4.1.3 隐函数及参数方程所表示的函数的微分法

一、隐函数的微分法

二、参数方程所表示的函数的微分法

一、隐函数的微分法

定义 由方程$F(x,y)=0$所确定的函数$y=y(x)$称为隐函数.

$y=f(x)$形式称为显函数.

$F(x,y)=0 \longrightarrow y=f(x)$ 隐函数的显化

例如, $x-y^3-1=0$ 可确定显函数 $y=\sqrt[3]{1-x}$

$y^5+2y-x-3x^7=0$ 可确定 y 是 x 的函数,

但此隐函数不能显化.

问题1:隐函数是否可导?

问题2:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法:

方程两边对x求导, 求导时将 y 看成中间变量, 再解出dy/dx.

例1　求由方程$e^y + xy - e = 0$所确定的隐函数y的导数$\frac{dy}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对x求导,将y看成中间变量

$$e^y \frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+e^y}$$

又 $x=0$时, $y=1$

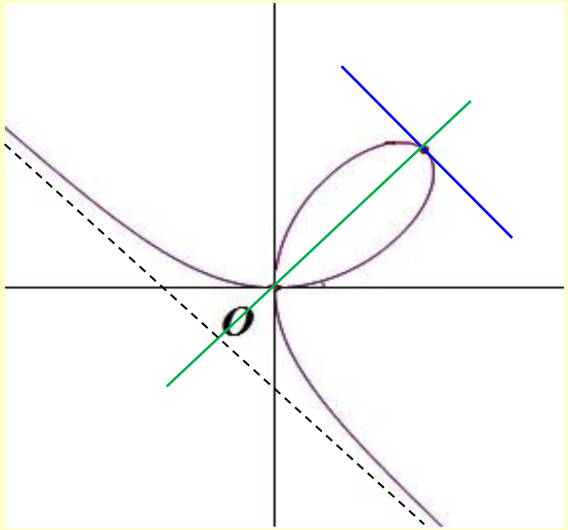
$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{1}{e}$$

例2. 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$,求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程,并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导,得

$$3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$



笛卡尔叶形线

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为$y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$, 即 $y=x$, 显然通过原点.

例3 设$f(x)$可导，且$f'(x)\neq 1, y=y(x)$由$y=f(x+y)$确定，求y'.

解 由$y=f(x+y)$两边对x求导得

$$y'=f'(x+y)(1+y')$$

$$\Rightarrow y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}=\frac{1}{1-f'(x+y)}-1$$

二、由参数方程所确定的函数的微分法

1 由参数方程确定的函数的定义

若参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系,

称此为由参数方程所确定的函数.

2 由参数方程所确定的函数的求导数的方法

消参数法　　例如 $\begin{cases} x=1+t|t| \\ y=1+t^4+2t|t| \end{cases}$

$$\Rightarrow y=x^2 \quad \therefore y'=2x$$

消参困难或无法消参的求导可用复合函数求导方法

1. 由参数方程所确定的函数的一阶导数

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

$$y \xrightarrow{\psi} t \xrightarrow{\varphi^{-1}} x$$

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore\ y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi'(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例4. 求椭圆$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{4}$处的切线方程.

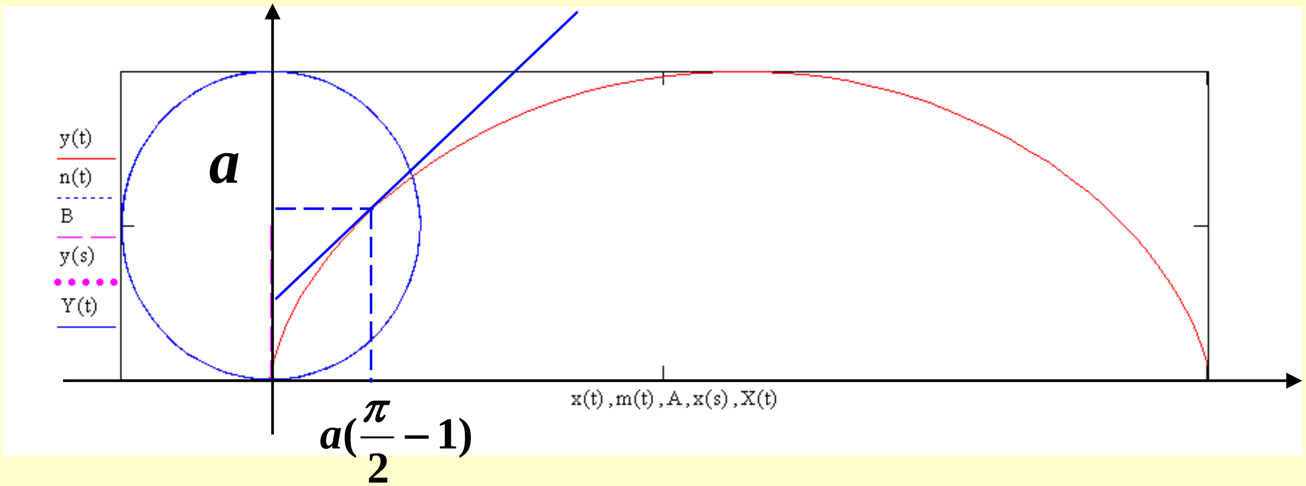
解: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t}$ $\quad \therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\dfrac{b}{a}$

