第5章　一元积分学

积分 — 微分的逆运算

5.1 不定积分

5.2 定积分

5.3 定积分的应用

5.4 反常积分

5.1 不定积分

5.1.1 不定积分的概念

5.1.2 换元积分法与分部积分法

5.1.3 有理函数与可化为有理函数的不定积分

5.1 不定积分

一、原函数与不定积分的概念

定义： 如果对$\forall x \in I$,都有$F'(x) = f(x)$,那么$F(x)$就称为$f(x)$在区间I内一个原函数

例 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

$\ln x$是$\dfrac{1}{x}$在区间$(0,+\infty)$内的原函数.

原函数存在定理：(Page132 定理5.2.4)

$[a,b]$上的连续函数有原函数.

问题： (1) 原函数是否唯一？

(2) 若不唯一它们之间有什么联系？

答案：

（1）若 $F'(x) = f(x)$，则对于任意常数 C，

$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数.

（2）若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，

则 $F(x)-G(x)=C$

（C为任意常数）

不定积分的定义：

函数 $f(x)$ 在区间 I 内的全体原函数

称为 $f(x)$ 在区间 I 内的 **不定积分**，记为 $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

积分号　被积函数　被积表达式　积分变量　任意常数

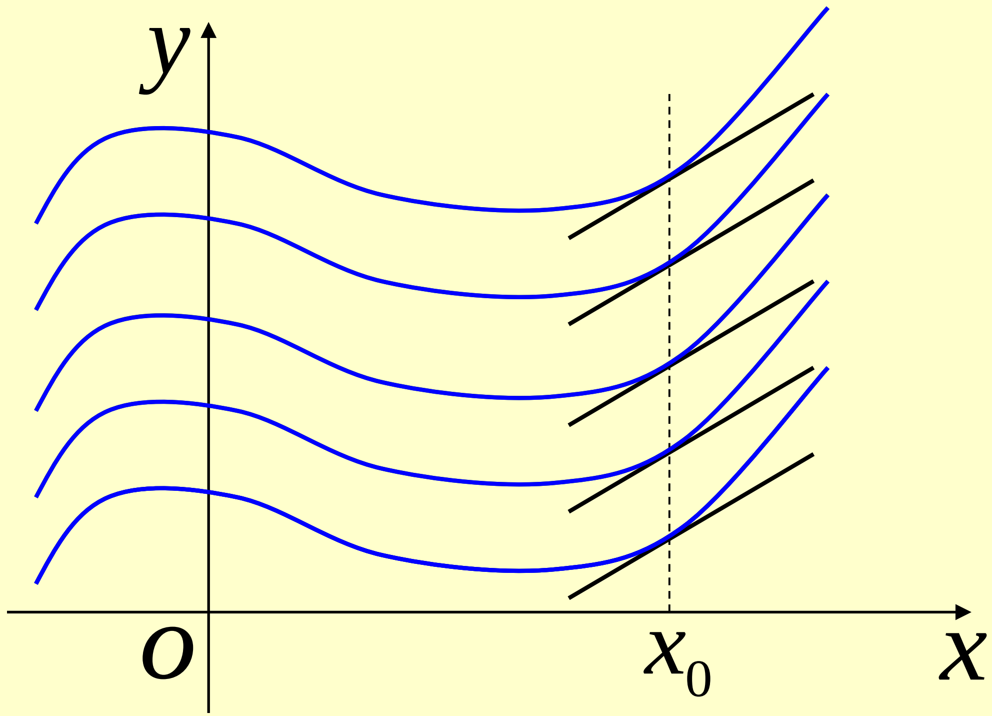
函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

显然，求不定积分得到一积分曲线族.

不定积分的几何意义:

$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的**积分曲线**.

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的图形 —— $f(x)$ 的所有积分曲线组成的平行曲线族.



例1　求 $\int \frac{1}{1+x^2}dx$.

解　$\because$　$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$$\therefore \quad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C.$$

由不定积分的定义，可知

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x),\qquad d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C,\qquad \int dF(x)=F(x)+C.$$

结论：微分运算与求不定积分的运算是**互逆**的.

先积后导全消掉,先导后积常数要.

二、 基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k是常数);

(2) $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ $(\mu \neq -1)$;

(3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

说明： $x > 0,\ \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln x + C,$

$x < 0,\ [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x},$

$\Rightarrow \int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C,\quad \therefore \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C;$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C;$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

(8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C;$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$

(12) $\int e^x dx = e^x + C;$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

(14) $\int \sinh x dx = \cosh x + C;$

(15) $\int \cosh x dx = \sinh x + C;$

例2 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx$.

解 $\int x^2\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx$

根据积分公式（2）$\int x^{\mu}dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

三、 不定积分的性质

(1) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

证 $\because \left[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right]'$

$$= \left[\int f(x)dx\right]' \pm \left[\int g(x)dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

$\therefore$ 等式成立. （可推广到有限多个函数和）

(2) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

（k 是常数，$k \neq 0$）

例3 求积分 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解 $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$$= 3\int \frac{1}{1+x^2}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= 3\arctan x - 2\arcsin x + C$$

例4 求积分 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx.$

解 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

例5 求积分 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx.$

解 $\int \frac{1}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1}{1+2\cos^2 x-1} dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x + C.$

说明： 以上两例中的被积函数都需要进行恒等变形，才能使用基本积分表.

例 6 已知一曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线斜率为 $\sec^2 x+\sin x$，且此曲线与 y 轴的交点为(0,5)，求此曲线的方程.

解 $\because \quad \dfrac{dy}{dx}=\sec^2 x+\sin x,$

$$\therefore \quad y=\int\left(\sec^2 x+\sin x\right)dx$$

$$=\tan x-\cos x+C,$$

$\because \quad y(0)=5, \qquad \therefore \quad C=6,$

所求曲线方程为 $y=\tan x-\cos x+6.$

例7 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & x \geq 0 \\ 1+x, & x<0 \end{cases}$，求$\int f(x)dx$

解: $x \geq 0$时，$\int f(x)dx = e^{x}+c_{1}$

$x<0$时，$\int f(x)dx = x+\dfrac{x^{2}}{2}+c_{2}$

$\because F$在$x=0$连续，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} e^{x}+c_{1}=\lim\limits_{x\to 0} x+\dfrac{x^{2}}{2}+c_{2}$.

$\therefore c_{2}=c_{1}+1,\quad \therefore F(x)=\begin{cases} e^{x}+c_{1}, & x \geq 0 \\ x+\dfrac{x^{2}}{2}+1+c_{1}, & x<0 \end{cases}$

四、 小结

原函数的概念： $F'(x)=f(x)$

不定积分的概念： $\int f(x)dx=F(x)+C$

基本积分表(1)

求微分与求积分的互逆关系

不定积分的性质

思考题

符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否存在原函数？为什么？

思考题解答

不存在.

假设有原函数 $F(x)$ $F(x)=\begin{cases} x+C, & x>0 \\ C, & x=0 \\ -x+C, & x<0 \end{cases}$

但 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可微, 故假设错误

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在原函数.

结论 每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数.