2.1 数列的极限

一、数列的概念

二、数列极限的定义

三、收敛数列的性质

四、极限存在准则

一、数列的概念

定义:按自然数1,2,3,$\cdots$编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为<u>无穷数列</u>,简称<u>数列</u>. 其中的每个数称为数列的<u>项</u>, x_n称为<u>通项(一般项)</u>. 数列(1)记为$\{x_n\}$.

例如 $2,4,8,\cdots,2^n,\cdots;$ $\{2^n\}$

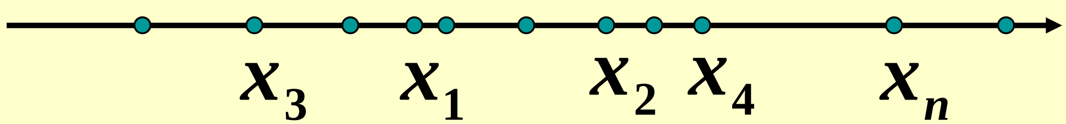
$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots;$ $\{\frac{1}{2^n}\}$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots; \qquad \{(-1)^{n-1}\}$$

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots; \qquad \{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\}$$

$$\sqrt{3},\sqrt{3+\sqrt{3}},\cdots,\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}},\cdots$$

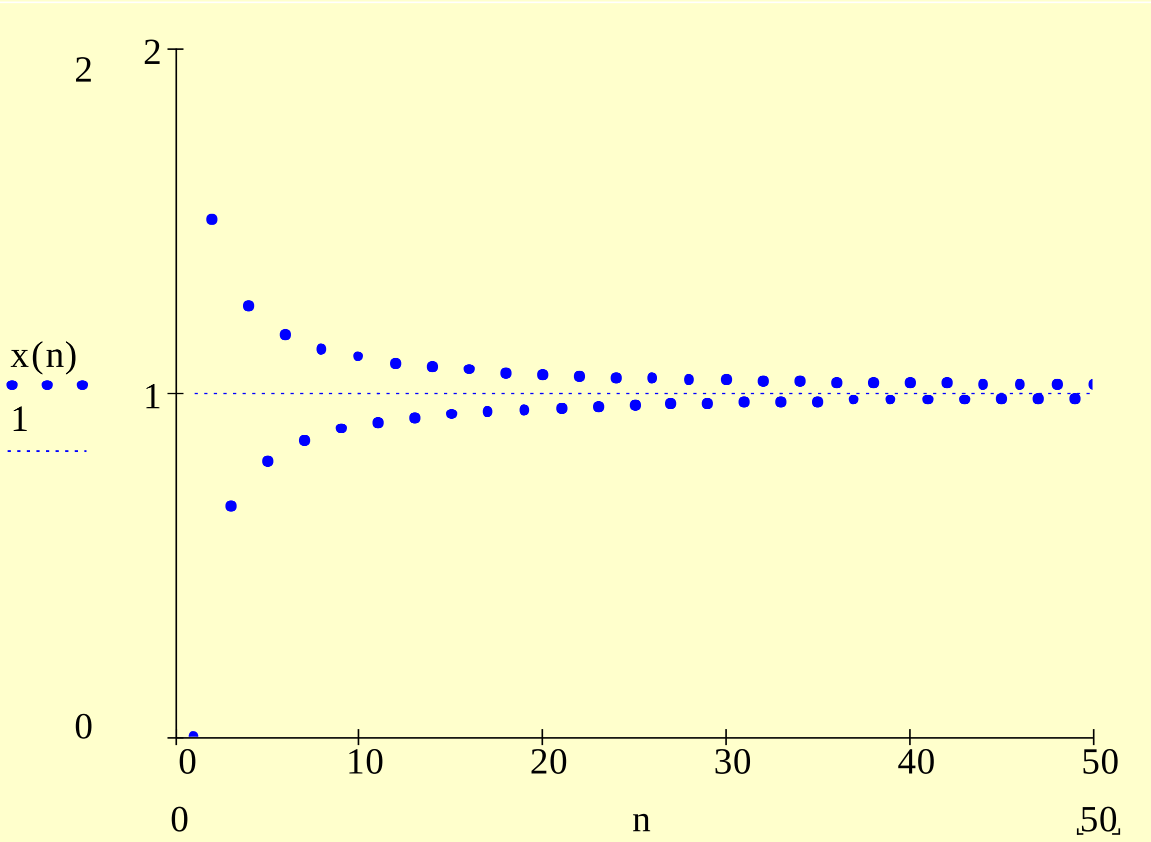
注意： 1.数列对应着数轴上一个点列.可看作一动点在数轴上依次取 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$.



