1.1.2 正项级数收敛的判别法

1. 正项级数收敛的充要条件

2. 正项级数的比较判别法

3. 正项级数的其他判别法

1. 正项级数收敛的充要条件

定义：若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

显然，对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ，部分和序列 $\{S_n\}$

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n \geq S_{n-1} \quad (n > 1)$$

部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增.

且，要么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$ (收敛) ，

要么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ (发散到 $+\infty$) .

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\rightleftarrows$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: “$\Longrightarrow$” 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\{S_n\}$收敛，故有界.

“$\Longleftarrow$” $\because u_n \geq 0$，$\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界，故 $\{S_n\}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

注：定理1是判断正项级数敛散性的基础，几乎所以其它判别法都由它导出.

例 1. 设 $u_n > 0, S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

证：因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 是正项级数，其部分和

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^2} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k^2} \le \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_{k-1} S_k}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) = \frac{2}{u_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{u_1},$$

即其部分和数列有界，所以级数收敛.

例2. 证明：级数 $1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ $(p>1)$ **收敛.**

证：设 $S_n=1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ **，则**$\{S_n\}$**单调增，且**

$$0<S_n\le S_{2^n-1}=1+(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p})+(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p})$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{(2^{n-1})^p}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)^p}\right)$$

$$\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p}$$

$$\le 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{p-1})^{n-1}}=\frac{1-(\frac{1}{2^{p-1}})^n}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$$

即 $\{S_n\}$ **有界，所以原级数收敛.**

2. 正项级数的比较判别法

定理2 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在 $N \in N^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k v_n$ (常数 $k > 0$),

则 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性,

故不妨设对一切 $n \in N^+$, 都有 $u_n \le k v_n$.

令 S_n 和 σ_n 分别表示 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的部分和, 则有

$$S_n \le k\sigma_n$$

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\{\sigma_n\}$有界 $\Rightarrow \{S_n\}$ 有界,

由**定理 1** 可知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$,

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ **$(p>0)$ 的敛散性.**

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in N^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法可知 **p** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

2) 若 $p>1$, 因为当$n-1\le x\le n$时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$ **(*)** 的部分和

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故级数(*)收敛, 由比较判别法知 p 级数收敛 .

$$P-\text{级数}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{当}p>1\text{时},\text{收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时},\text{发散}\end{cases}$$

重要参考级数: 等比级数, P-级数, 调和级数.

推论： 若存在 $N\in N^+$, 对一切 $n\ge N$,

$$(1)\ \ u_n\ge\frac{1}{n},\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{发散};$$

$$(2)\ \ u_n\le\frac{1}{n^p}\ \ (p>1),\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{收敛}.$$

例4. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较判别法可知, 所给级数发散 .

例5. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; $\quad \frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ 发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^3+1}}$; $\quad \frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^3+1}}<\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; $\quad \frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\le\frac{1}{n^2}$ 收敛

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; $\quad (\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\cdot\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}>n^2$ (n充分大)

$$\Rightarrow \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$$ 收敛

例5. 判别下列级数的敛散性：

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$

$$0\le u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\xi}{\xi+1}}\frac{1}{n}\quad(0<\xi<\frac{1}{n})$$

$$\le\sqrt{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^{3/2}}$$

所以级数收敛.

例6. 设 $a_n > 0$， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}}$ 也收敛.

证：因 $0 < \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}} \le \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^{2\alpha}})$，

当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ 收敛，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^{2\alpha}})$ 收敛，

故，当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{\alpha}}$ 收敛.

正项级数比较判别法的极限形式

定理3 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,

则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同敛散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证：(1) 当 $0 < l < \infty$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l$，**据极限定义，**

对 $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$，存在 $N \in N^+$，当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{l}{2} v_n \le u_n \le \frac{3l}{2} v_n \quad (n > N)$$

由定理 2 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ **同时收敛或同时发散；**

(2) 当$l=0$时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N^+, \forall n>N,$

$$u_n \le \varepsilon v_n$$

由定理2 知, **若**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$**收敛**, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 存在$N\in N^+$, 当$n>N$时, $\dfrac{u_n}{v_n}>1$, **即**

$$u_n > v_n$$

由定理2可知, 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$**发散**, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

$\sum u_n$, $\sum v_n$ 是两个正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时,两个级数同敛散;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散.

