6.1.2 初等积分法

一、可分离变量微分方程

二、齐次方程

三、一阶线性微分方程

四、伯努利方程

五、可降阶高阶微分方程

六、一阶隐式微分方程及其参数表示

一、可分离变量微分方程——分离变量法

形式： $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

解法：分离变量 $\dfrac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$

两边积分 $\underbrace{\int \dfrac{1}{g(y)}\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\mathrm{d}x}_{F(x)}$

则有 $G(y) = F(x) + C$ ——隐式通解

注：可能丢失由**g(*y*)=0**所确定的特解.

例1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明：在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增、减解.

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

或

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

$$\ln|y|=x^3+\ln|C|$$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$ （C 为任意常数）

（此式含分离变量时丢失的解 $y=0$）

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （ C 为任意常数 ）

由初始条件得 $C = 1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3. 求下述微分方程的通解:

$$y' = \sin^2(x - y + 1)$$

解: 令 $u = x - y + 1$, 则

$$u' = 1 - y'$$

故有 $$1 - u' = \sin^2 u$$

即 $$\sec^2 u \,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

解得 $$\tan u = x + C$$

所求通解: $\tan(x - y + 1) = x + C$ （**C 为任意常数**）

练习: 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}$ 的通解.

解法 1 分离变量 $e^{-y}\,\mathrm{d}y = e^{x}\,\mathrm{d}x$

$$-e^{-y} = e^{x} + C$$

即 $(e^{x} + C)e^{y} + 1 = 0 \quad (\boldsymbol{C < 0})$

解法 2 令 $u = x + y$, 则 $u' = 1 + y'$

故有 $u' = 1 + e^{u}$

积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + e^{u}} = x + C$

$$\boxed{\int \frac{(1 + e^{u}) - e^{u}}{1 + e^{u}}\,\mathrm{d}u}$$

$$u - \ln(1 + e^{u}) = x + C$$

所求通解: $\ln(1 + e^{x+y}) = y - C$ **(** $\boldsymbol{C}$ **为任意常数)**

例4. 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 M 成正比, 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0, 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

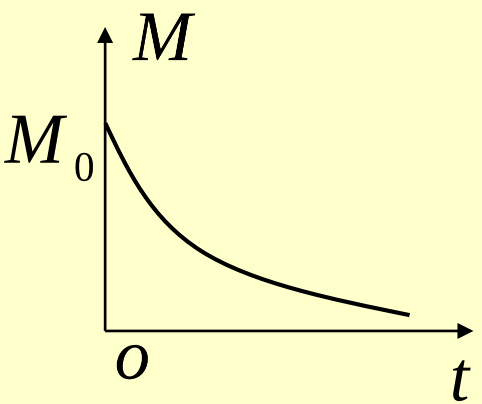
解: 根据题意, 有 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M \quad (\lambda > 0) \\ M\big|_{t=0} = M_0 \quad \text{(初始条件)} \end{cases}$

对方程分离变量, 然后积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}M}{M} = \int (-\lambda)\,\mathrm{d}t$

得 $\ln M = -\lambda t + \ln C$, 即 $M = Ce^{-\lambda t}$

利用初始条件, 得 $C = M_0$

故所求铀的变化规律为 $M = M_0 e^{-\lambda t}$.



例5. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$)

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时

$v\approx\dfrac{mg}{k}$

解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出事物的共性及可贯穿于全过程的规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程

2) 根据物理规律列方程

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.

例6. 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1% 的 CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每分钟2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2 的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后 t 时刻 CO_2的含量为$x(t)\%$

在$[t, t+dt]$内,

CO_2的通入量$= 2000 \cdot dt \cdot 0.03,$

CO_2的排出量$= 2000 \cdot dt \cdot x(t),$

CO_2的改变量$=CO_2$的通入量$-CO_2$的排出量

$$12000\,dx = 2000\cdot dt\cdot 0.03 - 2000\cdot dt\cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x-0.03), \quad \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because\ x|_{t=0} = 0.1,\ \therefore C = 0.07,\ \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到0.056%.

二、齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程 .

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 **u**, 便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$.

