3.5 多元函数微分学的几何应用

一、曲线的切线与法平面

二、曲面的切平面与法线

复习：平面曲线的切线与法线

已知平面光滑曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 有

切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

若平面光滑曲线方程为 $F(x,y)=0$，因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

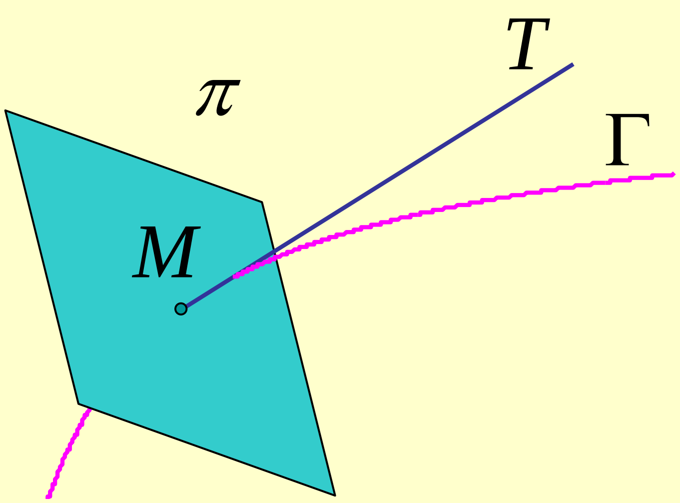
故在点 (x_0, y_0) 有

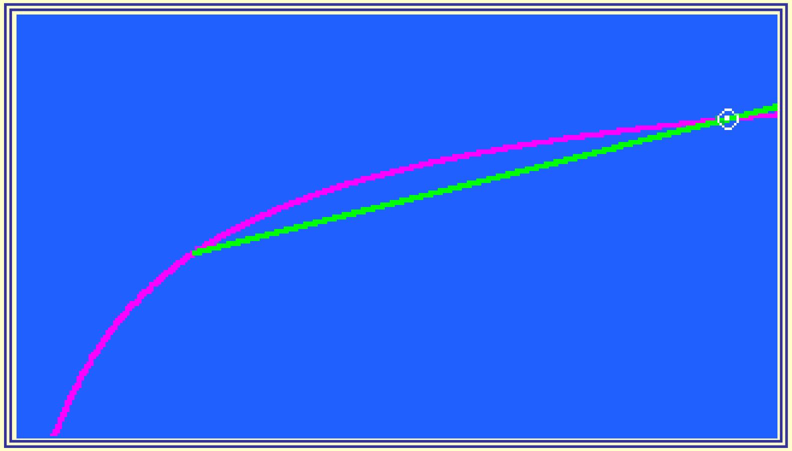
切线方程 $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

法线方程 $F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

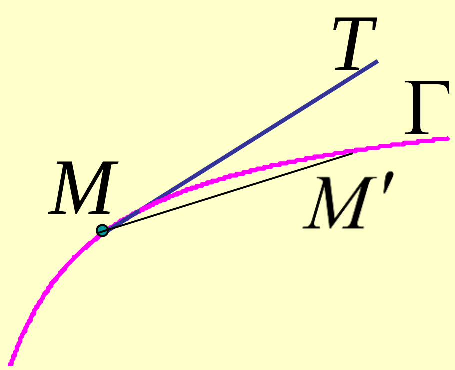
一、空间曲线的切线与法平面

空间光滑曲线在点 M 处的**切线**为此点处割线的极限位置. 过点 M 与切线垂直的平面称为曲线在该点的**法平面**.





1. 曲线方程为参数方程的情况



$$\Gamma: \quad x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

设 $t=t_0$ 对应 $M(x_0, y_0, z_0)$

$t=t_0+\Delta t$ 对应 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$

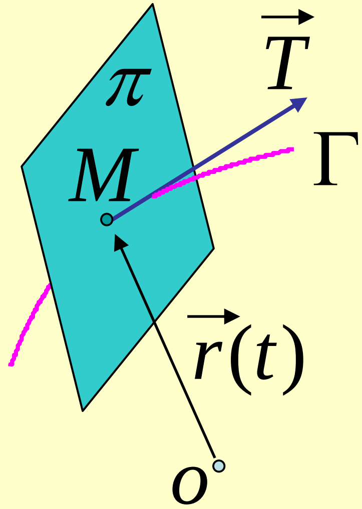
割线 MM' 的方程:

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

上述方程之分母同除以 Δt，令 $\Delta t \to 0$, 得

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

此处要求$\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0,
如个别为0, 则理解为分子为 0 .