当$t = \dfrac{\pi}{4}$时, $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}b$.

所求切线方程为 $y - \dfrac{\sqrt{2}}{2}b = -\dfrac{b}{a}\left(x - a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

即 $ay - bx = \sqrt{2}ab$

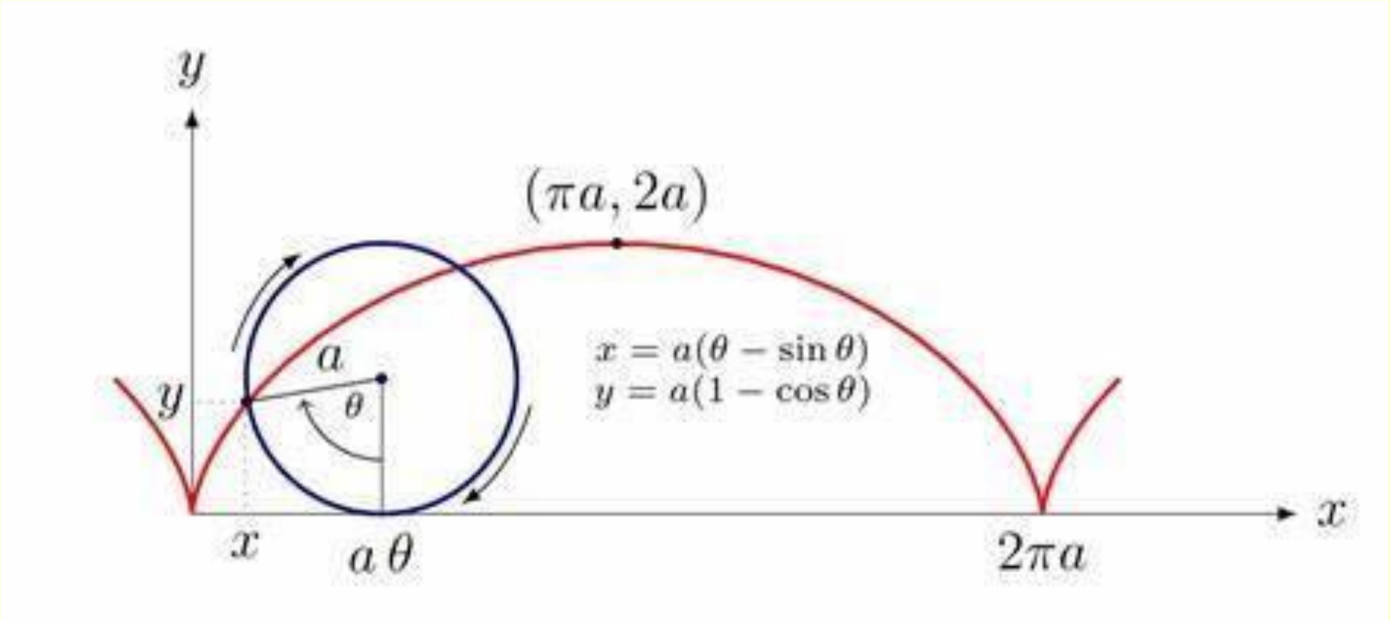
例5. 求摆线：$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程



