $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x),$ (1)

当函数列(1)在数集 $D \subset E$ 上每一点都收敛时，

就称(1)在数集 D 上收敛. D —— 收敛域

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in D$$

或 $$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty), \forall x \in D.$$

称$f(x)$为(1)的极限函数.

逐点收敛： $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x), n > N: \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

与x有关

例1 设 $f_n(x)=x^n, n=1,2,\cdots$为定义在$(-\infty,\infty)$上的函数列, 证明它的收敛域是$(-1,1]$, 且有极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

证 任给 $\varepsilon>0$ (不妨设 $\varepsilon<1$), 当 $0<|x|<1$时, 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n|,$$

只要取 $N(\varepsilon,x)=\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$, 当 $n>N(\varepsilon,x)$时, 就有

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n<|x|^N=\varepsilon.$$

当 $x=0$ 和 $x=1$ 时, 则对任何正整数 n, 都有

$$|f_n(0)-f(0)|=0<\varepsilon,$$

$$|f_n(1)-f(1)|=0<\varepsilon.$$

这就证明了 $\{f_n\}$ 在$(-1,1]$ 上收敛, 且极限就是(3)式所表示的函数.

又 当 $|x|>1$ 时, 有 $|x|^n\to+\infty(n\to\infty)$, 当 $x=-1$ 时, 对应的数列为 $-1,1,-1,1\cdots$, 显然是发散的. 所以函数列 $\{x^n\}$ 在区间 $(-1,1]$ 外都是发散的. 故所讨论的函数列的收敛域是 $(-1,1]$.

例2 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数列 $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $n=1,2,\cdots$.

由于对任何实数 x, 都有 $\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}$,

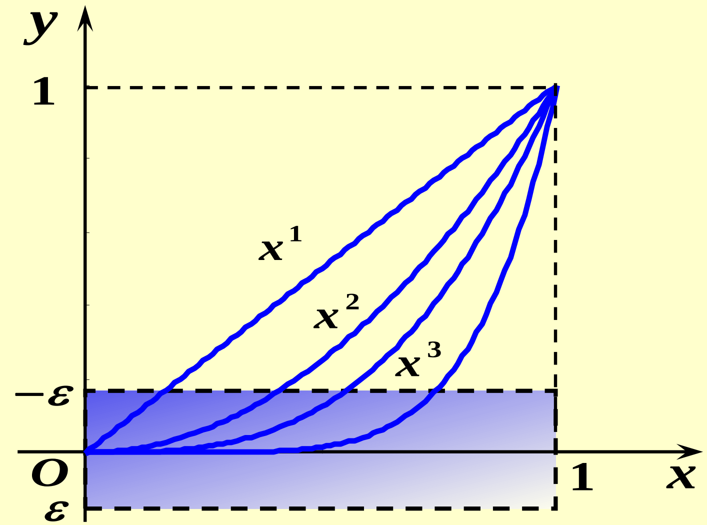
故对任给的 $\varepsilon>0$, 只要 $n>N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 就有

$$\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

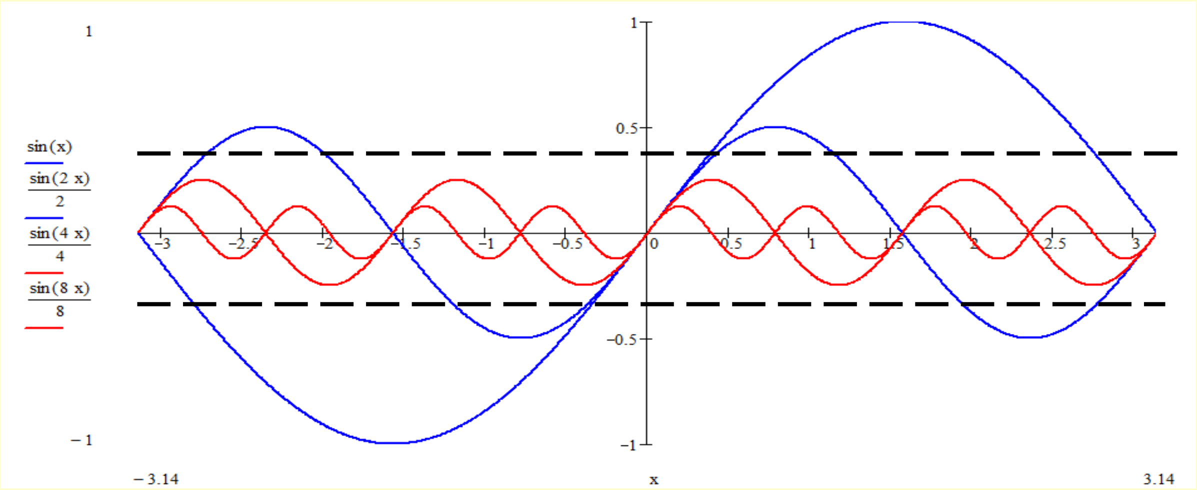
所以函数列 $\{\sin nx/n\}$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$, 极限函数为 $f(x)=0$.

