5.2 定积分

5.2.1 定积分的概念与可积条件

5.2.2 定积分的性质

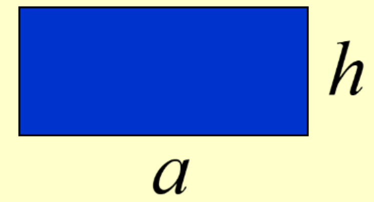
5.2.3 微积分学基本定理

1. 定积分的定义

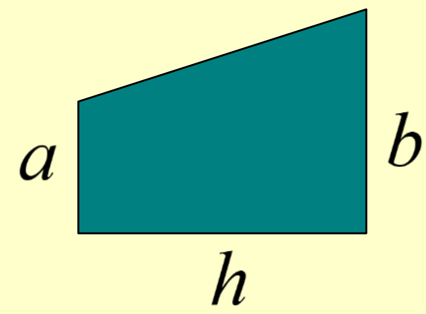
问题提出

不定积分和定积分是积分学中的两大基本问题。求不定积分是求导数的逆运算，定积分则是某种特殊和式的极限，它们之间既有本质的区别，但也有紧密的联系。现在先从两个例子来看定积分概念是怎样提出来的。

（1） 曲边梯形的面积



矩形面积 $= a h$



梯形面积 $= \dfrac{h}{2}(a+b)$

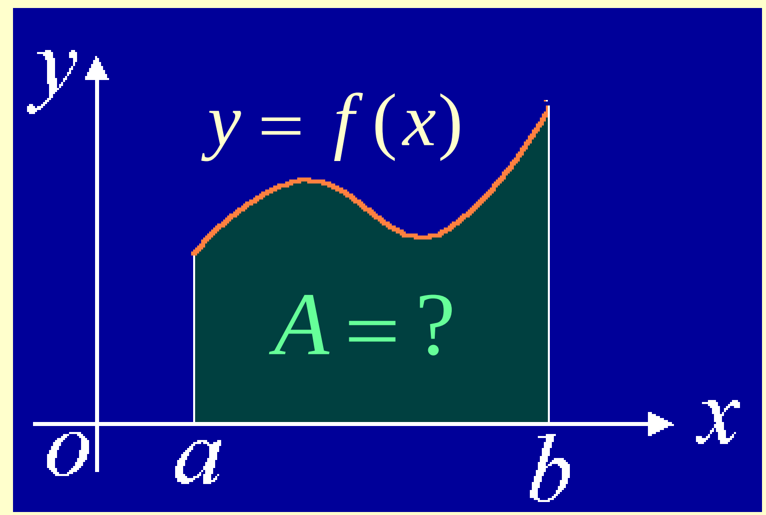
曲边梯形：

设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

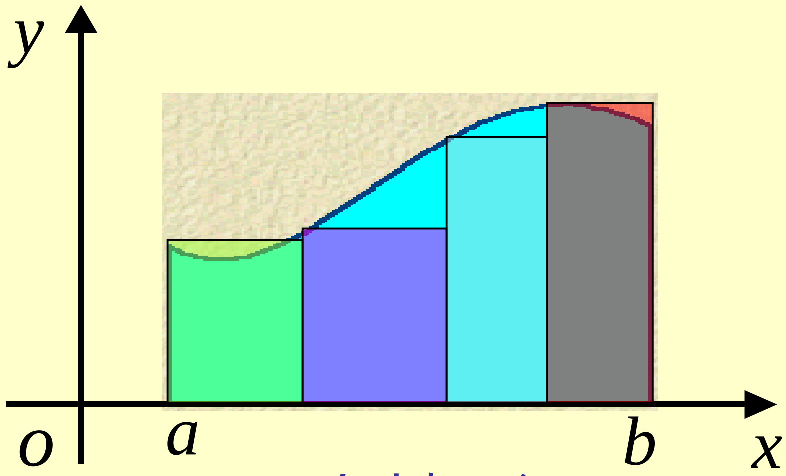
及 x 轴，以及两直线 $x=a, x=b$

所围成，求其面积 A .

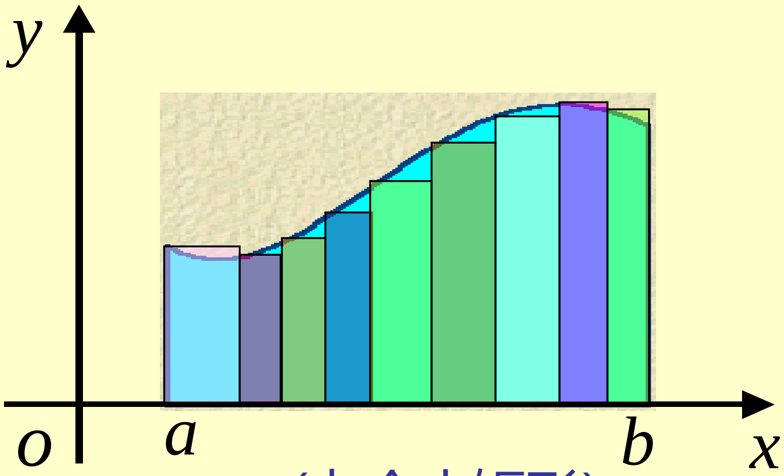


思路：用已知代未知，利用极限由近似到精确。

用矩形面积近似曲边梯形面积：



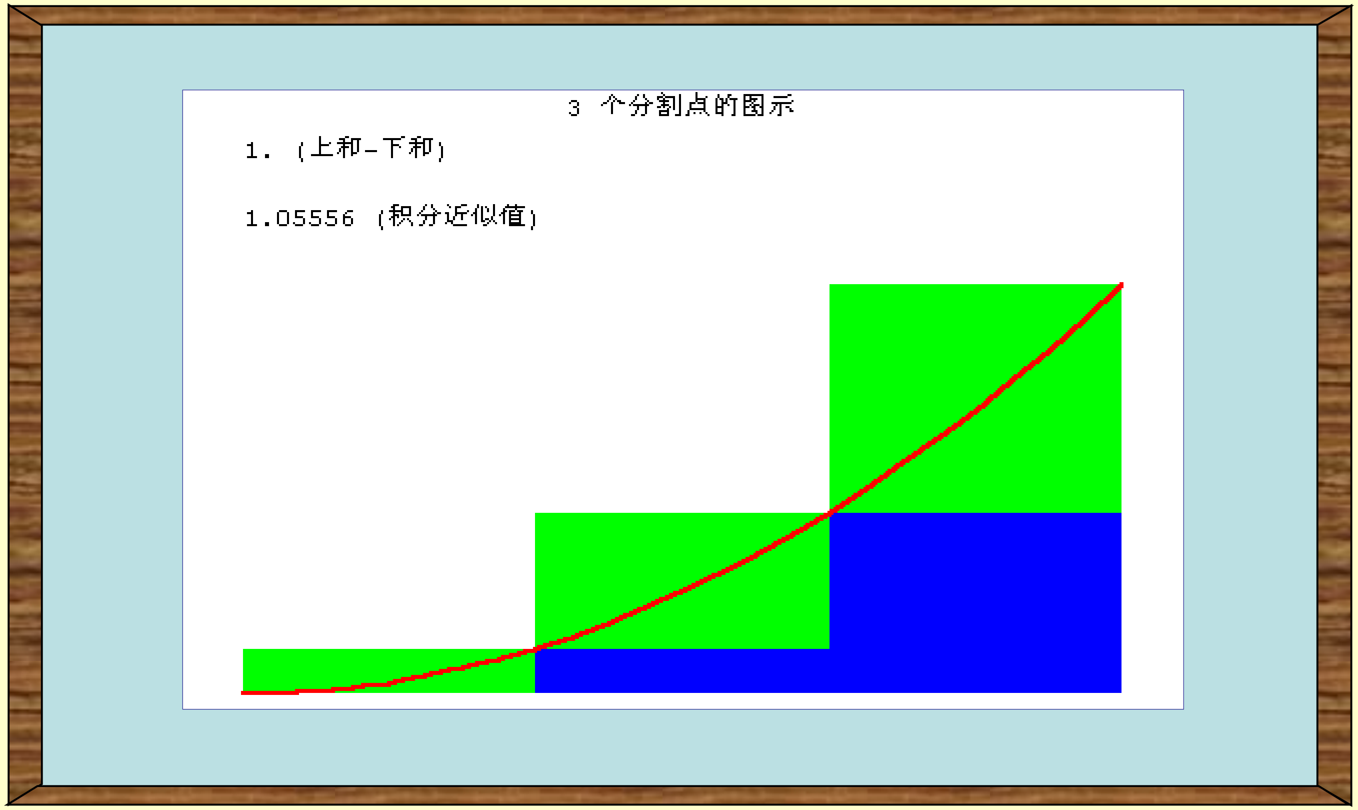
(四个小矩形)



