3.2 偏导数与全微分

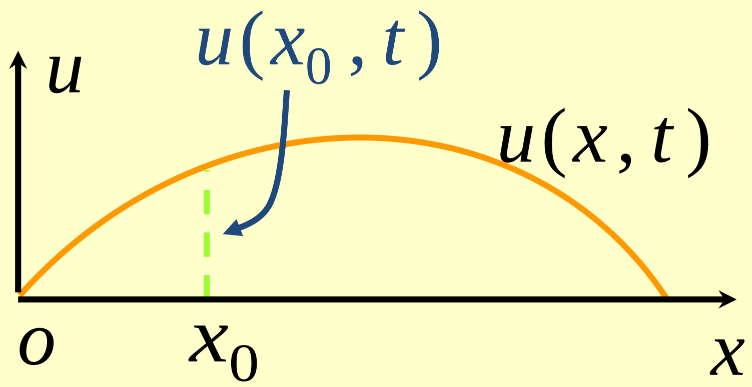
3.2.1 偏导数

3.2.2 全微分

3.2.3 高阶偏导数与高阶全微分

3.2.1 偏导数

引例: 研究弦在点 x_0 处的振动速度与加速度，就是将振幅 $u(x,t)$ 中的 x 固定于 x_0 处, 求 $u(x_0,t)$ 关于 t 的一阶导数与二阶导数.



定义3.2.1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x

的偏导数，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $z_x\big|_{(x_0,y_0)}$；

$f_x(x_0,y_0)$； $f_1'(x_0,y_0)$.

注意: $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数, 也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x,y),\ f_1'(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x,y),\ f_2'(x,y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数 .

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x,y,z) = ?$$

例1. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1 , 2) 处的偏导数.

解法1: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

解法2: $z\big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\ 2)} = (2x+6)\big|_{x=1} = 8$$

$$z\big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\ 2)} = (3+2y)\big|_{y=2} = 7$$

例2. 设 $z = x^y\ (x > 0,$ 且 $x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证: $\because\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore\ \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例3. 求 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的偏导数.

解: $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

例4. 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$ (R 为常数),

求证: $\dfrac{\partial p}{\partial V} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial T} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$

证: $p = \dfrac{RT}{V}$, $\quad \dfrac{\partial p}{\partial V} = -\dfrac{RT}{V^2}$

$V = \dfrac{RT}{p}$, $\quad \dfrac{\partial V}{\partial T} = \dfrac{R}{p}$

$T = \dfrac{pV}{R}$, $\quad \dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{V}{R}$

$$\therefore \ \frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1$$

说明: 此例表明,
偏导数记号是一个
整体记号, 不能看作
分子与分母的商!

有关偏导数的几点说明：

1) 偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号，不能拆分;

2) 求分界点、不连续点处的偏导数要用定义;

例: 设$z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, 求$f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$.

解
$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot \Delta y|} - 0}{\Delta y} = 0$$

3) 偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导 $\longrightarrow$ 连续

多元函数中在某点偏导数存在 $\xrightarrow{?}$ 连续

例如,函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$

依定义知在(0,0)处，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0.$

但函数在该点处并不连续.

偏导数存在 $\not\longrightarrow$ 连续

例5 讨论 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时是否存在极限.（注: 本题结论很重要, 以后常会用到.）

解 当动点 (x,y) 沿着直线 $y=mx$ 而趋于定点 $(0,0)$ 时，由于 $f(x,y)=f(x,mx)=\dfrac{m}{1+m^2}$，因此有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\frac{m}{1+m^2}.$$

