1.5 Fourier级数

一、Fourier级数及其收敛性

二、展开函数为Fourier级数

三、Fourier级数的其他形式

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶(Baron Jean Baptiste Joseph Fourier，1768年3月21日-1830年5月16日)，法国欧塞尔人，著名数学家、物理学家。

1780年，就读于地方军校。1795年，任巴黎综合工科大学助教，跟随拿破仑军队远征埃及，成为伊泽尔省格伦诺布尔地方长官。1817年，当选法国科学院院士。1822年，担任该院终身秘书，后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席，敕封为男爵。主要贡献是在研究《热的传播》和《热的分析理论》，创立一套数学理论，对19世纪的数学和物理学的发展都产生了深远影响。

傅里叶在推导著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。傅里叶级数（即三角级数）、傅里叶分析等理论均由此创始，傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用。

由于傅里叶极度痴迷热学，他认为热能包治百病，于是在一个夏天，他关上了家中的门窗，穿上厚厚的衣服，坐在火炉边，结果因CO中毒不幸身亡，1830年5月16日卒于法国巴黎。

——百度百科

一、Fourier级数及其收敛性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

（ A为振幅, ω为角频率, ϕ为初相 ）

复杂的周期运动 :$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

(谐波迭加)

$$A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0,\ a_n = A_n \sin\varphi_n,\ b_n = A_n \cos\varphi_n,\ \omega t = x$

得函数项级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

定义1（函数的正交）若两个函数 φ 与 ψ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

则称φ与ψ在$[a, b]$上是正交的.

定义2（正交函数系）若函数系 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$可积，且

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ A_n(\neq 0), & m = n \end{cases}$$

则称函数系$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在$[a,b]$ 上正交.

定义3 构成三角级数的函数系：

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

称为三角函数系.

定理1 三角函数系是 $[-\pi, \pi]$上的正交函数系. 即：

(i) 在三角函数系中, 任何两个不相同的函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于0;

(ii) 在三角函数系中任何一个函数的平方在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都不等于0.

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

证: (i) 任何两个不同的函数乘积在[−π,π]上积分等于0:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] \mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$$

同理可证 ： $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$$

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

证: (ii)**在三角函数系中两个相同的函数的乘积在**

$[-\pi, \pi]$ **上的积分不等于 0 :**

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}}$$

定理 2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

右端级数**可逐项积分**，则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

证：由定理条件，对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=a_0\pi$$

$$\therefore \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x \;= a_k\pi$$ **(利用正交性)**

$$\therefore \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

类似地, 用 sin *k x* 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \qquad ①$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \right. \qquad ②$$

定义4 由公式 ② 确定的 a_n , b_n 称为函数 $f(x)$ 的**Fourier系数**； 以 $f(x)$ 的Fourier系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**Fourier级数** .

定理3 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的Fourier级数收敛 , 且有

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

注: 函数展成Fourier级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的Fourier系数 . (证明见‘数学分析’)

二、函数展开成Fourier级数

1. 周期为 2π 的函数 $f(x)$ 的Fourier展开

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, \mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \qquad ②$$

步骤：**1.** 计算Fourier系数 a_n, b_n

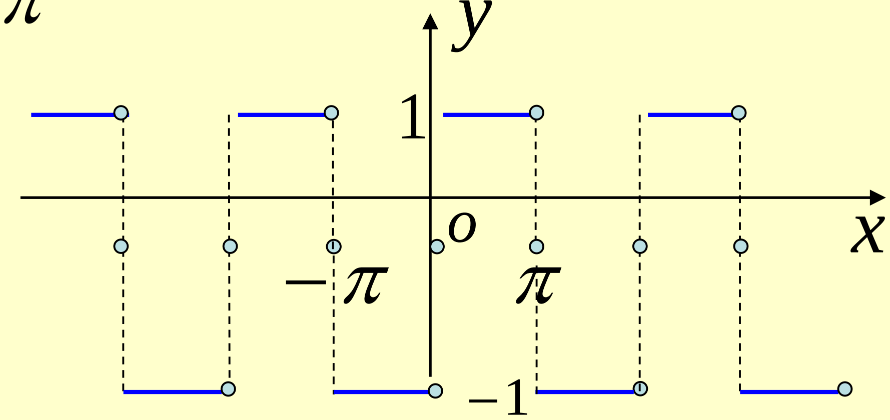
2. 写出Fourier级数 ① .

3. 明确和函数 $S(x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

例1. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成Fourier级数.



解: 先求Fourier系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\cos nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx \,\mathrm{d}x$$

$$= 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{\cos nx}{n}\ \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\ -\frac{\cos nx}{n}\ \right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

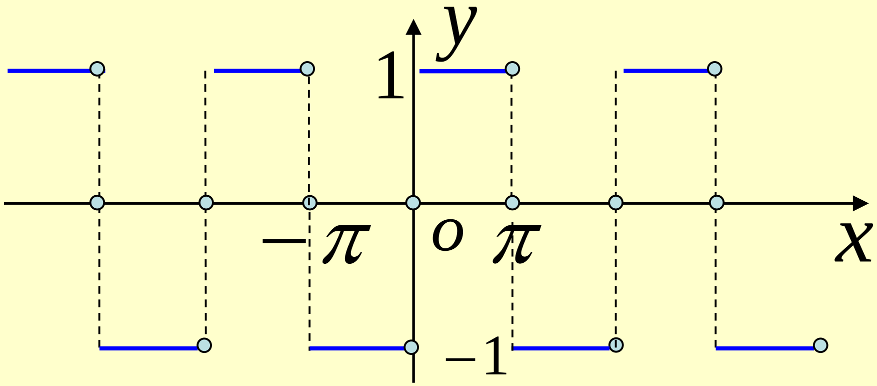
$$= \frac{2}{n\pi}\left[\,1-(-1)^n\,\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当} n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当} n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\ \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty\,,\ x \neq 0\,, \pm\pi\,, \pm 2\pi\,, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\,x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$



