4.2 微 分

一、微分的概念

二、微分的计算

三、高阶微分

四、微分的应用小结

一、微分的概念

1. 问题的提出

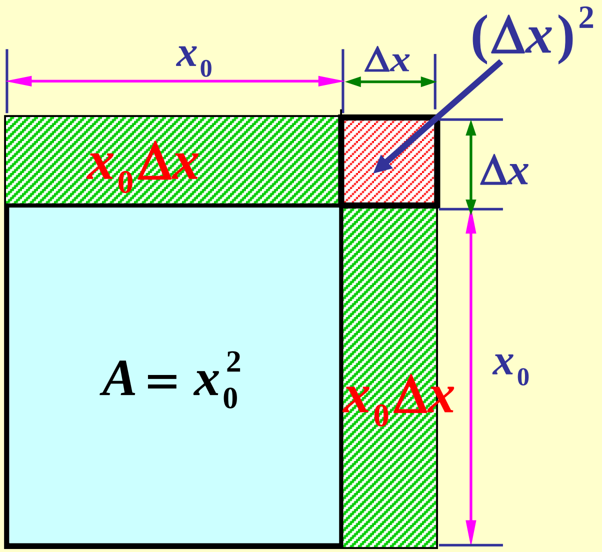
实例: 正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$,

$\because$ 正方形面积$A=x_0^2$,

$$\therefore \Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underbrace{2x_0\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1) Δx的线性函数,且为ΔA的主要部分;

(2) Δx的高阶无穷小,当$|\Delta x|$很小时可忽略.

再例如，设函数$y=x^3$在点x_0处的改变量为Δx时，求函数的改变量Δy.

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3$$

$$=\underbrace{3x_0^2\cdot\Delta x}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

当$|\Delta x|$很小时，(2)是Δx的高阶无穷小$o(\Delta x)$,

$\therefore \Delta y\approx 3x_0^2\cdot\Delta x.$ 既容易计算又是较好的近似值

问题:这个线性函数(改变量的主要部分)是否所有函数的改变量都有?它是什么?如何求?

2. 微分的定义

定义1：设函数 $y=f(x)$在x_0点的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

其中A是与Δx无关的常数，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0可微，并称$A\cdot\Delta x$为函数 $y=f(x)$在点 x_0相应于自变量增量 Δx的微分，记作

$$dy\Big|_{x=x_0}\text{或}df(x_0)\text{，即 } dy\Big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.$$

微分 dy叫做函数增量 Δy的线性主部.（微分的实质）

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \underline{A\cdot\Delta x + o(\Delta x)} \qquad dy\Big|_{x=x_0} = A\cdot\Delta x.$$

由定义知:

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A\neq 0$时, dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A\cdot\Delta x} \to 1 \quad (x\to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数, 但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时, $\Delta y \approx dy$ (线性主部).

3. 可微的条件

定理 函数 $f(x)$在点 x_0可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0处可导，且 $A=f'(x_0)$.

证 (1) 必要性 $\because f(x)$在点x_0可微,

$$\therefore \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x),\quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$在点 x_0可导, 且$A=f'(x_0)$.

(2) 充分性 $\because$ 函数$f(x)$在点x_0可导,

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \qquad 即 \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x)$, $\because \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$,

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$\because$ 函数 $f(x)$在点 x_0可微, 且 $f'(x_0) = A$.

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微. $\qquad A = f'(x_0)$.

函数$y = f(x)$在任意点x的微分, 称为函数的微分, 记作dy或$df(x)$, 即 $dy = f'(x)\Delta x$.

例1. 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$时的微分.

解：$\because dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x.$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

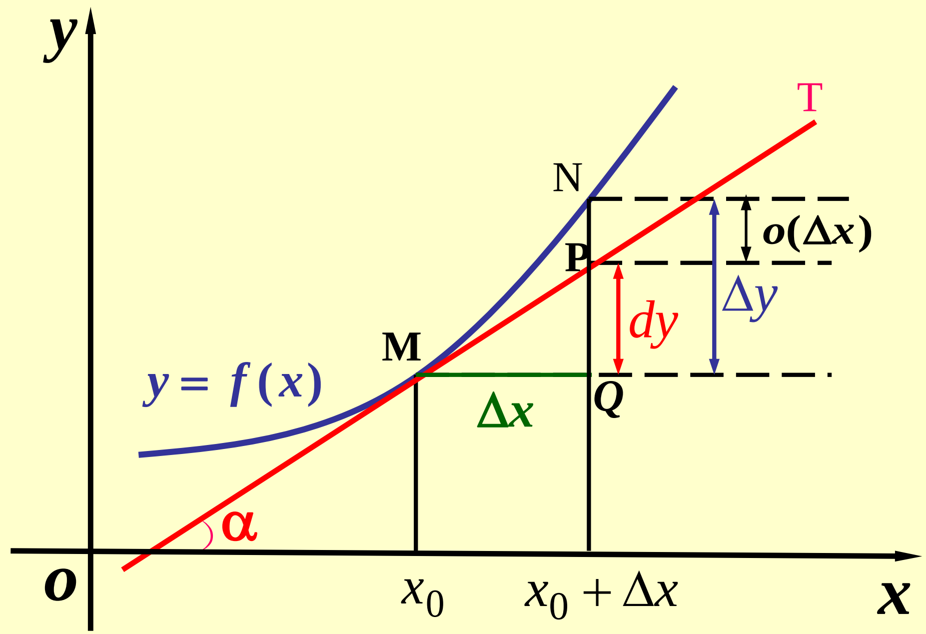
通常把自变量 x的增量Δx称为自变量的微分，
记作dx，即$dx = \Delta x$.

