附录Ⅱ　实 数 理 论

在中学数学中，我们已经知道实数包括有理数和无理数. 从历史上看，人们先认识有理数. 不过在公元前古希腊时期就已发现不可公度线段，指出“无理数”的存在. 但有关实数的理论却直到十九世纪末，为奠定微积分基础的需要才完整地建立起来.

一　建立实数的原则

有理数全体组成的集合 Q，构成一个阿基米德有序域，我们希望有理数扩充到实数之后，全体实数的集合也构成阿基米德有序域.

所谓集合 F 构成一个**阿基米德有序域**，是说它满足以下三个条件：

1. F 是域　在 F 中定义了加法“+”与乘法“·”两个运算，使得对于 F 中任意元素 a,b,c 成立：

加法的结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

加法的交换律：$a+b=b+a$；

乘法的结合律：$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

乘法的交换律：$a\cdot b=b\cdot a$；

乘法关于加法的分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

在 F 中存在零元素和反元素：在 F 中存在一个元素“0”，使得对 F 中任一元素 a，有 $a+0=a$，则称“0”为**零元素**；对每一个元素 $a\in F$，有一个元素 $(-a)\in F$，使得 $a+(-a)=0$，则称 $-a$ 为 a 的**反元素**.

在 F 中存在单位元素与逆元素：在 F 中存在一个元素 e，使得对 F 中任一元素 a，有 $a\cdot e=a$，则称 e 为**单位元素**；对每一个非零元素 $a\in F$，有一个元素 $a^{-1}\in F$，使得 $a\cdot a^{-1}=e$，则称 a^{-1} 为 a 的**逆元素**.

2. F 是有序域　在 F 中定义了序关系“<”具有如下(全序)性质：

传递性：对 F 中的元素 a,b,c，若 $a<b$①，$b<c$，则 $a<c$；

三歧性：F 中任意两个元素 a 与 b 之间，关系

$$a<b,a=b,a>b$$

三者必居其一，也只居其一(这里 $a>b$，就是 $b<a$).

当序与加法、乘法运算结合起来进行时，则有如下性质：

---

① 关系式 $a<b$ 称为 a 小于 b，或 b 大于 a.

加法保序性:若 $a<b$,则对任何 $c\in F$,有 $a+c<b+c$;

乘法保序性:若 $a<b$ 及 $c>0$①,则 $ac<bc$.

3. F 中元素满足阿基米德性 对 F 中任意两个正元素 a,b,必存在自然数 n,使得 $na>b$②.

有理数系 $\mathbf{Q}$ 满足上述所有条件,所以它是一个阿基米德有序域. 我们现在的目标是:利用有理数作材料,构造出一个新的有序域,它不仅具有阿基米德性,而且能使确界原理得以成立,并把有理数作为它的一部分. 特别当有理数作为新数进行运算时,仍保持其原来的运算规律,我们称这种新数为实数. 用有理数构造新数的方法很多,如戴德金的分划说,康托尔的基本列说,区间套说等等. 本附录将向大家详细介绍戴德金分划说.

二 分析

我们称能使确界原理得以成立的有序域为具有完备性的有序域. 读者已知有理数域 $\mathbf{Q}$ 不是完备的有序域,现在要把它扩充成一个具有完备性的有序域 $\mathbf{R}$.

不妨先假定这种 $\mathbf{R}$ 是存在的,然后看它应具有什么特性,尤其是新数与旧数(有理数)之间的关系如何?

先介绍两个引理(证明可以暂时不看).

引理 1 一个有序域如果具有完备性,则必具有阿基米德性.

证 用反证法. 设 α,β 为域中正元素,倘若序列 $\{n\alpha\}$ 中没有一项大于 β,则序列有上界(β 就是一个). 因而由完备性假设,存在 $\{n\alpha\}$ 的上确界 λ,对一切自然数 n 有 $\lambda\geqslant n\alpha$③,同时存在某个自然数 n_0,使 $n_0\alpha>\lambda-\alpha$. 从而有

$$(n_0+2)\alpha\leqslant\lambda<(n_0+1)\alpha$$

或 $\alpha<0$,这与假设 $\alpha>0$ 矛盾. 所以完备的有序域必具有阿基米德性. □

引理 2 一个有序域,如果具有阿基米德性,则它的有理元素④必在该域中稠密. 即对有序域中任意两个不同的元素 α,β,在 α 与 β 之间必存在一个有理元素(从而存在无穷多个有理元素).

证 设 α,β 为有序域中两个不同的元素,且 $\alpha<\beta$. 由阿基米德性,存在正整数 N 使得 $N(\beta-\alpha)>1$ 或 $\frac{1}{N}<\beta-\alpha$. 令 $d=\frac{1}{N}$,它是一个有理数,再任取一个有理数

---

① 若元素 c 满足关系式 $c>0$,则称 c 为正元素;若满足关系式 $c<0$,则称 c 为负元素.

② n(自然数)个元素 a 相加,记作 $na(=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n})$.

③ 关系式 $a\leqslant b$ 表示元素 a,b 之间有关系式 $a<b$ 或 $a=b$.

④ 任一阿基米德有序域都有一个与有理数域同构的子域,其元素称为有理元素. 为此,今后为叙述方便,将对"有理元素"与"有理数"两种说法看作有相同含义而不加以区别. 如有理元素 d 也说有理数 d.