解: 令 $u = \dfrac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得 $\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$, 即 $\sin u = C x$

故原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x} = C x$ **(** $\boldsymbol{C}$ **为任意常数)**

(当 $C = 0$ 时, $y = 0$ 也是方程的解)

例2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则有

$$u+xu'=2u-u^2$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$, 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$

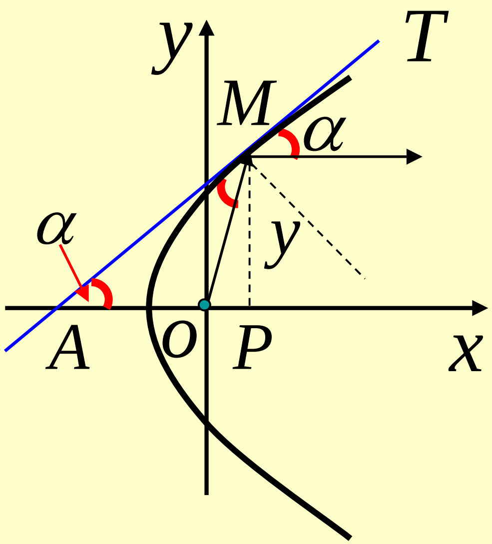
代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy$ **(C 为任意常数)**

说明: 显然 $x=0$, $y=0$, $y=x$ 也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

例3. 在制造探照灯反射镜面时, 要求点光源的光线反射出去有良好的方向性, 试求反射镜面的形状.

解: 设光源在坐标原点, 取 x 轴平行于光线反射方向, 则反射镜面由曲线 $y = f(x)$ 绕 x 轴旋转而成.

过曲线上任意点 $M(x, y)$ 作切线 MT,



由光的反射定律: $\boxed{\text{入射角} = \text{反射角}}$

可得 $\angle OMA = \angle OAM = \alpha$

从而 $AO = OM$

而 $AO = AP - OP = y\cot\alpha - x = \dfrac{y}{y'} - x$

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

于是得微分方程: $\dfrac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$

利用曲线的对称性, 不妨设 $y>0$, 于是方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}$$ (齐次方程)

令 $v=\frac{x}{y}$, 则 $x=yv$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=v+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1+v^2}$$

积分得 $\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln y-\ln C$

$$v+\sqrt{1+v^2}=\frac{y}{C}$$

$$\left(\frac{y}{C}-v\right)^2=1+v^2$$

故有 $\frac{y^2}{C^2}-\frac{2yv}{C}=1$

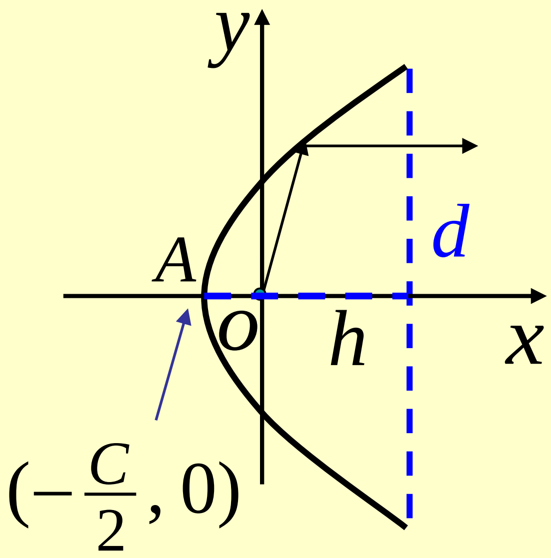
代入 $yv=x$, 得 $y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$ (抛物线)

故反射镜面为旋转抛物面.

说明:　$y^2 = 2C(x+\frac{C}{2})$

若已知反射镜面的底面直径为 d,

顶到底的距离为 h, 则将



$$x+\frac{C}{2}=h,\quad y=\frac{d}{2}$$

代入通解表达式得 $C=\dfrac{d^2}{8h}$

这时旋转抛物面方程为　$y^2+z^2=\dfrac{d^2}{4h}\left(x+\dfrac{d^2}{16h}\right)$

*可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\quad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1\. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, **作变换** $x=X+h,\ y=Y+k$ **(*h*, *k* 为待定常数)**, 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, **原方程化为**

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$ **, 解出 *h* , *k***

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$

(齐次方程)

求出其解后, 将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\quad(b\neq 0)$$

令 $v=ax+by$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\,\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$$ (可分离变量方程)

注: 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)\quad(c^2+c_1^2\neq 0)$$

例4. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=5$

令 $x = X+1, y = Y-5$，得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $\boldsymbol{Y = X u}$, 得

$$\frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ **得 $C = 1$，故所求特解为**

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

思考: 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$, **如何求解?**

提示: 令 $v=x+y$.

