第3章 函数的连续性

3.1 函数的连续性

3.1.1 函数连续的概念

3.1.2 连续函数的基本性质与初等函数的连续性

3.1.3 闭区间上函数的性质

3.2 实数的连续性

3.1 函数的连续性

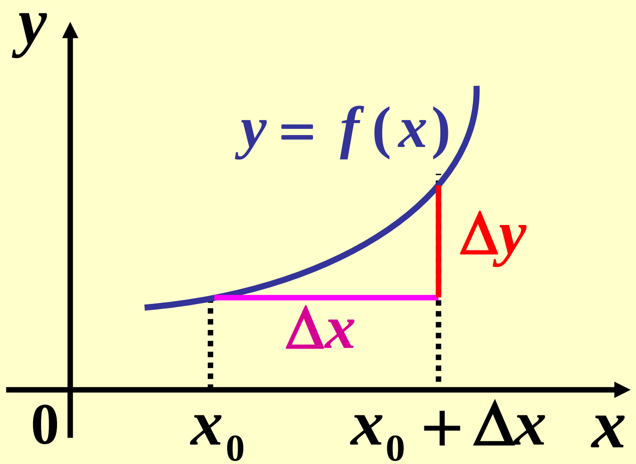
3.1.1 函数连续的概念

1. 函数的增量

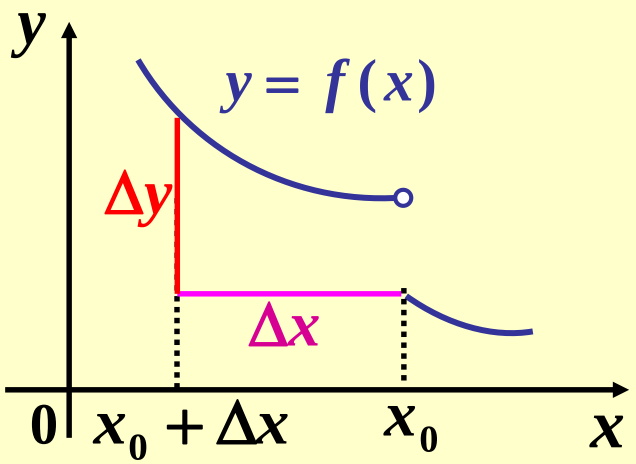
设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义, $\forall\ x \in U(x_0,\delta)$,

$\Delta x = x - x_0$, 称为自变量在点 x_0的增量.

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$,称为函数$f(x)$相应于Δx的增量.



$\Delta x > 0$



$\Delta x < 0$

2. 连续的定义

定义 1 设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，如果当自变量的增量Δx趋向于零时，对应的函数的增量Δy也趋向于零，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那末就称函数 $f(x)$在点x_0连续，x_0称为$f(x)$的连续点.

设 $\Delta x = x - x_0$，　$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$，$\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义：

$f(x)$ 在点 x_0 连续（即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$） $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

函数连续的三个等价定义:

$f(x)$在x_0处连续

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当$|x - x_0| < \delta$时,

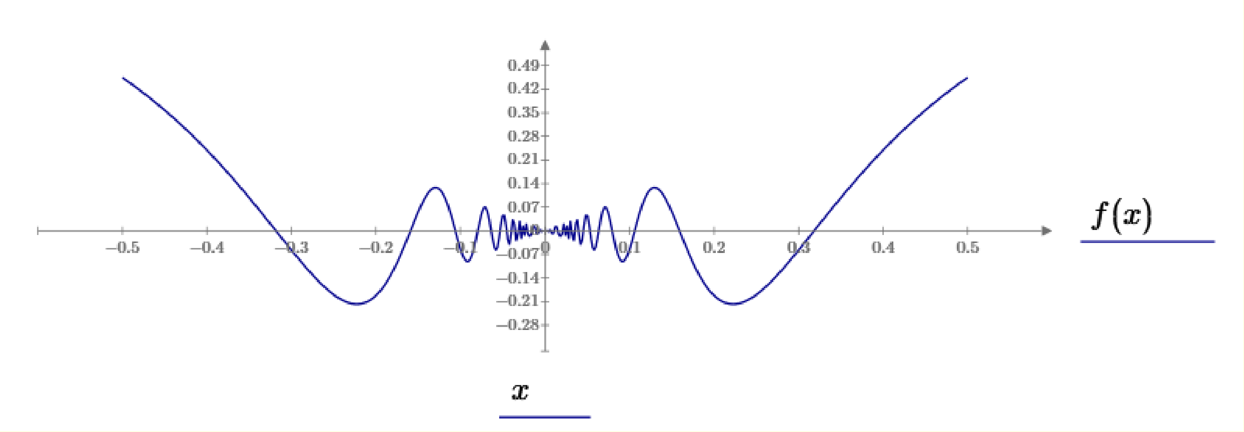
恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