解：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\dfrac{t}{2}$，$k = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cot\dfrac{\pi}{4} = 1,$

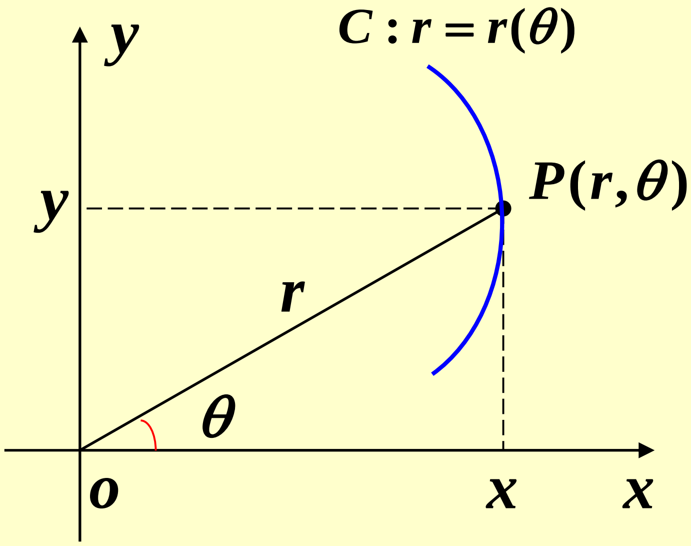
又 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1), y = a,$

$\therefore$ 切线方程：$y - a = x - a(\dfrac{\pi}{2} - 1).$


y
$(\pi a, 2a)$
a
y
θ
$x = a(\theta - \sin\theta)$
$y = a(1 - \cos\theta)$
x
x
$a\,\theta$
$2\pi a$

