5.4 反常(广义)积分

常义积分 $\int_a^b f(x)dx \begin{cases}\text{积分区间有限}\\ \text{被积函数有界}\end{cases}$

$\Big\downarrow$ 推广

反常积分

一、无穷区间的反常积分

二、无界函数的反常积分

I、两类反常积分的定义

1. 无穷积分

定义1 设函数 $f(x)$ 定义在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上，且在任何有限区间 $[a,u]$上可积. 如果存在极限

$$\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx = J, \tag{1}$$

则称此极限J为函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$ 上的无穷限反常积分(简称无穷积分)，记作

$$J=\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

并称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 收敛.

如果极限(1)不存在, 称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

即：
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$$

类似地,可定义:

$f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 的无穷积分:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{b} f(x)dx.$$

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分, 则定义为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

(c 为任意取定的常数)

只要有一个极限不存在 , 就称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .

无穷限的反常积分也称为第一类反常积分.

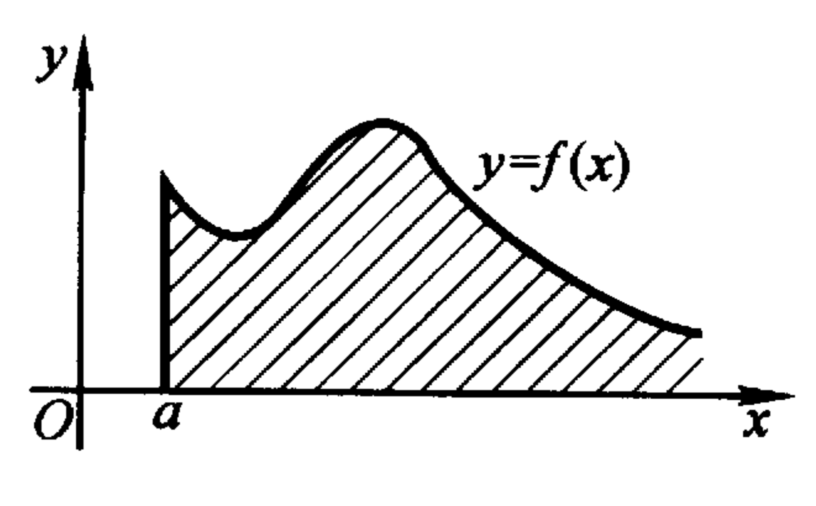
$\int_a^{+\infty} f(x)dx = J$ 收敛的几何意义是:

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为非负连续函数,

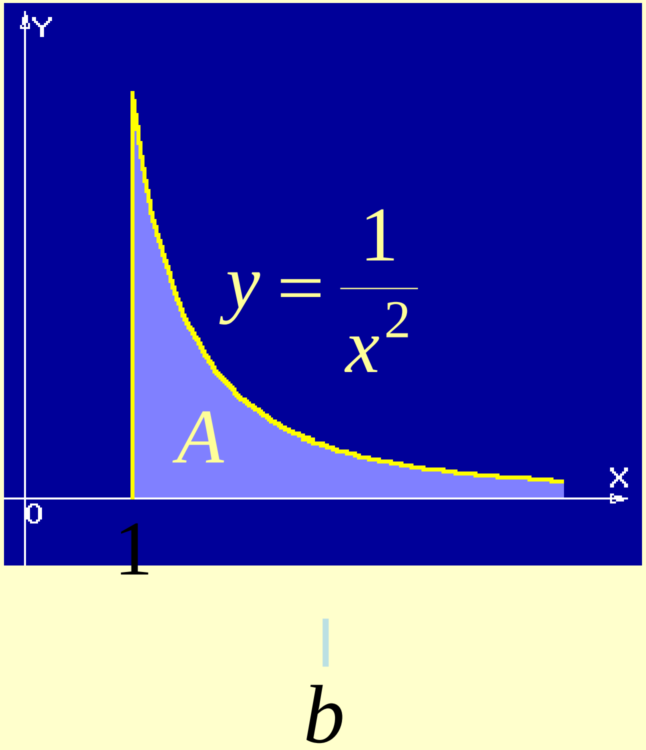
则曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a$