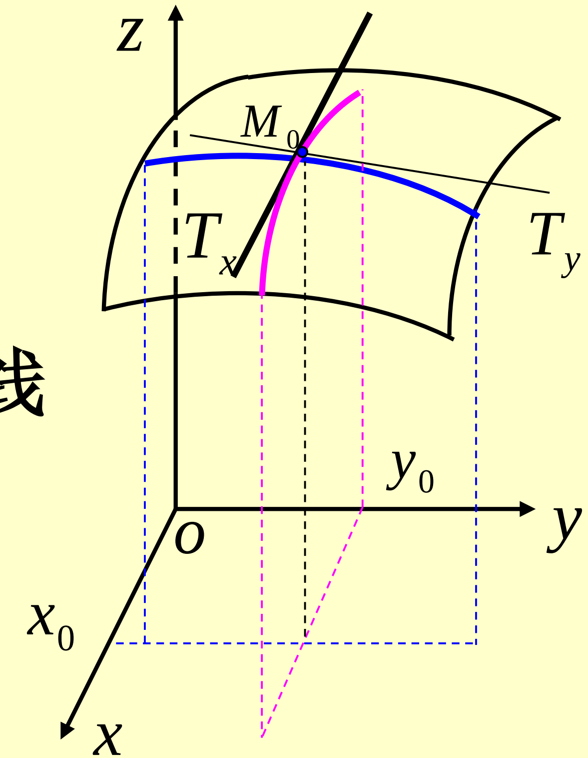
这说明动点沿不同斜率 m 的直线趋于原点时, 对应的极限值不相同，因而所讨论的极限不存在.

二元函数偏导数的几何意义:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线

M_0T_x 对 x 轴的斜率.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0}$$

是曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$ 在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

3.2.2 全微分

回顾：一元函数的微分

$y=f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微, 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}y$， 即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

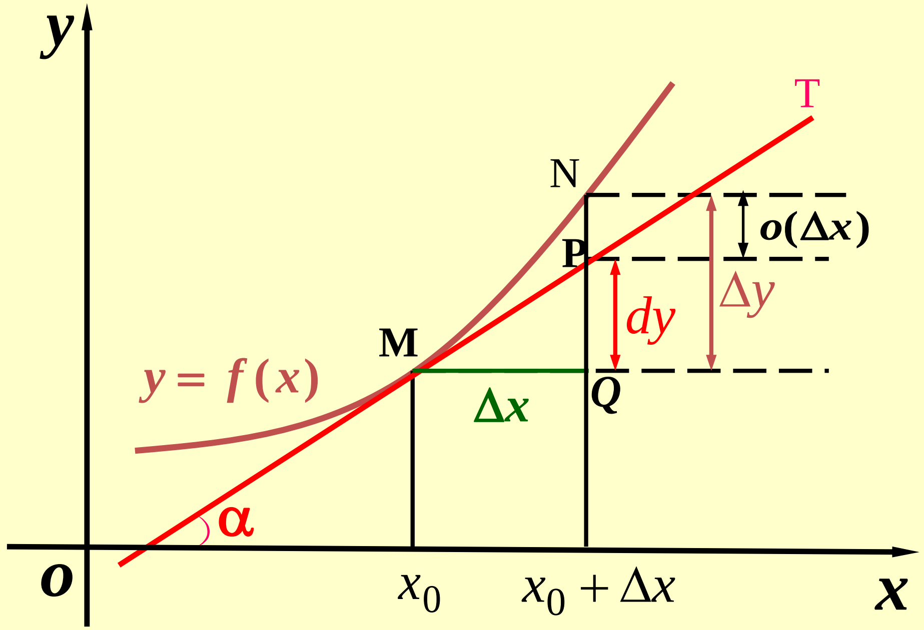
结论: 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A=f'(x_0)$， 即