例1. $f_n(x) = x^n, n = 1, 2, \cdots, D = (-\infty, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



例2. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}, \; n = 1, 2, \cdots, D = (-\infty, +\infty)$ $\quad f(x) = 0$



对于函数列, 仅停留在讨论在哪些点上收敛是远远不够的，重要的是要研究极限函数与函数列所具有的解析性质的关系. 例如, 能否由函数列每项的连续性、可导性来判断出极限函数的连续性和可导性；或极限函数的导数或积分，是否分别是函数列每项导数或积分的极限. 对这些更深刻问题的讨论, 必须对它在 D上的收敛性提出更高的要求才行.

定义1 设函数列$\{f_n\}$与函数 f 定义在同一 数集D上, 若对任给的正数 ε, 总存在与x无关的正整数N, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n\}$在 D 上一致收敛于 f, 记作

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) (n \to \infty), x \in D.$$

由定义看到, 一致收敛就是对 D 上任何一点, 函数列趋于极限函数的速度是"一致"的.

逐点收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\quad x\in D \quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \underline{N(\varepsilon, x)}, n > N : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

一致收敛: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\quad x\in D \quad\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \underline{N(\varepsilon)},\ n > N : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$$

显然, 若函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛, 则必在 D 上每一点都收敛. 反之, 在 D 上每一点都收敛的函数列, 它在 D 上不一定一致收敛.

例2 中的函数列 $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$是一致收敛的, 因为对任意给定的正数 ε ,不论 x 取 $(-\infty, +\infty)$ 上什么值, 都有 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|<\varepsilon$, 所以函数列 $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)=0$.

函数列$\{f_n\}$在 D 上不一致收敛于 f 的正面陈述是:

存在某正数 ε_0, 对任何正数 N, 都有某一点 $x_0 \in D$ 和某一正整数 $n_0 > N$(注意: x_0 与 n_0 的取值与 N 有关),使得

$$\left| f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \right| \ge \varepsilon_0 .$$

由例1 中知道, $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上不可能一致收敛于 0. 事实上, 若取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, 对任何正整数 $N \ge 2$, 取正整数 $n_0 = N$ 及 $x_0 = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{\frac{1}{N}} \in (0, 1)$, 就有

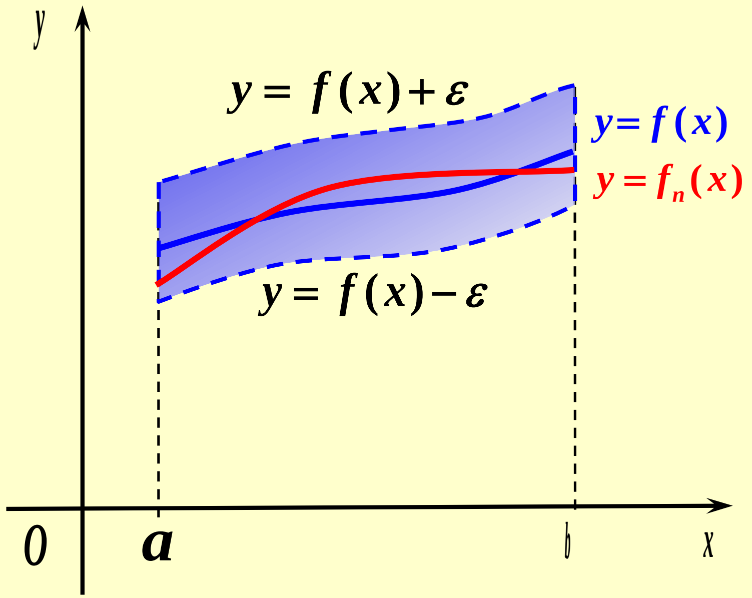
$$\left| x_0^{\,n_0} - 0 \right| = 1 - \frac{1}{N} \ge \frac{1}{2}.$$

函数列$\{f_n\}$一致收敛于 f 的几何意义: 如图所示,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 对于序号大于 N 的所有曲线

$$y = f_n(x) \ (n > N),$$

都落在曲线 $y = f(x) + \varepsilon$ 与 $y = f(x) - \varepsilon$ 所夹的带状区域之内.