以及x轴之间那一块向右无限延伸的阴影区域的面积为J.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx.$$



例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积。



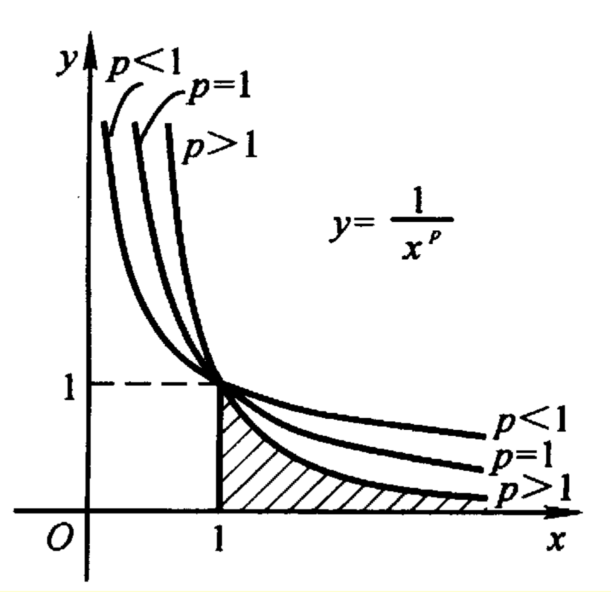
解：面积的含义可理解为

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$A=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

例2. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛； $p\le 1$ 时发散.



证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left[\ln|x|\right]_a^{+\infty}=+\infty$$

当 $p\ne 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 广义积分收敛 , 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时, 广义常积分发散 .

例3. 讨论下列无穷积分的收敛性： $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解：任取实数 a, **讨论如下两个无穷积分：**

$$\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2}\ \text{和}\ \int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

由于 $\lim\limits_{u\to-\infty}\int_{u}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to-\infty}(\arctan a-\arctan u)=\arctan a+\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{u\to+\infty}\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{u\to+\infty}(\arctan u-\arctan a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$,

因此这两个无穷积分都收敛.

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{a}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$

注：上述结果与 a 无关，因此若取 $a=0$,

则可使计算过程更简洁些.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，引入记号

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)\,;\qquad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

则有类似牛–莱公式的计算表达式：

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

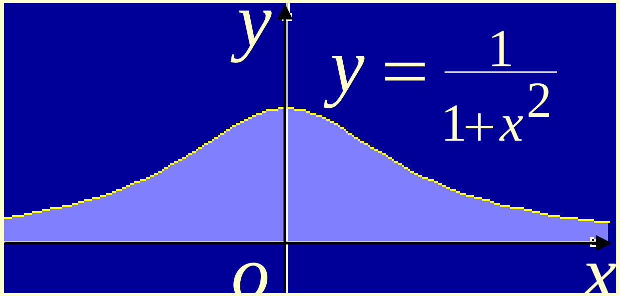
$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$

例4. 计算广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$

$$=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\pi$$



思考: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

注意: 对广义积分, 只有在收敛的条件下才能使用

“偶倍奇零” 的性质, 否则会出现错误 .

性质：三大公式的统一表述

设$f(x)$在(a,b)内连续, $F'(x)=f(x)$, 且

$-\infty \le a < b \le +\infty, -\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, 则

1.$N-L$公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{x\to b^- \\ (+\infty)}} F(x) - \lim_{\substack{x\to a^+ \\ (-\infty)}} F(x)$$

2.换元公式: $$\int_a^b f(x)dx \overset{x=\varphi(t)}{=} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

$$(\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a, \lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b)$$

3.分部积分公式: $$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$uv\Big|_a^b = \lim_{\substack{x\to b^- \\ (+\infty)}} u(x)v(x) - \lim_{\substack{x\to a^+ \\ (-\infty)}} u(x)v(x)$$

例6. 计算 $I=\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx\ (p>0)$

解：$I=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} x de^{-px}=-\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{px}}-\frac{1}{p^2}e^{-px}\Big|_0^{+\infty}$$

