第2章 向量代数与空间解析几何

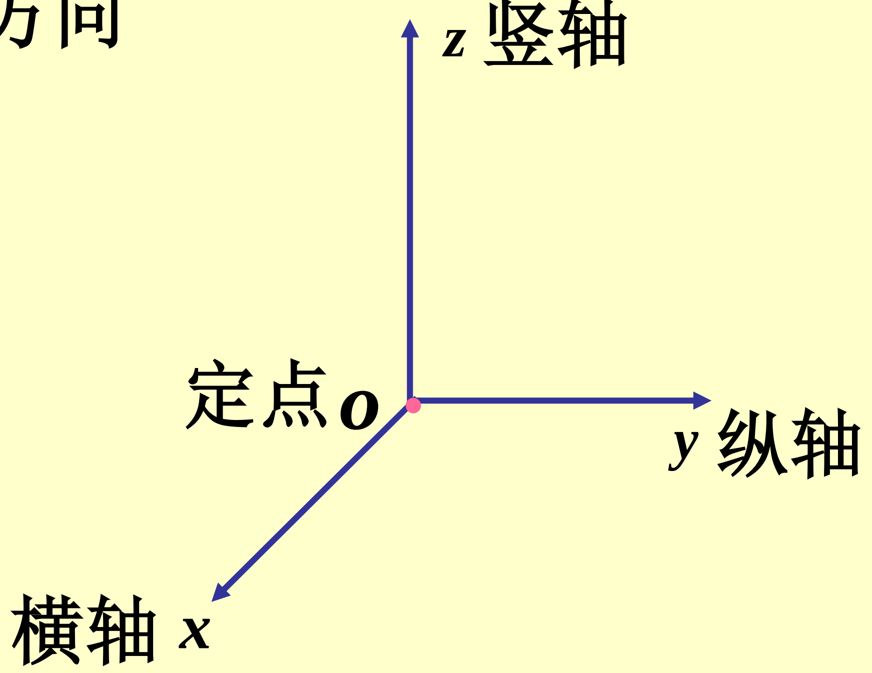
2.1 空间直角坐标系、向量及其运算

2.1.1 空间直角坐标系
2.1.2 向量及其线性运算
2.1.3 向量的坐标
2.1.4 向量间的乘积

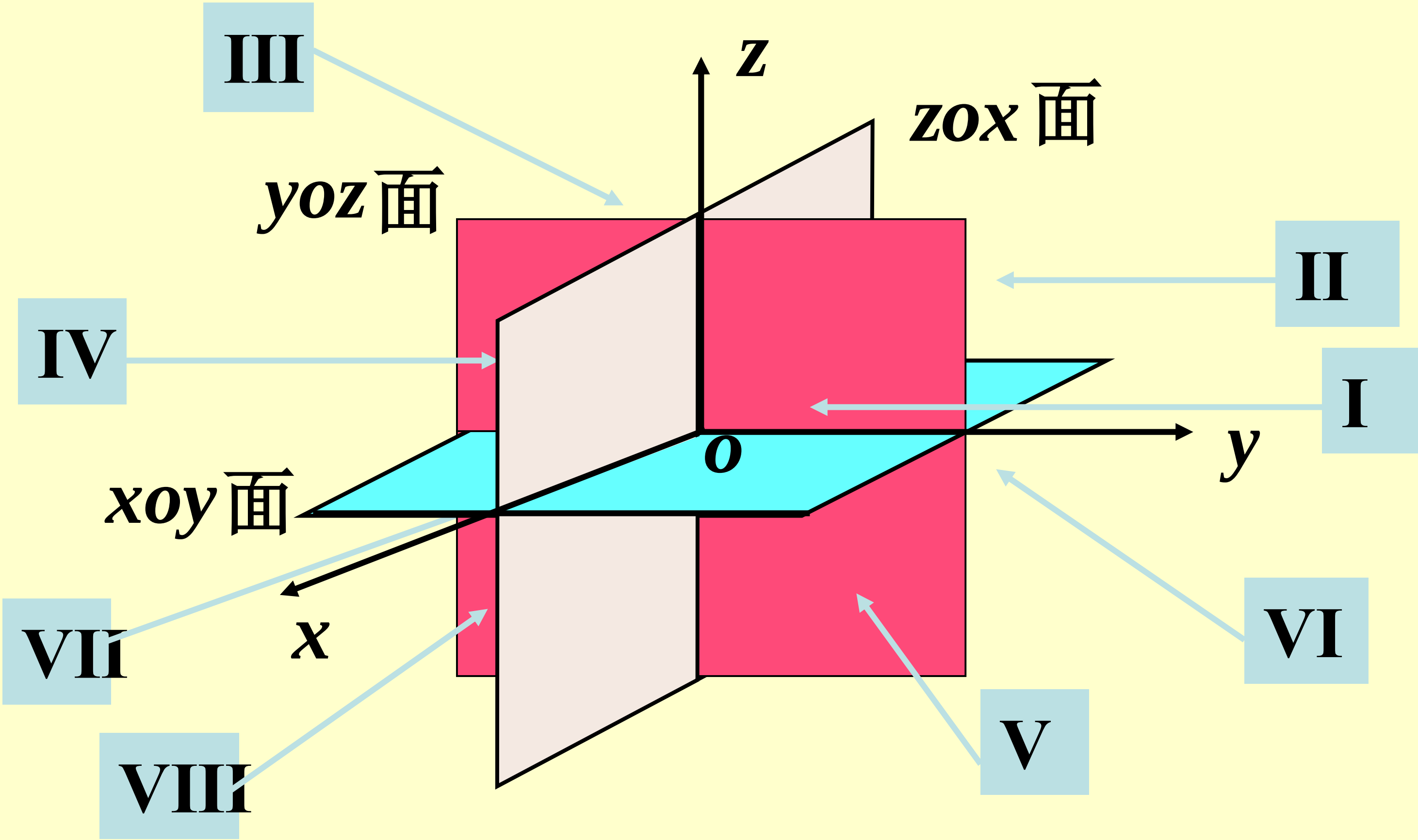
2.1.1 空间直角坐标系