内容小结

1. 微分方程的概念

微分方程; 阶; 定解条件; 解; 通解; 特解

说明: 通解不一定是方程的全部解 .

例如, 方程 $(x+y)\,y'=0$ 有解

$$y=-x \text{ 及 } y=C$$

后者是通解 , 但不包含前一个解 .

2. 可分离变量方程的求解方法:

分离变量后积分; 根据定解条件定常数 .

3. 齐次方程----化为可分离变量方程

思考与练习

求下列方程的通解：

$$(1)\ (x+xy^2)\,\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$$

$$(2)\ y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

提示: (1) 分离变量 $\dfrac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(2) 方程变形为 $y'=-2\cos x\sin y$

$$\Longrightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $\boldsymbol{Q(x)\equiv 0}$, 称为齐次方程 ;

若 $\boldsymbol{Q(x)\not\equiv 0}$, 称为非齐次方程 .

1. 解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $u=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$

原方程的通解 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

即 $$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

注：为确定起见，将非齐次方程通解中的不定积分写成变上限定积分，即

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x} Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s + C\right]$$

则初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

的解为 $$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x} Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s + y_0\right]$$

其中$P(x), Q(x)$在区间I上连续，而$x_0 \in I$.

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解：先解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=0$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{2\mathrm{d}x}{x+1}$

积分得 $\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|C|$, 即 $y=C(x+1)^2$

用常数变易法求特解. 令 $y=u(x)\cdot(x+1)^2$，则

$$y'=u'\cdot(x+1)^2+2u\cdot(x+1)$$

代入非齐次方程得 $u'=(x+1)^{1/2}$

解得 $$u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例2. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{xy}}+\left[\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right]\mathrm{d}y=0$ 的通解 .

解: 注意 **x, y** 同号, 当 $x>0$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\,\mathrm{d}\sqrt{x}$, 故方程可

变形为 $2\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}y}-\dfrac{\sqrt{x}}{y}=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$

这是以 $\sqrt{x}$ 为因变量, y 为自变量的一阶线性方程

由一阶线性方程通解公式 , 得

$$\sqrt{x}=\underline{e^{\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\left[\int-\frac{1}{\sqrt{y}}\,\underline{e^{-\int\frac{\mathrm{d}y}{2y}}}\,\mathrm{d}x+\ln|C|\right]$$

$$=\sqrt{y}\left[-\int\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y+\ln|C|\right]=\sqrt{y}\ln\left|\frac{C}{y}\right|$$

所求通解为 $y\,e^{\sqrt{x/y}}=C\ (C\neq 0)$

思考题

设连续函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上有界．证明：方程

$$y'+y=f(x)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上有且只有一个有界解．试求出这个解，并进而证明：当$f(x)$还是以ω为周期的周期函数时，这个解也是以ω为周期的周期函数.

四、伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$$

解法: 以 y^{n} 除方程两边，得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ **(线性方程)**

求出此方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例4. 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入, 得原方程通解:

$$y\,x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1 先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2 用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

思考与练习

判别下列方程类型:　　　　提示:

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \longrightarrow \dfrac{y-1}{y}\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$　可分离变量方程

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(\ln y-\ln x) \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$　齐次方程

(3) $(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{2x}y=-\dfrac{x^2}{2}$　线性方程

(4) $2y\,\mathrm{d}x+(y^3-x)\mathrm{d}y=0 \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{2y}x=-\dfrac{y^2}{2}$　线性方程

(5) $(y\ln x-2)y\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}y^2$　伯努利方程

补充例题

1. 求一连续可导函数 $f(x)$ 使其满足下列方程:

$$f(x)=\sin x-\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

令 $u=x-t$

提示: $f(x)=\sin x-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$

则有 $\begin{cases} f'(x)+f(x)=\cos x \\ f(0)=0 \end{cases}$

利用公式可求出

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x-e^{-x})$$

2. 设有微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

试求此方程满足初始条件 $y\big|_{x=0} = 0$ 的连续解.