二、由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的导数

极坐标系，如图



r – 极径，θ – 极角

与直角坐标系的关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

极坐标系中曲线 C 的方程为：$r=r(\theta)$

若将极坐标系中曲线 C 的方程 $r=r(\theta)$ 表示为直角坐标系中的方程 $C: y=f(x)$，则可用参数方程表示：

$$C:\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

极坐标系中常见曲线的方程有：

1. 圆：$r = a, r = a\cos\theta, r = a\sin\theta$（$a$为圆的半径）

2. 对数螺线：$r = ae^{\theta}$

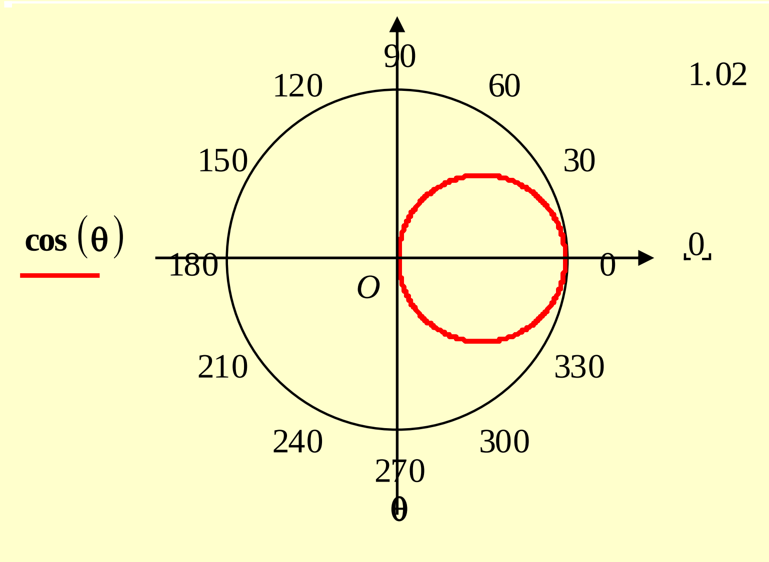
3. 阿基米德螺线：$r = a\theta$

4. 心形线：$r = a(1 \pm \cos\theta),\ r = a(1 \pm \sin\theta)$

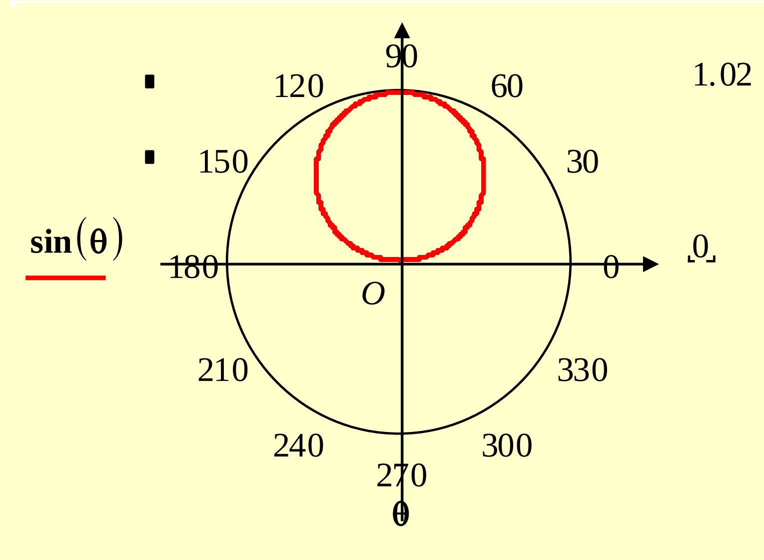
5. 三叶玫瑰线：$r = a\sin 3\theta, r = a\cos 3\theta$

6. 四叶玫瑰线：$r = a\sin 2\theta, r = a\cos 2\theta$

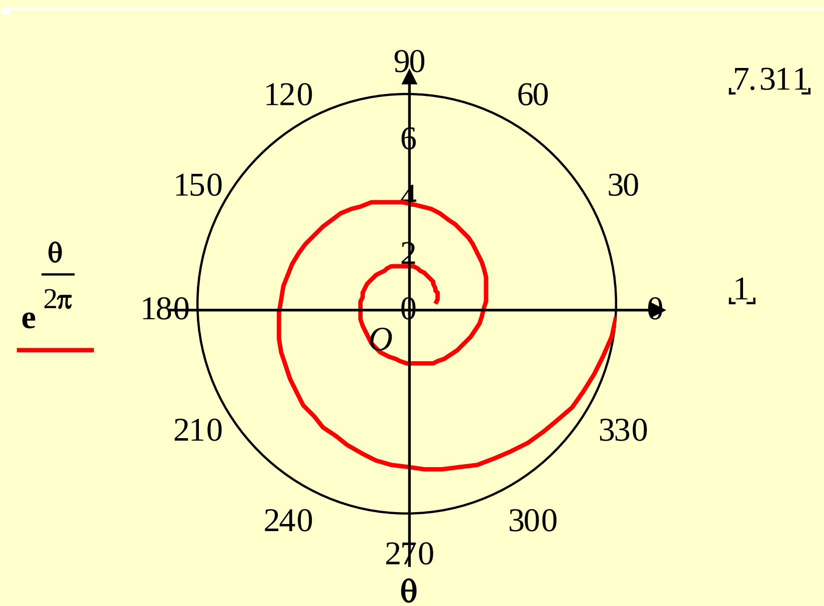
7. 双扭线：$r^2 = a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2\sin 2\theta$