2.数列是整标函数 $x_n = f(n)$.

二、数列极限的定义

观察数列$\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$当$n\to\infty$时的变化趋势.



问题：当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一确定的数值?如果是,如何确定?

通过上面演示实验的观察：

当 n 无限增大时, $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 无限接近于1.

问题："无限接近"意味着什么?如何用数学语言刻划它.

$$\because \quad |x_n - 1| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

给定 $\frac{1}{100}$, 由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$, 只要 $n > 100$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$,

给定 $\frac{1}{1000}$, 只要 $n > 1000$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$,

给定 $\frac{1}{10000}$, 只要 $n > 10000$ 时, 有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon > 0$ (无论 ε 多么小), 只要 $n > N\left(=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)$ 时,

就有 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立.

定义 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正整数N,使得对于$n > N$时的一切x_n,不等式$|x_n - a| < \varepsilon$都成立,那末就称常数a是数列x_n的极限,或者称数列x_n收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{或}\ x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

例如: $\lim\limits_{n\to\infty}[1+\dfrac{(-1)^n}{n}] = 1$

上述定义可归纳为

$$\varepsilon - N\text{语言：}\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当} n > N \text{时，有} |x_n - a| < \varepsilon.$$

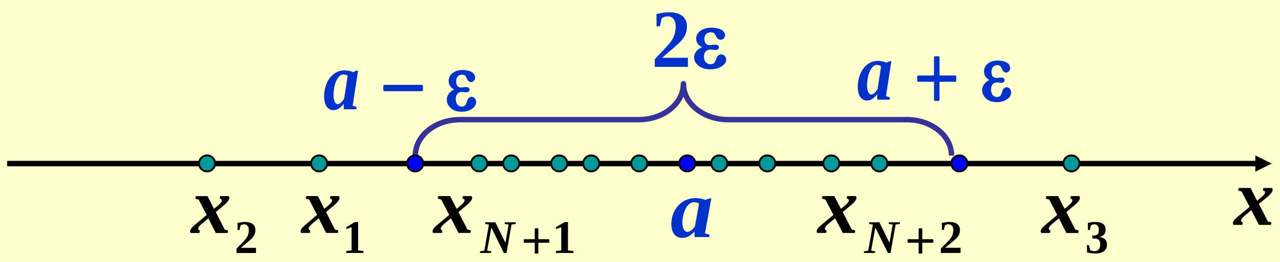
注意： 1.ε — 任意性，越小越好，对某些固定的ε不行；

2.N — 存在性，与ε有关，但不要求最小；

3.$|x_n - a| < \varepsilon$ 对 $\forall n > N$ 成立，刻画了 x_n与a的接近程度；

4. $\varepsilon - N$语言没有给出求a的方法。

几何解释:



当$n > N$时, 所有的点x_n都落在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内, 只有有限个(至多只有$N$个)落在其外.

注意: 数列极限的定义虽然没有给出求极限的方法，但可用它验证和证明极限.

例1. 已知 $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n}$, 证明数列$\{x_n\}$的极限为1.

证: $\left|x_n - 1\right| = \left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$

$\forall\,\varepsilon > 0$, 要使 $\left|x_n - 1\right| < \varepsilon$, 即 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$

因此, 取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$\left|\dfrac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n} = 1.$

思考: 这里取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon}]$ 也可以, 为什么?

例2. 设$|q|<1$, 证明等比数列 $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$ 的极限为 0 .

证: $|x_n - 0| = |q^{n-1} - 0| = |q|^{n-1}$

$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $|q|^{n-1} < \varepsilon$, 即 $(n-1)\ln|q| < \ln\varepsilon$, 亦即 $n > 1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$.

因此, 取 $N = \left[1 + \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \right] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$|q^{n-1} - 0| < \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$.

