5.1.3 有理函数和可化为有理函数的不定积分

- 基本积分法：分项积分法；换元积分法；分部积分法
- 初等函数 $\underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}}$ 初等函数

本节内容:

一、有理函数的积分

二、可化为有理函数的积分

一、 有理函数的积分

有理函数:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$m\le n$时, $R(x)$为假分式; $m>n$ 时, $R(x)$为真分式

$$\text{有理函数} \xlongequal[\text{相除}]{} \text{多项式}+\boxed{\text{真分式}}$$

$$\Big\downarrow \text{分解}$$

$$\boxed{\text{若干部分分式之和}}$$

其中部分分式的形式为

$$\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\quad (k\in \mathrm{N}^+,\ p^2-4q<0)$$

将有理真分式 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为部分分式的步骤:

第一步: 将$Q(x)$在实数系内作标准分解:

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$$

第二步: 根据上述分解式的各个因子, 写出对应的部分分式.

对应$(x-a)^k$的部分分式为:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

对应 $(x^2+px+q)^k$ 的部分分式为:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$$

第三步: 通分后, 通过比较分子同次项的系数, 或代入特殊值的方式, 确定以上待定系数.

设给定分式 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. 按照普遍定理它有分解式

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

我们由恒等式

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2)$$

确定系数 A,B,C,D,E. 使左右两端同幂次的 x 的系数相等, 得到五个方程的方程组

$$\begin{array}{c|l}
x^4 & A+B=0, \\
x^3 & -2B+C=0, \\
x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\
x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\
x^0 & A-2C-2E=13.
\end{array}$$

由此

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

最后

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

四种典型部分分式的积分:

1. $$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln\left|x-a\right| + C$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \qquad (n>1)$$

3. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

4. $$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x$$

$(p^2-4q<0\ ,\ n>1)$

变分子为

$$\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})$$

再分项积分

对于积分： 3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \quad (p^2-4q<0)$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{1}{2}Ap)}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B-\frac{1}{2}Ap)\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

令 $t = x+\frac{p}{2}$, $a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, $\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$

对于积分：4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx \quad (p^2-4q<0,\ n>1)$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=\frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}+(B-\frac{1}{2}Ap)\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{p}{2})}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}$$

$$=\frac{A}{2(1-n)}(x^2+px+q)^{1-n}+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$$

其中 $\quad t=x+\frac{p}{2} \quad a=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \quad I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$.

解: 令 $u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}, v'=1$, 则 $u'=\frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, v=x$

$$\therefore\ I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

得递推公式 $I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n$

1. $\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x \quad = A\ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}\mathrm{d}x = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C \;\; (n>1)$

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx \; (n>1)$

$= \frac{A}{2(1-n)}(x^2+px+q)^{1-n} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$

这四类积分均可积出, 且原函数都是初等函数.

结论: 有理函数的原函数都是初等函数.

例1. 将下列真分式分解为部分分式：

$$(1)\ \frac{1}{x(x-1)^2};\qquad (2)\ \frac{x+3}{x^2-5x+6};\qquad (3)\ \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}.$$

解: (1) 用拼凑法

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{x-(x-1)}{x(x-1)^2}\quad=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

(2) 用**赋值法**

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

$$\therefore \quad A=(x-2)\cdot \text{原式}\Big|_{x=2}=\frac{x+3}{x-3}\Big|_{x=2}=-5$$

$$B=(x-3)\cdot \text{原式}\Big|_{x=3}=\frac{x+3}{x-2}\Big|_{x=3}=6$$

故 $\quad \text{原式}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$

(3) **混合法**

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=(1+2x)\cdot 原式\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

分别令 $x=0,1$ 代入等式两端

$$\begin{cases} 1=\frac{4}{5}+C \\ \frac{1}{6}=\frac{4}{15}+\frac{B+C}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$原式=\frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x}-\frac{2x-1}{1+x^2}\right]$$

例2. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解：已知

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{1+2x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right]$$

$$\therefore \text{ 原式} = \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln\left|1+2x\right| - \frac{1}{5}\ln(1+x^2) + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

例3. 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right|-\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

思考：如何求 $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$?

提示：变形方法同例3.

例4. 设 $R(x)=\dfrac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}$，求 $\int R(x)dx$.

