数项级数“思考与练习”题答案

1.1.1 数项级数的概念和性质

1. 作一个无穷级数，使其部分和 $S_n=\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots$.

解: $u_1=S_1=1$， $u_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{-1}{n(n-1)}, n=2,3,\cdots$.

所作级数为 $1-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. 求下列无穷级数的和：

（1） $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{q^{2^n}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}$ （$|q|>1$）；（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+m)}, (m\in N^+)$

解：（1） $u_n=\dfrac{q^{2^n}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}=\dfrac{q^{2^n}+1-1}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}$

$$=\frac{1}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^{n-1}})}-\frac{1}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}$$

$$S_n=u_0+\sum_{k=1}^{n-1}u_k=\frac{q}{1+q}+\frac{1}{1+q}-\frac{1}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^{n-1}})}$$

$$=1-\frac{1-q}{(1-q)(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^{n-1}})}$$

$$=1-\frac{1-q}{1-q^{2^n}}\to 1(n\to\infty).$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{q^{2^n}}{(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})}=1.$

(2) 当 $n>m+1$ 时，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m})=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+m})$$

$$=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=m+1}^{m+n}\frac{1}{k})=\frac{1}{m}(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k})\to\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\ (n\to\infty)$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.$$

3. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛. 式举例说明，其逆命题不成立. 但若$a_n>0$，则逆命题成立，试证之.

证：设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则$\lim_{n\to\infty}S_n=S$，且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 又设$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$的部分和为$\sigma_n$，则

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=2S_n-a_1+a_{n+1}\to 2S-a_1(n\to\infty),$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛，且其和为$2S-a_1$.

其逆命题不成立，即$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$收敛推不出$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，反例：则$a_n=(-1)^{n-1}$，则

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散.

但若$a_n>0$，则逆命题成立，即由$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛可推出也$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛. 事实上，因他们都是正项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$， 可得

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})=2S_n-a_1+a_{n+1}>2S_n-a_1\to+\infty(n\to\infty),$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$发散，矛盾.

4. 设$a_n>0$，$\{a_n-a_{n+1}\}$为一个严格递减的数列. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

证： 因$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故$\lim_{n\to\infty}a_n=0$， 从而$\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n+1})=0$，又因$\{a_n-a_{n+1}\}$严格递减，故必有$a_n-a_{n+1}>0$，即$\{a_n\}$为严格递减数列.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，则余项 $r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0 (n \to \infty)$. 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的正项级数，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛（为什么？），其余项记为 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$.

再由 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格递减，可得

$$a_n^2 = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2) = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1}) < (a_n - a_{n+1}) \sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1}),$$

于是

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1} a_n} > \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} > \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} (a_k + a_{k+1})} \to +\infty (n \to \infty).$$

1.1.2 正项级数的判别法

1. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^{\alpha}}$； (3) $\sum_{n=2}^{\infty} a^n \sin \frac{\pi}{b^n} (b > a > 0)$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right]$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \ln \frac{2n+1}{2n-1} - 1 \right)$.

解：（1）因 $\sqrt{n} > \ln n$，所以 $\frac{1}{3^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}$， $\mathrm{p} = \ln 3 > 1$ ，$\sum \frac{1}{n^{\ln 3}}$ 收敛，由比较判别法原级数收敛.

（2）先考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\lambda}}$ 的敛散性.

当 $\lambda \le 0$ 时，$\frac{\ln n}{n^{\lambda}} \to +\infty (n \to \infty)$，必要条件不满足，级数发散；

当 $0 < \lambda \le 1$ 时， $\frac{\ln n}{n^{\lambda}} > \frac{1}{n}$，有比较判别法知，级数发散；

当 $\lambda > 1$ 时，取充分小的 $\mu > 0$，使得 $\lambda - \mu > 1$（比如取 $\mu = \frac{\lambda - 1}{2}$），有

$$\lim_{n\to\infty} n^{\lambda-\mu}\cdot\frac{\ln n}{n^{\lambda}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}}=0,$$

由比阶判别法知，级数收敛.

故，当$\lambda\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\lambda}}$发散，当$\lambda>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\lambda}}$收敛.