例3. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\sin n}=1.$

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使

适当放大

$$\left|\frac{n^2}{n^2+\sin n}-1\right|=\left|\frac{\sin n}{n^2+\sin n}\right|\le\frac{1}{n^2-1}<\varepsilon\ (n>1),$$

只需 $n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}+1}.$ 取 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}+1}\right]+1$, 则当 $n>N$, 必有

$$\left|\frac{n^2}{n^2+\sin n}-1\right|<\varepsilon,$$

由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\sin n}=1.$

常见数列的极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(|q|<1)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1(a>0)$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

例4. 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证: 令 $\sqrt[n]{n}-1=t$, 当$n>1$时，$t>0$. 由二项展开式，得

$$n=(1+t)^n=1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\cdots>\frac{n(n-1)}{2}t^2$$

$$\Rightarrow\quad 0<t=\sqrt[n]{n}-1\le\sqrt{\frac{2}{n-1}}\quad(n>1)$$

$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$, 则当$n>N$时，必有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon,$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

$\varepsilon - N$语言： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon.$

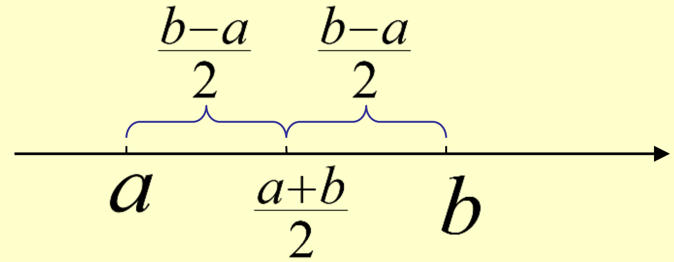
问题：如何用肯定的语气叙述 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$?

答：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a \quad \Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in N^+, \exists n_0 > N,$ 使得 $|x_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0.$

这是用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$ 的具体方法.

三、收敛数列的性质



1. 收敛数列的极限唯一.

证: 用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且 $a < b$.

取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 故存在 N_1, 使当 $n > N_1$ 时,

$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $x_n < \frac{a+b}{2}$

同理, 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 故存在 N_2, 使当 $n > N_2$ 时, 有

$|x_n - b| < \frac{b-a}{2}$, 从而 $x_n > \frac{a+b}{2}$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, x_n 满足的不等式

矛盾. 故假设不真！因此收敛数列的极限必唯一.

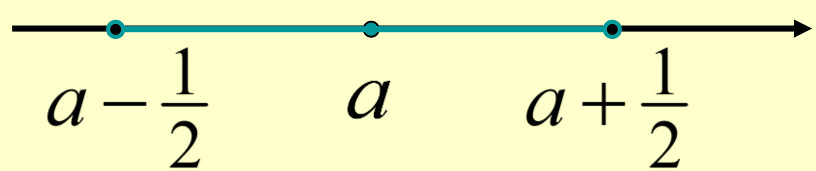
例5. 证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 是发散的.

证: 用反证法.

假设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则有唯一极限 a 存在 .

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则存在 N, 使当 $n>N$ 时，有

$$a-\frac{1}{2}<x_n<a+\frac{1}{2}$$



但因 x_n 交替取值 1 与 −1，而此二数不可能同时落在长度为 1 的开区间 $(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2})$ 内, 因此该数列发散 .

2. 收敛数列一定有界.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，取 $\varepsilon = 1$，则 $\exists N$，当 $n > N$ 时，有

$|x_n - a| < 1$，从而有

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

取 $$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1+|a|\}$$

则有 $$|x_n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

由此证明收敛数列必有界.

