2.2 平面与直线

一、平面的方程

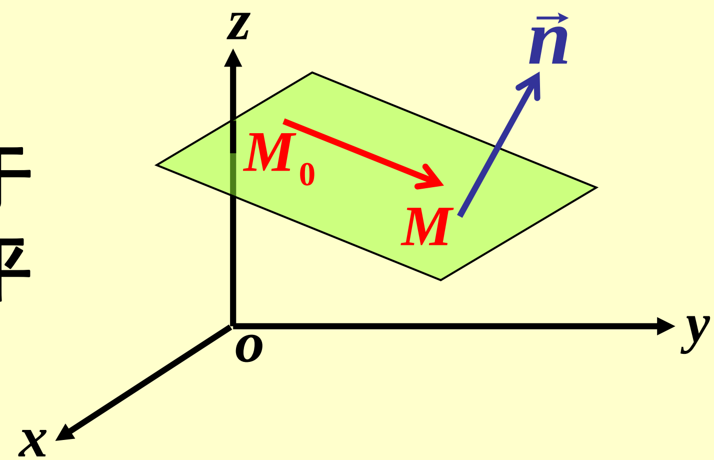
二、直线的方程

三、平面与直线的基本问题

四、平面束

一、平面的方程

1. 点法式方程

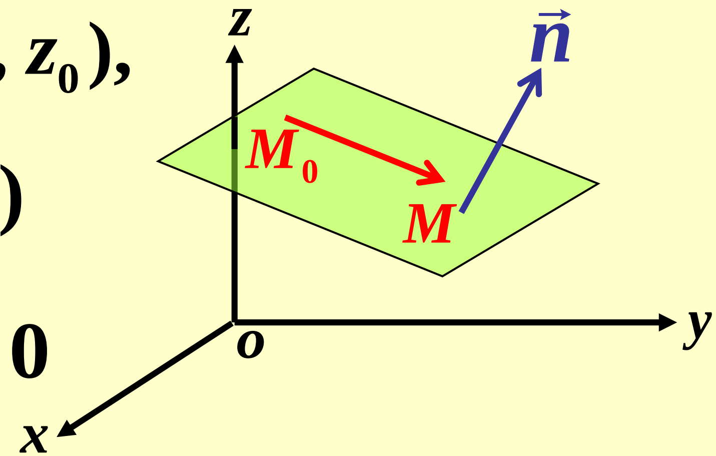


如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法向量.

法向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

当已知平面上的一点和平面的一个法向量就可以完全确定一个平面的位置.

已知 $\vec{n}=\{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$,



设平面上的任一点为 $M(x, y, z)$

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

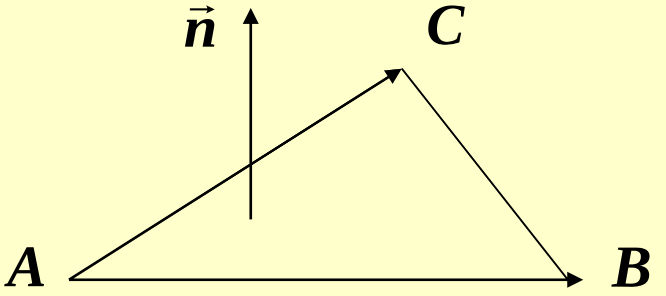
$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$

$$\therefore \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

——平面的点法式方程

其中法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=\{-3,4,-6\}$

$\overrightarrow{AC}=\{-2,3,-1\}$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{14,9,-1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0$.

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$ —— 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=\{1,-1,1\}$, $\vec{n}_2=\{3,2,-12\}$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{10,15,5\}$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

平面一般方程的几种特殊情况

(1) $D=0$, $\Rightarrow Ax+By+Cz=0$ 平面通过坐标原点;

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \Rightarrow By+Cz=0 \\ D\neq 0, & \Rightarrow By+Cz+D=0 \end{cases}$

$D=0$：平面通过 x 轴

$D\neq 0$：平面平行于 x 轴

类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

(3) $A=B=0$, $\Rightarrow Cz+D=0$ 平面平行于xoy坐标面

类似地可讨论 $A=C=0$, $B=C=0$ 情形.

