级数习题作业解答 3(黄永忠提供)

1.3.1. 幂级数 $\sum a_n(x+3)^n$ 在在 $x=-5$ 处发散, $x=0$ 处收敛, 这可能吗? 若该幂级数在 $x=-1$ 处条件收敛, 求其收敛区间.

答: 不可能, 因为幂级数 $\sum a_n(x+3)^n$ 在 $x=-5$ 处发散即 $\sum a_n x^n$ 在 $x=-2$ 处发散, 因此对于任何 x 满足 $|x|>2$ 都有级数 $\sum a_n x^n$ 发散. 又因为幂级数 $\sum a_n(x+3)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 即 $\sum a_n x^n$ 在 $x=3$ 处收敛, 因此对于任何 x 满足 $|x|<3$ 都有级数 $\sum a_n x^n$ 收敛. 这与前面结论矛盾, 因此幂级数 $\sum a_n(x+3)^n$ 在在 $x=-5$ 处发散, $x=0$ 处收敛是不可能的.

若该幂级数在 $x=-1$ 处条件收敛即 $\sum a_n x^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛, $x=2$ 是 $\sum a_n x^n$ 的收敛端点 (因为收敛区间内的点是绝对收敛点), 因此所求的收敛区间为 $(-5,-1)$.

1.3.2. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

$$(2)\sum \frac{n^2}{n!}x^n;\quad (4)\ \sum \frac{1}{2^n}x^{n^2};\quad (6)\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}(2x+1)^n;\quad (8)\ \sum n!\Big(\frac{x^2}{n}\Big)^n.$$

解　(2) 由于 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2} = \frac{1}{n+1}(\frac{n+1}{n})^2 \to 0(n\to\ \infty)$,

所以幂级数的收敛半径 $R=\infty$, 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(4) 对于幂级数 $\sum \left|\frac{x^{n^2}}{2^n}\right|$, 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^2}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^n|}{2} = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ 1/2, & |x|=1 \\ +\infty & |x|>1 \end{cases},$$

因此，幂级数的收敛半径 $R=1$. 因为 $|x|=1$ 时原级数为 $\sum \frac{1}{2^n}$, 收敛, 所以该幂级数的收敛域为 [-1,1].

(6) 设 $u_n = \frac{3^n+(-2)^n}{n}$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=3$, 故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$. 当 $2x+1=-\frac{1}{3}$, 即 $x=-\frac{2}{3}$ 时, 幂级数为级数 $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n}(-1)^n = \sum\Big(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n\Big)$, 是收敛的; 当 $2x+1=\frac{1}{3}$, 即 $x=-\frac{1}{3}$ 时, 幂级数为级数 $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}\frac{1}{3^n} = \sum\Big(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\cdot(\frac{2}{3})^n\Big)$, 是发散的. 因此该幂级数的收敛域为 $[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$.

(8) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\frac{1}{e}$, 所以幂级数的收敛半径满足 $R^2=e$, 即 $R=\sqrt{e}$. 又因为当 $x=\pm\sqrt{e}$ 时幂级数为级数 $\sum n!\big(\frac{e}{n}\big)^n$, 通项不以 0 为极限, 级数发散. 故幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{e},\sqrt{e})$.

1.3.3. 求下列函数的 Maclaurin 展开式:

(2) $\sin^3 x$;　(6) $(1+x)e^{-x}$; (7) $\frac{x}{1+x-2x^2}$;　(8) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　(10) $\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$.

解　(2) 由于 $\sin x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}, x\in(-\infty,\infty)$, 所以

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\\ &= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3x)^{2n-1}}{(2n-1)!}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{2n-1}-3)}{(2n-1)!}x^{2n-1},\quad x\in(-\infty,\infty).\end{aligned}$$

(6) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, 所以 $e^{-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$. 故

$$(1+x)e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n(1+x)}{n!}=1+\sum_{n=1 \text{ or } 2}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\Big]x^n,\quad |x|<\infty.$$

(7) 由于 $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\Big)$ 且 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, |x|<1, \frac{1}{1+2x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n, |x|<\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{x}{1+x-2x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-2)^n}{3}x^n,\ |x|<\frac{1}{2}$.