三个坐标轴的正方向符合右手系.

即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向.



空间直角坐标系

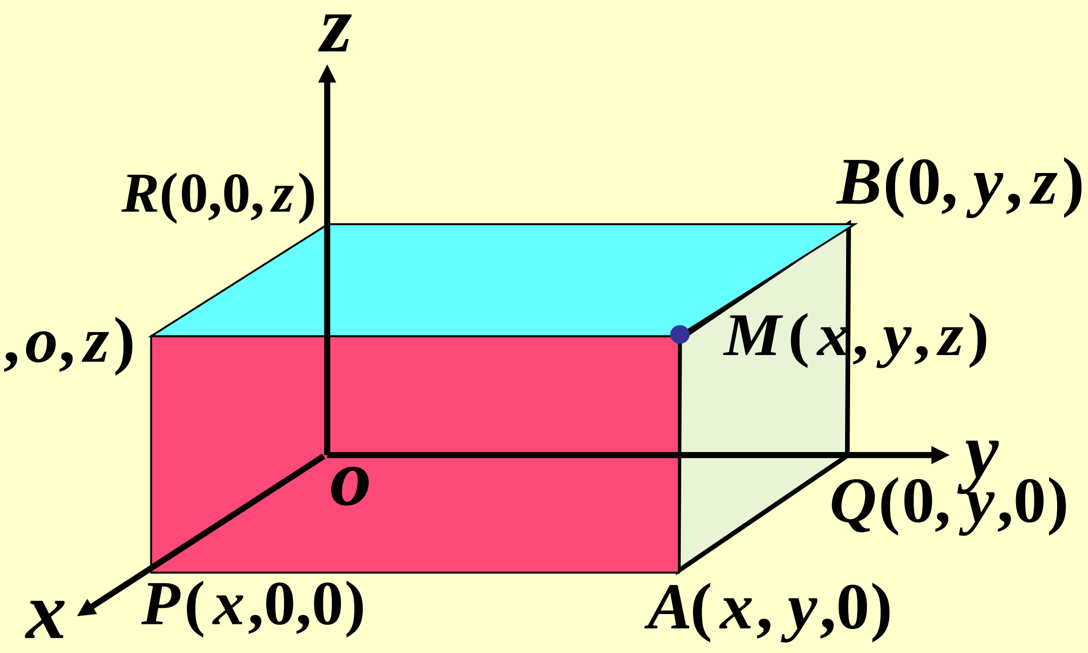


空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序数组 (x, y, z)