解: $x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8=(x-2)(x+2)^2(x^2-x+1)$

设 $$\frac{2x^4-x^3+4x^2+9x-10}{x^5+x^4-5x^3-2x^2+4x-8}=\frac{A_0}{x-2}+\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

则 $$\begin{aligned}&2x^4-x^3+4x^2+9x-10\\&=A_0(x+2)^2(x^2-x+1)+A_1(x-2)(x+2)(x^2-x+1)\\&\quad+A_2(x-2)(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-2)(x+2)^2\end{aligned}$$

令 $x=2$ 得 $32=32A_0$, $\qquad A_0=1$

令 $x=-2$ 得 $12=-12A_2$, $\qquad A_2=-1$

比较两边 x^4 的系数,得 $\qquad A_0+A_1+B=1.$

令 $x=0$ 得 $\qquad -10=4A_0-4A_1-A_2-8C$

令 $x=1$ 得 $\qquad 3=9A_0-3A_1-A_2-9(B+C)$

解得: $A_0=1,\ A_1=2,\ A_2=-1,\ B=-1,\ C=1.$

故 $$\int R(x)dx=\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{2}{x+2}dx-\int\frac{dx}{(x+2)^2}-\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln|x-2|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx$$

注意到

$$\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1-1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2})+C$$

所以

$$\int R(x)dx=\ln|(x+2)(x^2-4)\sqrt{x^2-x+1}|+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{4x-2}{3}}+C$$

注　将有理函数分解为部分分式进行积分虽可行，但不一定简便，因此要注意根据被积函数的结构寻求简便的方法.

例5.　求 $I=\int\frac{2x^3+2x^2+5x+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x.$

解: $$I=\int\frac{2x^3+5x}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x+\int\frac{2x^2+5}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^4+5x^2+4)}{x^4+5x^2+4}+\int\frac{(x^2+1)+(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+5x^2+4\right|+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+\arctan x+C$$

例6. 求 $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

解: 原式 $=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}-\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C$$

例7. 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解: 原式 $\displaystyle=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

注意本题技巧
按常规方法较繁

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{1}{a^2+u^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$\int\frac{1}{u^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C\quad(x\neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

因为

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$$

于是可得出分解式为

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

由恒等式

$$1=(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

得到方程组

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0, \\ x^1 & A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0, \\ x^0 & B+D=1, \end{array}$$

由此

$$A=-C=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ B=D=\frac{1}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+1}&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx\\ &=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)+C.\end{aligned}$$

二、可化为有理函数的积分

1. 三角函数有理式的积分

设 $R(\sin x, \cos x)$ 表示三角函数有理式，则

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Big\downarrow \text{令 } t = \tan\frac{x}{2}$$

$\boxed{\text{万能代换}}$

$\boxed{t \text{ 的有理函数的积分}}$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{令}\ t = \tan\frac{x}{2}$$

则 $$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

例8. 求 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

例9. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ (ab \neq 0)$.

解: 原式 $= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan^2 x + (\frac{b}{a})^2}$

$$= \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x) + C$$

说明: 通常求含 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 及 $\sin x\cos x$ **的有理式的积分时, 用代换** $t = \tan x$ **往往更方便 .**

总结一下，有以下规律：

$$\int R(\sin x)\cos x dx \quad 令 \quad u=\sin x$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx \quad 令 \quad u=\cos x$$

$$\int R(\tan x)\sec^2 x dx \quad 令 \quad u=\tan x$$

$$R(\sin x,\ -\cos x)=-R(\sin x,\ \cos x) \quad 令 \quad u=\sin x$$

$$R(-\sin x,\ \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x) \quad 令 \quad u=\cos x$$

$$R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x) \quad 令 \quad u=\tan x$$

例10. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$.

解法 1

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\tan x + b)^2 \cos^2 x}$$

$$\Big\downarrow \text{令 } t = \tan x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{(a\,t + b)^2} = -\frac{1}{a(a\,t + b)} + C$$

$$= -\frac{\cos x}{a(a\sin x + b\cos x)} + C$$

例10. 求 $\int \frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \quad (ab \neq 0)$

解法 2 令 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2+b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x-\varphi)}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x-\varphi) + C$$

$$\varphi = \arctan\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\tan(x - \arctan\frac{a}{b}) + C$$

例11. 求 $\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解: 因被积函数关于 cos x 为奇函数, 可令 $t=\sin x$,

原式 $=\int \frac{(\cos^2 x-2)\cos x\,\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x} = -\int \frac{(\sin^2 x+1)\,\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}$

$$= -\int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{1+t^2+t^4} = -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+1+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}}+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x}+C$$