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

微分的几何意义 —— 切线上纵坐标的增量

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

当 Δx 很小时, $\Delta y \approx \mathrm{d}y$



当 $y = x$ 时,

$$\Delta y = \Delta x \overset{\text{记}}{=} \mathrm{d}x$$

称 Δx 为自变量的微分,

记作 $\mathrm{d}x$, 有 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$

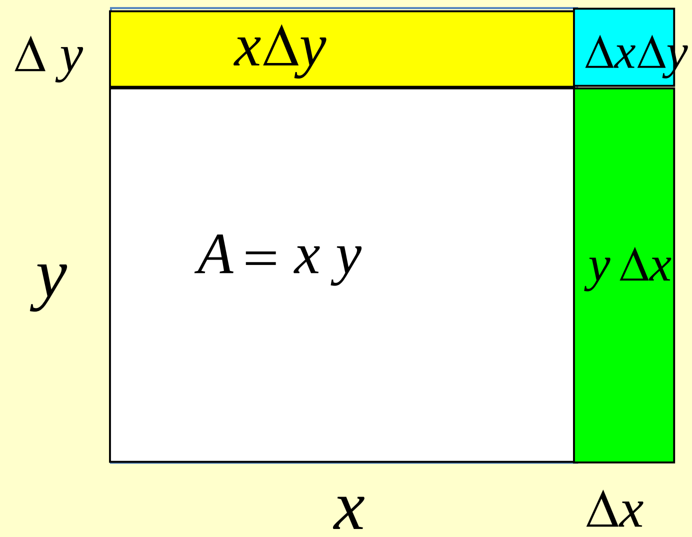
导数也叫作微商

引例: 一块长方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长分别由 x, y 变到 $x+\Delta x, y+\Delta y$, 问其面积改变了多少?

面积 $A = x\,y$, 面积的增量为

$$\Delta A = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - x\,y$$

$$= \underbrace{y\Delta x + x\Delta y}_{\text{线性部分}} + \underbrace{\Delta x\Delta y}_{\text{高阶部分}}$$



$$\Delta A \approx \underline{y\Delta x + x\Delta y}$$

称为函数在 (x, y) 处的微分

全微分的定义：

如果函数 $z = f(x, y)$ 在定义域 D 的内点 (x, y) 处全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ 可表示成

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 Δx, Δy, 仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

$f(x,y)$ 在 (x,y) 可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z - [A\Delta x + B\Delta y]}{\rho} = 0$

问题：$f(x,y)$在什么条件下可微？

$f(x,y)$可微时，A、B代表什么？

如何计算全微分dz？

可微性与连续性、偏导数有什么关系？

注1： 由微分定义：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho)\right] = 0$$

得 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y)$$

即 **函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微 $\Longrightarrow$ 函数在该点连续**

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 函数可微

定理3.2.6 (可微的必要条件):

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 令 $\Delta y=0$, 得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, 因此有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微，则在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且有 $\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

习惯上把自变量的增量用微分表示，则

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都可微，则称 $f(x,y)$ 在 D 内可微，或称 $f(x,y)$ 为 D 内的可微函数.

注2：定理3.2.6 的条件是必要的，其逆定理不成立 .

即：偏导数存在函数 不一定可微 ！

例6：设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

证明：(1) $f(x, y)$ 在 (0, 0) 处的偏导数存在；

(2) $f(x, y)$ 在 (0, 0) 处不可微分.

证明：(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$

同理 $f_y(0,0)=0$.

例6. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

证明: (2) 因为

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\rho\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\quad \nexists$$

(例5，令$\Delta y = k\,\Delta x\to 0$)

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]\neq o(\rho)\quad(\rho\to 0)$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微 .

定理3.2.8 (充分条件)： 若函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微分.

证：$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)]$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$\boxed{(0<\theta_1, \theta_2<1)}$$

$$= [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0\right)$$

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= [f_x(x, y) + \alpha]\Delta x + [f_y(x, y) + \beta]\Delta y$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0\right)$$

注意到 $\left|\dfrac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho}\right| \le |\alpha| + |\beta|$，故有

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

注3： 定理3.2 .8的条件也是充分的，其逆定理不成立 .

即: 偏导数连续只是可微的充分条件, 不是必要条件.