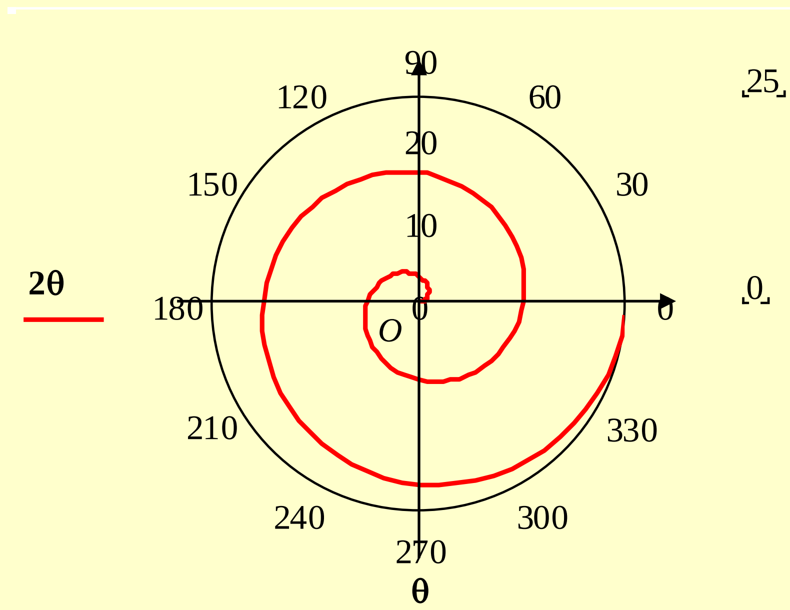
圆 $r = a\cos\theta$



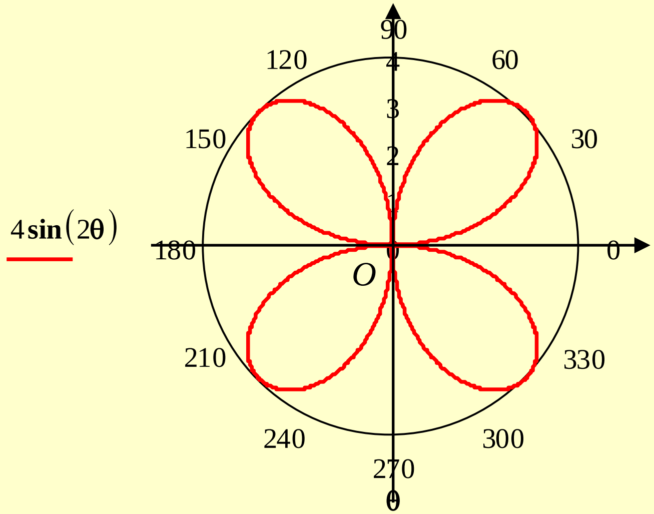
圆 $r = a\sin\theta$



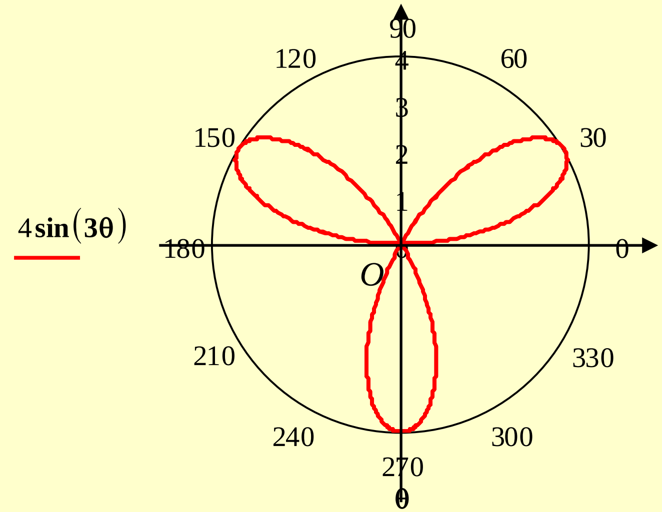
对数螺线 $r = ae^{\theta}$



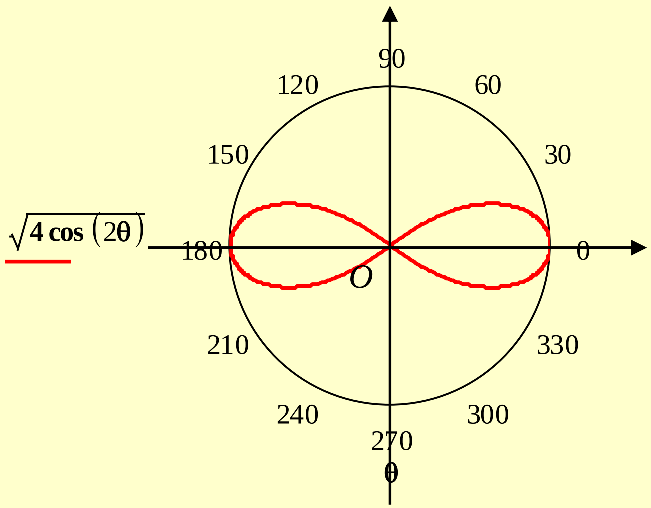
阿基米德螺线 $r = a\theta$



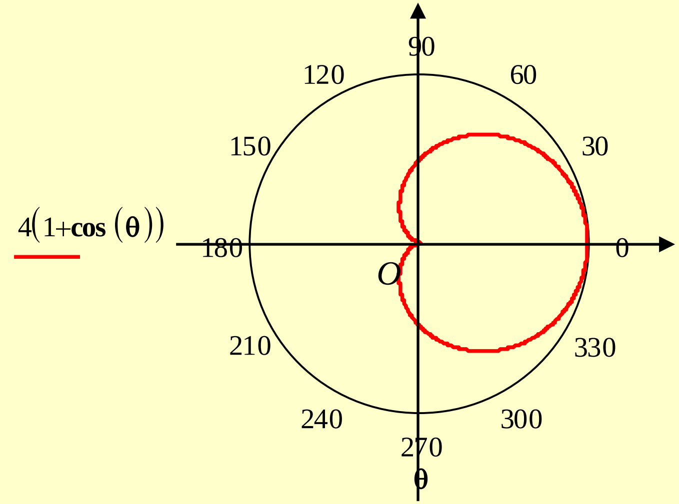
四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$



双扭线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$



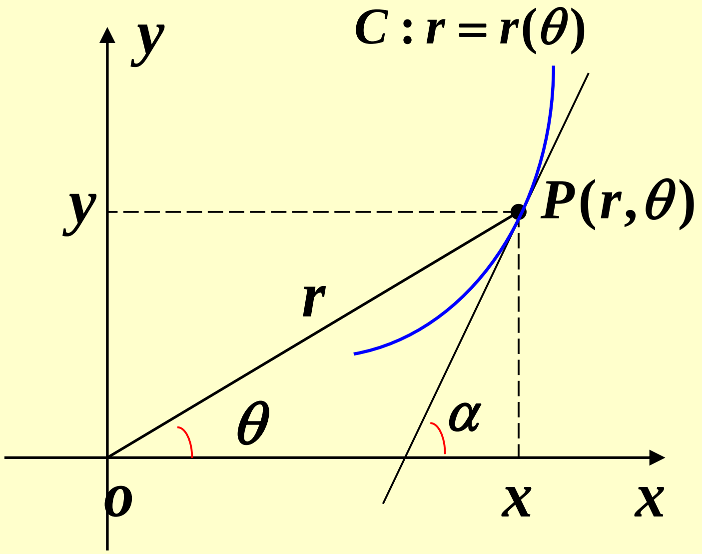
心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$

曲线C的方程：

在直角坐标系中 在极坐标系中

$$y = f(x) \longleftrightarrow r = r(\theta)$$

转换关系：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



设在极坐标系中函数(曲线)为：

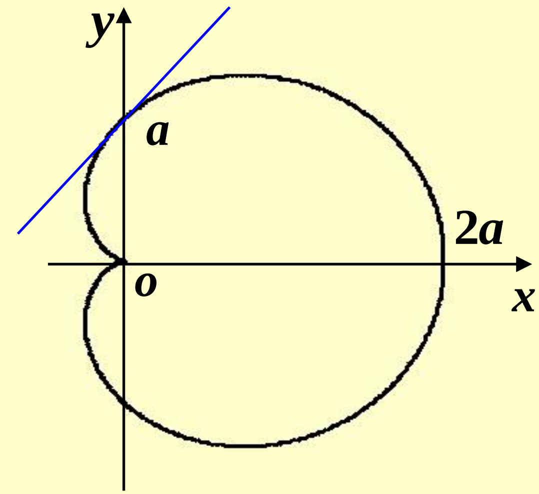
$$r = r(\theta)$$

