3.6 空间曲线的曲率与挠率

一、空间曲线

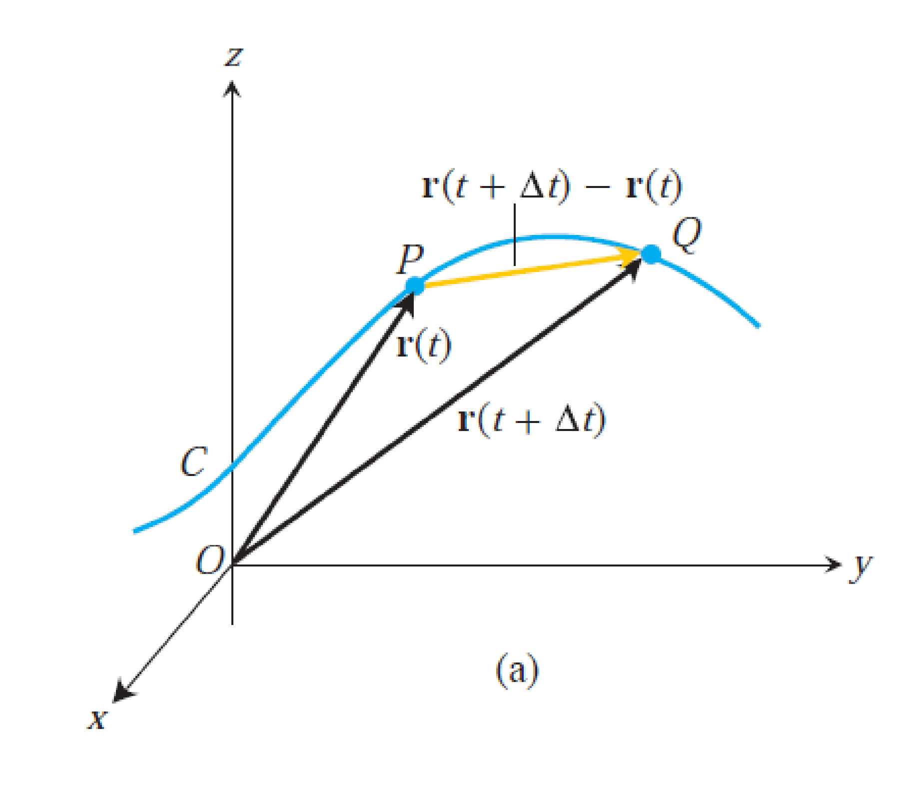
二、Frenet 标架（活动标架）

三、曲率与挠率的定义与计算公式

一、空间曲线

$$C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

或 $$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$



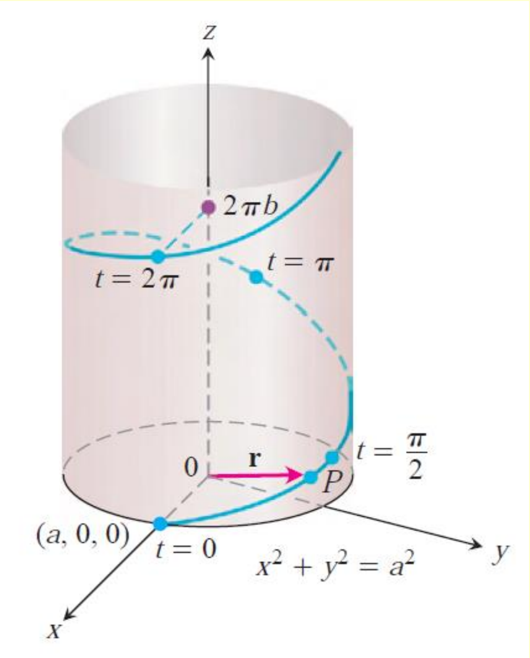
或 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\},\ t\in I$