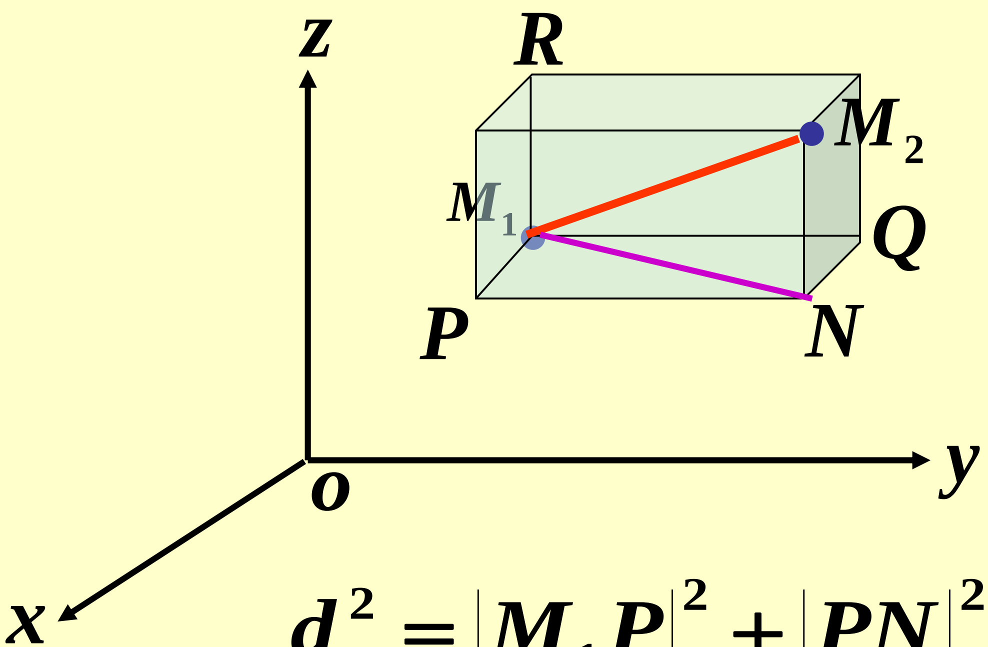
特殊点的表示： 坐标轴上的点 $P, Q, R,$

坐标面上的点 $A, B, C,$ 坐标原点 $O(0,0,0)$



空间两点间的距离

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点



$$d=|M_1M_2|=?$$

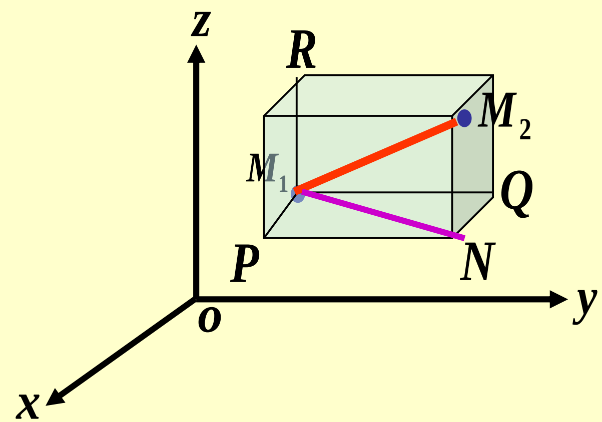
在直角ΔM_1NM_2及直角ΔM_1PN中，使用勾股定理知

$$d^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

$$\because |M_1P| = |x_2 - x_1|,$$

$$|PN| = |y_2 - y_1|,$$

$$|NM_2| = |z_2 - z_1|,$$



$$\therefore d = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

空间两点间距离公式

特殊地：若两点分别为$M(x, y, z)$，$O(0,0,0)$

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 2 设P在x轴上，它到$P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点$P_2(0,1,-1)$的距离的两倍，求点P的坐标.

解 因为P在x轴上，设P点坐标为 $(x,0,0)$,

$$|PP_1| = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11},$$

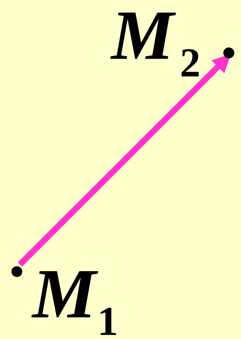
$$|PP_2| = \sqrt{x^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2},$$

$$\because |PP_1| = 2|PP_2|, \quad \therefore \sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$\Rightarrow x = \pm 1$, 所求点为 $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

2.1.2 向量及其线性运算

一、向量的概念



向量（矢量）： 既有大小又有方向的量.

向量表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$

以M_1为起点，M_2为终点的有向线段.

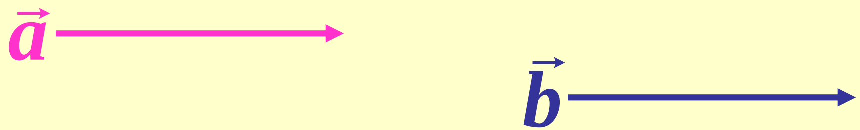
向量的模（大小）： $|\vec{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$

单位向量： 模长为1的向量，记为 $\overrightarrow{a^0}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2^{\,0}}$

零向量： 模长为0的向量，记为 $\vec{0}$.

自由向量： 不考虑起点、终点位置的向量.

相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

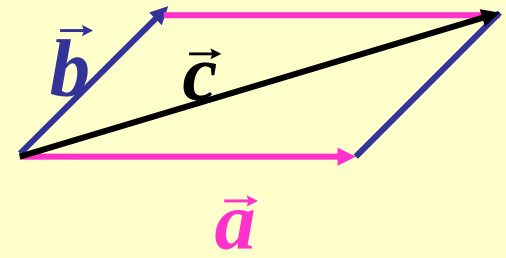


负向量： 大小相等但方向相反的向量 $-\vec{a}$

向径： 空间直角坐标系中任一点 M 与原点构成的向量 $\overrightarrow{OM}$.

