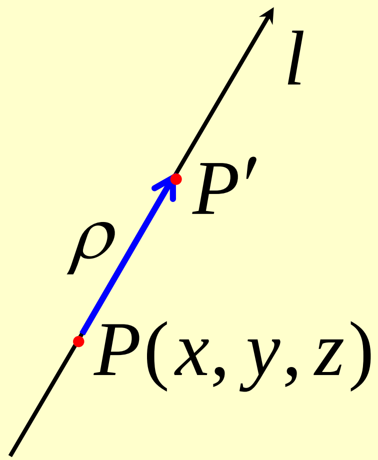
# 3.3　方向导数与梯度

一、方向导数

二、梯度

三、物理意义

# 一、方向导数




**定义**: 若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x, y, z)$ 处

沿方向 $l$ (方向角为 $\alpha, \beta, \gamma$) 存在下列极限:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\rho} \overset{\text{记作}}{=} \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left( \begin{array}{l} \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}, \\ \Delta x = \rho \cos\alpha, \ \Delta y = \rho \cos\beta, \ \Delta z = \rho \cos\gamma \end{array} \right)$$

则称 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 $P$ 处沿方向 $l$ 的**方向导数**.

**定义 3.3.1 (方向导数)** 设$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{l}$是平面上一向量, 其单位向量记为$\boldsymbol{e}_l$, $f: N(\boldsymbol{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. 在$N(\boldsymbol{x}_0)$内让自变量$\boldsymbol{x}$由$\boldsymbol{x}_0$沿与$\boldsymbol{e}_l$平行的射线变到$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{e}_l$, 从而对应的函数值有改变量$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)$. 若

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限为$f$在点$\boldsymbol{x}_0$沿$\boldsymbol{l}$方向的**方向导数**, 记作

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{\boldsymbol{x}_0} = \lim_{t \to 0+} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}. \tag{3.3.2}$$

# 方向导数的几何意义:

$$z = f(x, y) \qquad \rho = |P_0P| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

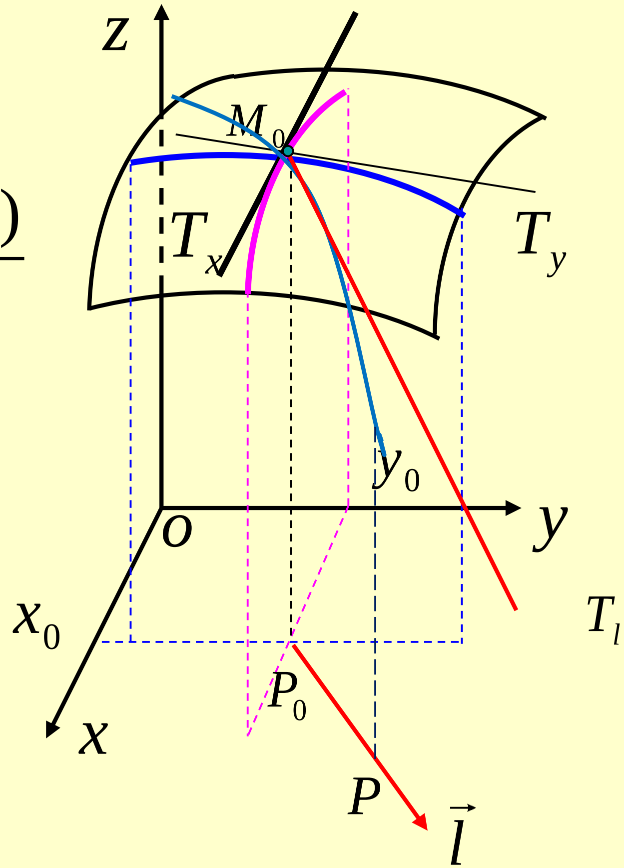
$$\frac{\partial f}{\partial l}\bigg|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