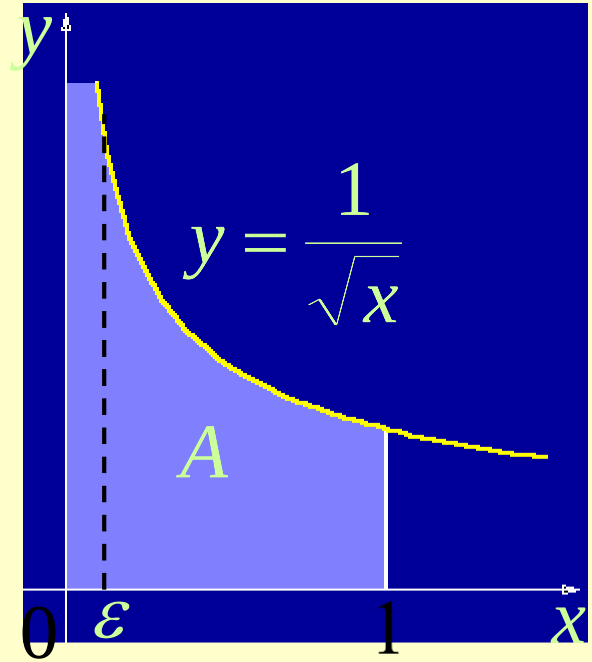
$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{pe^{px}}-\frac{1}{p^2}\lim_{x\to+\infty}(e^{-px}-1)$$

$$=\frac{1}{p^2}$$

2. 无界函数的反常积分

引例:曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴, y 轴和直线 $x=1$ 所围成的开口曲边梯形的面积可记作

$$A=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$



其含义可理解为

$$A=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}2(1-\sqrt{\varepsilon})=2$$

定义2 设 $f(x)$, $x\in(a,b]$, 而在点 a 的右邻域内无界,

取 $\varepsilon>0$, 若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称此极限为函

数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分, 记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$$

这时称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在,

就称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .

类似地 , 若 $f(x), x\in[a,b)$, 而在 b 的左邻域内无界,

则定义 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续，**而在点 c 的邻域内无界，则定义**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类反常积分，无界点常称为瑕点(奇点)．

注: 若被积函数在积分区间上仅存在有限个第一类间断点，则本质上是常义积分，而不是反常积分.

例如, $$\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\mathrm{d}x$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，**则也有类似牛 – 莱公式的的计算表达式：**

若 $\boldsymbol{b}$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a)$

若 $\boldsymbol{a}$ 为瑕点，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a^+)$

若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都为瑕点，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b^-) - F(a^+)$$

注意：若瑕点 $c \in (a,b)$，**则**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \underline{- F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

例7. 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解: 显然瑕点为 $\boldsymbol{a}$, 所以

$$\text{原式} = \left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a^-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例8. 讨论反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性 .

解: $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0^-} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{0^+}^{1} = \infty$

所以反常积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散 .

例9. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \Big[\ln|x-a|\Big]_{a^+}^{b} = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_{a^+}^{b} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该反常积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 该反常积分发散 .

内容小结

1.反常积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{积分区间无限}\\\text{被积函数无界}\end{array}\right\}$ —— 常义积分的极限

2. 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1\end{cases}\qquad (a>0)$$

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

说明: (1) 有时通过换元 , 反常积分和常义积分可以互相转化 .

例如 , $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \qquad (令\ x = \sin t)$

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$= \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} \qquad (令\ t = x - \frac{1}{x})$$

(2) 当一题同时含两类反常积分时, 应划分积分区间, 分别讨论每一区间上的反常积分.

(3) 有时需考虑主值意义下的反常积分. 其定义为

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{v.p.}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (c\text{为瑕点}, a<c<b)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意: 主值意义下反常积分存在不等于一般意义下反常积分收敛 .

例题 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$, 并求其值.