例 3 设平面过 x 轴及点$(4,-3,-1)$，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过X轴知 $A=0, D=0$,

$$\Rightarrow By+Cz=0,$$

由平面过点$(4,-3,-1)$知 $-3B-C=0$

$$\Rightarrow B=-\frac{1}{3}C,$$

所求平面方程为 $y-3z=0$.

待定系数法

例 4 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0,$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $6A-3B+2C=0,$

$\because \vec{n}\perp\{4,-1,2\}, \quad \therefore\ 4A-B+2C=0$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

3.平面的截距式方程

例 5 设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将 $A=-\dfrac{D}{a}$， $B=-\dfrac{D}{b}$， $C=-\dfrac{D}{c}$，

代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ ——平面的截距式方程

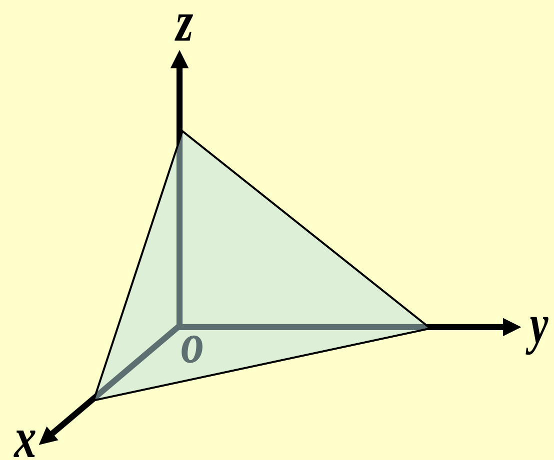
x 轴上截距　y 轴上截距　z 轴上截距

4. 三点式方程:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

例 6 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1,$



$\because V = 1, \quad \therefore \left| \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} abc \right| = 1,$

由所求平面与已知平面平行得

（向量平行的充要条件） $\dfrac{1/a}{6} = \dfrac{1/b}{1} = \dfrac{1/c}{6},$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$， 令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\left|\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right|\quad\Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm 1,\quad b=\pm 6,\quad c=\pm 1,$$

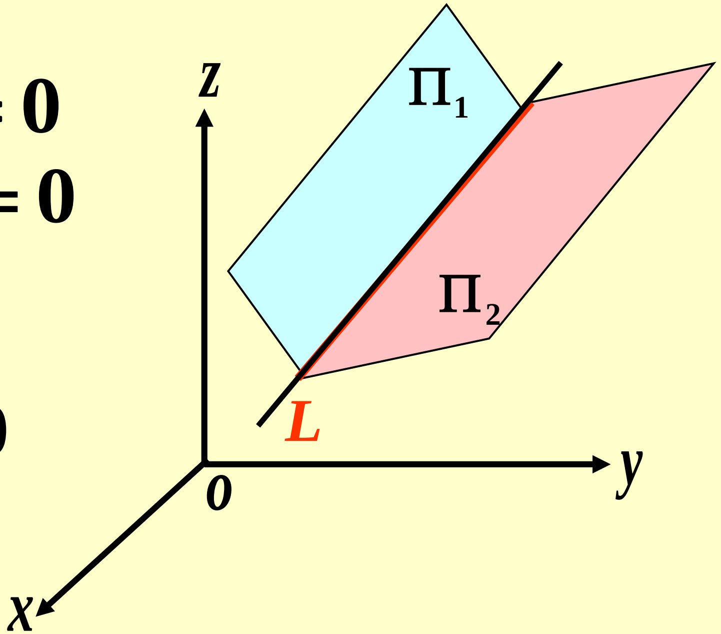
所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm 6$