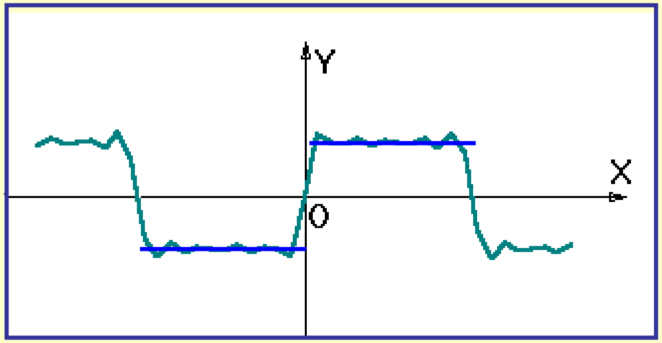
注: 1) 根据收敛定理可知,

当 $x=k\pi\ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时,级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$

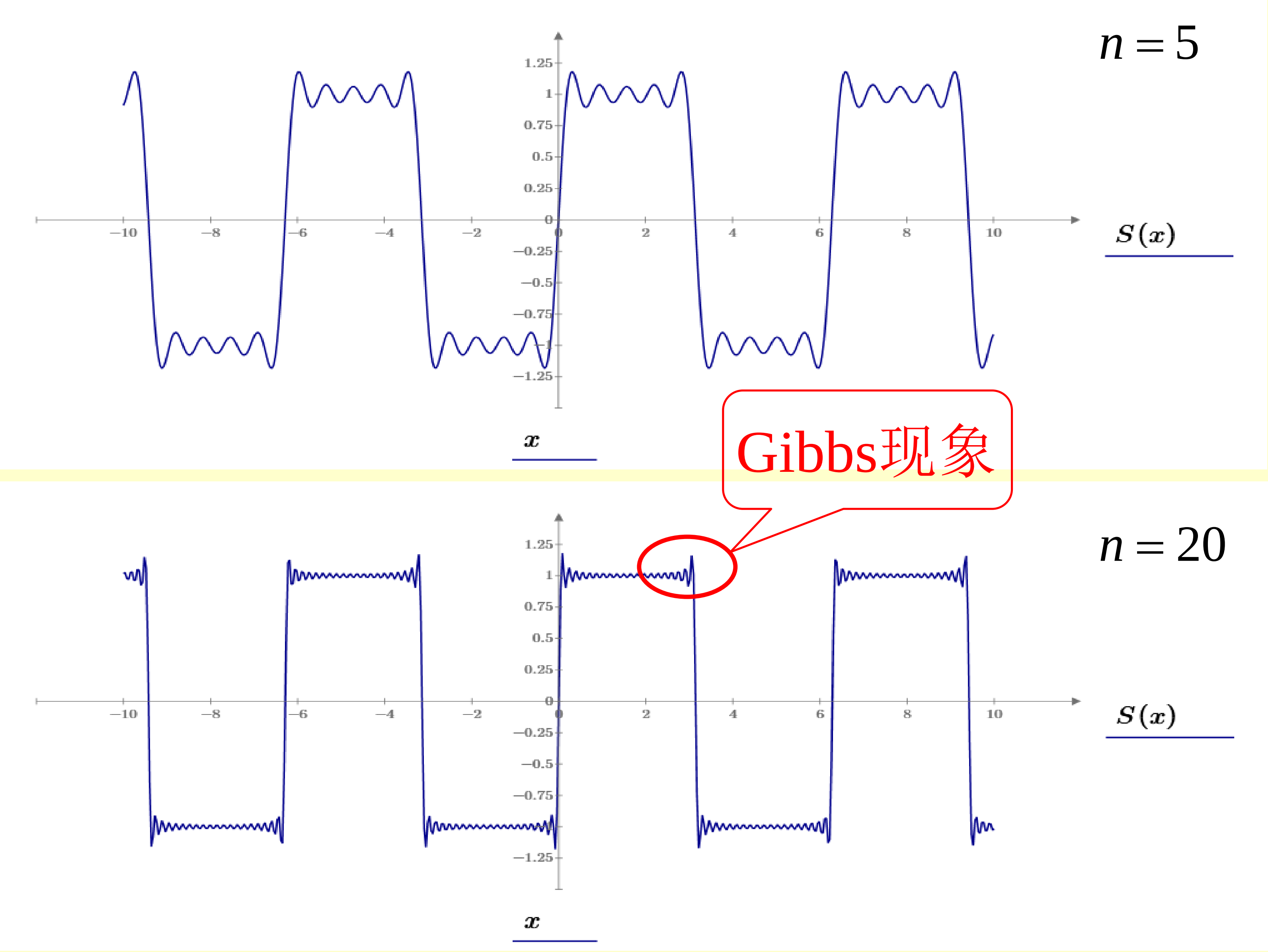
2) 傅氏级数的部分和逼近

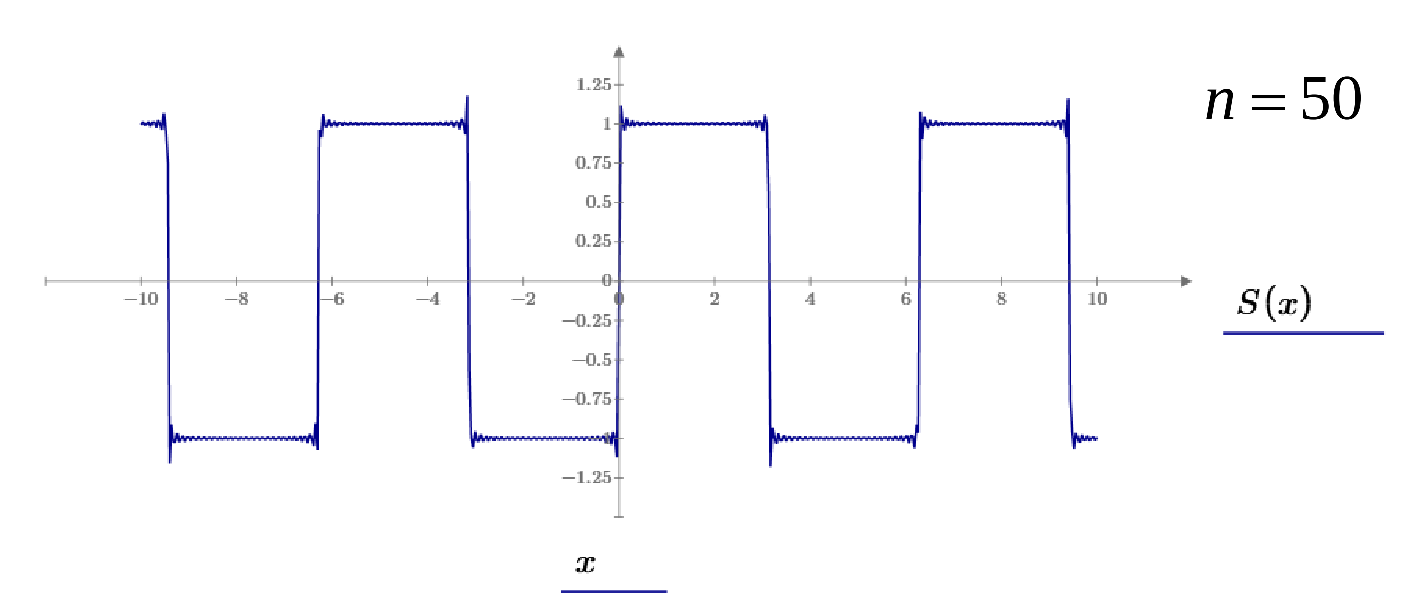
***f* (*x*) 的情况见右图.**



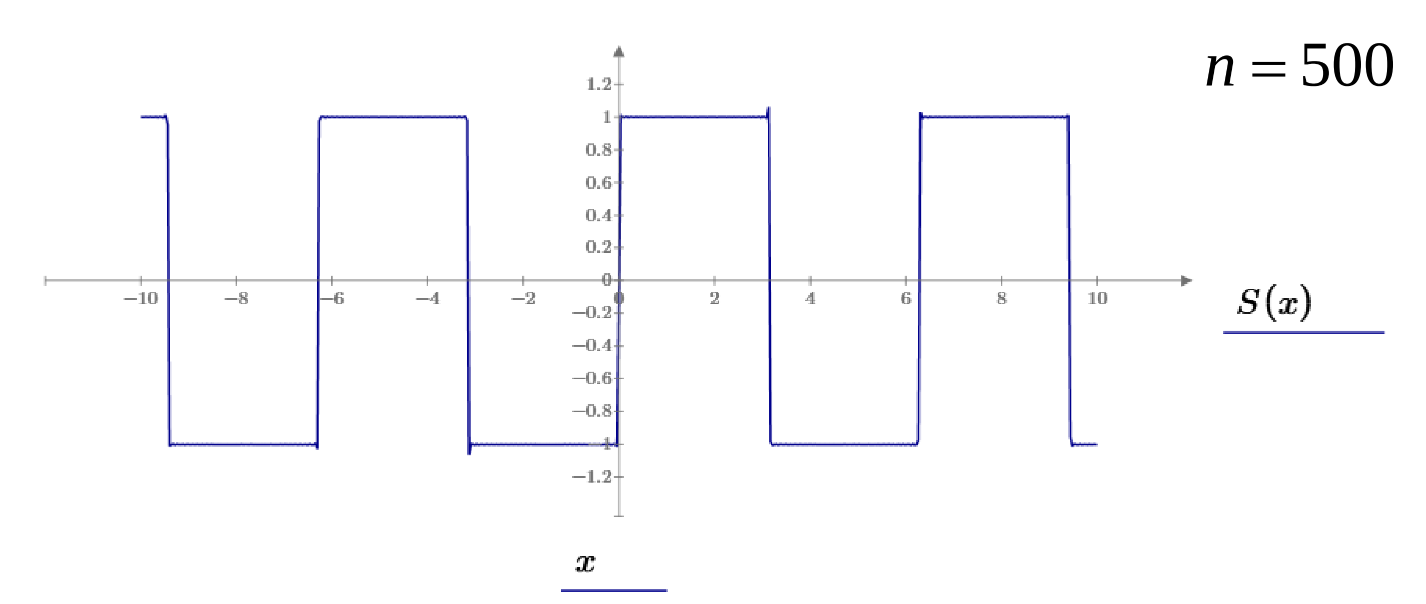
3) 称该级数为正弦级数.

$$S(x) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1) \cdot x)}{2k-1}$$





$n = 50$
1.25
1
0.75
0.5
0.25
0
−0.25
−0.5
−0.75
−1
−1.25
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
$S(x)$
x



$n = 500$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1.2
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
$S(x)$
x

Josiah Willard Gibbs(1839-1903)是美国耶鲁大学的科学家，1899年，他在《自然》杂志上发表了关于一个阶跃函数的傅里叶级数中的过冲与下冲，这就是后来知名的“吉布斯现象”。后来发现到这个现象其实已经被英国数学家Henry Wilbraham在1848发现了。尽管这样，这个现象还是以吉布斯的名字命名。吉布斯是美国第一位工程学博士，他专攻数学物理学，他的工作影响了从化学热力学到物理光学等多个领域。