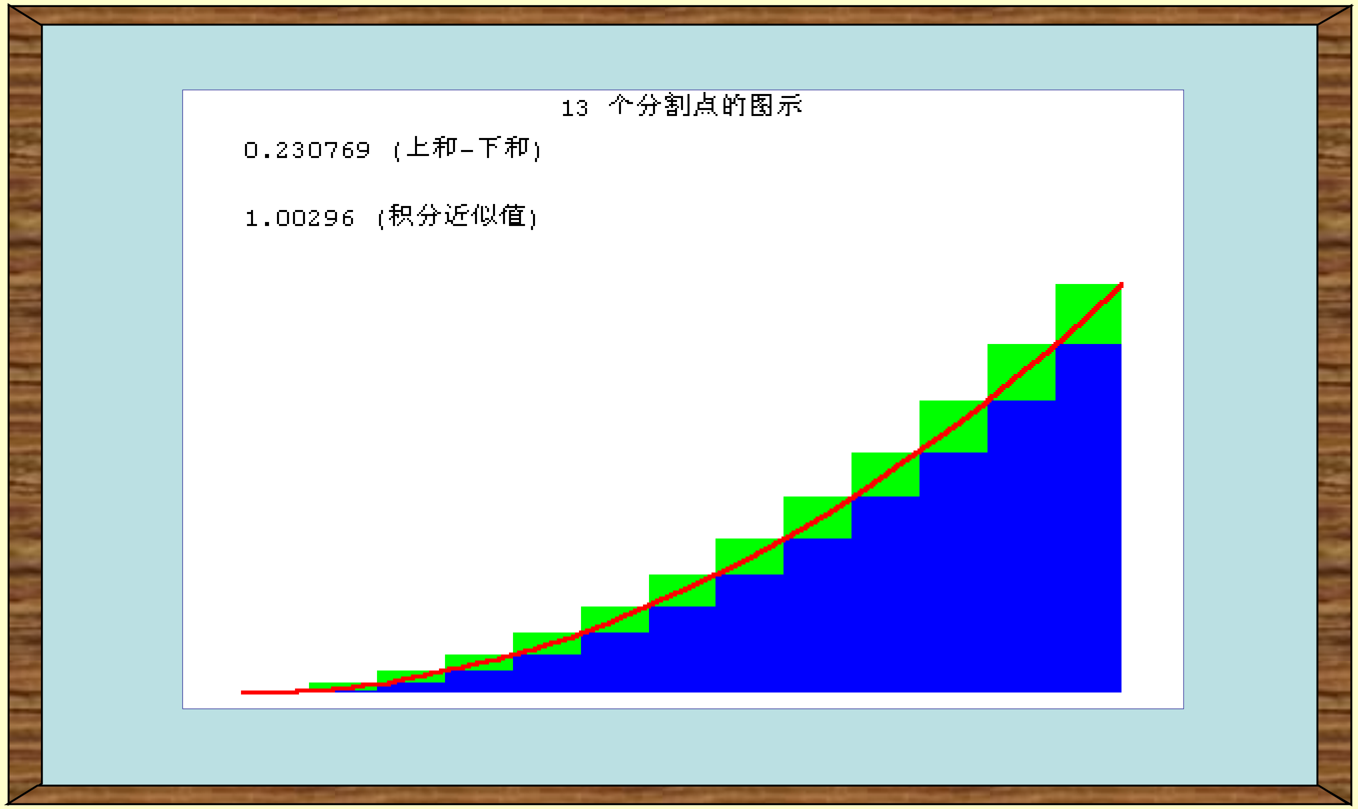
(九个小矩形)

一般地，小矩形越多，小矩形面积和越接近曲边梯形面积.