二、直线的方程

1. 一般式方程

定义 **空间直线可看成两平面的交线.**

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

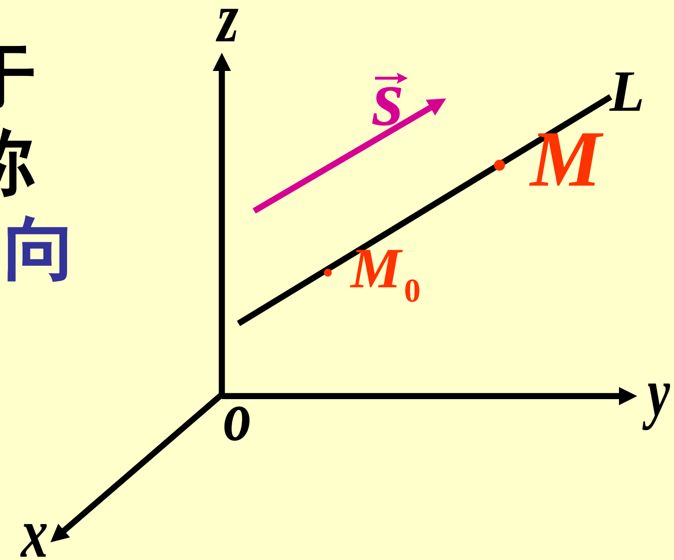
空间直线的一般方程

注意：空间某直线的一般方程并不是唯一的，过此直线的任意两个平面联立都可作为此直线的一般方程

2. 点向式方程与参数方程

方向向量的定义：

如果一非零向量平行于一条已知直线，这个向量称为这条直线的方向向量（方向矢）.



$$M_0(x_0, y_0, z_0),\ M(x, y, z),$$

$$\forall\ M \in L,\quad \overrightarrow{M_0M} /\!/ \vec{s}$$

$$\vec{s} = \{m, n, p\},\qquad \overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 直线的点向式方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

直线的一组方向数

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

直线的参数方程

例1 用点向式方程及参数方程表示下列直线

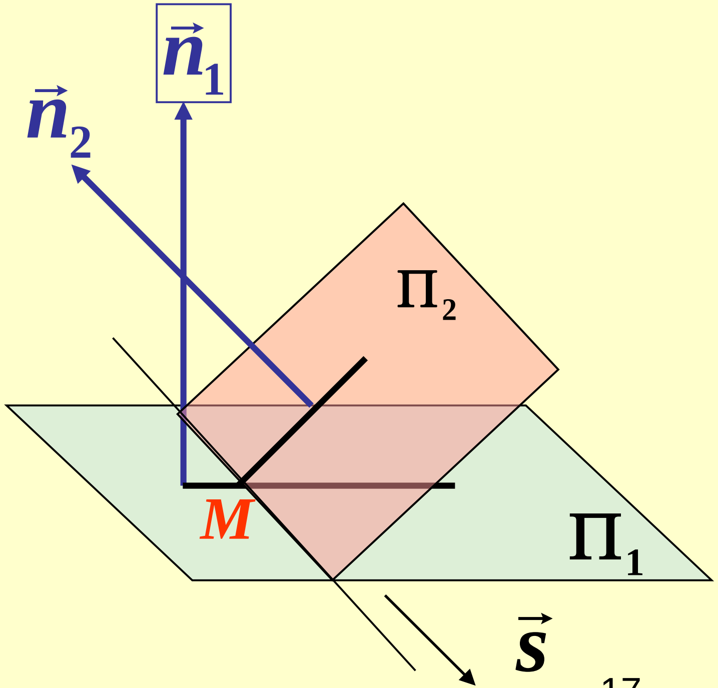
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

解 在直线上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 取 $x_0 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0+z_0+2=0 \\ y_0-3z_0-6=0 \end{cases},$$