向量函数 $\vec{r}(t)$ 可视为映射：

$$\vec{r}:t\in I\subset R^1\rightarrow\{x(t),y(t),z(t)\}\in C\subset R^3$$

例1. 螺旋曲线：

$$C:\vec{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}, t\in R$$



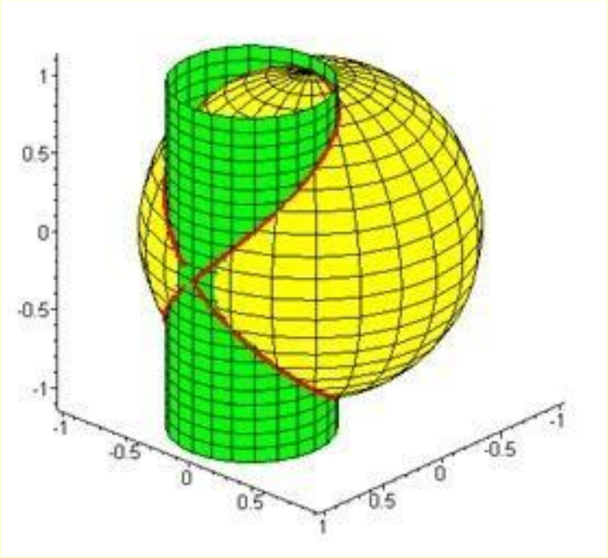
例2. 维维安尼（Viviani）曲线：

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$

或

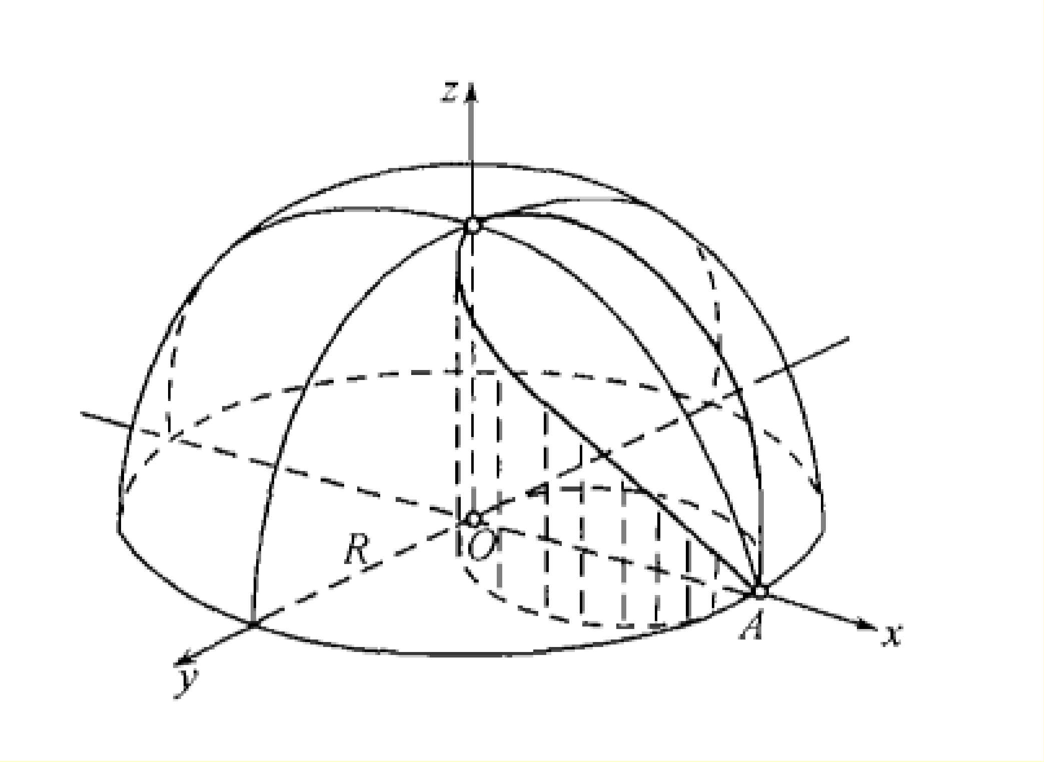
$$C:\vec{r}(t)=\left\{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t, \frac{a}{2}\sin t, a\sin\frac{t}{2}\right\},$$

$t\in[0,2\pi]$

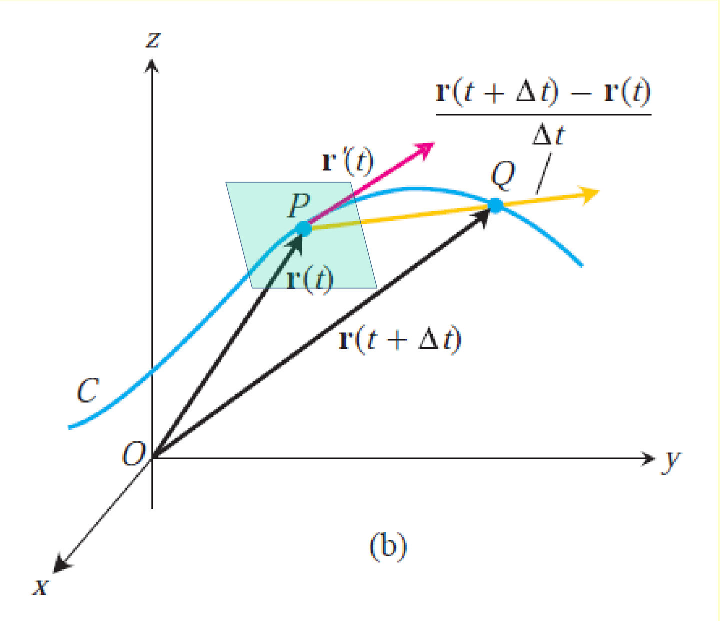


例2. 维维安尼（Viviani）曲线：

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$$



1. 切向量:



$$\vec{r}'(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$$

若 $\vec{r}(t)$在 P_0 （对应于 $t=t_0$的点）处可导，则$\vec{r}'(t_0)$为曲线

在 P_0 处的切线的方向向量（切向量），切线方程为

$$\vec{\rho}=\vec{r}(t_0)+t\,\vec{r}'(t_0),$$

其中 $\vec{\rho}=\{x,y,z\}$ 为切线上动点 $M(x,y,z)$ 的向径.