特别取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得比阶判别法:

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \qquad \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \Longrightarrow \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

$$u_n \sim l \cdot \frac{1}{n^p}$$

例7. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

$$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 发散.

例8. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}]=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

例9. 判别下列级数的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2};\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}(1-\cos\frac{\alpha}{n});\qquad (3)\ \sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})].$$

解：$(1)\ \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\ln n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0,$　收敛

$(2)\ 1-\cos\frac{\alpha}{n}=2\sin^2(\frac{\alpha}{2n})\sim\frac{\alpha^2}{2}\frac{1}{n^2},$　收敛

$(3)\quad \because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\ (x\to 0)$

$\therefore\ \frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]\sim\frac{1}{2n^2},$　收敛

例10. 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ **的敛散性.**

解： 因为 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$ 故可将 $\sum \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 与 $\sum \frac{1}{n^2}$ 进行比较. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^{2(1-n\sin\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{2(1-n\sin\frac{1}{n})\ln n},$$

注意到 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\ (x \to 0)$

$$\left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)\ln n = \left(1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\ln n$$

$$= \left(1 - n^2 \cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\frac{\ln n}{n^2} \to 0\ (n \to \infty)$$

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{2(1-n\sin\frac{1}{n})\ln n} = 1,$

根据比较判别法, 原级数收敛.

内容小结

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有界.

2. 比较判别法: 若 $0 \le u_n \le kv_n$ ，则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

3. $\sum u_n$，$\sum v_n$ 是两个正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同敛散 ;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时, $\sum u_n$ 也收敛 ;

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散 .

思考与练习

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$；　(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^{\alpha}}$；　(3) $\sum_{n=2}^{\infty} a^n \sin \frac{\pi}{b^n}\ (b>a>0)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$；　(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)$.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的正项级数，证明：

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散，　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ 收敛.

3. 设 $a_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\ln a_n}{\ln n} = r$ ，证明：

(1) 若 $r > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2) 若 $r < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

4. 证明：从调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 中去掉分母中含有数字9的那些项后，所得新级数是收敛的，且其和不超过80.

3. 正项级数的其他判别法

定理4 (比值判别法，D'Alembert)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$， 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) $\rho<1$, 取 $\varepsilon>0$, 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

$$\Rightarrow \quad \exists N\in N^+,\ \forall n>N, \text{有 } \frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$$

$$\therefore\ u_{n+1} < (\rho+\varepsilon)u_n < (\rho+\varepsilon)^2 u_{n-1} < \cdots$$

$$< (\rho+\varepsilon)^{n-N} u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^n$ **收敛，由比较判别法可知** $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$

必存在 $N\in N^+$, $u_N \neq 0$，当$n \geq N$ **时** $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$,

从而 $u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_N$,

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$，**所以级数发散.**

注1: 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho=1$ 时, 级数可能收敛也可能发散，判别法失效.

例如, $\boldsymbol{p}$ – 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=1$

但 $\begin{cases} p>1, \text{级数收敛}; \\ p\le 1, \text{级数发散}. \end{cases}$

注2: 不能用 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 判断级数 $\sum u_n$ 收敛，因为仍有可能 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

例11. 判别级数下列的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n};\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{10^n};\qquad (3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n^2}\ (a\neq 0).$$

解: (1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\dfrac{2}{e}<1(n\to\infty)$, **收敛**

(2) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n+1}{10}\to+\infty\ (n\to\infty)$, **发散**

(3) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=(\dfrac{n}{n+1})^2a^2\to a^2\ (n\to\infty)$,

$\therefore\ |a|<1$时，收敛； $|a|>1$时，发散； $|a|=1$时，$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛.