例7. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

证明：（1）$f(x,y)$在点 (0,0) 连续且偏导数存在；

（2）$f(x,y)$ 的偏导函数在点 (0,0) 不连续；

（3） $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

证明：（1）$f(x,y)$ 在点 (0,0) 连续且偏导数存在；

证: 1) 因 $\left| xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |\, xy \,| \to 0 (x \to 0, y \to 0)$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$

故函数在点 (0, 0) 连续 ;

$\because\ f(x,0)\equiv 0,\ \therefore\ f_x(0,0)=0$; **同理** $f_y(0,0)=0.$

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

证明：（2）$f(x,y)$ 的偏导函数在点 (0,0) 不连续；

证：(2) $f_x(0,0)=0$,

当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点$P(x,y)$沿射线$y=|x|$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(|x|\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$$

极限不存在， $\therefore f_x(x,y)$ **在点(0,0)不连续；**

同理， $f_y(x,y)$ **在点(0,0)也不连续.**

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

证明: (3) $f(x,y)$ 在点(0,0)可微 :

证: 令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\leq|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to 0}0$$

$\therefore f(x,y)$ 在点(0,0)可微 .

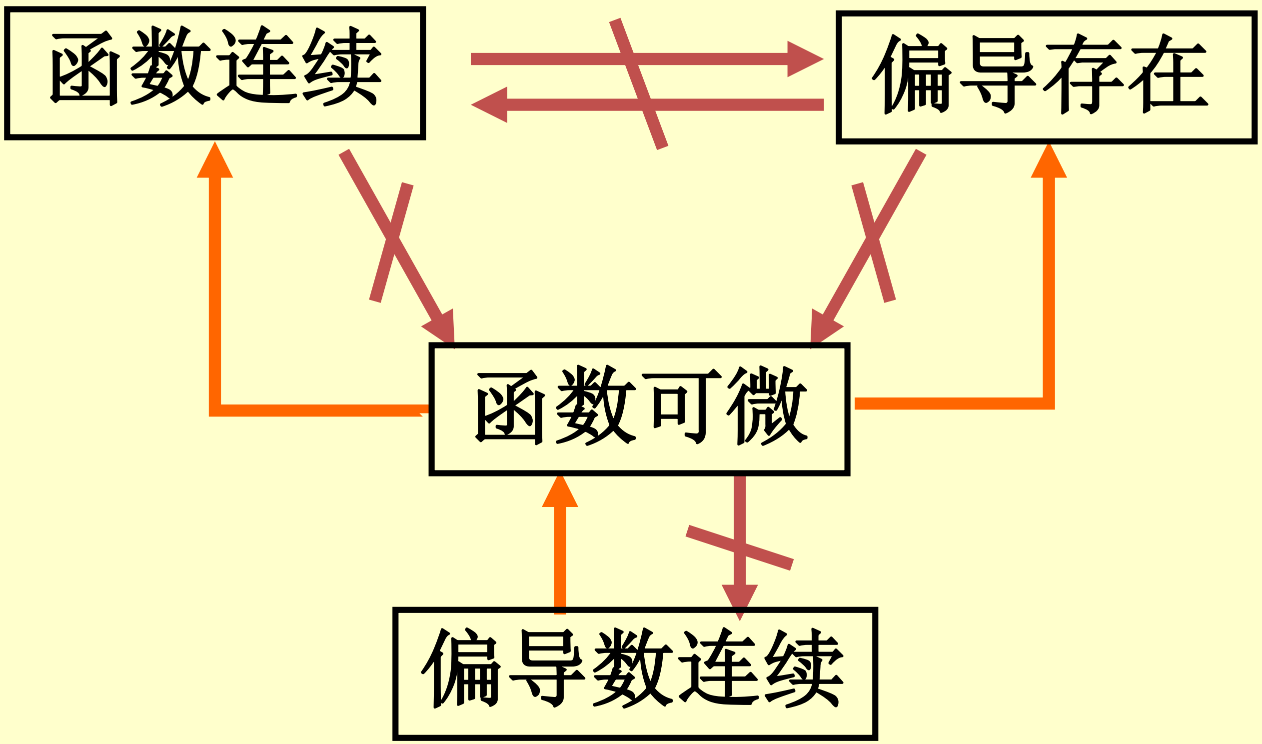
说明: 此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.