说明：此性质反过来不一定成立. 例如,

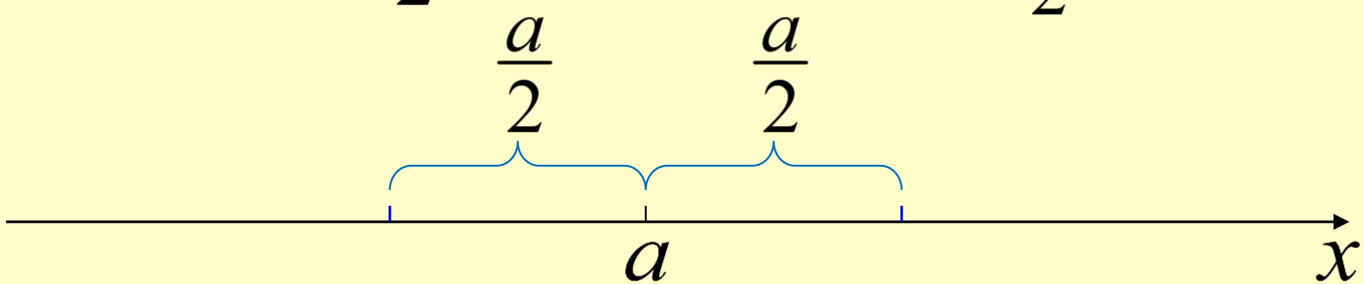
数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 虽有界但不收敛.

3. 收敛数列的保号性.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 且 $a > 0 \ (< 0)$, 则$\exists N \in \mathrm{N}^+$,当$n > N$时, 有$x_n > 0 \ (< 0)$.

证: 对 $\boldsymbol{a > 0}$ **,** 取 $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 则$\exists N \in \mathrm{N}^+$,当$n > N$时,

$$\left| x_n - a \right| < \frac{a}{2} \Longrightarrow x_n > a - \frac{a}{2} > 0$$



推论: 若数列从某项起 $x_n \ge 0 \ (\le 0)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

则 $a \ge 0 \ (\le 0)$. **(用反证法证明)**

子列定义：

定义：设$\{a_n\}$为数列,$\{n_k\}$为正整数集 N^+ 的无限子集，且 $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, 则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的一个子列, 简记为$\{a_{n_k}\}$.

注： $n_k \geq k$，为什么？

4. 收敛数列的任一子数列都收敛，且有相同的极限 .

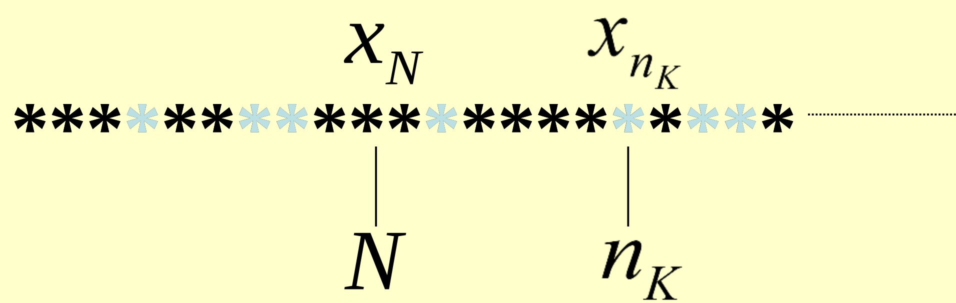
证：设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列 .

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\underline{\forall\, \varepsilon > 0}$, $\exists\, N$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left| x_n - a \right| < \varepsilon$$

现取正整数 K, 使 $n_K \ge N$, 于是当 $k > K$ 时, 有

$n_k > n_K \ge N$



从而有 $\underline{\left| x_{n_k} - a \right| < \varepsilon}$, 由此证明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

4. 收敛数列的任一子数列都收敛，且有相同的极限．

注1: 若数列有两个子数列收敛于不同的极限，

或有一个发散的子列，则原数列一定发散．

例如，$x_n = (-1)^{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 发散！

因为，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1 \neq \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = -1.$

注2: 一个常用结论：

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = a.}$$

注3: (致密性定理)有界数列必含有收敛子列.

5. 四则运算性质

定理：设$\lim\limits_{n\to} a_n = a, \lim\limits_{n\to} b_n = b$,　k为常数,则有

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b;$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = a\, b;$　$(\lim\limits_{n\to\infty}(k\, x_n) = ka);$

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a / b \quad (b \neq 0).$

注： 结论可以推广到任意有限项情形.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to} x_n = a, \lim\limits_{n\to} y_n = b,$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

证： 对 $\forall \varepsilon > 0,$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \Rightarrow \exists N_1 > 0$ ，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,\quad \Rightarrow \exists N_2 > 0$ ，当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$

取 $N = \max\{N_1, N_2\},$ 则当 $n > N$ 时上述两不等式同时成立，

从而有

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定义，知

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to} x_n = a, \lim\limits_{n\to} y_n = b,$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$

证: 由收敛数列的有界性定理 $\exists M > 0$, 对一切 $\boldsymbol{n}$ 有 $|y_n| < M$.

