2.3 曲面与曲线

一、曲面的方程

二、曲线的方程

三、二次曲面

一、曲面的方程

1. 曲面方程的概念

曲面的实例：柱体的表面、探照灯的反射面等.

曲面在空间解析几何中被看成是点的几何轨迹.

曲面方程的定义:

如果曲面S与三元方程$F(x,y,z)=0$有下述关系:

（1）曲面S上任一点的坐标都满足方程;

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程;

那么，方程$F(x,y,z)=0$就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程的图形.

以下给出几例常见的曲面.

例 1 建立球心在点$M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为R的球面方程.

解 设$M(x, y, z)$是球面上任一点,

根据题意有 $|MM_0| = R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

特殊地：球心在原点时方程为 $x^2+y^2+z^2 = R^2$

例 2 已知 $A(1,2,3)$，$B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上任一点，

根据题意有 $|MA|=|MB|$,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

化简得所求方程 $2x-6y+2z-7=0.$

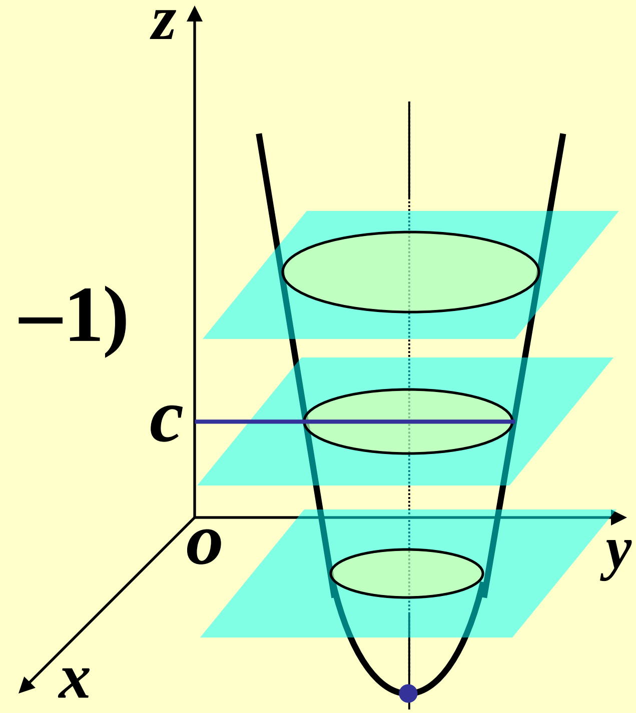
例4 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的?

解　根据题意有 $z \geq -1$

用平面$z=c$去截图形得圆:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面$z=c$上下移动时,
得到一系列圆



圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$

半径随c的增大而增大．图形上不封顶，下封底．

以上几例表明研究空间曲面有两个基本问题：

（1）已知曲面作为点的轨迹时，求曲面方程.

（讨论旋转曲面）

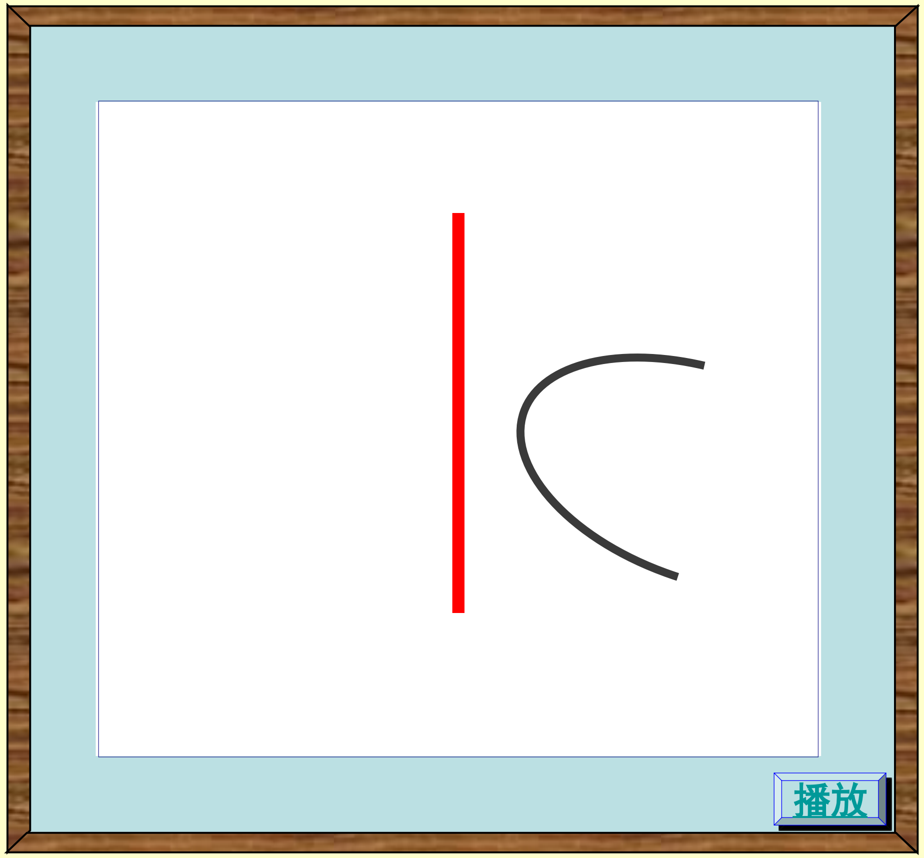
（2）已知坐标间的关系式，研究曲面形状.

（讨论柱面、二次曲面）

2. 旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

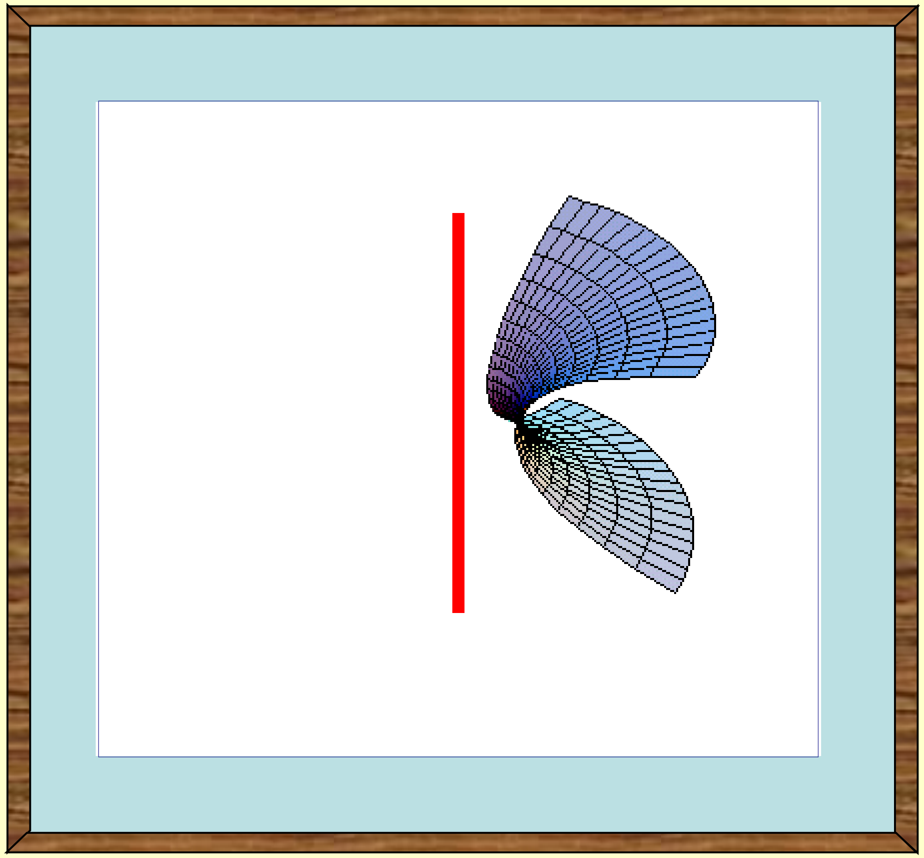
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

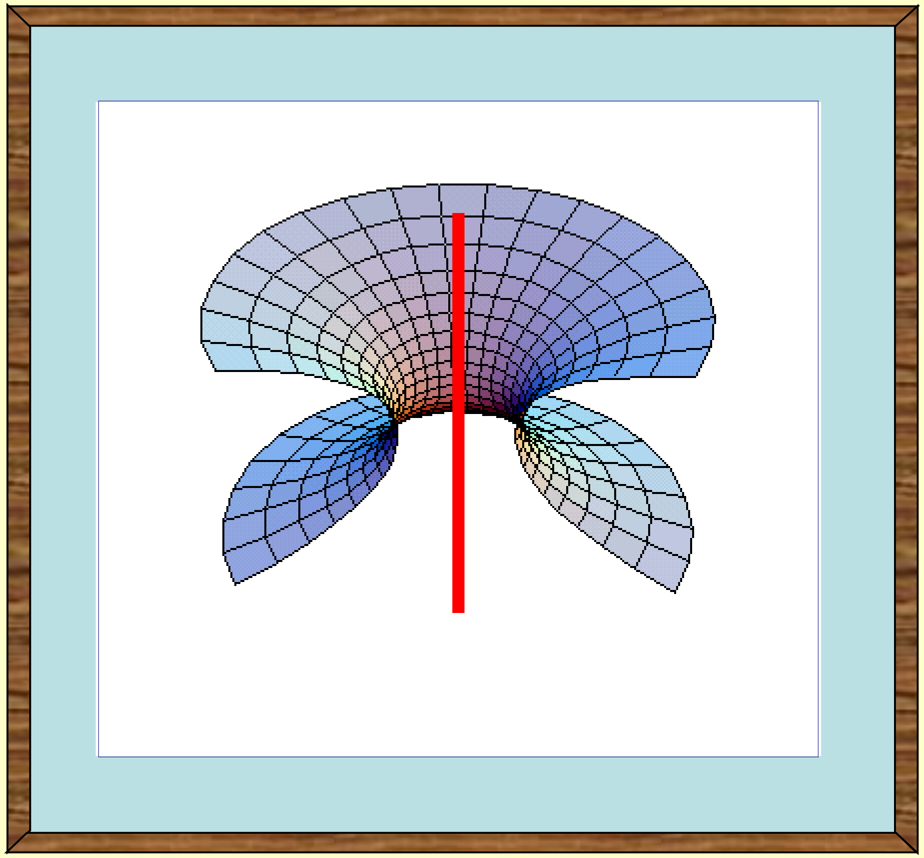
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