$\gamma_0<\alpha$，在等差序列$\{\gamma_0+nd\}$中，由阿基米德性总有某项大于α，设在该序列中第一个大于α的项为γ_0+n_0d，则该数就是所求的有理数，即$\alpha<\gamma_0+n_0d<\beta$. 因为由$n_0$的选择有$\gamma_0+(n_0-1)d\leqslant\alpha$，倘若$\gamma_0+n_0d\geqslant\beta$，则这两个不等式相减将有$d\geqslant\beta-\alpha$，这与$d$的定义矛盾，从而得证. □

由这两个引理看到，若存在完备的有序域$\mathbf{R}$，则有理数必在其中稠密.

接下来分析，$\mathbf{R}$中新数（非有理数）与旧数（有理数）之间的关系. 设$\alpha\in\mathbf{R}$，但$\alpha\bar{\in}\mathbf{Q}$. 那么任一$\gamma\in\mathbf{Q}$，或者$\gamma<\alpha$，或者$\gamma>\alpha$，二者必居其一. 令

$$A=\{\gamma\in\mathbf{Q}\mid\gamma<\alpha\},A'=\{\gamma\in\mathbf{Q}\mid\gamma>\alpha\}. \tag{1}$$

这时A与A'满足下述三个条件：

1° A和A'皆不空；

2° $A\cup A'=Q$；

3° 若$a\in A,a'\in A'$，则$a<a'$（从而$A\cap A'=\varnothing$）.

一般地我们引入下面的定义：

定义1 若A,A'是满足上述三个条件的有理数集$\mathbf{Q}$的子集，则称序对(A,A')为$\mathbf{Q}$的一个分划，并分别称A和A'为该分划的下类和上类.

例如，对任一$\gamma\in\mathbf{Q}$，令

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<\gamma\},A'=\mathbf{Q}\backslash A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant\gamma\},$$

则(A,A')显然是一个分划（我们称它为第一种分划）. 若令

$$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant\gamma\},A'=\mathbf{Q}\backslash A=\{x\in Q\mid x>\gamma\},$$

这里(A,A')显然也是一个分划（我们称它为第二种分划）. 这两个分划的特点是：第一种分划的上类有最小数，第二种分划的下类有最大数. 此外还有第三种分划，它的上类无最小数，下类无最大数①. 例如：

$$A'=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0,且x^2>2\},$$

$$A=\mathbf{Q}\backslash A'=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\leqslant 0\quad 或\quad (x>0,且x^2<2)\}.$$

这也是一个分划，而且在这个分划里，A中无最大数，A'中无最小数. 这是因为，当$x>1$且$x^2<2$时，对任何满足$0<h<\dfrac{2-x^2}{2x+1}$的h，有

$$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2<x^2+2xh+h<x^2+2-x^2=2.$$

可见A中无最大数. 类似地，设$x>0$且$x^2>2$，则对任何满足$0<h<\dfrac{x^2-2}{2x}$的h，有

$$(x-h)^2=x^2-xh+h^2>x^2-2xh>2.$$

可见A'中无最小数.

第三种分划的存在说明有理数集尽管稠密，但仍有空隙. 容易看出，填补上

① 由有理数本身的稠密性，不可能存在上类有最小数，同时下类有最大数的分划.

例中空隙的正是无理数$\sqrt{2}$.

现在回头来看上面由新数α所产生的分划(1),究竟属于哪一种.很清楚,如果A有最大数或A'有最小数,则该最大数或最小数与α之间将不存在任何有理数,从而与引理2矛盾,所以由α所产生的分划(A,A')必为第三种分划.反之,设(A,A')是$\mathbf{Q}$的任一第三种分划,它是否必由某一新数α产生呢?首先A与A'之间必至少有一新数存在,否则A作为$\mathbf{R}$的有上界的子集将没有上确界(最小上界),这与$\mathbf{R}$的完备性相矛盾.其次,A与A'之间也只能有一个新数,倘若有两个新数,则在这两个数之间又将不存在任何有理数,这又与引理2相矛盾.设这唯一的新数为α,则分划(A,A')只能由α所产生而且也是反过来确定α的.这样就获得如下重要结果:如果$\mathbf{Q}$能扩充成完备的有序域$\mathbf{R}$,则$\mathbf{R}$中的新数与Q中的第三种分划必一一对应.

这样一来,只要知道$\mathbf{Q}$的所有第三种分划,就可以知道$\mathbf{R}$上的序,这是因为不仅新数与旧数可比较大小,新数与新数也可以比较大小.一旦知道了$\mathbf{R}$上的序,就可进而从$\mathbf{Q}$内已知的四则运算推知$\mathbf{R}$上的四则运算.这是因为在有序域上序与加法、乘法运算是协调的.此外,也不难看到:若存在$\mathbf{Q}$的完备扩充的话,则这种扩充基本上(即在序同构意义下)是唯一的.所有这些虽然我们不打算作深入的讨论,但必须认识到有上述事实,才有助于对以下内容的理解.

三 分划全体所成的有序集

现在不再假设$\mathbf{R}$的存在,而是要把它真正地构造出来.我们设想,对每一个可能的$\mathbf{Q}$的第三种分划,都定义一个新数来填补空隙.由于这种分划与新数是一一对应的,因此,不妨干脆就把分划本身用来充当新数,这是允许的.因为归根到底数学对象本身究竟是什么并不重要,重要的是它们之间的关系和运算.而且为统一起见,我们也用分划形式来表示相应的旧数(正如把整数扩充到有理数时,也可用假分数来表示整数那样).于是我们就把注意力转到$\mathbf{Q}$的分划的全体上去.