再考虑意级数，因$\frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^{\alpha}}=\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{\alpha}}\sim\frac{1}{n^{\alpha}}\frac{1}{n}\ln n=\frac{\ln n}{n^{\alpha+1}}$，由上述结论知，当$\alpha>0$时，$\sum\frac{\ln n}{n^{\alpha+1}}$收敛， 当$\alpha\le 0$时，$\sum\frac{\ln n}{n^{\alpha+1}}$发散，所以原级数在当$\alpha>0$时收敛，当$\alpha\le 0$时发散.

(3) 当$b\le 1$时，$\frac{\pi}{b^{n}}\to+\infty$，但有$0<a<b\le 1$，$\left|a^{n}\sin\frac{\pi}{b^{n}}\right|\le a^{n}$，而$\sum a^{n}$收敛，所以原级数绝对收敛，因而也收敛. 当$b>1$时，$\frac{\pi}{b^{n}}\to 0$，$a^{n}\sin\frac{\pi}{b^{n}}\sim\pi(\frac{a}{b})^{n}$，又$0<\frac{a}{b}<1$，$\sum(\frac{a}{b})^{n}$收敛，所以原级数收敛. 综合得，当$0<a<b$时，原级数总是收敛的.

(4) 由 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+o(x^{2})(x\to 0)$，得

$$(1+\frac{1}{n})^{n}=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^{2}}+o(\frac{1}{n^{2}}))}=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})},$$

$$(1+\frac{1}{n})^{n}-e=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-e=e(e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}-1)\sim e(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))\sim-\frac{e}{2n}\quad(n\to\infty)$$

而$\sum\frac{1}{n}$ 发散，所以原级数发散.

(5) 由 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{3}x^{3}+o(x^{3})(x\to 0)$，得

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1=n\ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)-1$$

$$=n\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+o(\frac{1}{n^3})\right)-1$$

$$=\frac{1}{2n-1}-2n\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2+\frac{n}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3+n\cdot o(\frac{1}{n^3})$$

$$=\frac{2n+6}{3(2n-1)^3}+o(\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{12n^2}(n\to\infty)$$

因$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，所以，原级数收敛.

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一个发散的正项级数，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ 收敛.

证：因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数且发散，所以收敛$\{a_n\}$可能有界也可能无界. 若$\{a_n\}$有界，即$\exists M>1,\forall n\in N^+$，有$0\le a_n\le M$，此时 $\frac{a_n}{1+a_n}\ge\frac{1}{1+M}a_n$，由比较判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散；若$\{a_n\}$无界，则必有子列$\{a_{n_k}\}$，使得$a_{n_k}\to+\infty(k\to+\infty)$，此时

$$\frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}}=\frac{1}{1+\frac{1}{a_{n_k}}}\to1\ne0(k\to\infty),$$

故当$n\to\infty$时，$\frac{a_n}{1+a_n}$不趋于 0，由级数收敛的必要条件知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ 发散.

对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$，因$\frac{a_n}{1+n^2a_n}\le\frac{a_n}{n^2a_n}=\frac{1}{n^2}$，$\sum\frac{1}{n^2}$收敛，所以收敛.

3. 设 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\ln a_n}{\ln n}=r$，证明：**(1) 若$r>1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；**

(2) 若$r<1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证：（1）因$r>1$，所以可取充分小的$\varepsilon>0$，使得$r-\varepsilon>1$，由极限定义，对所取的$\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{-\ln a_n}{\ln n}-r\right|<\varepsilon \;\Rightarrow\; -\ln a_n>(r-\varepsilon)\ln n=\ln n^{r-\varepsilon} \;\Rightarrow\; a_n<\frac{1}{n^{r-\varepsilon}},$$

因 $p=r-\varepsilon>1$，$\sum\frac{1}{n^{r-\varepsilon}}$收敛，故由比较判别法，原级数收敛.

（2）因$r<1$，所以可取充分小的$\varepsilon>0$，使得$r+\varepsilon<1$，与（1）类似有，$a_n>\frac{1}{n^{r+\varepsilon}}$（后续请自行补全）.

注：本题实际上是正项级数的**对数判别法**，可以用来判别某些正项级数的敛散性. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$等.

