# 2016 - 2017 学年第一学期

# 《微积分（一）》（上）课程考试试卷(A卷) (闭卷)

**院(系)** 启明学院　**班级**________　**学号**__________　**姓名**________

考试日期：2017.01.06　　　　考试时间: 8:30-11:00 AM

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

**一、填空题** (共7小题，每小题3分，共21分)

(说明：请把答案写在题中横线上，不必写出中间过程.)

1. 设集合$E=\{y|y=\arctan\dfrac{1}{x}, x<0\}$, 则$\sup E$=__________, $\inf E$=__________.

2. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{1-\cos x}=1$, 则$a=$__________, $b=$__________.

3. 曲线$y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$的渐近线有____________________________________.

4. 设$\int f(x)dx=\dfrac{e^x}{x}+C$, 则$\int\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=$________________________.

5. 阿基米德螺线$r=2\theta(0\le\theta\le 2\pi)$ 与极轴所围的面积为________________.

6. 设$n$为正整数，$m(n)$为函数$y=\ln(1+x)$在点$x_i=\dfrac{i}{n}(i=1,\cdots,n)$上的平均值，则$\lim\limits_{n\to\infty}m(n)=$________________.

7. 判断无穷积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的Cauchy准则是：

____________________________________________________________.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 二、**选择题** (共3小题，每小题3分，共9分)

8. 在$(0,+\infty)$上不一致连续的函数有 ........................................ (　　)

A) $\ln x$　　B) $\ln(1+x)$　　C) $\arctan x$　　D) $\arctan(1+x)$

9. 设函数$f(x)$具有任意阶导数, 且$f'(x) = f^2(x)$, 则当$n$为大于2的正整数时, $f^{(n)}(x)$是 ........................................ (　　)

A) $n[f(x)]^{2n}$　　B) $n![f(x)]^{2n}$　　C) $n[f(x)]^{n+1}$　　D) $n![f(x)]^{n+1}$

10. 设$f(x)$有二阶连续导数, 且$f'(a)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{|x-a|}=-1$, 则 ................ (　　)

A) $f(a)$是$f(x)$的极小值

B) $f(a)$是$f(x)$的极大值

C) $(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$的拐点

D) $f(a)$不是$f(x)$的极值，$(a,f(a))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

## 三、**计算题** (共5小题, 每小题6分,共30分)

11. 解微分方程: $y''+4y=\sin x$.

12. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt\right)^{\csc 2x}$.

13. 计算$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$.

14. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x(1+\sin x)^2 dx$.

15. 求曲线$y=e^{-x}$与$x$轴及直线$x=0$和$x=1$所围图形绕$x=1$旋转一周所得旋转体的体积.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

**四、解答题** (共2小题,每小题8分,共16分)

(说明：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

16. 判别反常积分$\int_1^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)dx$的敛散性，并给出理由.

17. 求$f(x)=\dfrac{x}{2x^2+3x+1}$在$x=0$处的$n$阶带Lagrange型余项的Taylor公式.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

**五、证明题** (共3小题,每小题8分,共24分)

18. 设$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续且单调增，证明不等式：

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin^2 x dx \le \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin^2 x dx.$$

19. 设$f(x)$在$[0,\pi]$上存在二阶导数, 且$f(1)=0$, 证明：方程$f''(x)+2f'(x)\cot x = f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有一个根.

20. 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上连续的正值的偶函数，令

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)dt \quad (-a\le x\le a, a>0).$$

(1) 证明$g(x)$是$[-a,a]$上的凸函数.

(2) 若$g(x)$的最小值(依赖于$a$)等于$f(a)-e^{a^2}$, 求$f(x)$.