4.3 微分学基本定理及其应用

中值定理
- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理 $\xrightarrow{\text{推广}}$ 泰勒公式
- 柯西中值定理

应用
- 研究函数性质及曲线性态
- 利用导数解决实际问题

4.3.1 微分中值定理

一、函数的极值与Fermat定理

二、罗尔(Rolle)定理

三、拉格朗日（Lagrange）中值定理

四、柯西（Cauchy）中值定理

一、函数的极值及与Fermat定理

定义: 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义, $x_0\in(a,b)$,

若存在 x_0 的一个邻域, 在其中当 $x\neq x_0$ 时,

(1) $f(x)\le f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点,

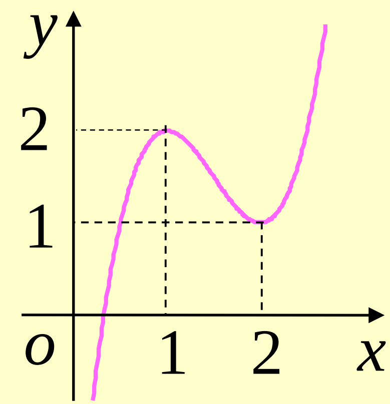
称 $f(x_0)$ 为函数的极大值;

(2) $f(x)\ge f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点,

称 $f(x_0)$ 为函数的极小值.

极大点与极小点统称为极值点.

例如 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

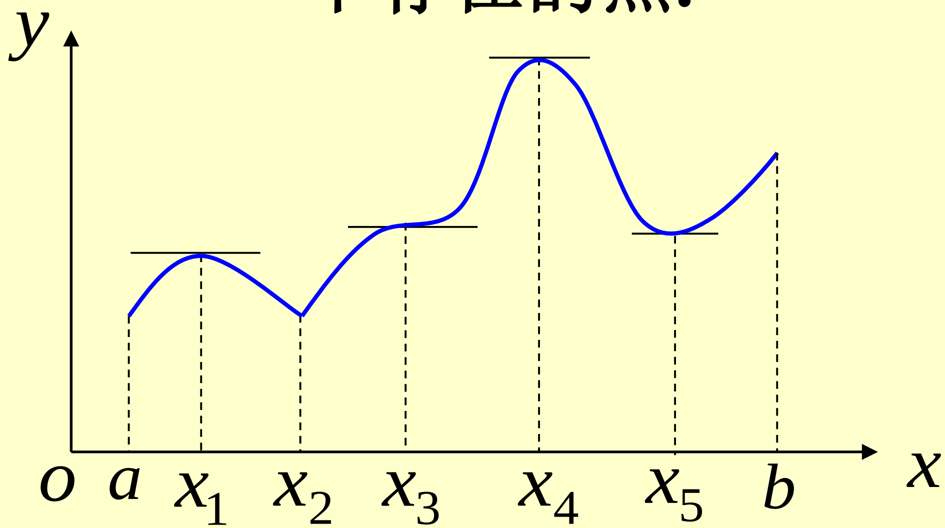


$x=1$ 为极大点，$f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小点，$f(2)=1$ 是极小值

注意: 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数, 极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大点

x_2, x_5 为极小点

x_3 不是极值点

定理 (Fermat定理, 极值的必要条件)

设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且在点 x_0 可导, 如果 x_0 是 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.

证: 设$f(x)$在x_0取极大值，则只要$x_0+\Delta x\in N(x_0,\delta)$,

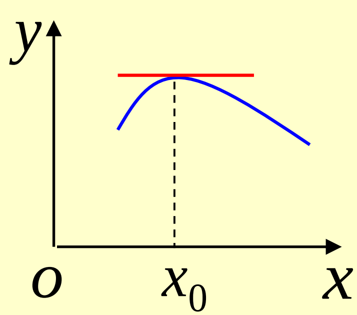
就有$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$, 即 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$,