4. 证明：从调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$中去掉分母中含有数字 9 的那些项后，所得新级数是收敛的，且其和不超过 80.

证：设新级数的部分和为S_n，因为是正项级数，所以只需证明$\{S_n\}$有上界. 在新级数中，

分母是 1 位数的有 9 项： $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{8}$， 其和不超过$1\times(9-1)$；

分母是 2 位数的有9^2-9项： $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{88}$， 其和不超过$\frac{1}{10}\times(9^2-9)$；

分母是 3 位数的有9^3-9^2项： $\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{888}$， 其和不超过$\frac{1}{10^2}\times(9^3-9^2)$；

……

分母是 k 位数的有9^k-9^{k-1}项：$\frac{1}{10^k}+\frac{1}{10^k+1}+\cdots+\frac{1}{\underbrace{88\cdots8}_{k个8}}$，其和不超过$\frac{1}{10^{k-1}}\times(9^k-9^{k-1})$.

对任意正整数n，存在充分大的正整数k，使得

$$S_n<1\times(9-1)+\frac{1}{10}\times(9^2-9)+\frac{1}{10^2}\times(9^3-9^2)+\cdots+\frac{1}{10^{k-1}}\times(9^k-9^{k-1})$$

$$=8+\frac{8\times9}{10}+\frac{8\times9^2}{10^2}+\cdots+\frac{8\times9^{k-1}}{10^{k-1}}=8\times\frac{1-(\frac{9}{10})^{k-1}}{1-\frac{9}{10}}<80,$$

即$\{S_n\}$有界，从而所得级数敛散，且其和不超过 80.

5. 用适当的方法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^{2020}+1}}{2^n}$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}$; (4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}\ (a,b>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\ln n}{n})^{2n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$; (7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; (8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

解：(1) $\frac{\sqrt{n^{2020}+1}}{2^n}<\frac{\sqrt{2\cdot n^{2020}}}{2^n}=\frac{\sqrt{2}n^{1010}}{2^n}$，由根式判别法知$\sum\frac{n^{1010}}{2^n}$收敛，再由比较判别法得原级数收敛.

（2）$\frac{1}{\ln(n+1)}\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n\ln n}$，由积分判别法$\sum\frac{1}{n\ln n}$发散，所以原级数发散.

（3）$e^{\sqrt{n}}=e^{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\ln n}=n^{\frac{\sqrt{n}}{\ln n}}$，因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=+\infty$，所以对于$\forall p>1$，$\exists N>0$，当$n>N$ 时，有

$\frac{\sqrt{n}}{\ln n}>p>1$，从而$\frac{1}{e^{\sqrt{n}}}<\frac{1}{n^p}$，由比较法知，级数收敛.

（4）记$u_n=\frac{1+a^n}{1+b^n}$，分情况讨论：

i）$a\le 1$时，若$b\le 1$，则u_n不趋于 0，级数发散；若$b>1$，则$u_n\sim\frac{1+a^n}{1+b^n}\sim\frac{1}{b^n}$，收敛.

ii）$a>1$时，若$b\le 1$，$u_n\to+\infty$，发散； 若$b>1$，再分三这情况：$b=a$，则$u_n=1$，发散；$b<a$，$u_n\to+\infty$，发散；$b>a$，$u_n\sim\frac{1+a^n}{1+b^n}\sim(\frac{a}{b})^n$，收敛.

(5) $u_n=(1-\frac{\ln n}{n})^{2n}=e^{2n\ln(1-\frac{\ln n}{n})}$,

$$2n\ln(1-\frac{\ln n}{n})=2n\left(-\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n^2}+o(\frac{\ln^2 n}{n^2})\right)=-2\ln n+\frac{\ln^2 n}{n}+n\cdot o(\frac{\ln^2 n}{n^2}),$$

$$u_n=e^{2n\ln(1-\frac{\ln n}{n})}=e^{-2\ln n+\frac{\ln^2 n}{n}+n\cdot o(\frac{\ln^2 n}{n^2})}=\frac{1}{n^2}e^{\frac{\ln^2 n}{n}+n\cdot o(\frac{\ln^2 n}{n^2})},$$

用洛必达法则可求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\ln^2 n}{n}+n\cdot o(\frac{\ln^2 n}{n^2})\right]=0$，所以$u_n\sim\frac{1}{n^2}$，级数收敛.