解得 $y_0 = 0,\quad z_0 = -2$

点坐标 $(1,0,-2)$



因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{4, -1, -3\}$,

对称式方程 $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$,

参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

例 2 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=\{2,0,4\}$,

所求直线方程 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

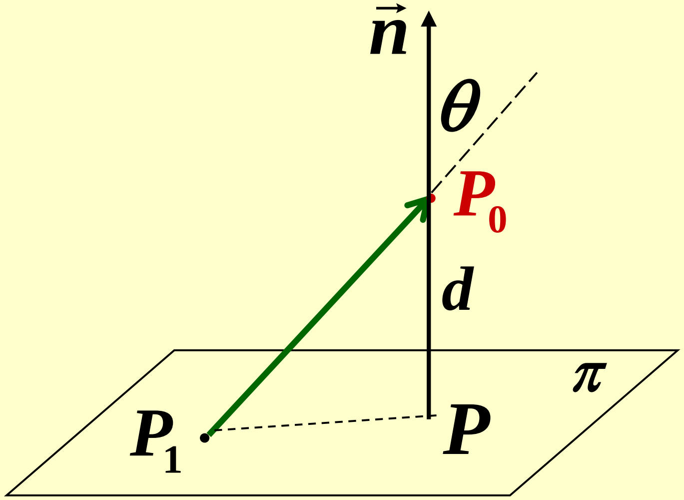
三、平面与直线的基本问题

1. 距离问题

（1）点到平面的距离

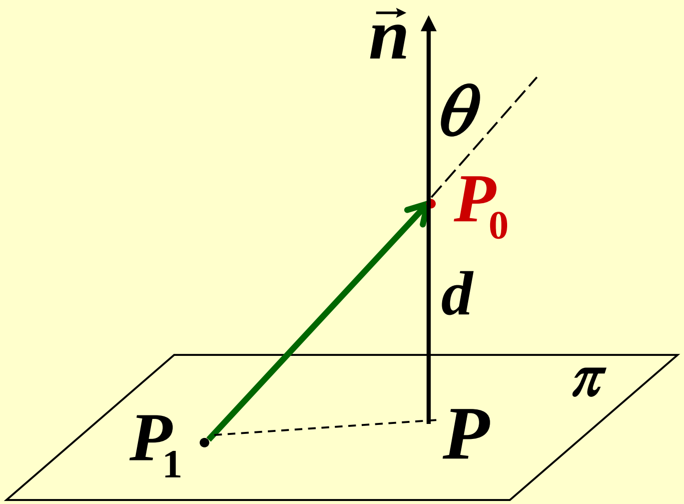
设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



——点到平面距离公式

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$外一点，求P_0到平面的距离.



解　$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$

$$d = \left| \left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| \cos\theta \right|$$

$$= \left| \left|\overrightarrow{P_1P_0}\right| \left|\vec{n}^0\right| \cos\theta \right|$$

$$= \left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0 \right|$$

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\{A, B, C\}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$P_1P_0 \cdot \vec{n}^0 = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

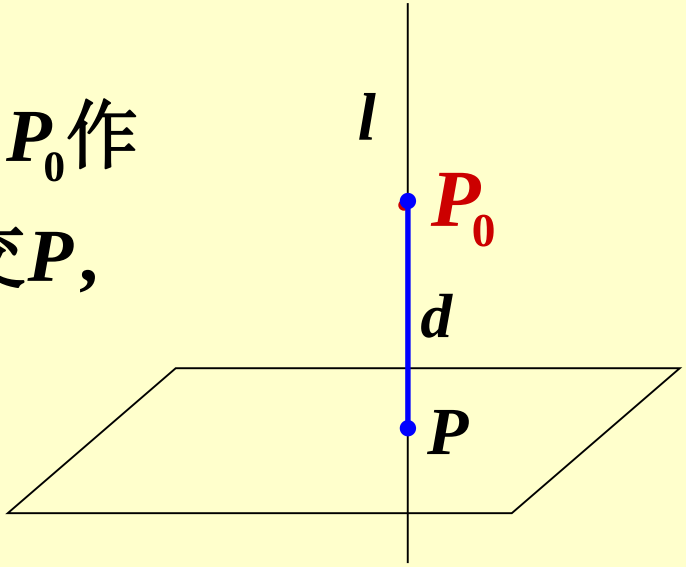
$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

又 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad (P_1 \in \pi)$

$$\therefore \; \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\therefore \quad d = \left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}^0 \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