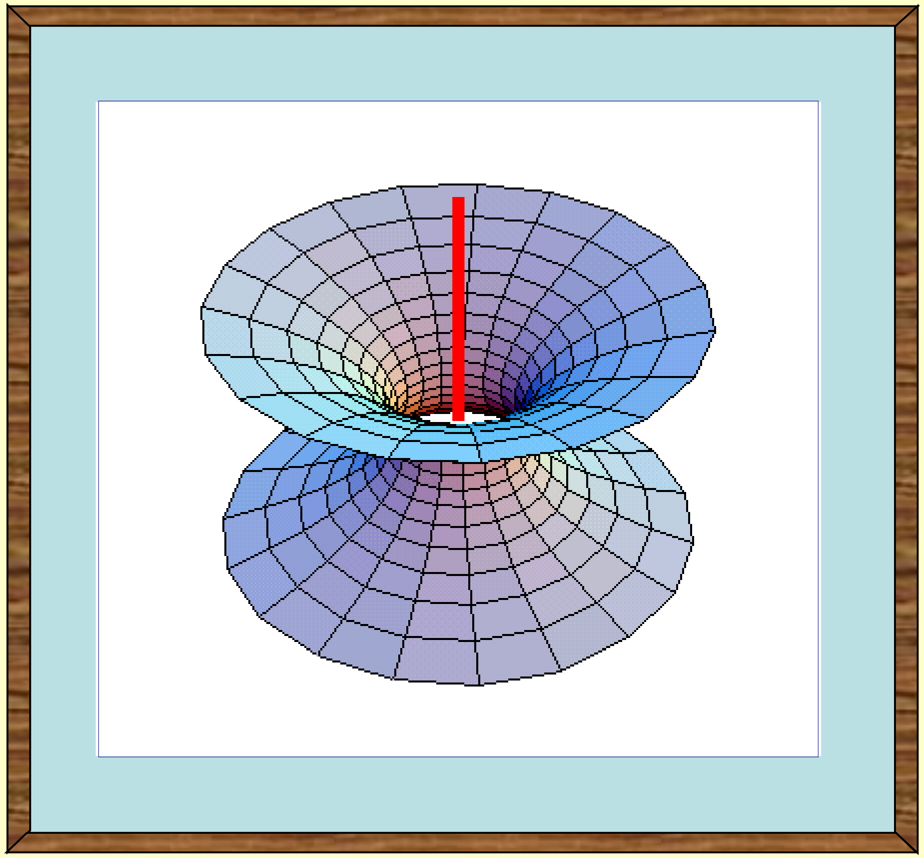
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

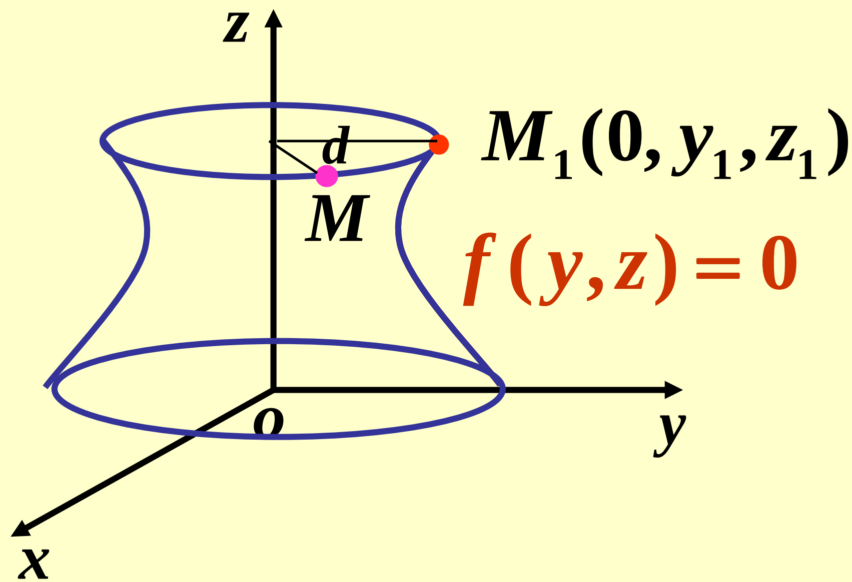
定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



旋转过程中的特征：

如图　设 $M(x,y,z)$,



(1) $z=z_1$

（2）点 M 到 z 轴的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$$

将 $z=z_1$， $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入

$$f(y_1,z_1)=0$$

将 $z = z_1$， $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 $f(y_1, z_1) = 0$

得方程 $$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2},\ z\right) = 0,$$

yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面方程.

同理：yoz 坐标面上的已知曲线 $f(y, z) = 0$

绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程为

$$f\left(y,\ \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0.$$

求旋转曲面的方程技巧

1) 在曲线C 的方程 $f(y,z)=0$

中，只要将y改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，z不变，

便得曲线C绕z轴旋转所成的旋转曲面的方程.

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

同理

曲线C绕y轴旋转所成的旋转曲面的方程为:

$$f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$$

2）*xoy* 面上的曲线C： $f(x,y)=0$

绕 x 轴 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

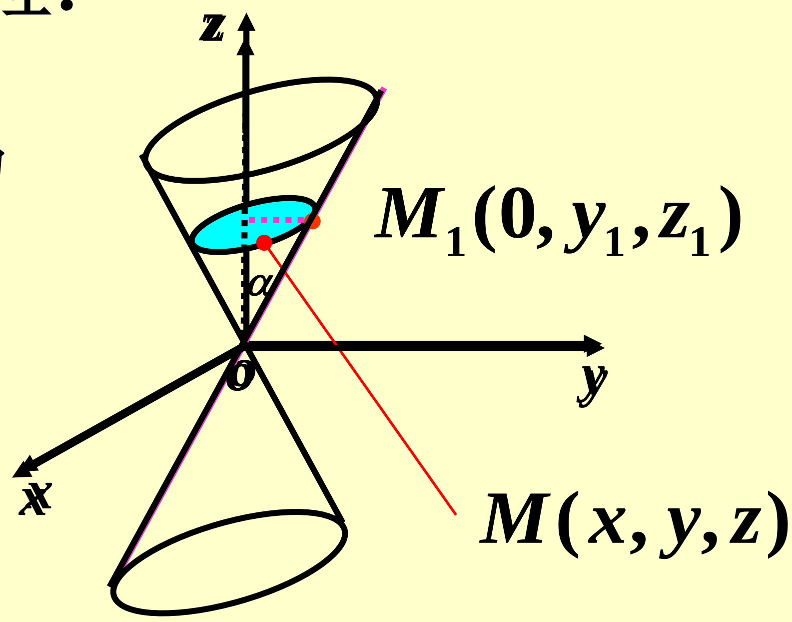
绕 y 轴 $f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$

3）*zox* 面上的曲线C： $f(x,z)=0$

绕x轴 $f\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕z轴 $f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

例 5 直线L绕另一条与L相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫圆锥面．两直线的交点叫圆锥面的顶点，两直线的夹角$\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$叫圆锥面的半顶角．试建立顶点在坐标原点，旋转轴为$z$轴，半顶角为$\alpha$ 的圆锥面方程.



解 yoz面上直线方程为

$$z = y\cot\alpha$$

圆锥面方程

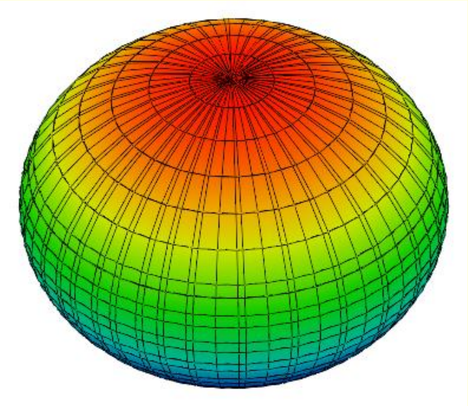
$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

例6 将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）椭圆 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴和 z 轴；

（2）抛物线 $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴；

（1）椭圆 $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴和 z 轴；

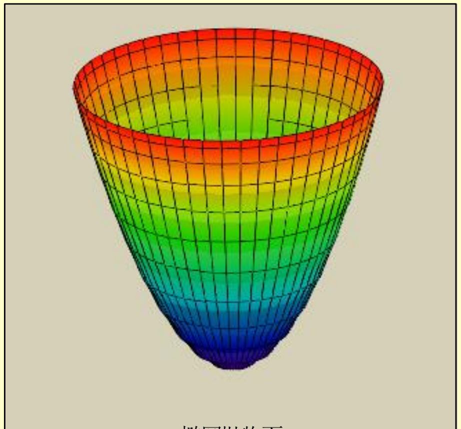


G

绕 y 轴旋转 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面



椭圆抛物面

（2）抛物线 $\begin{cases} y^2=2pz \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴；

$x^2+y^2=2pz$ 旋转抛物面

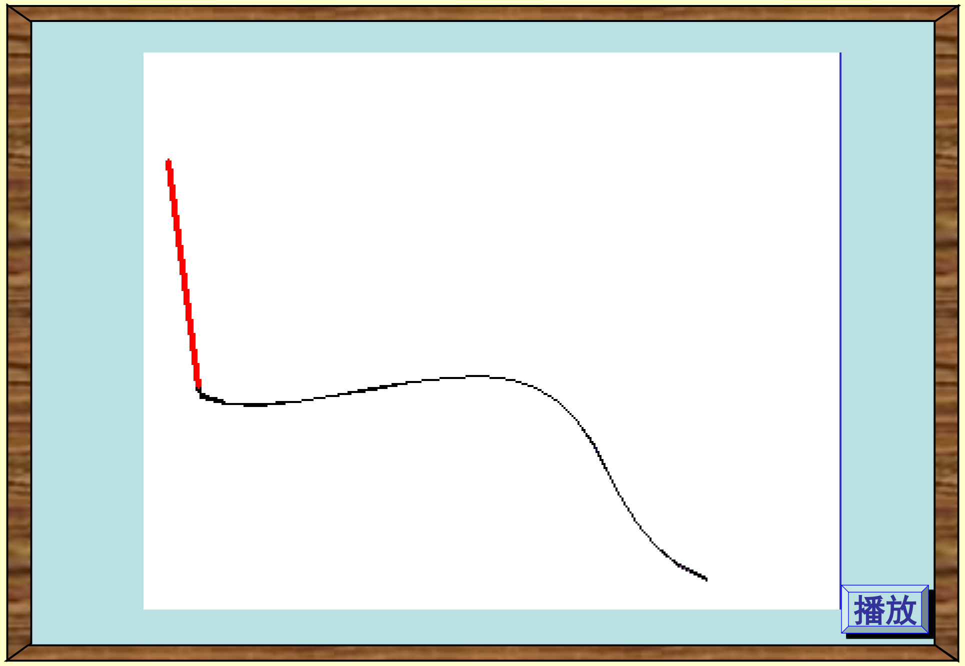
G

3. 柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的**准线**，动直线 L 叫柱面的**母线**.