$$\Rightarrow f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0.$$

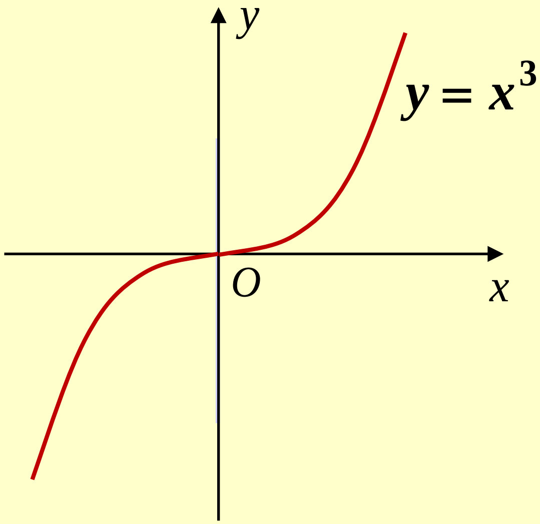
$$\Rightarrow f'(x_0)=0.$$

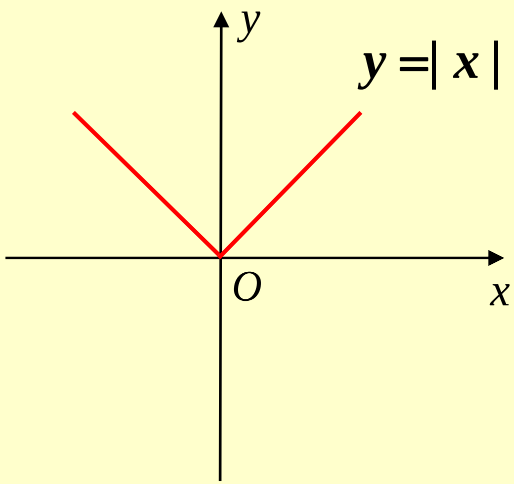
定理的几何意义：如果f 在极值 $x=x_0$ 处可导，则该点处的切线平行于 x 轴.



称满足方程 $f'(x)=0$ 的点为 f 的驻点(稳定点).

注　驻点不一定都是极值点，如 $x=0$ 是 $y=x^3$ 的驻点，但不是极值点.　反之, 极值点也不一定都是驻点，如 $x=0$ 是 $y=|x|$ 的极小值点 , 但不是驻点，因为它在 $x=0$ 处不可导 .





二、罗尔(*Rolle*)定理

罗尔(*Rolle*)定理　如果函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续;

(2) $f(x)$在开区间(a,b)内可导;

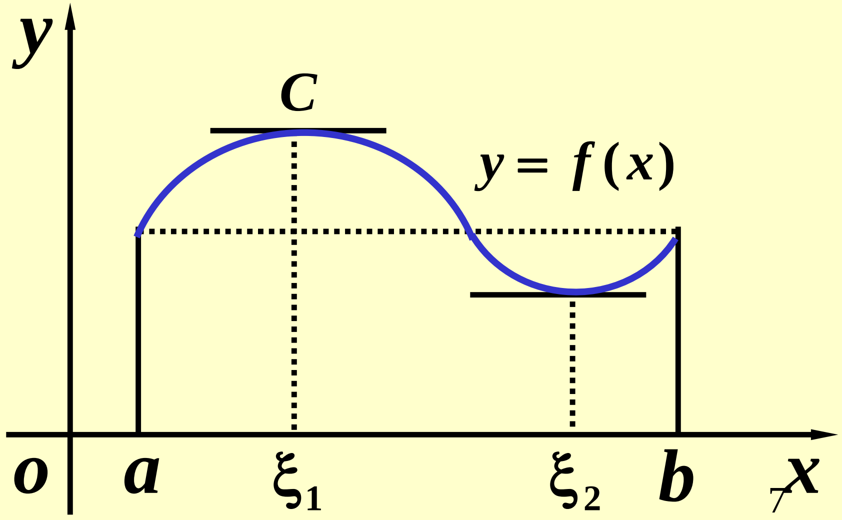
(3) $f(a)=f(b)$.

则在(a,b)内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得

$f'(\xi)=0$.

几何解释

在曲线弧 AB上至少有一点C,在该点处的切线是水平的.



证明: $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$. 则 $f(x)=M$，即 $f(x)$ 为常函数.