定义2 $\mathbf{Q}$的分划的全体称为分划集,以$\mathbf{R}$表示,其中第一种分划和第二种分划看作是同一种分划,即由同一个r产生的第一种分划和第二种分划不加区别地看作同一分划,称为**有端分划**①,并用r^*记这个分划.第三种分划称为**无端分划**.今后凡分划不论有端还是无端都用小写希腊字母来表示,如$\alpha=(A,A')$,$\beta=(B,B')$等(小写拉丁字母则用来表示有理数).

由于任一分划均由它的上、下两类中的任何一类完全确定,因此,给定了分划的一个类,也就完全确定了该分划.$\mathbf{Q}$的怎样的子集才能成为一个分划的类呢?对此有如下命题:

① 这里"端"是指上类的最小数或下类的最大数.

定理 1(类的标志) $\mathbf{Q}$ 的非空子集 M 能成为一个分划的上(下)类的充要条件是:

1° $M\neq\mathbf{Q}$;

2° 若 $x\in M$,且 $y>x(y<x)$,则 $y\in M$.

证 只需证充分性. 设 M 满足条件,则 M 与 $\mathbf{Q}\setminus M$ 不空. 令 $A=M,A'=\mathbf{Q}\setminus M$,则$(A,A')$满足分划的前两个条件. 设 $x\in A,y\in A'$,由 A'的定义不可能有 $y=x$. 再由 2°它也不可能有 $y<x$,因而必有 $y>x$,即分划的第三个条件也满足. □

推论 不论是上类还是下类,若 a,b 属于它,则 a,b 之间的有理数都属于它.

定义 3 设 $\alpha=(A,A'),\beta=(B,B')$为任意两个分划,我们说:在 A,B 无端(通过调整总可以办到)的情形下,若 $A\subset B$,则有 $\alpha<\beta$;若 $A=B$,则有 $\alpha=\beta$;若 $A\supset B$,则有 $\alpha>\beta$.

定理 2 定义3中的关系"<"是全序的,即满足下述条件:

1° 若 $\alpha<\beta,\beta<\gamma$,则 $\alpha<\gamma$(传递性);

2° $\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$ 三者必居其一,且仅居其一(三歧性).

证 1°是显然的. 现在证明 2°(三歧性). 如果 $A\neq B$,且 $A\not\subset B$,则必存在某个 $a\in A$,同时 $a\in B'$. 由后一关系及分划定义,对任何 $b\in B$ 都有 $a>b$. 再由定理 1 得 $B\subset A$. □

注意 如果不限制下类无端,则对同一个有端分划将出现第一种分划<第二种分划的不合理现象.

读者容易证明如下命题:

定理 3 1°设 $\alpha=(A,A')$,对任何 $a\in A$,a 对应的分划记为 a^*,则有 $a^*\leqslant\alpha$,对任何 $b\in A'$,有 $b^*\geqslant\alpha$. 反之,由 $a^*<\alpha$ 有 $a\in A$,由 $b^*>\alpha$ 有 $b\in A'$.

2° 对任意 α,β,当 $\alpha<\beta$ 时,存在 $r\in\mathbf{Q}$,使得 $\alpha<r<\beta$(这说明有端分划在 $\mathbf{R}$ 中稠密).

定理 4(戴德金定理,或称实数的连续性定理) 设 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}'$为 $\mathbf{R}$ 的子集,它满足如下条件:

1° $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{A}'$均不空;

2° $\mathcal{A}\cup\mathcal{A}'=\mathbf{R}$;

3° 若 $\alpha\in\mathcal{A},\alpha'\in\mathcal{A}'$,则 $\alpha<\alpha'$.

(称序对$(\mathcal{A},\mathcal{A}')$为 $\mathbf{R}$ 的一个分划),则或者 $\mathcal{A}$ 有最大元,或者 $\mathcal{A}'$有最小元.

证 令 $A=\{r\in\mathbf{Q}\mid r^*\in\mathcal{A}\},A'=\{r\in\mathbf{Q}\mid r^*\in\mathcal{A}'\}$,则 $\alpha=(A,A')$为 $\mathbf{Q}$ 的一个分划. 设 $\beta<\alpha$,由定理 3 的 2°,存在 $r\in\mathbf{Q}$ 使 $\beta<r^*<\alpha$. 由 $r^*<\alpha$ 及定理 3 的 1°有

$r\in A$. 又由 $\beta<r^*$，根据类的标志[①]知道 $\beta\in A$. 同样由 $\beta>\alpha$，可得 $\beta\in A'$. 但 α 本身作为 $\mathbf{Q}$ 的一个分划，也是 $\mathbf{R}$ 的元素，故不属于 A，必属于 A'. 若 $\alpha\in A$，则 α 为 A 的最大元，否则为 A'的最小元. □

因为以后将把 $\mathbf{R}$ 看作是实数集，所以本定理是说：实数集无空隙，或更通俗地说：如果将实数集看作一条直线，并用一把没有厚度的理想的刀来砍它，那么不论砍在哪里，总要碰着直线上的一点. 戴德金称实数的这个性质为连续性，但有的书也称它为实数的连通性.

定理 5(实数的完备性定理) 设 M 为 $\mathbf{R}$ 中有上界的子集，则 M 在 $\mathbf{R}$ 中有上确界. 即 M 在 $\mathbf{R}$ 中全体上界所组成的集合有最小元.