定理3.2.8 (充分条件): 若函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微分.

问：定理3.2.8 的条件是否太强？可否减弱？

定理： 若函数 $u = f(x,y,z)$ 的偏导数在点 (x,y,z) 的某邻域内均存在，且至多有一个在点 (x,y,z) 不连续，则函数在该点可微分.

多元函数连续、可导、可微的关系：



推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

$$\mathrm{d}u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}_{\text{记作 } \mathrm{d}_x u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}_y u} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}_z u}$$

$\mathrm{d}_x u, \mathrm{d}_y u, \mathrm{d}_z u$ 称为偏微分. 故有下述叠加原理

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}_x u + \mathrm{d}_y u + \mathrm{d}_z u$$

n元： $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad du = ?$

例8. 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

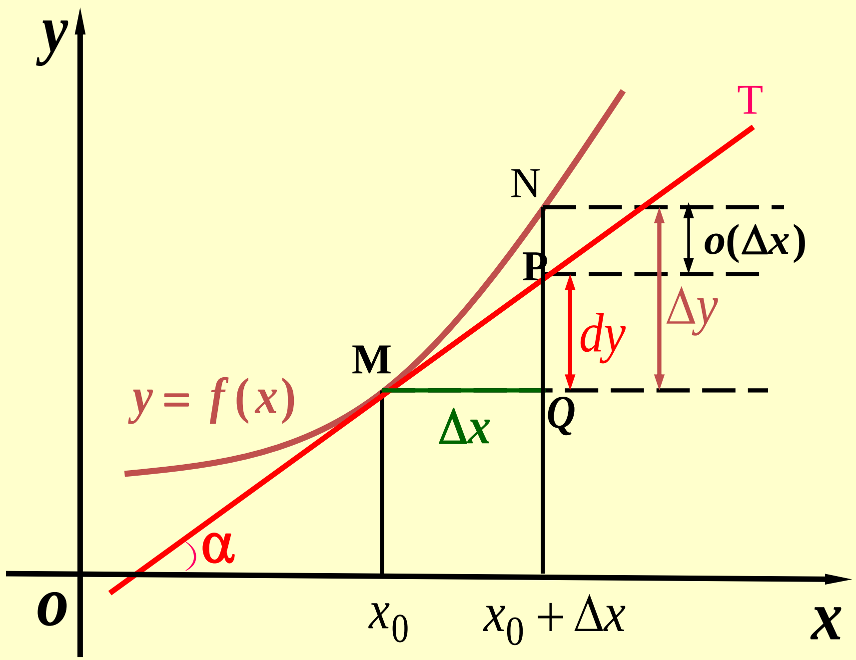
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$$