观察柱面的形成过程:

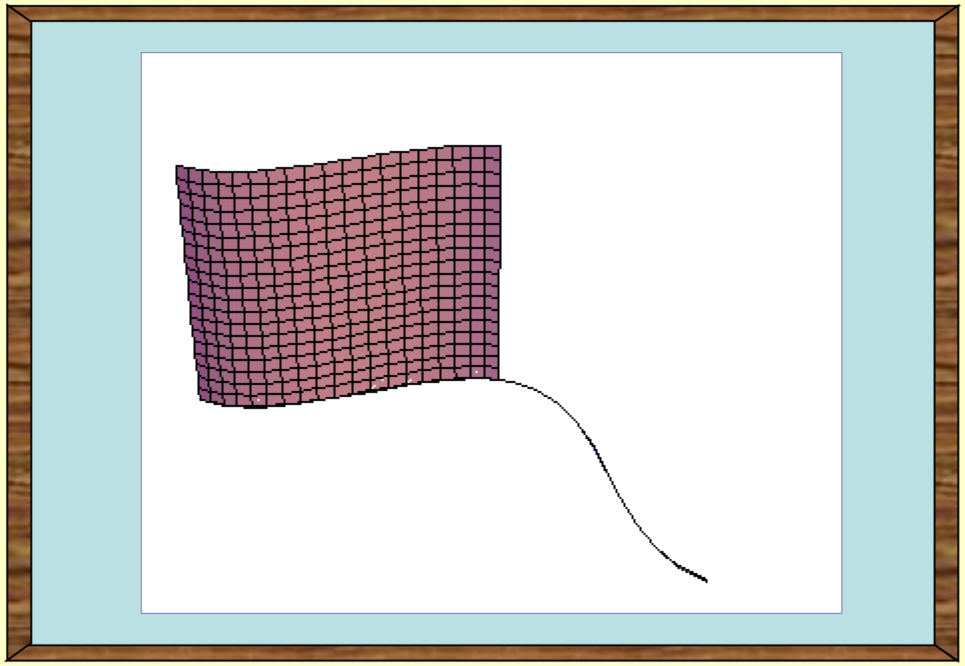


3. 柱面

定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:

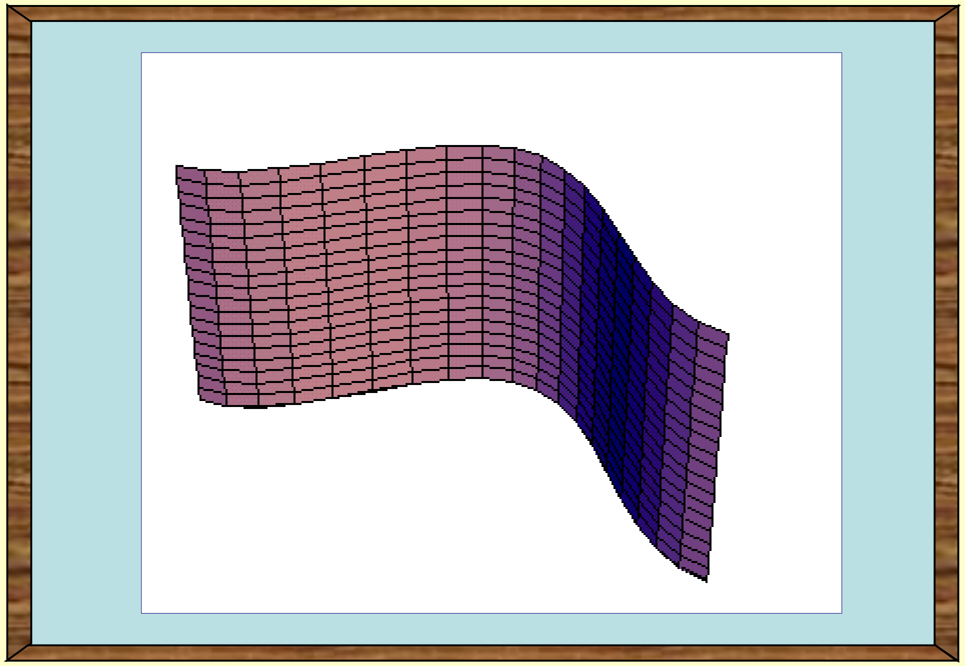


3. 柱面

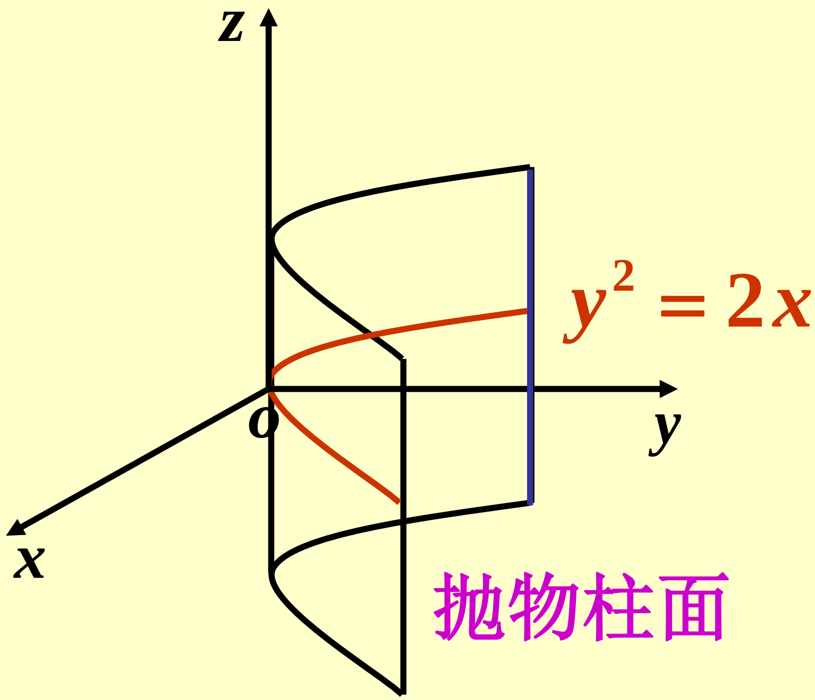
定义 **平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.**

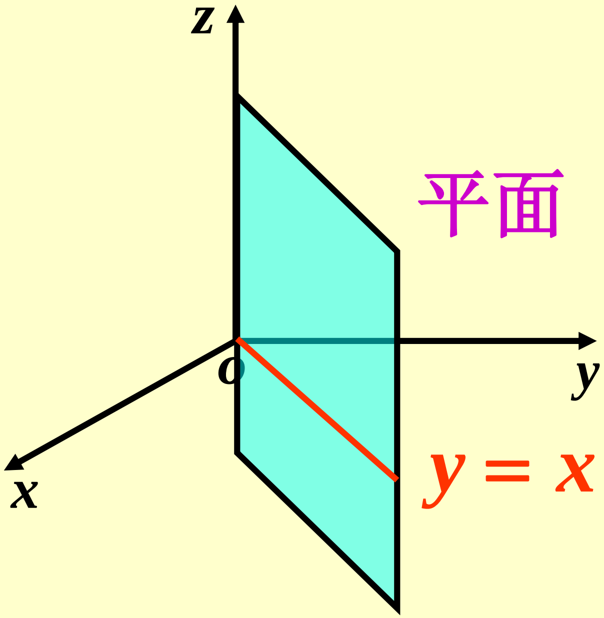
这条定曲线 C 叫柱面的准线，动直线 L 叫柱面的母线.

观察柱面的形成过程:



柱面举例





从柱面方程看柱面的**特征**：

1) 只含x, y而缺z的方程$F(x,y)=0$，

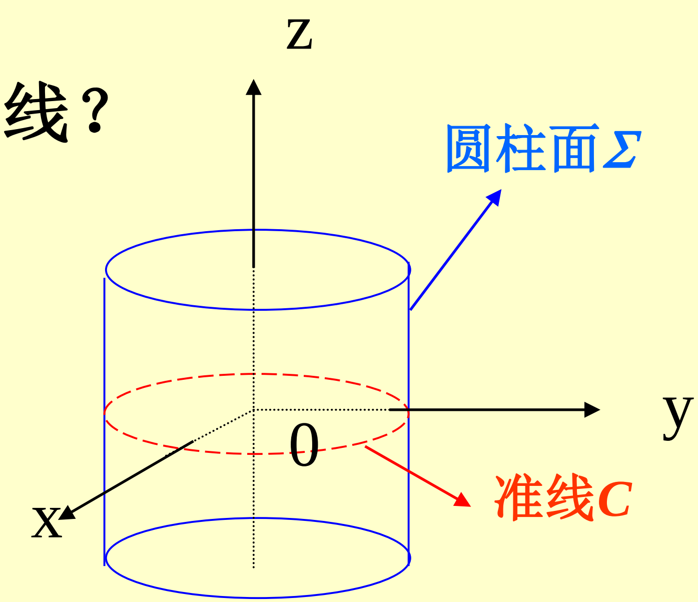
在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线为xoy面上曲线$C:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$.

例 方程$x^2+y^2=R^2$表示怎样的曲线？

解 表示母线平行于z轴的圆柱面

$\Sigma: x^2+y^2=R^2$

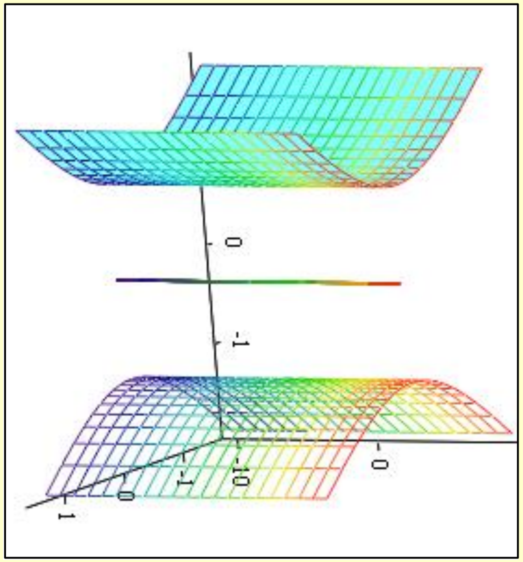
准线为$C:\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=0\end{cases}$



2）一般地，只含x,z而缺y的方程G(x,z)=0在空间直角坐标系中表示母线平行于y轴的柱面，其准线为 $C:\begin{cases}G(x,z)=0\\ y=0\end{cases}$

例: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

C, S1, S2



母线平行于y轴的双曲柱面，

准线为 $$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$$

4)　一般地，只含y,z而缺x的方程H(y,z)=0在空间直角坐标系中表示母线平行于x轴的柱面，其准线为 $C:\begin{cases}H(y,z)=0\\x=0\end{cases}$

练习题:

下列方程在平面、空间直角坐标系中各表示什么图形，并画出其草图。

1) $x=2$　　2) $y=x+1$　　3) $x^2+y^2=4$

练习：画出下列方程所表示的曲面的图形.

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ (2) $y^2=x;$

(3) $x+z=1;$ (4) $xy=-1;$

(5) $z=\sin y(0\le y\le 2\pi);$

(6) $z=1-x^2;$

思考题1

指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形?

(1) $x=2$;　　(2) $x^2+y^2=4$;

(3) $y=x+1$.

思考题1解答

方程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x = 2$	平行于y轴的直线	平行于yoz面的平面
$x^2 + y^2 = 4$	圆心在$(0,0)$，半径为2的圆	以z轴为中心轴的圆柱面
$y = x + 1$	斜率为1的直线	平行于z轴的平面

练 习 题 1

一、填空题：

1、与Z 轴和点$A(1,3,-1)$等距离的点的轨迹方程是________________;

2、以点$O(2,-2,1)$为球心，且通过坐标原点的球面方程是___________________;

3、球面：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-7=0$的球心是点______________，半径$R=$ _____________;

4、设曲面方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，当$a=b$时，曲面可由$xoz$面上以曲线____________________绕_________轴旋转面成，或由yoz面上以曲线___________________绕__________轴旋转面成 ；

5、若柱面的母线平行于某条坐标轴，则柱面方程的特点是__________；

6、曲面 $x^2-\frac{y^2}{4}+z=1$ 是由________绕__________轴放置一周所形成的；

7、曲面 $(z-a)^2=x^2+y^2$ 是由________________绕______轴旋转一周所形成的；

8、方程 $x=2$ 在平面解析几何中表示____________在空间解析几何中表示_____________________；

9、方程 $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示_________________，在空间解析几何中表示_________________.

