4.1.2 求导法则

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

四、初等函数的求导问题

五、对数求导法

思路:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ (构造性定义)

$\Downarrow$ 本节内容 $\Downarrow$

求导法则

$$\left\{\begin{array}{l} (C)' = 0 \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

证明中利用了两个重要极限

$\Downarrow$

其它基本初等函数求导公式

初等函数求导问题

一、四则运算求导法则

定理1. 函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在 x 具有导数

$\Longrightarrow$ $u(x)$ 及 $v(x)$ **的和、差、积、商 (除分母为 0的点外) 都在点 x 可导, 且**

$$(1)\ [u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$$

$$(2)\ [u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$(3)\ \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$$

下面分三部分加以证明, 并同时给出相应的推论和例题 .

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

证：设 $f(x) = u(x) \pm v(x)$, 则

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) \pm v(x+h)] - [u(x) \pm v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$= u'(x) \pm v'(x)$ 故结论成立.

此法则可推广到任意有限项的情形. 例如,

例如, $(u + v - w)' = u' + v' - w'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$

证: 设 $f(x) = u(x)v(x)$， 则有

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]$$

$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$ 故结论成立.

推论: 1) $(Cu)' = Cu'$ **(C为常数)**

2) $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$

3) $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$

例1. $y=\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)$, 求 y' 及 $y'\big|_{x=1}$.

解: $y'=(\sqrt{x})'(x^3-4\cos x-\sin 1)$

$$+\sqrt{x}\,(x^3-4\cos x-\sin 1)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-4\cos x-\sin 1)+\sqrt{x}\,(3x^2+4\sin x)$$

$$y'\big|_{x=1}=\frac{1}{2}(1-4\cos 1-\sin 1)+(3+4\sin 1)$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\sin 1-2\cos 1$$

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

证：设 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$**，则有**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}v(x) - u(x)\dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

故结论成立.

推论： $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-Cv'}{v^2}$ **(** C**为常数)**

例2. 求证 $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

证: $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc x \cot x$$

类似可证: $(\cot x)' = -\csc^2 x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$.

二、反函数的求导法则

定理2. 设 $y = f(x)$ 为 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数，$f^{-1}(y)$ 在 y 的某邻域内单调可导，且 $[f^{-1}(y)]' \neq 0$ $\Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}}$$

证: 在 x 处给增量 $\Delta x \neq 0$，由反函数的单调性知

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \neq 0, \quad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

且由反函数的连续性知 $\Delta x \to 0$ 时必有 $\Delta y \to 0$，因此

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'}$$

例3. 求反三角函数及指数函数的导数.

解: 1) 设 $y = \arcsin x$, 则 $x = \sin y$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$\therefore \cos y > 0$, 则

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似可求得

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2) 设 $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$, 则 $x = \log_a y$, $y \in (0, +\infty)$

$$\therefore \quad (a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$$

特别当 $a = \mathrm{e}$ 时, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

小结:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

三、复合函数求导法则

定理3. $u=g(x)$ 在点 **x** 可导, $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，则 复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 **x** 可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=f'(u)g'(x)$$

证: $\because y=f(u)$ 在点 u 可导, 故 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$

$$\therefore \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u \quad（当\ \Delta u\to 0\ 时\ \alpha\to 0\ )$$

故有 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad(\Delta x\neq 0)$$

$$\therefore\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=f'(u)g'(x)$$

$$\boxed{\text{复合函数 } y=f[g(x)] \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)}$$

推广：此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如，$y=f(u)\,,u=\varphi(v)\,,v=\psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

——链式法则

$$=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y \\ | \\ u \\ | \\ v \\ | \\ x \end{array}}$$

关键：搞清复合函数结构，由外向内逐层求导.

例4. 求下列导数: (1) $(x^{\mu})'$; (2) $(x^{x})'$; (3) $(\operatorname{sh} x)'$.

解: (1) $(x^{\mu})' = (e^{\mu\ln x})' = e^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)' = x^{\mu}\cdot\dfrac{\mu}{x}$

$= \mu\, x^{\mu-1}$

(2) $(x^{x})' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^{x}(\ln x+1)$

(3) $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$

说明: 类似可得

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(a^{x})' = a^{x}\ln a$.

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad a^{x} = e^{x\ln a}$$

例5. 设 $y=\ln\cos(e^x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot(-\sin(e^x))\cdot e^x$$

$$=-e^x\tan(e^x)$$

思考: 若 $f'(u)$ 存在，如何求 $f(\ln\cos(e^x))$ 的导数?

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\underbrace{f'(\ln\cos(e^x))}_{f'(u)\big|_{u=\ln\cos(e^x)}}\cdot(\ln\cos(e^x))'=\cdots$$

这两个记号含义不同

练习: 设 $y=f(f(f(x)))$，其中 $f(x)$ 可导，求 y'.

例6. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 求 y'.

解: $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\text{ 的反函数}}$$

记 $\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 则

(反双曲正弦)

$$(\operatorname{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

请自行求其它反双曲函数的导数.

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\qquad$ $(Cu)' = Cu'$ $\quad$ **(C为常数)**

$(uv)' = u'v + uv'$ $\qquad$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$

3. 复合函数求导法则

$y = f(u), u = \varphi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

4. 初等函数在定义区间内可导,

且导数仍为初等函数

说明: 最基本的公式

$(C)' = 0$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

由定义证 , 其它公式

用求导法则推出.