定理1 (函数列一致收敛的柯西准则) 函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛的**充要条件**是: 对任给正数ε, 总存在正数$N(\varepsilon)$, 当$n, m > N$, 对一切$x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \qquad (4)$$

证 必要性 设$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \to \infty), x \in D$, 即对任给$\varepsilon > 0$, 存在正数$N(\varepsilon)$, 使得当$n > N$时, 对一切$x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

于是当$n, m > N$, 由(5)得

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

定理1 (函数列一致收敛的柯西准则) 函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是: 对任给正数 ε , 总存在正数$N(\varepsilon)$, 使当$n, m > N$,对一切 $x \in D$, 都有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

证：充分性 若 (4) 成立, 由数列收敛的柯西准则, $\{f_n\}$在D上任一点都收敛, 记其极限函数为 $f(x)$, $x \in D$. 现固定(4)式中的n, 让$m \to \infty$, 于是当$n > N$时, 对一切$x \in D$都有$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$. 由定义1知,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad (n \to \infty), x \in D.$$

根据一致收敛定义可推出下述定理:

定理2（余项准则） 函数列$\{f_n\}$在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{6}$$

证 必要性 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(n\to\infty), x\in D$. 则对任给的正数 ε, 存在不依赖于 x 的正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad x\in D.$

由上确界的定义, 对所有 $n>N$, 也有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon.$$

这就得到了(6)式.

定理2（余项准则） 函数列$\{f_n\}$在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{6}$$

充分性 由假设，对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数N，使得当$n>N$ 时，有

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{7}$$

因为对一切 $x\in D$，总有

$$|f_n(x)-f(x)|\le\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|.$$

故由 (7) 式得 $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$，于是 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f.

注 柯西准则的特点是不需要知道极限函数是什么，只是根据函数列本身的特性来判断函数列是否一致收敛，而使用余项准则需要知道极限函数，但使用较为方便。如例2，由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}\left|\frac{\sin nx}{n}-0\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以在$(-\infty,+\infty)$上，$\dfrac{\sin nx}{n}\rightrightarrows 0 \quad (n\to\infty).$

例4 讨论函数例$\{f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}\}$, $x\in[0,1]$的一致收敛性.

解 为了使用余项准则, 首先求出函数列的极限函数.

易见 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2xe^{-n^2x^2}=0,\ x\in[0,1],$

于是 $|f_n(x)-f(0)|=n^2xe^{-n^2x^2}.$

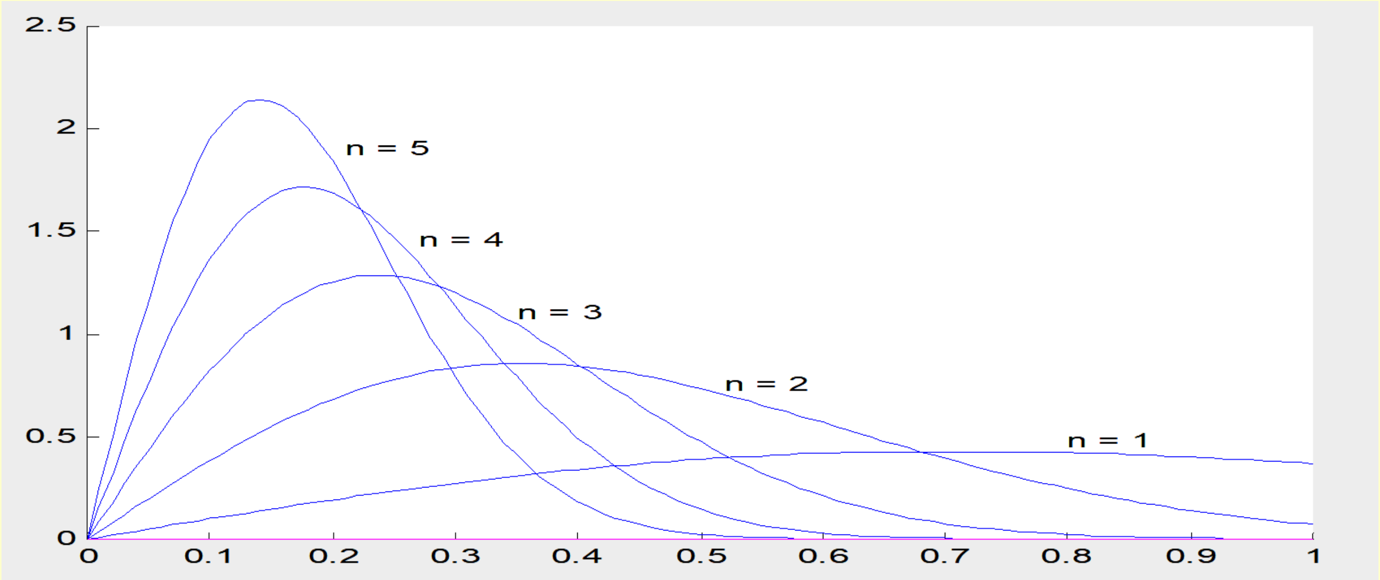
容易验证 $n^2xe^{-n^2x^2}$ 在 $[0,1]$ 上只有惟一的极大值点

