第1章 无穷级数

无穷级数是数学分析三大组成部分之一。

无穷级数是研究函数的工具

- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

无穷级数

- 数项级数
- 函数项级数
- 幂级数
- Fourier级数

1.1 数项级数

1.1.1 数项级数的概念和性质

1、数项级数的概念

定义1：给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ ，称

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad \textbf{(1)}$$

为无穷级数，简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$， u_n 叫做级数的一般项，级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和.

显然， $u_n = S_n - S_{n-1}$

常见的数项级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots$$ 等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$ p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$ 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$ 交错级数

定义2: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数**收敛**, 并称 S 为级数的和, 记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数**发散**.

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的**余项**.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

例1. 判断交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$ 的敛散性.

解：因为 $S_{2n}=1-1+1-1+\cdots+1-1=0,$

$$S_{2n+1}=1-1+1-1+\cdots+1-1+1=1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0 \neq \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=1,$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在，交错级数发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}.$

例2. 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n = a + a\,q + a\,q^2 + \cdots + a\,q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, **则部分和**

$$S_n = a + a\,q + a\,q^2 + \cdots + a\,q^{n-1} = \frac{a - a\,q^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

2) 若 $|q|=1$,则

当 $q=1$ 时, $S_n = n\,a \to \infty$,因此级数发散 ;

当 $q=-1$ 时,级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & \boldsymbol{n} \text{ 为奇数} \\ 0, & \boldsymbol{n} \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在 , 因此级数发散.

综合 1)、2)可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛 ;

$|q|\geq 1$ 时, 等比级数发散 .

例3. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};\qquad\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+(\ln(n+1)-\cancel{\ln n})$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

> **技巧:**
>
> **利用 “拆项相消” 求和**

(2) $S_n = \underline{\frac{1}{1\cdot 2}} + \underline{\frac{1}{2\cdot 3}} + \underline{\frac{1}{3\cdot 4}} + \cdots + \underline{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用“拆项相消”求和

2、级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S, 即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛, 其和为 cS.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$, 则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c u_k = c S_n$,

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛, 其和为 cS.

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2. 设有两个**收敛级数** $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛, 其和为$S\pm\sigma$.

(收敛级数可逐项相加或减)

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\ \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k\pm v_k)=S_n\pm\sigma_n\to S\pm\sigma\quad(n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛, 其和为$S\pm\sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$

必发散 . **(用反证法可证)**

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ **不一定发散.**

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉有限项, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. **收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.**

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例4. 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore \quad \sum_{n=2}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

3、级数收敛的必要条件

定理1 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

证: $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

推论: 若 $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散.

例如, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$

都发散.

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上 , 假设调和级数收敛于 S , 则

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .

例5. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性.

解: 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}{n^n n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}}=1\neq 0$$

所以由级数收敛的必要条件知原级数发散.

例6. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解: (1) 令 $u_n=\frac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\quad(n=1,2,\cdots)$$

故　$u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

进行拆项相消

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{4}$, 这说明原级数收敛 , 其和为 $\frac{1}{4}$.

(3) $$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n-\tfrac{1}{2}S_n$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\underline{\frac{3}{2^2}}+\underline{\frac{5}{2^3}}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\underline{\frac{1}{2^2}}+\underline{\frac{3}{2^3}}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\underline{\frac{2n-1}{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore\quad S_n=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n},\text{故}\lim_{n\to\infty}S_n=3,$$

这说明原级数收敛, 其和为 3 .

4. 级数收敛的Cauchy准则

定理2 (Cauchy准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall m > N, \forall p \in \mathbf{N}_+ :$$

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon .$$

注: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充要条件是:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, \exists m_0 > N, \exists p_0 \in \mathbf{N}_+ :$$

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0 .$$

例7. 讨论调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解：取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对任何正整数 N 只要 $m>N$ 和 $p=m$

就有 $\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}\right|=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|$

$$\geq\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|=\frac{1}{2},$$

因此调和级数发散.

例8. 运用级数收敛的柯西准则证明级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证: 由于

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right|$$

$$= \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(m+p)^2}$$

$$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(m+p-1)(m+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m+p-1} - \frac{1}{m+p} \right)$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{m+p} < \frac{1}{m}.$$

因此, 对任意$\varepsilon > 0$, 可取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当$m>N$及任意正整数$p$,由上式可得 $\left|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}\right| < \frac{1}{m} < \varepsilon$,

依级数收敛的柯西准则, 知级数$\sum \frac{1}{n^2}$收敛.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性已由例2的证明过程所显示.

例 1 设$\{a_n\}$是递减的正数列. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么必有 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

证明 根据 Cauchy 收敛原理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

对任意的正整数 p 成立. 现取 $p=n$，且因$\{a_n\}$是递减的正数列，故当 $n>N$ 时，由式(1)，可得

$$2na_{2n}\leqslant 2(a_n+\cdots+a_{2n})<\varepsilon. \tag{2}$$

又因为

$$(2n+1)a_{2n+1}\leqslant 2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以由式(1)和式(2)即得 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$. □

内容小结

1. 无穷级数敛散性的定义：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

2. 收敛级数的性质1 -- 性质4.

3. 级数收敛的必要条件： $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

4. Cauchy收敛准则.

5. 常见级数：

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \text{发散},}$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{发散},}$ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a\,q^n \begin{cases} |q| < 1 \text{ 时, 收敛;} \\ |q| \geq 1 \text{ 时, 发散.} \end{cases}}$

思考与练习

1. 作一个无穷级数，使其部分和 $S_n = \dfrac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots)$.

2. 求下列无穷级数的和：

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2^n}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}\ (|q|>1)$； (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}(m \in N^+)$.

3. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明其逆命题不成立. 但若 $a_n > 0$，则逆命题成立，试证之.

4. 设 $a_n > 0$, $\{a_n - a_{n+1}\}$ 为严格递减的数列. 如果 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$