2.2 函数的极限

2.2.1 函数极限的概念

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

2.2.2 函数极限的性质

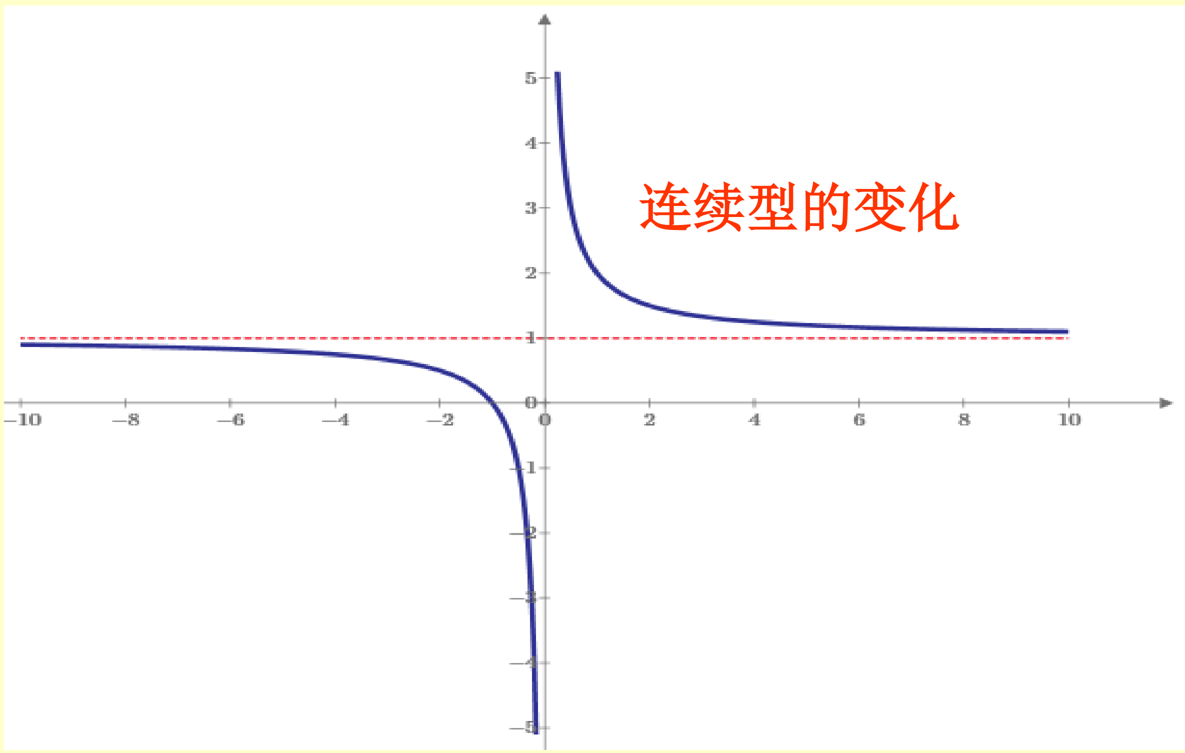
2.2.3 函数极限存在的判别

两个重要极限

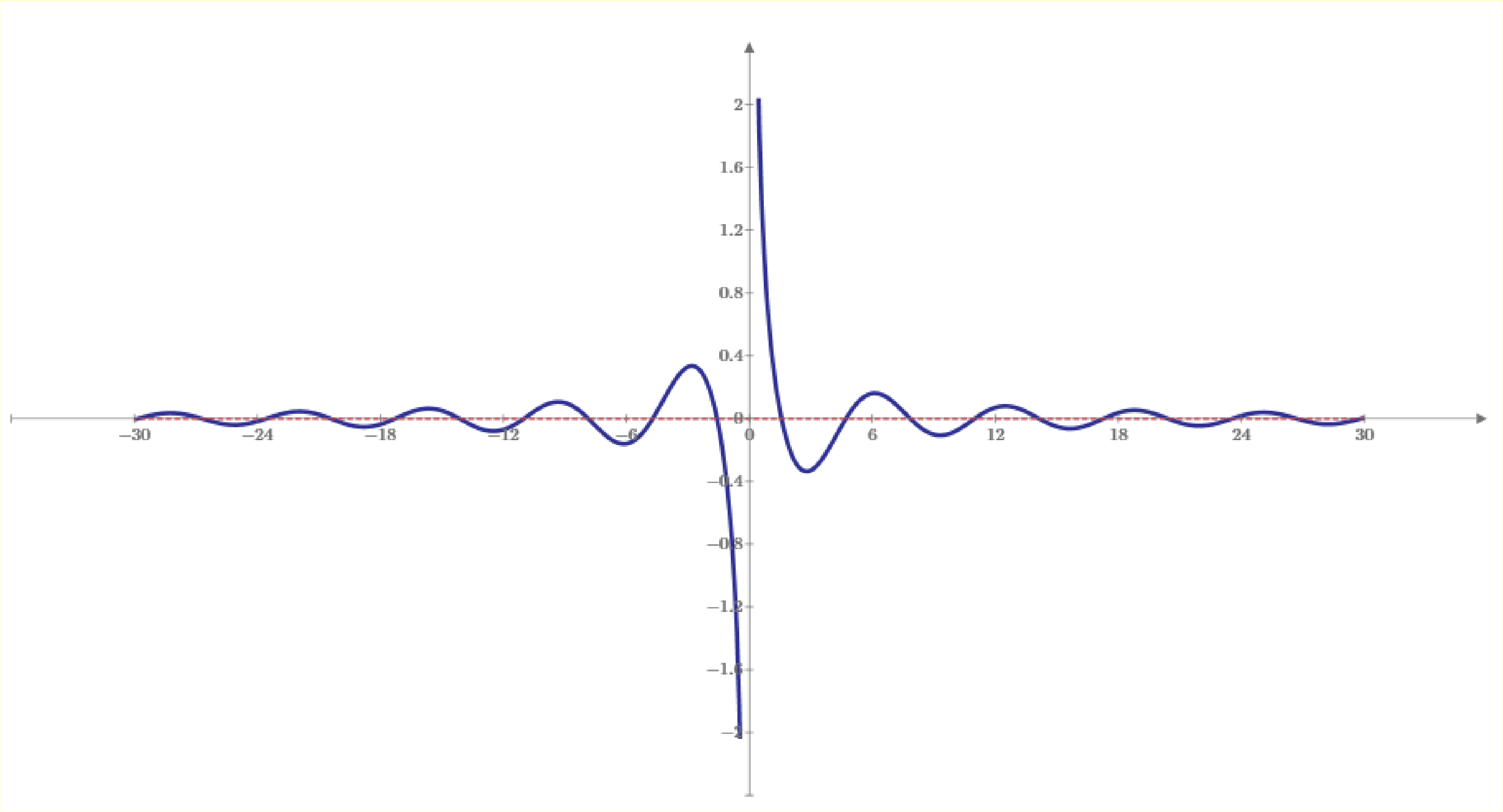
2.2.1 函数极限的概念

观察函数$\dfrac{x+1}{x}$当$x \to \infty$时的变化趋势

观察函数$\dfrac{x+1}{x}$当$x \to 0$时的变化趋势



观察函数$\dfrac{\cos x}{x}$当$x \to \infty$时的变化趋势



通过图形演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ 无限接近于1.

当 x 无限趋向0时, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ 无限趋向于无穷

看出: 函数 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty(x\to 0)$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

问题: 如何用数学语言刻划函数"无限接近"?

$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ 表示 $\left|f(x)-A\right|$ 任意小;

$\left|x\right|>X$ 表示 $x\to\infty$ 的过程.

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

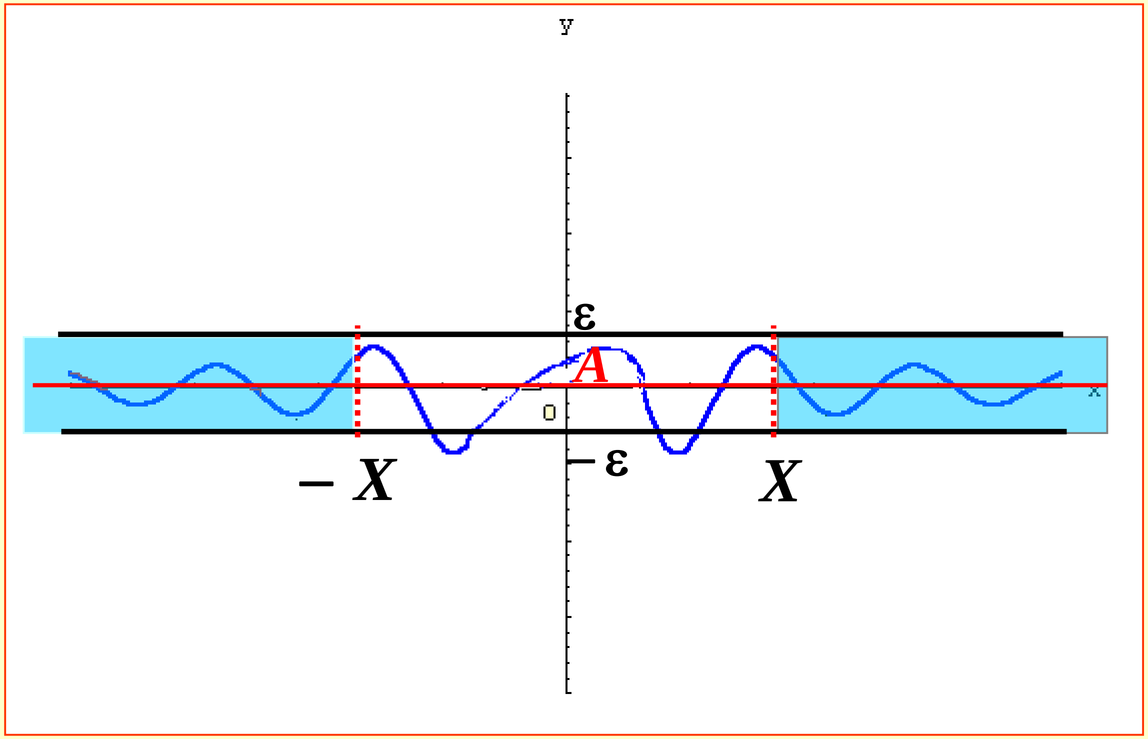
定义： 如果对任意给定的正数 ε（不论其多么小），总存在正数 X，当 $|x| > X$ 时，不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，恒成立，那么称数值 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

$\varepsilon - X$ 定义： $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon.$

几何解释:

当$x < -X$或$x > X$时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内.



定义: 如果$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$,则称直线$y = A$为函数$y = f(x)$的图形的水平渐近线

例1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

适当放大

证：$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{\cos x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon,$

只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时恒有

$$\left|\frac{\cos x}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0.$

例2. 证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

证 $\forall\varepsilon>0,$

要使 $\left|\dfrac{1+x^3}{2x^3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2|x|^3}<\varepsilon,$ 只需 $|x|>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，

取 $X=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，必有

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

由极限的定义可知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

注: 另外两种情形

$1^0.\ x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$2^0.\ x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3^0 充要条件:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

例3. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+1)=1.$

证明 因为 $\left|e^{-x}+1-1\right|=\left|e^{-x}\right|$

$\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|e^{-x}+1-1\right|<\varepsilon$, 即 $e^{-x}<\varepsilon$

也即 $x>\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$, 只要取 $X=\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$,

则当 $x>X$ 时恒有 $\left|e^{-x}+1-1\right|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+1)=1.$

例4. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

证 任给 $\varepsilon>0\ (\varepsilon<\dfrac{\pi}{2})$, 取 $M=\tan(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)$.