例1. 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$

处连续.

证 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,

所以由定义2知, 函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.



例2. 证明 $f(x)=xD(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

证 因为 $f(0)=0$, $|D(x)|\le 1$, $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} xD(x)=0=f(0).$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

注意:上述极限式绝不能写成

$$\lim_{x\to 0} xD(x)=\lim_{x\to 0} x\lim_{x\to 0} D(x)=0.$$

3. 单侧连续

若函数 $f(x)$在$(a, x_0]$内有定义,且$f(x_0 - 0) = f(x_0)$,
则称 $f(x)$在点x_0处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0, b)$内有定义,且$f(x_0 + 0) = f(x_0)$,
则称 $f(x)$在点x_0处右连续.

定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

即: $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

例3. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{x}\sin x, & x<0, \\ \pi, & x=0, \\ 2\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} 2\arctan\frac{1}{x}=\pi=f(0),$$

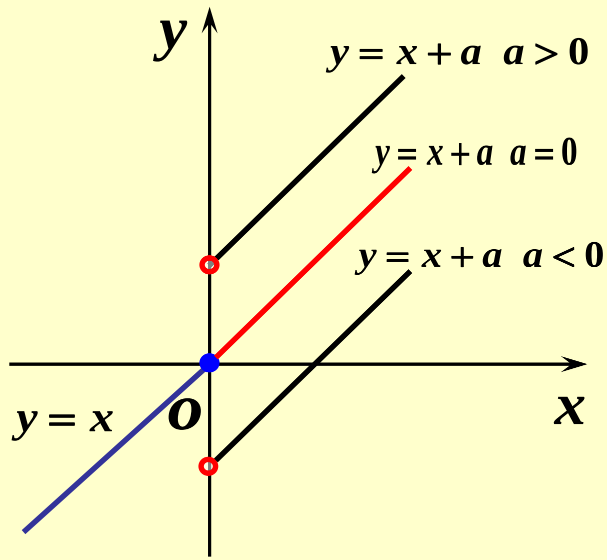
$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} \frac{\pi}{x}\sin x=\pi=f(0),$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to0} f(x)=\pi=f(0),$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x+a, & x>0 \end{cases}$

在 $x=0$ 处的连续性.



解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0=f(0)$,

所以 f 在 $x=0$ 处左连续.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+a)=a$,

所以, 当 $a\neq 0$ 时, f 在 $x=0$ 处不是右连续的;

当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处是右连续的.

综上所述, 当 $a=0$ 时, f 在 $x=0$ 处连续;

当 $a\neq 0$ 时, 在 $x=0$ 处不连续.

4. 连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数, 叫做在该区间上的连续函数, 或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间(a,b)内连续, 并且在左端点$x=a$处右连续, 在右端点$x=b$处左连续, 则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如, 多项式函数在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续的.

例5. 证明函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证 任取$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$\because \left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,$ 则 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$

对任意的α, 当$\alpha\neq 0$时, 有$|\sin\alpha|<|\alpha|$,

故 $|\Delta y|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|<|\Delta x|,$ $\therefore$ 当$\Delta x\to 0$时, $\Delta y\to 0.$

即函数$y=\sin x$对任意$x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

5. 函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断)，并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