例12. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n\ (x>0)$ **的敛散性 .**

解: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e},$ **由比值判别法知:**

当$0<x<e$时, **级数收敛 ;** 当$x>e$ 时, **级数发散 ;**

当$x=e$ 时, **不能判定.**

但级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ \ e^n}{n^n},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1,$

$\Rightarrow u_{n+1}>u_n>\cdots>u_1=e,\quad \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,$ **级数发散 .**

定理5（Cauchy判别法, 或根值判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

则 (i) 当 $\rho<1$ 时, 级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 当 $\rho>1$，或 $\rho=+\infty$ 时, 级数 $\sum u_n$ 发散.

证: (i) 由于 $\rho<1$， 可取 $\varepsilon>0$, 使得 $\rho+\varepsilon<1$.

存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $\sqrt[n]{u_n}<\rho+\varepsilon<1$,

$\Rightarrow u_n<(\rho+\varepsilon)^n$， 而 $\sum(\rho+\varepsilon)^n$ 收敛，

由比较判别法知，级数收敛.

证： (ii) 由于 $\rho > 1$，可取 $\varepsilon > 0$, 使得 $\rho - \varepsilon > 1$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \Rightarrow$ 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\sqrt[n]{u_n} > \rho - \varepsilon > 1,$$

$\Rightarrow u_n > (\rho - \varepsilon)^n$, 而 $\sum (\rho - \varepsilon)^n$ 发散,

由比较判别法知，级数收敛.

注: 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho = 1$ 时, 判别法失效.

反例 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

例13. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

解：(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1,$　　收敛.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$　　收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$　　收敛.

例14. 用适当方法判别下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$；　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^{n^3}}{e^{n^2}}$.

解：(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1,$$

由比值判别法，原级数收敛.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}$.

解: $\displaystyle 0\le u_n=\frac{n^3}{3^n}\sin^2\frac{n\pi}{3}\le\frac{n^3}{3^n}=v_n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^3}}{3}=\frac{1}{3}<1,\qquad\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n \text{ 收敛}$$

再由比较判别法知，原级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^{n^3}}{e^{n^2}}$.

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\ (x \to 0)$

解: $\sqrt[n]{u_n} = \frac{(1+1/n)^{n^2}}{e^n} = e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}$

$$= e^{n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))-n} = e^{-\frac{1}{2}+n^2\cdot o(\frac{1}{n^2})}$$

$$\to e^{-\frac{1}{2}} < 1 (n \to \infty)$$

由根值判别法知，原级数为收敛.

例15. 判别下列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 的敛散性.

解: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$

由根值判别法知，原级数为收敛.

但

$$\left.\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \frac{u_{2m+1}}{u_{2m}} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1/2^{2m}}{1/2^{2m+1}} = 2 \\ \lim_{m\to\infty} \frac{u_{2m}}{u_{2m-1}} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1/2^{2m+1}}{1/2^{2m-1}} = \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

不成立

所以不能用比值判别法判别.

注：由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho.$

可知，凡是能用比值判别法能判别的，也一定能用根值判别法判别；但反之不然．即根值法比比值法适用面要宽一些，但比值法有时方便些.

从证明可以看出，根值法和比值法都是与等比级数作比较的．如果某个级数比等比级数收敛得慢，这两个判别法就都失效了，需要更精细的判别法.

当 $\rho=1$ 时，比值法失效，但有

定理6 (Raabe判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=r$$

则 (1) $r>1$ 时，原级数收敛；

(2) $r<1$ 时，原级数发散；

(3) $r=1$ 时，敛散性不定 (失效).

例16. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

解：(1) $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$

由Raabe判别法，级数收敛.