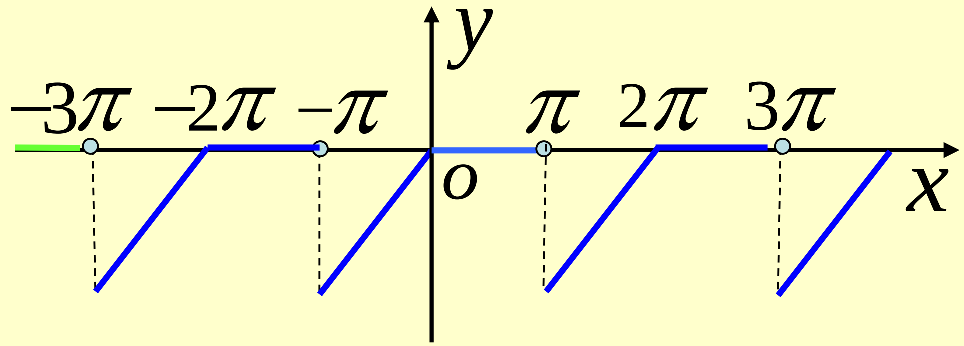
Josiah Willard Gibbs
(1839-1903)

课外提高:

1. 查阅文献资料，弄清Gibbs现象数学原理.
2. 查阅文献资料，了解Gibbs现象在工程应用中的影响.

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数 , 它在 $[-\pi,\pi)$ **上的表达式为**

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0 \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$a_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi} = \begin{cases} \frac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

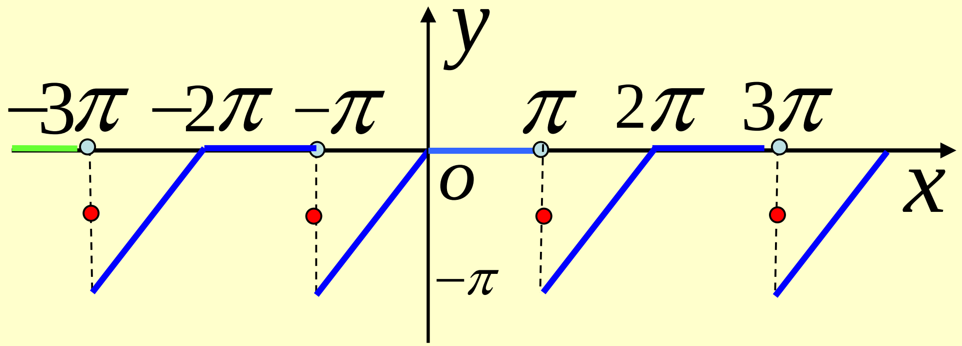
$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$f(x) = \frac{-\pi}{4} + (\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+ (\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x) - \frac{1}{4}\sin 4x +$$

$$+ (\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty, x \neq (2k-1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$



或写为：

$$f(x)=\frac{-\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq(2k-1)\pi\,,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$x=(2k-1)\pi$ 时, 级数收敛于

$$S((2k-1)\pi)=\frac{f((2k-1)\pi-0)+f((2k-1)\pi+0)}{2}=\frac{0+(-\pi)}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

2. 定义在[–π ,π]上的函数 *f* (*x*)的Fourier展开

$$f(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$\Big\downarrow$ 周期延拓

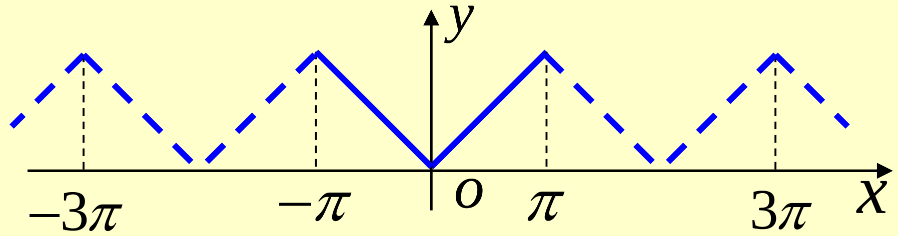
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi, \pi) \\ f(x - 2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ **展成傅氏级数.**

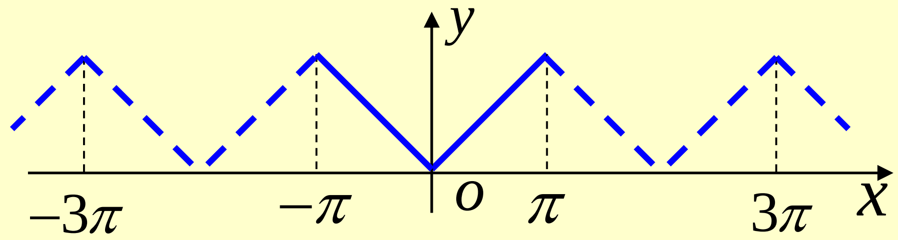
解: 将 $f(x)$延拓成以 2π为周期的函数 $F(x)$,



则 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$



$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0\quad, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\therefore f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

注1 称此展式为余弦级数.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$
$$(-\pi \le x \le \pi)$$

注2 利用此展式可求出几个特殊的级数的和.

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = ? \qquad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$$

设 $\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,\quad \sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

$$\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots,\qquad \sigma_3=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

已知 $\sigma_1=\frac{\pi^2}{8}$

$$\because\ \sigma_2=\frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4},\qquad \therefore\ \sigma_2=\frac{\sigma_1}{3}=\frac{\pi^2}{24}$$

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sigma_3=\sigma_1-\sigma_2=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$$

计算圆周率 π 的一些公式:

1.韦特（法国）：

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

2.莱布尼兹（德国，1674年）：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots$$

3.Machin（英国，1706年）：

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

4. Ramanujan（印度，1914年）

$$\pi=\frac{9801}{2\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{4^{4n}(n!)^4}\cdot\frac{(1103+26390n)}{99^{4n}}}$$

5. Borwein四次迭代式（1986）：

初值： $a_0 = 6 - 4\sqrt{2},\ y_0 = \sqrt{2} - 1$

迭代计算： $a_{n+1} = a_n (1 + y_{n+1})^4 - 2^{2n+3} y_{n+1} (1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2)$

$$y_{n+1} = \frac{1 - (1 - y_n^4)^{1/4}}{1 + (1 - y_n^4)^{1/4}} \qquad a_n \to \frac{1}{\pi} (n \to \infty)$$

