2015 ～2016 学年第 一 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷参考解答

一. 单项选择题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将选择结果填涂在答题卡上。）

1. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（D）.

A. 存在且等于零　　B.存在但不一定为零　　C. 一定不存在　　D.不一定存在

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（　A　）.

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$　　C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

3.关于 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$，下列结论正确的是（　D　）.

A. 值为零　　B. 值大于零　　C. 值小于零　　D. 发散

4. 微分方程 $y''+4y=x\cos 2x$ 的特解形式为（　A　）.

A. $y^*=x[(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x]$　　B. $y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x$

C. $y^*=x(ax\cos 2x+bx\sin 2x)$　　D. $y^*=x(ax+b)\cos 2x$

二. 填空题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将计算结果写在答题卡上。）

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$，则 $a=$_____ .

解：$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{x+2a}{x-a}-1)}=e^{3a}=8$，$a=\ln 2$.

6.以 $[x]$ 记不超过 x $(x\in R)$ 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin[x]}{x}=$____________ .

解：因当 $x\to 0^+$ 时，$[x]=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin[x]}{x}=0$.

7. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极_____值.

解：因 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2>0$，由保号性及 $(x-x_0)^4>0$ 知在 x_0 的邻域内

$f(x)-f(x_0)>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值。

8. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $\int xf'(x)dx=$________ .

解：$f(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，故 $\int xf'(x)dx=x+C$.

9. 定积分 $\int_{-1}^{1}(\dfrac{x}{\cos x}+\sqrt{1-x^2})dx=$___________.

解：$\int_{-1}^{1}(\dfrac{x}{\cos x}+\sqrt{1-x^2})dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{2}$ （$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$ 由几何意义得到）.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是_______.

解：$\lambda>2$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x(x-1)}$ 的间断点，并说明间断点类型。

解：间断点为 $x=1$ 及 $x=0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点；

又由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，故 $x=0$ 为可去间断点。

12. 设 $y=\ln(x^2-3x+2)$，求 $y^{(n)}(x)$.

解：$y=\ln(x-2)+\ln(x-1)$，$y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}$.

13. 设 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

解：当 $t=0$ 时，$x=0,y=2$. 方程组两式分别关于 t 求导，有：

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$；　　$2\dfrac{dy}{dt}-y^2-2ty\dfrac{dy}{dt}+e^t=0$，整理得：$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$，

所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{y^2-e^t}{2(1-ty)(1+t^2)}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\dfrac{3}{2}$.

14. 求极限$l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\sin^{10}x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{\sin^{10}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2dt}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2x\cos x^4}{10x^9}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^4}{5x^8}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^8}{5x^8}=\dfrac{1}{10}$。

15.计算$I=\int_0^a x^2\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx$（$a>0$）.

解：$I=\int_0^a x^2\dfrac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$，令$x=a\sin t$，

则$I=a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin t)dt=a^3(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3})$.

16. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2x}{1+x^2}=e^{-y}$的通解。

解：原方程变形为$\dfrac{d(e^y)}{dx}+e^y\dfrac{2x}{1+x^2}=1$，所以

$$e^y=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)=\frac{1}{1+x^2}[\int(1+x^2)dx+C]$$

$$=\frac{1}{1+x^2}(x+\frac{1}{3}x^3+C).$$

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 求$a>0$，使曲线$y=a(1-x^2)(|x|\le 1)$与它的过点$(\pm1,0)$的法线所围的面积最小。

解：因$y'=-2ax$，于是过$(1,0)$及$(-1,0)$的法线分别为

$$y=\frac{1}{2a}(x-1) \text{ 与 } y=\frac{1}{-2a}(x+1),$$

显然，两法线在$(0,-\dfrac{1}{2a})$处相交，且关于y轴对称，所以

$$S(a)=2\int_0^1[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)]dx=\frac{4}{3}a+\frac{1}{2a},$$

令$S'(a)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2a^2}=0$，得唯一驻点$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，又$S''(a)=\dfrac{1}{a^2}>0$，所以当$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$时所围的面积最小。

18. 设 $f(x)$ 为偶函数，且满足 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=-3x+2$，求 $f(x)$.