二、向量的线性运算

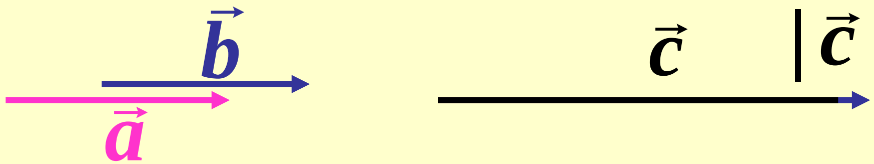
1. 加法： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



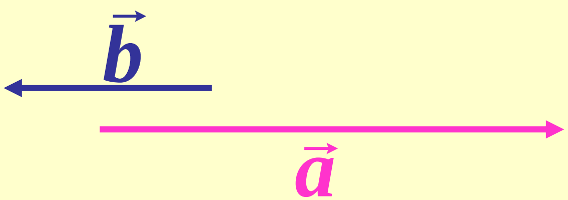
（平行四边形法则）

（平行四边形法则有时也称为三角形法则）

特殊地：若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 分为同向和反向



$|\vec{c}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$



$|\vec{c}|=\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$

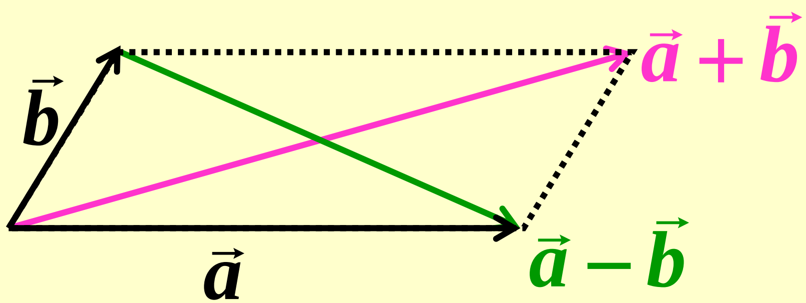
向量的加法符合下列运算规律：

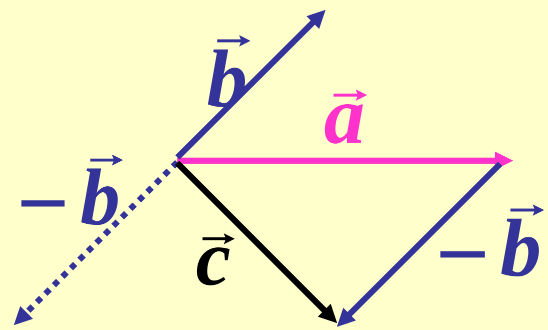
（1）交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$

（2）结合律：$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$

（3）$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$

2. 减法 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$





$$\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$$
$$=\vec{a}-\vec{b}$$

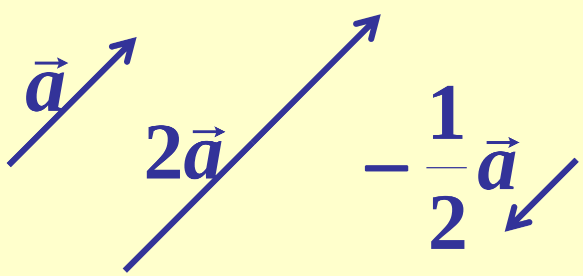
3. 向量与数的乘法

设λ是一个数，向量$\vec{a}$与λ的乘积$\lambda\vec{a}$规定为：

(1) $\lambda > 0$,　$\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$

(2) $\lambda = 0$,　$\lambda\vec{a} = \vec{0}$

(3) $\lambda < 0$,　$\lambda\vec{a}$ 与$\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$



数与向量的乘积符合下列运算规律：

（1）结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

（2）分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

两个向量的平行关系

定理 设 $\vec{a} \neq 0$，则 $\vec{b} \,//\, \vec{a} \Leftrightarrow \exists\lambda$，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

单位向量：

设$\vec{a}^0$表示与非零向量$\vec{a}$同方向的单位向量，

按照向量与数的乘积的规定，

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}^0 \Longrightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}^0$$

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

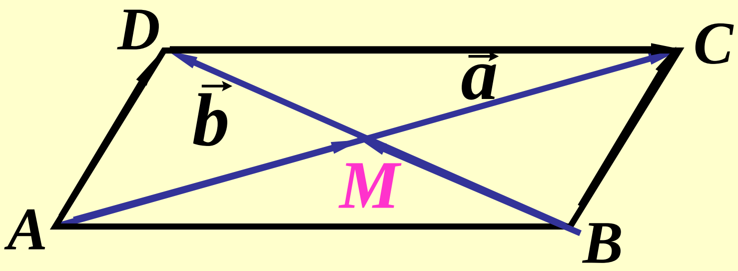
例1　化简 $\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$

解　$\vec{a}-\vec{b}+5\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\vec{b}-3\vec{a}}{5}\right)$

$$=(1-3)\vec{a}+\left(-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{5}\cdot 5\right)\vec{b}$$

$$=-2\vec{a}-\frac{5}{2}\vec{b}.$$

例2 试用向量方法证明：对角线互相平分的四边形必是平行四边形.