法平面方程为： $\vec{r}'(t_0)\cdot(\vec{\rho}-\vec{r}(t_0))=0.$

2. 曲线的弧长与弧微分公式：

定理3.5.11（弧长的计算公式） 设在 $[\alpha,\beta]$ 上 $\vec{r}'(t)$ 连续，且 $\vec{r}'(t)\neq 0$，则曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$ 是可求长的，长度为

$$s=\int_\alpha^\beta|\vec{r}'(t)|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

证明：（见Page156-157）.

注1： 曲线 $\vec{r}=\vec{r}(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$ 上从起点 $(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$ 到点 $P(x(t),y(t),z(t))$ 的弧长为：

$$s=s(t)=\int_\alpha^t|\vec{r}'(\tau)|d\tau=\int_\alpha^t\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}d\tau$$

$$ds=|\vec{r}'(t)|dt=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

弧微分公式： $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=(d\vec{r})^2$

注2：当曲线 C 以弧长 s 为参数时，即 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)\ (0\le s\le l)$

$$\dot{\vec{r}}(s)=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\{x'(t),y'(t),z'(t)\}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}$$

$$=\{\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\}$$

$$\Rightarrow\quad |\dot{\vec{r}}(s)|=\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$$

即 $\dot{\vec{r}}(s)$ 是单位切向量，　称 s 为自然参数.

DEFINITIONS Velocity, Direction, Speed, Acceleration

If $\mathbf{r}$ is the position vector of a particle moving along a smooth curve in space, then

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

is the particle's **velocity vector**, tangent to the curve. At any time t, the direction of $\mathbf{v}$ is the **direction of motion**, the magnitude of $\mathbf{v}$ is the particle's **speed**, and the derivative $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, when it exists, is the particle's **acceleration vector**. In summary,

1. Velocity is the derivative of position: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. Speed is the magnitude of velocity: $\text{Speed} = |\mathbf{v}|$.
3. Acceleration is the derivative of velocity: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. The unit vector $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ is the direction of motion at time t.

Differentiation Rules for Vector Functions

Let **u** and **v** be differentiable vector functions of t, **C** a constant vector, c any scalar, and f any differentiable scalar function.

1. *Constant Function Rule:* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$

2. *Scalar Multiple Rules:* $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

3. *Sum Rule:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

4. *Difference Rule:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$

5. *Dot Product Rule:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

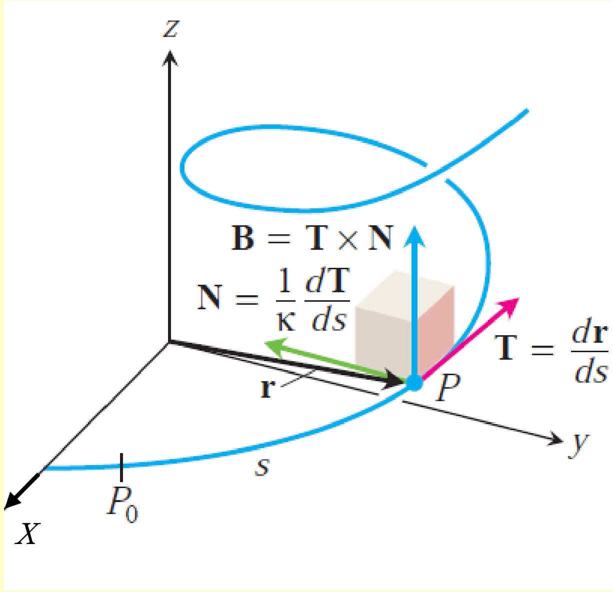
6. *Cross Product Rule:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

7. *Chain Rule:* $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

二、Frenet 标架（活动标架）

$$C:\vec{r}=\vec{r}(s)\,(0\le s\le l)$$

对于曲线上的每一点 ***P***，可取三个互相垂直的方向，构成一个标架.



引理：若 $|\vec{a}(t)|=C$，则 $\vec{a}'(t)\cdot\vec{a}(t)=0$，即 $\vec{a}'(t)\perp\vec{a}(t)$.

证明： $\vec{a}(t)\cdot\vec{a}(t)=|\vec{a}(t)|^2=C^2$，两边对 ***t*** 求导即得.

注：令 $\vec{T}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$，则 $\left|\vec{T}(s)\right|=\left|\dot{\vec{r}}(s)\right|=1$，由引理知

$$\dot{\vec{T}}(s)\perp\vec{T}(s) \quad 或 \quad \ddot{\vec{r}}(s)\perp\dot{\vec{r}}(s)$$