证 令 M 在 $\mathbf{R}$ 中全体上界组成的集合为 A'，令 $A=\mathbf{R}\backslash A'$. 则 (A,A') 为 $\mathbf{R}$ 的一个分划. 由戴德金定理，或者 A 有最大元，或者 A'有最小元. 因为 A 中任一元素 a 都不是 M 的上界，故存在 M 中某一元素 m，使 $a<m$. 由定理 3 的 2°，存在 a_1 使 $a<a_1<m$，即 $a_1\in A$，于是 A 无最大元. 因而 A'一定有最小元. □

四 R 中的加法

在定义 $\mathbf{R}$ 中的加法之前，先证明一个引理.

引理 3 对任何 $\mathbf{Q}$ 的分划 (A,A') 及任何有理数 $k>0$，存在 $a\in A,a'\in A'$，使得 $a'-a=k$.

证 设 $c\in A,c'\in A'$. 由阿基米德性，在等差序列 $\{c+nk\}$ 中必有大于 c'的项，设 c_0+n_0k 是该序列中第一个大于 c'的项，则 $c+n_0k\in A'$，而 $c+(n_0-1)k\in A$，故分别取它们为 a'与 a 时，其差正是 k. □

设 X,Y 为两个数集，我们用 $X+Y$，$X\cdot Y$ 和 $-X$ 分别表示 $\{x+y\mid x\in X,y\in Y\}$，$\{x\cdot y\mid x\in X,y\in Y\}$ 和 $\{-x\mid x\in X\}$.

定义 4 设 $\alpha=(A,A')$，$\beta=(B,B')$，我们定义 $\alpha+\beta=(C,C')$，其中 $C=A+B$，从而 $C'=\mathbf{Q}\backslash C$.

这里必须指出，定义 4 中的 (C,C') 确是 $\mathbf{Q}$ 的一个分划，因为 C 非空，$C\neq\mathbf{Q}$，设 $x\in A,y\in B,z<x+y$. 这时令 $x_1=x-\dfrac{x+y-z}{2}$，$y_1=y-\dfrac{x+y-z}{2}$，则 $x_1\in A,y_1\in B$ 且 $z=x_1+y_1$，故 C 确是这一分划的下类.

当然，我们也可以从定义 $C'=A'+B'$入手. 读者可以验证这两个定义的一致性，即它们至多相差一个端.

定理 6 $\mathbf{R}$ 中的加法具有下列性质：对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$，

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$（交换律），$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$（结合律）.

---

① 在定理 1 中如果将 $\mathbf{Q}$ 改为 $\mathbf{R}$，其结论仍然成立. 当然这里只用到它的必要条件部分.

2° 存在零元 $\mathbf{0}$ ①,对任何 $\alpha\in\mathbf{R}$ 有 $\alpha+\mathbf{0}=\alpha$.

3° 对任何 $\alpha\in\mathbf{R}$,存在反元 $-\alpha\in\mathbf{R}$,使得 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$.

4° 若 $\alpha<\beta$,则 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$(加法的单调性).

证 1° 显然.

2° 以一切负有理数为下类的 0^* 满足零元要求. 事实上,设 A 为 α 的下类,则对任一 $x\in A$ 及 $y<0$ 都有 $x+y<x$,故 $x+y\in A$,从而 $\alpha+0^*\leqslant\alpha$. 另一方面. 若 A 无端,则对任何 $x\in A$,存在 $x_1>x$,且 $x_1\in A$. 从而 $x=x_1+(x-x_1)$,其中 $x-x_1<0$. 于是又有 $\alpha+0^*\geqslant\alpha$. 这就得到 $\alpha+0^*=\alpha$. 由于零元的唯一性②,今后将一直把 0^* 写作 $\mathbf{0}$.

3° 设 $\alpha=(A,A')$,现在证明 $(-A',-A)$ 满足要求,易见 $(-A',-A)$ 是一个分划. 暂将它写作 $-\alpha$. 由于 $A+(-A')=A-A'$ 中的元素恒为负有理数,故 $\alpha+(-\alpha)\leqslant\mathbf{0}$. 另一方面,由引理 3 对任给 $\varepsilon>0$,总存在 A' 中的数 a' 与 A 中的数 a,使得 $0\leqslant a'-a<\varepsilon$,故有 $\alpha+(-\alpha)\geqslant\mathbf{0}$. 从而得 $\alpha+(-\alpha)=\mathbf{0}$. 由于反元的唯一性. 今后将一直把 $(-A',-A)$ 写作 $-\alpha$.

4° 设 $\alpha<\beta$,由定义 $A\subset B$. 于是有 $A+C\subseteq B+C$,所以 $\alpha+\gamma\leqslant\beta+\gamma$. 另一方面,倘若 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$,则两边各加 $-\gamma$ 将有 $\alpha=\beta$. 这与假设相矛盾,故应有 $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$.

□

五 R 中的乘法

在定义 $\mathbf{R}$ 中乘法之前先介绍一个与引理 3 相类似的定理.

定理 7 对任何分划 $\alpha=(A,A')>0$ 及任何有理数 $k>1$,存在 $\alpha\in A$, $a'\in A'$ 使 $\dfrac{a'}{a}=k$.

证 与引理 3 的证明相仿,只需将那里的等差序列改用等比序列 $\{ck^n\}$ 就可以了. □

定义 5 设 $\alpha=(A,A')$,则在 A, A' 两类中有一个且仅有一个不包含 0,也就是说该类中元素皆同号,我们称这个类为分划 α 的同号类,记作 $\overline{A}$.

由定义 5 可见,当 $\alpha>\mathbf{0}$ 时,其同号类是上类,当 $\alpha<\mathbf{0}$ 时,则下类为其同号类,若 $\alpha=\mathbf{0}$,则不定.