因为 $\arctan x$ 严格增, 当 $x>M$ 时,

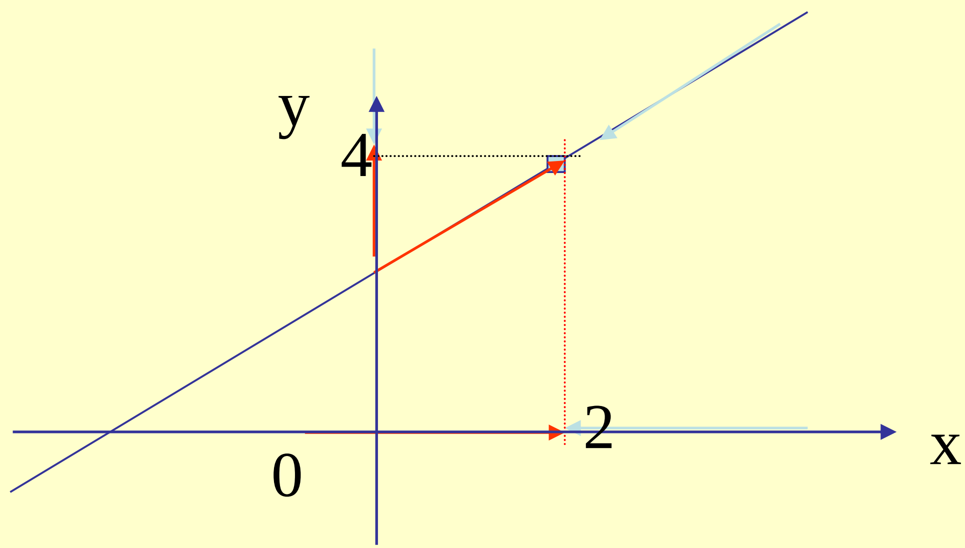
$$\left|\arctan x-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan x$$

$$<\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)=\varepsilon.$$

这就是说 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 自变量趋向有限值时函数的极限

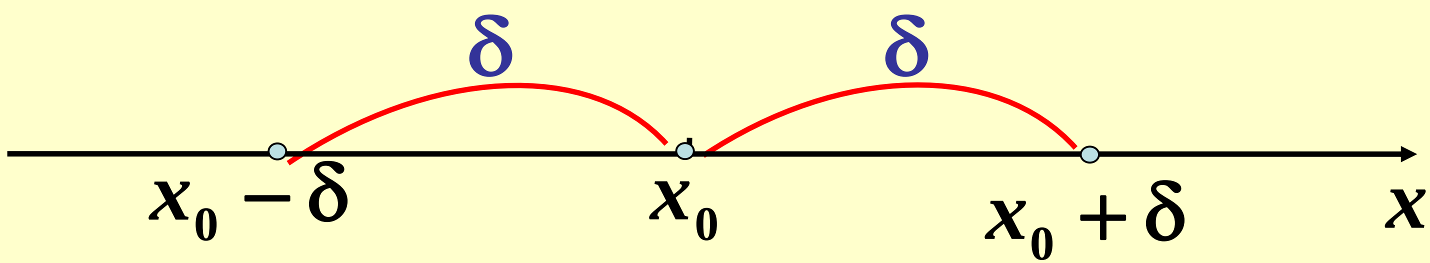
考虑函数 $$y=\frac{x^2-4}{x-2} \quad (x \neq 2)$$



(I) 双侧极限

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示 $|f(x)-A|$ 任意小;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示 $x\to x_0$ 的过程.



点 x_0 的去心 δ 邻域, δ 体现 x 接近 x_0 程度.

定义：如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那末常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

$\varepsilon-\delta$ 定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

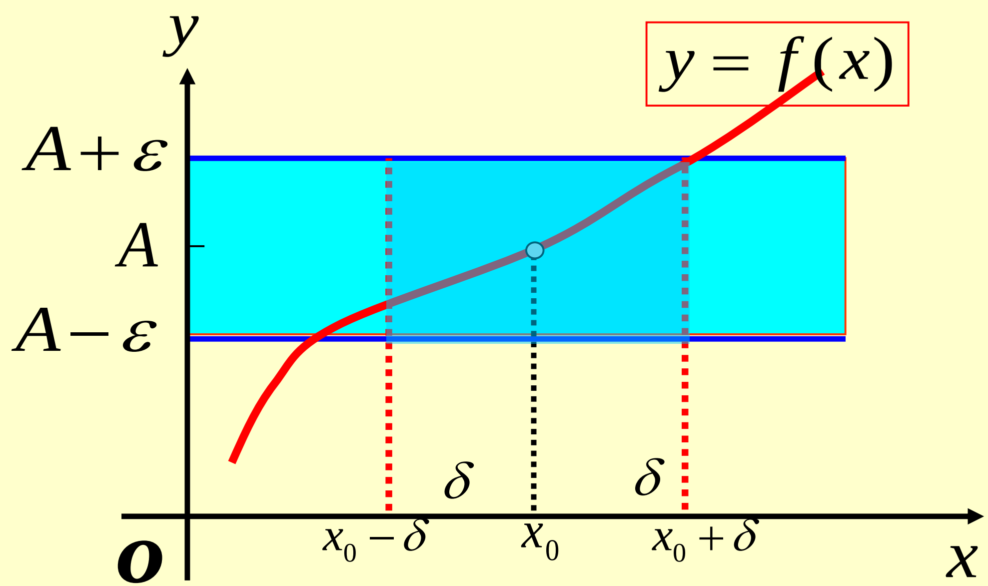
有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

注: 1.函数极限与$f(x)$在点x_0是否有定义无关;

2.δ与任意给定的正数ε有关,即$\delta = \delta(\varepsilon)$;

3. **(几何解释)**

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后, δ越小越好.