（1）取 $\vec{T}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$

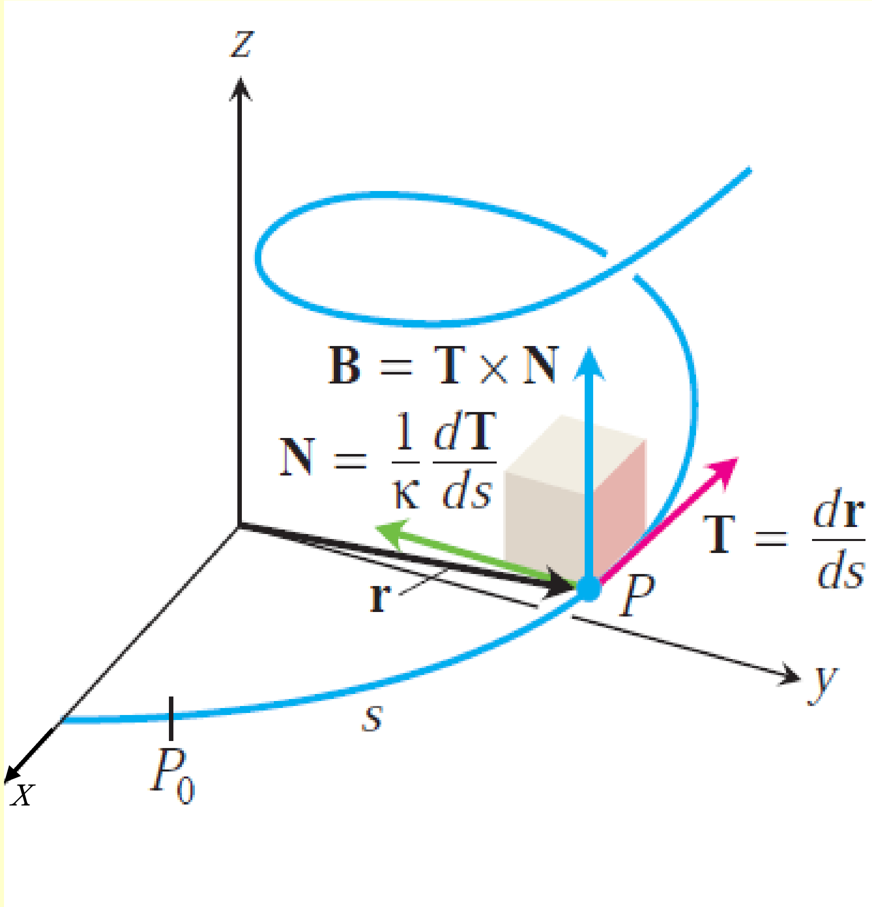
——单位切向量

（2）取 $\vec{N}(s)=\dfrac{\dot{\vec{T}}(s)}{\left|\dot{\vec{T}}(s)\right|}=\dfrac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|}$

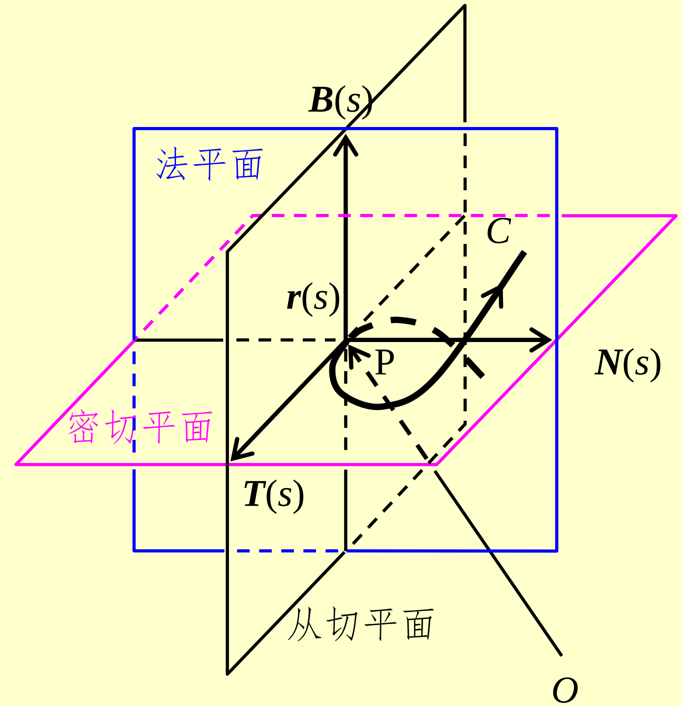
——主法向量

（3）取 $\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times\vec{N}(s)$

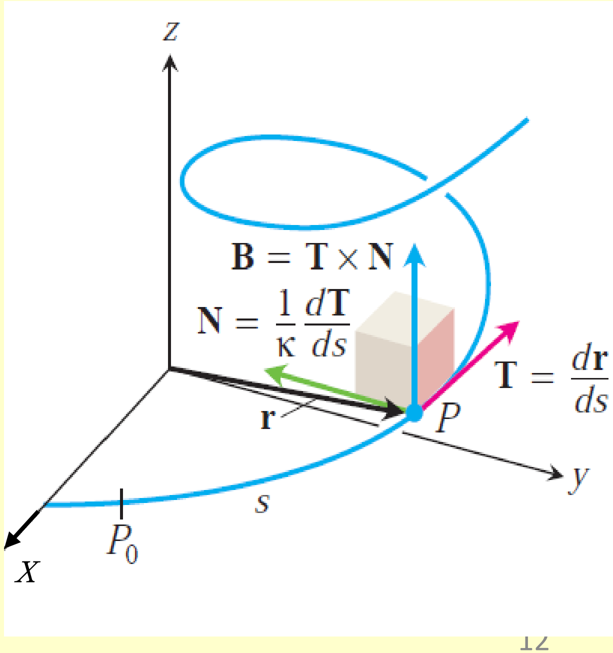
——副法向量



定义：过P点切与 $\vec{T}(s)$ 垂直的平面称为**法平面**；过P点且与 $\vec{B}(s)$ 垂直的平面称为**密切平面**；过P点且与 $\vec{N}(s)$ 垂直的平面称为**从切平面**.