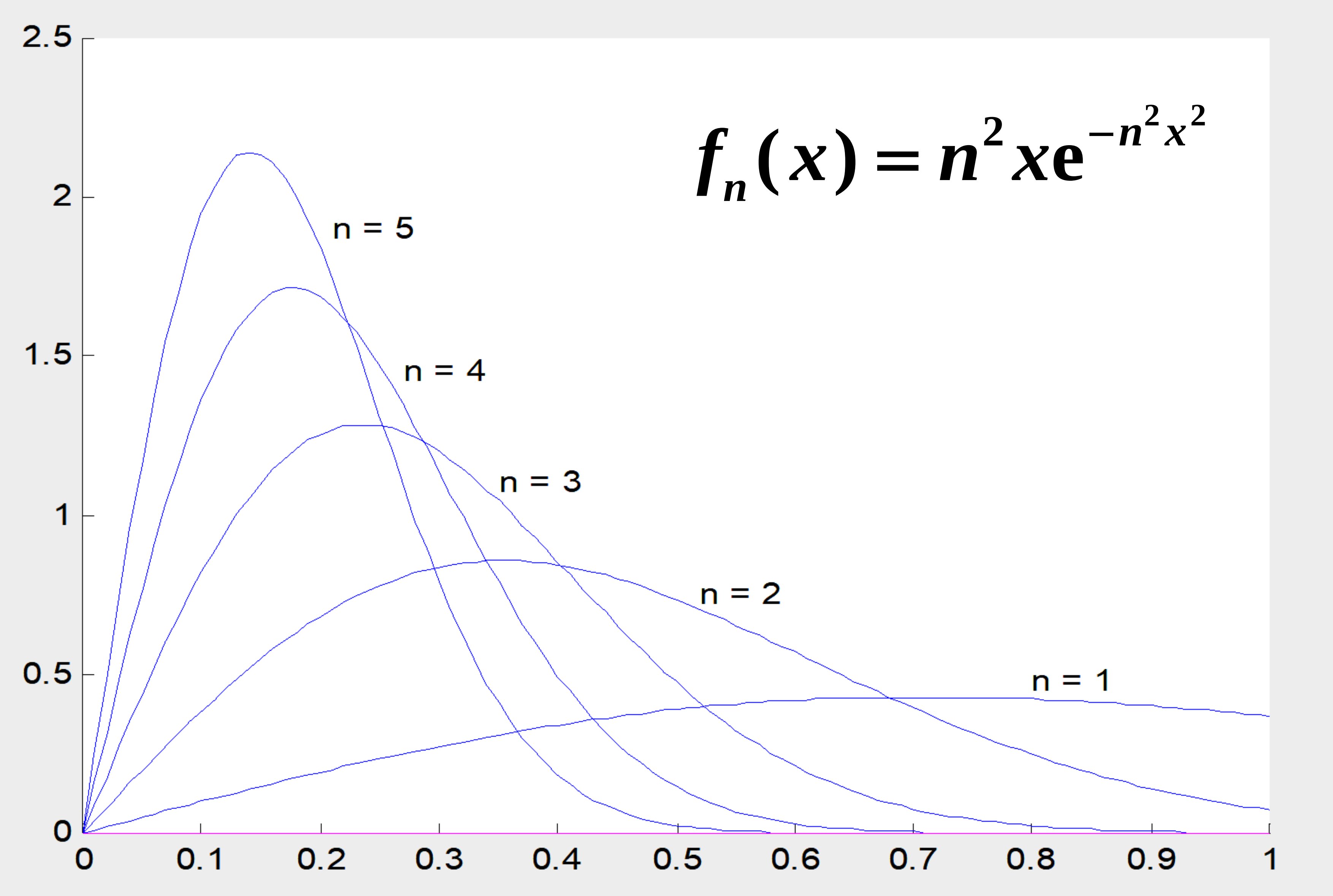
$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$, 因此为最大值点. 于是

$$\sup|f_n(x)-f(x)|=\frac{n}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\to+\infty$$

根据余项准则知该函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

注 $\{f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}\}$不一致收敛是因为函数列余项的数值在 $x=0$ 附近不能随 n 的增大一致趋于零(见下图)，因此对任何不含原点的区间 $[a,1]\,(0<a<1)$，$\{f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2}\}$在该区间上一致收敛于零.




$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2}$$
n = 5
n = 4
n = 3
n = 2
n = 1
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

定理3（归结原则，P28.定理1.2.2）

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty),\ x\in D \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall x_n \in D,\quad \lim_{n\to\infty}\{f_n(x_n)-f(x_n)\}=0.$$

证明：（略）

例5. 函数例 $f_n(x)=nx(1-x^2)^n,\ x\in[0,1].$

易知：$f_n(x)\to f(x)=0\ (n\to\infty), \forall x\in[0,1].$

取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，有 $f_n(x_n)-f(x_n)=(1-\dfrac{1}{n^2})^n \to 1\neq 0\ (n\to\infty),$

所以 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)=0\ (n\to\infty),\ x\in D.$

