

2017 级《微积分（一）下》课程试卷(A 卷) 答案

一. 单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分. 将选择结果涂填在答题卡上.)

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	C	A	C	B	D

二. 填空题 (每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上.)

题号	7	8	3	4
答案	$dx + 2dy + 3dz$	$7/3$	0	$x + y + z$

三. 基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

$$11. \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}. \quad 12. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yf_{11} + (x+2y^2)f_{12} + f_2 + xyf_{22}.$$

$$13. \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos \theta}{r(1+\cos^2 \theta)}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin \theta}{r^2(1+\cos^2 \theta)}. \quad 14. I = \frac{\pi}{4} + \frac{11}{6}. \quad 15. I = -\frac{\pi}{20}.$$

$$16. S(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x}, & 0 < |x| < 1, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} = S\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arctan \frac{1}{2}.$$

四. 应用题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 最大值点为 (R, R, R) .

$$18. (1) V = \frac{32}{9}; \quad (2) S = \sqrt{2}\pi.$$

五. 分析证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 当 $0 < R < 1$ 时, $I = 0$. 当 $R > 1$ 时, $I = \pi$.

20. 记区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$\text{证法 1 } I = \frac{1}{2} \iint_D (e^{f(x)-f(y)} + e^{-f(x)+f(y)}) dx dy \geq \iint_D 1 dx dy = 1.$$

$$\text{证法 2 对任意 } x, \text{ 有 } e^x \geq 1+x. \text{ 所以 } I = \iint_D e^{f(x)-f(y)} dx dy \geq \iint_D (1+f(x)-f(y)) dx dy$$

$$\text{由轮换对称性知 } \iint_D (f(x)-f(y)) dx dy = 0, \text{ 故 } I \geq \iint_D 1 dx dy = 1.$$

证法 3 由 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(x)} dx \geq \left(\int_0^1 e^{\frac{f(x)}{2}} \cdot e^{-\frac{f(x)}{2}} dx \right)^2 = 1.$$