由此得 $f'(x)=0$. $\forall\xi\in(a,b)$，都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M\neq m$. $\because f(a)=f(b)$,

因此，最大值和最小值不可能同时在区间端点取得，

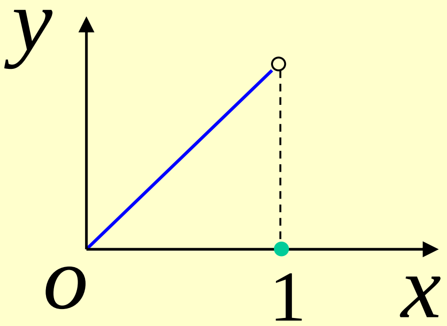
不妨设 $M\neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$.

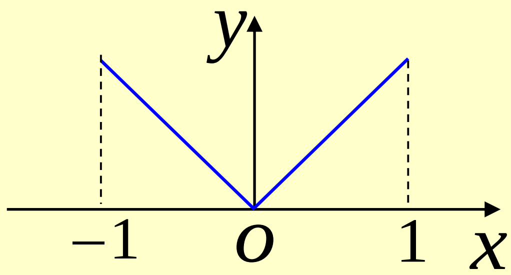
ξ也是极值点,由 ② 及Fermat 定理 $\Rightarrow f'(\xi)=0$.

注1:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

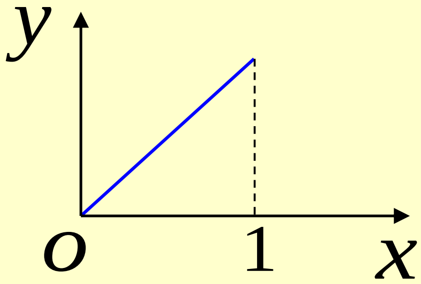
例如 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



$f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$



$f(x)=x,\ x\in[0,1]$

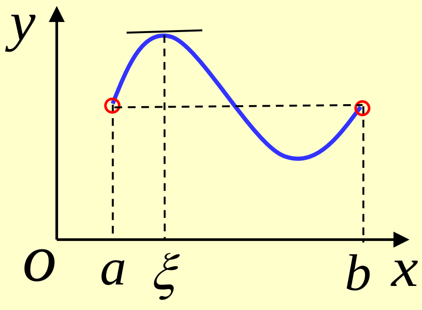


注2：定理条件只是充分的. 本定理可推广为

$y = f(x)$ 在 $(\,a\,,\,b\,)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

$\Longrightarrow$ 在$(\,a\,,\,b\,)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) = 0.$



证明提示: 设 $F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a \\ f(x), & a < x < b \\ f(b^-), & x = b \end{cases}$

证 $F(x)$ 在 $[a\,,\,b]$ 上满足罗尔定理 .

例1. 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1 的正实根 .

证: 1) 存在性 .

设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 [0 , 1] 连续 , 且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由介值定理知存在 $x_0\in(0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0 .

2) 唯一性 .

假设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$, 使 $f(x_1)=0$, $\because f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件 , $\therefore$ 在 x_0, x_1 之间至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0,\ x\in(0,1)$, 矛盾, 故假设不真!

例2. 设 $f(x)\in C[0,\pi]$，且在 $(0,\pi)$ 内可导，证明至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

分析：由结论可知，只需证 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$，

即 $\left[f(x)\sin x\right]'\Big|_{x=\xi}=0$

证：作辅助函数 $F(x)=f(x)\sin x$，

则 $F(x)\in C[0,\pi]$，且在 $(0,\pi)$ 内可导，又

$$F(0)=F(\pi)=0.$$

由罗尔定理，$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得 $F'(\xi)=0$

$\Rightarrow f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$,

$\Rightarrow f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

例3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=b$, $f(b)=a$, 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证: 令 $\varphi(x)=xf(x)$. 由题意知， $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又因为 $f(a)=b, f(b)=a,$

所以 $\varphi(a)=af(a)=ab=bf(b)=\varphi(b),$

于是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 *Rolle* 定理的条件 ,

由 *Rolle* 定理，存在 $\xi\in(a,b)$, $\varphi'(\xi)=0$,

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 \quad \Rightarrow f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

例4. 若 $f(x)$可导, 试证在其两个零点间一定有 $f(x)+f'(x)$ 的零点.