二、画出下列各方程所表示的曲面：

1、$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$ ；

2、$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ ；

3、$z=2-x^2$.

练习题 1　答案

一、1、$z^2-2x-6y+2z+11=0$；

2、$x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$；3、$(1,-2,2)$, 4；

4、$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z, \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, y,$

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, y$；　　5、不含与该坐标轴同名的变量；

6、xoy 面上的双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1, y$；

7、yoz 面上的直线　$z=y+a, z$；

8、平行于 y 轴的一条直线, 与 yoz 面 面平行的平面；

9、圆心在原点, 半径为 2 的圆, 轴为 z 轴 , 半径为 2 的圆柱面.

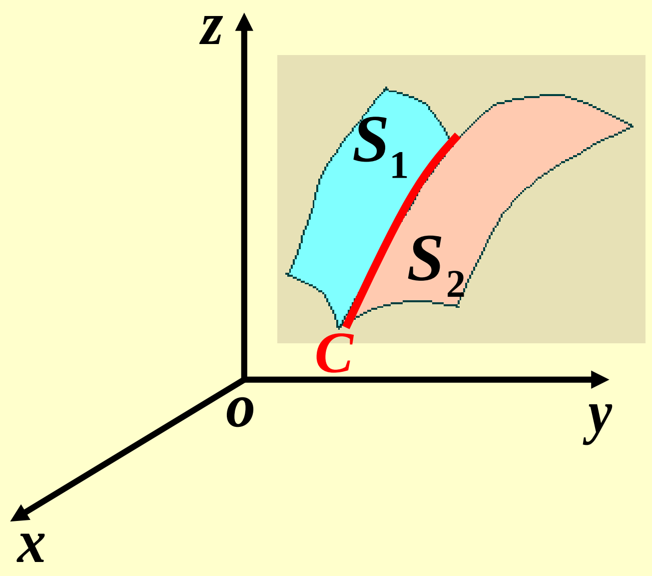
二、曲线的方程

1.曲线的一般方程

空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的一般方程



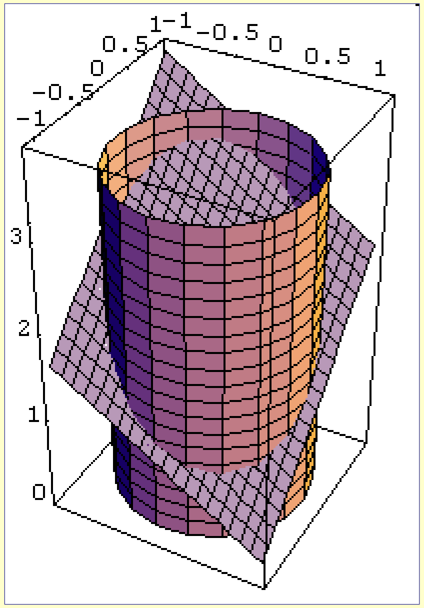
特点： 曲线上的点都满足方程，满足方程的点都在曲线上，不在曲线上的点不能同时满足两个方程.

例1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 $x^2+y^2=1$ 表示圆柱面,

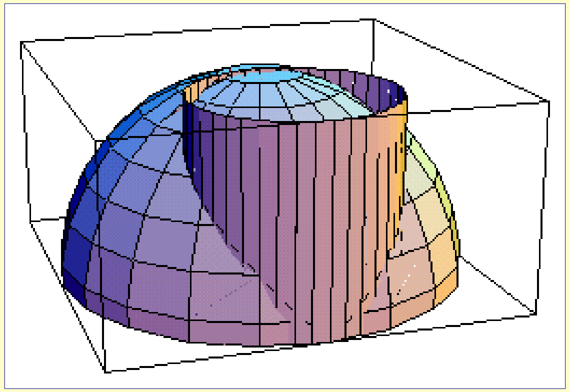
$2x+3y+3z=6$ 表示平面,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$$



交线为椭圆.

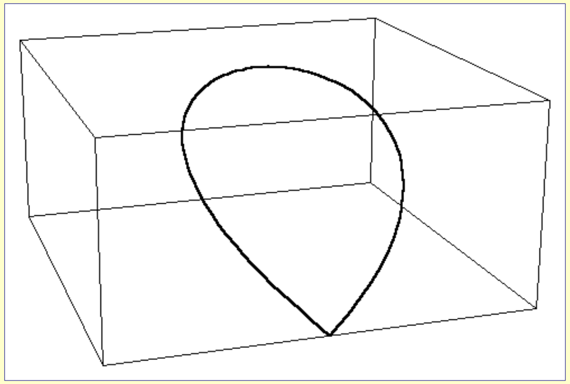
例2 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线?



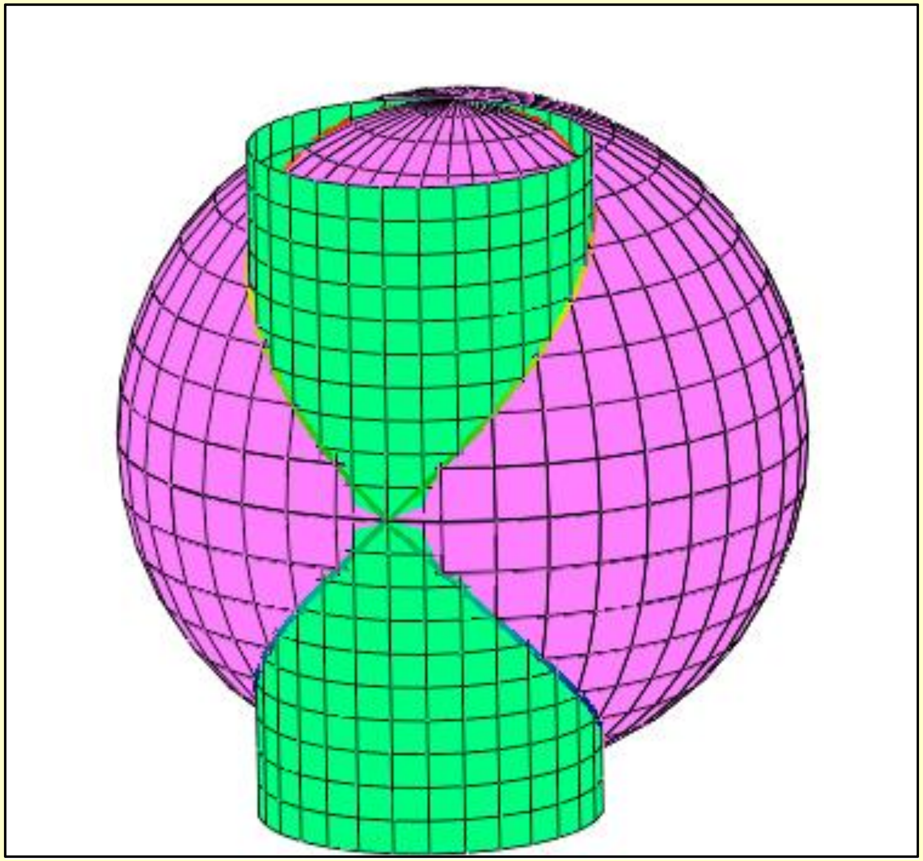
解　$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

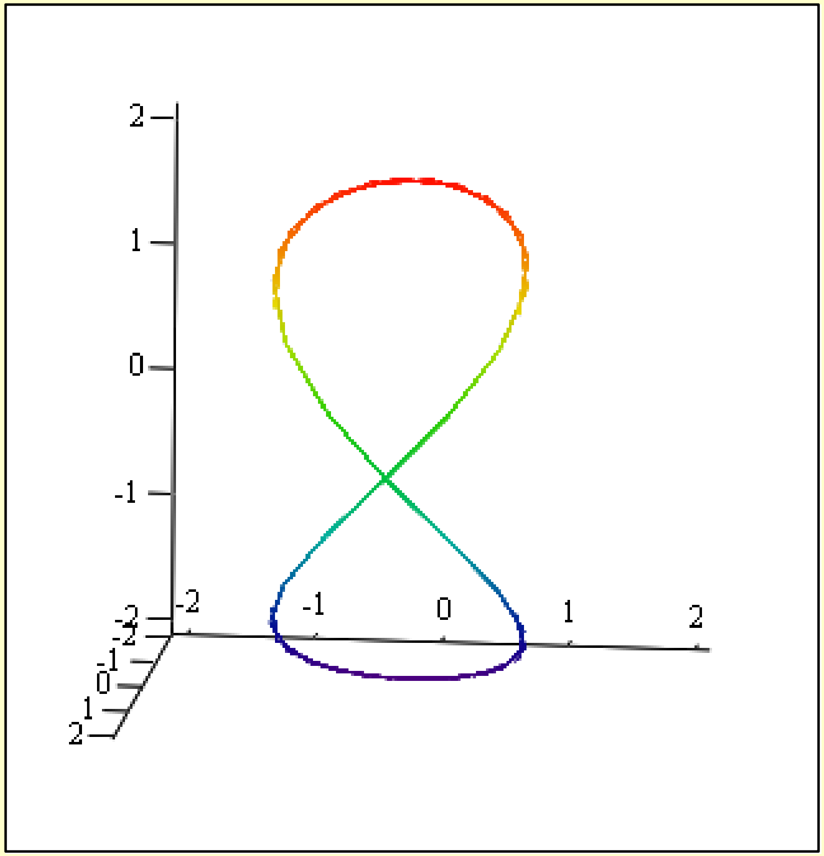
$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ 圆柱面,



交线如图.



G , G1 , C1 , C2



C1 , C2

2.曲线的参数方程

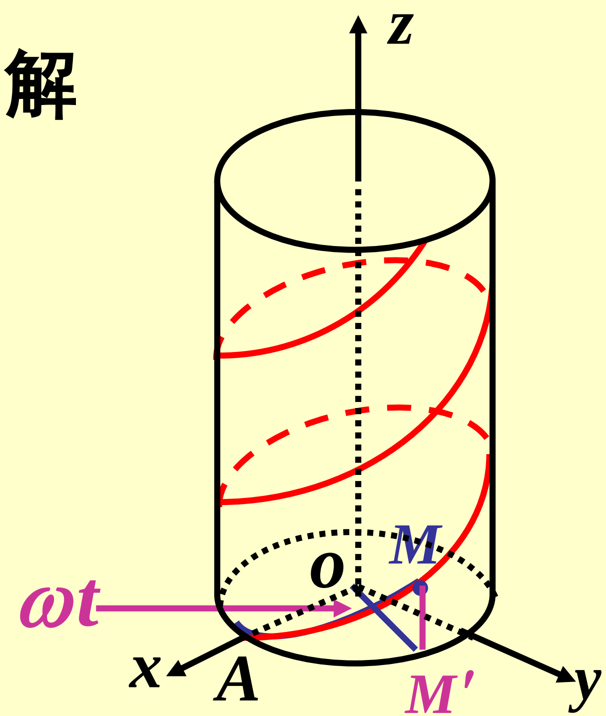
$$\boxed{\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}}$$

空间曲线的参数方程

当给定$t = t_1$时，就得到曲线上的一个点(x_1, y_1, z_1)，随着参数的变化可得到曲线上的全部点.

例 3　如果空间一点M 在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω 绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升（其中ω 、v都是常数），那么点M 构成的图形叫做螺旋线．试建立其参数方程.