是曲面 $z = f(x, y)$ 与过 $P_0$ 点且与

方向 $\vec{l}$ 和 $z$ 轴平行的平面的交线

在点 $M_0$ 处的切线（射线）$M_0T_l$

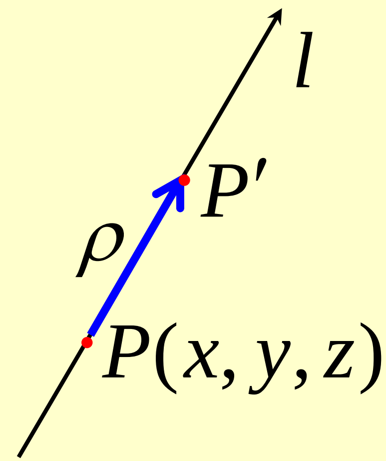
对 $\vec{l}$ 方向的斜率.



**定理:** 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点**沿任意方向** $l$ 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中$\alpha,\beta,\gamma$为$l$的方向角.



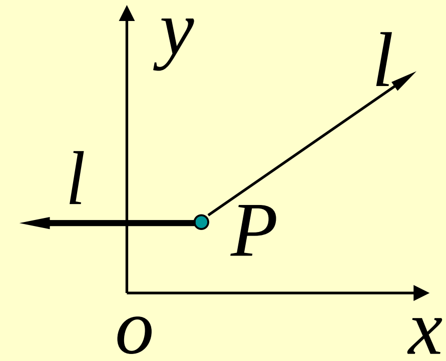

**证明:** 由函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P$ 可微，得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)$$

$$=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 $l$ (方向角为 $\alpha,\beta$ ) 的方向导数为




$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=f_x(x,y)\cos\alpha+f_y(x,y)\cos\beta$$

$$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\Delta y=\rho\cos\beta)$$

**特别:**

- 当 $l$ 与 $x$ 轴同向 $(\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 $l$ 与 $x$ 轴反向 $(\alpha=\pi,\beta=\frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l}=-\frac{\partial f}{\partial x}$

**例1.** 求函数 $u = x^2 yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

**解:** 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

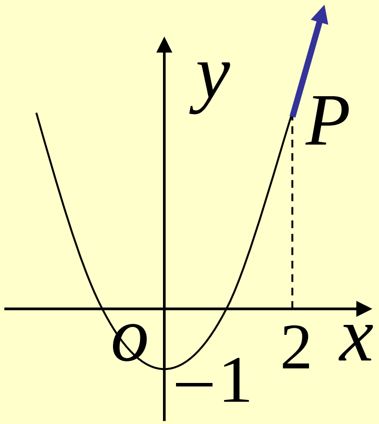
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left( 2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} \right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

**例2. 求函数** $z = 3x^2y - y^2$ 在点$P(2, 3)$沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 $x$ 增大方向的方向导数.

**解:** 将已知曲线用参数方程表示为




$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

它在点 $P$ 的切向量为 $(1, 2x)\big|_{x=2} = (1, 4)$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P = \left.\left[6xy \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + (3x^2 - 2y) \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}\right]\right|_{(2,3)} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

**例3.** 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量, 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点$P$ 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

**解:** $\vec{n}=(4x,6y,2z)\big|_P=2(2,3,1)$

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

而 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

同理得 $$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\sqrt{14}$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\frac{1}{14}\left(6\times2+8\times3-14\times1\right)=\frac{11}{7}$$

## 二、梯度

方向导数公式 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\boxed{\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha\ ,\cos\beta\ ,\cos\gamma)}$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l}^{\,0}=\left|\vec{G}\right|\cos(\vec{G},\vec{l}^{\,0})\quad(\left|\vec{l}^{\,0}\right|=1\ )$$

当$\vec{l}^{\,0}$与$\vec{G}$方向一致时, 方向导数取最大值:

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)=\left|\vec{G}\right|$$

这说明 $\vec{G}:\begin{cases}\text{方向：}f\text{ 变化率最大的方向}\\ \text{模：}f\text{ 的最大变化率之值}\end{cases}$

**1. 定义**

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f(P)$ 在点 $P$ 处的梯度 (gradient), 记作 $\operatorname{grad} f$, 即

$$\operatorname{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

**说明:** 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

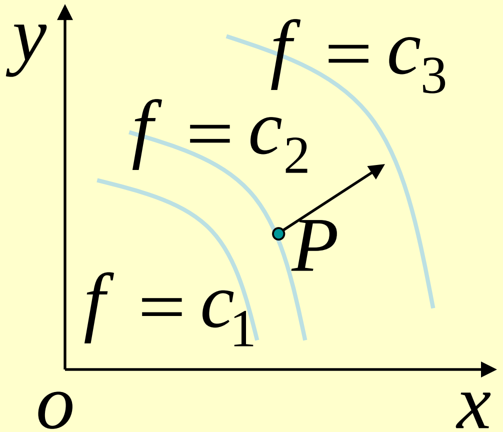
**2. 梯度的几何意义**

对函数 $z=f(x,y)$, 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$ 在 $xoy$ 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ 称为函数 $f$ 的**等值线**.

设 $f_x, f_y$ 不同时为零, 则 $L^*$ 上点 $P$ 处的法向量为

$$(f_x, f_y)\big|_P = \operatorname{grad} f\big|_P$$

同样, 对应函数 $u=f(x,y,z)$, 有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$, 当各偏导数不同时为零时, 其上点 $P$ 处的法向量为 $\operatorname{grad} f\big|_P$.




(设 $c_1<c_2<c_3$)

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线), 指向函数增大的方向.

## 3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

**例4.** 设 $f(r)$ 可导, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模， 试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{r}^{\,0}$.

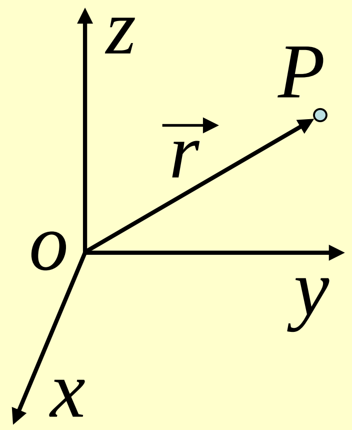
**证:** $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{r}^{\,0}$$



# 三、物理意义

$$\text{函数}\xrightarrow{\qquad\qquad}\text{场}\begin{cases}\textbf{数量场}\ (\text{数性函数}) \\ \quad\text{如: 温度场, 电位场等} \\ \textbf{向量场}(\text{矢性函数}) \end{cases}$$

(物理量的分布)

如: 力场,速度场等

可微函数 $f\,(P)$ $\xrightarrow{\qquad\qquad}$ **梯度场** $\operatorname{grad} f(P)$

( 势 ) (向量场)

**注意:** 任意一个向量场不一定是梯度场.

**例5.** 已知位于坐标原点的点电荷 $q$ 在任意点$P(x,y,z)$处所产生的电位为 $u=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$ $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，试证

$$\operatorname{grad}u=-\vec{E}\qquad (\text{场强 } \vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0})$$

**证:** 利用例4的结果 $\boxed{\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{r}^{\,0}}$

$$\operatorname{grad}u=\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right)'\vec{r}^{\,0}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{r}^{\,0}=-\vec{E}$$

这说明场强: 垂直于等位面,

且指向电位减少的方向.

## 内容小结

### 1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 $l$ (方向角为 $\alpha,\beta,\gamma$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 $l$ (方向角为 $\alpha,\beta$)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

## 2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = ( f_x(x,y) ,\ f_y(x,y))$$

## 3. 关系

- 可微 $\begin{array}{c}\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 方向导数存在 $\begin{array}{c}\not\Longrightarrow\\ \not\Longleftarrow\end{array}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{l}^{\,0}$ 梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.