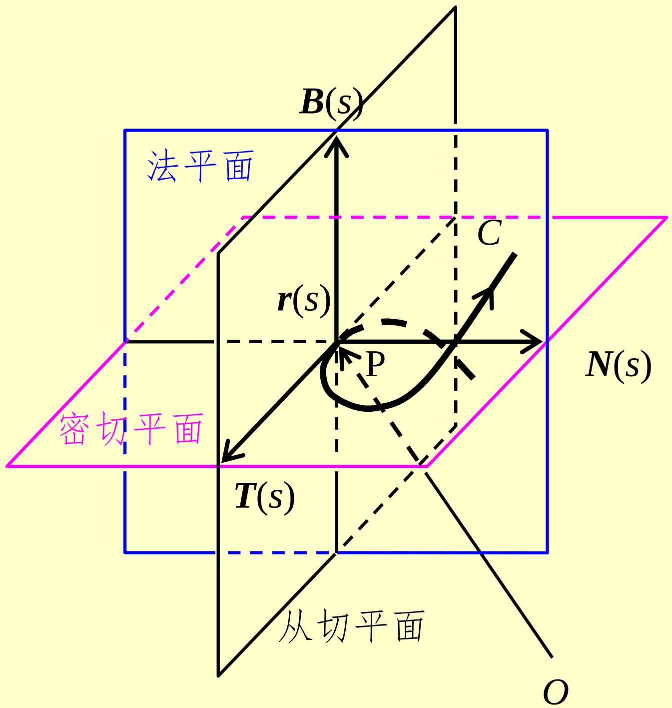


称 $\vec{T}(s)$、$\vec{N}(s)$、$\vec{B}(s)$ 及以上三平面构成的标架为曲线C在P点的活动标架，或 **Frenet标架**，也称为**基本三棱形**.



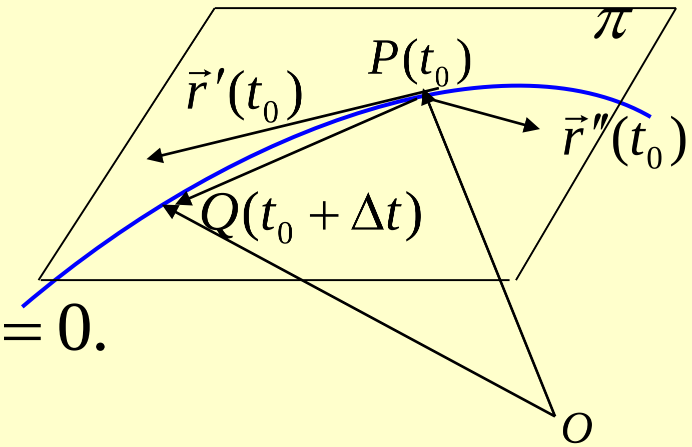
密切平面的性质：

过空间曲线上点P的切线和P点的邻近一点Q可作一平面 π ，当Q点沿着曲线趋于 P 时，平面 π 的极限位置就是曲线在 P 点的密切平面.



密切平面是与曲线最贴近的一个切平面，在讨论曲线的性质是起着很重要的作用.

证明： 曲线**C**：$\vec{r}=\vec{r}(t)$ ，则



$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$$

$$=\vec{r}'(t_0)\Delta t+\tfrac{1}{2}(\vec{r}''(t_0)+\vec{\varepsilon})\Delta t^2 \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\vec{\varepsilon}=0.$$

因为向量 $\vec{r}'(t_0)$和$\overrightarrow{PQ}$ 都在平面 π 上，所以它们的线性组合

$$\frac{2}{\Delta t^2}[\overrightarrow{PQ}-\vec{r}'(t_0)\Delta t]=\vec{r}''(t_0)+\vec{\varepsilon}$$

也在平面 π 上.