解



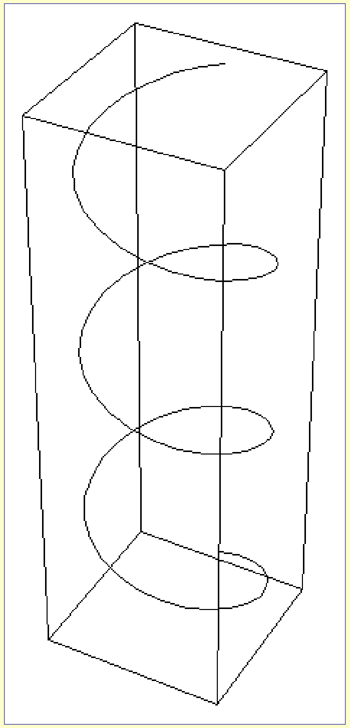
取时间t为参数,动点从A点出发，经过t时间，运动到M点

M 在xoy面的投影$M'(x,y,0)$

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}}$$

螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为



$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \qquad (\theta = \omega t,\quad b = \frac{v}{\omega})$$

螺旋线的重要性质:

上升的高度与转过的角度成正比.

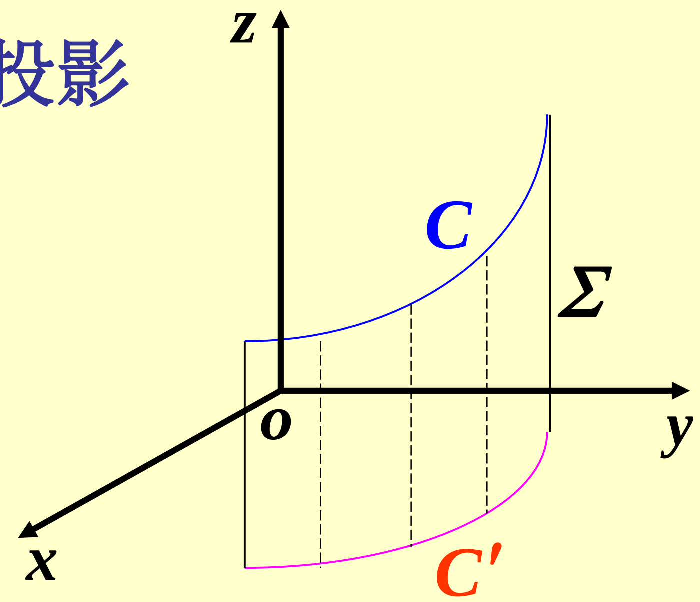
即 $\theta:\ \ \theta_0 \to \theta_0 + \alpha, \qquad z:\ \ b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha,$

$\alpha = 2\pi,$ 上升的高度 $\boxed{h = 2b\pi}$ 螺距

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线的一般方程:

$$C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 & (\Sigma_1) \\ G(x,y,z)=0 & (\Sigma_2) \end{cases}$$



消去变量z后得:

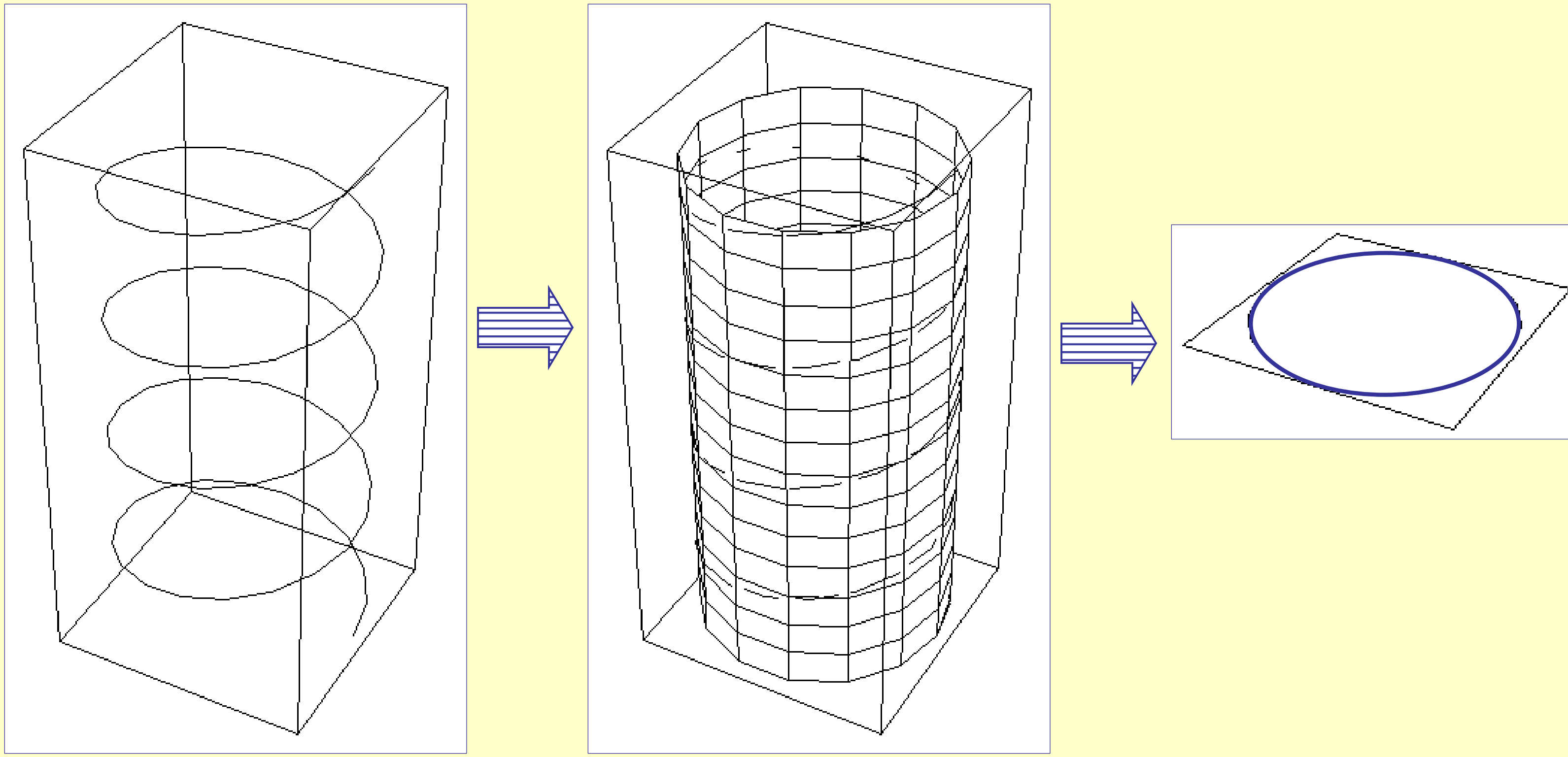
$$\Sigma: \underline{H(x,y)=0}$$ 曲线关于xoy的投影柱面

$$C':\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$ C在xoy面上的 投影曲线

投影柱面的特征:

以此空间曲线为准线，垂直于所投影的坐标面.

如图:投影曲线的研究过程.



空间曲线　　投影柱面　　投影曲线

空间曲线在xoy面上的**投影曲线**

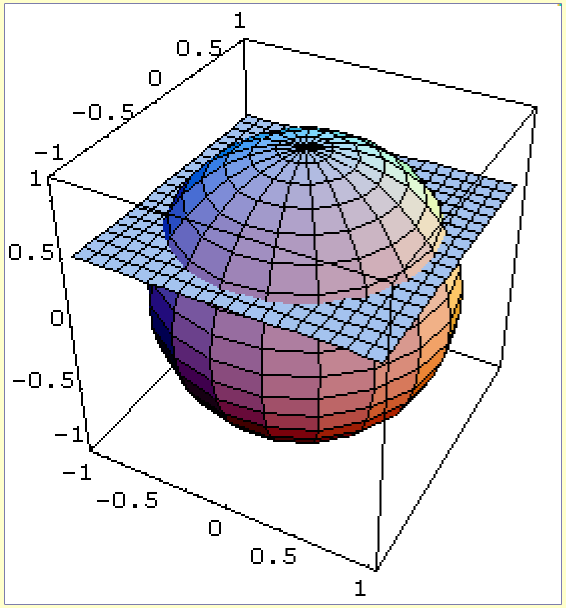
$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

类似地：可定义空间曲线在其他坐标面上的投影

yoz面上的**投影曲线,**　　xoz面上的**投影曲线,**

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

例4 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.



解 （1）消去变量z后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$

（2）因为曲线在平面 $z=\frac{1}{2}$ 上，

所以在 xoz 面上的投影为线段.

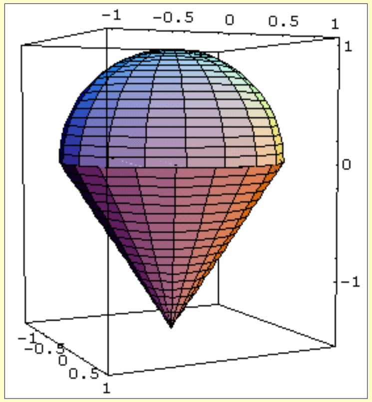
$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \qquad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$

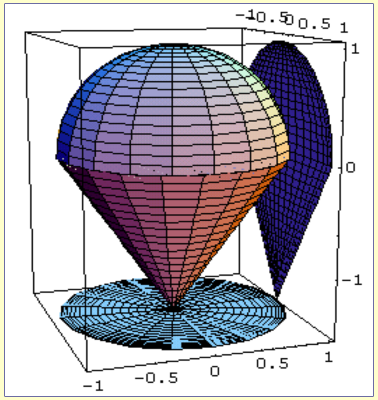
（3）同理在 yoz 面上的投影也为线段.

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \qquad |y|\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

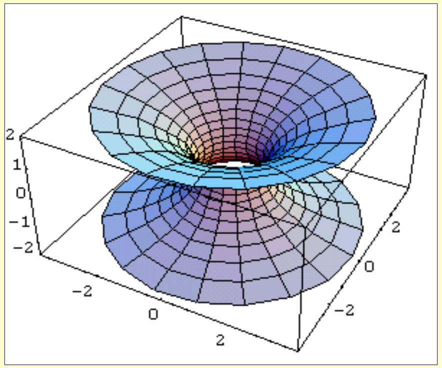
补充：空间立体或曲面在坐标面上的投影.

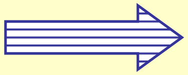
空间立体

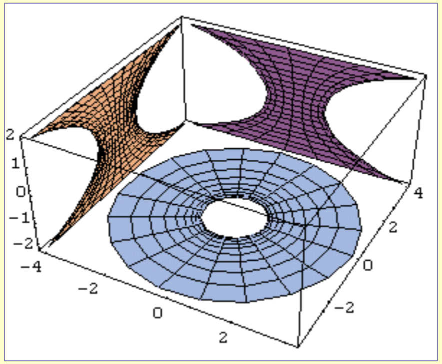




曲面



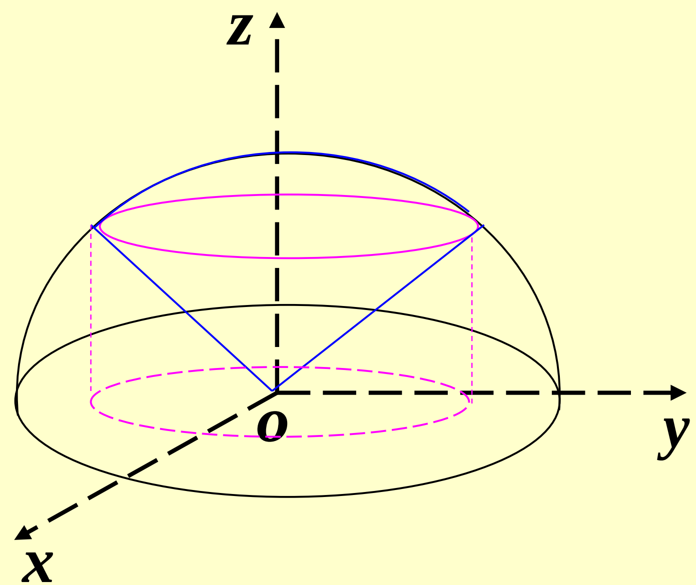




例6 设一个立体,由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 锥面所围成,求它在 xoy 面上的投影.