注1：d也可以用几何法求：过 P_0作一直线$l \perp \pi$，求出l与π的交P，则$d = |P_0P|$



注2：两平行平面π_1和π_2间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

其中：π_1：$Ax + By + Cz + D_1 = 0$

π_2：$Ax + By + Cz + D_2 = 0$

例1 求两平行平面 $3x+6y-2z+14=0$ 和 $3x+6y-2z-7=0$ 之间的距离。

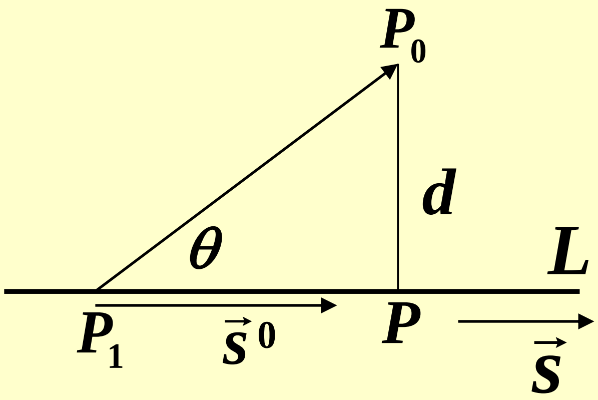
解：$$d=\frac{|14-(-7)|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{21}{7}=3$$

（2）点到直线的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)\notin L$, L的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

求P_0到L的距离d.



在L上任取一点$P_1(x_1,y_1,z_1)$, 如图

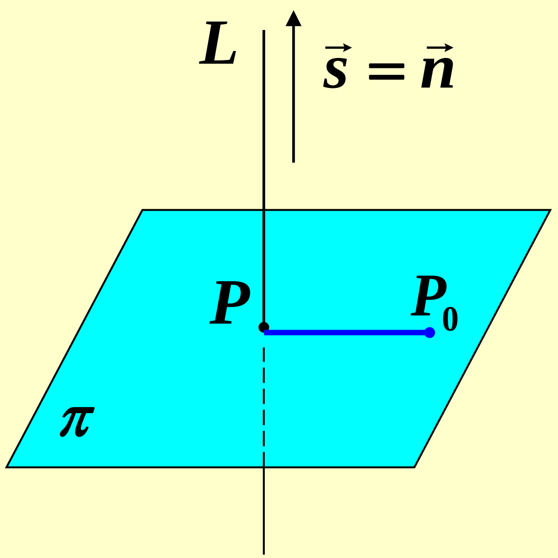
$$d=\left|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cdot\sin\theta\right|=\left|\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cdot\left|\vec{s}^{\,0}\right|\cdot\sin\theta\right|=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}^{\,0}\right|$$

$$\because \vec{s}^{\,0}=\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \qquad \therefore d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1P_0}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|} \qquad \vec{s}=\{m,n,p\}$$

注：点到直线的距离也可用几何法求：

过P_0点作一平面$\pi \perp L$，

π与L交与P点，$d = |P_0P|$.



例2 求点$P_0(3,-1,2)$到直线L：

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$ 的距离。

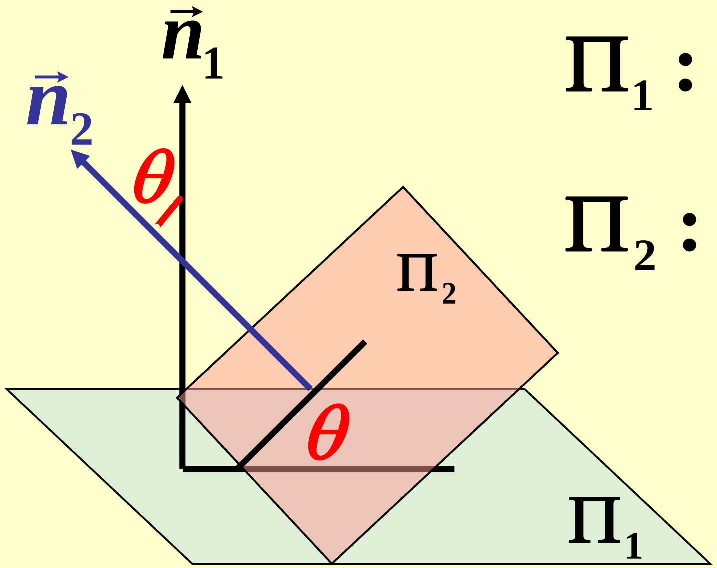
解 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{1,1,-1\} \times \{2,-1,1\} = \{0,3,-3\}$