解: 1) 先解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 2, & 0 \le x \le 1 \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$

利用通解公式, 得

$$y = e^{-\int \mathrm{d}x} \left(\int 2 e^{\int \mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x + C_1 \right)$$

$$= e^{-x} (2 e^{x} + C_1) = 2 + C_1 e^{-x}$$

利用 $y\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = -2$

故有 $y = 2 - 2e^{-x} \quad (0 \le x \le 1)$

2) 再解定解问题 $\begin{cases} y' + y = 0, & x > 1 \\ y\big|_{x=1} = y(1) = 2 - 2e^{-1} \end{cases}$

此齐次线性方程的通解为 $y = C_2 e^{-x} \quad (x \geq 1)$

利用衔接条件得 $C_2 = 2(e-1)$

因此有 $y = 2(e-1)\, e^{-x} \quad (x \geq 1)$

3) 原问题的解为

$$y = \begin{cases} 2(1 - e^{-x}), & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(e-1)\, e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

五、可降阶高阶微分方程

1、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

2、$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

3、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

1、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

令 $z = y^{(n-1)}$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y^{(n)} = f(x)$, 因此

$$z = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

即 $$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

同理可得 $$y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 ***n*** 次积分, 可得含 ***n*** 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y''' = e^{2x} - \cos x$.

解: $y'' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx + C_1'$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1'$$

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1' x + C_2$$

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

(此处 $C_1 = \frac{1}{2} C_1'$)

2、 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程（不显含 y）

设 $y'=p(x)$，则 $y''=p'$，原方程化为一阶方程

$$p'=f(x,p)$$

设其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$

则得 $y'=\varphi(x,C_1)$

再一次积分，得原方程的通解 $y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2$

注：$y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\ldots,y^{(n-1)})$ 型

因变量换元：$p=y^{(k)}$

降阶为 $p^{(n-k)}=f(x,p,\cdots,p^{(n-k-1)})$.

例2. 求解 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 3 \end{cases}$

解: 设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 代入方程得

$$(1+x^2)p' = 2xp \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)}$$

积分得 $\ln|p| = \ln(1+x^2) + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1(1+x^2)$

利用 $y'\big|_{x=0} = 3$, 得 $C_1 = 3$, 于是有 $y' = 3(1+x^2)$

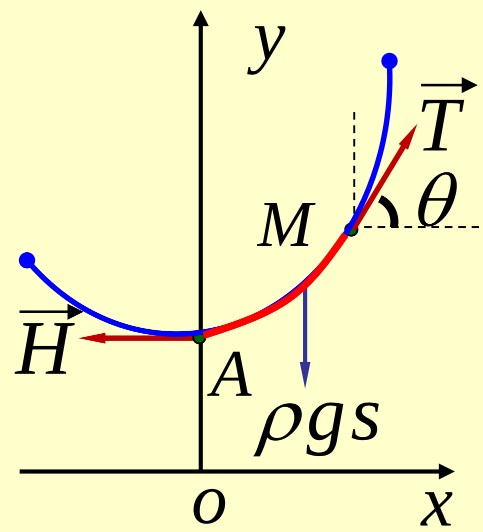
两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$

利用 $y\big|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$, 因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1$$

例3. 设有一均匀, 柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力作用而下垂, 问该绳索的平衡状态是怎样的曲线 ?