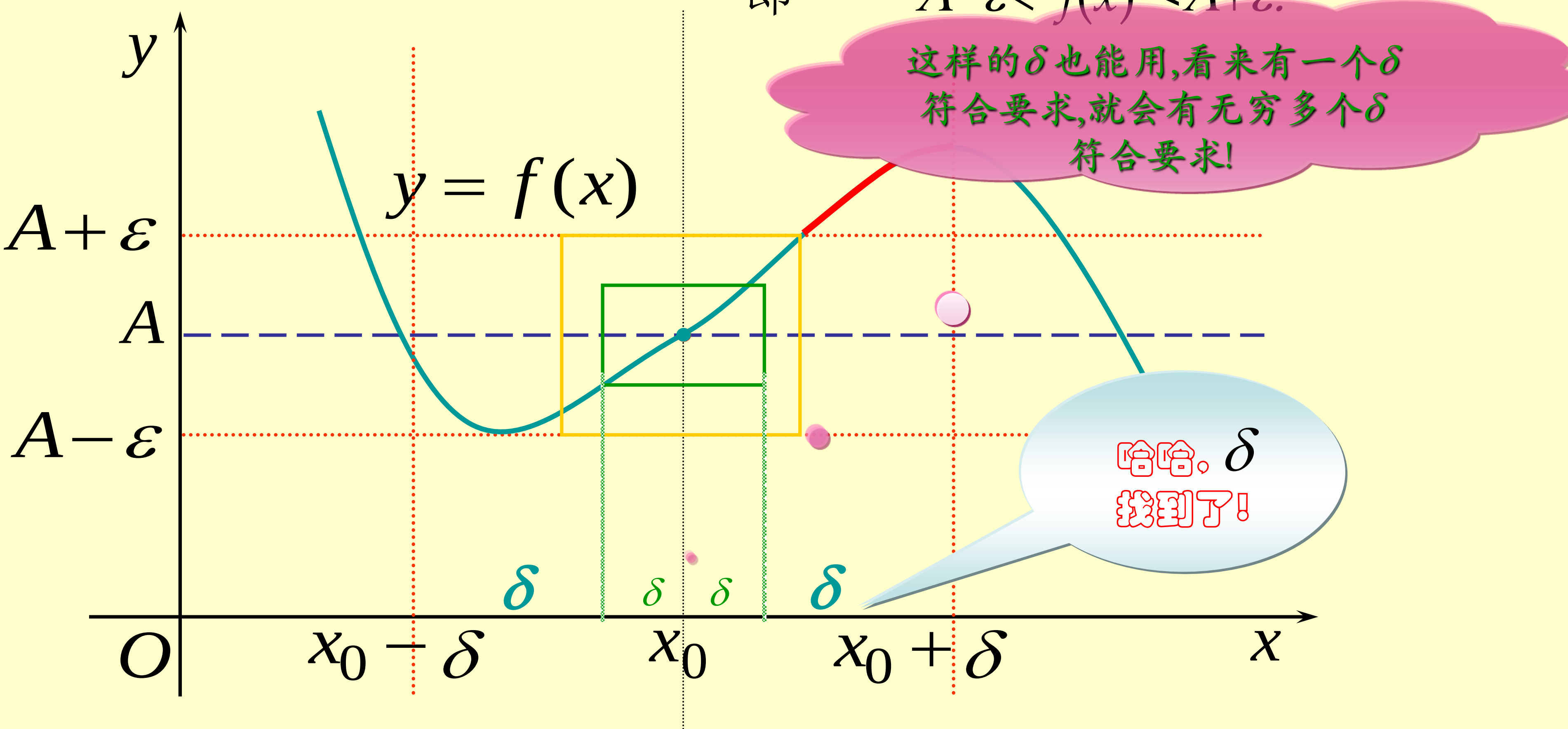
函数极限的演示

目的：对任意的$\varepsilon>0$, 要找$\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

即 $A-\varepsilon< f(x) <A+\varepsilon.$

给定$\varepsilon>0$



例5. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, ($C$为常数).

证　这里 $|f(x)-A| = |c-c| = 0$,

任给 $\varepsilon > 0$, 任取 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$|f(x)-A| = |C-C| = 0 < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

例6. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证　这里 $|f(x)-A| = |x-x_0|$, 因此

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 时,

$|f(x)-A| = |x - x_0| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

例7. 证明$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

证 函数在点$x=2$处没有定义.

这里$|f(x)-A|=\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|$

任给$\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要取$\delta=\varepsilon$,

当$0<|x-2|<\delta$时, 就有$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$,

所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

例8. 证明:当$x_0>0$时, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证 $|f(x)-A|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| = \left|\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \le \dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$,

任给$\varepsilon>0$, 要使$|f(x)-A|<\varepsilon$,

只要$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$ 且x不取负值. 取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

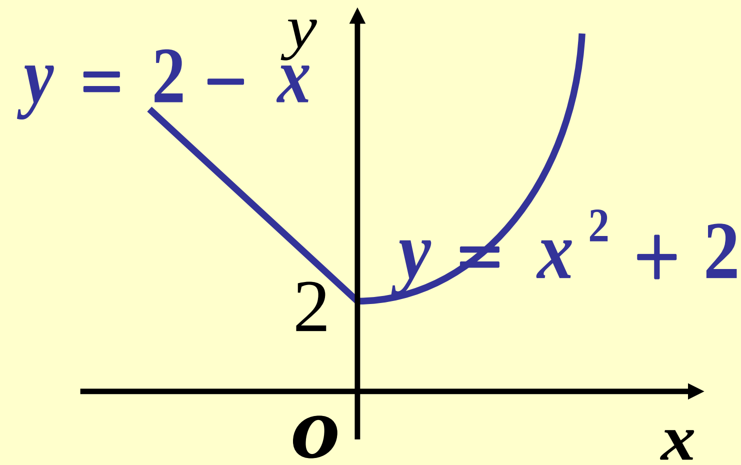
当$0<|x-x_0|<\delta$时, 就有$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

(II) 单侧极限

设 $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x<0 \\ x^2+2, & x\geq 0 \end{cases}$

考虑极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x 从左侧无限趋近0, 函数值无限接近于2。

x 从右侧无限趋近0, 函数值无限接近于2。

左极限:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 - 0 \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 使当 x_0 - \delta < x < x_0 时,$$

$$恒有 \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

右极限:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0^+)}} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 使当 x_0 < x < x_0 + \delta 时,$$

$$恒有 \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

注1:左极限与右极限都称之为单侧极限

注2: 单侧极限与双侧极限的关系

极限存在定理:

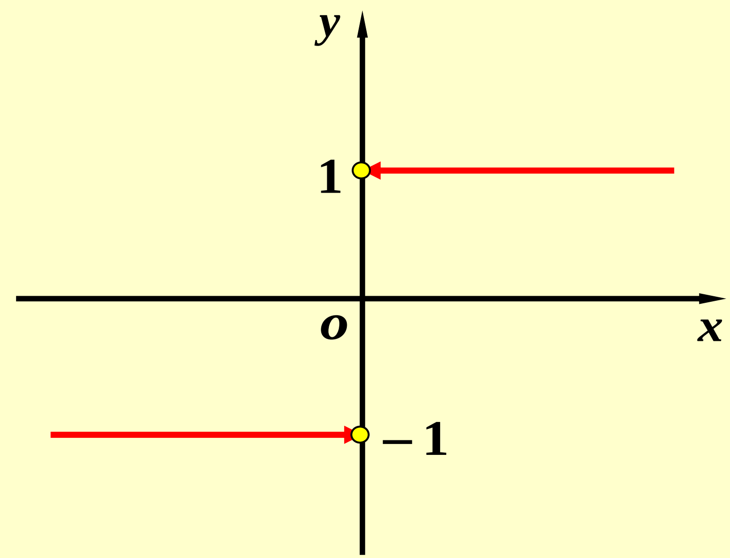
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

注：极限存在定理主要用于讨论分段函数在分段点处的极限.