6. Bailey-Borwein-Plouffe算法（BBP，1995）

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

7. Fabrice Bellard 算法（ 1997年）

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1024} \right)^n \left(- \frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right)$$

三、Fourier级数的其他形式

1. 周期为2π 的奇、偶函数的傅氏级数(正弦级数和余弦级数)

定理4 对周期为 2π 的奇函数 $f(x)$, 其傅里叶级数为正弦级数,它的Fourier系数为

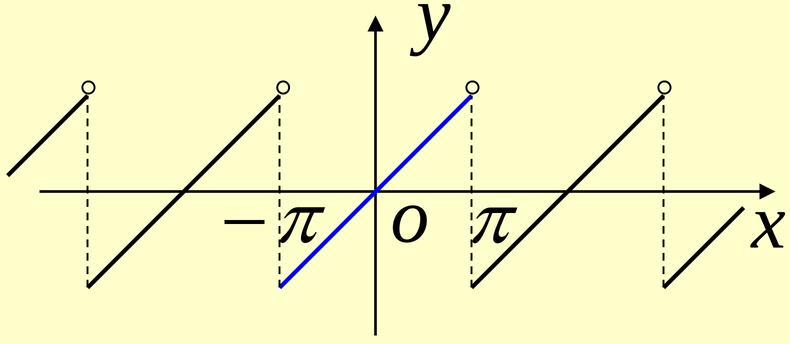
$$\begin{cases} a_n = 0 & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

周期为2π的偶函数 $f(x)$, 其Fourier级数为余弦级数 , 它的傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = 0 & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

例4. 设 $f(x)$ 是周期为**2π** 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$,将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 若不计 $x=(2k+1)\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$, 则 $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数, 因此



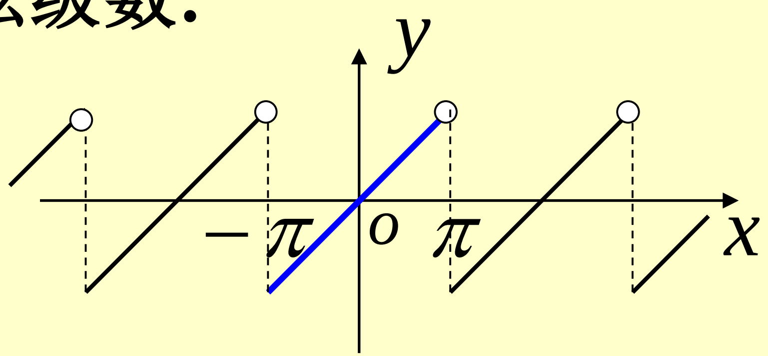
$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

根据收敛定理可得 $f(x)$ 的正弦级数:

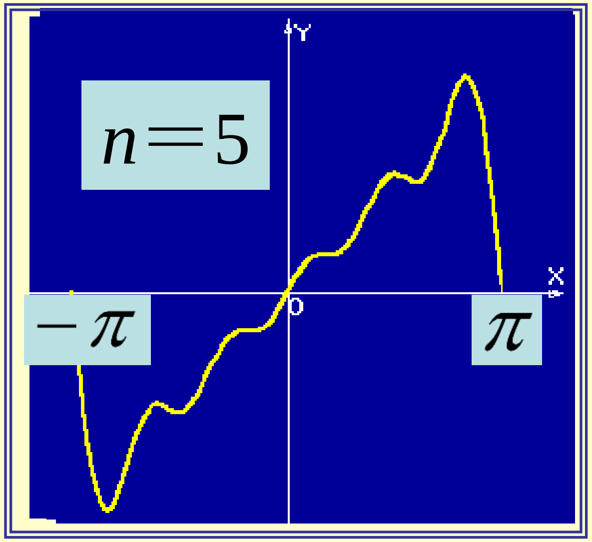


$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots)$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq(2k+1)\pi\,,k=0,\pm1\,,\cdots)$$

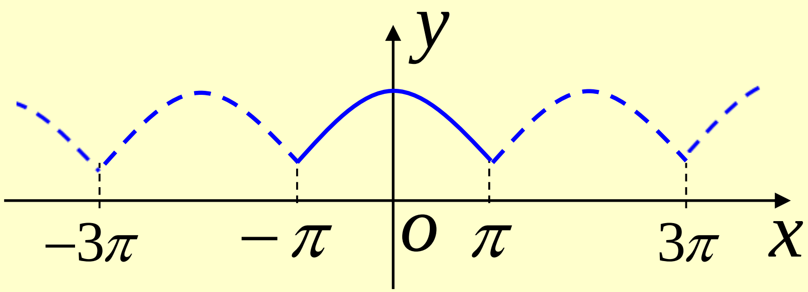
在 $[-\pi,\pi)$ 上级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见右图.



例5. 设 $0<\alpha<1$，$-\pi\le x\le\pi$，**证明：**

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right).$$

证：将 $f(x)=\cos\alpha x, x\in[-\pi,\pi]$ **延拓成以2π为周期的偶函数** ***F*(*x*)，再展成 Fourier 级数.**



$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x]\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-n)\pi}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)\pi}{\alpha+n}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2\alpha\sin\alpha\pi}{\alpha^2-n^2},$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

***F*(*x*)的 Fourier 展开式为**

$$F(x) \sim \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos nx\right),$$