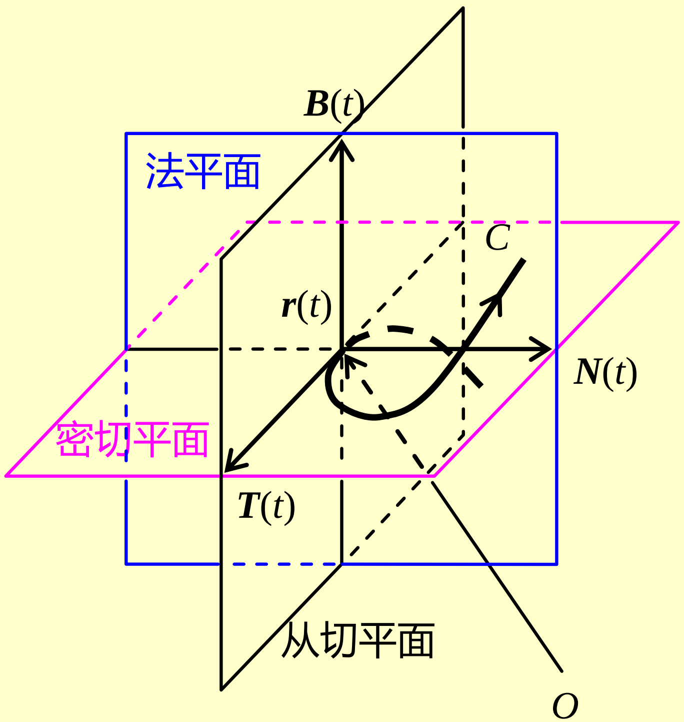
两边取极限得 $\vec{r}''(t_0)$在极限平面上. 故若 $\vec{r}'(t_0)\times\vec{r}''(t_0)\neq 0$ ，

则它是极限平面的一个法向量，又

$$\vec{B}(s)=\vec{T}(s)\times\vec{N}(s)=\dot{\vec{r}}(s)\times\ddot{\vec{r}}(s)/|\ddot{\vec{r}}(s)|//\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$$

所以，该极限平面即 为**P** 点的密切平面.

Frenet 公式 (曲线论的基本公式):



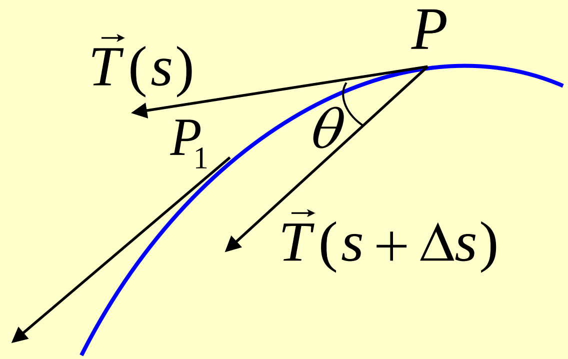
$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

其中， $k(s)$ 为曲线的曲率，刻画了曲线的弯曲程度.

$\tau(s)$ 为曲线的挠率，刻画了曲线的扭转（偏离密切平面）的程度. 曲率和挠率是曲线的内蕴不变量，它们唯一地决定了曲线的形状.

三、曲率与挠率的定义与计算公式

设空间曲线**C**为 C^3 的，且以 **s** 为参数.



曲率的定义：**C** 在 **P**点的曲率定义为

$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

曲率的几何意义是曲线的切向量对于弧长的旋转速度.

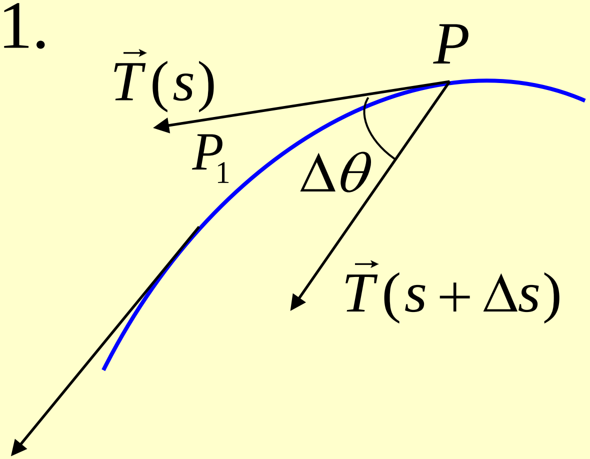
曲率越大，曲线的弯曲程度就越大.

定理：若 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)\,(0\le s\le l)$ ，则 $k(s)=\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|.$

若 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$，则 $k(t)=\dfrac{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3}.$

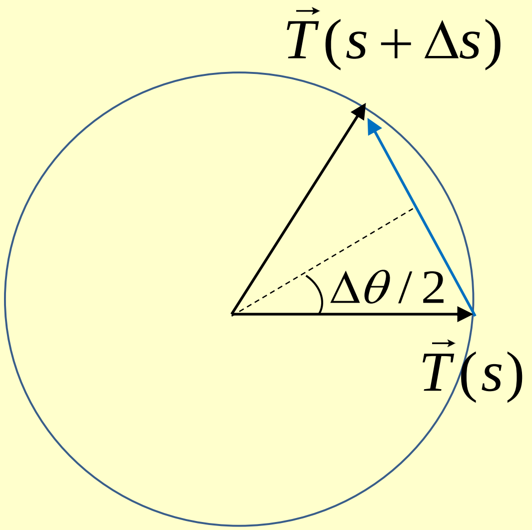
定理：若 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)\,(0\le s\le l)$ ，则 $k(s)=\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|.$