提示: 设 $f(x_1)=f(x_2)=0,\ x_1<x_2,$

欲证: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

只要证 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

亦即 $[e^{x}f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$

作辅助函数 $F(x)=e^{x}f(x)$, 验证 $F(x)$在$[x_1,x_2]$上满足罗尔定理条件.

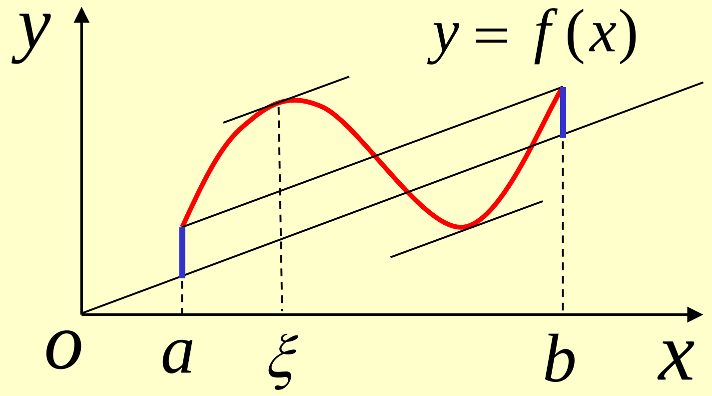
三、拉格朗日(*Lagrange*)中值定理

***Lagrange*中值定理：** 如果函数 $f(x)$ 满足

⑴ 在闭区间$[a,b]$上连续；

⑵ 在开区间(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$$

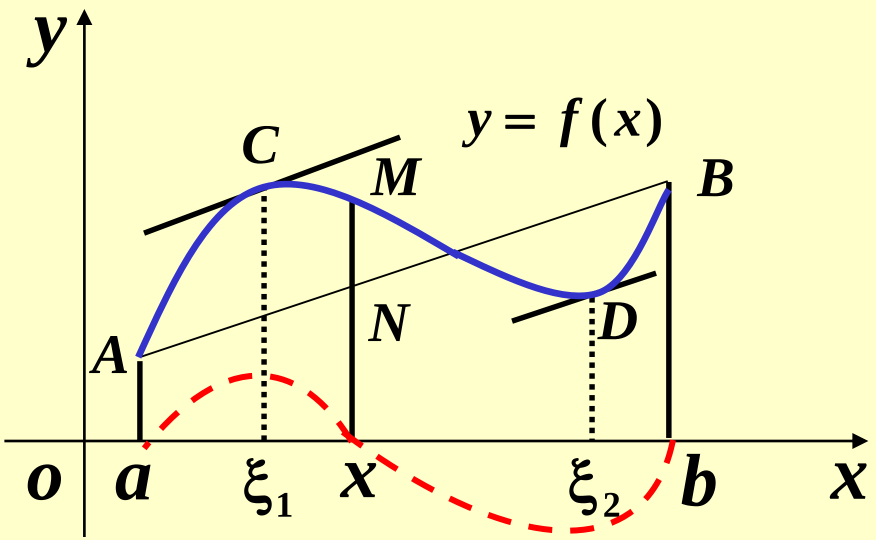


注: 与罗尔定理相比，条件少了 $f(a)=f(b)$.

结论亦可写成 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

几何解释：

在曲线弧 AB 上至少有一点 C，在该点处的切线平行于弦 AB.



分析：条件与罗尔定理的的条件相差 $f(a)=f(b)$.

弦AB方程为 $y=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$f(x)$ 减去弦 AB 在点 x 处的纵坐标，

得到一个关于 x 的函数，

此函数在 a,b 两点的函数值相等 .

证法一：作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)].$$

容易验证 $\varphi(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件，因此

在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\varphi'(\xi) = 0.$

即 $$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0,$$

或 $$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

注意：*Lagrange* 中值定理精确地表达了函数在一个区间上的增量与函数在这区间内某点处的导数之间的关系.