2. 简单无理函数的积分

被积函数为简单根式的有理式，可通过根式代换化为有理函数的积分. 例如:

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x, \quad 令\ t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b})\,\mathrm{d}x,$$

令 $t = \sqrt[p]{ax+b}$, p 为 m, n 的最小公倍数.

$$\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \rightarrow \int \sqrt{t^2 \pm A^2}\,dt$$

例12. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解: 令 $u=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=u^3-2$, $\mathrm{d}x=3u^2\,\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int \frac{3u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \quad = 3\int \frac{(u^2-1)+1}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$= 3\int (u-1+\frac{1}{1+u})\,\mathrm{d}u$$

$$= 3[\ \tfrac{1}{2}u^2 - u + \ln|1+u|\ ] + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2}$$

$$+ 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+2}\right| + C$$

例13. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解: 为去掉被积函数分母中的根式 , 取根指数 2 , 3 的最小公倍数 6 , 令 $x=t^6$, 则有

$$\text{原式} = \int \frac{6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2}$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 6\left[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2 + t - \ln\left|1+t\right|\right] + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

例14. 求 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}$,则 $x=\frac{1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x=\frac{-2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$

原式 $=\int (t^2-1)t\cdot\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$

$$=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t=-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}+\ln\left|2x+2x\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

对 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 作Euler变换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} t-\sqrt{a}x, & 若 a>0 \\ tx\pm\sqrt{c}, & 若 c>0 \\ t(x-\alpha), & 若 ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta) \end{cases}$$

可将 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 化为有理函数的不定积分.

例如，当 $a>0$ 时，作变换 $\sqrt{ax^2+bx+c}=u-\sqrt{a}x$

则 $$x=\frac{u^2-c}{b+2u\sqrt{a}},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}u^2+bu+c\sqrt{a}}{b+2\sqrt{a}u}$$

$$dx=2\cdot\frac{\sqrt{a}u^2+bu+c\sqrt{a}}{(b+2\sqrt{a}u)^2}du$$

求解 $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的欧拉变换

例15. 求不定积分 $I=\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}.$

解：令 $\sqrt{x^2-2x-3}=x-t$，则

$$x=\frac{t^2+3}{2(t-1)},\quad dx=\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2-2x-3}=\frac{t^2+3}{2(t-1)}-t=\frac{-(t^2-2t-3)}{2(t-1)}$$

故 $$I=\int\frac{2(t-1)}{t^2+3}\cdot\frac{2(t-1)}{-(t^2-2t-3)}\cdot\frac{t^2-2t-3}{2(t-1)^2}dt=-\int\frac{2}{t^2+3}dt$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{3}}+C$$

求解 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的常规步骤

例15. 求不定积分 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}$.

解: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}} = \int \frac{d(x-1)}{x\sqrt{(x-1)^2-4}}$ $\quad (x-1=u)$

$= \int \frac{du}{(u+1)\sqrt{u^2-4}}$ $\quad (u=2\sec\theta)$

$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{(2\sec\theta+1)\cdot 2\tan\theta}d\theta = \int \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ $\quad (\tan\frac{\theta}{2}=t)$

$= \int \frac{2}{t^2+3}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+C$

将变量还原即可.

例16. 求 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

解: 令 $\sqrt{x^2-x+1}=u-x$,则

$$x=\frac{u^2-1}{2u-1},\quad dx=2\cdot\frac{u^2-u+1}{(2u-1)^2},$$

$$x+\sqrt{x^2-x+1}=x+(u-x)=u$$

于是 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int \frac{2(u^2-u+1)}{u(2u-1)^2}du$

$$=2\ln|u|-\frac{3}{2}\ln|2u-1|-\frac{3}{2(2u-1)}+C$$

$$=2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\ln|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1|$$

$$-\frac{3}{2(2x+2\sqrt{x^2-x+1})}+C$$

求 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

解: 令 $\sqrt{x^2+x+1} = u - x$, 则 $u = \sqrt{x^2+x+1} + x$

$$x = \frac{u^2-1}{2u+1}, \qquad dx = 2\cdot\frac{u^2+u+1}{(2u+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{u^2-1}{2u+1}+1\right)\left(u-\frac{u^2-1}{2u+1}\right)} \frac{2(u^2+u+1)}{(2u+1)^2} du = \int \frac{2}{u^2+2u} du$$

$$= \ln\left|\frac{u}{u+2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x+2}\right| + C$$

并不是任何不定积分都是可以积出来的:

(并不是任何不定积分都可以表示为初等函数的形式)

$$\int e^{x^2}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx\ (0<k^2<1)$$

但要注意:任何连续函数都是有原函数的.