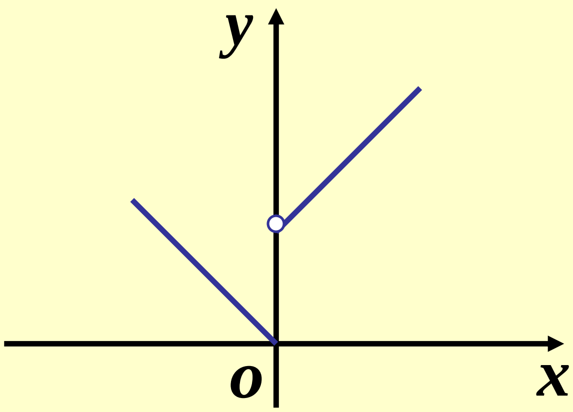
I. 跳跃间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处左, 右极限都存在,但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例6. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\because f(0-0)\neq f(0+0),$

$\therefore x=0$ 为函数的跳跃间断点.

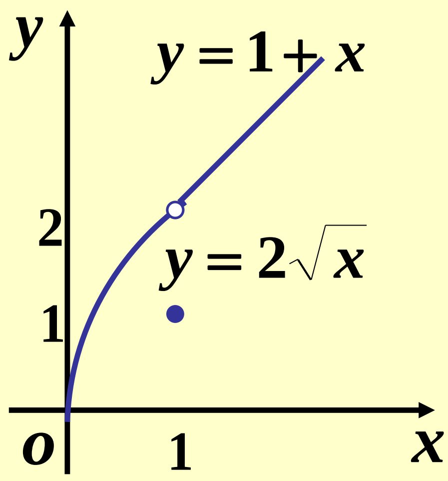


II. 可去间断点 如果 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

例7. 讨论函数

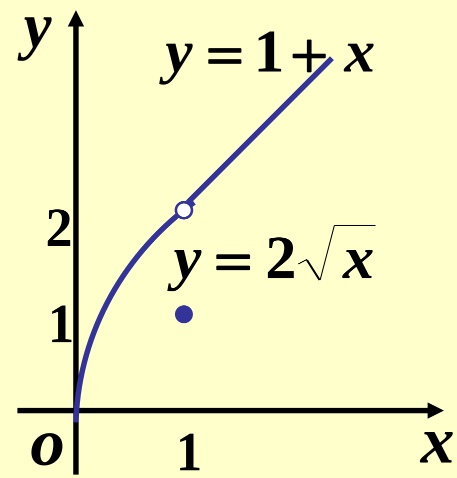
$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1 \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性.



例7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1, & x=1 \\ 1+x, & x>1, \end{cases}$$



在$x=1$处的连续性.

解 $\because f(1)=1,$

$$f(1-0)=2, \qquad f(1+0)=2,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2 \ne f(1),$$

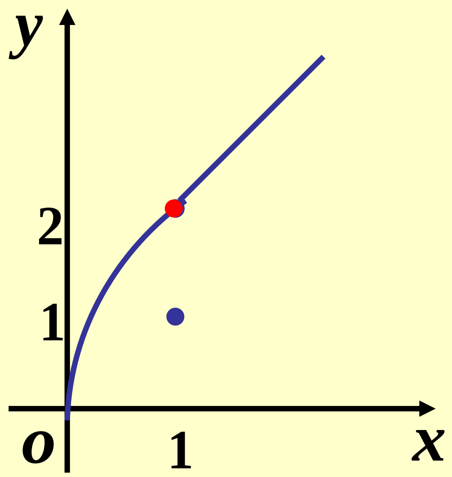
$\therefore x=0$为函数的可去间断点.

注意 可去间断点只要改变或者补充可去间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

如例7中，令 $f(1)=2,$

则 $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x<1, \\ 1+x, & x\ge 1, \end{cases}$

在$x=1$处连续.

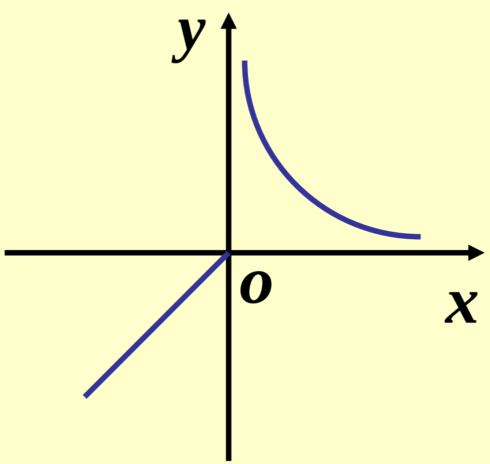


跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在该点左、右极限都存在.