证 $\because \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且相等，结论得证.

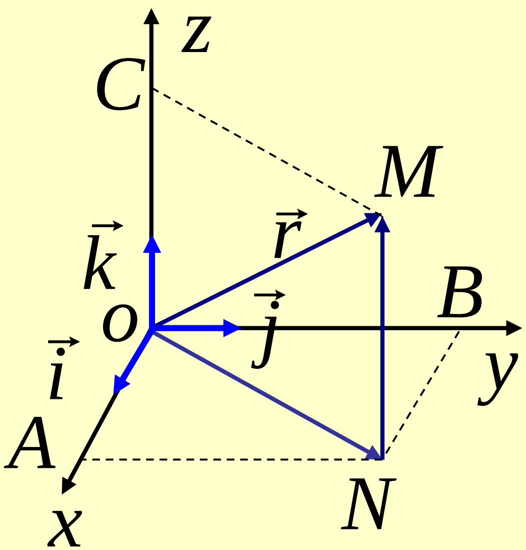
2.1.3 向量的坐标

1. 向量的坐标表示

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

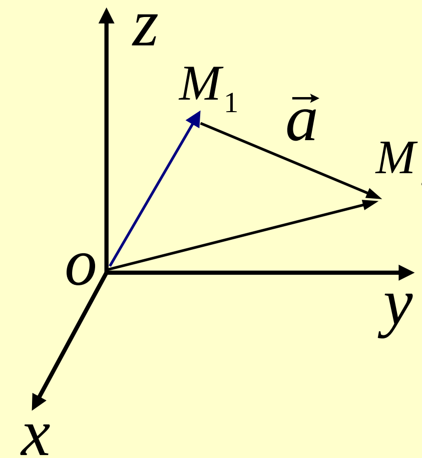


向径 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

$$\triangleq\{x,y,z\}$$ ——坐标

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

对两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$与$M_2(x_2, y_2, z_2)$



$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$\triangleq \{a_x, a_y, a_z\}$ ——向量的**坐标表达式**

a_x, a_y, a_z ——向量的**坐标**

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$$

2. 向量运算的坐标表达式

$$\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\},\qquad \vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\},$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}$$

$$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k};$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z\}$$

$$=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}$$

$$=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}.$$

定理: 设 $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$,

则 $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$

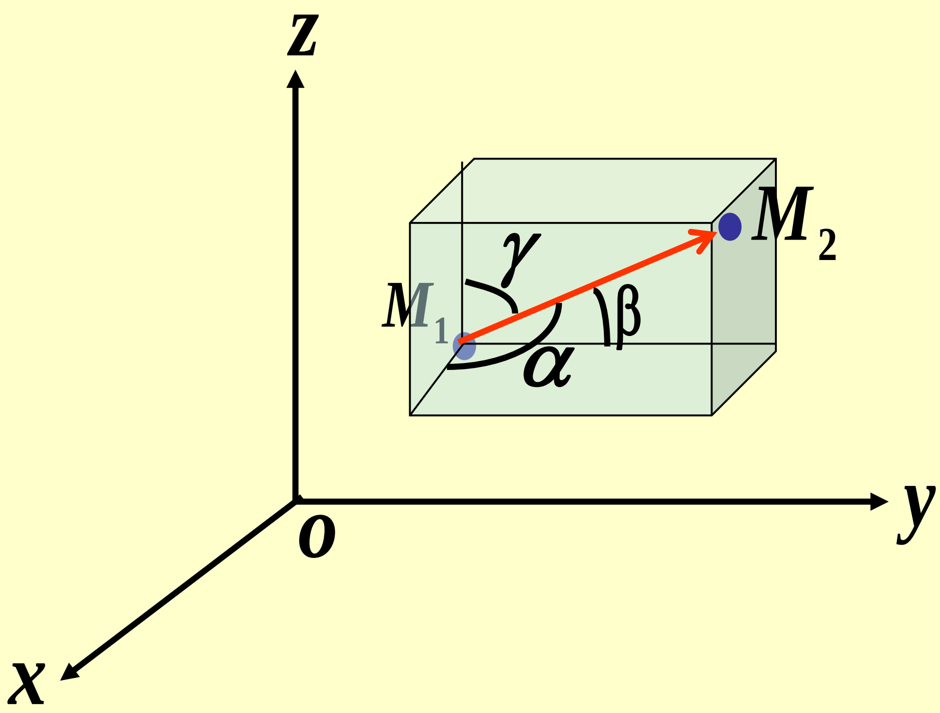
$$\Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