证明：如图，$\vec{T}(s)=\dot{\vec{r}}(s),\left|\vec{T}(s)\right|=\left|\dot{\vec{r}}(s)\right|=1.$



$$\left|\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)\right|=2\sin\frac{\Delta\theta}{2},$$

$$\left|\frac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s}\right|=\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}=\left|\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|,$$

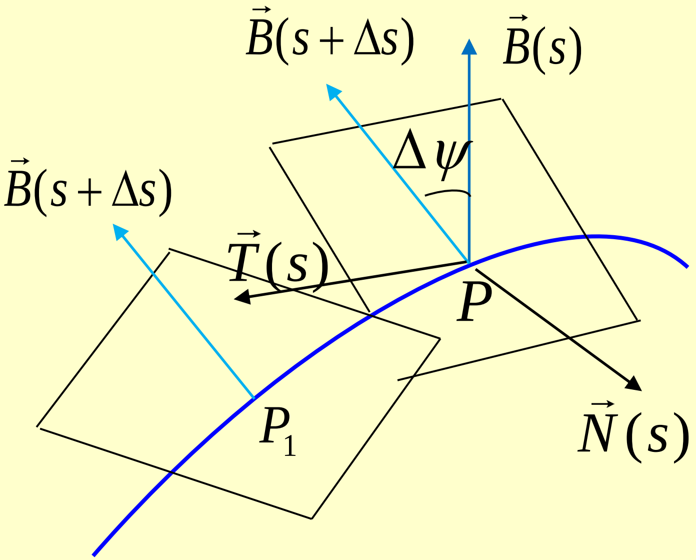


$$k(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\vec{T}(s+\Delta s)-\vec{T}(s)}{\Delta s}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\dot{\vec{r}}(s+\Delta s)-\dot{\vec{r}}(s)}{\Delta s}\right|=\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|.$$

挠率的定义：与曲率类似有

$$\tau(s)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|.$$



挠率的绝对值是曲线的副法向量对于弧长的旋转速度.

定理：若 $C:\vec{r}=\vec{r}(s)\,(0\le s\le l)$ ，则

$$\tau(s)=-\dot{\vec{B}}(s)\cdot\vec{N}(s)=\frac{[\dot{\vec{r}}(s),\ddot{\vec{r}}(s),\dddot{\vec{r}}(s)]}{\left|\ddot{\vec{r}}(s)\right|^2}.$$

若 $C:\vec{r}=\vec{r}(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$，则 $\tau(t)=\dfrac{[\vec{r}'(t),\vec{r}''(t),\vec{r}'''(t)]}{\left|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right|^2}.$

注1： (1) $k \equiv 0 \quad \Leftrightarrow$ 曲线*C*是直线.

(2) $k \equiv \dfrac{1}{a}(a \neq 0) \Leftrightarrow$ 曲线*C*是半径为 *a* 的圆.

(3) $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow$ 曲线*C*是平面曲线.

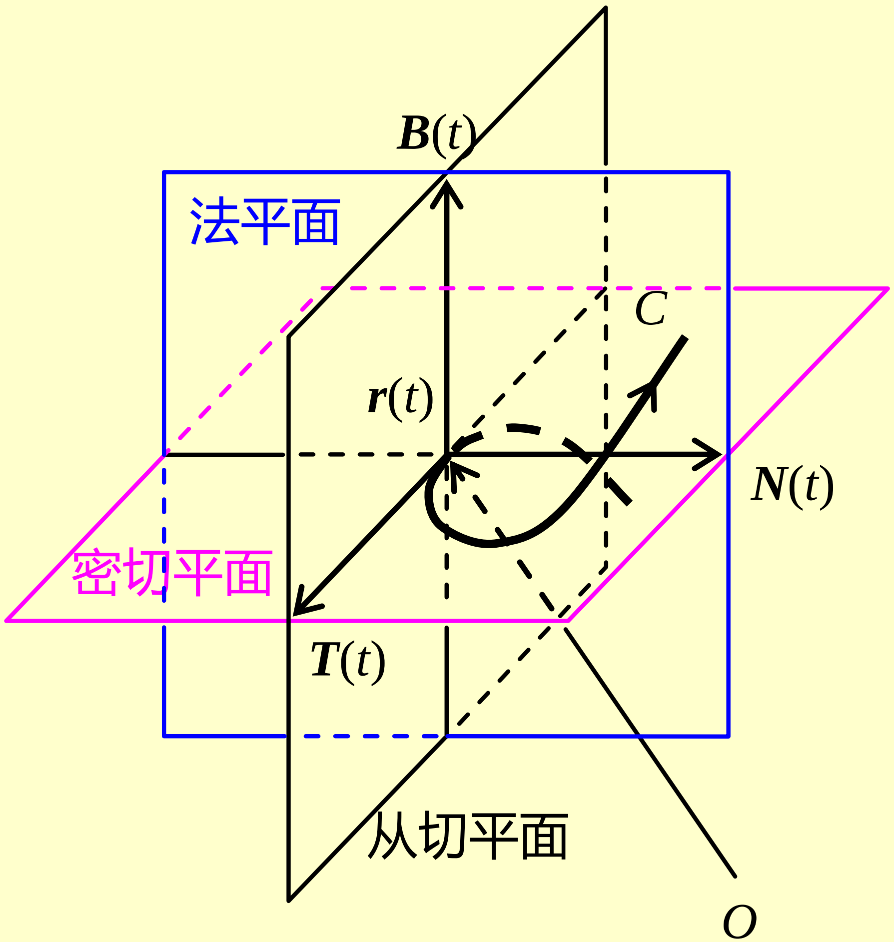
注2： 设曲线 *C* 是平面曲线,

若*C* 是的方程为，$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t)\}$ ，则

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

若*C* 是的方程为，$y = y(x)$ ，则 $k = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$