(2) $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{1}{n+1}}-1\right)$　　$a^x-1\sim x\ln a$ $(x\to 0)$

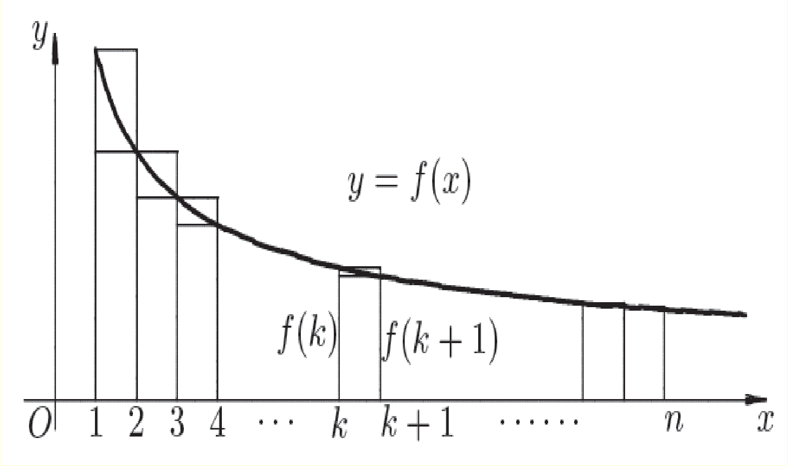
$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n+1}\ln 2=\ln 2<1,$　　级数发散.

定理7 **(积分判别法)** 设 f 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数, 那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

证 由假设 f 为$[1,+\infty)$上非负减函数, 对任何正数 A, f 在$[1, A]$上可积, 于是

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \le f(k-1),$$

$$k = 2,3,\cdots$$



$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \le f(k-1),\ k = 2,3,\cdots.$$

依次相加可得

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

即 $$S_n - f(1) \le \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \le S_{n-1}$$

若 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 有界， $\sum f(n)$ 收敛.

若 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = +\infty$ ， $\sum f(n)$ 发散.

同理可证 $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\sum f(n)$ 同敛散.

例17. 讨论下列级数的敛散性:

$$\text{(i)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p};\qquad \text{(ii)}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}.$$

解: (i) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}$

当 $p>1$时收敛, $p\le 1$时发散, 根据积分判别法得级数(i) 在 $p>1$时收敛, $p\le 1$时发散.

对于(ii), 考察反常积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$,同样可

推得级数 (ii) 在 $p>1$时收敛, 在 $p\le 1$时发散.

内容小结

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，有

1. 比值判别法： $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}<1, \text{收敛}\\ >1, \text{发散}\end{cases}$

2. 根值判别法： $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}<1, \text{收敛}\\ >1, \text{发散}\end{cases}$

3. 拉贝判别法： $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=r\begin{cases}>1, \text{收敛}\\ <1, \text{发散}\end{cases}$

4. 积分判别法： $f(x)\geq 0, \searrow, x\in[1,+\infty)$，则

$\sum f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散.

思考与练习

用适当的方法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{2020}+1}}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$;　　(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}\ (a,b>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\ln n}{n})^{2n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;　　(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

知识拓展

Kummer判别法：

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$均为正项级数，且$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=K.$

则 (i)当$K>0$时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

(ii)当$K<0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

注： (1) 取$b_n=1$，得到D'Alembert判别法；

(2) 取$b_n=\frac{1}{n}$，得到Raabe判别法；

(3) 取$b_n=\frac{1}{n\ln n}$，得到Bertrand判别法.

证法提示：

$$\text{(i) 取}\varepsilon = K/2 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{K}{2} a_{n+1} \geq 0 (n > N)$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调减有下界}0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} \exists \Rightarrow \sum \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\text{收敛}$$

$$\text{(ii)} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n} (n > N)$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{n+1} (n > N)$$

对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，作序列 $\mathcal{B}_n = \ln n \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$

贝特朗 (Bertrand) 判别法 假定序列 $\mathcal{B}_n$ 具有极限 (有限的或无穷的):

$$\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n.$$

那么当 $\mathcal{B} > 1$ 时级数收敛，而当 $\mathcal{B} < 1$ 时级数发散.

高斯判别法 设对于级数 (A)，比值 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 可以表示成下面的形状:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

其中 λ 与 μ 是常数，而 θ_n 是有界的量:$|\theta_n| \leqslant L$;那么，级数收敛，如果 $\lambda > 1$ 或者如果 $\lambda = 1, \mu > 1$; 级数发散，如果 $\lambda < 1$ 或者如果 $\lambda = 1, \mu \leqslant 1$.