解: $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\xlongequal{令\, t=\frac{1}{x}}\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}\,\mathrm{d}\,(x-\frac{1}{x})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

II. 无穷积分的性质与收敛判别法

一、无穷积分的性质

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$$

记 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 则有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty} F(u).$

函数极限的Cauchy收敛准则:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0, \forall x', x''>M: |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

定理1 (Cauchy收敛准则) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0, \exists G>0, \forall u_1, u_2>G: |F(u_2)-F(u_1)|<\varepsilon,$$

即 $\left|\int_a^{u_2} f(x)dx-\int_a^{u_1} f(x)dx\right|=\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$

性质1(线性性质) 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛,

k_1, k_2 为常数，则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx$ 也收敛, 且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

注: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ 收敛

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx$ 发散

即： 收敛 + 收敛 $\Rightarrow$ 收敛

收敛 + 发散 $\Rightarrow$ 发散

性质2（路径性质，可加性）

若 $f(x)$ 在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，$a<b$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散，

且有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$

例1 若 $f(x)\le h(x)\le g(x),\ x\in[a,+\infty)$，$f(x),\ g(x),$ $h(x)$ 在任意 $[a,u]$上可积，且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则 $\int_a^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,由柯西准则的必要性知：$\forall\varepsilon>0,\exists G>a,\forall u_2>u_1>G,$

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\qquad \left|\int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

又因为 $f(x)\le h(x)\le g(x)$, 所以

$$-\varepsilon<\int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x\le\int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x\le\int_{u_1}^{u_2} g(x)\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

即 $\left|\int_{u_1}^{u_2} h(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$ 再由柯西准则的充分性，即得。

性质3（绝对收敛性）若 $f(x)$ 在任何有限区间$[a,u]$ 上可积，且有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 亦必收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

证 由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，根据柯西准则(必要性)，任给 $\varepsilon>0$，存在 $G\ge a$，当 $u_1,u_2>G$ 时，总有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx\right|=\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon.$$

利用定积分的绝对值不等式，又有

$$\left|\int_{u_1}^{u_2}f(x)dx\right|\le\int_{u_1}^{u_2}|f(x)|dx<\varepsilon.$$

再由柯西准则(充分性)，证得 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛．又因

$$\left|\int_a^{u}f(x)dx\right|\le\int_a^{u}|f(x)|dx\,(u>a),$$

令 $u\to+\infty$ 取极限，即得结论.

当$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛时，称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$为绝对收敛.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为绝对收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

绝对收敛的无穷积分，它自身也一定收敛.

但是它的逆命题一般不成立.

称收敛而不绝对收敛者为条件收敛. 如：$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$

例2 判别 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 的收敛性.

解　显然 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^6+1}}\right| \le \frac{1}{x^{6/5}}$. 又$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6/5}}$ 收敛，

所以，由比较判别法 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{x^6+1}}$ 绝对收敛.

二、比较判别法

定理2 (比较判别法) 设定义在 $[a,+\infty)$ 上的两个非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, 且满足

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad x \in [a,+\infty),$$

则 i) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

ii) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散.

分析: $f(x) \ge 0, \Rightarrow F(u) = \int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 是单调增的.

$$\lim_{u\to+\infty} F(u)\,\exists \Leftrightarrow F(u)\text{在}[a,+\infty)\text{有界}$$

即, $\exists M>0$, 使得 $|F(u)| = |\int_a^u f(x)\mathrm{d}x| \le M, u \in [a,+\infty)$

由以上分析可得定理2的证明.

推论1 设 $f(x)$ 定义于 $[a,+\infty)$ 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，则有:

(i) 当 $|f(x)| \le \dfrac{1}{x^p}, x \in [a,+\infty)$, 且 $p > 1$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛;

(ii) 当 $|f(x)| \ge \dfrac{1}{x^p}, x \in [a,+\infty)$, 且 $p \le 1$ 时 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 发散.

例3 判别 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$ 的收敛性.

解 显然 $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \le \dfrac{1}{x^{3/2}}$. 由于 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}}$ 收敛, 因此

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} \text{ 收敛.}$$

比较判别法的极限形式：

推论2　若非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

则 (i) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;

(ii) 当 $l=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

(iii) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

选用 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 作为比较对象，则有

推论3 (Cauchy判别法)

设 $f(x)$ 定义于 $[a,+\infty)$ 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，且

$$\lim_{x\to+\infty} x^p\,|f(x)| = l.$$

则 **(i)** 当 $p>1,\ 0\le l<+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 收敛；

(ii) 当 $p\le 1,\ 0<l\le+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 发散.