例9. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$



$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

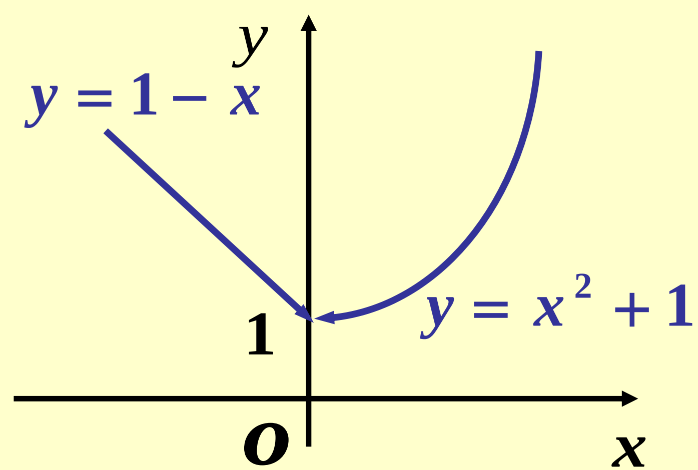
左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例10. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$,求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$

极限定义一览表

极限形式	度　量	过程描述	目标不等式
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\forall \varepsilon > 0$	$\exists N > 0$,当$n > N$时	$\lvert x_n - a \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$		$\exists X > 0$,当$\lvert x \rvert > X$时	$\lvert f(x) - a \rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$		$\exists X > 0$,当$x > X$时	
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$		$\exists X > 0$,当$x < -X$时	
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$		$\exists \delta > 0$,当$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$时	
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a$		$\exists \delta > 0$,当$0 < x - x_0 < \delta$时	
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a$		$\boldsymbol{\delta > 0}$,当$\boldsymbol{-\delta < x - x_0 < 0}$时	

2.2.2　函数极限的性质

前面引进的六种类型的函数极限，它们都有类似于数列极限的一些性质．这里仅以

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

为代表叙述并证明这些性质，至于其它类型的性质与证明，只要相应作一些修改即可.

性质1(唯一性): 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则此极限惟一.

证 不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B.$

由极限的定义，对于任意的正数 ε, 存在正数 δ_1,δ_2

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时， $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2},$ (1)

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时， $|f(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$ (2)

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(1) 式与(2) 式

均成立，所以

$$|A-B|\le|A-f(x)|+|f(x)-B|<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，推得 $A=B$. 这就证明了极限是惟一的.

性质2（局部有界性）

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$, $f(x)$ 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$上有界.

证 取$\varepsilon = 1$, 存在$\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - A| < 1.$$

由此得

$$|f(x)| < |A| + 1.$$

这就证明了$f(x)$在某个空心邻域 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 上有界.

性质3（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$（或 <0），则对任何正数 $r<A$（或 $r<-A$），存在 $U^\circ(x_0)$，使得对一切 $x\in U^\circ(x_0)$，有

$$f(x)>r>0\ (\text{或}\ f(x)<-r<0\ ).$$

证 不妨设 $A>0$. 对于任何 $r\in(0,A)$，取 $\varepsilon=A-r$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\quad \Rightarrow f(x)>A-\varepsilon>r>0.$$

推论：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A<B$，

则 $\exists\delta>0$，$\forall x\in U^0(x_0,\delta)$，有 $f(x)<g(x)$.

性质4（保不等式性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，且在某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\le g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么对于任意 $\varepsilon>0$，分别存在正数 δ_1,δ_2，使当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$$f(x)>A-\varepsilon;$$

而当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $g(x)<B+\varepsilon$.

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，满足

$$A-\varepsilon<f(x)\le g(x)<B+\varepsilon,$$

从而有 $A<B+2\varepsilon$. 因为 ε 是任意正数，所以证得 $A\le B$.

性质5（四则运算法则） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则 $f\pm g$, $f\cdot g$ 在点 x_0 的极限也存在，且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) 又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 x_0 的极限也存在,

并有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

例11 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5$$

$$=2^2-3\cdot 2+5 = 3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

注： 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$， 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$， 则商的法则不能应用.

例12. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $x\to 1$时,分子,分母的极限都是零. $(\dfrac{0}{0}$ 型$)$

先约去不为零的无穷小因子$x-1$后再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2}.$$

(消去零因子法)

例13. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 $x\to\infty$时, 分子、分母的极限都是无穷大. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

先用x^3去除分子分母、分出无穷小, 再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

(无穷小因子分出法)

注: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, 当n = m, \\ 0, 当n > m, \\ \infty, 当n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子, 分母, 以分出无穷小, 然后再求极限.

例14. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $n\to\infty$时,是无限多个无穷小之和.

先变形再求极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} \quad =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad =\frac{1}{2}.$$

性质6. 复合函数极限运算法则

定理：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，且 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$\varphi(x)\neq a$，又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A \qquad ①$$

证：$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A \Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0$，当 $0<|u-a|<\eta$ 时，

有 $|f(u)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a \Longrightarrow$ 对上述 $\eta>0$，$\exists\delta_2>0$，

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x)-a|<\eta$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$， 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$0<|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$$

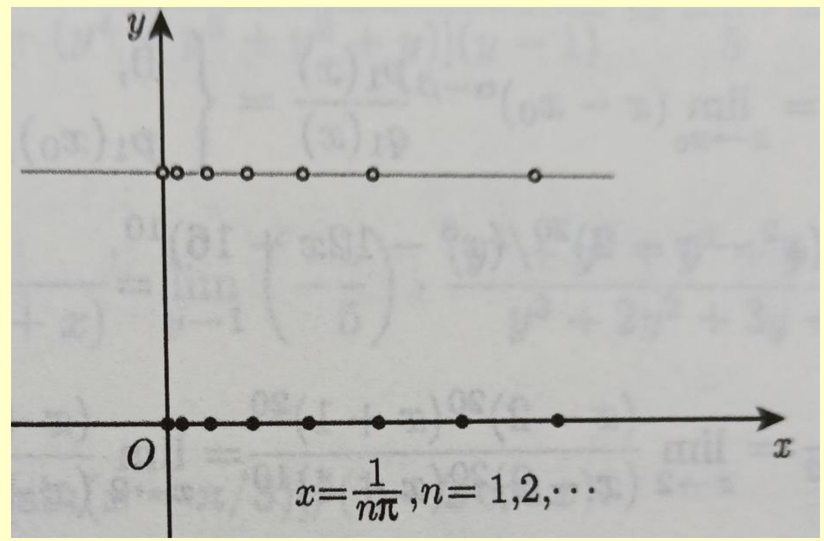
故 $|f[\phi(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$，因此①式成立.