切线的方向向量:

$$T = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

称为曲线的**切向量** .

$\vec{T}$也是法平面的法向量, 因此得**法平面方程**

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

说明: 若引进向量函数$\vec{r}(t) = \{\varphi(t), \psi(t), \omega(t)\}$, 则 Γ
为 $\vec{r}(t)$ 的矢端曲线, 而在 t_0 处的导向量

$$\vec{r}'(t_0) = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$$

就是该点的切向量.

例1. 求圆柱螺旋线 $x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = k\varphi$ 在 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

解: 由于 $x' = -R\sin\varphi, y' = R\cos\varphi, z' = k,$ 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, 对应的切向量为 $\overrightarrow{T} = (-R, 0, k)$, 故

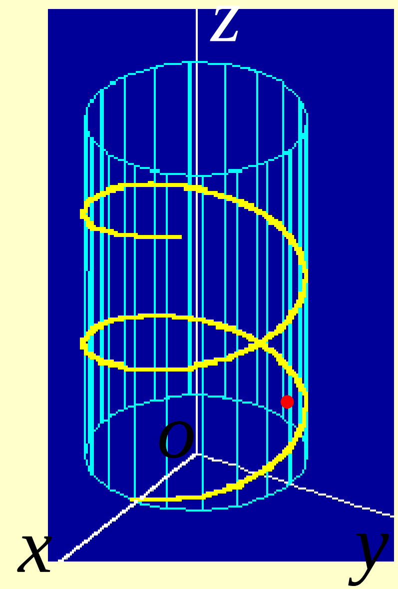
$M_0(0, R, \frac{\pi}{2}k)$

切线方程 $$\frac{x}{-R} = \frac{y-R}{0} = \frac{z-\frac{\pi}{2}k}{k}$$

即 $$\begin{cases} kx + Rz - \frac{\pi}{2}Rk = 0 \\ y - R = 0 \end{cases}$$

法平面方程 $$-Rx + k(z - \frac{\pi}{2}k) = 0$$

即 $$Rx - kz + \frac{\pi}{2}k^2 = 0$$



2. 曲线为一般式的情况

光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

当$J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$时, Γ 可表示为 $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$, 且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)},$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] & \\ y \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

曲线上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量为

$$\vec{T}=\{1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0)\}$$

$$=\left\{1,\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_M,\ \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_M\right\}$$

或 $\vec{T}=\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}_M=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_M$

则在点 $M(x_0,y_0,z_0)$有

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

法平面方程

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M (x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M (y-y_0)$$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M (z-z_0)=0$$

也可表为

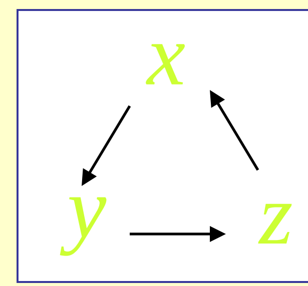
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(M) & F_y(M) & F_z(M) \\ G_x(M) & G_y(M) & G_z(M) \end{vmatrix}=0$$

例2. 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程与法平面方程.