对 $\forall \varepsilon > 0,$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \Rightarrow \exists N_1 > 0$ ，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon,$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \quad \Rightarrow \exists N_2 > 0$ ，当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - b| < \varepsilon,$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时上述两不等式同时成立，

从而有 $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)|$

$$\leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| < (M + |a|)\varepsilon,$$

由 ε 的任意性及定义，知

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

(3) 设 $\lim\limits_{n\to} x_n = a, \lim\limits_{n\to} y_n = b(\neq 0)$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a / b.$

证: 对 $\forall \varepsilon > 0,$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \Rightarrow \exists N_1 > 0$ ，当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon,$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b, \quad \Rightarrow \exists N_2 > 0$ ，当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - b| < \varepsilon,$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b| > 0.$ 根据收敛数列的保号性 $\exists N_3 > 0$

使得 $n > N_3$ 时，有 $|y_n| > \frac{1}{2}|b| > 0.$,

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, 则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n b|} < \frac{2|y_n - b|}{b^2} < \frac{2}{b^2}\varepsilon$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} 1/y_n = 1/b.$

再由 (2) 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot \frac{1}{y_n}) = a \cdot \frac{1}{b} = a / b.$

例6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n + b_0} = \begin{cases} \dfrac{a_m}{b_m}, m = k, \\ 0, \quad m < k, \\ \infty, \quad m > k. \end{cases}$

其中 $a_m \neq 0, b_k \neq 0.$

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+1}{4n^3+2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}} = \dfrac{1}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{(-2)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+3} = \frac{1}{3}$$

四、数列极限存在准则

1. 迫敛性 **(P19 定理2.1.5)**

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (\, n = 1,\, 2,\, \cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

2. 单调有界原理**:**

定理：单调有界数列必有极限 **(P21，定理2.1.7)**

3. 致密性定理：（P20 注2.1.7）

有界数列必含有收敛子列.

4. 柯西(Cauchy)收敛准则：（P23 定理2.1.8）

定理：数列$\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：

对任给的$\varepsilon > 0$，存在正整数N,

使得当 $n,m > N$ 时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

1. 迫敛性:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n=1,2,\cdots) \\ (2)\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证: 由条件 (2) , $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N_1, N_2,$

当 $n > N_1$ 时, $|y_n - a| < \varepsilon$

当 $n > N_2$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \qquad a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

由条件 (1) $\quad a - \varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a + \varepsilon$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例7.证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$

证: 利用迫敛准则 . 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}< n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

求极限：

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n};\qquad (2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{p=1}^{n}p!}{n!};$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}],0<\alpha<1;$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^{2})\cdots(1+\alpha^{2^{n}}),\ |\alpha|<1.$$

(1)

$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$$

$$0<\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$$

$$<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2n-1}{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

(2)
$$a_n=\frac{\sum_{p=1}^{n}p!}{n!}=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+\frac{1}{n}+\left[\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]\quad(n\geqslant 2)$$

$$1\leqslant a_n<1+\frac{1}{n}+\frac{n-2}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 2)$$

(3) 由 $1+\frac{1}{n}>1(0<\alpha<1)$ 知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}<1+\frac{1}{n}$，又 $n^{\alpha}>0$，则

$$n^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}<n^{\alpha}+n^{\alpha-1}$$

即
$$(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}<n^{\alpha-1}=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

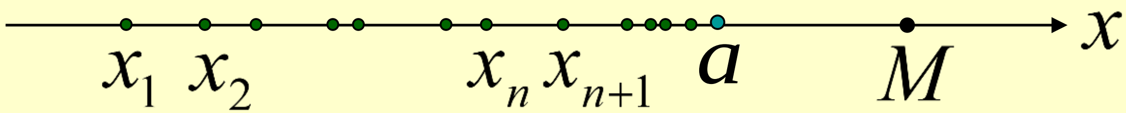
故有
$$0<(1+n)^{\alpha}-n^{\alpha}<\frac{1}{n^{1-\alpha}}(\alpha<1)$$