解 半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)}, \end{cases}$$



消去 z 得投影柱面 $x^2+y^2=1,$

则交线C在xoy面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$ 一个圆，

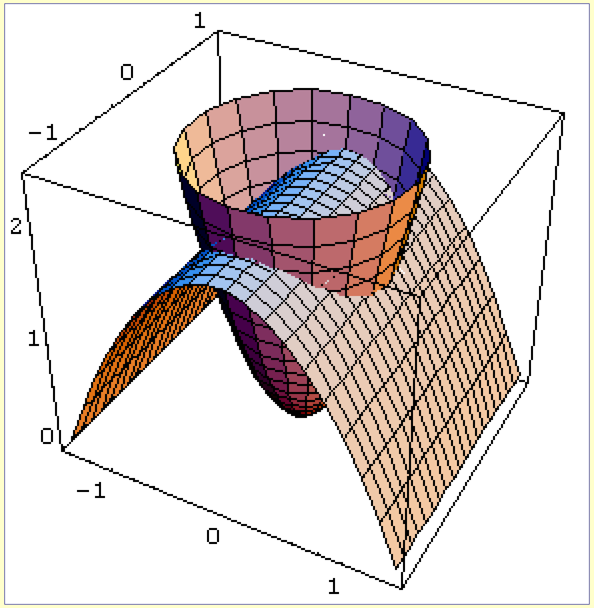
$\therefore$ 所求立体在xoy面上的投影为

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

思考题2

求椭圆抛物面$2y^2+x^2=z$与抛物柱面$2-x^2=z$的交线关于xoy面的投影柱面和在xoy面上的投影曲线方程.

思考题2 解答



交线方程为 $\begin{cases} 2y^2 + x^2 = z \\ 2 - x^2 = z \end{cases},$

消去z得投影柱面 $x^2 + y^2 = 1,$

在xoy面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$

练 习 题 2

一、填空题：

1、曲面$x^2+9y^2=10z$与yoz平面的交线是______；

2、通过曲线$2x^2+y^2+z^2=16$，$x^2+z^2-y^2=0$，且母线平行于y轴的柱面方程是______________；

3、曲线$x^2+z^2+3yz-2x+3z-3=0, y-z+1=0$在$xoz$平面上的投影方程是_________________；

4、方程组$\begin{cases} y=5x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$在平面解析几何中表示_______；

5、方程组$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1 \\ y=3 \end{cases}$在平面解析几何中表示________________，在空间解析几何中表示_________________；

6、旋转抛物面$z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 4)$

在xoy面的投影为____________,

在yoz面的投影为______________,

在zox面上的投影为____________.

二、画出下列曲线在第一卦限的图形:

1、$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x - y = 0 \end{cases}$

2、$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$

三、将曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$化为参数方程.

四、求螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程．

五、求由上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，柱面 $x^2 + y^2 - ax = 0$ 及平面 $z = 0$ 所围成的立体，在 xoy 面和 xoz 面上的投影．

练习题2 答案

一、1、$\begin{cases} y^2 = \dfrac{10}{9}z \\ x = 0 \end{cases}$；　　2、$3y^2 - z^2 = 16, 3x^2 + 2z^2 = 16$；

3、$\begin{cases} x^2 + 4z^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$；

4、两直线的交点, 两平面的交线；

5、椭圆与其一切线的交点, 椭圆柱面$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$与其切平面$y = 3$的交线；

6、$x^2 + y^2 \le 4, y^2 \le z < 4, x^2 \le z \le 4$.

三、$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos t, (0 \le t \le 2\pi). \\ z = 3\sin t \end{cases}$

四、$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}, \begin{cases} z = b\arcsin\dfrac{y}{a}, \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} z = b\arccos\dfrac{x}{a}. \\ y = 0 \end{cases}$

五、$x^2 + y^2 \le ax; \quad z^2 + ax \le a^2, x \ge 0, z \ge 0.$

三、二次曲面

二次曲面的定义：

三元二次方程所表示的曲面称之为二次曲面.

相应地，平面被称为一次曲面.

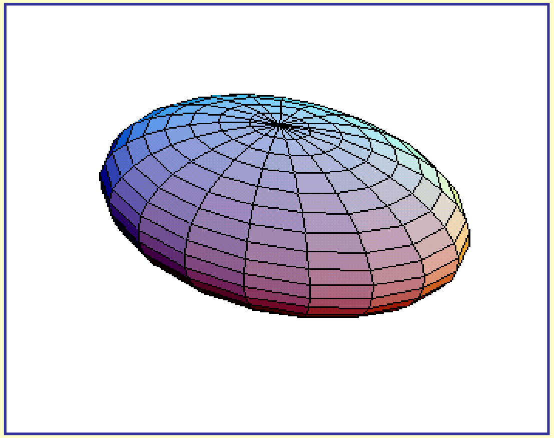
讨论二次曲面的形状用所谓的**截痕法**：

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线（即截痕）的形状，然后加以综合，从而了解曲面的全貌.

以下用截痕法讨论几种特殊的二次曲面.

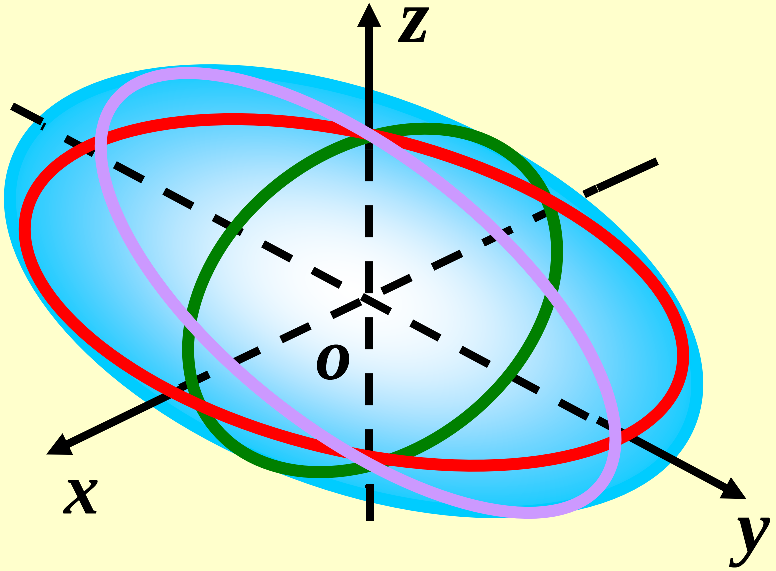
（一）椭球面

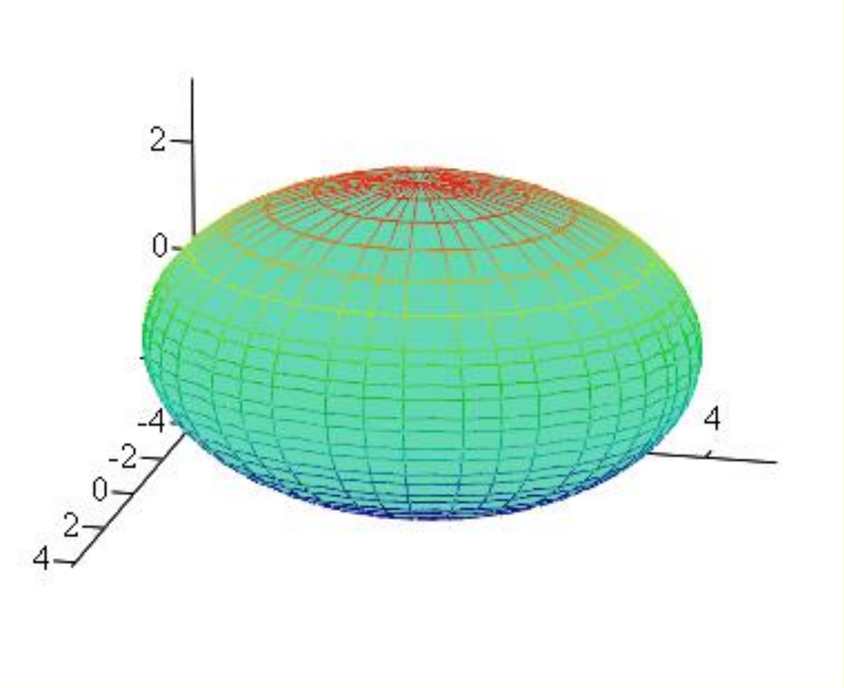
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



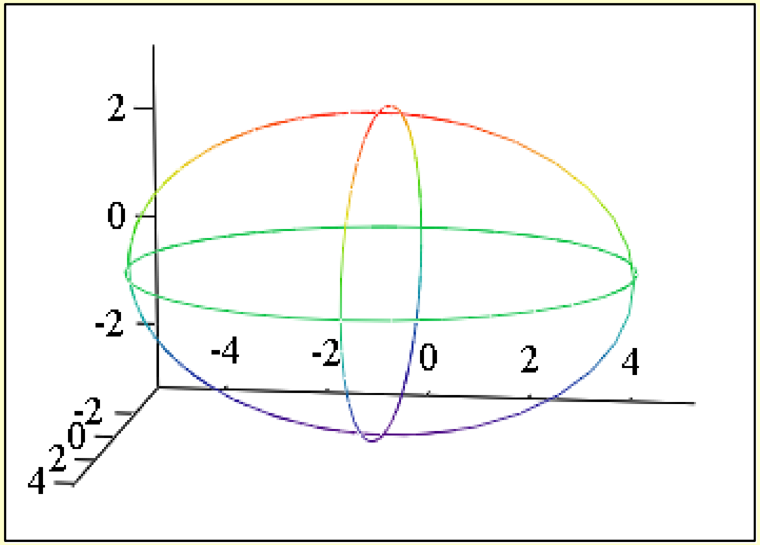
椭球面与三个坐标面的交线：
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$





G , XY , YZ , ZX , C1 , C2 , C3



C1 , C2 , C3

椭球面与平面 $z=z_1$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1 \\ z=z_1 \qquad\qquad\qquad |z_1|<c \end{cases}$$

同理与平面 $x=x_1$ 和 $y=y_1$ 的交线也是椭圆.

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

椭球面的几种特殊情况：

(1) $a=b,$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 旋转椭球面

由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

方程可写为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z=z_1$ $(|z_1|<c)$的交线为圆.