III.第二类间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的第二类间断点.

例8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$在 $x=0$处的连续性.

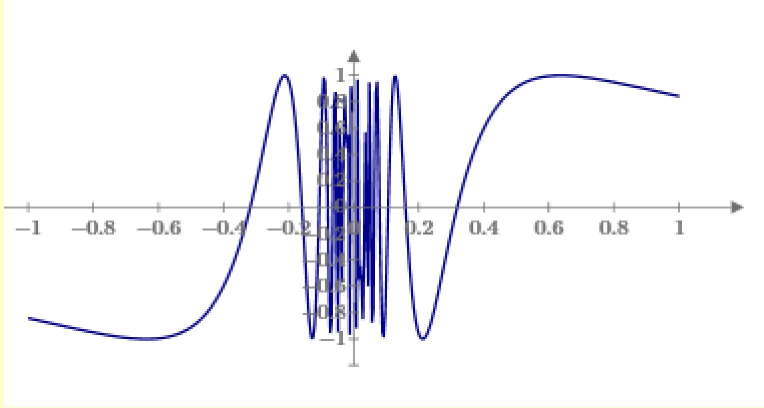


解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore x=1$为函数的第二类间断点.

这时也称其为无穷间断点.

例9. 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.



解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore x=0$ 为第二类间断点.

这时也称其为的振荡间断点.

注意 函数的间断点可能不只是个别的几个点.

例10. 当a取何值时，

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

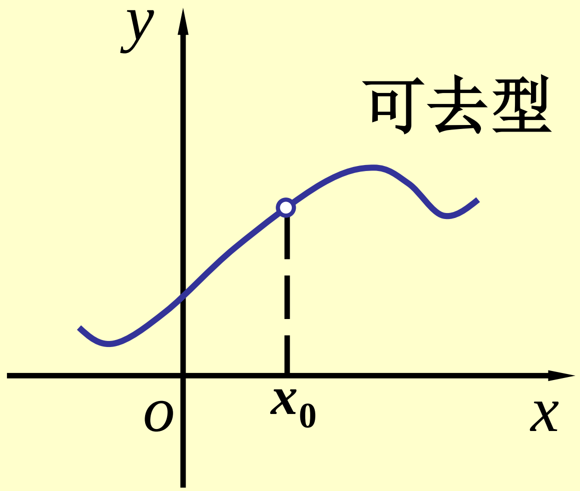
要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

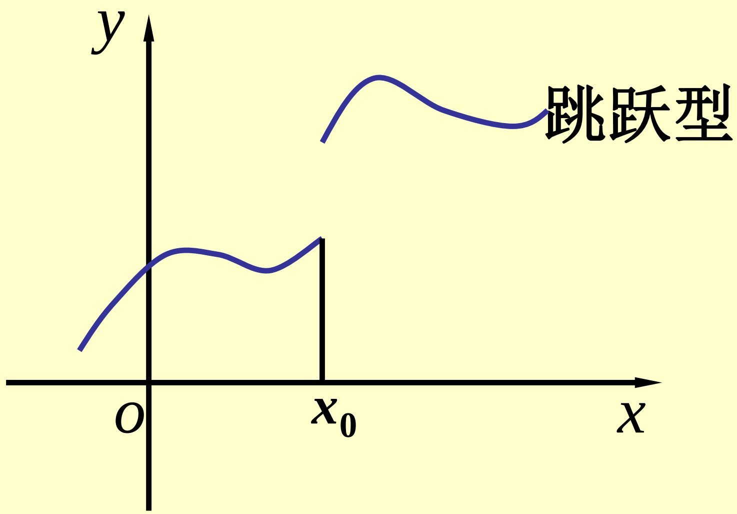
故当且仅当$a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