限制 $x \in [-\pi, \pi]$**，得**

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos nx\right).$$

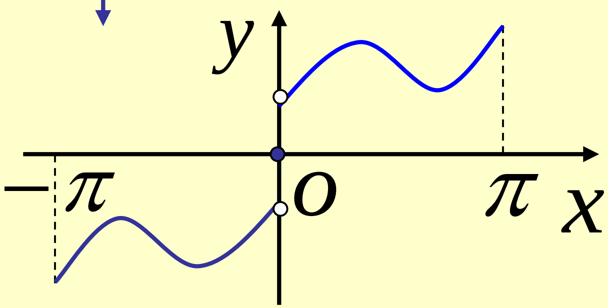
注 在上式中令 *x* = 0, 得

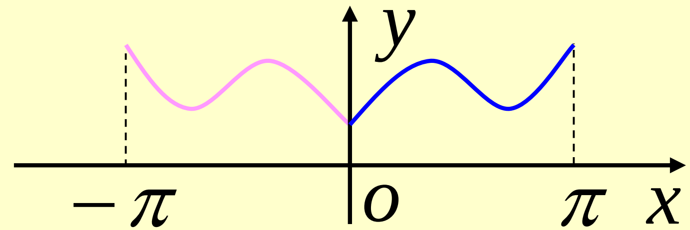
$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad (0 < \alpha < 1)$$

由此可以证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$

2. 在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,\pi]$ 偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 ***F* (*x*)**

***f* (*x*) 在 [0 , π] 上展成**

正弦级数

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 ***F* (*x*)**

***f* (*x*) 在 [0 , π]上展成**

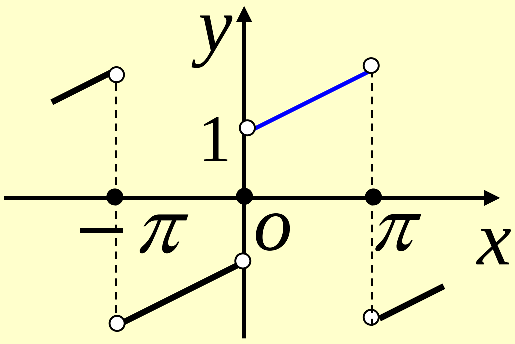
余弦级数

例6. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

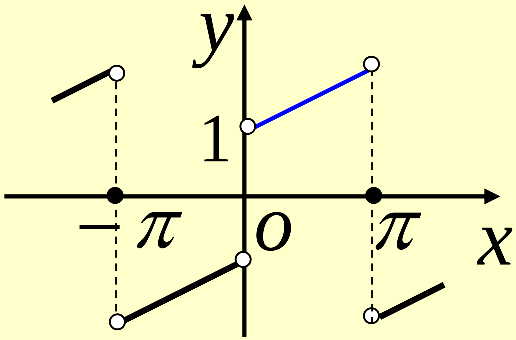
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$



$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



因此得

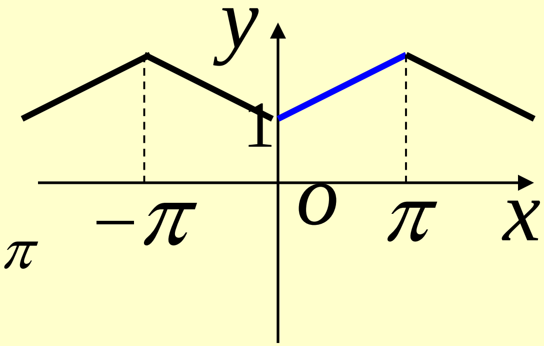
$$x+1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots\right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意：在端点 $x = 0, \pi$，级数的和为0，与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^\pi=\pi+2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$



$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^\pi$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)$$

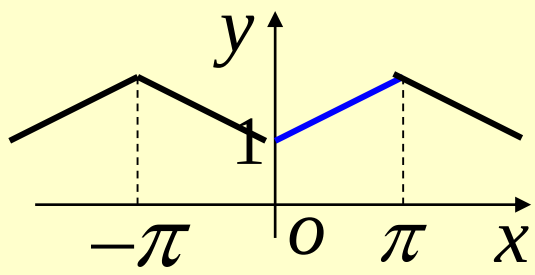
$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1\\ 0, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

说明: 令 $x = 0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

3. 以2 l 为周期的函数的Fourier展开

周期为 2l 函数 $f(x)$

$\Downarrow$ 变量代换 $x = \dfrac{lz}{\pi}$

周期为 2π 函数 $F(z)$

$\Downarrow$ 将$F(z)$ 作傅氏展开 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$f(x)$ 的傅氏展开式

定理5 设周期为2*l* 的周期函数 *f* (*x*)满足收敛定理条件,

则它的Fourier展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 *f* (*x*) 的连续点处)

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

证明: 令 $z=\dfrac{\pi x}{l}$, 则 $x\in[-l,l]$ 变成 $z\in[-\pi,\pi]$,

令 $F(z)=f(x)=f(\dfrac{lz}{\pi})$, 则

$$F(z+2\pi)=f(\frac{l(z+2\pi)}{\pi})=f(\frac{lz}{\pi}+2l)$$
$$=f(\frac{lz}{\pi})=F(z)$$

所以 $F(z)$ 是以 **2π** 为周期的周期函数 , 且它满足收敛定理条件, 将它展成**Fourier**级数:

$$F(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz)$$

(在 *F*(z) 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\cos nz\,\mathrm{d}z & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(z)\sin nz\,\mathrm{d}z & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$

令 $z = \dfrac{\pi x}{l}$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \right)$$

(在 $f(x)$ 的 连续点处) 证毕

说明: 如果 **f (x)** 为奇函数, 则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$

如果 **f (x)** 为偶函数, 则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(在 } f(x) \text{ 的连续点处)}$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots)$

注 无论哪种情况 , 在 **f (x)** 的间断点 **x** 处, 傅氏级数

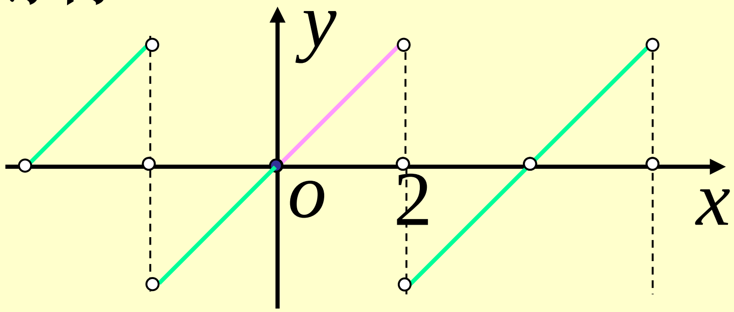
收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

例7. 把 $f(x)=x\ \ (0<x<2)$ 展开成

(1) 正弦级数; **(2)** 余弦级数.