*注： 定理中，条件 $\varphi(x)\neq a$， $0<|x-x_0|<\delta_1$ 不能少，否则结论可能不成立． 例如，

$$u=\varphi(x)=x\sin\frac{1}{x},\qquad y=f(u)=\begin{cases}0, & u=0,\\ 1, & u\neq 0\end{cases}$$

则有 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$ ， $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$ ，

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}0, x=1/(n\pi),\\ 1, x\neq 1/(n\pi),\end{cases} n\in N^+$$



但 $\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))$ 不存在.

性质6（复合函数的极限运算法则）

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\,,u=\varphi(x)\neq a\,,\\ \lim\limits_{u\to a}f(u)=A,\end{array}\right.\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A.$$

意义：复合函数极限法则实质上是变代换法则，即

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]}\ \xrightarrow[a=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]{\text{令 } u=\varphi(x)}\ \boxed{\lim_{u\to a}f(u)}$$

例15. 试确定常数 a 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-a\,x)=0$.

解： 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-a\,x)=\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}=0$$

因为分母 $t\to 0$，所以要使上式成立，必须有

$$\lim_{t\to 0}\left[\sqrt[3]{t^3-1}-a\right]=0,$$

$\Rightarrow\quad -1-a=0,\quad$ 因此 $\quad a=-1.$

2.2.3 函数极限存在的判别，两个重要极限

仍以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为代表，介绍函数极限存在的条件.

对于其他类型的极限, 也有类似的结论.

一、归结原则

二、迫敛性

三、单调有界原理

四、两个重要极限

五、柯西收敛准则

一、归结原则 (Heine定理)

定理 2.2.6 设 f 在 $U^{\circ}(x_0,\eta)$ 有定义. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是: 对于在 $U^{\circ}(x_0,\eta)$ 内以 x_0 为极限的任何数列 $\{x_n\}$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 都存在, 并且相等.

证 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

设 $\{x_n\} \subset U^{\circ}(x_0,\eta)$, $x_n \to x_0$, 那么对上述 δ, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$,

所以 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

(充分性) 设任给 $\{x_n\}\subset \overset{\circ}{U}(x_0,\eta)$, $x_n\to x_0$,

恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

若 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时, 不以 A 为极限, 则存在正数 ε_0, 对于任意正数 δ, 存在 $x_\delta\in \overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 使得

$$|f(x_\delta)-A|\ge\varepsilon_0.$$

现分别取 $\delta_1=\eta,\delta_2=\dfrac{\eta}{2},\cdots,\delta_n=\dfrac{\eta}{n},\cdots,$

存在相应的 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots,\quad x_n\in \overset{\circ}{U}(x,\delta_n)$,

使得 $\quad |f(x_n)-A|\ge\varepsilon_0,\ n=1,2,\cdots.$

另一方面, $0<|x_n-x_0|<\delta_n=\dfrac{\eta}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 矛盾.

注1　归结原则有一个重要应用:

若存在$\{x_n\},\{y_n\}\subset U^\circ(x_0)$, $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, 但是

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A\neq B=\lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

注2　$x\to x_0^+$时的归结原则如下:

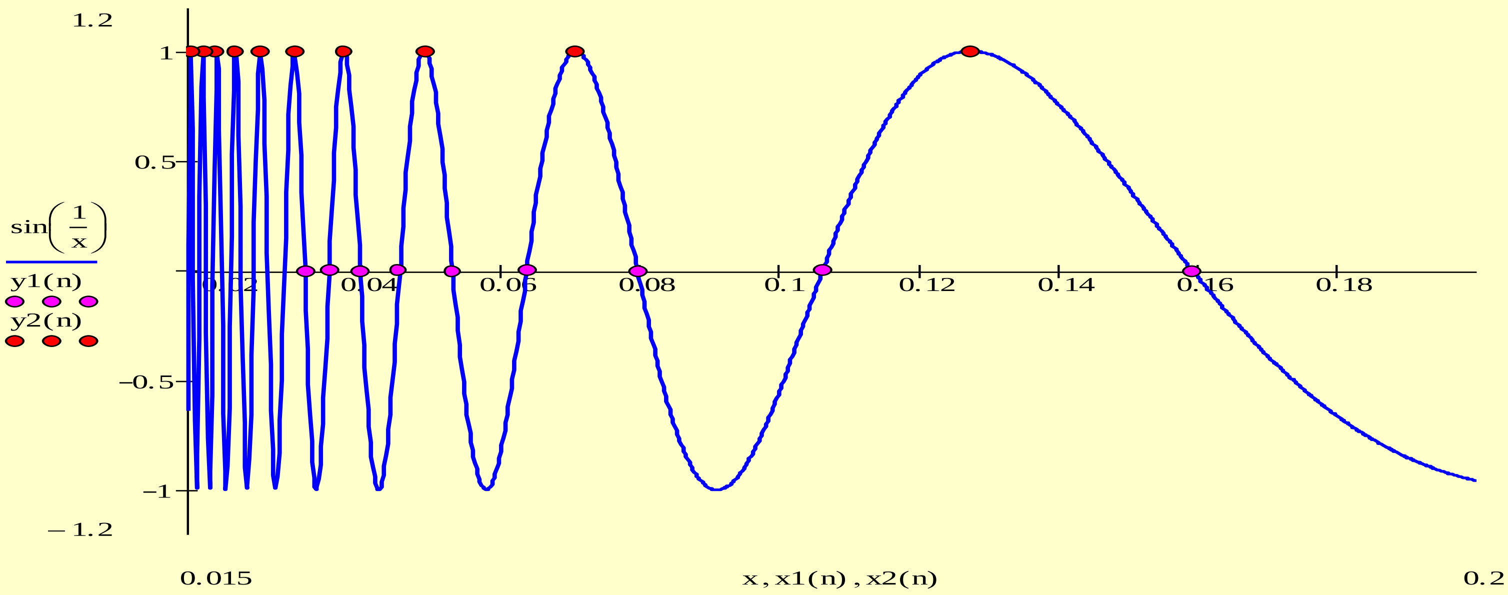
定理　设$f(x)$在x_0的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$有定义，则

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{任给}\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0),\ x_n\to x_0, \\ \text{必有}\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A. \end{cases}$$

例16. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 都不存在.