例4 讨论下列无穷限积分的收敛性;

1) $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

解: 1) 由于对任何实数α, 都有

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^{\alpha} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x} = 0, \qquad (p=2, l=0)$$

故 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$ 对任何实数 α 都是收敛的.

2) 由于 $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}} . \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} = 1,$ $\qquad (p=\frac{1}{2}, l=1)$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}} dx$. 发散.

例5 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性 ($k>0$).

解 (i) $p>1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1+p}{2}}\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0.$

因此由推论3知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

(ii) $p\le 1$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\ln^k x}{x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1-p}\ln^k x=+\infty.$

因此同理知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln^k x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

例6 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 .

解： 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,

故无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是发散的 .

例7 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 的敛散性 .

解： 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2}=+\infty$,

故无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 是发散的 .

例8 判别无穷积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^{2}}}$ 的敛散性 .

解: 因为

$$\lim_{x\to+\infty}x^{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}=1,\quad (p=2>1)$$

故无穷积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^{2}}}$ 收敛 .

4° 若 $f(x)=O\left(\frac{1}{x^{p}}\right)$ $(p>1)$ $(x\to+\infty)$，则 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛。若 $f(x)\sim\frac{c}{x^{p}}$ $(c\neq0)$，则

当 $p>1$ 时，$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

当 $p\leqslant1$ 时，$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}$ 发散。

例 9 设 $p,q>0$. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 首先注意被积函数是正的. 因为

$$\sin y\sim y \quad 且 \quad \ln(1+y)\sim y, \qquad 当\ y\to 0,$$

从而

$$\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\sim\frac{1}{x^p} \quad 且 \quad \ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\sim\frac{1}{x^q}, \qquad 当\ x\to+\infty,$$

进而

$$\lim_{x\to+\infty}x^{p+q}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^p\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\lim_{x\to+\infty}x^q\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)=1.$$

所以根据 p 幂比较判别法知, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$ 当 $p+q>1$ 时收敛, 当 $p+q\leqslant 1$ 时发散.

三、Dirichlet判别法与Abel判别法 (一般情形)

定理3 **Dirichlet** 判别法

若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界,

$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上当 $x\to+\infty$ 时单调趋于**0**,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

定理4 **Abel** 判别法

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例10 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 的绝对收敛性 $(p>0)$.

解 (i) 当 $p>1$ 时 因为 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p},x\in[1,+\infty)$,

而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时收敛，故由比较法则推知

$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 收敛，从而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

(ii) 当 $0<p\le 1$ 时条件收敛. 这是因为对任意 $u\ge 1$, 有

$$\left|\int_1^u \sin x dx\right|=|\cos 1-\cos u|\le 2,$$

而 $\frac{1}{x^p}$ 当 $p>0$ 时单调趋于 $0(x\to+\infty)$,

故由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 当 $p>0$ 时总是收敛的.

又由于 $\left|\frac{\sin x}{x^p}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}, \quad x \in [1, +\infty)$

其中 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

满足狄利克雷判别条件，是收敛的，而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x}$ 是发散的，

因此当 $0 < p \le 1$ 时， $\int_1^{+\infty} (\frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}) dx$ 发散，从而

$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^p}\right| dx$ 发散， 即 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 不是绝对收敛的，

所以它是条件收敛的.

总之，当 $0 < p \le 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \mathrm{d}x$ 条件收敛；

当 $1 < p < +\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} \mathrm{d}x$ 绝对收敛.

类似可证:

当 $0 < p \le 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 条件收敛；

当 $1 < p < +\infty$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 绝对收敛.

例11 证明下列无穷积分都是条件收敛的;

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx, \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx, \int_1^{+\infty} x \sin x^4 dx.$$

证 前两个无穷积分经换元 $t = x^2$ 得到

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt, \quad \int_1^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt.$$

由例3已知它们是条件收敛的.