(原函数有时要用其它形式表示)

(3) 形如 $\int x^p(a+bx^q)^r\mathrm{d}x$ 的不定积分, 其中, a, b 是非零常数; p, q, r 都是有理数.

显然, 如果 r 是整数, 则只要令 $x=t^N$, 其中 N 是 p 和 q 的公分母, 就可把以上积分化为有理函数的积分. 对于 r 不是整数因而 $(a+bx^q)^r$ 是根式的情况, 先作变换 $x^q=t$, 即 $x=t^{\frac{1}{q}}$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}t$, 从而

$$\int x^p(a+bx^q)^r\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}-1}(a+bt)^r\mathrm{d}t.$$

如果 $\frac{p+1}{q}$ 是整数, 则只要再作变换 $a+bt=u^N$, 其中 N 是 r 的分母, 就可把以上积分化为有理函数的积分. 如果 $\frac{p+1}{q}$ 不是整数, 但 $\frac{p+1}{q}+r$ 是整数, 则把上式右端的积分变形为

$$\frac{1}{q}\int t^{\frac{p+1}{q}+r-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^r\mathrm{d}t,$$

它是前面已经处理过的积分, 因而是能够算出来的. 切比雪夫证明了, 除了以上三种情况, $x^p(a+bx^q)^r$ 的原函数不是初等函数, 因而积分 $\int x^p(a+bx^q)^r\mathrm{d}x$ 是不能算出来的.

Liouville 在十九世纪三十年代对于初等函数的不定积分在什么条件下是初等函数进行过深入的研究 (参见 [54]), 他得到的一个结果是:

定理 设 f, g 为有理函数, g 不是常值函数, 如果 $\int f(x)\, \mathrm{e}^{g(x)}\, \mathrm{d}x$ 是初等函数, 则存在有理函数 h, 使得

$$\int f(x)\, \mathrm{e}^{g(x)}\, \mathrm{d}x = h(x)\, \mathrm{e}^{g(x)} + C.$$

试用这个定理证明: $\int \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ 和 $\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\, \mathrm{d}x$ 都是非初等不定积分 (由后者又可推出 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 也是非初等不定积分).

积分表与软件的使用

积分计算比导数计算灵活复杂, 为提高求积分的效率, 已把常用积分公式汇集成表, 以备查用.

积分表的结构: 按被积函数类型排列

积分表的使用: 1) 注意公式的条件

2) 注意简单变形的技巧

注: 很多不定积分也可通过 **Mathematica** , **Maple**，**Mathcad**等数学软件的符号演算功能求得 .

内容小结

1. 可积函数的特殊类型

$$
\begin{tikzcd}
\text{有理函数} \arrow[d, "\text{分解}"] & & \text{三角函数有理式} \arrow[ll, "\text{万能代换}"'] \\
\text{多项式及部分分式之和} & & \text{简单无理函数} \arrow[u, "\text{三角代换}"'] \arrow[ull, "\text{根式代换}"']
\end{tikzcd}
$$

2. 特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出, 但不一定简便 , 要注意综合使用基本积分法 , 简便计算 .

思考与练习

如何用简便方法求下列积分?

1. $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} \mathrm{d}x \quad (a > 0)$ 　　2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x \cos x}$

解: 1. 原式 $= \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x^3}{(a^3)^2 - (x^3)^2} = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{x^3 + a^3}{x^3 - a^3} \right| + C$

2. 原式 $= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos x} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\mathrm{d} \tan x}{\tan x} + \int \frac{\mathrm{d} \sin x}{\sin^3 x} = \ln |\tan x| - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + C$$

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

分母次数较高，
宜使用倒代换.

解：令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，故

$$\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{1}{t^6}(1+\frac{1}{t^2})}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t = -\int \frac{t^6}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int (t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 - t + \arctan t + C$$

$$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{x} + C$$

4. 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x.$

解：原式 $= \int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{3+\cos x}\mathrm{d}x$

前式令 $u=\tan\frac{x}{2}$；后式配元

$$= \int \frac{1}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u - \int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}(3+\cos x)$$

$$= \int \frac{1}{u^2+2}\mathrm{d}u - \ln|3+\cos x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} - \ln|3+\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}) - \ln|3+\cos x| + C$$

补充例题

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x$，其中 $x=y(x-y)^2$.