定理 8(同号类的标志) $\mathbf{Q}$ 的不空子集 M 成为某分划的同号类的充要条件是:

1° M 中只含同号的数;

---

① 这里 $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中零元,以区别 $\mathbf{Q}$ 中零元 0,当把 $\mathbf{R}$ 中零元等同于 $\mathbf{Q}$ 中零元后,就统一用 0 表示零元,下一段 $\mathbf{R}$ 中单位元也用同样的表示方式.

② 设 $\mathbf{0}_1$ 和 $\mathbf{0}_2$ 为两个零元,由于 $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$,所以零元是唯一的. 用同样的方法读者可证反元和下一段讲到的逆元也具有唯一性.

2° 若 $x\in M$,则对任何正有理数 h,$x(1+h)\in M$.

这个定理的证明读者容易自行推得.

定义 6 设 α 的同号类为 $\overline{A}$,β 的同号类为 $\overline{B}$,我们定义 $\alpha\cdot\beta$ 为 $\{x\cdot y\mid x\in\overline{A},y\in\overline{B}\}$,也就是 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 为其同号类的分划.

注意定义 6 中的 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 确实是某个分划的同号类. 因为由定理 7(同号类的标志)知满足 1°是显然的. 又若 $xy\in\overline{A}\cdot\overline{B}$,则由于

$$(1+h)=\left(1+\frac{h}{2+h}\right)\cdot\left(1+\frac{h}{2}\right),$$

有

$$xy(1+h)=x\left(1+\frac{h}{2+h}\right)\cdot y\left(1+\frac{h}{2}\right).$$

由同号类标志右边属于 $\overline{A}\cdot\overline{B}$,故左边亦属于它,即 2°也满足.

定理 9 **R** 中的乘法具有下列性质:对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$,

1° $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$(交换律),$(\alpha\cdot\beta)\gamma=\alpha(\beta\cdot\gamma)$(结合律).

2° 同号相乘得正,异号相乘得负①,乘 0 得 0.

3° $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$(分配律).

4° 存在单位元 1,它对任何 α 都有 $\alpha\cdot 1=\alpha$.

5° 对任何 $\alpha\neq 0$,存在逆元 α^{-1} 使 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$.

6° 若 $\alpha<\beta$ 且 $\gamma>0$,则 $\alpha\gamma<\beta\gamma$.

证 1°显然.

2° 易见当 α,β 同号时,有 $\alpha\cdot\beta\geqslant 0$,当 α,β 异号时,则有 $\alpha\cdot\beta\leqslant 0$. 现在只需证明 α,β 均不为 0 时,$\alpha\cdot\beta\neq 0$. 事实上,如果 $\alpha,\beta\neq 0$,则在 0 与 $\overline{A}$ 之间必存在某有理数 a,同样在 0 与 $\overline{B}$ 之间也必存在某有理数 b. 因而 $a\cdot b$ 必在 0 与 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 之间,也就是说 $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

3° (i) 先假定 α,β 同号,且 $\gamma\neq 0$. 我们只需证明 $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ 两边有相等的同号类即可. 由于两个同号分划的和的同号类等于它们的同号类的和,因此有下列一连串的等式:

$$\begin{aligned}\overline{(A+B)C}&=\overline{(A+B)}\cdot\overline{C}=(\overline{A}+\overline{B})\cdot\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot\overline{C}\\&=\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC+BC}.\end{aligned}$$

这里只有中间那个等式需要说明一下,等式左边和右边的一般项分别为

$$(a+b)c\text{ 和 }ac_1+bc_2,\text{其中 }a\in\overline{A},b\in\overline{B},c,c_1,c_2,\in\overline{C}.$$

显然前者是后者的特例. 但由于 a 与 b 同号,ac_1+bc_2 必然在 $(a+b)c_1$ 与 $(a+b)c_2$ 之间,故后者也是前者的特例. 从而等式成立.

---

① 同有理数一样,若 $\alpha>0$,则称 α 为正元;若 $\alpha<0$,则称 α 为负元.

(ii) 对于一般情况,当 α,β,γ 和 $\alpha+\beta$ 皆不为 0 时,可如下证明. 设 α,β 不是同号. 对等式 $\alpha+\beta=(\alpha+\beta)$ 作移项得 $(\alpha+\beta)+(-\alpha)=\beta$ 或 $(\alpha+\beta)+(-\beta)=\alpha$. 这两个式子中总有一个左边有两个同号的被加项,不妨设是其中第一式,那么对该式应用(i)并利用关系 $(-\alpha)\gamma=-\alpha\gamma$① 再作一次移项就行了. 若 $\alpha\beta$ 中有一个为 0,那就更不成问题了.

4° 1^* 满足作为单位元的要求. 事实上 1^* 的同号类为 $\{1+h\mid h\in Q$ 且 $h>0\}$. 设 $\bar{A}$ 为 α 的同号类,x 为 $\bar{A}$ 中任一数,$h>0$,则 $\bar{A}\cdot\bar{1}^*$ 之一般项为 $x(1+h)$. 又由 $\bar{A}$ 为同号类,所以 $x(1+h)\in\bar{A}$,从而 $\bar{A}\cdot\bar{1}^*\subset\bar{A}$. 另一方面,假设 $\bar{A}$ 无端,则对任何 $x\in\bar{A}$,存在 $x'\in\bar{A}$ 使 $\dfrac{x}{x'}>1$,从而 $x=x'\cdot\dfrac{x}{x'}$,这里 $\dfrac{x}{x'}\in\bar{1}^*$,故又有 $\bar{A}\subset\bar{A}\cdot\bar{1}^*$,这就推得 $\alpha\cdot 1^*=\alpha$. 由于单位元的唯一性,今后将 1^* 写作 1.