对于第三个无穷积分,经换元 $t = x^2$ 而得

$$\int_1^{+\infty} x \sin x^4 dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \sin t^2 dt,$$

它也是条件收敛的.

例12 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x}dx$ 的收敛性。是否绝对收敛？

解 由例6 知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，而 $\arctan x$ 在 $[1,+\infty)$

上单调由界，由Abel判别法知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x}dx$$ 收敛。

又当 $x\in[\sqrt{3},+\infty)$ 时，$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x}\right|\geq\left|\frac{\sin x}{x}\right|$

由比较判别法和 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$ 发散知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\arctan x}{x}dx$$ 非绝对收敛，因而条件收敛。

III. 瑕积分的性质与收敛判别法

瑕积分的性质与收敛判别,与无穷积分的性质与收敛判别相类似. 因此本节内容大都是罗列出一些基本结论, 并举例加以应用, 而不再进行重复论证.

一、 瑕积分的性质

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx$$

假设 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点（以下同此假设）.

两种广义积分之间存在着密切的联系:

设 $\int_a^b f(x)dx$ 中$x = a$为$f(x)$的瑕点, 作变换

$$y = \frac{1}{x-a}$$

则有 $$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(a+\frac{1}{y})}{y^2}dy$$

柯西收敛准则:

定理1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall u_1, u_2 > M:$

$$|F(u_2) - F(u_1)| < \varepsilon,$$

即 $$|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx| = |\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx| < \varepsilon.$$

定理1 $\int_a^{b} f(x)dx$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u_1, u_2 \in (a, a+\delta):$

$$|\int_{u_1}^{b} f(x)dx - \int_{u_2}^{b} f(x)dx| = |\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx| < \varepsilon.$$

性质1 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ 都收敛, k_1, k_2 为常数,

则 $\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$ 也收敛,且

$$\int_a^{+\infty}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^{+\infty} f_1(x)dx + k_2\int_a^{+\infty} f_2(x)dx.$$

性质1 若 $\int_a^b f_1(x)dx$ 和 $\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛, k_1, k_2 为常数,

则 $\int_a^b[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx$ 也收敛,且

$$\int_a^b[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1\int_a^b f_1(x)dx + k_2\int_a^b f_2(x)dx.$$

性质2 若 $f(x)$在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积, $a<b$,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散,

且有 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx.$

性质2 若 $x=a$为 $f(x)$的瑕点, $c\in(a,b)$,

则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^c f(x)dx$ 同时收敛或同时发散,

且有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

性质3 若 $f(x)$ 在任何有限区间$[a,u]$ 上可积，且有 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 亦必收敛，并有

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x)dx\right|\le\int_a^{+\infty}|f(x)|dx.$$

性质3 若 $f(x)$ 在任何有限区间$[u,b]$ 上可积，且有收敛，则 $\int_a^{b}f(x)dx$ 亦必收敛，并有

$$\left|\int_a^{b}f(x)dx\right|\le\int_a^{b}|f(x)|dx.$$

绝对收敛的瑕积分，它自身也一定收敛.

但是它的逆命题一般不成立.

称收敛而不绝对收敛者为条件收敛.

二、比较判别法

定理2(比较判别法) 设定义在$[a,+\infty)$上的两个非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何有限区间$[a,u]$上可积,且满足

$$0< f(x)\le g(x),\ \ x\in[a,+\infty),$$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 必发散.

定理2(比较判别法) 设 $x=a$ 同为两个非负函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的瑕点,且在任何区间 $[u,b]\subset(a,b]$ 上可积,且满足

$$0< f(x)\le g(x),\quad x\in(a,b],$$

则 当 $\int_a^{b} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{b} f(x)dx$ 也收敛;

当 $\int_a^{b} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{b} g(x)dx$ 必发散.

推论1 设 $f(x)$ 定义于$[a,+\infty)$ 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积，则有:

(i) 当$|f(x)|\le \dfrac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$, 且 $p>1$ 时 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛;

(ii) 当$|f(x)|\ge \dfrac{1}{x^p}, x\in[a,+\infty)$, 且$p\le 1$ 时$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散.