间断点的分类与判别：

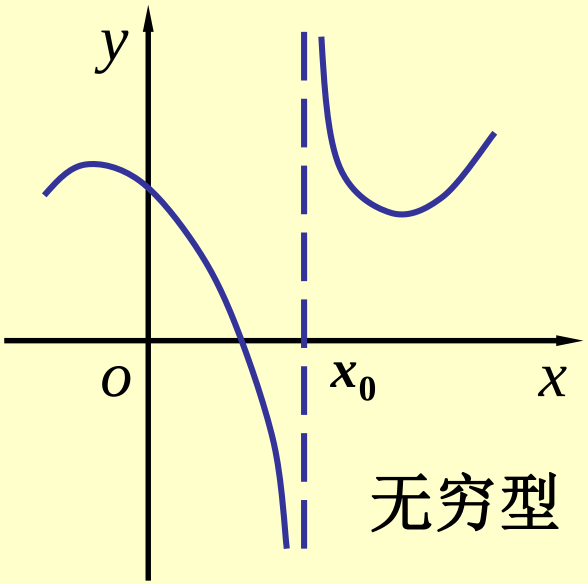
- 间断点
  - 第一类间断点（$f(x_0+0)=A, f(x_0-0)=B$）
    - 可去间断点（$A=B\neq f(x_0)$）
    - 跳跃间断点（$A\neq B$）
  - 第二类间断点（A、B至少有一个不存在）
    - 无穷间断点（$A=\infty$或$B=\infty$）
    - 振荡间断点
    - 其他类型

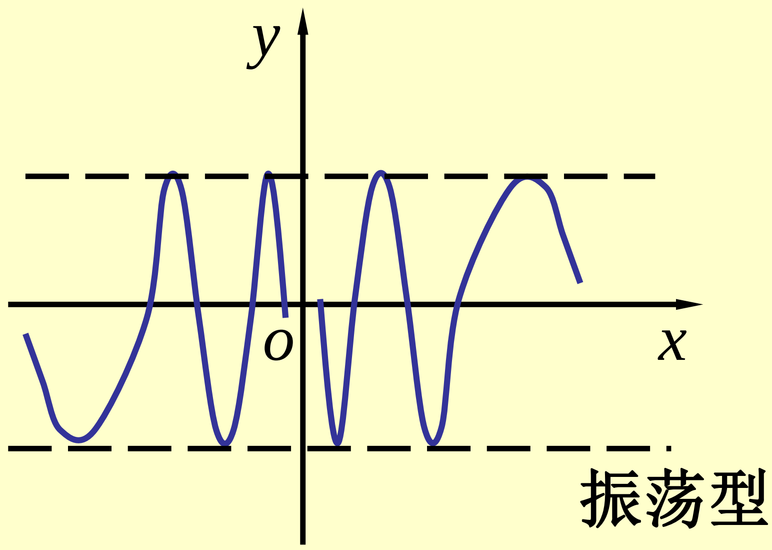
第一类间断点





第二类间断点





思考题：讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处是否连续？若不连续，则是什么类型的间断点？

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{e^y+1} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{y\to -\infty} \frac{1}{e^y+1} = 1 \neq f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续而不左连续,从而不连续. 既然它的左、右极限都存在，那么这个间断点是跳跃间断点.

3.1.2 连续函数的性质与初等函数的连续性

1. 四则运算的连续性

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

例如, $\sin x, \cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域内连续.

2. 反函数与复合函数的连续性

定理2　严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如, $y = \sin x$在$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续,

故 $y = \arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y = \arccos x$ 在$[-1,1]$上单调减少且连续;

$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在$(-\infty, +\infty)$上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 函数 $f(u)$在点a连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

证（略）

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

意义 1.极限符号可以与函数符号互换;

2.这是变量代换($u=\varphi(x)$)的理论依据.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\text{原式} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=y$,　则 $x=\ln(1+y)$,

当 $x\to 0$ 时, $y\to 0$.

$$原式=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1.$$

同理可得　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a.$

定理4 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

注意 定理4是定理3的特殊情况.

例如，$u=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续，

$y=\sin u$在$(-\infty,+\infty)$内连续，

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续.