化为参数方程：$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ (θ为参数)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{[r(\theta)\sin\theta]'_\theta}{[r(\theta)\cos\theta]'_\theta} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}$$

例6. 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 心形线的参数方程为



$$\begin{cases} x = a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

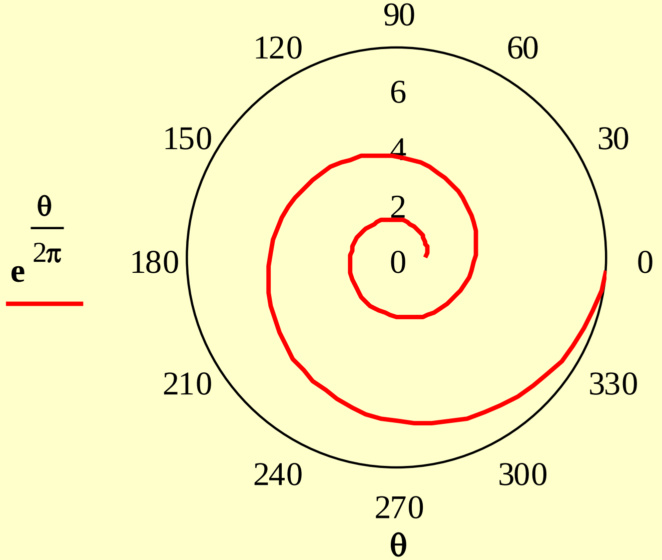
$$\frac{dy}{dx} = \frac{[a(1+\cos\theta)\sin\theta]'_\theta}{[a(1+\cos\theta)\cos\theta]'_\theta} = -\frac{\cos\theta+\cos 2\theta}{\sin\theta+\sin 2\theta}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$x = 0, y = a, k = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1$