证法二：由于 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 等价于

$$\{[f(b)-f(a)]x\}'\big|_{x=\xi}-[(b-a)f(x)]'\big|_{x=\xi}=0$$

即等价于 $\{[f(b)-f(a)]x-[(b-a)f(x)]\}'\big|_{x=\xi}=0.$

因此构造辅助函数

$$\varphi(x)=[f(b)-f(a)]x-[(b-a)f(x)].$$

显然，$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导, 并且

$\varphi(a)=\varphi(b)=af(b)-bf(a)$. 满足 *Rolle* 定理的条件,

由 *Rolle* 定理可证得结论.

注：*Lagrange* 微分中值公式的其它形式:

① $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b).$

② 将ξ表为$\xi=a+\theta(b-a),\ 0<\theta=\dfrac{\xi-a}{b-a}<1$，即:

$\exists\xi\in(a,b)\Leftrightarrow\exists\theta\in(0,1)$，有 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$

③ 若$a=x$，$b=x+\Delta x$，$b-a=\Delta x$，则

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta<1.$$

拉格朗日中值定理又称有限增量定理.

④ 在定理条件下，$\forall x_1,x_2\in[a,b]$，当$x_1<x_2$ 或$x_2<x_1$时，有

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，$\xi$位于$x_1$与$x_2$之间

例5. 证明当$x>0$时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

证：设 $f(x)=\ln(1+x)$,

$f(x)$在$[0,x]$上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，

$$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ (0<\xi<x),$$

$\because f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，由上式得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\xi}$,

又$\because 0<\xi<x \Longrightarrow 1<1+\xi<1+x \Longrightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1,$

$\therefore \dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x,$ 即 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$

注：本题在 $-1<x<0$ 时也成立。

Lagrange中值定理的推论:

推论1. 若$f(x)$在(a,b)内有$f'(x)\equiv 0$，则

$$f(x)=C，\ C=const，\ \forall x\in(a,b).$$

即导数恒为零的函数必是常数函数.

推论2. 若对$\forall x\in(a,b)$有 $f'(x)=g'(x)$，则

$$f(x)=g(x)+C，\ C=const，\ \forall x\in(a,b).$$

证明: $(f(x)-g(x))'=0,\ (\forall x\in(a,b)).$

例6. 证明等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1].$

证: 设 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则在 $(-1, 1)$ 上

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0$$

由推论可知 $f(x) = \arcsin x + \arccos x = C$ **(常数)**

令 $x = 0$, 得 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1) = \dfrac{\pi}{2}$, **故所证等式在定义域** $[-1, 1]$ **上成立.**

经验: 欲证 $x \in I$ 时 $f(x)=C$, 只需证在 $\boldsymbol{I}$ 上 $f'(x)\equiv 0$,

且 $\exists\, x_0 \in I$, 使 $f(x_0)=C$.

证明恒等式:

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$2\arctan x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, |x| \ge 1$$

$$3\arccos x - \arccos(3x-4x^2) = \pi, |x| \le \frac{1}{2}$$

导数极限定理: 设 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内连续,

在 $U^{\circ}(x_0)$ 可导, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 可导,且

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x).$

证: 由条件,可设 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=k,$ 从而 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=k.$

任取 $x\in U_+^0(x_0),$ $f(x)$ 在 $[x_0,x]$上满足拉格朗日定理条件,

则存在 $\xi\in(x_0,x),$ 使得 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$

因 $x_0<\xi<x,$ 故 $x\to x_0^+$ 时, $\xi\to x_0^+,$ 进而

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0^+}=\lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi)=k. \qquad (1)$$

同理 $$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0^-}=\lim_{\xi\to x_0^-} f'(\xi)=k. \qquad (2)$$

由(1)、(2)知 $f'(x_0)=k.$

注1： 定理对单侧极限成立. 如：

设 $f(x)$ 在点 x_0 的右邻域 $U_+(x_0)=[x_0,x_0+\delta)$ 内连续，

在 $U^\circ_+(x_0)=(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 存在，则 $f(x)$

在 x_0 处的右导数存在，且 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$.