观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

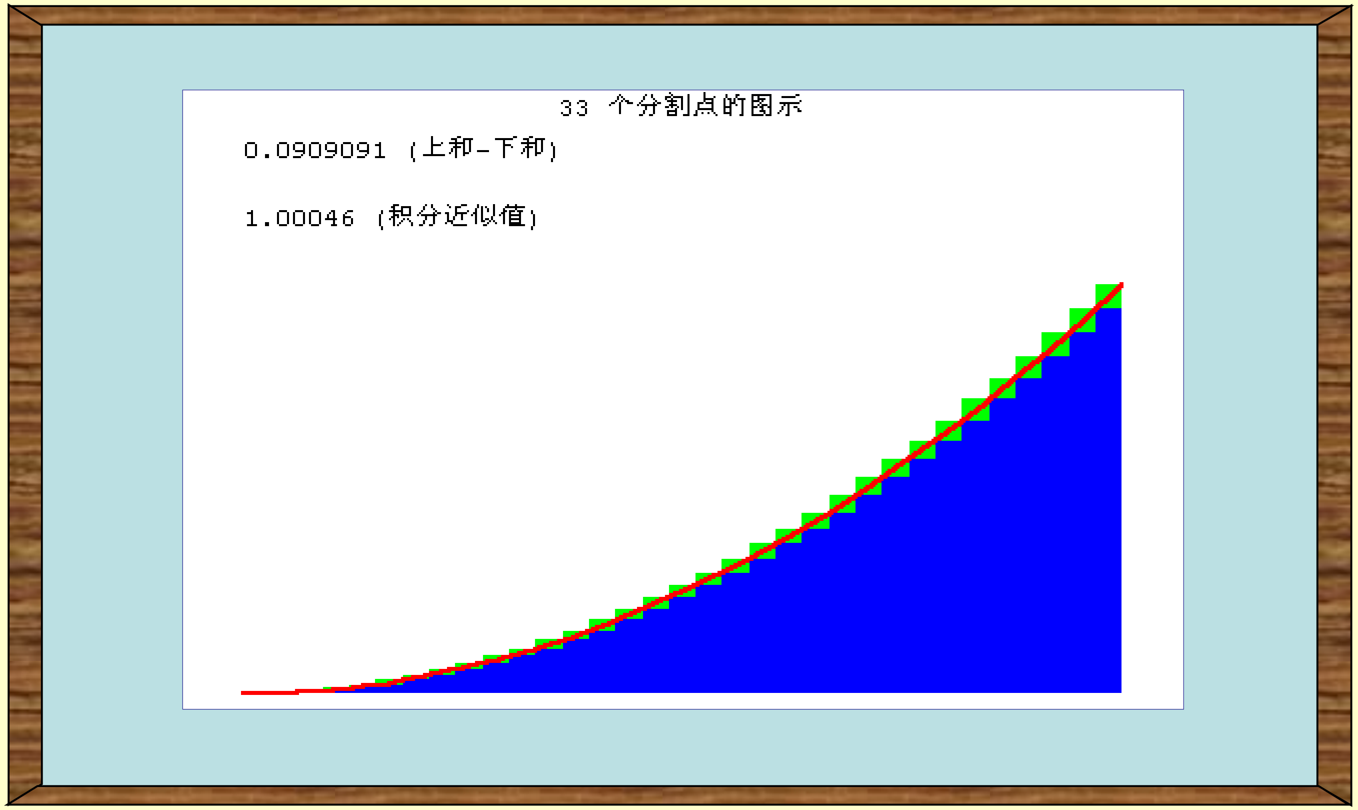


观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

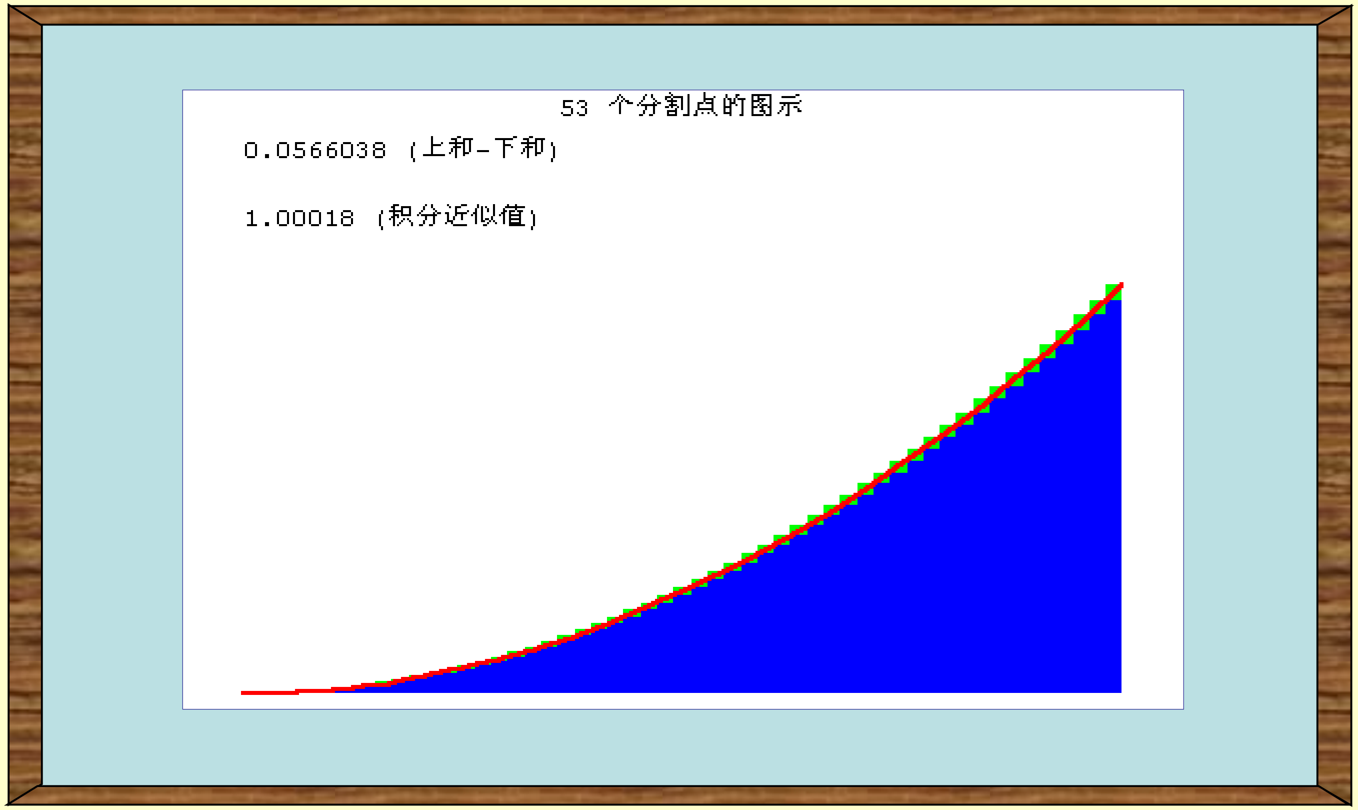


观察下列演示过程，注意当分割加细时，

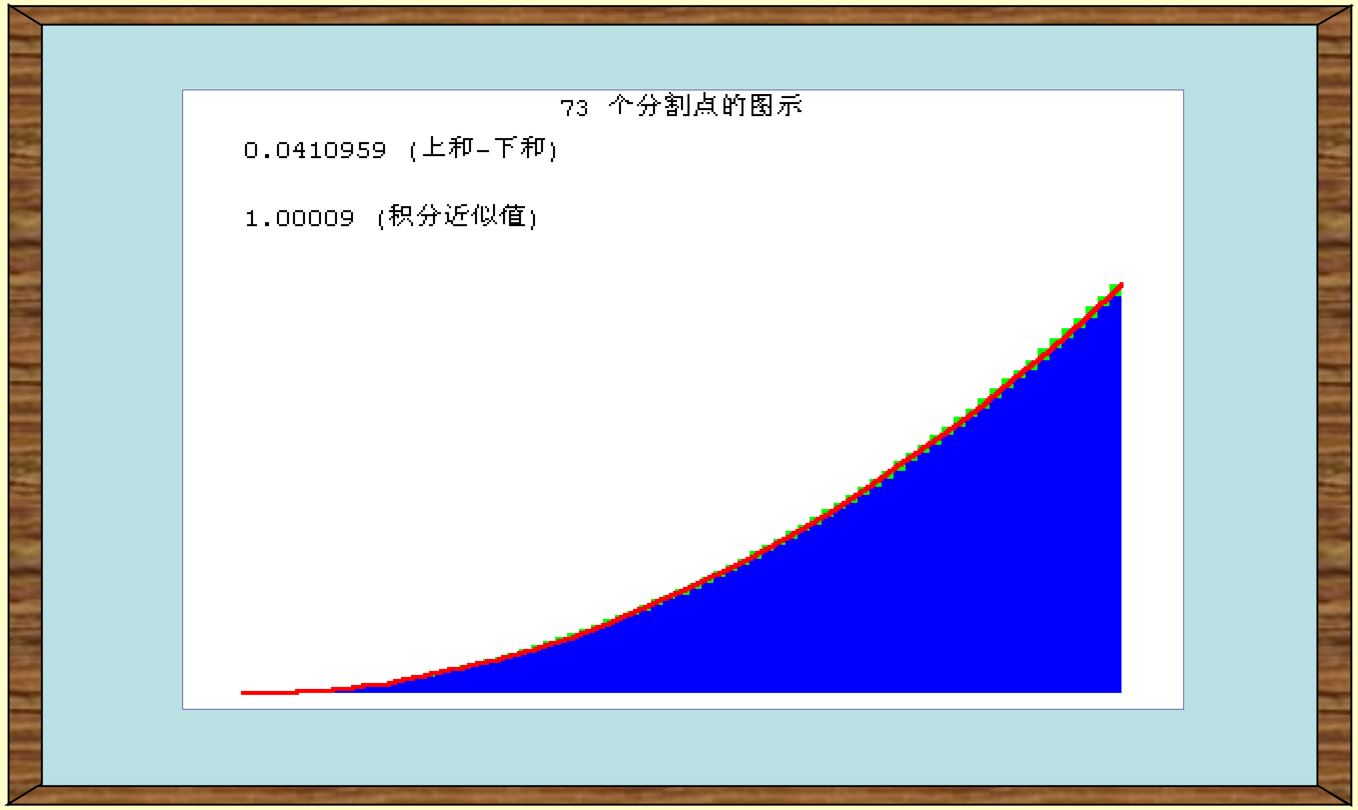
矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

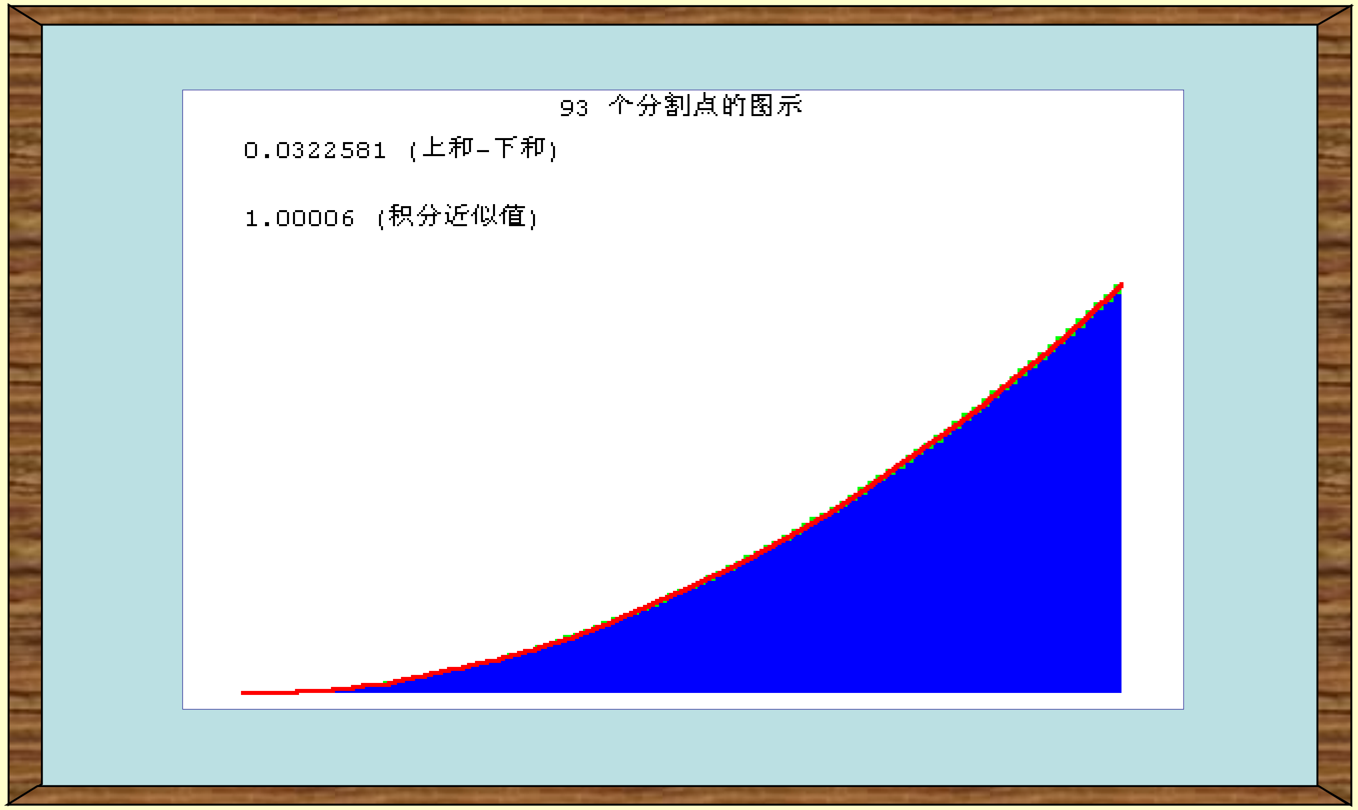


观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.

