4.3.2 待定式极限

(L'Hôpital's Rule)

一、$\dfrac{0}{0}$和$\dfrac{\infty}{\infty}$型洛必达法则

二、其它未定型洛必达法则

三、小结

一、$\frac{0}{0}$型及$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则

定义 如果当$x \to a$(或$x \to \infty$)时,两个函数$f(x)$与$F(x)$都趋于零或都趋于无穷大,那末极限$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$称为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}, (\frac{0}{0})$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}, (\frac{\infty}{\infty})$

洛必达 (L'Hôpital's, 1661-1704)

定理1（$\dfrac{0}{0}$型洛必达法则）

设(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=0$;

(2) $x\in N^0(a,\delta)$时, $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 存在且 $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达法则.

证 定义辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},\qquad F_1(x)=\begin{cases} F(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases},$$

在 $U^0(a,\delta)$ 内任取一点 x，在以 a 与 x 为端点的区间上，

$f_1(x),F_1(x)$满足柯西中值定理的条件，则有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\qquad (\xi\text{在}x\text{与}a\text{之间})$$

当$x\to a$时,$\xi\to a$， $\because \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=A$， $\therefore \lim\limits_{\xi\to a}\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=A$，

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=A.$$

例1. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$. $\quad(\frac{0}{0})$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=1.$

例2. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$. $\quad(\frac{0}{0})$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$

洛必达法则：$\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}}$

注1. 定理1 中 $x\to a$ 换为

$$x\to a^+,\ x\to a^-,\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

之一， 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

注 2. 若 $\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且 $f'(x), F'(x)$ 满足定理1条件，

则 $\lim\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$

注3. 使用洛必达法则必须验证条件，不是未定式不能用洛必达法则.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1.$

定理2 （$\frac{\infty}{\infty}$ 型洛必达法则）

设 (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty$（$\pm\infty$）;

(2) $x\in N^0(a,\delta)$时, $f'(x)$及 $F'(x)$ 都存在且$F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大);

那末 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

证:（略）

注: 当$x\to\infty$时,以及$x\to a^{\pm}, x\to\pm\infty$时,该法则仍然成立

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$.　$(\dfrac{\infty}{\infty})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{ax}=1.$

例6. 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\quad(\alpha>0).$　$(\dfrac{\infty}{\infty})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0.$

例7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}\ (\alpha>0\,,\lambda>0).$ $\dfrac{\infty}{\infty}$型

解: $\because\alpha>0$, $\therefore\exists n\in N^{+}$，使得 $n-1<\alpha\le n$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{\lambda^{2}e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{\lambda^{n}e^{\lambda x}}=0$$

注：例6 , 例7 表明 $x\to+\infty$ 时,

$\ln x$, $x^{\alpha}\ (\alpha>0)$, $e^{\lambda x}\ (\lambda>0)$

后者比前者趋于$+\infty$ 更快 .

例8. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.　　$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$　　$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

注意：洛必达法则是求未定式的一种有效方法，但与其它求极限方法结合使用，效果更好.

例9. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{3}.$$

注：洛必达法则的使用条件.

1）在满足定理条件的某些情况下，洛必达法则不能解决计算问题 .

例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

洛必达法则失效.

而 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

2) 若 $\lim \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{F(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例如, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} \neq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\cos x}{1}$

极限不存在

但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{\sin x}{x}) = 1$

注: 洛必达法则失效时，改用其它方法计算极限.

二、其它未定型洛必达法则

关键: 将其它类型未定式化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}), (\frac{\infty}{\infty})$.

1. $0\cdot\infty$ 型

步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$

2. $\infty-\infty$ 型

步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \frac{1}{0}-\frac{1}{0} \Rightarrow \frac{0-0}{0\cdot 0}$.

例11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

3. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

$$\boxed{u^v = e^{v\ln u}}$$

步骤: $\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{取对数}} \left\{\begin{matrix} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \\ 0\cdot\ln\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow 0\cdot\infty.$

例12. 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$. $(\,0^0\,)$

解: 原式 $= \lim\limits_{x\to0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

例13. 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^{∞})

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}$.

例14. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^{0})

解: 取对数得 $(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)}$,

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x} = -1,$$

$\therefore$ 原式 $= e^{-1}$.

例15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$　　$(\dfrac{0}{0})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}]'}{1}=\lim\limits_{x\to 0}[e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}]'$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{2x}=-\frac{e}{2}.$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\sim-\dfrac{e}{2}x\ (x\to 0)$　　$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=-\dfrac{e}{2}x+o(x)$

例16. 设 $f''(x_0)$存在，证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$$

分析：$f''(x_0)$存在蕴含 $f'(x)$在$N(x_0)$ 内存在.

证：
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)=f''(x_0).$$

例17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0$,

$g''(0)=10$, 求 $f'(0)$.