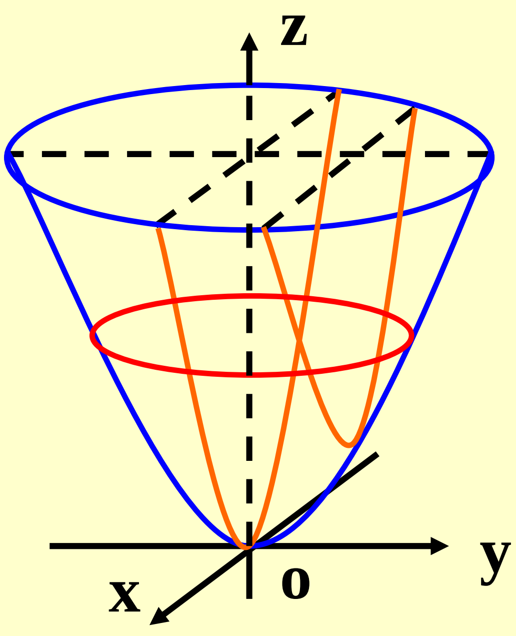
截面上圆的方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2) \\ z = z_1 \end{cases}.$

(2) $a = b = c$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$ 球面

方程可写为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

（二）抛物面

1. 椭圆抛物面:

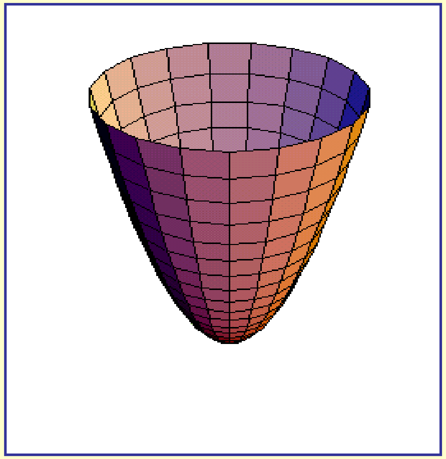


$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$ （p 与 q 同号）

用截痕法讨论： 设 $p>0,\ q>0$

（1）用坐标面 $xoy\,(z=0)$ 与曲面相截

截得一点，即坐标原点 $O(0,0,0)$



原点也叫椭圆抛物面的**顶点**.

与平面 $z = z_1$ $(z_1 > 0)$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1} + \dfrac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.

与平面 $z = z_1$ $(z_1 < 0)$不相交.

（2）用坐标面xoz $(y = 0)$与曲面相截

截得抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{cases}$

与平面 $y = y_1$ 的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

它的轴平行于 z 轴

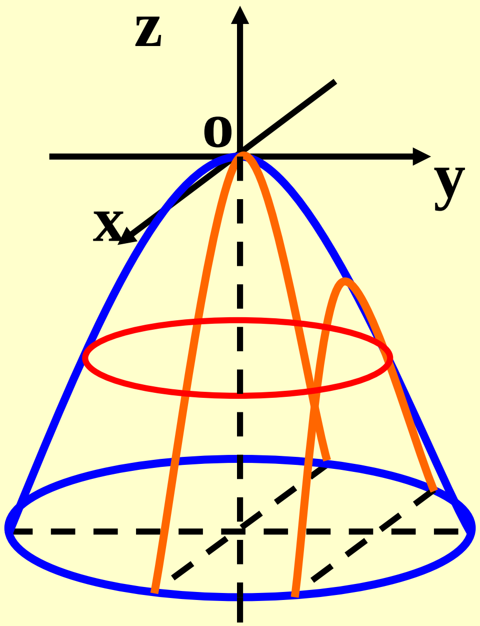
顶点 $\left(0, y_1, \dfrac{y_1^2}{2q}\right)$

（3）用坐标面 yoz $(x = 0)$， $x = x_1$ 与曲面相截

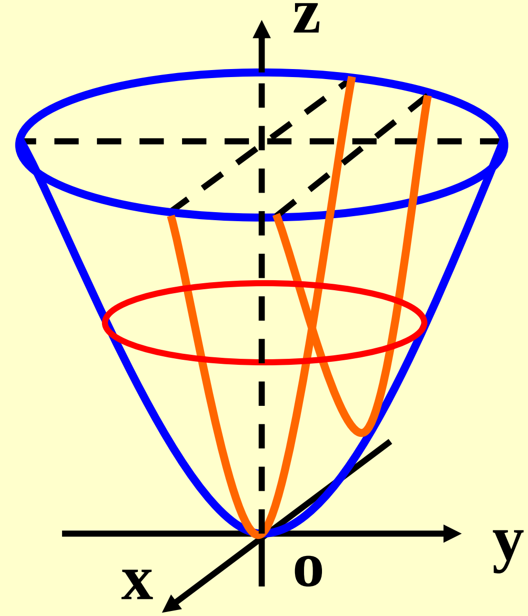
均可得抛物线.

同理当 $p < 0,\ q < 0$ 时可类似讨论.

椭圆抛物面的图形如下：



$p<0, \quad q<0$



$p>0, \quad q>0$

特殊地：当 $p=q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z \quad (p>0)$$ **旋转抛物面**

（由 xoz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

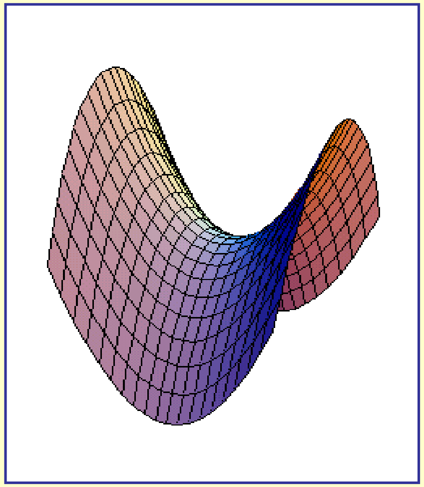
与平面 $z=z_1$ $(z_1>0)$ 的交线为圆.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2pz_1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种圆的**中心**都在 z 轴上.

2. 双曲抛物面（马鞍面）

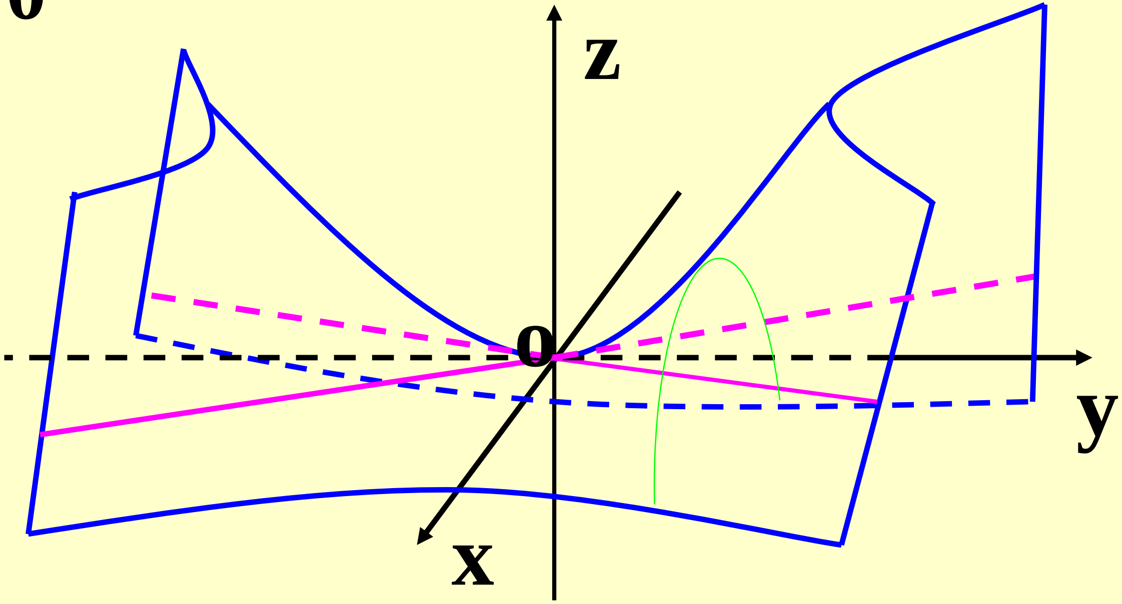
$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad （p \text{ 与 } q \text{ 同号}）$$



用截痕法讨论：

设 $p>0,\ q>0$

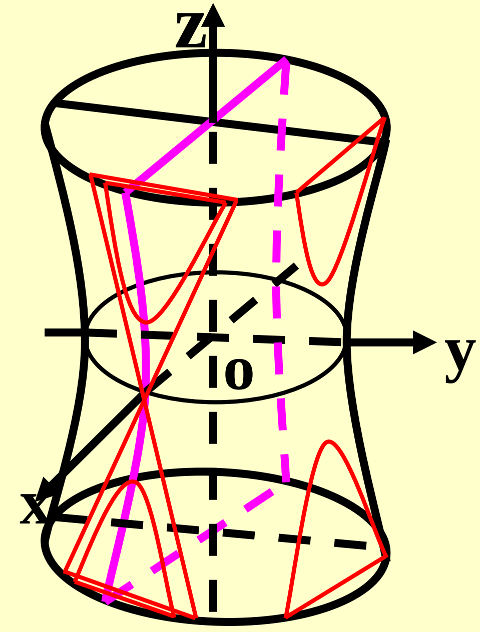
图形如下：



（三）双曲面

1. 单叶双曲面

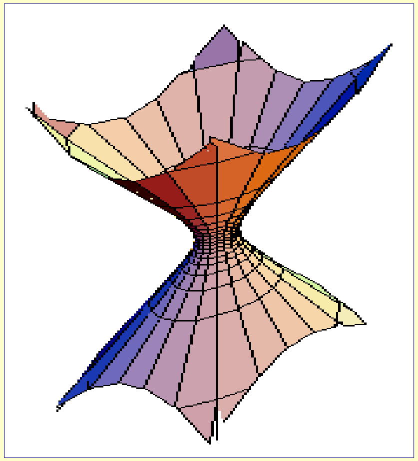
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



（1）用坐标面 $xoy\,(z=0)$ 与曲面相截

截得中心在原点 $O(0,0,0)$ 的椭圆.

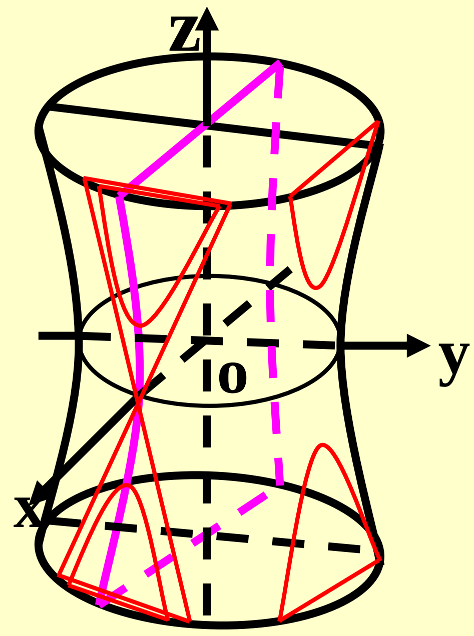
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$



与平面 $z = z_1$ 的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{z_1^2}{c^2} \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1 变动时，这种椭圆的中心都在 z 轴上.



（2）用坐标面 xoz $(y = 0)$ 与曲面相截

截得中心在原点的双曲线.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

实轴与 x 轴相合，
虚轴与 z 轴相合.