3. 初等函数的连续性

★ 三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

★ 指数函数 $y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(-\infty, +\infty)$内单调且连续;

★ 对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

在$(0, +\infty)$内单调且连续;

★ $y = x^{\mu} = a^{\mu \log_a x} \longrightarrow y = a^u, \quad u = \mu \log_a x.$

在$(0, +\infty)$内连续, 讨论μ不同值,

(均在其定义域内连续)

定理5 基本初等函数在其定义域内是连续的.

定理6 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

注意 1. 初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续;

例如, $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}$, $D: x=0$, 及$x\geq 1$,

在0点的邻域内没有定义.

函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

注意 2. 初等函数求极限可用代入法.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x - 1}.$

解 原式 $=\sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e-1}.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

利用函数的连续性求极限

例5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=a>0,\ \lim\limits_{x\to x_0} v(x)=b.$ 证明: $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=a^b.$

证: 补充定义 $u(x_0)=a, v(x_0)=b,$ 则$u(x),v(x)$在x_0连续,

设 $y=u(x)^{v(x)}$,则 $\ln y=\ln u(x)^{v(x)}=v(x)\ln u(x)$

$\Rightarrow y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}.$

由连续函数的运算法则, $v(x)\ln u(x)$在x_0连续,

从而$y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$在$x_0$连续. 由此得

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b.$$

例6. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=\alpha$,

证明: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^{\alpha}$.

证: $f(x)^{g(x)}=\left[1+(f(x)-1)\right]^{g(x)}$ (1^{∞}型)

$$=\left\{\left[1+(f(x)-1)\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]}$$

令 $u(x)=[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}$, $v(x)=g(x)(f(x)-1)$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=e>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\alpha$, 由上题结论可知

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)}=e^{\alpha}.$$

例7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.　　$(1^\infty$型)

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=\exp(\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x})$

$$=\exp(\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\ln[1+(\cos\sqrt{x}-1)]=\exp(\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x})$$

$$=\exp(\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}(-\frac{1}{2}x))=\exp(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

注：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)(f(x)-1)=\alpha$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)(f(x)-1)}=e^{\alpha}$.

例8. 求极限：$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.　　(1$^{\infty}$型)

解：$\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}}$

$$= \exp\{\lim_{x\to1}(1-x)\tan[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}]\} = \exp\{\lim_{x\to1}(1-x)\cot\frac{\pi(1-x)}{2}\}$$

$$= \exp\{\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\tan\frac{\pi(1-x)}{2}}\} = \exp\{\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\frac{\pi(1-x)}{2}}\}$$

$$= \exp\{\frac{2}{\pi}\} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

小 结

1. 函数连续与间断的概念

（1）函数在一点连续必须满足的三个等价定义;

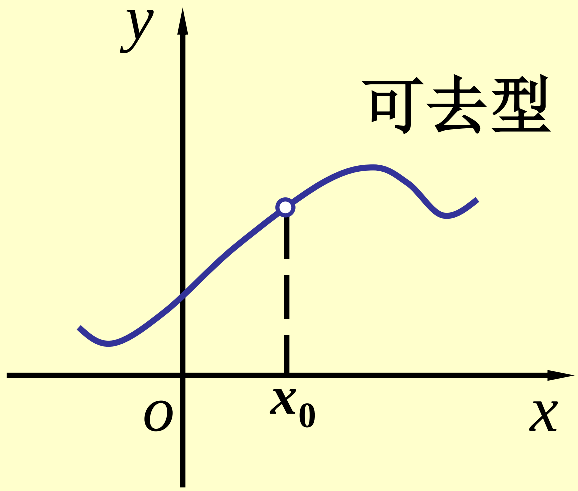
（2）区间上的连续函数;