Frenet 标架



$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

$$k = |\ddot{\vec{r}}(s)| = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)) \cdot \dddot{\vec{r}}(s)}{|\ddot{\vec{r}}(s)|^2}$$

$$= \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2}$$

Formulas for Curves in Space

Unit tangent vector: $$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Principal unit normal vector: $$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$$

Binormal vector: $$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Curvature: $$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$$

Torsion: $$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$$

Tangential and normal scalar components of acceleration:

$$\mathbf{a} = a_{\mathrm{T}}\mathbf{T} + a_{\mathrm{N}}\mathbf{N}$$

$$a_{\mathrm{T}} = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}|$$

$$a_{\mathrm{N}} = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_{\mathrm{T}}^2}$$

【例1 】 分别求椭圆 $C: \boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, b\sin t, 0\}$ $(a>b>0)$ 在长轴上顶点 $A(a,0,0)$ 及短轴上顶点 $B(0,b,0)$ 处的曲率和挠率.

【解】 注意到点 A 和点 B 对应的参数值分别为 $t=0$, $t=\pi/2$, 直接计算得到

$$|\boldsymbol{r}'(0)|=b, \quad |\boldsymbol{r}'(\pi/2)|=a,$$

$$|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=ab,$$

于是 A 点处的曲率 $k_A=\frac{ab}{b^3}$, B 点处的曲率 $k_B=\frac{ab}{a^3}$, 显然 $k_A>k_B$, 这正说明椭圆 C 在长轴顶点处的弯曲程度比 C 在短轴顶点处的弯曲程度高, 换句话说, 椭圆 C 在短轴顶点邻近比长轴顶点邻近平坦.

至于挠率, 因为曲线 C 是平面曲线, 其挠率处处为 0.

特别地, 若 $a=b$, 即 C 是圆, 这时, 容易验证圆上每一点处的曲率都相等, 且等于半径的倒数, 这一方面表明圆在其上每一点处的弯曲程度都相同, 同时也表明半径愈大, 弯曲程度愈小. 这些事实的几何直观是不言而语的. ■

【例2 】 求圆柱螺线$\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$的曲率和挠率, 这里$a,b>0$.

【解】 直接计算得到

$$|\boldsymbol{r}'|=\sqrt{a^2+b^2},\quad |\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|=a\sqrt{a^2+b^2},\quad (\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')=a^2b,$$

代入曲率和挠率的计算公式立即得

$$k=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad \tau=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

由此可见圆柱螺线的曲率和挠率均为常数, 今后将证明其逆命题也成立, 即曲率和挠率均为非零常数的曲线一定是圆柱螺线. ■

【例3 】 求曲线$\boldsymbol{r}(t)=\{\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t\}$的曲率和挠率，这里$0<t<\pi/2$.

【解】 直接计算得到$|\boldsymbol{r}'(t)|=\frac{5}{2}\sin 2t$，可见$t$不是弧长参数，所以将$\boldsymbol{r}'(t)$单位化后得到

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{r}'(t)/|\boldsymbol{r}'(t)|=\{-\frac{3}{5}\cos t,\frac{3}{5}\sin t,-\frac{4}{5}\},$$

而

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|}=\frac{\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}\frac{dt}{ds}}{|\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}\frac{dt}{ds}|}=\{\sin t,\cos t,0\},$$

所以

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\{\frac{4}{5}\cos t,-\frac{4}{5}\sin t,-\frac{3}{5}\}.$$

于是曲线的曲率

$$k=\left|\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{ds}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right|=\frac{\left|\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}\right|}{\left|\frac{dr}{dt}\right|}=\frac{6}{25\sin 2t}.$$

为了计算挠率，由定义$\tau=-\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}\cdot\boldsymbol{\beta}$，而$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$，故

$$\tau=-\frac{\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|}.$$

简单计算得曲线的挠率

$$\tau=\frac{8}{25\sin 2t}.$$

【例6 】　将圆柱螺线 $\boldsymbol{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 化为自然参数表示.

【解】　因为 $\boldsymbol{r}'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$，所以圆柱螺线从 $t=0$ 起计算的弧长为

$$s(t)=\int_0^t |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\ t,$$

因此我们有 $t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 则用弧长 s 作参数, 圆柱螺线的自然参数方程为

$$\boldsymbol{r}(s)=\{a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\}.$$