在 $x = 2k$ 处级数收敛于何值?

解: (1) 将 $f(x)$ 作奇周期延拓**, 则有**



$$a_n = 0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

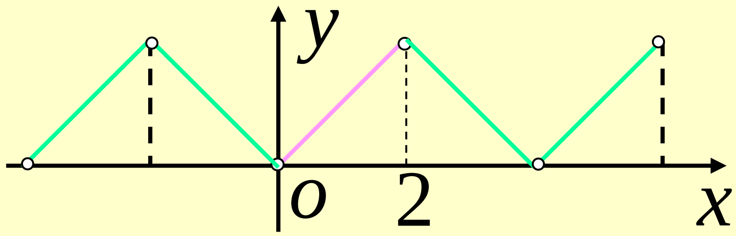
$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{2}+\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi=\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0<x<2)$$

(2) 将 $f(x)$ 作偶周期延拓, 则有



$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 2$$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2$$

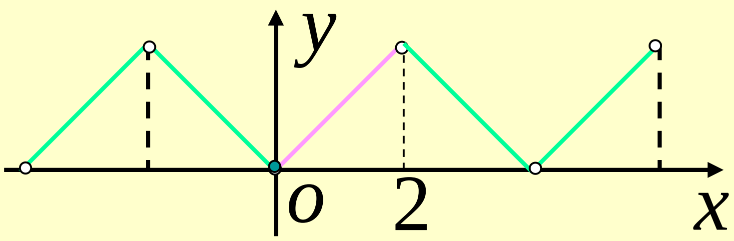
$$= -\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \quad f(x) = x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$

$$(0 < x < 2)$$

$$f(x)=x=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}\quad(0<x<2)$$



说明: 此式对 $x=0$ 也成立,

据此有 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

由此还可导出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

当函数定义在任意有限区间上时, 其**Fourier**展开方法:

方法1 $f(x),\ x\in[a,b]$

$$\Big\downarrow\ \text{令 } x=z+\frac{b+a}{2},\ \text{即 } z=x-\frac{b+a}{2}$$

$$F(z)=f(x)=f\left(z+\frac{b+a}{2}\right),\ z\in\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right]$$

$$\Big\downarrow\ \text{周期延拓}$$

$F(z)$在$\left[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}\right]$上展成**Fourier**级数

$$\Big\downarrow\ \text{将 } z=x-\frac{b+a}{2} \text{ 代入展开式}$$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**Fourier**级数

方法2 $f(x)$， $x\in[a,b]$

$$\Big\downarrow \text{令 } x=z+a\text{，即 } z=x-a$$

$$F(z)=f(x)=f(z+a),\quad z\in[0,b-a]$$

$$\Big\downarrow \text{奇或偶式周期延拓}$$

$F(z)$ 在 $[0,b-a]$ 上展成正弦或余弦级数

$$\Big\downarrow \text{将 } z=x-a \text{ 代入展开式}$$

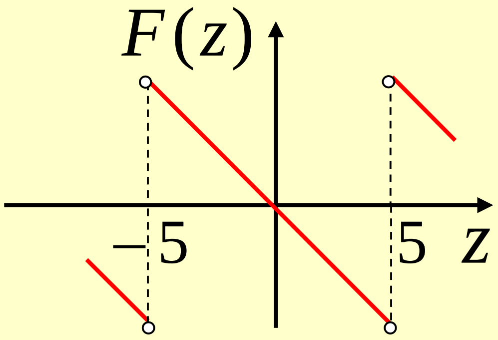
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数

例8. 将函数 $f(x)=10-x\ (5<x<15)$ 展成Fourier级数.

解: 令 $z=x-10$, 设

$$F(z)=f(x)=f(z+10)=-z \qquad (-5<z<5)$$

将 $F(z)$ 延拓成周期为 10 的周期函数, 则它满足收敛定理条件. 由于 $F(z)$ 是奇函数, 故



$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5 -z\sin\frac{n\pi z}{5}\,\mathrm{d}z=(-1)^n\frac{10}{n\pi}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

$$F(z)=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi z}{5} \quad (-5<z<5)$$

$$\therefore\ 10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5} \qquad (5<x<15)$$

四、Fourier级数的性质

(黎曼-勒贝格引理)： 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积或绝对可积（瑕积分），则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

1. 若 $f(x)$在 $[a,b]$ 可积或绝对可积（瑕积分），则其**Fourier**系数满足

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

2. (Fourier级数的逐项积分定理) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积），其Fourier级数形式展开为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则对 $\forall c, x \in [-\pi,\pi]$ ，有

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t.$$

注：这个性质说明，f 的Fourier级数不论是否收敛，都永远可以逐项积分. 这是Fourier级数特有的性质.

3. (Parseval等式) 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积），

其 **Fourier** 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则
$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

例：由例4可知，
$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi)$$

两边从0到 x 积分得

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

再由Parseval等式可得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

内容小结

1. 周期为 2π 的函数的Fourier级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\neq\text{间断点})$$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\[2ex] b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

注意: 若 x_0为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的Fourier级数

- **奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数**
- **偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数**

3. 在 [0 , π] 上函数的Fourier展开法

- **作奇周期延拓 , 展开为正弦级数**
- **作偶周期延拓 , 展开为余弦级数**

4. 周期为2l 的函数的Fourier级数展开公式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

($x \neq$间断点)

$$\text{其中}\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

当$f(x)$为奇(偶) 函数时,为正弦(余弦) 级数.