注：若某个分母为零，则相应的分子也为零。

3. 向量的方向角与方向余弦

非零向量$\vec{a}$ 的**方向角**：α、β、γ

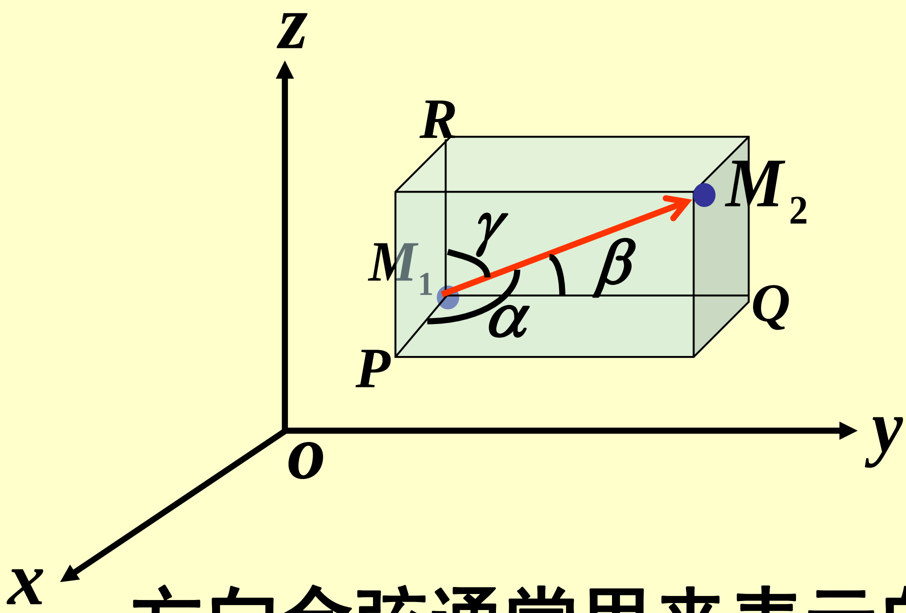
非零向量与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.



$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$



由图分析可知

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$$
$$a_y = |\vec{a}|\cos\beta$$
$$a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$$

向量的方向余弦

方向余弦通常用来表示向量的方向.

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{|M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$ 向量模长的坐标表示式

向量方向余弦的坐标表示式

当 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \neq 0$ 时，

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

特殊地：单位向量的方向余弦为

$$\overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

例 2 求平行于向量$\vec{a}=6\vec{i}+7\vec{j}-6\vec{k}$的单位向量的分解式.

解 所求向量有两个，一个与$\vec{a}$同向，一个反向

$$\because |\vec{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$$

$$\therefore \overrightarrow{a^0}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{6}{11}\vec{i}+\frac{7}{11}\vec{j}-\frac{6}{11}\vec{k},$$

或 $$\overrightarrow{a^0}=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{6}{11}\vec{i}-\frac{7}{11}\vec{j}+\frac{6}{11}\vec{k}.$$

例 3 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=2$，它与$x$轴和$y$轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果$P_1$的坐标为$(1,0,3)$，求$P_2$的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\qquad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\qquad \therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = 4, \ z = 2,$$

P_2的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

2.1.4 向量间的乘积

一、两向量的数量积

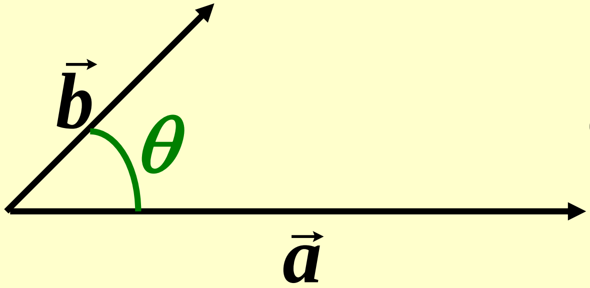
二、两向量的向量积

三、向量的混合积

一、两向量的数量积

1. 定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**为$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$ (其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

关于数量积的说明：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.　　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$.

2. 数量积的运算法则：

（1）交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

（3）若 λ为数：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

若 λ、μ为数：$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

3. 数量积的坐标运算

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}, \quad \therefore \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,$$

$$\because |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1,$$

$$\therefore \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

数量积的坐标表达式

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

两向量夹角余弦的坐标表示式

由此可知两向量垂直的充要条件为

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

例 1　已知$\vec{a}=\{1,1,-4\}$，$\vec{b}=\{1,-2,2\}$，求（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角；（3）$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影.