推论1 设 $f(x)$ 定义于$(a,b]$(a为瑕点), 且在任何有限区间 $[u,b]$上可积，则有:

(i) 当 $|f(x)|\le \dfrac{1}{(x-a)^p}$, 且 $p<1$ 时 $\int_a^b|f(x)|dx$ 收敛;

(ii) 当 $|f(x)|\ge \dfrac{1}{(x-a)^p}$, 且 $p\ge 1$ 时 $\int_a^b|f(x)|dx$ 发散.

推论2 若**非负函数** $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在任何 $[a,u]$ 上可积, 且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

则 (i) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散;

(ii) 当 $l=0$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

(iii) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

推论2 若 $f(x),g(x)>0$, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$ 则:

(i) 当 $0<l<+\infty$ 时, $\int_a^{b} f(x)dx$ 与 $\int_a^{b} g(x)dx$ 同敛散;

(ii) 当 $l=0$ 时，若 $\int_a^{b} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{b} f(x)dx$ 也收敛;

(iii) 当 $l=+\infty$ 时，若 $\int_a^{b} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{b} f(x)dx$ 也发散.

柯西判别法　　选用 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 作为比较对象

推论3 设 $f(x)$ 定义于$[a,+\infty)$ 且在任何有限区间 $[a,u]$ 上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\,|f(x)| = l.$

则有:(i)当 $p>1,\ 0\le l<+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 收敛;

(ii)当 $p\le 1,\ 0<l\le+\infty$ 时, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 发散.

选用 $\int_a^{b}\frac{dx}{(x-a)^q}$ 作为比较对象

推论3 设 $f(x)$ 定义于$(a,b]$(a为瑕点),且在任何有限区间 $[u,b]$上可积,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-a)^q\,|f(x)| = l.$

则: (i) 当 $0<q<1,\ 0\le l<+\infty$ 时, $\int_a^{b}|f(x)|\,dx$ 收敛;

(ii) 当 $q\ge 1,\ 0<l\le+\infty$ 时, $\int_a^{b}|f(x)|\,dx$ 发散.

例1 **讨论下列瑕积分的收敛性:**

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$; **2)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx.$

解: 1) 瑕点为 $x=0.$ 又

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4}}\cdot\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{x^{-\frac{1}{4}}}=\lim_{x\to 0^+}(4x^{\frac{1}{4}})=0,$$

$(p=\frac{3}{4}, l=0)$ 故 $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 收敛.

2) 瑕点为 $x=1.$ 又

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln x}=1,$$

$(p=1, l=1)$ 故 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$ 发散.

若$f(x)=O\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right)$ $(p<1)$ $(x\to b-0)$，则瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛。若$f(x)\sim\frac{c}{(b-x)^p}$ $(c\neq 0)$，则

当 $p<1$时，$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$收敛；

当 $p\geqslant 1$时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$发散。

例2. **讨论瑕积分** $\int_0^1 (1-\frac{\sin x}{x})^{-\alpha}\,dx\ (\alpha>0)$ **的敛散性.**

解： 因 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 所以 $x=0$ 是瑕点. 又

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\quad (x\to 0)$$

$$\Rightarrow 1-\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3!}x^2+o(x^2),\qquad \Rightarrow (1-\frac{\sin x}{x})^{-\alpha}\sim\frac{6^\alpha}{x^{2\alpha}}(x\to 0)$$

$\therefore$ 当$0<\alpha<\frac{1}{2}$时，原积分收敛，当$\alpha\geq\frac{1}{2}$时，发散.

例3. 判别瑕积分 $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

解 瑕点为 $x=1$,

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}}\frac{1}{\ln x}=\frac{\sin x}{(x-1)^{1/3}(x^2+x+1)^{1/3}\ln(1+x-1)}.$$

由于 $\frac{\sin x}{(x^2+x+1)^{1/3}} \to \frac{\sin 1}{\sqrt[3]{3}} \neq 0 \quad (x\to 1)$, 从而

$$\frac{1}{(x-1)^{1/3}\ln(1+x-1)} \sim \frac{1}{(x-1)^{1/3}(x-1)}=\frac{1}{(x-1)^{4/3}},$$

因此由 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{4/3}}$ 发散知 $\int_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3-1}\ln x}\mathrm{d}x$ 发散.