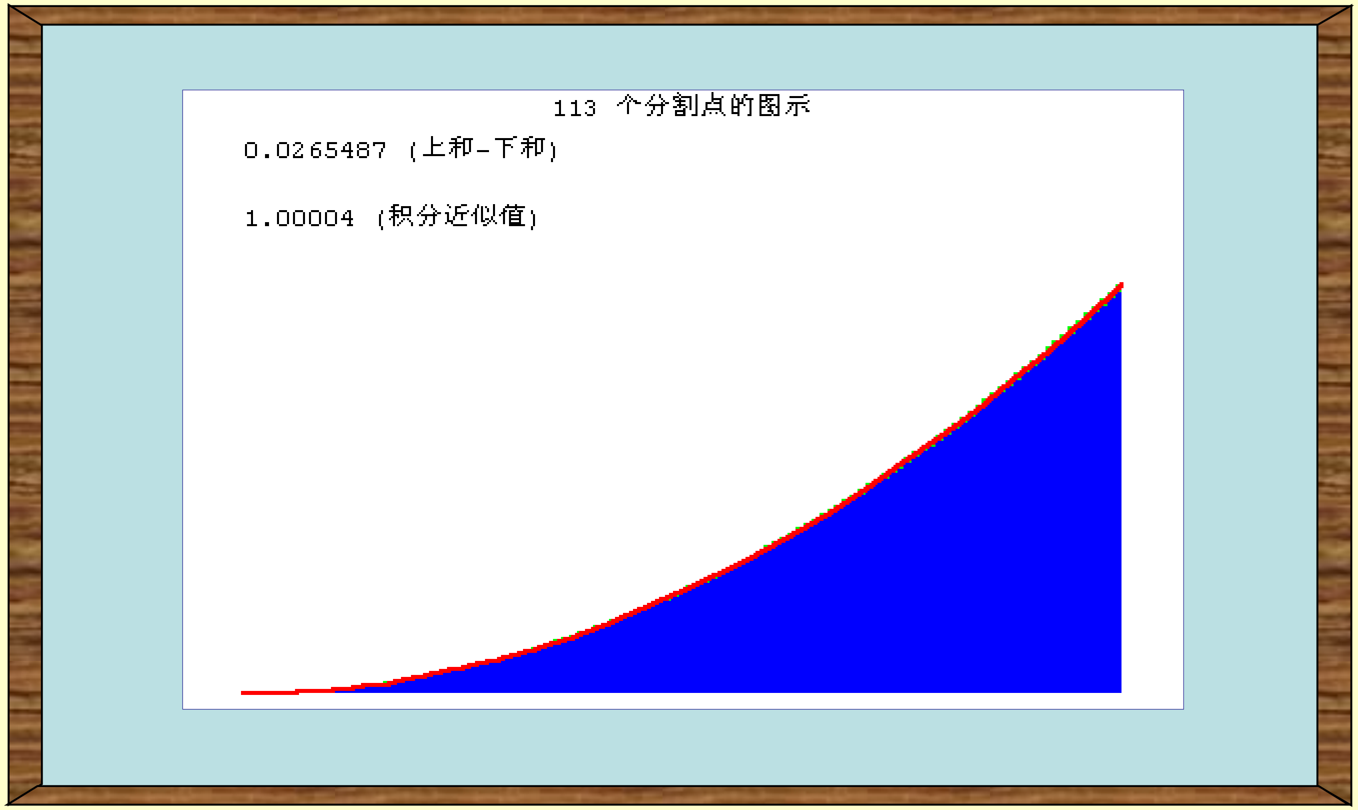


观察下列演示过程，注意当分割加细时，

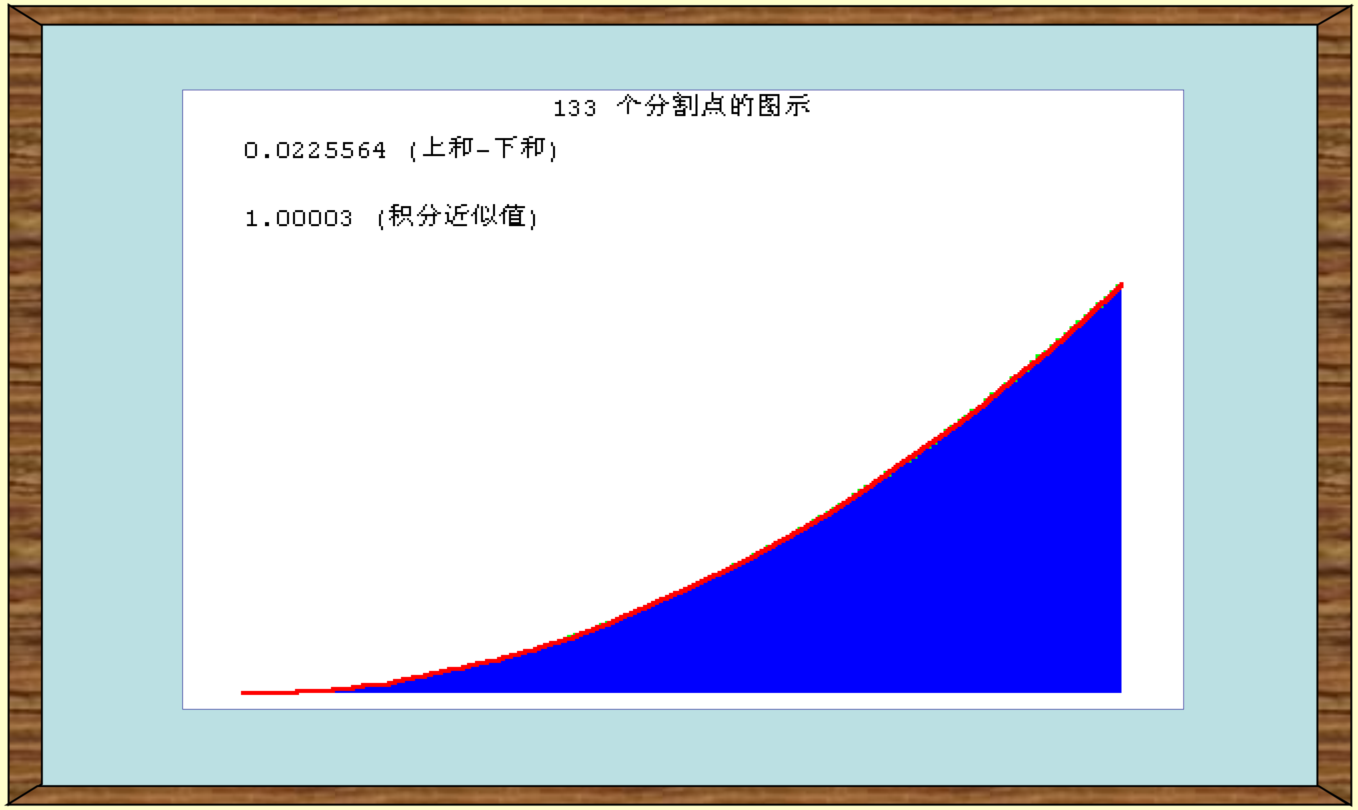
矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



观察下列演示过程，注意当分割加细时，矩形面积和与曲边梯形面积的关系.



解决步骤：

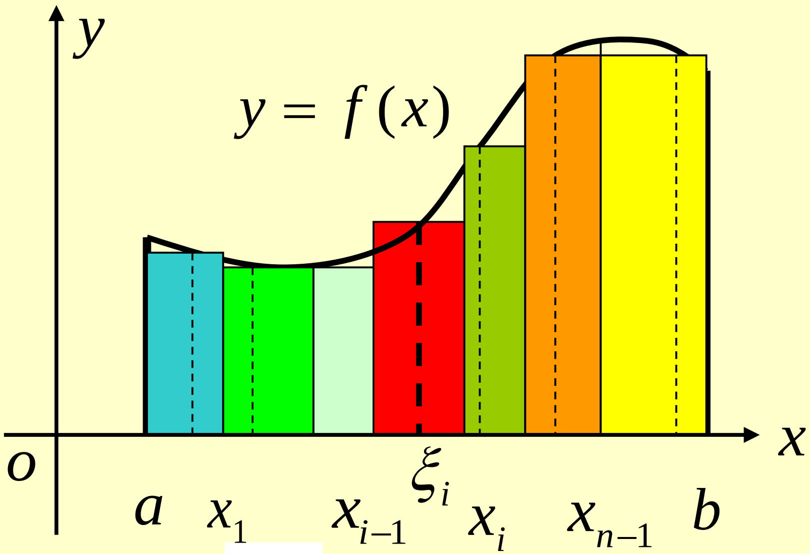
1) 分割　在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$ ——分割T

用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

2) 近似　在第 i 个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底，$f(\xi_i)$ 为高的小矩形，并以此小梯形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得



$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1, 2, \cdots, n)$$

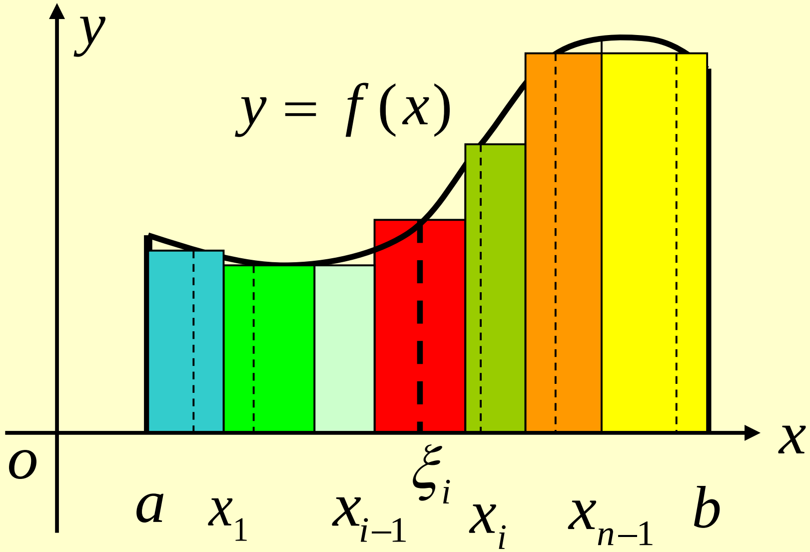
3) 求和 $$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

4) 取极限 令 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$ ——T的模或细度

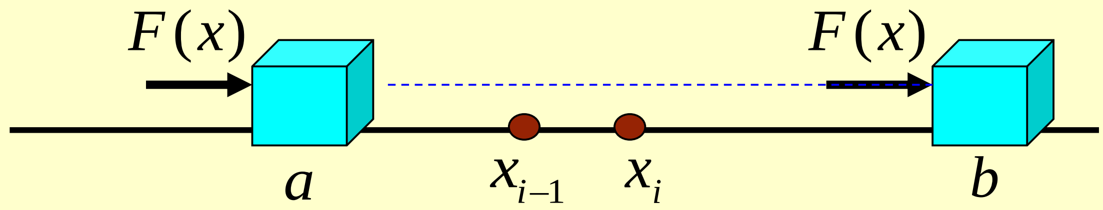
则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

$$=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



(2) 变力作功



常力F所作的功为：$W = F(b-a)$

若F为变力：$F(x)$

(1) **分割**：把 $[a,b]$ 任意分为n个小段：$[x_{i-1}, x_i](i=1,2,\cdots,n)$.