取$P_1(1,-2,0) \in L$，则$\overrightarrow{P_1P_0} = \{2,1,2\}$

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{|\{2,1,2\} \times \{0,3,-3\}|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

2. 平面与平面的相互关系

定义 两平面法向量之间的夹角称为**两平面的夹角**.（通常取锐角）



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right| \quad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

两平面位置特征：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

例3 研究以下各组里两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1=\{2,-1,1\},\quad \vec{n}_2=\{-4,2,-2\}$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1\quad M(1,1,0)\notin\Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $\because \dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-1}{2},$ 两平面平行

$\because M(1,1,0)\in\Pi_1\quad M(1,1,0)\in\Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

例4　一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$且垂直于平面$x+y+z=0$，求它的方程.

解：设所求平面Π_1的法线向量为

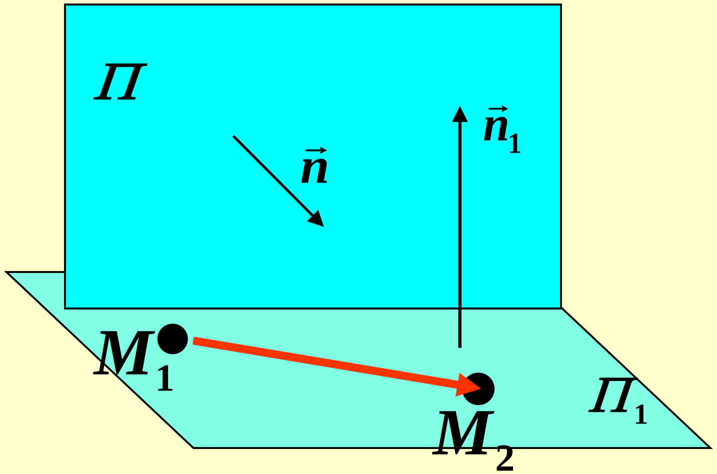
$\vec{n}_1=\{A,B,C\}$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,0,-2\}$

$\because \overrightarrow{M_1M_2}\perp \vec{n}_1 \quad \therefore -A-2C=0$

$\because \vec{n}_1\perp\vec{n}=\{1,1,1\}$

$\therefore A+B+C=0.$



由上两式得到$A=-2C, B=C.$

所以求得平面的方程为$2x-y-z=0.$

3. 直线与直线的相互关系

定义 **两直线的方向向量的夹角称为该两直线之间的夹角.（锐角）**

直线 L_1： $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$， $\vec{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$

直线 L_2： $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$， $\vec{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}\right| \quad \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$$

两直线的夹角公式

$$=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$

(2) $L_1 // L_2 \quad \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = \{1, -4, 0\}$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = \{0, 0, 1\}$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$， 即 $L_1 \perp L_2$.

两直线共面的充要条件：

$$\text{直线}L_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \vec{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$$

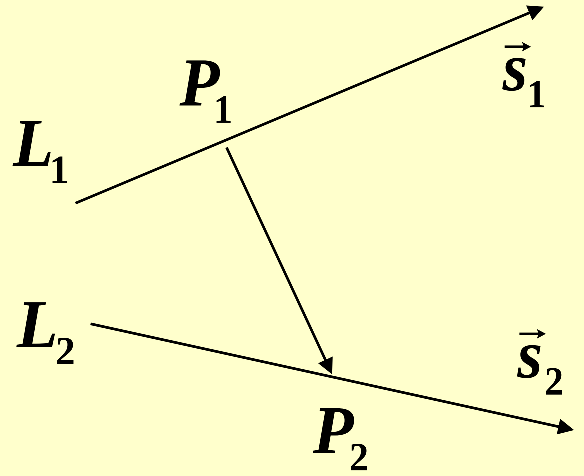
$$\text{直线}L_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \qquad \vec{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$$

L_1与L_2共面

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$共面

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$



例5 证明直线 $L_1: \dfrac{x+2}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}$ 与直线