解 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$, $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n},$$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



二、迫敛性

定理 2.2.7（迫敛性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 且在 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$. 那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, 所以对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon,\quad A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon.$$

再由定理的条件，得 $A-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<A+\varepsilon$.

这就证明了 $h(x)$ 在点 x_0 的极限存在，并且就是 A.

例 17. 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解　由取整函数的性质，$\dfrac{1}{x}-1<\left[\dfrac{1}{x}\right]\le\dfrac{1}{x}$. 当 $x>0$ 时，有 $1-x<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1$，由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，因此由追敛性得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$；又当 $x<0$ 时，有 $1<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\le 1-x$，同理得 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. 于是求得

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

例18. 求证 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1\ (a>1)$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=1$, 所以 $\forall\varepsilon>0, \exists N$,

当 $n\ge N$ 时, 有 $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n}}<a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon$, 特别又有

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon\,.$$

取 $\delta=\dfrac{1}{N}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时,

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}<a^{x}<a^{\frac{1}{N}}<1+\varepsilon\,,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ 得证.

注：本利实际上证明了 a^x 在 $x=0$ 处连续.

有例18可得： $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1\,(0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1.$

例19. **设** $a_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$，**证明：**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max_{1\le i\le n}\{a_i\}.$$

证： **设** $\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}=a_k\ (1\le k\le n)$，**则当** $x>0$ **时，有**

$$a_k\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{na_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a_k$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=1$, 所以由追敛性可知原式成立.

三、单调有界原理*

相应于数列极限的单调有界定理，关于 $x \to x_0^+$， $x \to x_0^-$，$x \to +\infty$和 $x \to -\infty$ 这四种类型的单侧极限也有相应的定理.

现以 $x \to x_0^+$ 这种类型为例叙述如下：

定理： 设 f 是定义在 $U_+^0(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 存在.

证：不妨设 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上递增. 因 f 在 $U_+^0(x_0)$ 上有界，由确界原理，$\inf\limits_{x \in U_+^0(x_0)} f(x)$ 存在，记为 A． 下证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$

下证 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

事实上，任给 $\varepsilon>0$，按下确界定义，存在 $x'\in U_+^0(x_0)$，使得 $f(x')<A+\varepsilon$. 取 $\delta=x'-x_0>0$，则由 f 的递增性，对一切 $x\in(x_0,x')=U_+^0(x_0;\delta)$，有 $f(x)\le f(x')<A+\varepsilon$.

另一方面，由 $A\le f(x)$，更有 $A-\varepsilon\le f(x)$. 从而对一切 $x\in U_+^0(x_0;\delta)$ 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

这就证得 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

思考题：

请写出函数极限其它三种形式（$x \to x_0^-, x \to -\infty, x \to +\infty$ ）的单调有界原理.

例：设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调增，且有上界，证明极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$ 存在.

四、柯西收敛准则

这里给出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的柯西收敛准则, 请读者自行写出其他五种极限类型的柯西收敛准则，并证明之.

定理: 设 $f(x)$ 在 $+\infty$ 的某个邻域 $\{x \mid x > M\}$ 上有定义, 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X\ (> M)$, 对于任意 $x_1, x_2 > X$, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

证（必要性）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则对于任意 $\varepsilon>0$,

存在 $X(>M)$, 对一切 $x>X$,

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以对一切 $x_1, x_2>X$, 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\varepsilon.$$

(充分性) 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $X\,(>M)$,对一切

$x_1, x_2>X$, 有

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$$

任取$\{x_n\}, x_n \to +\infty$，则存在N，当$n > N$时，

$x_n > X$. 又当$n,m > N$时，$x_n, x_m > M$，故

$$\left| f(x_n) - f(x_m) \right| < \varepsilon.$$

这就是说$\{f(x_n)\}$是柯西列，因此收敛.

若存在$\{x_n\},\{y_n\}, x_n \to +\infty, y_n \to +\infty$，使

$$f(x_n) \to A, f(y_n) \to B, B \neq A,$$

则令$\{z_n\}$为$x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_n, y_n, \cdots$，显然$z_n \to +\infty$.

但$\{f(z_n)\}$发散，矛盾.

这样就证明了对于任意的 $\{x_n\}, x_n \to +\infty,$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在且相等.由归结原则, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

注 由柯西准则可知, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在的充要条件是: $\exists \varepsilon_0 > 0,$ 以及 $\{x_n\},\{y_n\},$ 虽然

$$x_n \to +\infty,\ y_n \to +\infty,$$

但是

$$\left| f(x_n) - f(y_n) \right| \geq \varepsilon_0 .$$

例如，对于 $y = \sin x$，取 $\varepsilon_0 = 1$，

$$x_n = 2n\pi,\ y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$

但是 $\left|\sin x_n - \sin y_n\right| = 1 \geq \varepsilon_0$．这就说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 不存在．

注：函数极限柯西收敛准则的其它形式

1) 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **的柯西收敛准则：**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $0 < |x' - x_0| < \delta,$

$0 < |x'' - x_0| < \delta$ **时，** 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

2) 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **柯西收敛准则的否定形式**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0$ **(无论** δ **多么小),**

总存在 $x', x'' \in U^0(x_0; \delta),$

使得 $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0.$

例20. 用柯西收敛准则证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证: 取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$. 对于任意的 $\delta>0$, 取

$$x'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},\quad x''=\frac{1}{2n\pi},$$

则当 $n>\dfrac{1}{\delta}$, 有 $0<|x'-0|=\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2}<\dfrac{1}{n}<\delta,$