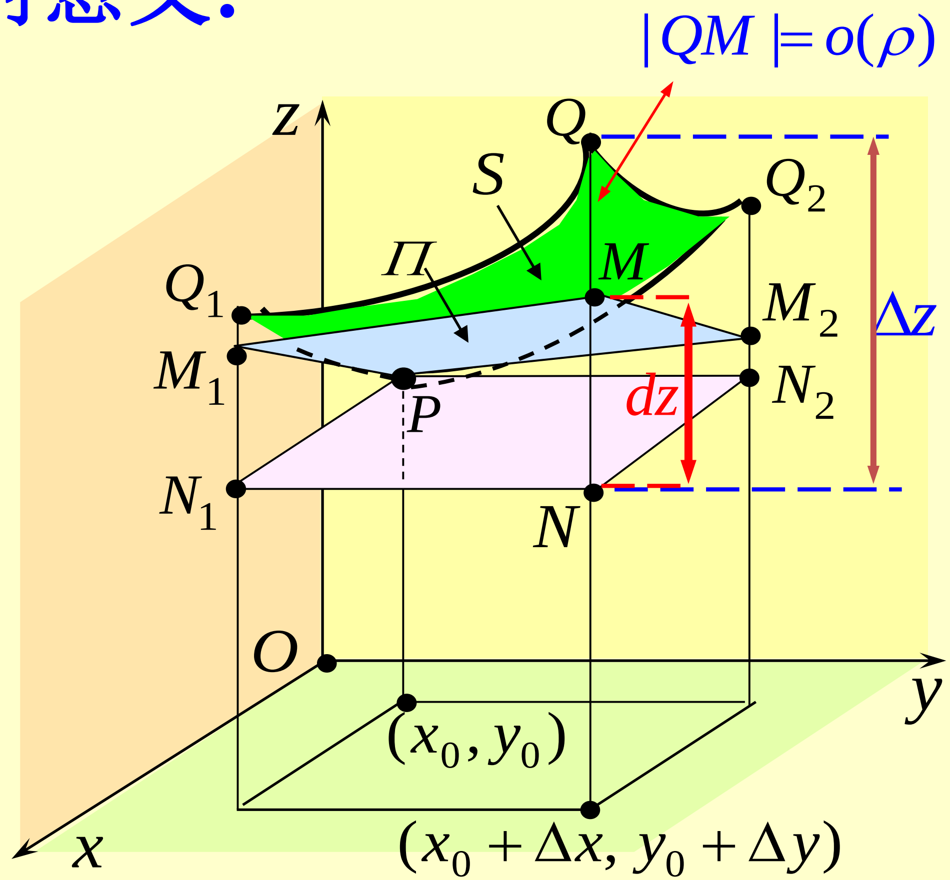
$$\therefore\quad \left.\mathrm{d}z\right|_{(2,1)}=e^2\,\mathrm{d}x+2e^2\,\mathrm{d}y=e^2(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$$

例9. 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}u=1\cdot\mathrm{d}x+(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\ )\mathrm{d}y+ye^{yz}\,\mathrm{d}z$

二元函数全微分的几何意义:





切平面 $\boldsymbol{z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$

$$\mathbf{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y=|MN|$$

全微分在近似计算中的应用

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例10. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$, 则

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

3.2.3 高阶偏导数

设 $z = f(x, y)$在域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z = f(x, y)$的二阶偏导数．按求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z = f(x, y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z = f(x, y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial y \partial x^{n-1}}$$

例11. 求函数 $z=e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

解：$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+2y}}$ $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=2e^{x+2y}}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)=2e^{x+2y}$$

注意:此处 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 但这一结论并不总成立.

例如，$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(0,0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1 \\ f_{yx}(0,0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \end{aligned}\right\}\text{二者不等}$$

定理3.2.18 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0,y_0) 连续，

则 $$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

证 令

$$F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)$$

$$-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0),$$

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0).$$

于是有 $$F(\Delta x,\Delta y)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0). \qquad (1)$$

对 φ 应用微分中值定理，$\exists\,\theta_1\in(0,1)$，使得

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x$$

$$=[\, f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)- f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\,]\Delta x.$$

又 $f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y)$ 作为 y 的可导函数, 再使用微分中值定理，$\exists\,\theta_2\in(0,1)$, 使上式化为

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)= f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y.$$

由 (1) 则有

$$F(\Delta x,\Delta y)= f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \qquad (0<\theta_1,\theta_2<1). \qquad (2)$$

再令 $\psi(x)= f(x_0+\Delta x, y)- f(x_0, y),$

$$\psi(x) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

则有 $$F(\Delta x, \Delta y) = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0).$$

用前面相同的方法，又可得到

$$F(\Delta x, \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y$$

$$(0 < \theta_3, \theta_4 < 1). \qquad (3)$$

当 $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$ ，由(2)、(3)两式得

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y)$$

$$(0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 < 1). \qquad (4)$$

令 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ ，即有

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

定理3.2.18对 n 元函数的高阶混合偏导数也成立.