5° 设 $\alpha\neq 0$,且 α 的同号类为 $\bar{A}$. 现在证明以

$$\bar{A}^{-1}=\{\gamma^{-1}\mid \gamma\text{ 在 }0\text{ 与 }\bar{A}\text{ 之间}\}$$

为同号类的分划满足逆元的要求. 首先易见它是一个分划,暂把它写作 α^{-1}. 对 $x\in\bar{A},\gamma^{-1}\in\bar{A}^{-1}$ 有 $x\gamma^{-1}>1$,故 $\alpha\cdot\alpha^{-1}=1$. 又由引理 4 知存在 $x\in\bar{A},\gamma^{-1}\in\bar{A}^{-1}$,使 $x\gamma^{-1}$ 和 1 可接近到事先指定的任何程度. 故 $\alpha\alpha^{-1}\leqslant 1$,从而等式成立. 我们今后将 α 的逆元写作 α^{-1}.

6° 设 $\alpha<\beta$,由加法性质 4°两边各加 $-\alpha$ 得 $\beta-\alpha>0$. 由于过程可逆知道:$\alpha<\beta$ 当且仅当 $\beta-\alpha>0$. 因分配律对差也成立②,有 $(\beta-\alpha)\gamma=\beta\gamma-\alpha\gamma$. 再由正乘正得正,故 $\beta\gamma-\alpha\gamma>0$. 从而又有 $\alpha\gamma<\alpha\beta\gamma$. □

六 R 作为 Q 的扩充

通过对应 $r\leftrightarrow r^*$,Q 与 R 的子集 Q^* 之间建立了一对一的映射.

定理 10 对于 Q 与 R 的子集 Q^* 之间的映射 $r\leftrightarrow r^*$ 具有如下性质:

1° 保序性 即 $a<b(a=b)$ 当且仅当 $a^*<b^*(a^*=b^*)$;

2° 保持加法和乘法两个运算,即

$$(a+b)^*=a^*+b^*,(a\cdot b)^*=a^*\cdot b^*.$$

证 关于保序性是显然的,故只证后一结论.

关于加法,我们比较下类. 由于

$$(a+b)^*\text{ 的下类}=\{z\mid z<a+b\},$$
$$a^*+b^*\text{ 的下类}=\{x+y\mid x<a,y<b\}.$$

因 $x<a,y<b$ 时有 $x+y<a+b$,故 $a^*+b^*\subset(a+b)^*$. 另一方面,因任一 $z<a+b$ 恒可表

---

① 这实际上是 $\alpha+\beta=0$ 时的特例,它可由比较两边同号类而得到.

② $(\alpha-\beta)\gamma+\beta\gamma=[(\alpha-\beta)+\beta]\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma$,等式两边加 $(-\beta\gamma)$ 即得 $(\alpha-\beta)\gamma=\alpha\gamma-\beta\gamma$.

示为 $z=\left(a-\frac{a+b-z}{2}\right)+\left(b-\frac{a+b-z}{2}\right)$,故相反的包含关系也成立.

关于乘法,比较它们的同号类. 由于

$$(a\cdot b)^* \text{ 的同号类} = \{ab(1+h) \mid h>0\}.$$

$$a^*\cdot b^* \text{ 的同号类} = \{a(1+s) \mid s>0\}\cdot\{b(1+t) \mid t>0\}.$$

因 $(1+s)(1+t)>1$,故

$$a^*\cdot b^* \text{ 的同号类} \subset (a\cdot b)^* \text{ 的同号类}.$$

另一方面,因 $(1+h)=\left(1+\frac{h}{2+h}\right)\left(1+\frac{h}{2}\right)$,故相反的包含关系也成立. □

这个定理说明,在这个映射下 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{Q}^*$ 具有同构关系,从而可以把它们等同起来,把 $\mathbf{R}$ 看作是 $\mathbf{Q}$ 的扩充,把无端分划称为**无理数**,称 $\mathbf{R}$ 为**实数集**.

最后一项工作是必须指出 $\mathbf{R}$ 中运算的唯一性.

定理 11 在 $\mathbf{R}$ 中的加、乘、求反元、求逆元等运算是唯一的,即从等价的分划出发,得到的结论也是等价的,且只能在有端分划的情形下出现形式上的差异.

证 仅就乘法来证明. 设 $\overline{A},\overline{B}$ 分别为 α,β 的同号类. 为简便起见设 $\overline{A}$ 有端为 a,$\overline{B}$ 无端. 我们证明 $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A}^\circ\overline{B}$(这里 $\overline{A}^\circ$表示去掉端的 $\overline{A}$). 由于 $\overline{A}\cdot\overline{B}=a\cdot\overline{B}\cup\overline{A}^\circ\overline{B}$,所以只需指出 $a\cdot\overline{B}\subset\overline{A}^\circ\overline{B}$ 即可. 事实上,对任一 $b\in\overline{B}$,由于 $\overline{B}$ 无端,故当 h 充分小时,$\frac{b}{1+h}\in\overline{B}$. 又因 $a\cdot b=a(1+h)\frac{b}{1+h}$,而 $a(1+h)\in\overline{A}^\circ$,可见 $a\cdot b\in\overline{A}^\circ\overline{B}$. 因此,只有 $\overline{A},\overline{B}$ 皆无端时,$\overline{A}\cdot\overline{B}$ 才会比 $\overline{A}^\circ\cdot\overline{B}^\circ$多出一个 $a\cdot b$. □

由于每一分划都是由它的下类或上类来确定的,因此,完全可由全体分划的下类(或上类)所组成集合 R'来代替原来的分划集. 不仅如此,当用下类(或上类)来定义实数时,也可以硬性规定统一的形式. 如规定下类(或上类)一律无端来达到表示的唯一性. 但不管采用哪一种方式,都可以相应地定义序和运算来达到相同的扩充目的.