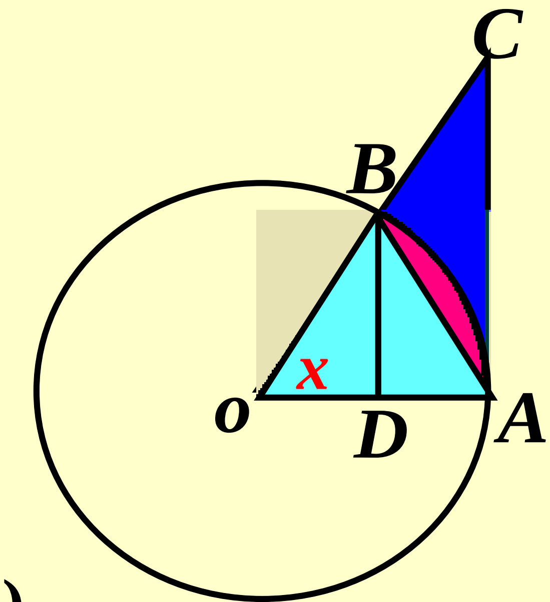
$$0<|x''-0|=\frac{1}{2n\pi}<\frac{1}{n}<\delta,$$

且 $|f(x')-f(x'')|=|\sin(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})-\sin 2n\pi|=1>\dfrac{1}{2}=\varepsilon_0,$

由柯西收敛准则, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

五、两个重要极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　$(\dfrac{0}{0}\text{型})$



设单位圆 O，圆心角 $\angle AOB = x$，$(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得 ΔACO.

扇形 OAB 的圆心角为 x，　ΔOAB 的高为 BD，

于是有 $\sin x = BD$，　$x =$ 弧 AB，　$\tan x = AC$，

$\therefore \sin x < x < \tan x,$ 即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

上式对于 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 也成立. 当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$0 < |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2} = 0,$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1,$ 又 $\because \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1,$ $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

一般地： $\boxed{\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1}$

例21. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{1}{\cos x}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x/\alpha x}{\sin \beta x/\beta x}\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{t=\arcsin x}{\underset{x=\sin t}{=}}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

例22. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$=\frac{1}{2}.$$

（2） $\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e}$ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$

一般地：

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \quad \text{或} \quad \lim_{g(x)\to 0}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}=e$$

证明：当 $x \geq 1$时， 有 $[x] \leq x \leq [x]+1$,

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^{x} \leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]}) \quad = e,$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1} \quad = e,$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

注 若令 $t=\frac{1}{x}$, 则 $x\to\infty$ 时, $t\to 0$. 可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\ .$$

例23. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}]^{-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{-x})^{-x}} = \dfrac{1}{e}$.

例24. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\dfrac{1}{x+2})^{-4} = e^{2}$.

例25. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$.

解 因为 $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-\frac{n}{n-1}}\geq\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}-2}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, $\frac{n-1}{n^2}\to 0$, 所以由归结原则,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}=\mathrm{e}.$$

再由迫敛性，求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$

思考题

泊松定理： 设 $\lambda > 0$ 是个常数，n是任意正整数，设 $np_n = \lambda$，则对于任意一个固定的非负整数 k，有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

二项分布　　泊松分布

证明上述等式成立.

定理的解释： 在n重贝努力试验中，事件A在每次试验中发生的概率为 p，出现A的总次数K服从二项分布 $b(n, p)$），当 n 很大 p 很小，$\lambda = np$ 大小适中时，二项分布可用参数为 $\lambda = np$ 的泊松分布来近似。

利用函数的连续性求极限

定理: 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数$f(u)$在点$a$连续,则有

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

例24. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

例25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]$

$$=\ln e=1$$

两个结论：

1. 若 $\lim u(x)=a, \lim v(x)=b$, (a, b有限，且$a>0$),

则$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$.

证：设$y=u(x)^{v(x)}$, 则$\ln y=\ln u(x)^{v(x)}=v(x)\ln u(x)$

$$y=e^{v(x)\ln u(x)}, \quad \lim y=\lim u^v=e^{\lim v\ln u}=e^{b\ln a}=a^b.$$

2. 若 $\lim f(x)=1, \lim g(x)=\infty$, 且 $\lim g(x)(f(x)-1)=\alpha$,

则 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\alpha}$. $(1^{\infty}$型$)$

证：$$f(x)^{g(x)}=\left[1+(f(x)-1)\right]^{g(x)}$$

$$=\left\{\left[1+(f(x)-1)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{[f(x)-1]g(x)}\to e^{\alpha}$$

例26. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\ \frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\sin x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

例27. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\{[1+(1-x)]\}^{\cot\frac{\pi(1-x)}{2}}$

$$=\lim_{x\to1}\left\{[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}\right\}^{\frac{1-x}{\tan\frac{\pi(1-x)}{2}}}$$

$$\because \lim_{x\to1}\frac{1-x}{\tan\frac{\pi(1-x)}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi(1-x)}{2}}{\sin\frac{\pi(1-x)}{2}}\cos\frac{\pi(1-x)}{2}\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{2}{\pi}}$

小 结

1. 函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A.$$

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$,∃时刻,从此时刻以后,

恒有$|f(x) - A| < \varepsilon$. (见下表)

过　程	$n\to\infty$	$x\to\infty$	$x\to+\infty$	$x\to-\infty$
时　刻	N			
从此时刻以后	$n>N$	$\lvert x\rvert>N$	$x>N$	$x<-N$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$			

过　程	$x\to x_0$	$x\to x_0^+$	$x\to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$0<x-x_0<\delta$	$-\delta<x-x_0<0$
$f(x)$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$		

2.极限存在定理:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.}$$

3. 函数极限的性质: 唯一性、局部有界性、局部保号性、不等式、归结性质、四则运算、复合函数的极限.

4. 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

5. 函数极限存在性的判别准则.

思考题

试问函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在？当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

思考题解答

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(5+x^2) = 5,$$ 左极限存在,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$ 右极限存在,

$$\because \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \therefore \lim_{x\to 0} f(x)$$ 不存在.

练 习 题

一、填空题:

1、当 $x \to 2$ 时，$y = x^2 \to 4$，问当 δ 取____时，只要 $0 < |x-2| < \delta$，必有 $|y-4| < 0.001$.

2、当 $x \to \infty$ 时，$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$，问当 z 取________时，只要 $|x| > z$，必有 $|y-1| < 0.01$.

二、用函数极限的定义证明:

1、$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{2x+1} = 2$

2、$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$

三、试证:函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

四、讨论：函数 $\phi(x) = \dfrac{|x|}{x}$ 在 $x \to 0$ 时的极限是否存在?

练习题答案

一、1、0. 0002；　　　　　　2、$\sqrt{397}$.

四、不存在.