例如, 对三元函数 $u=f(x,y,z)$, 当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时, 有

$$f_{xyz}(x,y,z)=f_{yzx}(x,y,z)=f_{zxy}(x,y,z)$$
$$=f_{xzy}(x,y,z)=f_{yxz}(x,y,z)=f_{zyx}(x,y,z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数 , 而初等函数在其定义区域内是连续的 , 故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

例12. 证明函数 $u=\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证：$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

利用对称性，有 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\underbrace{\boxed{x^2+y^2+z^2}}_{=r^2})}{r^5}=0$$

高阶全微分

设 $z = f(x, y)$ 在D上可微，则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x dx + f_y dy$$

若 f_x, f_y也在D上可微，视dx, dy为与x, y无关的常量，则 dz 可微, 称dz的微分为z的二阶微分, 记为 d^2z .

$$d^2z = d(dz) = d(f_x dx + f_y dy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy$$

$$= f_{xx}(dx)^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{xy}(dy)^2 \overset{\Delta}{=} (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 f$$

一般地，可定义 n 阶微分：

$$d^n z = d(d^{n-1} z),\ n = 2, 3, \cdots$$

由归纳法可得：

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial^{n-k} x \partial^k y} (dx)^{n-k} (dy)^k$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f, \qquad n \in N_+$$

问题：(1) n 阶微分是否有形式的不变性？

(2) n 元函数的高阶微分的表达式是什么？

例9. 设 $f(x,y)=x^2e^y$，求 d^3f.

解： $d^3f=(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy)^3f$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

$$=6e^ydx^2dy+6xe^ydxdy^2+x^2e^ydy^3.$$

内容小结:

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases} \text{先代后求} \\ \text{先求后代} \\ \text{利用定义} \end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

练习题

1. 选择题

函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件是(D)

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续;

(B) $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内存在;

(C) $\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量;

(D) $\dfrac{\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$ 时是无穷小量.

2. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在，但偏导数在点 (0,0) 不连续，而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

练 习 题

一、填空题:

1、设$z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$, 则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________;$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

2、设$z=e^{xy}(x+y)$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$__________;$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

3、设$u=x^{\frac{y}{z}}$,则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=$__________;$\dfrac{\partial u}{\partial y}=$__________;

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=$__________.

4、设$z=\arctan\dfrac{y}{x}$,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$__________;$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$__________;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

5、设$u=(\frac{x}{y})^z$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=$____________.

二、求下列函数的偏导数：

1、$z=(1+xy)^y$；

2、$u=\arctan(x-y)^z$.

三、曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$，在点$(2,4,5)$处的切线与正向轴所成的倾角是多少？

四、设$z=y^x$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

五、设$z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$和$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

六、验证:

1、$z = e^{-(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$, 满足 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$;

2、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{z}{r}.$$

七、设

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan\frac{y}{x} - y^2 \arctan\frac{x}{y}, xy \neq 0 \\ 0, xy = 0 \end{cases}$$

求 f_x, f_{xy}.

练习题答案

一、1、$\frac{2}{y}\csc\frac{2x}{y}, -\frac{2x}{y^2}\csc\frac{2x}{y}$；

2、$e^{xy}(xy+y^2+1), e^{xy}(xy+x^2+1)$；

3、$\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x, \quad -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$；

4、$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$；

5、$-(\frac{x}{y})^z(\frac{1}{y}+\frac{z}{y}\ln\frac{x}{y})$.

二、1、

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right];$$

2、$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$.

三、$\dfrac{\pi}{4}$.

四、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$.

五、$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=-\dfrac{1}{y^2}$.

七、 $$f_x=\begin{cases}2x\arctan\dfrac{y}{x}-y, xy\neq 0\\ -y, x=0, y\neq 0\\ 0, x=y=0; x\neq 0, y=0\end{cases},$$

$$f_{xy}=\begin{cases}-1, x=0\\ \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, xy\neq 0.\\ 1, x\neq 0, y=0\end{cases}$$