$$\therefore dy = f'(x)dx. \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于
该函数的导数. 导数也叫"<u>微商</u>".

4. 微分的几何意义

$$dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)dx = f'(x_0)\Delta x$$
$$= \tan\alpha \cdot \Delta x$$



几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.

当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，切线段MP可近似代替曲线段MN. ----以直代曲

ΔMPQ --- 微分三角形

初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad (\,C\text{为常数}\,)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数求导法则

$$y = f(u),\, u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

4. 初等函数在定义区间内可导,且导数仍为初等函数

说明: 最基本的公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

由定义证, 其它公式用求导法则推出.

二、微分的计算　$dy = f'(x)dx$

1.基本初等函数的微分公式

$$d(C) = 0 \qquad d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \qquad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}dx \qquad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad d(\operatorname{arc}\cot x) = -\frac{1}{1+x^2}dx$$

2. 微分运算法则

设 $u(x)$, $v(x)$ 均可微 , 则

(1) $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$　　(2) $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$　　(C 为常数)

(3) $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$　　(4) $\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v \neq 0)$

(5) 复合函数的微分

$y = f(u), u = \varphi(x)$ 分别可微 ,

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = f'(u)\boxed{\varphi'(x)\,\mathrm{d}x} \longrightarrow \boxed{\mathrm{d}u}$$

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u \longleftarrow$$ 一阶微分形式不变

$$\boldsymbol{dy = f'(\varphi(x))\,d(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx}$$

例2. 设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解： $\because y=\sin u, u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例3. $y=\ln(1+e^{x^2})$, **求** $\mathrm{d}y$.

解: $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}(1+e^{x^2})=\dfrac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\mathrm{d}x$$

例4. 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$, 求 $\mathrm{d}y$.

解: 利用一阶微分形式不变性 , 有

$$\mathrm{d}(y\sin x)-\mathrm{d}(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x\,\mathrm{d}y+y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin(x-y)\,(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

$$\mathrm{d}y=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

例5. 在下列括号中填入适当的函数使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\ \frac{1}{2}x^2+C\ )=x\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\ \frac{1}{\omega}\sin\omega t\ +C)=\cos\omega t\,\mathrm{d}t$ 凑微分

说明: 上述微分的反问题是不定积分要研究的内容.

注意: 数学中的反问题往往出现多值性.

三、高阶微分

函数$y=f(x)$的一阶微分是： $dy = f'(x)dx$

它是x和dx的函数，而变量x和dx相互独立。

现将dy只作为x的函数（即把dx看作固定不变的，即自变量的增量是个常数），此时如果f二阶可导，那么dy对x的微分为：

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2$$

称之为函数f的**二阶微分**，记作

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 \quad \text{or} \quad d^2y = f''(x)dx^2$$

注： dx^2是指$(dx)^2$，而d^2x表示x的二阶微分$(d^2x=0)$，
$d(x^2)$是x^2的一阶微分，$d(x^2)=2xdx$；

一般地，n阶微分是n－1阶微分的微分，记作 $d^n y$

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{n-1}(x)dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)dx^n$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{——微商}$$

对于$n \geq 2$的n阶微分均称为高阶微分.

一阶微分具有形式不变性，对于高阶微分来说就不具有这个性质了.

以二阶微分为例，设$y=f(x)$, x为自变量，

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = f''(x)dx^2$$

但当x为中间变量时，如设 $y = f(x), x = \varphi(t)$

$\Rightarrow y = f((\varphi(t)), t$为自变量，$y$对$t$的二阶微分为：

$$
\begin{aligned}
d^2 y &= d(f'(x)dx) \\
&= d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(d(x)) \\
&= f''(x)dx \cdot dx + f'(x)d^2 x \\
&= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x \\
&\neq f''(x)dx^2
\end{aligned}
$$

$$\because d^2 x = \varphi''(t)dt^2 \neq 0$$

四、微分应用(近似计算)

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x)$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得近似等式:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$\Big\downarrow \text{令 } x = x_0 + \Delta x$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$ ----以直代曲

使用原则: 1) $f(x_0),\ f'(x_0)$ 好算;

2) x 与 x_0 靠近.