解: 取坐标系如图. 考察最低点 A 到任意点 $M(x, y)$ 弧段的受力情况:



A 点受水平张力 $\vec{H}$

M 点受切向张力 $\vec{T}$

弧段重力大小 $\rho g s$ (ρ : 密度, s :弧长)

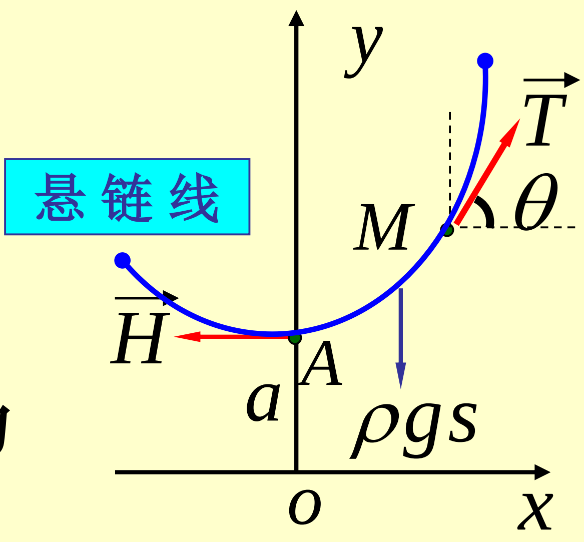
按静力平衡条件, 有 $T\cos\theta = H,\ T\sin\theta = \rho g s$

两式相除得 $\tan\theta = \frac{1}{a}s$ (其中 $a = \frac{H}{\rho g}$)

故有 $y' = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x \longrightarrow y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$

设 $|OA| = a$, 则得定解问题:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2} \\ y\big|_{x=0} = a, \quad y'\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$



令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\operatorname{Arsh} p = \ln(p + \sqrt{1+p^2})}$$

两端积分得 $\operatorname{Arsh} p = \dfrac{x}{a} + C_1$, 由 $y'\big|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$,

则有 $\quad y' = \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}$

两端积分得 $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a} + C_2$, 由 $y\big|_{x=0} = a$, 得 $C_2 = 0$

故所求绳索的形状为 $\quad y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$

3、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程 (不显含自变量 x)

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $\quad p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例4. 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, 即 $p = C_1 y$,

$$\therefore \quad y' = C_1 y$$ (一阶线性齐次方程)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$

例5. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解: 令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件, 得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$,

得 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^y$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $$1 - e^{-y} = x$$

例6. 设函数 $y(x)\,(x\ge 0)$ 二阶可导, 且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$, 过曲线 $y=y(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴围成的三角形面积记为 S_1, 区间[0, x] 上以 $y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2, 且 $2S_1-S_2\equiv 1$, 求 $y=y(x)$ 满足的方程 .

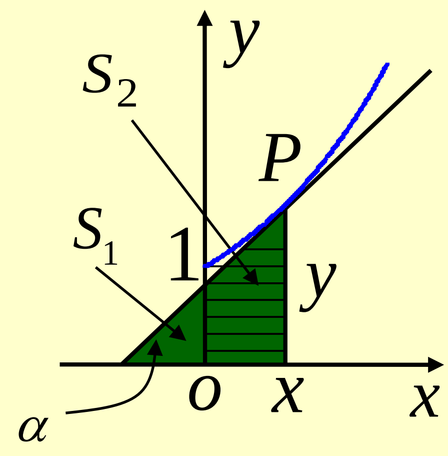
解: 因为 $y(0)=1,\ y'(x)>0$, 所以 $y(x)>0$.

设曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线倾角为 α,

于是

$$S_1=\frac{1}{2}y^2\cot\alpha=\frac{y^2}{2y'}$$

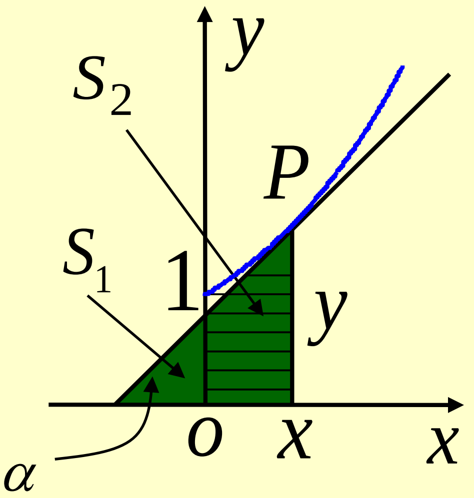
$$S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$$



利用 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\dfrac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t = 1$

两边对 x 求导, 得 $yy'' = (y')^2$

定解条件为 $y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$



令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^2 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $p = C_1 y$, 利用定解条件得 $C_1 = 1$, 再解 $y' = y$,

得 $y = C_2 e^x$, 再利用 $y(0) = 1$ 得 $C_2 = 1$,

故所求曲线方程为 $y = e^x$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)}=f(x)$

逐次积分

2. $y''=f(x,y')$

令 $y'=p(x)$，则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y''=f(y,y')$

令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\,\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

思考与练习

1. 方程 $y'' = f(y')$ 如何代换求解？

答: 令 $y' = p(x)$ 或 $y' = p(y)$ 均可.