$L_2: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ 异面，并求它们的夹角

证 $\vec{s}_1=\{0,1,-2\}$ $\vec{s}_2=\{-1,2,1\}$

$P_1=(-2,1,2)\in L_1$ $P_2=(1,0,-1)\in L_2$

$\overrightarrow{P_1P_2}=\{3,-1,-3\}$

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=16\neq 0$$

$\therefore L_1, L_2$ 异面. 又 $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0, \therefore \theta=(\vec{s}_1,\hat{\ }\vec{s}_2)=\dfrac{\pi}{2}$.

例 6 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1=\{1,0,-4\}$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2=\{2,-1,5\}$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{-4,-3,-1\}$,

所求直线的方程 $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

例 7 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$, 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

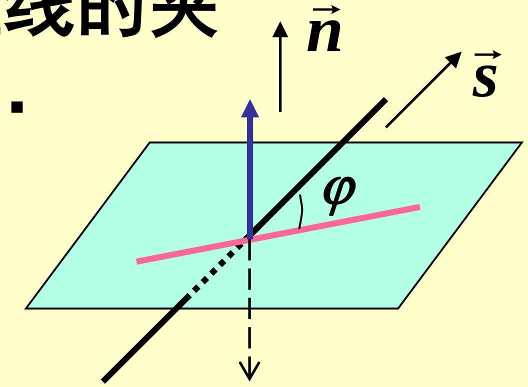
取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=\{\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\}=\{-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\},$$

所求直线方程为 $$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

4. 直线与平面的关系

定义 直线和它在平面上的投影直线的夹角φ称为直线与平面的夹角.



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \vec{s} = \{m, n, p\},$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = \{A, B, C\},$$

$$(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad (\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系:

(1) $L\perp\Pi \quad\Leftrightarrow\quad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$

(2) $L\ /\!/\ \Pi \quad\Leftrightarrow\quad Am+Bn+Cp=0.$

(3) $L\subset\Pi \quad\Leftrightarrow\quad Am+Bn+Cp=0$且$\exists$（$x_0,y_0,z_0)\in L$

使得$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$

例 8 设直线 $L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面 $\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$, $\vec{s}=\{2,-1,2\}$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore$ $\varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

例9 求过点$(-1,2,0)$且与平面$x+2y-z+1=0$垂直的直线方程

解 平面的法向量$\vec{n}=\{1,2,-1\}$,

直线的方向向量$\vec{s}=\vec{n}=\{1,2,-1\}$,

所求直线的方程

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}.$$

四、平面束

设直线L由方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

确定，其中系数A_1,B_1,C_1与A_2,B_2,C_2不成比例.

我们建立三元一次方程:

$$\boxed{\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0}$$

其中λ，μ为不同时为0的任意常数，

直线L的平面束方程

例1 求直线 $L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:$

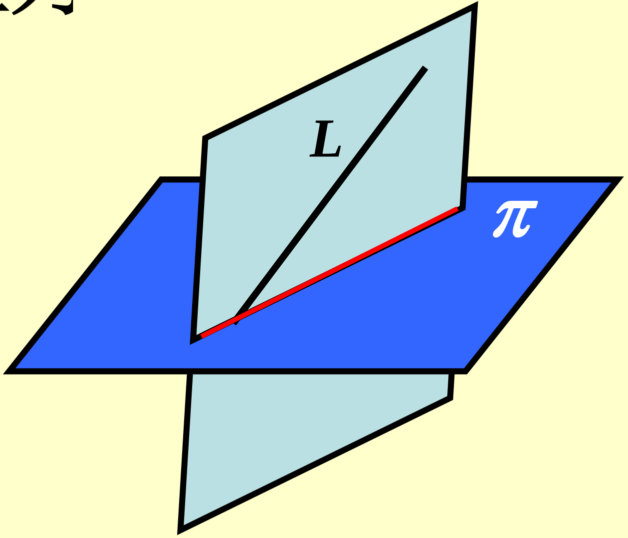
$x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程.