特别当 $x_0=0$, $|x|$ 很小时,

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$$

常用近似公式: ($|x|$ 很小)

(1) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

证明: 令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

得 $f(0)=1,\quad f'(0)=\alpha$

$\therefore$ 当 $|x|$ 很小时, $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$

(2) $\sin x\approx x$

(3) $e^{x}\approx 1+x$

(4) $\tan x\approx x$

(5) $\ln(1+x)\approx x$

例6. 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值 .

解: 设 $f(x)=\sin x$,

取 $x_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, $\quad x=29^\circ=\frac{29}{180}\pi$

则 $\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{180}$

$$\sin 29^\circ=\sin\frac{29}{180}\pi \approx \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-0.0175)$$

$$\approx 0.485 \qquad \boxed{\sin 29^\circ \approx 0.4848\cdots}$$

例7. 计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值 .

$$3^5 = 243$$

解: $$\sqrt[5]{245} = (243+2)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 3(1+\frac{2}{243})^{\frac{1}{5}}$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x}$$

$$\approx 3(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243})$$

$$= 3.0048$$

例8. 有一批半径为1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克．(铜的密度：$8.9\,\mathrm{g}/\mathrm{cm}^3$)

解：已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

镀铜体积为 V 在 $R=1,\Delta R=0.01$ 时体积的增量 ΔV，

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}=4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}$$

$$\approx 0.13\,(\mathrm{cm}^3)$$

因此每只球需用铜约为

$$8.9\times 0.13=1.16\ (\mathrm{g})$$

微分在估计误差中的应用

某量的精确值为 ***A***，其近似值为 ***a***，

$|A-a|$ 称为***a*** 的绝对误差

$\dfrac{|A-a|}{|a|}$ 称为***a*** 的相对误差

若 $|A-a| \le \delta_A$

δ_A 称为测量 ***A*** 的绝对误差限

$\dfrac{\delta_A}{|a|}$ 称为测量 ***A*** 的相对误差限

误差传递公式：

若直接测量某量得 **x**,已知测量误差限为 δ_x，

按公式 $y=f(x)$ 计算 **y** 值时的误差

$$|\Delta y| \approx |\mathrm{d}y| = |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

$$\leq |f'(x)| \cdot \delta_x$$

故 **y** 的绝对误差限约为 $\delta_y \approx |f'(x)| \cdot \delta_x$

相对误差限约为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} \approx \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \delta_x$

例9. 设测得圆钢截面的直径 $D=60.0\,\mathrm{mm}$, 测量D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05\,\mathrm{mm}$, 欲利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 计算圆钢截面积, 试估计面积的误差 .

解: 计算 **A** 的绝对误差限约为

$$\delta_A=|A'|\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times 60.0\times 0.05$$

$$\approx 4.715\ \ \mathbf{(mm)}$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{|A|}=\frac{\frac{\pi}{2}D\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.0}=0.17\ \%$$

小 结

1. 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做微分法.

研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做微分学.

2. 导数与微分的联系: $\boxed{\text{可导} \Leftrightarrow \text{可微}}$

3. 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ 是x的线性函数,它的定义域是R,实际上,它是无穷小.

$$\because \lim_{x \to x_0} dy = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.

4. 近似计算的基本公式

当$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\Big|_{x=x_0} \approx dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot \Delta x.$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

当$x = 0$时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x.$$

思考题

因为一元函数$y = f(x)$在x_0的可微性与可导性是等价的，所以有人说“微分就是导数，导数就是微分”，这说法对吗?

思考题解答

说法不对.

从概念上讲，微分是从求函数增量引出线性主部而得到的，导数是从函数变化率问题归纳出函数增量与自变量增量之比的极限，它们是完全不同的概念.

练 习 题

一、填空题：

1、已知函数 $f(x)=x^2$ 在点 x 处的自变量的增量为0.2，对应的函数增量的线性全部是 dy =0.8，那么自变量 x 的始值为__________.

2、微分的几何意义是__________.

3、若 $y=f(x)$ 是可微函数，则当 $\Delta x \to 0$ 时，$\Delta y - dy$ 是关于 Δx 的________无穷小.

4、d ____________ $=\sin\omega x dx$.

5、d ____________ $=e^{2x}dx$.

6、d ____________ $=\sec^2 3x dx$.

