知识点六 相对论基础

【内容预览】

<table>
<tr><th>知识体系</th><th>具体知识点</th><th>解题要点</th></tr>
<tr><td rowspan="2">狭义相对论</td><td>相对性原理、光速不变原理</td><td rowspan="2">洛伦兹变换的运用，注意理解两个坐标系中的时空关系</td></tr>
<tr><td>洛伦兹变换 $x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$，当 $v\ll c$ 时，$\beta=\frac{v}{c}\approx 0$</td></tr>
<tr><td>相对论速度变换</td><td>相对论速度变换公式：$\begin{cases} u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \\ u_y'=\dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \\ u_z'=\dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \\ u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \\ u_z=\dfrac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \end{cases}$</td><td>只有当 u、v 接近于光速时，才需使用相对论速度变换</td></tr>
<tr><td rowspan="4">狭义相对论的时空观</td><td>同时的相对性</td><td rowspan="4">理解时间延缓和长度收缩这两个公式即可</td></tr>
<tr><td>时间延缓：$t=\frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$</td></tr>
<tr><td>长度收缩：$l'=l\sqrt{1-\beta^2}$</td></tr>
<tr><td>相对性和绝对性</td></tr>
<tr><td rowspan="3">狭义相对论动力学基础</td><td>$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$，$\boldsymbol{p}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\boldsymbol{v}$</td><td rowspan="3">运用动量守恒和能量守恒定律</td></tr>
<tr><td>相对论动能表达式：$E_k=mc^2-m_0c^2$
质能表达式：$\begin{cases} \text{运动时的能量} E=mc^2 \\ \text{静能} E_0=m_0c^2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>相对论动量和能量关系式
$E^2=c^2p^2+E_0{}^2=c^2p^2+m_0{}^2c^4$</td></tr>
</table>

【知识清单】

§6.1 狭义相对论

一、狭义相对论基本原理

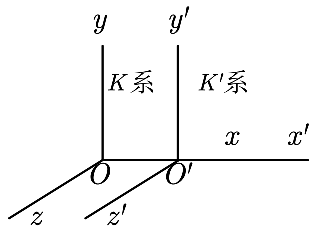
1.相对性原理：对力学规律而言，所有的惯性系都是等价的或在一个惯性系中，所作的任何理学实验都不能够确定这一惯性系本身是静止状态，还是匀速直线运动。力学中不存在绝对静止的概念，不存在一个绝对静止优越的惯性系。

2.光速不变原理：在彼此相对作匀速直线运动的任一惯性参考系中，所测得的光在真空中的传播速度都是相等的。

二、洛伦兹变换

设当O与O'重合时$t=t'=0$作为记时的起点

同一事件：K系中(x,y,z,t)，K'系中(x',y',z',t)



洛伦兹变换：$\begin{cases} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\dfrac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{x'+vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\dfrac{t'+\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$ （其中$\beta=\dfrac{v}{c}$）

§6.2 相对论速度变换

一、相对论速度变换公式

$$\begin{cases} u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \\ u_y'=\dfrac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \\ u_z'=\dfrac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x} \end{cases} \text{或} \begin{cases} u_x=\dfrac{u_x'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \\ u_y=\dfrac{u_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \\ u_z=\dfrac{u_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_x'} \end{cases} \text{（其中}\beta=\frac{v}{c}\text{）}$$

结论：（1）当速度u、v远小于光速c时，相对论速度变换就转化为伽利略速度变换式$u'=u-v$，这表明在一般低速情况中，伽利略速度变换仍是适用的，**只有当u、v接近于光速时，才需使用相对论速度变换**。

（2）光信号对K系和K'系的速度都是c，在任一惯性系中光速都是c。

§6.3 狭义相对论的时空观

一、“同时”的相对性

在某个惯性系中同时发生的两个事件，在另一相对它运动的惯性系中，并不一定同时发生。

二、时间延缓、长度收缩

1.时间延缓：$\Delta t=\dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$（其中$u$、$v$）

固有时：在相对于过程发生的地点为静止的参考系中测得的时间间隔，用$\Delta\tau$表示

结果表明运动时大于固有时，这个效应叫做时间延缓，又称时间膨胀或时钟变慢

2.长度收缩：$l'=l\sqrt{1-\beta^2}$（其中u、v）

物体有相对速度v的坐标系测得的沿速度方向的物体长度l'，总比物体相对静止的坐标系中测得的固有长度l短，这个效应叫做长度收缩。

§6.4 狭义相对论动力学基础

一、相对论力学的基本方程

物体的质量是随着速度而改变的，两者关系如下：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\quad,\quad \boldsymbol{p}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\boldsymbol{v}$$