例7. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

解: $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$$\therefore \quad y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

例8. 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot ax^{a-1}$

$$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$$

例9. $y=e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$,求 y'.

解: $$y'=(e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x)\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+e^{\sin x^2}\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$$

$$=2x\cos x^2 e^{\sin x^2}\arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$+\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}e^{\sin x^2}$$

关键: 搞清复合函数结构
由外向内逐层求导

例10. 设 $y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$,求 y'.

解: $$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(\sqrt{1+x^2})^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{2+x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$$

五、对数求导法

1) 对幂指函数 $y=u^{v}$ 可用对数求导法求导：

$$\ln y = v\ln u$$

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + \frac{u'v}{u}$$

$$y' = u^{v}(v'\ln u + \frac{u'v}{u})$$

注意:

$$y' = \underbrace{u^{v}\ln u\cdot v'}_{\text{按指数函数求导公式}} + \underbrace{vu^{v-1}\cdot u'}_{\text{按幂函数求导公式}}$$

例11. 求 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$ 的导数 .

解: 两边取对数 , 化为隐式

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

两边对 x 求导

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore \quad y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

另解: $y' = (x^{\sin x}) = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)' = \cdots$

2）有些显函数用对数求导法求导很方便 .

例12. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}$ $\left(a>0\,,b>0\,,\frac{a}{b}\neq 1\right)$

两边取对数

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

两边对 ***x*** 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

例13. $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

$\Big\Downarrow$ 两边取对数

$$\boxed{(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|]$$

$\Big\Downarrow$ 对 x 求导

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

六、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都可导, 而 x 与 y 之间存在某种关系 $y = f(x)$, 从而它们的变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 与 $\dfrac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系, 这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

相关变化率问题:

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率?

方法: $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = f'(x)\dfrac{dx}{dt}$

例14. 已知一气球的体积以$50cm^3/s$的速度增大，求在半径分别为$5cm$、$10cm$时，气球半径的增大速率.

解 设气球的半径为r，体积为V，则$V=\frac{4}{3}\pi r^3$,

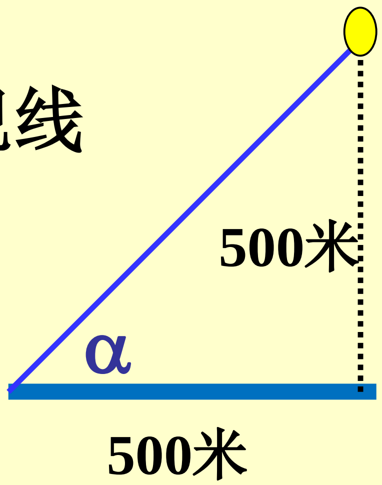
于是有 $\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$, $\Rightarrow$ $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$,

因$\frac{dV}{dt}=50cm^3/s$, 故

当$r=5cm$时, $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi\times 5^2}\times 50\approx 0.16cm/s$.

当$r=10cm$时, $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi\times 10^2}\times 50\approx 0.04cm/s$.

例15. 一汽球从离开观察员500米处离地面铅直上升,其速率为140米/秒. 当气球高度为500米时，观察员视线的仰角增加率是多少?



解 设气球上升t秒后,其高度为h,观察员视线的仰角为α,则

$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$

上式两边对t求导得 $\sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{500} \cdot \dfrac{dh}{dt}$

$\because \dfrac{dh}{dt} = 140$米/秒, 当 $h = 500$米时, $\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/分)

仰角增加率

练习：

1. 在中午十二点正甲船的6公里/小时的速率向东行驶，乙船在甲船之北16公里，以8公里/小时的速率向南行驶，问下午一点正两船相距的速率为多少？

2. 注水入高8米，上顶直径8米的正圆锥形容器中，其速率为每分钟4立方米，问：当水深为5米时，其表面上升的速率为多少？

内容小结

求导公式及求导法则

注意: 1) $(uv)' \neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导 .

思考与练习

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)' \cancel{=} \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}$ 对吗?

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

2. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确?

因 $f'(x) \cancel{=} \varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)\ \ y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b}, \qquad (2)\ \ y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

解: (1) $$y'=b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)=-\frac{a^b b}{x^{b+1}}$$

(2) $$y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\ln\frac{a}{b}\cdot(-x)'=-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{a}{b}$$

或 $$y'=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{b}{a}$$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1　利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2　利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore\quad f'(0)=-99!$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi x}{2}, x<1, \\ ax^2+b, \quad x\geq 1, \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，求 a,b 及 $f'(x)$.

6. 求 $f'(x)$：

(1) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x^2}, |x|\leq 1, \\ \dfrac{1}{e}, \quad\quad |x|>1. \end{cases}$

思考题

1. 设 m 为正整数，定义 $f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(1) m 为何值时, $f(x)$ 在 $x_0=0$ 可导;

(2) m 为何值时, $f'(x)$ 在 $x_0=0$ 连续.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，且 $\forall x, y \in R$ 都有

$$f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x).$$

若 $f'(0)=e$ ，求 $f(x)$.

3. 设 $f(0)=0,\ f'(0)$ 存在且有限，令

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\quad (n\in N^+),$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ，并利用以上结果计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

4 . 证明：不存在定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的可导函数 $f(x)$，

满足　$f(f(x))=-x^3+x^2+1.$