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\operatorname{Pr}j_b\vec{a}$　　$\therefore \operatorname{Pr}j_b\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=-3.$

例 2　证明向量$\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

证　$[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\cdot\vec{c}$

$$=[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}\cdot\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

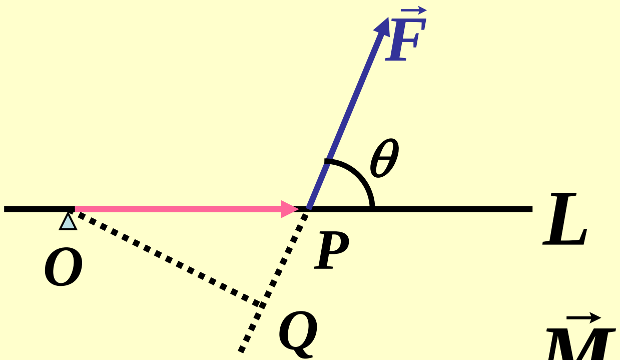
$$=(\vec{c}\cdot\vec{b})[\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}]$$

$$=0$$

$$\therefore[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}]\perp\vec{c}$$

二、两向量的向量积

实例 设O为一根杠杆L的支点，有一力$\vec{F}$作用于这杠杆上P点处．力$\vec{F}$与OP的夹角为θ，力$\vec{F}$对支点O的力矩是一向量$\vec{M}$，它的模



$$|\vec{M}| = |OQ||\vec{F}|$$

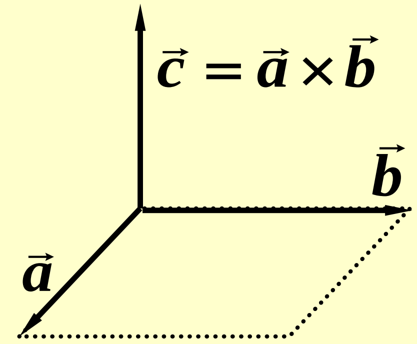
$$= |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

$\vec{M}$的方向垂直于OP与$\vec{F}$所决定的平面，指向符合右手系．

1. 定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的**向量积**为 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ (其中θ为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

$\vec{c}$的方向既垂直于$\vec{a}$，又垂直于$\vec{b}$，指向符合右手系.　　向量积也称为“**叉积**”、“**外积**”.



关于向量积的说明:

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.　　$(\because\theta=0\Rightarrow\sin\theta=0)$

(2) $\vec{a}/\!/\vec{b}\iff\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.　　$(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

(2) $\vec{a}//\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.\quad (\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$

证 $(\Rightarrow)\ \because \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0},\quad |\vec{a}|\neq 0,\quad |\vec{b}|\neq 0,$

$\therefore \sin\theta=0,\quad \theta=0,\quad \vec{a}//\vec{b}$

$(\Leftarrow)\quad \because \vec{a}//\vec{b}\qquad \therefore \theta=0$或$\pi\quad \therefore \sin\theta=0$

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0.$

2. 向量积的运算法则:

（1）反交换律：$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$

（2）分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

（3）结合律：$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$

3. 向量积的坐标运算

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\because\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

向量积的坐标表达式

为了帮助记忆，向量积还可用三阶行列式表示

$$\vec{a}\times\vec{b}=\{a_x,a_y,a_z\}\times\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

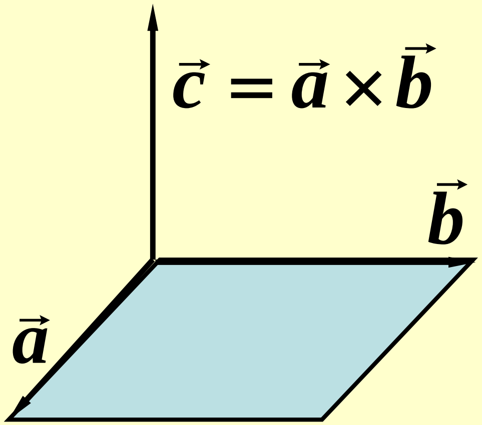
由上式可推出 $\vec{a}//\vec{b}\iff\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

b_x、b_y、b_z不能同时为零，但允许两个为零，

例如，$\dfrac{a_x}{0}=\dfrac{a_y}{0}=\dfrac{a_z}{b_z} \Rightarrow a_x=0,\ a_y=0$

补充

$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.