静止质量：m_0 是物体在相对静止的惯性系中测出的质量；

运动时质量：m 是物体对观察者有相对速度 v 时的质量。

二、质量和能量的关系

1.相对论中的动能表达式： $E_k=mc^2-m_0c^2$

2.质能表达式： $\begin{cases}\text{运动时的能量}E=mc^2\\ \text{静能}E_0=m_0c^2\end{cases}$

这个公式表明质量是物质所含有的能量的量度，它表示具有一定质量的物质客体也必具有和这质量相当的巨大能量，通常所说的物体的动能仅是mc^2和m_0c^2的差额。即

$$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)$$

3.相对论动量和能量关系式： $E^2=c^2p^2+E_0^2=c^2p^2+m_0^2c^4$

☞注意：把该式用到光子上去，因光子的静止质量$m_0=0$，可得光子的动量等于光子能量除以光速 c 的结果$p=\dfrac{E}{c}$

【常考题型】

题型 1：洛伦兹变换

例 6-1 甲乙两人所乘飞行器沿 Ox 轴作相对运动，甲测得两个事件的时空坐标为$x_1=6\times10^4m$，$y_1=z_1=0$，$t_1=2\times10^{-4}s$；$x_2=12\times10^4m$，$y_2=z_2=0$，$t_2=1\times10^{-4}s$，如果乙测得这两个事件同时发生于t'时刻，问：（1）乙对于甲的运动速度是多少？（2）乙所测得的两个事件的空间间隔是多少？

解：（1）设乙对于甲的运动速度为 v,由洛伦兹变换$t'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right)$

可知乙所测得的这两个事件的时间间隔应为$t_2'-t_1'=\dfrac{(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$

按题意，$t_2'-t_1'=0$，代入已知数据，可解得$v=-\dfrac{c}{2}$

（2）由洛伦兹变换 $x'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x-vt)$

可知乙所测得的这两个事件的空间间隔为$x_2'-x_1'=\dfrac{(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}=5.2\times10^4m$

题型 2：相对论速度变换

例 6-2 一空间站发射两个飞船,它们的运动路径相互垂直.设一观察者位于空间站内,他测得第一个飞船和第二个飞船相对空间站的速率分别为 0.60c 和 0.80c，试求第一个飞船的观察者测得第二个飞船的速度.

解：设第一飞船沿 x 轴正向运动。第二个飞船沿 y 轴正向运动。以地面为 S 系，以第一个飞船为 S' 系，则 $v=0.60c$，$u_y=0.80c$，$u_x=0$。

由洛仑兹速度变换得：$u_x'=\dfrac{u_x-v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=-v=-0.60c$

$$u_y'=\frac{u_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=0.8c\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}=0.64c$$

$$u'=\sqrt{u_x'^2+u_y'^2}=\sqrt{0.6^2+0.64^2}\,c=0.877c$$

速度方向与 x 轴正向夹角 $\theta=\arctan\dfrac{0.64c}{-0.60c}=133.2°$

题型 3：时间延缓、长度收缩

例 6-3 宇宙射线与大气相互作用时能产生π介子衰变,此衰变在大气上层放出叫做μ子的基本粒子，这些μ子的速度接近光速($v=0.998c$)，由实验室内测得的静止μ子的平均寿命等于$2.2\times10^{-6}s$,试问在 8000m 高空由π介子衰变放出的μ子能否飞到地面。

解：以地面为s系，以μ子为s'系，由时钟延缓效应得从地面参考系中观察μ子的寿命

$$\Delta t=\frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-(0.998)^2}}=3.48\times10^{-5}s$$

在其寿命期间运动的距离 $l=v\Delta t=0.998\times3\times10^8\times3.48\times10^{-5}m=10419m>8000m$

所以在 8000m 高空由π介子衰变放出的μ子能飞到地面。

【分析】本题可由尺度缩短效应计算说明：$l'=l\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=v\Delta\tau\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=10419m>8000m$。

题型 4：相对论中质量和能量的关系

例 6-4 设有两个静止质量都是m_0的粒子，以大小相同、方向相反的速度相撞，反应合成一个复合粒子，试求这个复合粒子的静止质量和运动速度。

解：设两个粒子的速率都是 v，由动量守恒和能量守恒定律得

$$m_0v-m_0v=m'v' \qquad m'c^2=\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

式中m'和v'分别是复合粒子的质量和速度，显然$v'=0$，这样，$m'=m_0'$

故
$$m_0'=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

这表明复合粒子的静止质量m_0'大于$2m_0$，两者的差值

$$m_0'-2m_0=\frac{2m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}-2m_0=\frac{2E_k}{c^2}$$

式中E_k为两粒子碰撞前的动能，由此可见，与动能相应这部分质量转化为静止质量，从而使碰撞后复合粒子的静止质量增大了。