解法1 令 $F=x^2+y^2+z^2,\ G=x+y+z$, 则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M=\left.\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right|_M=2(y-z)\Big|_M=-6;$$

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M=0;\quad \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M=6$$



切向量 $\vec{T}=(-6,\ 0,\ 6)$

切线方程 $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{6}$ 即 $\begin{cases}x+z-2=0\\ y+2=0\end{cases}$

法平面方程 $-6\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+6\cdot(z-1)=0$

即 $x-z=0$

解法2. 方程组两边对 x 求导, 得 $\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-x \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1 \end{cases}$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{z-x}{y-z}$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\dfrac{x-y}{y-z}$

曲线在点 $M(1,-2,1)$ 处有:

切向量 $\vec{T}=\left(1,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_M,\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_M\right)=(1,0,-1)$

点 $M(1,-2,1)$ 处的切向量

$$\vec{T}=(1,0,-1)$$

切线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$$

即 $$\begin{cases} x+z-2=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

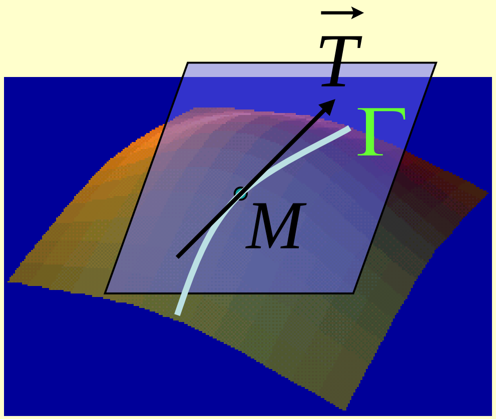
法平面方程 $$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0$$

即 $$x-z=0$$

二、曲面的切平面与法线

设 有光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

通过其上定点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 任意引一条光滑曲线 $\Gamma: x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$，设 $t=t_0$ 对应点 M，且 $\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)$不全为0．则 Γ 在点 M 的**切向量**为

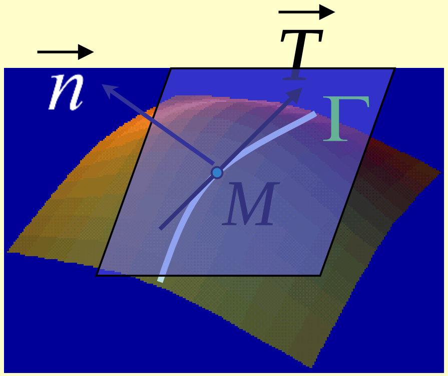


$$\vec{T}=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

下面证明：Σ 上过点 M 的任何曲线在该点的切线都在同一平面上．此平面称为 Σ 在该点的**切平面**．

证: $\because \Gamma : x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$在 Σ 上,



$$\therefore \quad F(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$$

两边在 $t=t_0$ 处求导,注意 $t=t_0$ 对应点M,

得
$$\boxed{\begin{aligned}F_x(x_0,y_0,z_0)\,\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\,\psi'(t_0)&\\ +F_z(x_0,y_0,z_0)\,\omega'(t_0)&=0\end{aligned}}$$

令 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

切向量 $\vec{T}\perp\vec{n}$

由于曲线 Γ 的任意性，表明这些切线都在以 $\vec{\boldsymbol{n}}$ 为法向量的平面上，从而切平面存在.

曲面 Σ 在点 M 的**法向量**

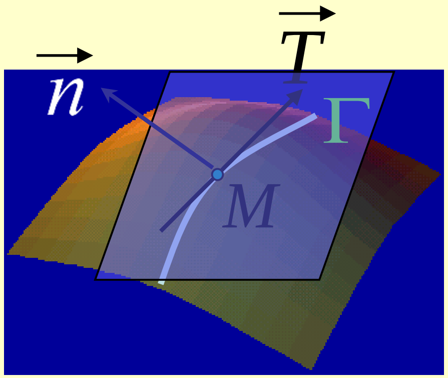
$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$



特别, 当光滑曲面Σ 的方程为显式 $z = f(x, y)$时，令

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

则在点 (x, y, z), $F_x = f_x, F_y = f_y, F_z = -1$

故当函数 $f(x, y)$在点(x_0, y_0)有连续偏导数时, 曲面

Σ 在点(x_0, y_0, z_0) 有

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

用 α,β,γ 表示法向量的方向角, 并假定法向量方向向上, 则 γ 为锐角.