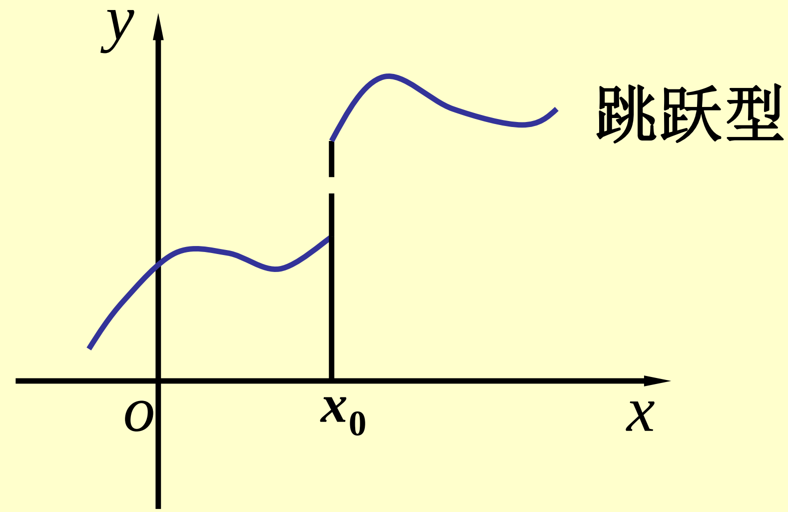
（3）间断点的分类与判别;

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点:可去型,跳跃型.}\\[2em]\text{第二类间断点:无穷型,振荡型.}\end{cases}$$

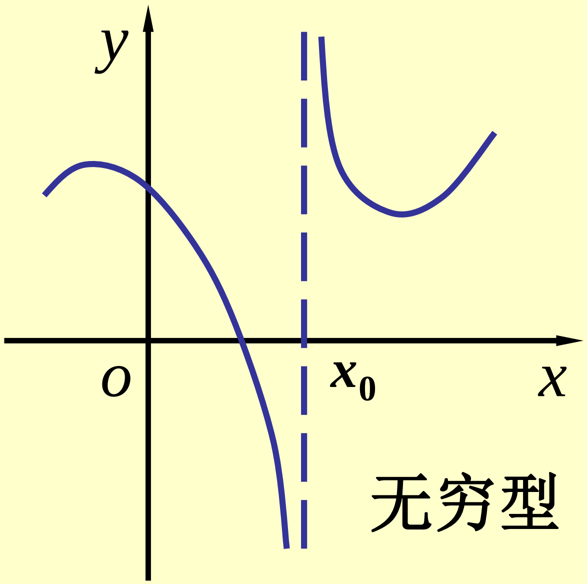
(见下图)

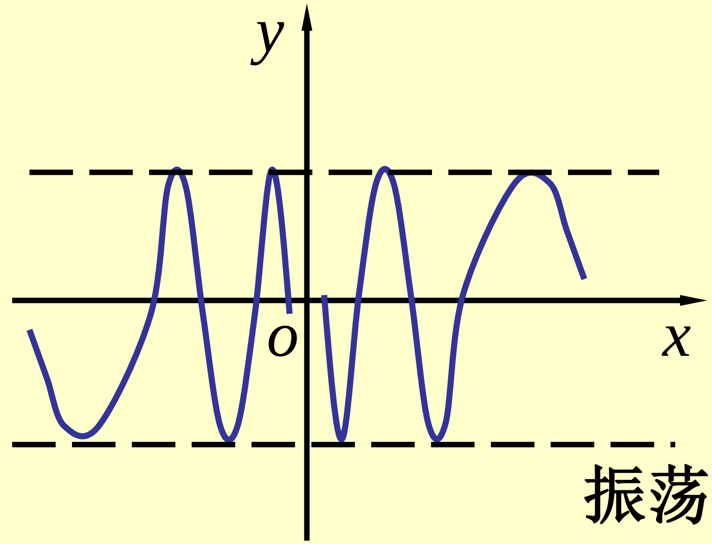
第一类间断点





第二类间断点





2. 连续函数的运算与初等函数的连续性

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性. 两个定理; 两点意义.

初等函数的连续性.

定义区间与定义域的区别;

求极限的又一种方法———取对数法.

思考题1

设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$，$g(x)=1+x^2$，试研究复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的连续性.

思考题1解答

$\because \quad g(x)=1+x^2 \qquad f(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 0, & x=0\\ 1, & x<0\end{cases}$

$\therefore \quad f[g(x)]=\operatorname{sgn}(1+x^2)=1$

$f[g(x)]$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续

$$g[f(x)]=1+(\operatorname{sgn} x)^2=\begin{cases}2, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$g[f(x)]$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上处处连续

$x=0$是它的可去间断点

练 习 题

一、填空题:

1、$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+3x+4}=$______________.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=$______________.