二、 一致收敛函数列的性质

定理4（极限交换定理） 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$，且对每个 n，$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 均存在且相等. 即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{1}$$

证 先证 $\{a_n\}$ 是收敛数列. 对任意 $\varepsilon>0$，由于 $\{f_n\}$ 一致收敛，故存在正整数 N，当 $n>N$ 及任意正整数 p，对一切 $x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

从而 $|a_n - a_{n+p}| = \lim\limits_{x\to x_0} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le \varepsilon.$

于是由柯西准则可知$\{a_n\}$是收敛数列, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = A,$

再证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = A.$

注意到

$$|f(x) - A|$$

$$\le |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - a_{N+1}| + |a_{N+1} - A|$$

由于$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$, a_n收敛于A, 因此对

$\forall\varepsilon>0$, 存在正数N, 当$n>N$时, 对任意$x\in(a,x_0)$

$\cup(x_0,b)$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{和} \quad |a_n-A|<\frac{\varepsilon}{3}$$

同时成立. 特别当$n=N+1$时, 有

$$|f_{N+1}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{和} |a_{N+1}-A|<\frac{\varepsilon}{3}$$

又因为$\lim\limits_{x\to x_0} f_{N+1}(x)=a_{N+1}$, 故存在$\delta>0$, 当

$0<|x-x_0|<\delta$时,也有 $|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

这样，当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)-A| \le |f(x)-f_{N+1}(x)|+|f_{N+1}(x)-a_{N+1}|$$

$$+|a_{N+1}-A|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.　　证毕.

定理指出：在一致收敛的条件下，$\{f_n(x)\}$ 中关于独立变量 x 与 n 的极限可以交换次序，即(1)式成立.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x). \tag{1}$$

定理5 (连续性) 若函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛, 且每一项都连续, 则其极限函数 f 在 I 上也连续.

证 设 x_0 为 I 上任一点. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, 于是由定理 4 知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也存在, 且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 上连续.

注：定理5可以逆过来用：若各项为连续函数的函数列在区间 I 上其极限函数不连续, 则此函数列在区间 I 上一定不一致收敛.

定理6 (可积性) 若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项都连续, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

证 设 f 为函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上的极限函数. 由定理5 知 f 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ 与 f 在 $[a,b]$ 上都可积. 于是(3)变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3')$$

因为在$[a,b]$上 f_n一致收敛于f，故对于任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，对一切$x\in[a,b]$，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

再根据定积分的性质，当$n>N$时有

$$\left|\int_a^b f_n(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x\leq\varepsilon(b-a),$$

这就证明了等式$(3')$.

这个定理指出：在一致收敛的条件下，极限运算与积分运算的顺序可以交换.

定理7(可微性) 设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a,b]$上的函数列, 若 $x_0\in[a,b]$为$\{f_n\}$的收敛点, $\{f_n\}$的每一项在 $[a,b]$ 上有连续的导数, 且$\{f_n'\}$在 $[a,b]$上一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x). \qquad (4)$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)=A$, g为 f_n' 在 $[a,b]$ 上极限函数, 下面证明函数列$\{f_n\}$在区间 $[a,b]$上收敛, 且其极限函数的导数存在且等于g.

由定理条件, 对任一 $x \in [a, b]$, 总有

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n \to \infty$ 时, 右边第一项极限为 A, 第二项极限为 $\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. 所以上式左边极限存在, 记为 f ,于是

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t.$$

由 g 的连续性及微积分学基本定理得

$$f' = g.$$

这就证明了等式(4).

定理7(可微性) 设 $\{f_n\}$ 为定义在 $[a,b]$上的函数列,若 $x_0\in[a,b]$为$\{f_n\}$的收敛点, $\{f_n\}$的每一项在$[a,b]$上有连续的导数, 且$\{f_n'\}$在 $[a,b]$上一致收敛, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x). \tag{4}$$

注1 请注意定理中的条件 x_0为$\{f_n\}$的收敛点的作用. 在定理的条件下, 还可推出在 $[a,b]$上函数列$\{f_n\}$一致收敛于 f, 请读者自己证明.

注2 前面三个定理中一致收敛是极限运算、求导运算与积分运算交换的充分条件, 而不是必要条件.

三、函数项级数及其一致收敛性

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列, 表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\ x\in E \tag{1}$$

称为定义在E上的函数项级数, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$. 称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E, n=1,2,\cdots \tag{2}$$

为函数项级数(1)的部分和函数列.

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\ x\in E \tag{1}$$

若 $x_0\in E$, 数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots \tag{3}$$

收敛, 即部分和 $S_n(x_0)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x_0)$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在, 则称级数(1)在点 x_0 收敛, x_0 称为级数(1)的收敛点. 若级数(3)发散, 则称级数(1)在点 x_0 发散. 若级数(1)在 E 的某个子集 D 上每点都收敛, 则称级数(1)在 D 上收敛. 若 D 为级数(9)全体收敛点的集合, 这时就称 D 为级数(1)的收敛域.