(4)
$$\lim_{n\to\infty}(1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\alpha^{2^{n+1}}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

2. 单调有界数列必有极限

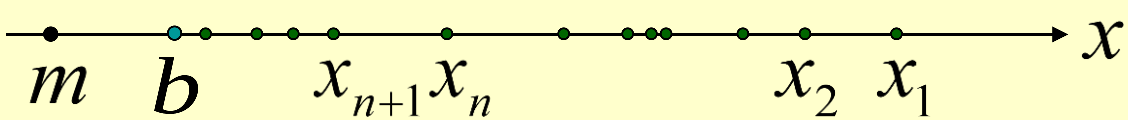
(1) 单调增有上界的数列必有极限.

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots \le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \ (\le M)$$



(2) 单调减有下界的数列必有极限.

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots \ge m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b \ (\ge m)$$



例8. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n \ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在 .

证: 利用二项式公式 , 有

$$
\begin{aligned}
x_n &= (1+\tfrac{1}{n})^n \\
&= 1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots \\
&\quad +\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots \\
&\quad +\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}
$$

$$x_n = 1 + 1 + \underline{\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})} + \underline{\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})}_{\text{大}} + \underbrace{\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}_{\text{大}} + \cdots$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})}_{\text{正}}$$

比较可知 $x_n < x_{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$

又 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

又 $$x_n=(1+\frac{1}{n})^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

根据单调有界原理可知，数列$\{x_n\}$有极限 .

记此极限为 e , 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

e 为无理数 , 其值为

$$e=2.718281828459045\cdots$$

例. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ ，证明： $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e.$

请自证.

趣题： $$(1+9^{-4^{6\times 7}})^{3^{2^{85}}} \approx ?$$

结果约等于多少？为什么？

例9. 证明数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}},\cdots$ 收敛, 并求其极限.

证：令 $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$, 易见数列 $\{a_n\}$ 是递增的.

现在用数学归纳法来证明数列 $\{a_n\}$ 是有上界的.

显然, $a_1=\sqrt{2}<2$. 假设 $a_n<2$, 则有 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$,

从而对一切 n 有 $a_n<2$. 即数列 $\{a_n\}$ 是有上界的.

由单调有界定理, 数列 $\{a_n\}$ 有极限,记为 a. 由于 $a_{n+1}^2=2+a_n$,

运用数列极限的四则运算法则, 当 $n\to\infty$ 时有

$$a^2=2+a,\ \text{或}(a+1)(a-2)=0,$$

即 $a=-1, a=2$. 前者不可能, 所以应有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2$.

例10. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \ (n \in N_+, p > 1)$,

证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证: 显然 $\{x_n\}$ 是递增的. 下证 $\{x_n\}$ 有上界. 事实上,

$$x_n \le x_{2^n-1} = 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) + (\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}) + (\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p})$$

$$+ \cdots + (\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p})$$

$$\le 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{2^{p-1}})^n}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} \ (n \in N_+).$$

于是由单调有界原理知, $\{x_n\}$ 收敛.

4. 柯西(Cauchy)收敛准则

定理： 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$，存在正整数N，使得当 $n, m > N$ 时有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

注： 两种等价形式：

$$\lim_{n\to\infty} a_n \,\exists \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n > N, \ \forall p \in N^+ : |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

注： 该定理从理论上完全解决了数列极限的存在性问题.

证明见P23.

直观意义：

收敛数列各项的值愈到后面, 彼此愈是接近, 以至充分后面的任何两项之差的绝对值可小于预先给定的任意小正数. 或者形象地说, 收敛数列的各项越到后面越是“挤”在一起.

优点：

柯西收敛准则把 $\varepsilon - N$ 定义中 a 与 a_n 的关系换成了 a_m 与 a_n 的关系, 其好处在于无需借助数列以外的数 a, 只要根据数列本身的特征就可以鉴别其敛散性.