一般说, 用前者方便些.

有时用后者方便. 例如, $y'' = e^{-(y')^2}$

2. 解二阶可降阶微分方程初值问题需注意哪些问题？

答: (1) 一般情况, 边解边定常数计算简便.

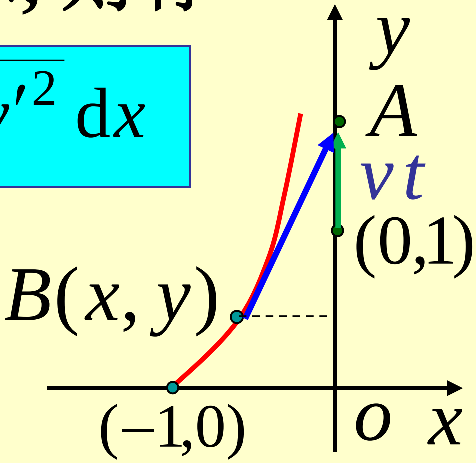
(2) 遇到开平方时, 要根据题意确定正负号.

追踪问题 设物体 **A** 从点(0, 1)出发, 以大小为常数 **v** 的速度沿 **y** 轴正向运动, 物体 **B** 从 (–1, 0) 出发, 速度大小为 2v, 方向指向A , 试建立物体 **B** 的运动轨迹应满足的微分方程及初始条件.

提示: 设 **t** 时刻 **B** 位于 (**x**, **y**), 如图所示, 则有

$$y' = \frac{1 + vt - y}{-x}$$

$$\boxed{s = \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x}$$

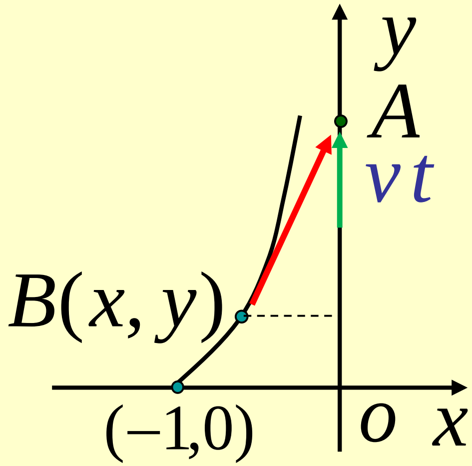


去分母后两边对 **x** 求导, 得

$$x \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -v \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \qquad ①$$

又由于 $$2v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + y'^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$



代入 ① 式得所求微分方程:

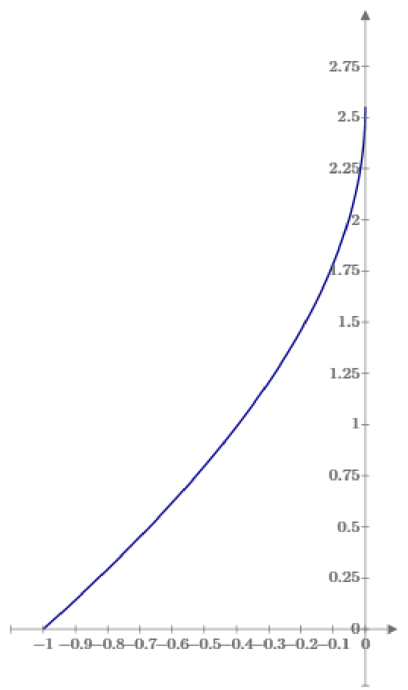
$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+y'^2} = 0$$

其初始条件为 $y\big|_{x=-1} = 0,\ \ y'\big|_{x=-1} = 1$

其解(即B点的运动轨迹)为:

$$y = -\frac{\sqrt{2}-1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - (\sqrt{2}+1)(-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{2}+4}{3}$$