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\ x\in E \qquad (1)$$

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E, n=1,2,\cdots \qquad (2)$$

级数(1)在 D上每一点 x 与其所对应的数项级数(3)的和 $S(x)$ 构成一个定义在 D 上的函数,称为级数(1)的和函数, 记作

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=S(x),\quad x\in D,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),\quad x\in D.$$

也就是说, 函数项级数(1)的收敛性就是指它的部分和函数列(2)的收敛性.

例6 定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数（几何级数）

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots, \qquad (4)$$

的部分和函数为$S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$. 当$|x|<1$时,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

所以几何级数(4)在$(-1,1)$收敛于$S(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

当$|x|\geq 1$时, 几何级数是发散的.

定义2 设$\{S_n(x)\}$是函数项级数$\sum u_n(x)$的部分和函数列. 若$\{S_n(x)\}$在数集D上一致收敛于$S(x)$, 则称函数项级数$\sum u_n(x)$在D上一致收敛于函数$S(x)$, 或称$\sum u_n(x)$在D上一致收敛.

由于函数项级数的一致收敛性是由它的部分和函数列来确定，所以由函数列的一致收敛性可得到有关函数项级数的定理.

定理 8（一致收敛的柯西准则） 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件为：对任给的正数 ε，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使当 $n > N$ 时，对一切 $x \in D$ 和一切正整数 p, 都有

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

或
$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

此定理中当 p=1 时, 得到函数项级数一致收敛的一个必要条件.

推论 **(函数项级数一致收敛的必要条件)** 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的和函数为 $S(x)$, 称

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的余项.

定理9 **(余项准则)** 函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 一致收敛于$S(x)$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

注 当和函数容易求出时，余项准则是比较好用的一种判别方法.

例7 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $[-a,a](a<1)$ 上一致收敛，在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

例7 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $[-a,a](a<1)$ 上一致收敛，在在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

证 $$\sup_{x\in[-a,a]} |S_n(x)-S(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \left|\frac{-x^n}{1-x}\right|$$

$$=\frac{a^n}{1-a} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以，级数在 $[-a,a](a<1)$ 上一致收敛.

例7 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $[-a, a](a<1)$ 上一致收敛，在

在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

证

$$\sup_{x\in(-1,1)} |S_n(x)-S(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{x^n}{x-1}\right| \geq \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| \Big/ \left|1-\frac{n}{n+1}\right|$$

$$= n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

知道级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 内不一致收敛.

例8 讨论函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛性.

解 当 $x=0$ 时, $S_n(1)=0$; 当 $0\le x<1$ 时

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} x^k(1-x)^2=(1-x^n)(1-x)$$

所以 $S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=(1-x)$， $x\in[0,1]$.

于是 $|S(x)-S_n(x)|=x^n(1-x), x\in[0,1],$

由 $(x^n(1-x))'=nx^{n-1}-(n+1)x^n=0$ 解得最大值点

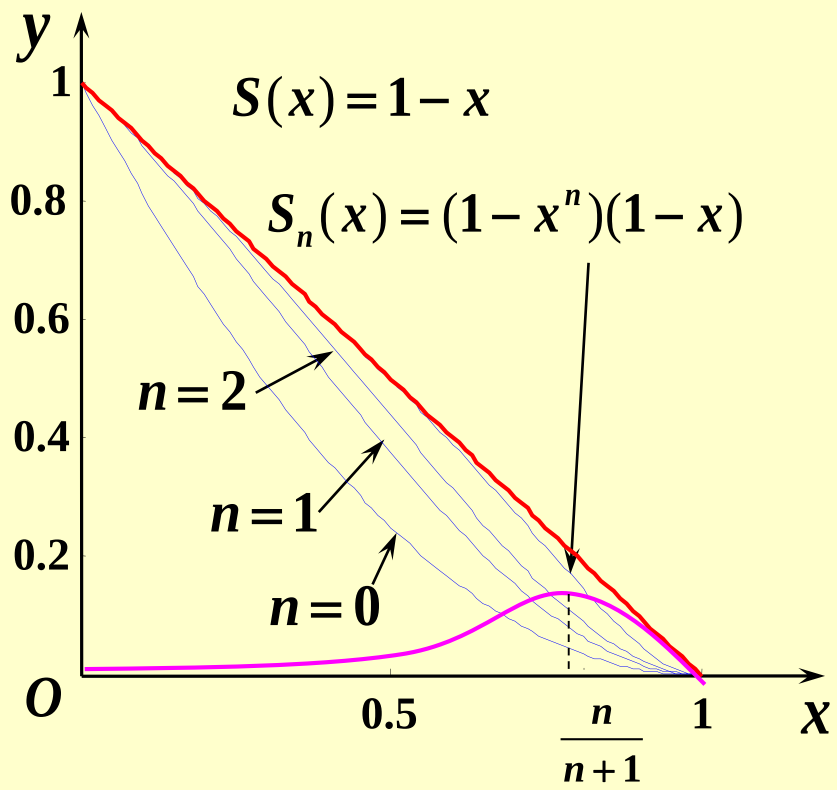
$x_0=\dfrac{n}{n+1}$ ，故

$$\sup_{x\in[0,1]} |S(x)-S_n(x)|$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在

[0,1] 上一致收敛.



