华中科技大学 2018 级微积分（一）第二学期期中考题及答案

一、基本计算题（每题 6 分，共 60 分）

1. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解.

$y=\sqrt{1+x}$.

2. 设 $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解，求此微分方程.

所求微分方程为 $y''-2y'+5y=0$.

3. 已知点 $A(3,-3,1)$ 与点 $B(3,-2,2)$. 若 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$，求矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

$\cos\alpha=\frac{3}{5}, \cos\beta=0, \cos\gamma=\frac{4}{5}$.

4. 判断直线 $L_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ 与直线 $L_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-6}{5}$ 是否共面.

因此两条直线为异面直线.

5. 讨论二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x+y}$ 的存在性. 若极限存在求其值，若不存在说明理由.

因此二重极限不存在.

6. 已知平面曲线由方程 $x^2+y^3+\ln(x+y)-3=0$ 确定，求曲线在点 $(2,-1)$ 处的法线方程.

所求的法线方程为 $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{4}$，即 $4x-5y-13=0$.

7. 设 $\varphi(u,v)$ 有连续偏导数，方程 $\varphi(cx-az, cy-bz)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 证明 $az_x+bz_y=c$.

$$z_x=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v}, z_y=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$$

8. 计算 $I=\int_0^2 dy\int_0^2 \max\{xy,1\}dx$.

$=\frac{19}{4}+\ln 2$.

9. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, |x|\ge|y|\}$（由 $x^2+y^2=4$ 和 $y^2=x^2$ 围成的包含 x 轴的区域）.

$$I = 4\frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^2 = \frac{\pi\sin 4}{2}.$$

10. 计算三重积分 $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中区域 V 由曲面 $z=0, z=4-x^2-y^2$ 围成.

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2(4-r^2)dr = \frac{128\pi}{15}.$$

二、综合计算题（每题 **8** 分，共 **40** 分）

11. 求解微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + e^{3x}$.

$$y = Y + y_1 + y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + xe^{2x}.$$

12. 求函数 $u = 2x + y^2 z$ 在点 $(1,-1,-1)$ 沿椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在该点的外法线方向的方向导数.

所求方向导数为 $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \overrightarrow{n^0} = -\frac{5}{\sqrt{14}}$.

13. 求函数 $u = x + 3z$ 在曲线 $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 上的最大值与最小值.

u 的最大值为 2，在 $x=y=1$ 时取得；u 的最大值为 -6，在 $x=y=-1$ 时取得.

14 求积分 $I = \iiint\limits_V x^2\,dxdydz$，其中区域 $V: x^2+y^2+z^2 \le 2z$.

$$= \frac{32\pi}{5}\cdot\frac{1}{24} = \frac{4\pi}{15}.$$

15 设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

（1）讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性；（2） 求 $f_{xy}(0,0)$.

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

所以 $f_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = 1.$