(2) **近似**：在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，物体从 x_{i-1} 移到 x_i 时 $F(x)$

作的功 $\Delta W_i \approx F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(\xi_i)\Delta x_i$

(3) **求和**：物体从 a 移到 b 时 $F(x)$ 作的功近似为：$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

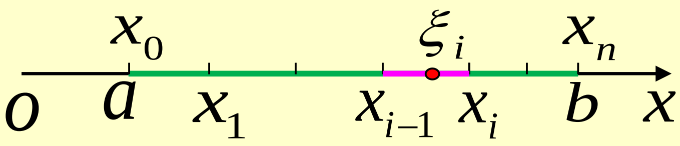
(4) **取极限**：当无限细分时，上述和式的极限就是所求的功，即

$$W = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$$

$$A = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad W = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$$

总结：上面两个例子，一个是计算曲边梯形面积的几何问题，另一个是求变力作功的力学问题，它们最终都归结为一个特定形式的和式逼近。不同的问题，有相同的数学结构（数学模型）！在科学技术中还有许多同样类型的数学问题，解决这类问题的思想方法概括说来就是“分割，近似，求和，取极限”。这就是产生定积分概念的背景。

定积分的定义



定义5.2.1 设 f 是定义在[a, b]上的一个函数．在闭区间[a, b]内取n-1个点，依次为 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

它们把[a, b]分成n个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$, i=1, 2, …， n.

这些分点或这些闭子区间构成 [a,b]的一个分割，记为

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

小区间 Δx_i的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并记 $\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$,

称为分割 T 的模.

任取点$\xi_i \in \Delta_i$, 并作积分和（黎曼和）： $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

若极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且极限值与分割 T 和 ξ_i 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$上可积（或黎曼可积），极限值 J 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$上的定积分，记为

积分上限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

$[a,b]$称为积分区间

注：（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分割 T 和 ξ_i 的取法是任意的.

（3）一般不能用 $n\to\infty$ 来代替 $\|T\|\to 0$, 因为 $n\to\infty$ 时未必有 $\|T\|\to 0$, 但 $\|T\|\to 0$ 时必定同时有 $n\to\infty$.

（4） 积分和的极限 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$

与普通函数极限 $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$ 的区别：

(i) 积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 不是T的函数,而 $h(x)$ 是 x 的函数;

(ii) $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$ 与 $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$ 的定义结构基本相同.

定义的 $\varepsilon-\delta$ 表述：

$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = J$: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, 使得对 $[a,b]$ 上的任意

分割T及任意 $\xi_i \in \Delta_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 当 $\|T\| < \delta$ 时,恒有

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$上可积.

例1. 讨论狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$

在区间$[a,b]$上的可积性.

解: 设 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$ 为区间$[a,b]$ 上的分割.

$D(x)$ 在区间$[a,b]$上的关于分割T的积分和为

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i,\quad \xi_i\in\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$$

由实数的性质,在每一 Δ_i上, 既有有理数,也有无理数.

当 ξ_i 取有理数时

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=b-a,\qquad \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=b-a,$$

当 ξ_i 取无理数时

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0,\quad \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=0$$

所以该函数在区间$[a,b]$ 上不可积.

注：（5）可积性是函数的又一分析性质．稍后(推论5.2.2)就会知道连续函数是可积的.于是开头的两个实例都可用定积分记号表示：

1）连续曲线 $y = f(x) \geq 0$ 在[a, b]上形成的曲边梯形面积为 $S = \int_a^b f(x)dx$;

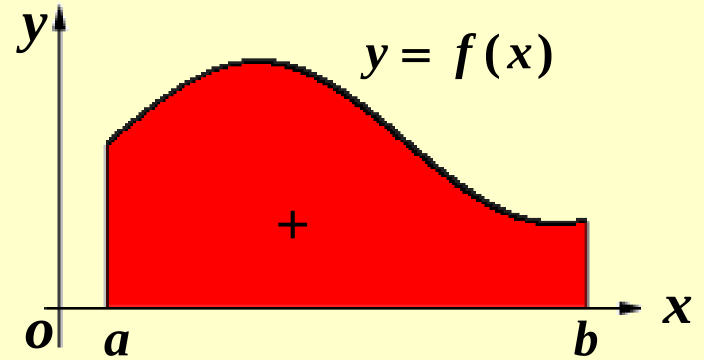
2）在连续变力F（x）作用下，质点从a位移到b所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

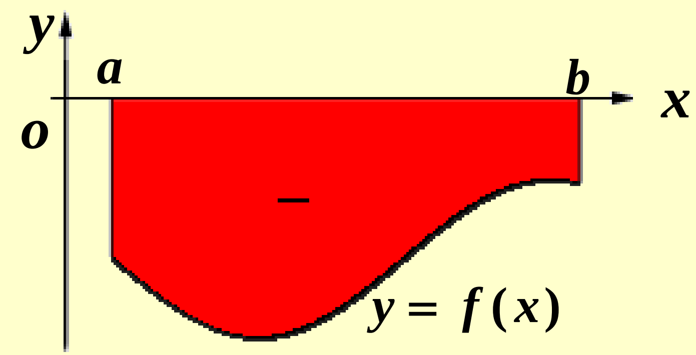
注：（6）定积分的几何意义

设 $y=f(x)$为 $[a,b]$ 上连续函数.

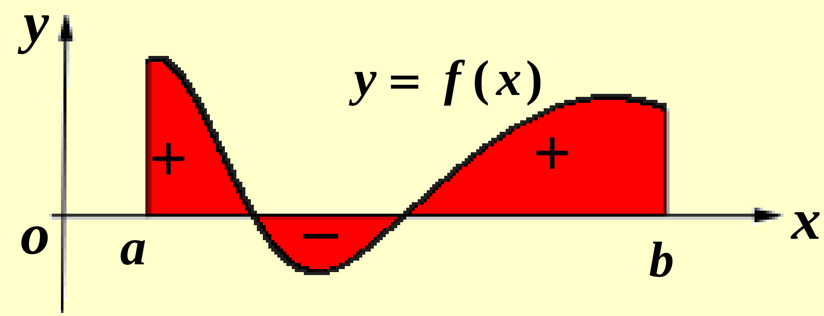
(1) 当$f(x)\geq 0(x\in[a,b])$时，$\int_a^b f(x)dx$ 为曲线 $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ 围成的面积.



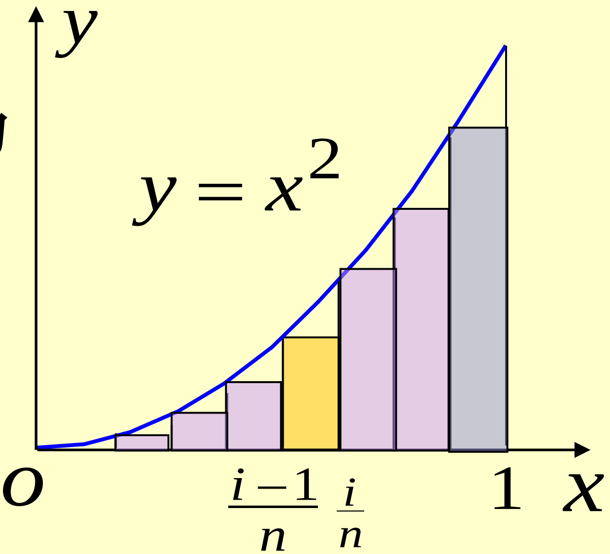
(2) 当 $f(x)\leq 0(x\in[a,b])$ 时，$\int_a^b f(x)dx$ 为曲线 $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ 围成的面积的负值.



(3)一般情形: $\int_a^b f(x)dx$ 为曲线 $y=f(x)$ 在x 轴上方的正面积与在 x 轴下方的负面积的代数和.



例2. 求在区间[0,1]上，以抛物线 $y=x^2$ 为曲边的曲边三角形的面积（如图）.