3、$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=$______________.

4、$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\tan^2 x}=$______________.

5、$\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}=$______________.

6、设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<0 \\ a+x, x\geq 0 \end{cases}$，当 $a=$______时，$f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 .

7、函数 $f(x)=\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x-6}$ 的连续区间为

____________________.

8、设 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, 当|x|\le 1时 \\ |x-1|, 当|x|>1时\end{cases}$ 确定

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=$____________; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$_____________.

二、计算下列各极限:

1、$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

2、$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot x}$;

3、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

三、设 $f(x)=\begin{cases} a+x^2, x<0 \\ 1\ , x=0 \\ \ln(b+x+x^2), x>0 \end{cases}$ 已知 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续，试确定 a 和 b 的值.

四、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $f(0)=0$，已知

$|g(x)|\le|f(x)|$，试证函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处也连续.

练习题答案

一、1、2；　2、$\frac{1}{2}$；　3、0；　4、0；

5、$-\frac{1}{2}(\frac{1}{e^2}+1)$；　6、1；

7、$(-\infty,-3),(-3,2),(2,+\infty)$；

8、$\frac{\sqrt{2}}{2}, 0,$ 不存在.

二、1、$\cos a$；　2、1；　3；$\frac{1}{e^2}$.

三、$a=1, b=e$.

思考题2

若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 是否连续？又若 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 连续，$f(x)$ 在 x_0 是否连续？

思考题2解答

$\because f(x)$ 在 x_0 连续， $\therefore \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

且 $0 \le \left| |f(x)| - |f(x_0)| \right| \le |f(x) - f(x_0)|$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$

$$\lim_{x\to x_0} f^2(x) = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right] = f^2(x_0)$$

故 $|f(x)|$、$f^2(x)$ 在 x_0 都连续.

但反之不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在$x_0=0$不连续

但$|f(x)|$、$f^2(x)$在$x_0=0$连续

练 习 题 2

一、填空题：

1、指出 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 在 $x=1$ 是第________类间断点；在 $x=2$ 是第______类间断点 .

2、指出 $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 在 $x=0$ 是第_________类间断点；在 $x=1$ 是第_______类间断点；在 $x=-1$ 是第______类间断点 .

二、研究函数 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$ 的连续性，并画出函数的图形 .

三、指出下列函数在指定范围内的间断点，并说明这些间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续．

1、 $f(x)=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 在 $x\in R$ 上．

2、$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, 在 $x\in R$ 上．

四、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性，若有间断点，判断其类型．

五、试确定 a,b 的值, 使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$,

（1）有无穷间断点 $x=0$；（2）有可去间断点 $x=1$．

练习题2 答案

一、1、一类, 二类;　　2、一类, 一类, 二类.

二、$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续, $x=-1$为跳跃间断点.

三、1、$x=1$为第一类间断点;

2、$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$为可去间断点,

$x=k\pi(k\neq 0)$为第二类间断点.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 1, x=0\end{cases}$$

$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$$f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 0, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

四、 $f(x)=\begin{cases}x, |x|<1\\ 0, |x|=0\\ -x, |x|>1\end{cases}$ $x=1$ 和 $x=-1$ 为第一类间断点.

五、(1) $a=0, b\neq 1;$ (2) $a\neq 1, b=e$.

思考题 3

假设有一个登山者头天上午8点从山脚开始上山，晚上6点到达山顶，第二天上午8点从山顶沿原路下山，下午6点到达山脚。问该登山者在上、下山过程中，会同时经过同一地点吗？为什麼？

思考题3 解答 会.

不妨设山高为h,登山者头天登山的高度函数为$f_1(x)$，第二天登山的高度函数为$f_2(x)$.则 $f_1(x)$、$f_2(x)$在[8,18]上连续，且

$$f_1(8)=0,\ f_1(18)=h;\ f_2(8)=h,\ f_2(18)=0.$$

设$f(x)=f_1(x)-f_2(x)$,则$f(x)$在[8,18]上连续，且$f(8)=-h<0,\ f(18)=h>0$.由零点定理知存在一点$\xi\in$（8,18），使$f(\xi)=0$.亦即证明结论。