与平面 $y=y_1\ (y_1\neq\pm b)$ 的交线为双曲线.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{{y_1}^2}{b^2}\\ y=y_1\end{cases}$$

双曲线的中心都在 y 轴上.

$(1')$ $y_1^2<b^2$, 实轴与 x 轴平行, 虚轴与 z 轴平行.

$(2')$ $y_1^2>b^2$, 实轴与 z 轴平行, 虚轴与 x 轴平行.

$(3')$ $y_1=b$, 截痕为一对相交于点 $(0,b,0)$ 的直线.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = b \end{cases}.$$

(4′) $y_1 = -b$,

截痕为一对相交于点 $(0,-b,0)$ 的直线.

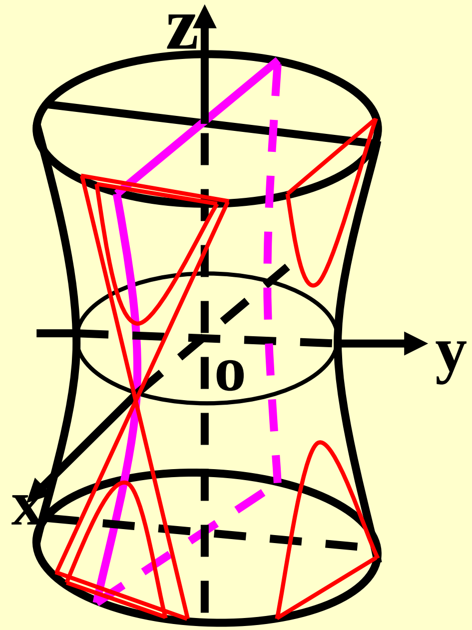
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = -b \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = -b \end{cases}.$$

（3）用坐标面 yoz $(x = 0)$，$x = x_1$与曲面相截

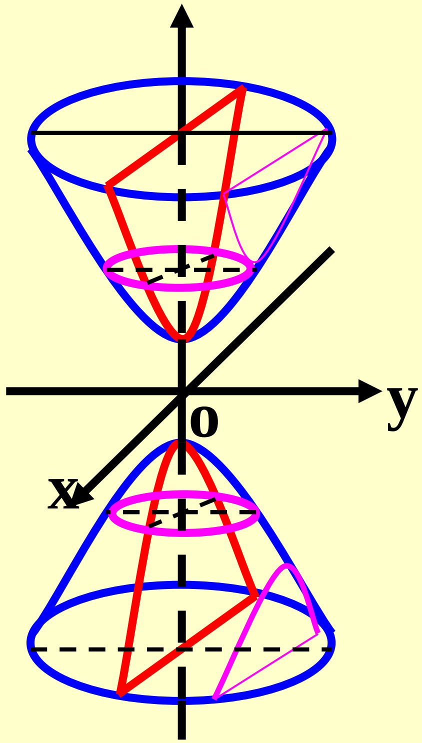
均可得双曲线.

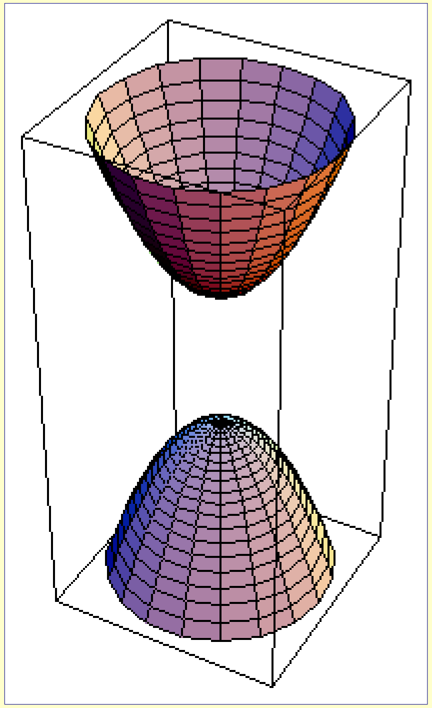
平面 $x=\pm a$ 的截痕是**两对相交直线.**

单叶双曲面图形



2. 双叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$





用截痕法作图

用截痕法画出下列各曲面所围立体的图形.

(1) $z = x^2 + y^2, x + y = 1,$ 及三个坐标面;

(2) $z = 1 - x^2, y = 0, z = 0, x + y = 1;$

(3) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, z = 0, x + z = 6;$

(4) $z = 4 - (x^2 + y^2), z = \sqrt{x^2 + y^2};$

(5) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1.$

四、小结

曲面方程的概念 $F(x,y,z)=0.$

旋转曲面的概念及求法. 柱面的概念(母线、准线).

空间曲线的一般方程、参数方程.

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

空间曲线在坐标面上的投影、投影曲线、投影柱面.

投影曲线: $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

投影柱面: $H(x,y)=0$ $G(y,z)=0$ $T(x,z)=0$

二次曲面: 椭球面、抛物面、双曲面

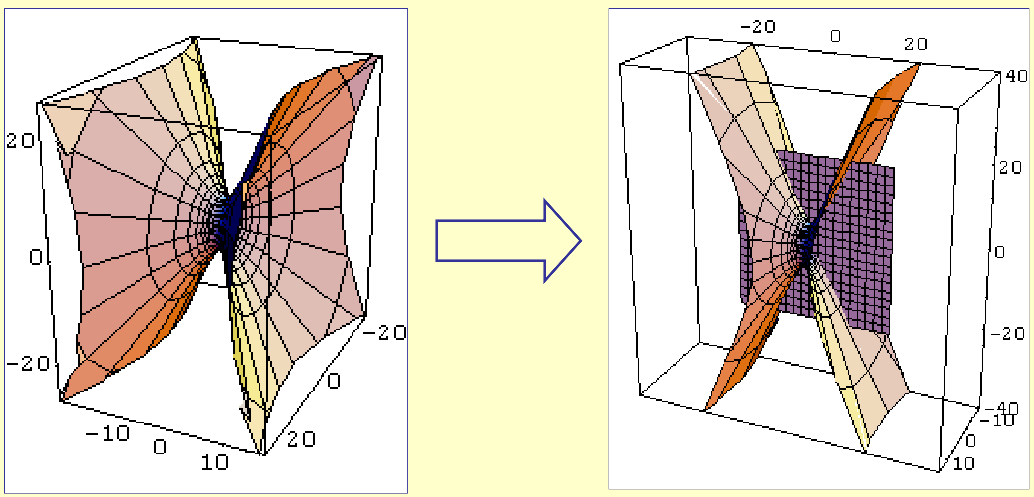
思考题3

方程 $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

思考题3 解答

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + z^2 = 25 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y^2 + z^2 = 16 \\ x = -3 \end{cases}.$$

表示双曲线.



练 习 题 3

一、求曲线 $\begin{cases} y^2+z^2-2x=0 \\ z=3 \end{cases}$，在 xoy 面上的投影曲线的方程，并指出原曲线是什么曲线．

二、画出方程所表示的曲面：

1、$\dfrac{z}{3}=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$；

2、$16x^2+4y^2-z^2=64$．

三、画出下列各曲面所围成的立体的图形：

1、$x=0$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $z=\dfrac{y}{4}$；

2、$x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$（在第一卦限内）．

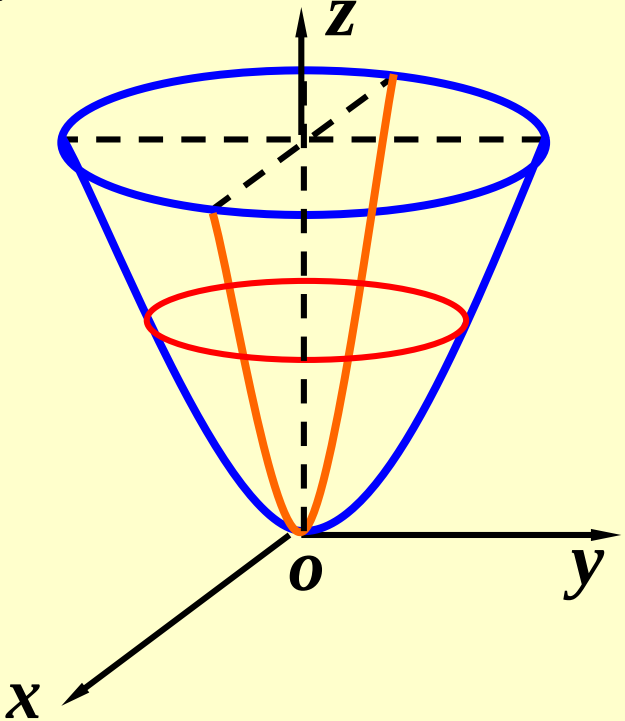
四、试用截痕法讨论双曲抛物面

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad （p\text{与}q\text{同号}）.$$

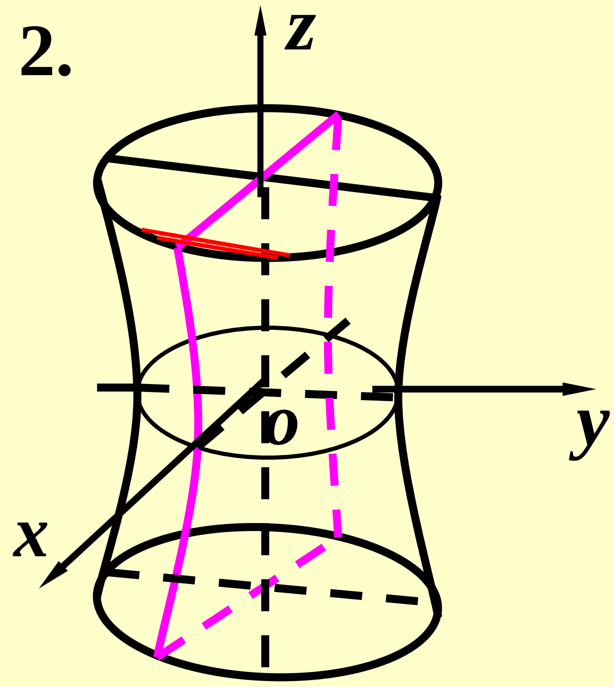
练习题3 答案

一、$\begin{cases} y^2 = 2x - 9 \\ z = 0 \end{cases}$, 位于平面$z = 3$上的抛物线.

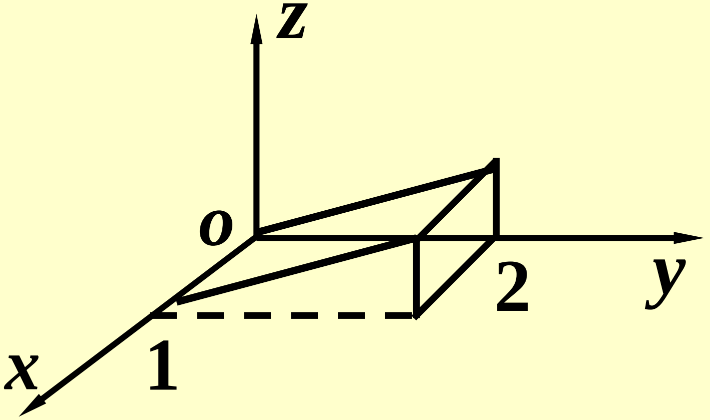
二、1.



2.



三、 1.



2.