例4. 讨论反常积分 $\Phi(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 把反常积分 $\Phi(a)$ 写成

$$\Phi(a)=\int_0^{1}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x=I(a)+J(a).$$

(i) 先讨论 $I(a)$. 当 $a\geq 1$ 时它是定积分;

当 $a<1$ 时它是瑕积分, 瑕点为 $x=0$. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}x^{1-a}\cdot\frac{x^{a-1}}{1+x}=1,$$

因此由定理2的推论3, 当 $0<p=1-a<1$, 即 $a>0$ 时, 瑕积分 $I(a)$ 收敛; 当 $p=1-a\geq 1$, 即 $a\leq 0$ 时, $I(a)$ 发散.

(ii) 再讨论 $J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{1+x}$, 它是无穷积分. 由于

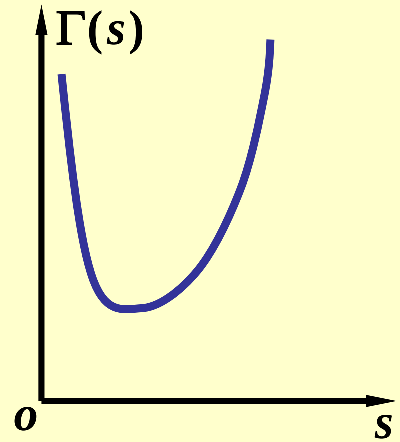
$$\lim_{x\to+\infty} x^{2-\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=1,$$

因此由推论 3, 当 $p=2-\alpha>1$, 即 $\alpha<1$ 且 $l=1$ 时, $J(\alpha)$ 收敛; 而当 $p=2-\alpha\le 1$, 即 $\alpha\ge 1$ 且 $l=1$ 时, $J(\alpha)$ 发散. 综上所述, 总结如下:

α	$\alpha\le 0$	$0<\alpha<1$	$\alpha\ge 1$
$I(\alpha)$	发散	收敛	定积分
$J(\alpha)$	收敛	收敛	发散
$\Phi(\alpha)$	发散	收敛	发散

所以, $\Phi(\alpha)$ 只有当 $0<\alpha<1$ 时才是收敛的.

三、Euler积分 (含参变量 的广义积分)



1. Γ函数: $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x \quad (s>0)$

2. B – 函数:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad (\alpha>0,\ \ \beta>0)$$

转换公式: $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

1. Γ函数的定义域 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x\ \ (s>0)$

当$\alpha<1$时，$x=0$是奇点，故分别考虑积分$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$和$\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$.

仅当两个积分都收敛时，原积分收敛.　因

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-s}\cdot x^{s-1}e^{-x}=1,$$

故当$1-s<1$即$s>0$时, 积分$\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$收敛.　又因

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2}\cdot x^{s-1}e^{-x}=0,$$

故积分$\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$恒收敛.

综上，原积分$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$当$s>0$时收敛，当$s\le 0$时发散.

Γ函数的定义域为：$s>0$.

2. B函数的定义域 $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\ \ (\alpha>0,\ \ \beta>0)$

$x=0,1$都是奇点，分别考虑积分$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$和$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$

因 $$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

故仅当$\alpha>0$时, 积分$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$收敛.

又因 $$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1-\beta}\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=1,$$

故仅当$\beta>0$时, 积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$收敛.

因此原积分在$\alpha>0,\beta>0$时收敛.

即B函数的定义域为：$\alpha>0,\beta>0.$

Γ 函数的几个重要性质： $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}\,x \ \ (s>0)$

1． 递推公式 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0).$

$$\Gamma(n)=n!\ (n\text{为正整数})$$

2． 当 $s\to +0$ 时，$\Gamma(s)\to +\infty.$

3． 余元公式 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin \pi s}\ (0<s<1).$

取 $s=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \Gamma(\dfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

4． 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 中，作代换 $x=u^2,$

有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} u^{2s-1}e^{-u^2}du.$