$\therefore$ 切线方程为: $y - a = x$

例7. 设$y = y(x)$由极坐标方程$r = e^{\theta}$确定，求y'_x.

解: $\begin{cases} x = e^{\theta}\cos\theta \\ y = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$



对数螺线

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{(e^{\theta}\sin\theta)'}{(e^{\theta}\cos\theta)'}$$

$$= \frac{e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta - e^{\theta}\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

小 结

隐函数求导法则：直接对方程两边求导；

对数求导法：对方程两边取对数, 按隐函数的求导法则求导；

参数方程求导：　实质上是利用复合函数求导法则；

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

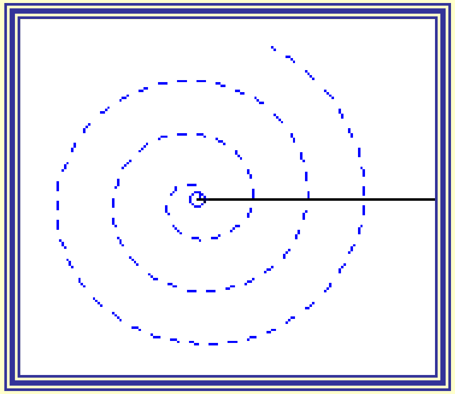
$$r = r(\theta) \qquad \begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \ (\theta\text{为参数})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{[r(\theta)\sin\theta]'_\theta}{[r(\theta)\cos\theta]'_\theta}$$

思考与练习

1. 求螺线 $r=\theta$ 在对应于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的点处的切线方程.

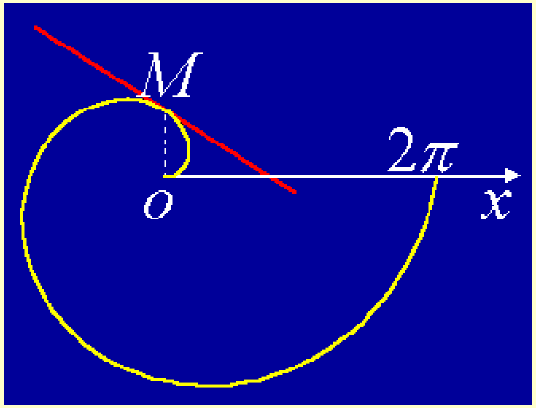
解：　化为参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时对应点 $M(0,\frac{\pi}{2})$,

$$\text{斜率 } k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$



$\therefore$ 切线方程为 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

2. 设 $y = \underbrace{(\sin x)^{\tan x}}_{y_1} + \underbrace{\frac{x}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{2-x}{(2+x)^2}}}_{y_2}$，求 y'.

提示: 分别用对数微分法求 y_1' , y_2' .

答案:

$$y' = y_1' + y_2'$$

$$= (\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x \cdot \ln\sin x + 1)$$

$$+ \frac{1}{x^{\ln x}}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(2+x)^2}}\left[1 - 2\ln x - \frac{x}{3(2-x)} - \frac{2x}{3(2+x)}\right]$$

3. 设 $y = x + e^x$，求其反函数的导数 .

解: 方法**1** $\because \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + e^x$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{1+e^x}$$

方法**2** 等式两边同时对 y 求导

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + e^x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{1+e^x}$$

4. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

解： 方程组两边同时对 t 求导, 得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t + 2 \\ e^y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \sin t + e^y \cos t - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{e^y \cos t}{1 - e^y \sin t}$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0} = \left.\frac{e^y \cos t}{(1 - e^y \sin t)(6t + 2)}\right|_{t=0} = \frac{e}{2}$$