(8) 由于 $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n},\ t\in[-1,1]$, 所以

$$\begin{aligned}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt\\ &= \int_0^x \Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\Big]dt\\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1].\end{aligned}$$

(10) 由于 $\cos t^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(t^2)^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nt^{4n}}{(2n)!}, t\in(-\infty,\infty)$, 所以

$$\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{4n}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)},\qquad x\in(-\infty,\infty).$$

1.3.6. 求下列幂级数的和函数:

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nn^2x^n;\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n;\quad (6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}.$$

解　(2) 由例 1.3.14 后的说明可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $|x|<1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nn^2x^n=\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}$, $|x|<1$.

(4) $S(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{2x}{(1-x)^2}+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^2}$, $|x|<1$.

另解: 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(n+1)x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, 可设 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2(n+1)x^n, h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, 则将 $g(x)$ 积分可得 $\int_0^x g(x)dx=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\dfrac{2x^2}{1-x}$, 所以 $g(x)=\dfrac{2x(2-x)}{(1-x)^2}$. 而 $h(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$, 故 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\dfrac{x(3-x)}{(1-x)^2}$.

(6) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)3^{2n-1}}=xg(x)$, 则 $xg'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{3^{2n-1}}=\dfrac{x}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{x^2}{9}\right)^{n-1}=\dfrac{x}{3}\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{9}}=\dfrac{3x}{9+x^2}$. 所以 $g'(x)=\dfrac{3}{9+x^2}$, 于是 $g(x)=\int_0^x g'(x)dx+g(0)=\arctan\dfrac{x}{3}$. 故 $S(x)=x\arctan\dfrac{x}{3}$, $|x|\le 3$.

1.3.7. 设在 $(-R,R)$ 内有 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 证明: 若 f 为奇函数, 则 $a_{2n}=0$; 若 f 为偶函数, 则 $a_{2n+1}=0$, 其中 $n\in\mathbf{N}$.

证　由于 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, x\in(-R,R)$, 所以 $f(-x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_nx^n$. 当 f 为奇函数时, 应有 $a_n+(-1)^na_n=0(n=1,2,3\ldots)$. 而当且仅当 $n=2k-1(k=$

$1,2,\ldots)$ 时, 才满足 $1+(-1)^n=0$, 故必有 $a_{2n}=0$. 当 f 为偶函数时, 应有 $a_n-(-1)^n a_n=0(n=1,2,3\ldots)$. 而当且仅当 $n=2k(k=1,2,\ldots)$ 时, 才满足 $1-(-1)^n=0$, 故必有 $a_{2n+1}=0$.

1.3.8. 利用幂级数求下列数项级数的和: (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)2^{-n}$.

解 (2) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)x^n$, 则有 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\dfrac{x(x-1)}{(1+x)^3}-\dfrac{x}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^2+1}{(1+x)^3}$. 当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时, 该幂级数即为数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)2^{-n}$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)2^{-n}=\dfrac{10}{27}$.

1.3.9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续; (2) 计算 $\displaystyle\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n3^{n-1}}=3$, 所以其收敛半径为 $\dfrac{1}{3}$. 因此级数在 $(-1/3,1/3)$ 内闭一致收敛, 故 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续。

(2) 由于此幂级数在 $[0,\dfrac{1}{8}]$ 上一致收敛, 所以

$$\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{8}}nx^{n-1}3^{n-1}dx=\frac{1}{5}.$$

1.3.13. 设 $C(\alpha)$ 为 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式中 x^{2010} 的系数, 求

$$I=\int_0^1 C(-y-1)\Big(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots+\frac{1}{y+2010}\Big)dy.$$

解 因为

$$C(-y-1)=\frac{(-y-1)(-y-2)\cdots(-y-2010)}{2010!}=\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+2010)}{2010!},$$

所以被积函数等于 $\dfrac{d}{dy}\Big(\dfrac{(y+1)(y+2)\cdots(y+2010)}{2010!}\Big)$. 于是,

$$I=\frac{(y+1)(y+2)\cdots(y+2010)}{2010!}\Big|_0^1=2011-1=2010.$$

1.3.17. 证明: (1) 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛; (2) 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛于 S, 则 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$.

证 (1) 因为 $|x^n| \le 1$ ($x \in [0,1]$) 且对每个 $x \in [0,1]$, $\{x^n\}$ 关于 n 单调, 所以由 Abel 一致收敛判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2) 由连续性定理即得结论.

1.3.19. 设 $\sum a_n$ 为级数, S_n 为其部分和, 且极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在. 若 $S_n \to +\infty, a_n/S_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 求级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径. (提示: 利用 Stolz 公式.)

解 因为 $S_n \to \infty$, 且极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在, 所以由 Stolz 公式可得 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}) = 0$.

故 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1$, 级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径为 1.