例11. 设数列满足条件：$\left|a_{n+1}-a_n\right|<r^n, n=1,2,\cdots,$

其中 $r\in(0,1)$. 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证　若 $n<m$, 则

$$\left|a_n-a_m\right|\le\left|a_n-a_{n+1}\right|+\left|a_{n+1}-a_{n+2}\right|+\cdots+\left|a_{m-1}-a_m\right|$$

$$\le r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{m-1}=\frac{r^n-r^m}{1-r}<\frac{r^n}{1-r}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^n}{1-r}=0$, 于是 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, n>N,$

$$\left|\frac{r^n}{1-r}\right|<\varepsilon.$$

若 $m > n > N$, 就有

$$|a_n - a_m| \le \left|\frac{r^n}{1-r}\right| < \varepsilon.$$

由柯西准则, $\{a_n\}$ 收敛.

思考题：设数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$|a_{n+1} - a_n| \le b_n \ (n = 2, 3, \cdots),$$

$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$， $\{B_n\}$ 收敛.

证明：$\{a_n\}$ 收敛.

柯西(Cauchy)收敛准则:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \exists \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^+, \forall n > N,\ \forall p \in N^+ : |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

柯西(Cauchy)收敛准则的否定形式:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \not\exists \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall N \in N^+,\ \exists n_0, m_0 > N : |a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \not\exists \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall N \in N^+,$$

$$\exists n_0 > N,\ \exists p_0 \in N^+ : |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon_0.$$

例12. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 发散.

证 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\forall N > 0$, $\exists n_0 = N$, $m_0 = 2N$, 使得

$$\left| x_{n_0} - x_{m_0} \right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2N}$$

$$\geq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} \geq \varepsilon_0 .$$

由柯西收敛准则的否定形式知, $\{x_n\}$ 发散.

内容小结

1. 数列极限的 “$\varepsilon - N$” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限；四则运算性质

3. 极限存在准则:

迫敛准则；单调有界准则；致密性原理；柯西收敛准则

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

 方法1. 找一个趋于∞的子数列;

 方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1=1,\ x_{n+1}=1+2x_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时, 下述作法是否正确? 说明理由.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a=1+2a \Longrightarrow a=-1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

补充例题

1.设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ (n=1,2,\cdots)$，且 $x_1>0$, $a>0$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

利用极限存在准则

解： $\because x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a})=1$$

$\therefore$数列单调递减有下界，故极限存在，设 $\lim_{n\to\infty} x_n=A$

则由递推公式有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{A}{A})\Longrightarrow A=\pm\sqrt{a}$

$\because\ x_1>0$, $\therefore\ x_n>0$, 故 $\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

2. 设 $a_i \geq 0\,(i=1,2,\cdots)$，证明下述数列有极限 .

$$x_n = \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

证： 显然 $x_n \leq x_{n+1}$，即$\{x_n\}$单调增, 又

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+a_k)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)} = 1 - \frac{1}{1+a_1} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_k)}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} < 1 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n \text{ 存在}$$

$\boxed{\text{“拆项相消” 法}}$

3. 设 $x_n=\frac{\sin 1}{2^1}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$, $n=1,2,\cdots$.

求证 $\{x_n\}$ 收敛.

证 $\forall\varepsilon>0, \exists N=\frac{-\log\varepsilon}{\log 2}$, 当 $n>m>N$ 时, 有

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{m+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-m-1}}\right)$$

$$=\frac{2}{2^{m+1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-m}}\right)\leq\frac{1}{2^m}<\varepsilon \quad \Rightarrow \{x_n\}\text{ 收敛}.$$

下列表达式可否作为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$的定义?

1）$\forall\varepsilon>0$， $\exists N,\forall n>N$，有$|x_n - A| < c\varepsilon$（c为正常数）。

2）$\forall\varepsilon\in(0,1),\exists N$， $\forall n>N$，有$|x_n - A| \le \varepsilon$。

3）$\forall k$，（k为正整数）$\exists N$， $\forall n>N$，有$|x_n - A| < 1/k$。

4）$\forall N$， $\exists\varepsilon>0$， $\forall n>N$，有$|x_n - A| < \varepsilon$。

5）$\exists N$， $\forall\varepsilon>0$， $\forall n>N$，有$|x_n - A| < \varepsilon$。