解 因 $y=x^2$ 在[0,1]上连续， 故所求面积为

$$S=\int_0^1 x^2dx=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i.$$

取 $\xi_i=\frac{i-1}{n}\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right], i=1,2,\cdots,n.$

则有 $$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^{n}\left(\frac{i-1}{n}\right)^2.\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

微积分学基本定理:

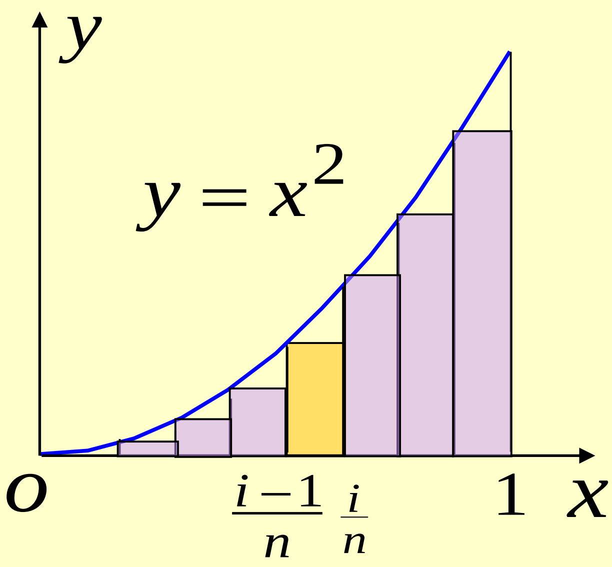
设$F(x)$是连续函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上的一个原函数,

则 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$ (牛顿 - 莱布尼兹公式)

曲边三角形的面积:

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}.$$



利用定积分求和式的极限:

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,则 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

将$[a,b]$ n等分，则分点为

$$a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\cdot\frac{b-a}{n}, \cdots, a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}, b$$

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n), \qquad \text{取}\ \xi_i = a+i\cdot\frac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\|T\| = \frac{b-a}{n}\to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n\to\infty$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

例**3.** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$

上式可看作 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在[0,1]上的一个积分和，

分点为 $x_i=\frac{i}{n}$（$i=1,2,\cdots,n$)， $\Delta x_i=\frac{1}{n}$， 取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，

$\Rightarrow$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$

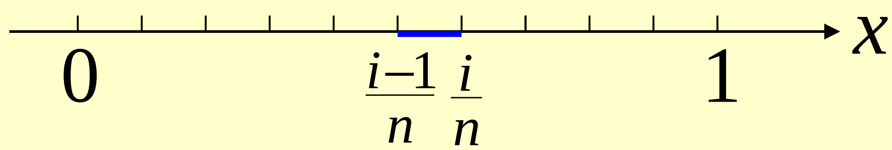
例4. 用定积分求下列极限:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}} \qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

解:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$



$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\Big)^p\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

思考题：

1. 计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. 证明：对 $n\in N^{+}$ ，有不等式

$$\frac{1}{\sqrt{2+5n}}+\frac{1}{\sqrt{4+5n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+5n}}<\sqrt{7n}-\sqrt{5n}.$$

2. 可积条件 (简介)

主题：研究极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在的条件.

关于普通极限存在性研究:

(1)定义;
(2)柯西收敛准则;
(3)单调有界定理;
(4)迫敛性定理;
(5)归结原则.

注意积分和极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与普通极限的区别.

（1）可积的必要条件

数列极限的情形: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在,则 $\{a_n\}$ 有界.

函数极限的情形: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,则存在 $U^o(x_0)$, 使$f(x)$在 $U^o(x_0)$有界.

定理1. (必要条件) 若$f(x)$在$[a,b]$上可积, 则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

证：(反证法) 设 $T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$为区间$[a, b]$上的分割.

若 $f(x)$在 $[a,b]$上无界 $\Longrightarrow$ $f(x)$在某个Δ_k上无界.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \left|f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$\geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \qquad (*)$$

在 $i\neq k$ 的各个区间 Δ_i上取定ξ_i，则$\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$为一定值,记

$$G=\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$f(x)$ 在 Δ_k 上无界,则 $|f(x)\Delta x_k|$在 Δ_k上无界,进而对任意M>0

可取到 $\xi_k\in\Delta_k$, 使 $|f(\xi_k)\Delta x_k| > M+G$

由(*),得 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| > (M+G)-G=M$

故极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 不存在，与函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积矛盾.

定理1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

逆命题不成立。

例如，狄利克雷函数：$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$

在区间为有界函数,但在任何区间 $[a,b]$ 不可积.

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的必要条件.

（2） 可积的充要条件

研究极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在的条件.

以下均设函数 $f(x)$ 为有界函数(满足可积的必要条件).

设 $T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 为区间 $[a,b]$ 上的分割.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 有界

记 $S(T)=\sup\limits_{\xi_i\in\Delta_i}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $s(T)=\inf\limits_{\xi_i\in\Delta_i}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

猜想与发现:

(1) $S(T)$, $s(T)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 三者大小有何关系?

(2) $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)$, $\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)$, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 三者有何关系?

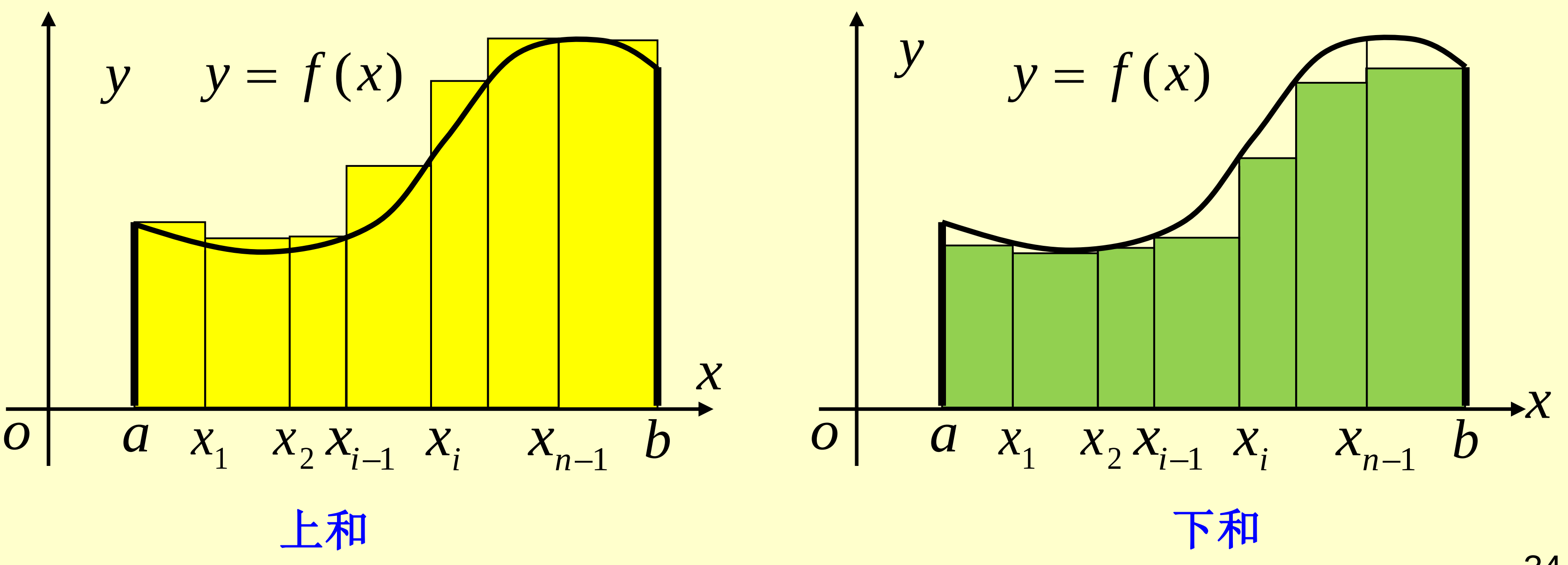
上和与下和　设 $f(x)$在 $[a,b]$上有界.

$T=\{\Delta_i, i=1,2,\cdots,n\}$ 为区间$[a, b]$上的分割.

记 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$,　$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x), i=1,2,\cdots,n.$

称 $S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ 为 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上关于分割T的上和.

称 $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ 为 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上关于分割T的下和.



上和与下和的性质：

性质1. 对任何分割 T，有：$s(T) \le S(T)$.

性质2. 对于同一分割T，相对于任何点集$\{\xi_i\}$，上和是所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界，即

$$S(T)=\sup_{\xi_i}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right\} \qquad s(T)=\inf_{\xi_i}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right\}$$

$S(T)$, $s(T)$, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 三者的大小关系:

$$s(T)\le\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T), \forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i].$$

性质3. 上和与下和由分割 T 唯一确定(与介点无关).

性质4. 设 $\bar{T}$ 是由分割 T 添加若干新分点得到的新分割，则

$$s(T) \le s(\bar{T}), \quad S(\bar{T}) \le S(T)$$

即：分割加细时，上和不增，下和不减.