解：令 $x-y=t$，则 $x=yt^2$，从而 $x=\frac{t^3}{t^2-1}, y=\frac{t}{t^2-1}$,

$$\int \frac{1}{x-3y}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{3t}{t^2-1}}\mathrm{d}\left(\frac{t^3}{t^2-1}\right)$$

$$=\int \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1|+C$$

2. 计算 $\int \frac{1}{\sqrt{x^{14}-x^2}}\mathrm{d}x.$

解：被积函数的定义域为 $D=\{x \,\big|\, |x|>1\}$，所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^{14}-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{|x|^7\sqrt{1-\frac{1}{x^6}}}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x^6})^2}}d\left(\frac{1}{x^6}\right), & x>1 \\ \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x^6})}}d\left(\frac{1}{x^6}\right), & x<-1\end{cases} \quad =\begin{cases}-\frac{1}{6}\arcsin\frac{1}{x^6}+C, & x>1 \\ \frac{1}{6}\arcsin\frac{1}{x^6}+C, & x<-1\end{cases}$$

3. 计算$I=\int\frac{A\sin x+B\cos x}{C\sin x+D\cos x}\mathrm{d}x.$

解：将分子拆成分母及其导数两部分的线性组合，令

$$A\sin x+B\cos x=m(C\sin x+D\cos x)+n(C\cos x-D\sin x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}mC-nD=A\\ mD+nC=B\end{cases}$$ 解得 $m=\frac{AC+BD}{C^2+D^2}$, $n=\frac{CB-AD}{C^2+D^2}$. 所以

$$I=\int(m+n\frac{C\cos x-D\sin x}{C\sin x+D\cos x})\,\mathrm{d}x$$

$$=mx+n\int\frac{d(C\sin x+D\cos x)}{C\sin x+D\cos x}$$

$$=mx+n\ln|C\sin x+D\cos x|+C'$$

4. 计算 $I=\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x.$

解法1：不妨设 $a<x<b$ ，令 $\frac{x-a}{b-a}=\sin^2\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则

$$\frac{b-x}{b-a}=\cos^2\theta,\quad dx=2(b-a)\sin\theta\cos\theta d\theta,$$ 于是

$$I=\int\frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=2\theta+C$$

$$=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

解法2： 令 $x-a=t^2(b-x)\ \ (t>0)$， 则

$$t=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}},\qquad x=\frac{bt^2+a}{1+t^2},$$

$$I=\int\frac{1}{(b-x)\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{d\left(\dfrac{bt^2+a}{1+t^2}\right)}{\left(b-\dfrac{bt^2+a}{1+t^2}\right)t}$$

$$=2\int\frac{1}{1+t^2}dt=2\arctan t+C$$

$$=2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

解法3：

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{b-x}}\frac{1}{\sqrt{x-a}}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{\sqrt{b-x}}\mathrm{d}\sqrt{x-a}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x-a}}{\sqrt{(b-a)-(\sqrt{x-a})^2}}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}\right)^2}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

解法4: $$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{2x-(a+b)}{b-a}+C.$$

解法5： 令 $x=a\cos^2\theta+b\sin^2\theta \quad (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$， 则

$$x-a=(b-a)\sin^2\theta,\qquad b-x=(b-a)\cos^2\theta\,,$$

$$\theta=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}},\qquad dx=2(b-a)\cos\theta\sin\theta\,d\theta.$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x.$$

$$=\int\frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta d\theta}{(b-a)\sin\theta\cos\theta}=\theta+C$$

$$=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

5. 计算 $I=\int\frac{1+\ln x}{x^{-x}-x^{x}}\mathrm{d}x.$

解： $I=\int\frac{x^{x}(1+\ln x)}{1+x^{2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{d(x^{x})}{1+(x^{x})^{2}}=\arctan x^{x}+C.$

6. 计算 $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$

解： 令 $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ ，则 $\frac{1}{t}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ ， $x=\frac{1}{4}(t-\frac{1}{t})^{2}$

$$I=\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}(t-\frac{1}{t})^{2}\right)=\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2}}-\frac{1}{t^{3}})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^{2}})+C=\cdots.$$