（7） $\sqrt[n]{\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}}=\dfrac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=\dfrac{1}{\ln n}e^{\frac{\ln n\ln n}{n}}\to 0(n\to\infty)$, 级数收敛.

（8） $p=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^q}dx=\int_{\ln\ln 2}^{+\infty}\dfrac{1}{t^q}dt$ ，$q>1$ 时收敛，$q\le 1$ 时发散；

$p<1$ 时，$\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\dfrac{1}{n\ln n}\dfrac{(\ln n)^{1-p}}{(\ln\ln n)^q}>\dfrac{1}{n\ln n}$ (n 充分大)，级数发散；

$p>1$ 时，$\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}=\dfrac{1}{n(\ln n)^{1+\frac{1-p}{2}}}\dfrac{1}{(\ln n)^{\frac{p-1}{2}}(\ln\ln n)^q}<\dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{p+1}{2}}}$ ，级数收敛.

1.1.3 变号级数

1. 讨论下列级数的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[e-(1+\dfrac{1}{n})^n]$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p})$ ($p>0$).

解：(1) 条件收敛.

(2) 由 Taylor 公式，有

$$u_n=\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right]$$
$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\ (n\to\infty)$$

因 $b_n=\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$ 发散， 又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，所以原级数收敛

(收敛+发散→发散) .

(3) 因 $\{(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 单调增，所以 $\{e-(1+\dfrac{1}{n})^n\}$ 单调减，且趋于 0，由 Leibniz 判别法，级数收敛. 又

$$e-(1+\frac{1}{n})^n=e-e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e-e^{n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})]}=e[1-e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}]\sim\frac{e}{2}\frac{1}{n},$$

所以，级数非绝对收敛，因而是条件收敛的.

(4) $u_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$,

记 $b_n=\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}(n\to\infty)$，则 $u_n=\frac{(-1)^n}{n^p}-b_n$.

当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝地收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$（绝对）收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

当 $0<p\le\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $\frac{1}{2}<p\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的级数， 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，能否断言 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也是收敛级数？请研究如下级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$.

解：断言不成立.

取 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$， $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ 即可说明.

3. 讨论级数 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^q}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^q}-\frac{1}{6^p}+\cdots\ (p>0,q>0)$ 的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛.

解：$p>1,q>1$ 时，因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^q}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^p}$ 都收敛，也绝对收敛，原级数是它们的差，所以绝对敛散.

$0<p=q<1$ 时，由莱布尼兹法，级数条件收敛.

其它情形级数发散．试举例：

(a) $p>1,q\le 1$ 时，即 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^q}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^q}-\frac{1}{6^p}+\cdots$.

是交错级数，因 u_n 不单调，不能用 Leibniz 判别法．但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^q}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^p}$ 收敛，差是原级数，发散.

(b) $p<1,q=1$时，即 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^p}+\cdots$

考虑对其加括号后的级数：$1-(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5})-\cdots-(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1})-\cdots$ ，

因 $\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1}>0$，去掉第一项，每个括号前改变符号，可看成正项级数.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^p}{(2n+1)\cdot 2^p}=\frac{1}{2^p}$，所以级数与$\sum\frac{1}{n^p}$同敛散，因 $p<1$，

所以加括号后的级数发散，由性质知，去掉括号后得原级数，发散.

（c） $p<1,q<1,p\neq q$时，与（b）类似讨论.

其余情形也与上述类似，请自行验证.

4.（Page15，定理 1.1.10）设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一个任意项的级数，令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases}a_n,\ a_n>0,\\0,\quad a_n\le 0;\end{cases}\qquad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases}-a_n,\ a_n<0,\\0,\quad a_n\ge 0,\end{cases}$$

证明：（1）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$都收敛；

(2) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$都发散.

证:（1）由$0\le a_n^+,a_n^-\le|a_n|$及比较判别法即得.

（2）反证，假设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$收敛，则由$a_n^-=a_n^+-a_n$知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$也收敛.

从而$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^++a_n^-)$收敛，这与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛矛盾，所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$必发散.

同理可证$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$发散.