性质5. 对于$[a, b]$的任意两个分割 T_1， T_2 有

$$s(T_1) \le S(T_2), \quad s(T_2) \le S(T_1)$$

由性质5可知：对$[a, b]$的所有分割而言，所有上和有下界，所有下和有上界，从而分别存在下、上确界，记：

$$S = \inf_T S(T), \quad s = \sup_T s(T)$$ ——上、下积分

且有 $$s(T) \le s \le S \le S(T)$$

性质6（Darboux定理）：上积分与下积分分别是上和与下和在 $\|T\| \to 0$ 时的极限，即

$$S = \lim_{\|T\|\to 0} S(T), \quad s = \lim_{\|T\|\to 0} s(T).$$

定理2（可积的第一充要条件）：有界函数 $f(x)$ 在$[a, b]$上可积的充要条件是：$f(x)$ 在$[a, b]$上的上积分与下积分相等，即：

$$S = s$$

可积准则（可积的第二充要条件）：

定理3 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是: 任给 $\varepsilon>0$, 总相应存在$[a, b]$的一个分割T, 使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

注意到 $S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$

称 $\omega_i=M_i-m_i$, 为函数 $f(x)$ 在 Δ_i 上的振幅.

定理3可表述为:

定理3' 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是: 任给 $\varepsilon>0$, 相应存在$[a, b]$的一个分割T, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

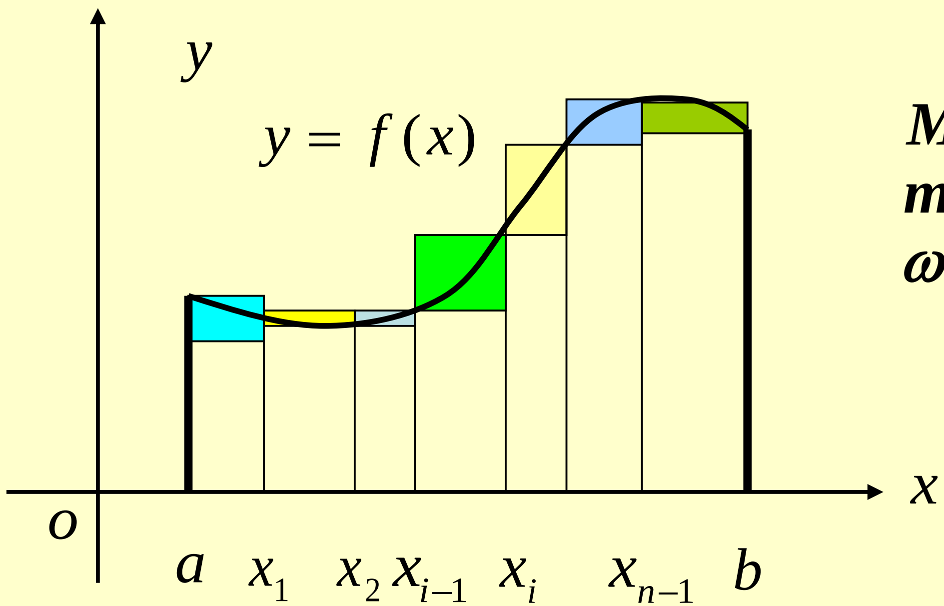
(称 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于分割T的振幅和)

定理3 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 T,

使得 $S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon$

定理3的几何意义:

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则曲线 $y = f(x)$ 可由振幅和形成的一系列小矩形覆盖,且这些小矩形之和 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ 可以任意小.



$M_i = \sup\{ f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i \}$
$m_i = \inf\{ f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i \}$
$\omega_i = M_i - m_i$

例1 设 $f(x)\in[a,b]$.若 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 上的分割 T

$$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots\Delta_n\}$$

使得 $\omega_i<\varepsilon$,则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积.

证: 由假设, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$上的分割 T

$$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots\Delta_n\}$$

使得 $\omega_i<\varepsilon$,相应得 $f(x)$在区间$[a,b]$上关于分割T的振幅和

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\Delta x_i=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=(b-a)\varepsilon$$

由定理3, $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积.

注: 用定理3 讨论可积性问题时, 往往要对振幅和 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$ 进行放大估计.例1是通过放大振幅的来实现的.

（3）可积函数类

定理4 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a,b], \text{当} |x' - x''| < \delta \text{时, 有}$$

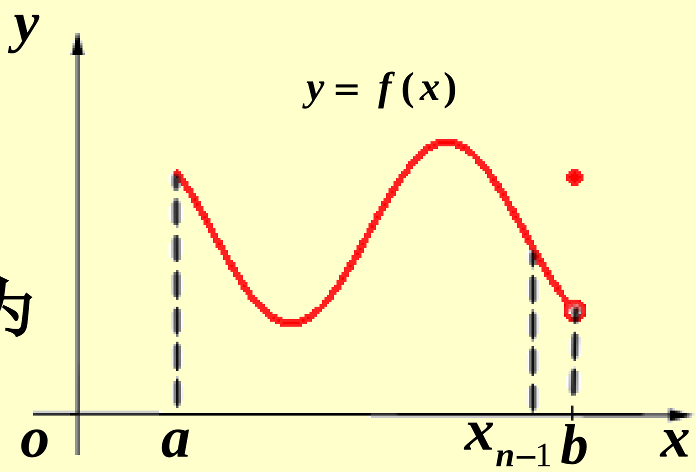
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

所以, 当 $[a,b]$ 上的分割T满足条件: $\|T\| < \delta$ 时,

$$\omega_i = \sup_{x', x'' \in \Delta_i} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由例1, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理5 若$f(x)$在$[a,b]$上有界, 且只有有**限个间断点**, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上可积.



证: 不妨设$f(x)$只在$x=b$处间断.

设 $T=\{x_0=a, x_1, x_2, \cdots, x_n=b\}$

为区间$[a, b]$上的分割. 相应的振幅和为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_n\Delta x_n$$

设 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

$\forall\varepsilon>0$, 当 $\|T\|<\varepsilon$ 时,有 $\omega_n\Delta x_n\le(M-m)\Delta x_n\le(M-m)\varepsilon$

而$f(x)$在$[a,x_{n-1}]$连续,由定理4, $f(x)$ 在$[a,x_{n-1}]$可积,由定理3存在 $[a,x_{n-1}]$ 的分割(不妨设是分割T在 $[a,x_{n-1}]$的部分),

使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$, 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon+(M-m)\varepsilon$

由定理3, $f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理6 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上的单调, 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

证: 不妨设 $f(x)$ 为$[a,b]$上的增函数.

若 $f(a)=f(b)$, 则 $f(x)$ 为常数函数, 显然可积.

当 $f(a)<f(b)$ 时, 对 $[a,b]$ 上的任一分割T:

$$T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots\Delta_n\}$$

$f(x)$ 在区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$,

于是 $\displaystyle\sum_T\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i$

$$\le\sum_{i=1}^n[f(x_i)-f(x_{i-1})]\|T\|=[f(b)-f(a)]\|T\|$$

故对于 $\forall\varepsilon>0$, 只要 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,

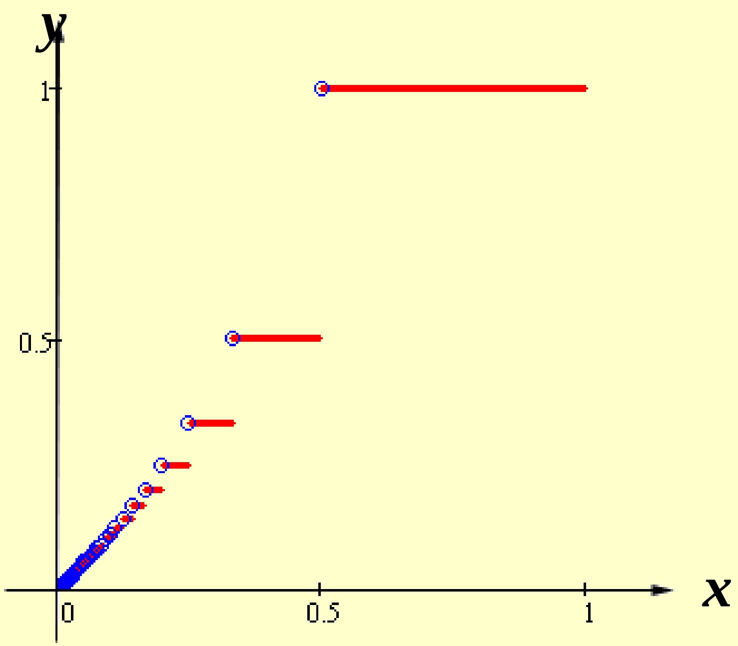
就有 $\displaystyle\sum_T\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$, 由定理3, $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积.

注：定理6是通过放大分割小区间的长度的来估计振幅和.

例2 试用两种方法证明函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}\end{cases}$ 在区间 $[0,1]$ 可积.

证: (证法一)　(用定理6)

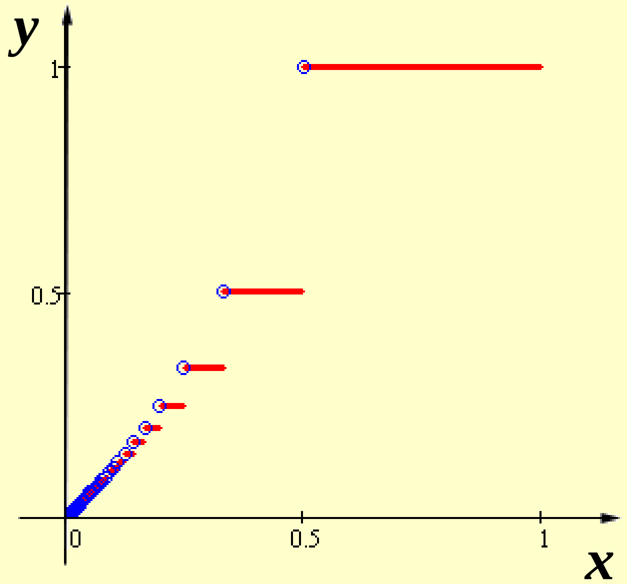
因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增且有界, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积.