函数项级数的一致收敛判别方法

定理9 (Weierstrass判别法，或优级数判别法)

设函数项级数$\sum u_n(x)$定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收敛的正项级数, 若对一切 $x \in D$, 有

$$|u_n(x)| \le M_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{5}$$

则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

称 $\sum M_n$ 为$\sum u_n(x)$ 的优级数.

证 由假设正项级数 $\sum M_n$ 收敛, 根据数项级数的柯西准则, 任给正数 ε, 存在某正整数N, 使得当 $n > N$ 及任何正整数 p, 有

$$|M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}|=M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon.$$

又由(5)式对一切 $x \in D$ 有

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\le|u_{n+1}(x)|+\cdots+|u_{n+p}(x)|$$

$$\le M_{n+1}+\cdots+M_{n+p}<\varepsilon.$$

根据函数项级数一致收敛的柯西准则, 级数$\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

例9 函数项级数 $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$, $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$

在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. 因为对一切$x \in (-\infty, +\infty)$有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

而正项级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是收敛的.

$$\sum u_n(x)v_n(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \cdots + u_n(x)v_n(x) + \cdots \quad (6)$$

定理10（Abel判别法） 设

(i) $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛;

(ii) 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的;

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即对一切 $x \in I$ 和正整数 n, 存在正数 M, 使得 $|v_n(x)| \le M$,

则级数(6)在 I 上一致收敛.

$$\sum u_n(x)v_n(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \cdots + u_n(x)v_n(x) + \cdots \quad (6)$$

定理11 (Dirichlet判别法) 设

(i) $\sum u_n(x)$ 的部分和数列

$$U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

在 I 上一致有界;

(ii) 对于每一个 $x \in I, \{v_n(x)\}$ 是单调的;

(iii)在 I 上 $v_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty)$,

则级数(6)在I上一致收敛.

例10 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+n)^n}{n^{n+1}}$ 在[0, 1]上一致收敛.

证 记 $u_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}, v_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, 于是 $\sum u_n$ 在[0, 1]上一致收敛, $v_n(x)$ 在[0,1]上单调增且一致有界, 由Abel判别法就能得到结果.

例11 若数列$\{a_n\}$单调且收敛于零, 则级数

$$\sum a_n \cos nx \quad 和 \quad \sum a_n \sin nx$$

在$[\alpha, 2\pi-\alpha](0<\alpha<\pi)$上一致收敛.

证 在$x\in[\alpha, 2\pi-\alpha]$上有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \le \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

所以级数$\sum \cos nx$的部分和数列在$[\alpha, 2\pi-\alpha]$上一致有界.

令 $u_n(x)=\cos nx, v_n(x)=a_n,$

则由 Dirichlet 判别法可得级数 $\sum a_n \cos nx$ 在 $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ 上一致收敛.

同理可证，级数 $\sum a_n \sin nx$ 在 $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ $(0<\alpha<\pi)$ 上一致收敛.

注 对于例11中的级数, 只要$\{a_n\}$单调且收敛于零, 级数就在不包含 $2k\pi\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的任何闭区间上一致收敛.

例12 设 $u_1(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积,

$$u_{n+1}(x)=\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots,$$

证明 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 因为 $u_1(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以存在 $M>0$, 使

得 $|u_1(x)|\le M$, 于是有

$$|u_2(x)|\le\int_a^x|u_1(t)|\mathrm{d}t\le M(x-a),$$

$$|u_3(x)|\le\int_a^x|u_2(t)|\mathrm{d}t\le\int_a^x M(x-a)\mathrm{d}t\le M\frac{(x-a)^2}{2!},$$

由数学归纳法容易得到

由数学归纳法容易得到

$$|u_{n+1}(x)| \le \int_a^x |u_n(t)|\,\mathrm{d}t \le M\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (t-a)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$\le M\frac{(x-a)^n}{n!} \le M\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

因为数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\frac{(b-a)^n}{n!}$ 收敛, 所以根据优级数判别法知原级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

四、一致收敛函数项级数的性质

下面讨论定义在区间 $[a,b]$ 上函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

的连续性、逐项求积与逐项求导的性质，这些性质可根据函数列的相应性质推出.

定理12(极限交换定理、连续性定理)

1. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$U^\circ(x_0)$一致收敛, 且对每个n, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)=a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\lim_{x\to x_0}u_n(x)=\sum a_n. \qquad (2)$$

2. 若$\sum u_n(x)$区间$[a,b]$上一致收敛, 且每一项都连续, 则其和函数在$[a,b]$上也连续.