## 思考与练习

1. 设函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$

(1) 求函数在点 $M$ ( 1, 1, 1 ) 处沿曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在该点切线方向的方向导数;

(2) 求函数在 $M$( 1, 1, 1 ) 处的**梯度**与(1)中**切线方向**的夹角 $\theta$.

2. 求函数 $\boldsymbol{u=x^2+y^2+z^2}$ 在椭球面 $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ 上点 $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0,z_0)}$ 处沿外法线方向的方向导数.

**解答提示:**

1. (1) $f(x,y,z)=x^2+y^z$, 曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2-1 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在点

$M\,(1,1,1)$ 处切线的方向向量

$$\vec{l}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\Bigg|_{t=1}=(1,4,3)$$

函数沿 $\vec{l}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_M=\left[f_x\cdot\cos\alpha+f_y\cdot\cos\beta+f_z\cdot\cos\gamma\right]\Big|_{(1,1,1)}$$

$$=\frac{6}{\sqrt{26}}$$

(2) $\operatorname{grad} f\big|_M = (2, 1, 0)$

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{grad} f\big|_M \cdot \vec{l}}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right| \left|\vec{l}\right|} = \frac{\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_M}{\left|\operatorname{grad} f\big|_M\right|} = \frac{6}{\sqrt{130}}$$

$$\therefore\ \theta = \arccos\frac{6}{\sqrt{130}}$$

2. （答案）

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{M_0} = \frac{2x_0 \cdot \dfrac{2x_0}{a^2} + 2y_0 \cdot \dfrac{2y_0}{b^2} + 2z_0 \cdot \dfrac{2z_0}{c^2}}{2\sqrt{\dfrac{x_0{}^2}{a^4} + \dfrac{y_0{}^2}{b^4} + \dfrac{z_0{}^2}{c^4}}} = \frac{2}{\sqrt{\dfrac{x_0{}^2}{a^4} + \dfrac{y_0{}^2}{b^4} + \dfrac{z_0{}^2}{c^4}}}$$

**练习题1.** 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M = \underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$

**解:** $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 $x$ , $y$ , $z$ 具有轮换对称性

$$= \left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2}\right)\bigg|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1,2,-2)$$

**2.** 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点$A$指向$B(3,-2,2)$方向的方向导数是 $\underline{\ \ 1/2\ \ }$ .

**提示:** $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

## 思考题

讨论函数$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点处的偏导数是否存在？方向导数是否存在？

## 思考题解答

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

同理： $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$

故两个偏导数均不存在.

沿任意方向$\vec{l}=\{x, y, z\}$的方向导数,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1$$

故沿任意方向的方向导数均存在且相等.

# 练 习 题

一、填空题:

1、函数$z = x^2 + y^2$在点$(1,2)$处沿从点$(1,2)$到点$(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数为________________.

2、设$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$，则$gradf(0,0,0) =$______________________.

3、已知场$u(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$，则$u$沿场的梯度方向的方向导数是______________________.

4、称向量场$\vec{a}$为有势场, 是指向量$\vec{a}$与某个函数$u(x,y,z)$的梯度有关系______________________.

二、求函数$z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$在点$(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$处沿曲线

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在这点的内法线方向的方向导数.

三、设$u,v$都是$x,y,z$的函数,$u,v$的各偏导数都存在且连续, 证明: $grad(uv)=vgradu+ugradv$

四、求$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处沿点的向径$r_0$的方向导数, 问$a,b,c$具有什么关系时此方向导数等于梯度的模?

# 练习题答案

一、1、$1+2\sqrt{3}$；  2、$3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$；

3、$\sqrt{(\frac{2x}{a^2})^2+(\frac{2y}{b^2})^2+(\frac{2z}{c^2})^2}=|gradu|$；

4、$\vec{a}=gradu$.

二、$\frac{1}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

四、$\frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M=\frac{2u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$；$a=b=c$.