注2： 定理的条件是充分的. 即：

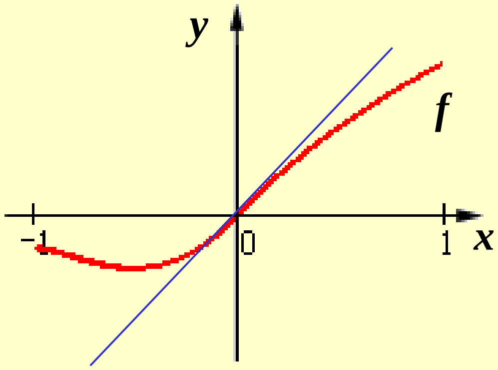
即使 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在，$f(x)$ 在 x_0 任然可能可导.

反例： $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{5}{3}}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cos\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\qquad \lim_{x\to 0} f'(x)\text{不存在}$$

但 $f'(0)=0$. （此例导数极限定理失效，要用定义求导）

例7. 求分分段函数 $f(x)=\begin{cases} x+\sin x^2, x\le 0 \\ \ln(1+x), x>0 \end{cases}$ 的导函数.



解: 因 $f'(x)=\begin{cases} 1+2x\cos x^2, x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}, x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+\sin x^2)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+2x\cos x^2)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+x}=1,$ 得 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1,$

由导数极限定理知, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=1.$

李普希兹(*Lipschitz*)条件:

若$f(x)$在$[a,b]$上有定义，且存在常数，$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|,$$

则称$f(x)$在$[a,b]$上满足*Lipschitz*条件.

推论 4. 若$f(x)$在$[a,b]$上存在有界导数，则

$f(x)$在$[a,b]$上满足*Lipschitz*条件.

证明：$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

例8. 证明：$\left|\arctan x_1 - \arctan x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|, \forall x_1, x_2 \in R$

四、柯西(Cauchy)中值定理

设 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 **[*a* , *b*]** 上连续;

(2) 在开区间 **(*a* , *b*)** 内可导;

(3)在开区间 **(*a* , *b*)** 内 $F'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$.

分析: $F(b)-F(a) = F'(\eta)(b-a) \neq 0 \quad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F'(\xi) - f'(\xi)} = 0$ $\qquad \varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} F(x) - f(x)$$

证: 作辅助函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)-f(x)$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$\varphi(a)=\frac{f(b)F(a)-f(a)F(b)}{F(b)-F(a)}=\varphi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,

使 $$\varphi'(\xi)=0,$$

即 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

证法二：作辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，

且 $\varphi(a)=0=\varphi(b)$

则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$\varphi'(\xi)=0.$

思考：柯西定理的下述证法对吗？

$$\because\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

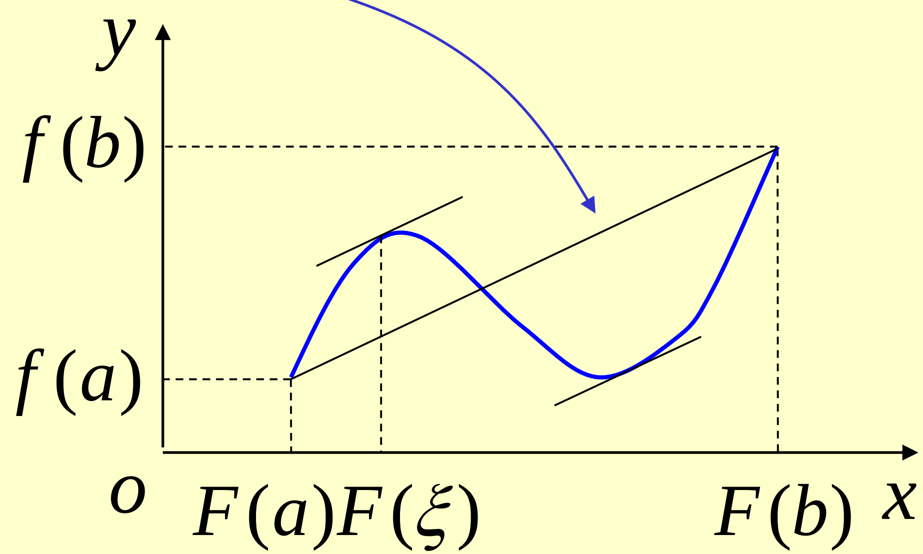
两个ξ不一定相同

上面两式相比即得结论.　　错!

柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率



曲线C: $\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$

注意: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'(t)}{F'(t)}$$

例9. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导, 证明:
至少存在一点$\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证　分析: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\bigg|_{x=\xi}.$$ 设 $g(x)=x^2$,

则 $f(x), g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的条件,

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ, 有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ 即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

例10. 试证至少存在一点 $\xi\in(1,e)$ 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

证: 法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x)=\sin\ln x,\quad F(x)=\ln x$$

则 $f(x)$, $F(x)$ 在 [1 , e] 上满足柯西中值定理条件,

因此 $$\frac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\quad \xi\in(1,e)$$

即 $$\sin 1=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$$

分析:

$$\sin 1=\cos\ln\xi \iff \frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例10. **试证至少存在一点** $\xi \in (1,e)$ **使** $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 *f* (*x*) 在 [1 , *e*] 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1,e)$ **，使**

$$f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$

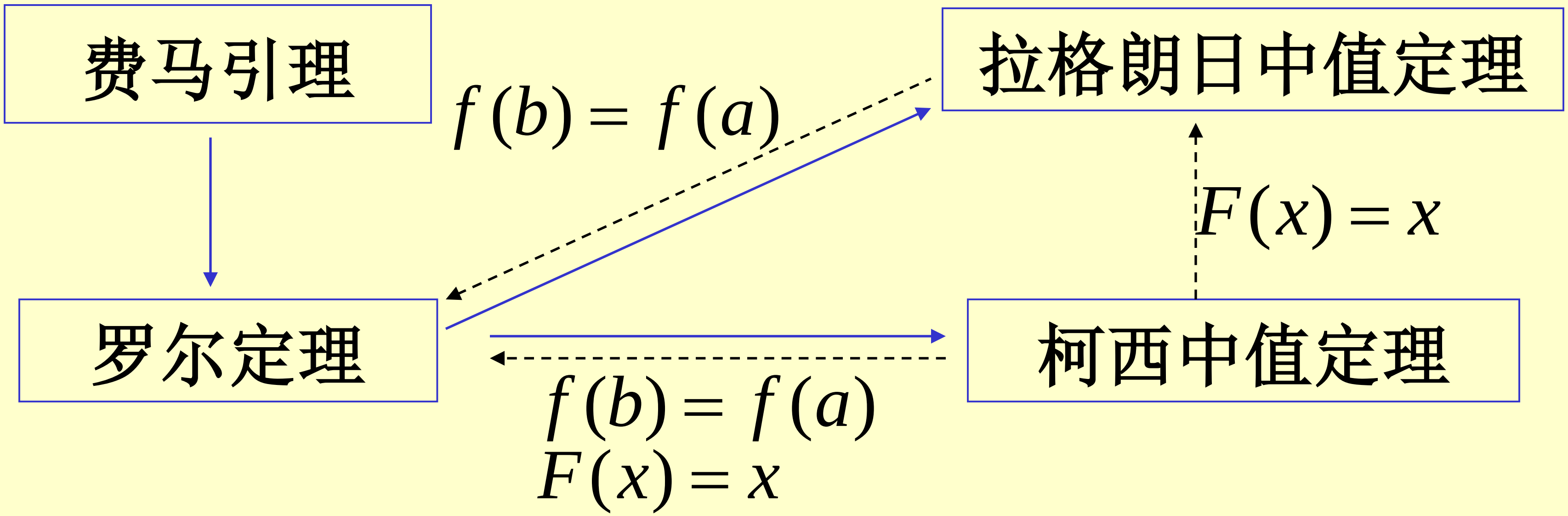
五、小结

罗尔定理、拉格朗日中值定理及柯西中值定理之间的关系;

注意定理成立的条件;

注意利用中值定理证明等式与不等式的步骤.

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键：
利用逆向思维
设辅助函数

思考题

试举例说明拉格朗日中值定理的条件缺一不可.

思考题解答

$$f_1(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 3, & x=1 \end{cases}$$

不满足在闭区间上连续的条件；

$$f_2(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in[a,b] \quad 且\ ab<0$$

不满足在开区间内可微的条件；

以上两个都可说明问题.