七 实数的无限小数表示①

为了实用的目的,人们需要给实数一种方便的表示形式,使它既易于比较大小,又便于运算和估计以至达到任意精确的程度,无限小数就是这样的一种表示形式.

定理 12 对任一实数 $\gamma\in[0,1)$都唯一地对应着一个整数数列 $\{c_n\}$,其中

① 在本段中只用到实数域的性质(主要是阿基米德性和区间套定理),而与实数的具体定义方式无关. 因此本段可独立阅读.

c_n 为 $0,1,\cdots,9$ 中的某一数,且有无限个 $c_n<9$ 使得有理数列 $\{a_n\}$,$a_n=0.c_1\cdots c_n$①满足不等式:

$$a_n \leqslant \gamma < a_n + 10^{-n}, n = 1,2,\cdots. \tag{2}$$

反之,任一满足上述关于 c_n 条件的整数数列 $\{c_n\}$,必存在唯一实数 $\gamma\in[0,1)$,使不等式(2)成立.

证　首先证明,若实数 $\gamma\in[0,1)$,则存在整数数列 $\{c_n\}$ 且满足不等式(2).为此,将闭区间 $[0,1]$ 十等分,令 $0.c_1$ 为分点:$0,0.1,\cdots,0.9$(不考虑右端点)中不超过 γ 的最大数,于是 $0.c_1\leqslant\gamma<0.c_1+10^{-1}$. 再对区间 $[0.c_1,0.c_1+10^{-1}]$ 十等分,令 $0.c_1c_2$ 为分点:$0.c_1,0.c_11,\cdots,0.c_19$(不考虑右端点)中不超过 γ 的最大数,于是 $0.c_1c_2\leqslant\gamma<0.c_1c_2+10^{-2}$. 照此无限进行下去,它的第 n 步便是(2)式.

还要证明在所有 c_n 中,必有无限多个小于 9. 事实上,假如当 $n>r$ 后均有 $c_n=9$,则这时出现

$$a_n = 0.c_1\cdots c_r9\cdots9.$$

由于 $\gamma\geqslant a_n$,将有

$$\gamma - a_r \geqslant \frac{1}{10^r}\sum_{k=1}^{n-r}\frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^r}\left(1 - \frac{1}{10^{n-r}}\right).$$

这表明当 n 充分大时上式右边可任意接近于 10^{-r},但由(2)$\gamma-a_r$ 应为小于 10^{-r} 的定数,矛盾!

其次证明 γ 的存在性. 设 $\{c_n\}$ 满足定理中关于 c_n 的条件,显然 $\{a_n\}$ 为递增数列. 置 $a_n+10^{-n}=b_n$,则因

$$b_{n-1} - b_n = 10^{-(n-1)} - (c_n + 1)10^{-n}\begin{cases} = 0, 当\ c_n = 9, \\ > 0, 当\ c_n < 9\end{cases}$$

可知 $[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$ 构成区间套. 又因 $b_n-a_n=10^{-n}\to0\ (n\to\infty)$,故由区间套定理存在唯一实数 γ,满足 $a_n\leqslant\gamma\leqslant b_n$,$n=1,2,\cdots$. 但因有无限多个 $c_n<9$,从而 $\{b_n\}$ 中无最小项. 因此对任何 n,$\gamma\neq b_n$,这样就得到(2).

最后证明对应的唯一性. 先证明不同实数对应不同的数列. 事实上,若实数 γ,δ 都对应同一数列 $\{c_n\}$,则由(2)可得不等式 $|\gamma-\delta|<10^{-n}$ 对任何 n 成立,从而有 $\gamma=\delta$. 再证明不同的数列为不同的实数所对应. 设 γ 对应于 $\{c_n\}$,δ 对应于 $\{d_n\}$. 如果当 $n<r$ 时,$c_n=d_n$,但 $c_r<d_r$,则由(2)有

$$\gamma < 0.c_1\cdots c_r + 10^{-r} \quad 及 \quad \delta \geqslant 0.c_1\cdots c_{r-1}d_r,$$

故由 $c_r<d_r$ 就得到 $\gamma<\delta$. 从而不同的数列对应的实数也不同.　□

① 在此采取了通常十进位小数记法,即 $0.c_1\cdots c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{ck}{10^k}$.

现在利用定理 11 的结果给$[0,1)$内的任一实数一种方便的记法：

$$\gamma = 0.c_1c_2\cdots.$$

它不外乎是定理 11 中那一列不等式的缩写，有了这个记法，任何实数都可写作

$$\gamma = c_0 + 0.c_1c_2\cdots①, \tag{3}$$

其中 c_0 为整数. (3)式称为实数 γ 的无限小数表示，而有限小数

$$c_0 + 0.c_1\cdots c_n \quad 和 \quad c_0 + 0.c_1\cdots c_n + 10^{-n}$$

分别称为 γ 的(n 阶)不足近似值和过剩近似值，它们一起构成足以确定 γ 的区间套.

八　无限小数四则运算的定义

我们将应用无限小数递增有界数列必“稳定”于某个小数这一重要性质来建立无限小数的四则运算. 以下讨论的都是非负小数.