例2. 试用两种方法证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 可积.



证:(证法二) (用可积准则)

设 $T=\{x_0=0,x_1,x_2,\cdots,x_n=1\}$

为区间[0,1]上的分割. 相应的振幅和为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\omega_1\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

因 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}f(x)=1, m=\inf\limits_{x\in[0,1]}f(x)=0$, 故对 $\forall\varepsilon>0$, 当 $\|T\|<\varepsilon$

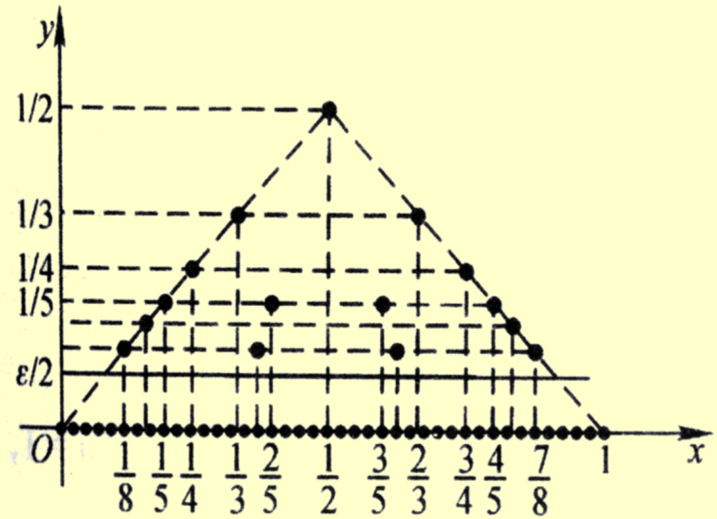
时,有 $\omega_1\Delta x_1\le(M-m)\Delta x_1\le\varepsilon$. 而 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 只有有限个间断点且有界,由定理5, $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 可积,由定理3存在 $[x_1,x_n]$ 的分割(不妨设是分割T在 $[x_1,x_n]$ 的部分), 使得 $\sum_{i=2}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$,

即得 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$, 故 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可积.

例3. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ \ (p,\,q\text{为正整数},\ \dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}),\\ 0, & x=0,1,\ \text{或为区间内}(0,1)\text{的无理数}.\end{cases}$$

在区间$[0,1]$可积，且 $\int_0^1 R(x)dx=0.$



分析: $\forall\varepsilon>0$, 在 $[0,1]$ 内使得 $R(x)>\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的有理点只有有限个. 故$[0,1]$的任意分割T含这些有理点的Δ_i也只有有限个, 这有限个区间的总长可以任意小($<\dfrac{\varepsilon}{2}$)，而剩余小区间上函数的振幅不大于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

把这两部分结合，可以证得 $\sum\limits_T \omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$

例3. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ (p,\ q\text{为正整数},\ \dfrac{p}{q}\ \text{为既约真分数})\\ 0, & x=0,1,\text{或为区间}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 可积，且 $\int_0^1 R(x)dx=0.$

证: $\forall\varepsilon>0$, 在 $[0,1]$ 内使得 $R(x)=\dfrac{1}{q}>\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的有理点 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限个,

设它们为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$.

作 $[0,1]$ 的分割 $T=\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n\}$, 使得 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{2k}$.

将 Δ_i 分为两类: $\{\Delta_1',\Delta_2',\cdots,\Delta_m'\}$, $\{\Delta_1'',\Delta_2'',\cdots,\Delta_{n-m}''\}$,

其中 Δ_i' 含有 r_i，其个数 $m\le 2k$ (当所有 r_i 恰好都是 T 的分割点时 $m=2k$），Δ_i'' 不含 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$.

由于 $f(x)$ 在 Δ_i' 上的振幅 $\omega_i'\le\dfrac{1}{2}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i' \le \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}\cdot\Delta x_i' \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\|T\| < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}\frac{\varepsilon}{2k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $R(x)$ 在 Δ_i'' 上的振幅 $\omega_i''\le\dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i'' \le \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\varepsilon}{2}\cdot\Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $$\sum_{T}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m}\omega_i'\Delta x_i' + \sum_{i=1}^{n-m}\omega_i''\Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定理3, $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积.

因 $R(x)$ 在$[0,1]$上可积, 所以极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i)\Delta x_i$ 存在.

当 ξ_i 全取无理点时, $R(\xi_i)=0$, 进而

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i)\Delta x_i = 0, \quad \text{即 } \int_0^1 R(x)dx = 0.$$

小 结 $f(x)\quad x\in[a,b]$

可积的必要条件：可积 $\Longrightarrow$ 有界

可积准则：$\forall\varepsilon>0$, 存在$[a, b]$的分割T, 使得 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

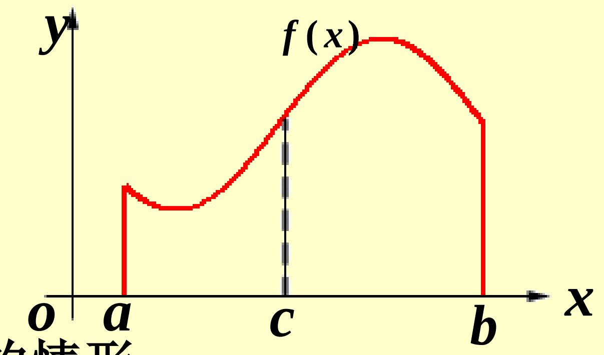
可积函数类：

定理4 若 $f(x)$在$[a,b]$连续,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

定理5 若 $f(x)$在$[a,b]$上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$上可积.

定理6 若 $f(x)$在$[a,b]$上的单调, 则 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

思考题:



1. 证明：若 T' 是 T 增加若干个分点后所得的的分割, 则 $\sum\limits_{T'}\omega_i'\Delta x_i' \le \sum\limits_{T}\omega_i\Delta x_i$.

提示：如图所示,只考虑将一个区间分为两个区间的情形.

设函数 f 在区间 $[a, b]$、$[a, c]$、$[c, b]$ 上的分别振幅为 ω,ω_1,ω_2,

则 $\omega_1 \le \omega$, $\omega_2 \le \omega$, 进而

$$\omega_1(c-a)+\omega_2(b-c) \le \omega(c-a)+\omega(b-c) = \omega(b-a)$$

由此得的如下结果:

(1)振幅积分和“越分越小”;

(2)若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积，由定理3, 对任意 $\varepsilon > 0$,

存在 $[a, b]$ 上的分割 T' 与 T'', 使得 $\sum\limits_{T'}\omega_i^f < \varepsilon$, $\sum\limits_{T''}\omega_i^g < \varepsilon$

令 $T = T' + T''$ (即 T 由 T' 与 T'' 的分点构成), 则

$$\sum_{T}\omega_i^f \le \sum_{T'}\omega_i^f < \varepsilon, \qquad \sum_{T}\omega_i^g \le \sum_{T''}\omega_i^g < \varepsilon.$$

2. 证明: 若f在$[a,b]$上可积, $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 则$f$在$[\alpha,\beta]$上可积.

提示: f在$[a,b]$上可积, 由定理3, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在$[a, b]$上的分割

T, 使得 $\sum_{T}\omega_i^f<\varepsilon$

存在$[a,b]$上加入新的分点: α,β, 应用题1的结果.

3. 设f、g均定义在$[a,b]$上的有界函数. 证明: 若仅在$[a, b]$中有限个点处

$f(x)\neq g(x)$, 则当f在$[a, b]$上可积时, g在$[a, b]$上也可积, 且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

提示: 设 $\int_a^b f(x)dx=I$

根据定义及假设条件,完成以下推导:

$$\left|\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon \longrightarrow \left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$$

4. 设f在$[a, b]$上有界, $\{a_n\}\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. 证明: 若$f$在$[a, b]$上只有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 为其间断点, 则f在$[a, b]$上可积.

提示: 应用定理5,并注意到函数 f 的不连续点“几乎集中”c邻域内.

5. 证明: 若f在区间Δ上有界, 则

$$\sup_{x\in\Delta} f(x)-\inf_{x\in\Delta} f(x)=\sup_{x\in\Delta}|f(x')-f(x'')|.$$

提示: 根据上确界的定义,验证:

(1) $\sup\limits_{x\in\Delta} f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta} f(x)$是数集$\{|f(x')-f(x'')|, x', x''\in\Delta\}$的上界;

(2) $\sup\limits_{x\in\Delta} f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta} f(x)$是数集 $\{|f(x')-f(x'')|, x', x''\in\Delta\}$的最小

最小上界,即 $\forall\varepsilon>0, \exists x_0', x_0''\in\Delta$,使得

$$[\sup_{x\in\Delta} f(x)-\inf_{x\in\Delta} f(x)]-\varepsilon\,|\,f(x_0')-f(x_0'')|$$