$(x < 0)$



六、一阶隐式微分方程及其参数表示

$$F(x, y, y') = 0$$

能解出 y'

$$y' = f(x, y)$$

转化

变量分离、线性、恰当方程等

不能解出 y' 或解出形式复杂

$$F(x, y, y') = 0$$

转化

$$y = f(x, y')$$
$$x = f(y, y')$$
$$F(x, y') = 0$$
$$F(y, y') = 0$$

引进参数变量变换

1、不显含 y 的方程: $F(x, y') = 0$ (1)

解法: 引入变换 $x = \varphi(t)$ 从(1)得到 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$

(or 引入变换 $y' = \psi(t)$ 从(1)得到 $x = \varphi(t)$)

$$dy = \psi(t)dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$\int dy = \int \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$$

方程的参数形式通解为:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}$$

2、不显含 x 的方程: $F(y, y') = 0$ (2)

解法: 引入变换 $y = \varphi(t)$ 从(2)得到 $y' = \dfrac{dy}{dx} = \psi(t)$

(or 引入变换 $y' = \psi(t)$ 从(2)得到 $y = \varphi(t)$)

$$dy = \psi(t)dx \qquad dx = \frac{1}{\psi(t)}dy = \frac{1}{\psi(t)}\varphi'(t)dt$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c$$

方程的参数形式通解为: $\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

例1. 求解方程 $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$， 这里$y' = \dfrac{dy}{dx}$

解 令 $y' = p = tx$

则 由方程，得 $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ 从而 $p = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

于是 $dy = \dfrac{3t^2}{1+t^3}dx = \dfrac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt$

$$y = \int \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + c$$

通解为 $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3(1+4t^3)}{2(1+t^3)^2} + c \end{cases}$

例2. 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

解 令 $2-y'=yt$ 把 $y'=2-yt$代入原微分方程

得 $y^2(yt-1)=y^2t^2$

由此得 $y=\dfrac{1}{t}+t$ 且 $y'=1-t^2$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{1}{1-t^2}d(\frac{1}{t}+t)=-\frac{1}{t^2}dt \qquad x=\frac{1}{t}+c$$

方程的参数形式的通解为: $\begin{cases} x=t^{-1}+c \\ y=t^{-1}+t \end{cases}$

此外, $y=\pm 2$ 也是方程的解。

例3. 求解方程 $y = xy' + \varphi(y').$

克莱洛方程
Clairant Equation

其中 φ 为连续可微函数.

解 令 $y' = p,$ 则 $y = xp + \varphi(p),$

$$y' = p = p + xp' + \varphi'(p)p',$$

$$(x + \varphi'(p))p' = 0,$$

当 $p' = 0$ 时, $p = c,$

通解为: $y = cx + \varphi(c).$

当 $x = -\varphi'(p)$ 时,

有特解: $\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = xp + \varphi(p). \end{cases}$

练习:

1. **求解微分方程** $y^2(1-(\frac{dy}{dx})^2)=1.$

解: 设$p=y'$,则方程变为: $y^2(1-p^2)=1.$

令$p=\cos t$,代入方程得 $y=\pm\frac{1}{\sin t}$,

由于 $dx=\frac{dy}{p}=\mp\frac{1}{\sin^2 t}dt$

积分得 $x=\mp\int\frac{1}{\sin^2 t}dt=\pm\cot t+c,$

通解为 $\begin{cases} x=\pm\cot t+c, \\ y=\pm\csc t. \end{cases}$

另外, $y=\pm1$也是原方程的解.

2. **求解方程** $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{1+(\dfrac{dy}{dx})^2}$,

解 设$p=\dfrac{dy}{dx}$,则方程变为：$p=x\sqrt{1+p^2}$,

引入参数t,把方程表为参数形式

令$p=\tan t, -\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$,代入方程得 $x=\sin t$.

$$dy=pdx=\tan t\cos tdt=\sin tdt,$$

积分得 $y=\int\sin tdt=-\cos t+c$

通解为 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=-\cos t+c \end{cases}$

消去参数t,得通解：$x^2+(y-c)^2=1$.