定理13 (逐项求积定理) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n(x)$都连续, 则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sum u_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

定理14 (逐项求导定理) 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一项都有连续的导函数, $x_0\in[a,b]$为 $\sum u_n(x)$ 的收敛点, 且$\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$上一致收敛, 则

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum u_n(x)\Big). \tag{4}$$

定理 13 和 14 指出，在一致收敛条件下，逐项求积或求导后求和等于求和后再求积或求导.

注　本节六个定理的意义不只是检验函数列或函数项级数是否满足关系式 (2)~(4)，更重要的是根据定理的条件，即使没有求出极限函数或和函数，也能由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质.

例13. 设 $u_n(x)=\dfrac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$. $n=1,2,\cdots$

证明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 并讨论和函数在 $[0,1]$ 上的连续性、可积性与可微性.

证: 对每一个 n, 易见 $u_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上的增函数, 故

有 $$u_n(x)\le u_n(1)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2),\quad n=1,2,\cdots.$$

又当 $t\ge 1$ 时, 有不等式 $\ln(1+t^2)<t$, 所以

$$u_n(x) \le \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2) < \frac{1}{n^3}\cdot n = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

收敛级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 是 $\sum u_n(x)$ 的优级数, 因此级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

由于每一个 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 根据定理12与定理13知 $\sum u_n(x)$ 的和函数 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且可积.

又由

$$u_n'(x)=\frac{2x}{n(1+n^2x^2)}\le\frac{2x}{n\cdot 2nx}=\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots,$$

即$\sum\frac{1}{n^2}$也是$\sum u_n'(x)$的优级数, 故$\sum u_n'(x)$在 [0, 1] 上一致收敛. 再由 $u_n'(x)$ 在[0,1]上连续，且$\sum u_n(x)$ 在 $x=0$ 处收敛， 由定理14知 $S(x)$ 在[0, 1]上可微.

例14. 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，计算 $\lim_{x\to 1}S(x)$.

解：在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数. 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\le\frac{|x|^n}{3^n}\le\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

故由Weierstrass判别法知级数在[-2,2]上一致收敛，

从而 $f(x)$ 是 [-2,2]上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1}S(x)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

例15. 确定函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛域并讨论和函数的连续性.

解: (i) 求收敛域.　因为

$$\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)\right|^n}=\left|x+\frac{1}{n}\right|\to|x|\quad(n\to\infty)$$

所以由推广的根式判别法知:

当 $|x|<1$ 时级数收敛, $|x|>1$ 时级数发散.

$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$的一般项$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$

$x=-1$时，级数的一般项$\left(-1+\frac{1}{n}\right)^n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \not\to 0$

所以$x=\pm 1$ 时级数发散．因此这个级数的收敛域为$(-1,1)$.

(ii) 判断和函数的连续性：

设在$(-1,1)$上$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$,

因 $\sup\limits_{x\in(-1,1)}|u_n(x)-0| = \sup\limits_{x\in(-1,1)}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n \to e\neq 0(n\to\infty)$,

故 $u_n(x)$在$(-1,1)$ 上不一致收敛于0. 这说明级数

在$(-1,1)$上不一致收敛. 从而不能用连续性定理得出

和函数在 $(-1,1)$ 上连续. 是否和函数在 $(-1,1)$ 不连续?

下面继续讨论.

对 $\forall x_0\in(-1,1)$, $\exists 0<c<1$, 使得 $x_0\in(-c,c)$, 当

$|x|\le c$ 时, 有

$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right| \le \left(c+\frac{1}{n}\right)^n$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c+\frac{1}{n}\right)^n$收敛, 根据优级数判别法, 知$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$在$[-c, c]$上一致收敛,

根据函数项级数连续性定理，得到和函数 $S(x)$ 在 $[-c, c]$ 上连续, 于是$S(x)$在$x_0 \in (-c, c)$连续．由 x_0 在 $(-1, 1)$ 上的任意性, 推得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$的和函数 $S(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上连续.

注 上述利用开区间的“**内闭**”一致收敛来得出和函数连续性方法是函数项级数中一个典型的解题方法，请读者关注.

同类题型：

证明：函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，且有连续的各阶导数.

例16. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$.

(1) 证明 $f(x)$在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续；(2) 计算 $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

证明：(1) 以为 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 有 $\left|\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$,

且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，由优级数判别法，级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛.

又$u_n(x)=\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续,

所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续.

(2) 由定理13(逐项求积)，有

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx=\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}dx \quad =\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left|\cos\frac{x}{2^n}\right|_0^{\pi/2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad =-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \ln \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n}}\sin\frac{\pi}{2^{n}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = -\ln\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\bullet\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \ln\frac{\pi}{2}.$$