解法 1 令 $-u=t-x$，则 $\int_0^x f(t-x)dt=\int_x^0 f(-u)(-du)=\int_0^x f(t)dt$ （因 $f(x)$ 为偶函数）

从而 $$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t)dt=-3x+2$$

求导得： $$f''(x)+2f'(x)-3f(x)=-3$$

特征方程 $r^2+2r-3=0$ 由相异实根 $r=-3,\ r=1$，

所以，对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$，且可设 $y^*=A$，易得 $A=1$

所以 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+1$.

因 $f(x)$ 为偶函数，所以其导函数为奇函数， $f'(0)=0$， $f(0)=1$，由此推出 $C_1=C_2=0$，

故 $f(x)=1$.

解法 2 令 $-u=t-x$，

则 $\int_0^x f(t-x)dt=\int_x^0 f(-u)(-du)=\int_0^x f(t)dt$ （因 $f(x)$ 为偶函数）

设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则有 $F'(x)=f(x),F(0)=0$，于是原方程化为：

$$F''(x)+2F'(x)-3F(x)=-3x+2$$

特征方程 $r^2+2r-3=0$ 由相异实根 $r=-3,\ r=1$，

所以，对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-3x}+C_2e^x$，且可设 $y^*=Ax+B$，易得 $A=1,B=0$

所以 $y=F(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^x+x$

因 $F(0)=0$，由此推出 $C_1=-C_2$，故 $F(x)=C_1(e^{-3x}-e^x)+x$，

从而 $f(x)=C_1(3e^{-3x}+e^x)+1$.由于 $f(x)$ 是偶函数，所以 $C_1=0$，故 $f(x)=1$.

解法 3 令 $-u=t-x$，则 $\int_0^x f(t-x)dt=\int_x^0 f(-u)(-du)=\int_0^x f(t)dt$ （因 $f(x)$ 为偶函数）

从而 $$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t)dt=-3x+2 \qquad (1)$$

又由于 $f(x)$ 为偶函数，所以其导函数为奇函数， $f'(x)=-f'(-x)$，因此

$$f'(-x)+2f(-x)-3\int_0^{-x} f(t)dt=3x+2$$

即为 $-f'(x)+2f(x)-3\int_0^{-x}f(t)dt=3x+2$ （2）

（1）+（2）得 $4f(x)-3[\int_0^{x}f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt]=4$，

注意到$\int_0^{x}f(t)dt+\int_0^{-x}f(t)dt=0$，所以 $f(x)=1$.

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $N(0,r)$ 内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：当 n 充分大时，有 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$（$M$ 为某一正数）.

证： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=f'(0)=0$，所以

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$（ξ 介于 0 与 x 之间），

又由 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 $N(0,r)$ 内具有连续性知，$\exists M>0$，使得$\left|f''(x)\right|\le M$，于是

$$\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2}\left|f''(\xi)\right|x^2\le\frac{M}{2}x^2 ,$$

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $\left|f(\frac{1}{n})\right|\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$ 。

20. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$\int_0^1 f(x)dx=1$.证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

证明：由积分中值定理，$\exists c_1\in(0,1)$，使得$\int_0^1 f(x)dx=f(c_1)=1$.

设$h(x)=f(x)-x$，则$h(x)$在$[0,1]$上连续，$(0,1)$内可导，且$h(0)=0$；

$h(c_1)=f(c_1)-c_1=1-c_1>0$，$h(1)=f(1)-1=-1<0$，从而由零点定理，$\exists c_2\in(c_1,1)$，使得$h(c_2)=0$，于是，由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,c_2)\subset(0,1)$，使得$h'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)=1$.