7、$Y=x^2e^{2x}$，$dY=e^{2x}d$ ______ $+x^2d$ ______.

8、$d(\arctan\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}})=$ __________，$de^x=$ __________.

二、求下列的函数的微分：

1、$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

2、$y=[\ln(1-x)]^2$；

3、$y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；

4、$y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

5、$y=e^{\pi-3x}\cos 3x$，求$dy\big|_{x=\frac{\pi}{3}}$；

6、求由方程$\cos(xy)=x^2y^2$所确定的y 微分.

练习题答案

一、1、-2；

2、曲线的切线上点的纵坐标的相应增量；

3、高阶；

4、$-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x + C$；

5、$-\dfrac{1}{2}e^{-2x} + C$；

6、$\dfrac{1}{3}\tan 3x + C$；

7、x^2, e^{2x}；

8、$\dfrac{2\sqrt{2}e^x}{2+e^{4x}}$.

二、1、$(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}dx$；

2、$\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}dx$；

3、$dy = \begin{cases} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 0 \\ -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1 \end{cases}$;

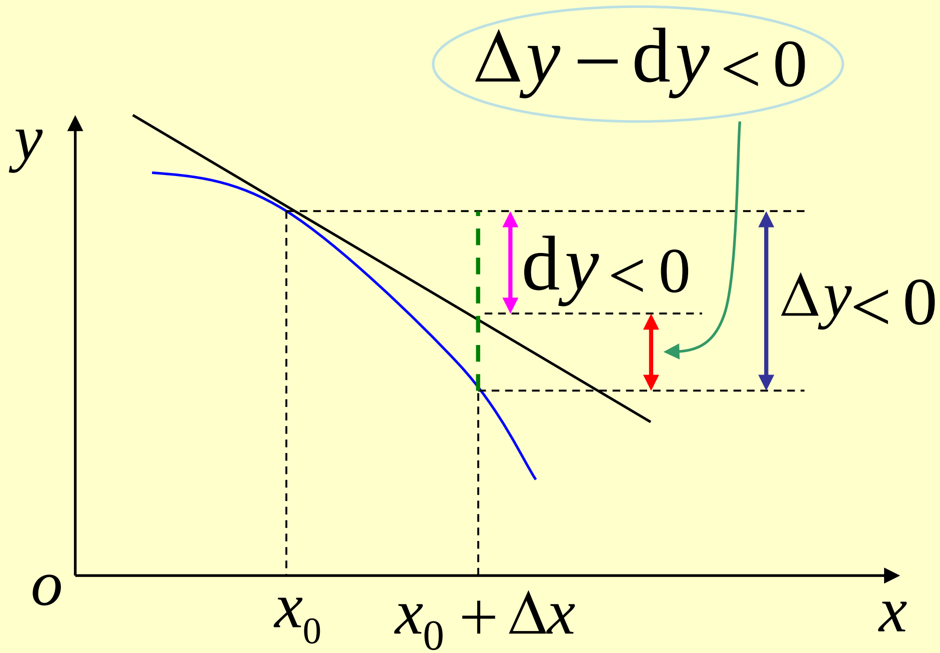
4、$-\dfrac{2x}{1+x^4}dx$;

5、$3dx$;

6、$-\dfrac{y}{x}dx$.

思考与练习

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如下, 试在图中标出的点 x_0 处的 $\mathrm{d}y$, Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$, 并说明其正负 .



$$2.\quad \mathrm{d}(\arctan e^{-x}) = \underline{\frac{1}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}e^{-x}$$

$$= \underline{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}}\ \mathrm{d}x$$

$$3.\quad \frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x} = \underline{\sec^3 x}$$

$$4.\quad \mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right) = \sin 2x\,\mathrm{d}x$$

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定,

求 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}$.

解: 方程两边求微分, 得

$$3x^2\,\mathrm{d}\,x+3y^2\,\mathrm{d}\,y-3\cos 3x\,\mathrm{d}\,x+6\,\mathrm{d}\,y=0$$

当 $x=0$ 时 $y=0$, 由上式得 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x$

6. 设 $a>0$, 且 $|b|<<a^n$, 则

$$\sqrt[n]{a^n+b}\approx \underline{\quad a+\frac{b}{n\,a^{n-1}}\quad}$$

补充例题

1. 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

解：因为

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$$

所以

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{x^2\sqrt{1-(\sin^2\frac{1}{x})^2}}\sin\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

2. 已知 $xy = e^{x+y}$，求 $\mathrm{d}\,y$.

解: 方程两边求微分, 得

$$x\,\mathrm{d}\,y + y\,\mathrm{d}\,x = e^{x+y}(\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y)$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\,y = \frac{y - e^{x+y}}{x + e^{x+y}}\mathrm{d}\,x$$