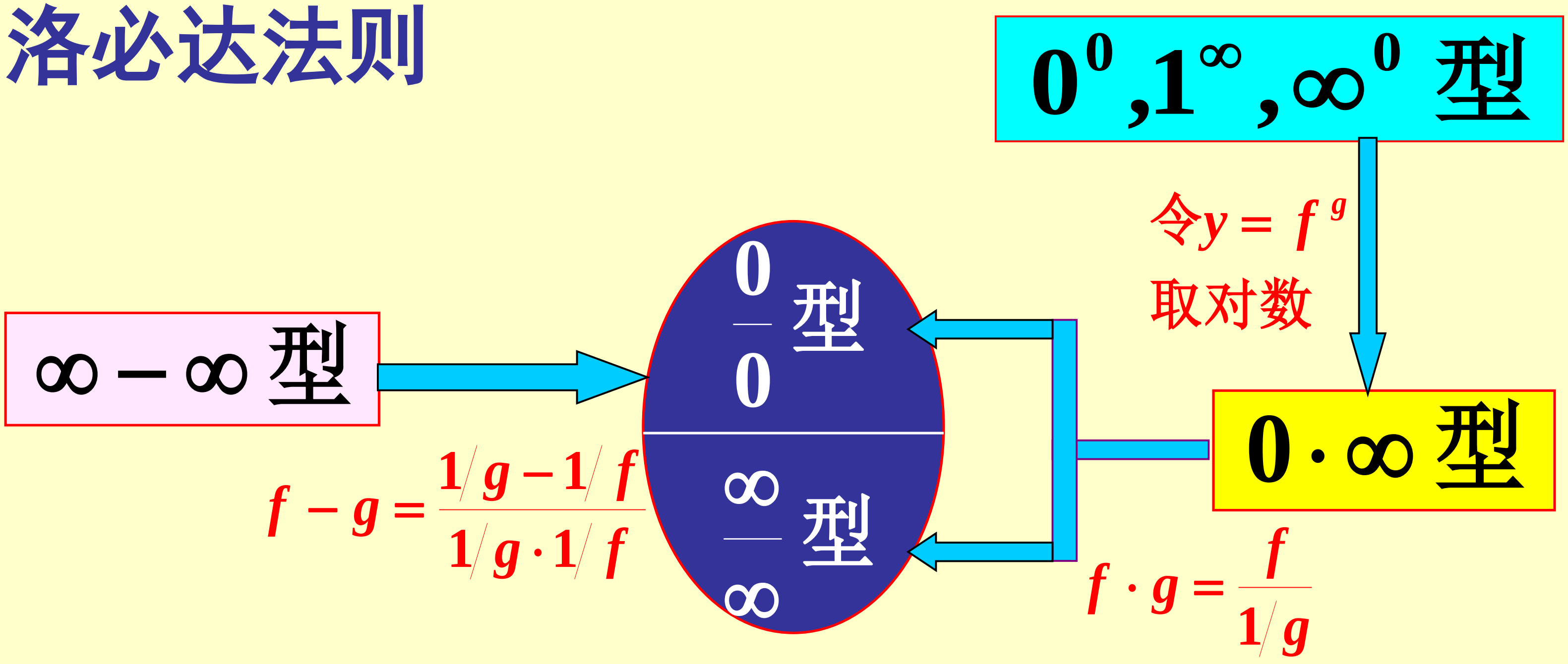
解: $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}$$

$$=\frac{1}{2}g''(0)=5.$$

三、小结

洛必达法则


$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$

思考与练习

1. 设 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是未定式极限，如果 $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，是否 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限也不存在？举例说明．

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\;\frac{3}{2}\;}$

$\boxed{\ln(1+x) \sim x}$

分析：原式 $\displaystyle = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}(3+0)$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\underline{\quad\frac{1}{6}\quad}$$

分析：原式 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$$\boxed{\sin x\sim x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\cos x=1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

补充例题

求极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$;

解: $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$　　(令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解：令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$ (用洛必达法则)

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$ (继续用洛必达法则)

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x\ -(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$

练 习 题

一、填空题:

1、洛必达法则除了可用于求“$\frac{0}{0}$”，及“$\frac{\infty}{\infty}$”两种类型的未定式的极限外，也可通过变换解决________________，________________，________________，________________，________________，等型的未定式的求极限的问题.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$______________.

3、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}=$______________.

二、用洛必达法则求下列极限：

1、$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

2、$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\arctan x}$；

3、$\lim\limits_{x\to0} x\cot 2x$；

4、$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；

5、$\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$；

6、$\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

7、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

三、讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & \text{当}x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & \text{当}x\le 0\end{cases}$$

在 点$x=0$处的连续性.

练习题答案

一、1、$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^{0}，∞^{0}；　2、1；　3、1.

二、1、$-\frac{1}{8}$；　2、1；　3、$\frac{1}{2}$；　4、$-\frac{1}{2}$；　5、1；

6、1；　7、$e^{-\frac{2}{\pi}}$.

三、连续.

思考题

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，如果对 $\alpha>0$，有

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha f(x)+xf'(x))=\beta,$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\beta/\alpha.$

2. 设 $f''(x_0)$ 存在，$f'(x_0)\neq 0$，求极限

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{f'(x_0)(x-x_0)}\right).$$

3. 设 $f(x)$ 在0的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，设

$$g(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq 0, \\ f'(0), & x=0. \end{cases}$$

证明：$g(x)$ 在该邻域内有连续的导函数.

洛必达(L’Hôpital’s 1661 – 1704)

法国数学家, 他著有《无穷小分析》(1696), 并在该书中提出了求未定式极限的方法, 后人将其命名为“洛必达法则”他在15岁时就解决了帕斯卡提出的摆线难题, 以后又解出了伯努利提出的“最速降线”问题,在他去世后的1720 年出版了他的关于圆锥曲线的书.