例 5 求与 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ 都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because |\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \overrightarrow{c^0}=\pm\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 7　设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且 $|\vec{m}|=4$，$|\vec{n}|=2$，$|\vec{p}|=3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解　$|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m}\hat{,}\vec{n})$

$=4\times 2\times 1=8,$

依题意知$\vec{m}\times\vec{n}$与$\vec{p}$同向，

$\therefore \theta=(\vec{m}\times\vec{n}\hat{,}\vec{p})=0$

$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}|\cdot|\vec{p}|\cos\theta=8\cdot 3=24.$

三、向量的混合积

定义 设已知三个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的混合积，记为$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，　$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，

$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$，

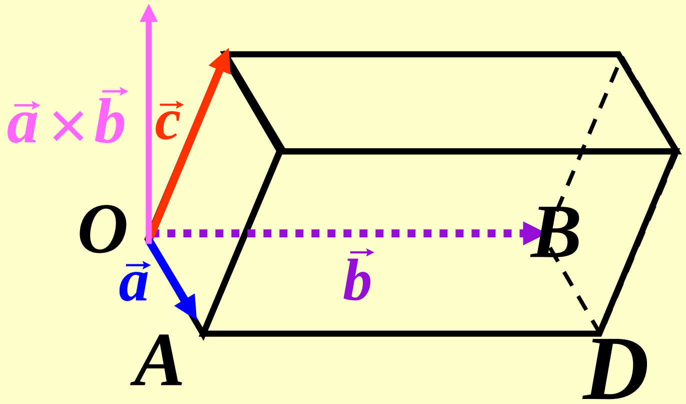
$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

混合积的坐标表达式

关于混合积的说明:

向量混合积的几何意义:

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.



$$S_{AOBD}=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$h=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha \quad \alpha\text{是}\vec{c}\text{与}\vec{a}\times\vec{b}\text{的夹角.}$$

$$V=S_{AOBD}h=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\alpha$$

$$=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=\left|[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\right|$$

混合积的几个结论：

利用混合积的几何意义可证明

(1) 三向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面的充分必要条件是

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0.$$

利用行列式的性质可证明

(2) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

例8 已知$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

例 9 已知空间内不在一平面上的四点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体的体积.

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$\because\ \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{AC}=\{x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1\}$$

$$\overrightarrow{AD}=\{x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1\}$$

$$\therefore V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择必须和行列式的符号一致.

四、小结

向量的数量积　（结果是一个数量）

向量的向量积　（结果是一个向量）

向量的混合积　（结果是一个数量）

（注意共线、共面的条件）

思考题

已知向量$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$，

证明$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

思考题解答

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\sin^2(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2[1-\cos^2(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})]$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

练 习 题

一、 填空题：

1、已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=26$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=72$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________；

2、已知$(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则

$(\vec{a}\times\vec{b})^2=$________________；

3、$|\vec{a}\times\vec{b}|$的几何意义是以$\vec{a},\vec{b}$为其邻边的__________；

4、三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$的几何意义是

_______；

5、两向量的的内积为零的充分必要条件是至少其中有一个向量为_________，或它们互相 _________；

6、两向量的外积为零的充分必要条件是至少其中有一个向量为______________，或它们互相_______；

7、设$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ，

则$\vec{a}\cdot\vec{b}$ = ____,

$\vec{a}\times\vec{b}$ = ________ ， $(-2\vec{a})\cdot 3\vec{b}$ = ________,

$\vec{a}\times 2\vec{b}$ = __________，$\cos(\vec{a},\vec{b})$ = ___________ ;

8、设$\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$和$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$,则

$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ =______________ ,

$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})=$ ______________ ,

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ = __________________ .

二、 已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为单位向量，且满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，计算$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

三、设质量为100千克的物体从点$M_1(3,1,8)$沿直线移动到点$M_2(1,4,2)$计算重力所作的功（长度单位为米，重力方向为Z轴负方向）.

四、设$\vec{a}=\{3,5,-2\}$，$\vec{b}=\{2,1,4\}$，问λ与μ怎样的关系能使行$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$与$z$轴垂直 .

五、应用向量证明：

1、三角形的余弦定理；

2、直径所对的圆周角是直角 .

六、已知a,b,c两两垂直，且

$$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,|\vec{c}|=3,\text{求}\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\text{的长度}$$

与它和$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的夹角 .

七、计算以向量$\vec{p}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$和$\vec{q}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$为边的三角形的面积，其中$\vec{e}_1$和$\vec{e}_2$是相互垂直的单位向量 .

练习题答案

一、1、± 30；　2、3；　3、平行四边形的面积；

4、以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为邻边的平行六面体的体积；

5、零向量, 垂直；　6、零向量, 平行；

7、3, $5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}, -18, 10\vec{i}+2\vec{j}+14\vec{k}, \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$；

8、$-8\vec{j}-24\vec{k}, -\vec{j}-\vec{k}, 2$.

二、$-\dfrac{3}{2}$.　三、5880 焦耳.　四、$\lambda = 2\mu$.

六、$|\vec{s}| = \sqrt{14}, (\vec{s},\vec{a}) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}$,

$(\vec{s},\vec{b}) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}, (\vec{s},\vec{c}) = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.　七、$\dfrac{5}{2}$.