法向量 $\vec{n}=(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$

将 $f_x(x_0,y_0)$, $f_y(x_0,y_0)$ 分别记为 f_x, f_y, 则

法向量的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\qquad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

例3. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=36$ 在点$(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-36$

法向量 $\vec{n}=(2x,4y,6z)$

$$\vec{n}\Big|_{(1,2,3)}=(2,8,18)$$

所以球面在点 $(1,2,3)$ 处有:

切平面方程 $2(x-1)+8(y-2)+18(z-3)=0$

即 $x+4y+9z-36=0$

法线方程 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{9}$$

例4. 确定正数σ使曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 相切.

解: 二曲面在 M 点的法向量分别为

$$\vec{n}_1=(y_0z_0\,,x_0z_0\,,x_0y_0)\,,\quad \vec{n}_2=(x_0\,,y_0\,,z_0)$$

二曲面在点 M 相切, 故 $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$, 因此有

$$\frac{x_0y_0z_0}{x_0{}^2}=\frac{x_0y_0z_0}{y_0{}^2}=\frac{x_0y_0z_0}{z_0{}^2}$$

$$\therefore \qquad x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2$$

又点 M 在球面上, 故 $x_0{}^2=y_0{}^2=z_0{}^2=\dfrac{a^2}{3}$

于是有 $\qquad \sigma=x_0y_0z_0=\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$

内容小结

1. 空间曲线的切线与法平面

1) 参数式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

2) 一般式情况. 空间光滑曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切向量 $\vec{T}=\left(\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M\right)$

切线方程 $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M}$$

法平面方程 $$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_M(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_M(y-y_0)$$
$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_M(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

1) 隐式情况 . 空间光滑曲面 $\Sigma : F(x, y, z) = 0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 的**法向量**

$$\vec{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

切平面方程

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$

法向量 $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$

法线的**方向余弦**

$$\cos\alpha = \frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

切平面方程

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

法线方程 $$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

思考与练习

1. 如果平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切, 求 λ.

提示: 设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$, 则

$$\begin{cases} \dfrac{6x_0}{3}=\dfrac{2y_0}{\lambda}=\dfrac{2z_0}{-3} & \text{(二法向量平行)} \\ 3x_0+\lambda y_0-3z_0+16=0 & \text{(切点在平面上)} \\ 3x_0^2+y_0^2+z_0^2=16 & \text{(切点在椭球面上)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $\lambda=\pm 2$

2. 设$f(u)$可微, 证明 曲面 $z = x f(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点.

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 .

练习题

1. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行, 其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1',\ F_1'\cdot(-m)+F_2'\cdot(-n),\ F_2')$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m,1,n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立.

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点(1,1,1) 的切线与法平面.

解: 点 (1,1,1) 处两曲面的法向量为

$$\vec{n}_1=(2x-3,2y,2z)\big|_{(1,1,1)}=(-1,2,2)$$

$$\vec{n}_2=(2,-3,5)$$

因此切线的方向向量为 $\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(16,9,-1)$

由此得切线: $$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1}$$

法平面: $16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$

即 $$16x+9y-z-24=0$$

练 习 题

一、填空题:

1、曲线$x=\frac{t}{1+t},y=\frac{1+t}{t},z=t^2$再对应于$t=1$的点处切线方程为__________________;
法平面方程为__________________.

2、曲面$e^z-z+xy=3$在点$(2,1,0)$处的切平面方程为____________________;
法线方程为____________________.

二、求出曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$上的点, 使在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

三、求球面$x^2+y^2+z^2=6$与抛物面$z=x^2+y^2$的交线在$(1,1,2)$处的切线方程 .

四、求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面

$x-y+2z=0$的切平面方程.

五、试证曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$上任何点处的

切平面在各坐标轴上的截距之和等于a .

练习题答案

一、1、$\dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{8}, 2x-8y+16z-1=0$;

2、$x+2y-4=0, \begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2} \\ z=0 \end{cases}$.

二、$P_1(-1,1,-1)$及$P_2(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27})$.

三、$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$或$\begin{cases} x+y-2=0 \\ z-2=0 \end{cases}$.

四、$x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.