练 习 题

一、填空题：

1、函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理，则 $\xi=$________.

2、设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，方程 $f'(x)=0$ 有______________个根，它们分别在区间______________上.

3、罗尔定理与拉格朗日定理之间的关系是____________________.

4、微分中值定理精确地表达函数在一个区间上的________与函数在这区间内某点处的________之间的关系.

5、如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数____________，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

二、试证明对函数$y = px^2 + qx + r$应用拉氏中值定理时所求得的点ξ总是位于区间的正中间 .

三、证明等式$\arcsin\sqrt{1-x^2} + \arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\pi}{2}$

($x \in (0,1)$) .

四、设$a > b > 0$，$n > 1$，证明

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b) .$$

五、证明下列不等式:

1、 $|\arctan a - \arctan b| \le |a-b|$;

2、当$x > 1$时，$e^x > ex$.

六、证明方程$x^5 + x - 1 = 0$只有一个正根 .

七、设函数$y=f(x)$在$x=0$的某邻域内且有n阶导数，且$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$试用柯西中值定理证明：$\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$，（$0<\theta<1$）.

八、设$f(x)$在$[a,b]$内上连续，在(a,b)内可导，若$0<a<b$，则在(a,b)内存在一点ξ，使

$$af(b)-bf(a)=[f(\xi)-\xi f'(\xi)](a-b)$$.

思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 **[1, 2]** 上满足拉格朗日定理

条件, 则中值 $\xi = \underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\boxed{\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3}$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x)=0$

有 $\underline{\ 3\ }$ 个根 , 它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 上.

2. 思考: 在$[0,x]$上对函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 应用拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad \xi\in(0,x)$$

即 $$x^2\sin\frac{1}{x}=(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi})x,\ \ \xi\in(0,x)$$

$\therefore$ $$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x}$$

当 $x\to 0^+$ 时 $\xi\to 0^+$, 因此由上式得 $\cos\frac{1}{\xi}\to 0.$

问是否可由此得出 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}=0$?

不能! 因为 $\xi=\xi(x)$ 是依赖于 x 的一个特殊的函数.

$x\to 0^+$ 表示 x 从右侧以任意方式趋于 **0** .

例题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(1)=0$，

求证存在 $\xi\in(0,1)$，使 $nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

证：设辅助函数 $\varphi(x)=x^n f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，

因此至少存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^n f'(\xi)=0$$

即
$$nf(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

2. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$ 证明对任意 $x_1>0, x_2>0$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

证：不妨设 $0<x_1<x_2$

$\because \quad f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)$

$$=[\,f(x_1+x_2)-f(x_2)\,]-[\,f(x_1)-f(0)\,]$$

$$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1 \quad (x_2<\xi_2<x_1+x_2\,,0<\xi_1<x_1)$$

$$=x_1 f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0 \qquad (\xi_1<\xi<\xi_2)$$

$\therefore \quad f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

费马(Fermat, 1601 – 1665)

法国数学家, 他是一位律师, 数学只是他的业余爱好. 他兴趣广泛, 博览群书并善于思考, 在数学上有许多重大贡献. 他特别爱好数论, 他提出的费马大定理:

"当$n>2$时,方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解"

至今尚未得到普遍的证明. 他还是微积分学的先驱 , 费马引理是后人从他研究最大值与最小值的方法中提炼出来的.

拉格朗日 (Lagrange, 1736 – 1813)

法国数学家. 他在方程论, 解析函数论, 及数论方面都作出了重要的贡献, 近百余年来, 数学中的许多成就都直接或间接地溯源于他的工作, 他是对分析数学产生全面影响的数学家之一.

柯西(Cauchy, 1789 – 1857)

法国数学家, 他对数学的贡献主要集中在微积分学, 复变函数和微分方程方面 . 一生发表论文800余篇, 著书 7 本 ,《柯西全集》共有 27 卷. 其中最重要的的是为巴黎综合学校编写的《分析教程》,《无穷小分析概论》, 《微积分在几何上的应用》 等, 有思想有创建, 对数学的影响广泛而深远 .他是经典分析的奠人之一, 他为微积分所奠定的基础推动了分析的发展.