设

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{1}$$

是小数数列，若对所有 $k=1,2,\cdots$，有 $x_k \leqslant x_{k+1}$，数列(1)称为递增数列. 若存在整数 M，使对于所有 $k=1,2,\cdots$，有 $x_k \leqslant M$，则称数列(1)有上界.

若数列的项 x_n 都是整数，并能找到 n_0，对于所有 $n>n_0$，有 $x_n=\xi$，则称数列稳定于 ξ. 容易看出，若整数数列递增，并且有上界 M，那么这数列必稳定于某一整数 $\xi \leqslant M$.

现在考虑小数数列

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{10}.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\cdots \\ a_2 &= \alpha_{20}.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n &= \alpha_{n0}.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

(2)的右边相当于一个无限矩阵.

定义 7　若对任意 $k=0,1,2,\cdots$，(2)的第 k 列$\{\alpha_{nk}\}$稳定于 γ_k，则称数列(2)稳定于 $a=\gamma_0.\gamma_1\gamma_2\gamma_3\cdots$，记作

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

其中 γ_0 是整数，$\gamma_k(k=1,2,\cdots)$是$\{0,1,2,\cdots,9\}$中某个数字.

定理 13　若递增数列(2)有上界 M，则数列必稳定于满足下列不等式的某个数 a：

---

① 如果 c_n 从某项起均为 0，可将这些 0 省略而得到有限小数. 又若 $c_0 \geqslant 0$，还可简单地写作 $\gamma = c_0.c_1c_2\cdots$.

$$a_n \leqslant a \leqslant M \qquad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

证 由于矩阵(2)的零列也是递增的，而且有上界 M，因此零列的整数稳定于某一非负整数 $\gamma_0 \leqslant M$. 现用归纳法来证明. 假若已证明矩阵(2)中下标不大于 k 的各列分别稳定于 $\gamma_0.\gamma_1,\cdots,\gamma_k$，而且

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k \leqslant M \quad (\gamma_1,\cdots,\gamma_k \text{是数字}).$$

现需证明(2)的第(k+1)列必稳定于某一数字 γ_{k+1}，而且有不等式

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant M. \tag{5}$$

事实上，当 n_1 充分大时，且 $n>n_1$ 时，a_n 的小数表示可写为

$$a_n = \gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k a_{n,k+1}a_{n,k+2}\cdots \leqslant M.$$

因为 a_n 是递增的，所以对上述 n，数字 $a_{n,k+1}(\leqslant 9)$ 递增，于是当 $n>n_2$(n_2 充分大)时，$\{a_{n,k+1}\}$ 将稳定于某一数字 γ_{k+1}，而且

$$\gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M \quad (n > n_2),$$

这就证明了不等式(5)和 $a_n \rightrightarrows a=\gamma_0.\gamma_1\gamma_2\cdots$，于是可推出(4)中第二个不等式.

现证对所有 n，$a_n \leqslant a$. 若结论不成立，则可以找到自然数 n，使得 $a<a_n$. 因此，对某个 k 有

$$a_n = \gamma_0.\gamma_1\cdots\gamma_k a_{n,k+1}a_{n,k+2}\cdots,$$

并且 $\gamma_{k+1}<a_{n,k+1}$. 当 n 无限增大时，$a_{n,k+1}$ 递增，并稳定于数 γ_{k+1}，由此得到 $\gamma_{k+1}<\gamma_{k+1}$ 的矛盾. □

给定两个小数 $x=\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\cdots$，$y=\beta_0.\beta_1\beta_2\cdots$，用 $x^{(n)}$ 表示 x 的 n 位不足近似值，则 $x^{(n)}+y^{(n)}=\alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n+\beta_0.\beta_1\cdots\beta_n$.

定理 14 在上述记号下，

$$\begin{aligned}
&x^{(n)} + y^{(n)};\\
&(x^{(n)}\cdot y^{(n)})^{(n)};\\
&x^{(n)} - (y^{(n)} + 10^{-n}) \quad (x > y > 0),\\
&\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \quad (y > 0)
\end{aligned} \tag{6}$$

都是递增有界数列，所以分别稳定于某个数.

证 由于

$$x^{(n)} + y^{(n)} \leqslant \alpha_0 + 1 + \beta_0 + 1;$$

$$(x^{(n)}\cdot y^{(n)})^{(n)} \leqslant (\alpha_0 + 1)(p_0 + 1);$$

$$x^{(n)} - (y^{(n)} + 10^{-n}) \leqslant \alpha_0 + 1;$$

$$\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0 + 1}{\beta_0.\beta_1\cdots\beta_s} \quad (\text{其中 } s \text{ 使得 } \beta_s > 0),$$

因此所有数列都是有界的，因为当 n 增大时，$x^{(n)}$ 递增，$y^{(n)}+10^{-n}$ 递减，易见(6)

中各数列是递增的. 由定理 13,即有(6)中各数列稳定于某个数. □

定义 8 对任意两个无限小数 x,y,我们定义 $x+y,x\cdot y,x-y$ 为

$$x^{(n)}+y^{(n)}\rightrightarrows x+y;$$

$$(x^{(n)}\cdot y^{(n)})^{(n)}\rightrightarrows x\cdot y;$$

$$x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})\rightrightarrows x-y\quad(x>y>0);$$

$$\left(\frac{x^{(n)}}{y^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)}\rightrightarrows\frac{x}{y}\quad(y>0).$$

由此可知:当 $x>y>0$ 时,必存在 n,使得 $x^{(n)}-(y^{(n)}+10^{-n})>0$.