解 过直线 L 的平面束方程为

$$(2x-y+z-1)$$
$$+\lambda(x+y-z+1)=0,$$

即 $(2+\lambda)x+(\lambda-1)y$

$$+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0.$$



又$\because$垂直于平面π,

$$\therefore (2+\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot(-1)=0.$$

即 $4\lambda-1=0$,　故 $\lambda=\dfrac{1}{4}$

将λ代入平面束方程，得 $3x-y+z-1=0.$

所求投影直线方程为 $\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}.$

五、杂列

1. 求过点$M(2,1,3)$且垂直相交于直线$L: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$的直线方程.

2. 求过点$M(-1,-4,3)$且与直线L_1, L_2都垂直的直线方程

其中$L_1: \begin{cases} 2x-4y+z=1 \\ x+3y=5 \end{cases}$，$L_2: \begin{cases} x=2+4t \\ y=-1-t \\ z=-3+2t \end{cases}$.

3. 设点M_1, M_2对称于直线L，已知$M_1(4,3,10)$，L的方程为

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$，求$M_2$的坐标.

4. 设光线沿直线$L:\begin{cases} x+y-3=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$投射到平面

π: $x+y+z+1=0$上，求反射光所在直线方程．

5. 直线L过点$P(-3,5,-9)$且与直线L_1:$\begin{cases} y=4x-7 \\ z=5x+10 \end{cases}$及直线

L_2: $x=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z+3}{2}$都相交，求$L$的方程.

6. 设$L_1:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$, $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{0}$

⑴ 证明L_1,L_2异面;

⑵ 求L_1,L_2之间的最短距离;

⑶ 求L_1,L_2的公垂线L的方程.

答案:

1. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$

2. $\frac{x+1}{12}=\frac{y+4}{46}=\frac{z-3}{-1}$

3. $M_2(2,9,6)$

4. $\frac{x-5}{5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+4}{-1}$

5. $\begin{cases}34x-y-6z+53=0\\2x-z-3=0\end{cases}$

6. (2)$d=\frac{1}{3}$;

(3)$L:\begin{cases}4x-y+z-4=0\\2x+4y+5z+10=0\end{cases}$

练 习 题

一、填空题：

1、通过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-1}{5}$的直线方程为________________；

2、直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦为____________；

3、直线$\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$和平面$x-y-z+1=0$在平面$x+2y-z+1=0$上的夹角为____________；

4、点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影为________________；

5、直线$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$和平面$3x-2y+7z=8$的关系是______________;

6、直线$\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$和平面$x+y+z=3$的关系是__________.

二、 用对称式方程及参数方程表示直线 :
$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}.$$

三、 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$的平面方程.

四、求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上

的投影直线的方程 .

五、求与已知直线L_1: $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$及$L_2$:

$\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$都相交且和$L_3$:

$\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$平行的直线$L$.

六、设一平面垂直于平面$z=0$, 并通过从点$A(1,-1,1)$

到直线L:$\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$的垂线, 求此平面的方程 .

七、求两直线L_1：$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$和$L_2$：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{0}$的公垂线$L$的方程，及公垂线段的长．

八、求过点$(-1,0,4)$且平行于平面$3x-4y+z-10=0$又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{3}$相交的直线方程．

九、求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离．

练习题答案

一、1、$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{5}$； 2、0； 3、0；

4、$(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$； 5、垂直； 6、直线在平面上.

二、$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$， $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.

三、$8x-9y-22z=59$.

四、$\begin{cases} 17x+31y-37z=117 \\ 4x-y+z-1=0 \end{cases}$.

五、$\dfrac{x+28}{8}=\dfrac{y+\dfrac{65}{2}}{7}=z+\dfrac{25}{2}$或$\dfrac{x-72}{8}=\dfrac{y-55}{7}=\dfrac{z}{1}$.

六、$x+2y+1=0$.

七、$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+\dfrac{4}{3}}{2}=\dfrac{z+\dfrac{4}{3}}{-2}$或$\begin{cases}4x-y+z-4=0\\2x+4y+5z+10=0\end{cases}$, $d=1$.

八、$\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}$.

九、$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.