5. 在任意有限区间上函数的Fourier展开法 $\begin{cases}\text{变换}\\ \text{延拓}\end{cases}$

思考与练习

1. 将函数展开为傅里叶级数时为什么最好先画出其图形?

答: 易看出奇偶性及间断点,从而便于计算系数和写出收敛域 .

2. 计算傅里叶系数时哪些系数要单独算 ?

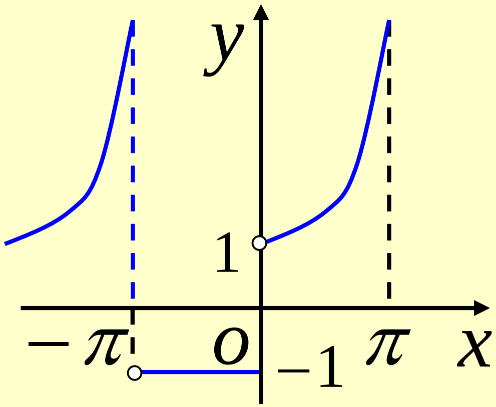
答: 用系数公式计算 a_n, b_n时 ,**如分母中出现因子$n-k$**

则a_k 或 b_k **必须单独计算.**

补充例题

1. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\pi^2/2}$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示: $$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+\ f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

2. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)$ 的表达式 .

解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

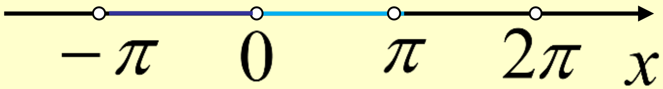
在 $(-\pi,\pi)$ 上, $S(x)=F(x)$; 在 $(\pi,2\pi)$ 上, 由周期性:

$$S(x)=S(x-2\pi)$$

$$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2$$

$$=x^2-3\pi x+2\pi^2$$

$x-2\pi\in(-\pi,0)$

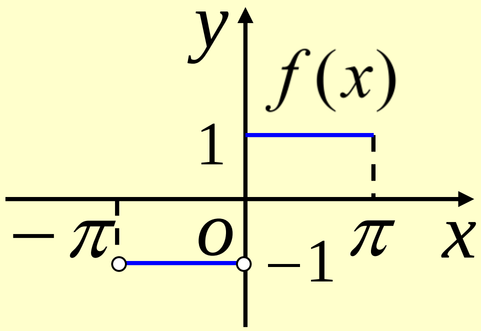


定义域

3. **写出函数** $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上

傅氏级数的和函数 .

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



4. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ **的Fourier级数展式为** $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, **则其中系**数 $b_3=$ $\underline{\ 2\pi/3\ }$.

提示: $b_3=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}\,x$$

利用“偶倍奇零”

$$\begin{array}{ccccccc} \pi x & & \pi & & 0 & & \\ & + & & - & & + \int_{-\pi}^{\pi} & \\ \sin 3x & & -\frac{1}{3}\cos 3x & & -\frac{1}{9}\sin 3x & & \end{array}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi x}{3}\cos 3x+\frac{\pi}{9}\sin 3x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi$$

5. 设 $f(x)$ 是以 **2π** 为周期的函数 **,** 其傅氏系数为 a_n , b_n , 则 $f(x+h)$ (h为常数) 的傅氏系数

$a_n' =$ $\underline{a_n \cos nh + b_n \sin nh}$, $b_n' =$ $\underline{b_n \cos nh - a_n \sin nh}$.

提示: $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,dx$ $\boxed{令\ t = x+h}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

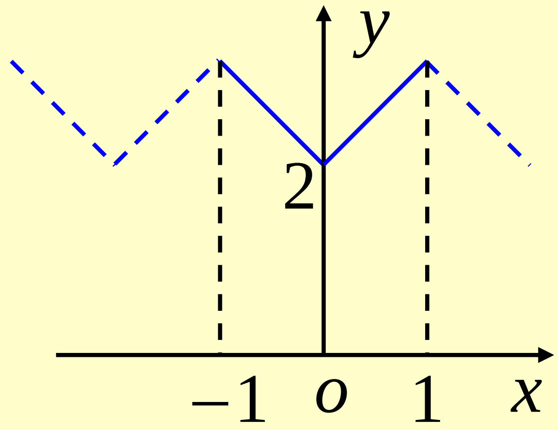
$$= \cos nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh \cdot \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \cos nh \cdot a_n + \sin nh \cdot b_n$$

6. 将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ **展开成以2为周期的傅立叶级数, 并由此求级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ **的和.**

解: $f(x)$**为偶函数,** $\therefore b_n=0$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5$$



$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$

因 $\boldsymbol{f(x)}$ 偶延拓后在$(-\infty,+\infty)$上连续, 故得

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi,\ x\in[-1,1]$$

令 $x=0$, 得

$$2=\frac{5}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

7. 将函数$f(x)=1-x^2(0\le x\le\pi)$展开成余弦级数，

并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和.

【解】对 $f(x)=1-x^2$ 偶开拓，取 $F(x)=\begin{cases}1-x^2 & -\pi\le x<0\\ 1-x^2 & 0\le x\le\pi\end{cases}$。

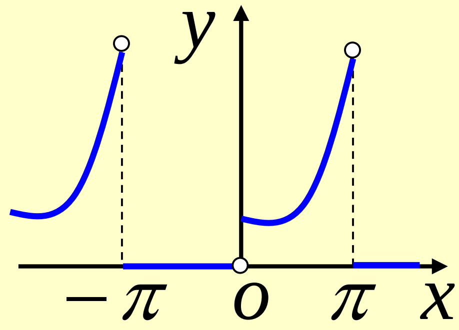
$$b_n=0,\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2(1-\frac{1}{3}\pi^2)$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}(0-\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

令 $x=0$，$1=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$。

8. 设 $f(x)$是周期为2π的函数, 它在 $[-\pi\,,\pi\,)$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ e^x, & x\in[0,\pi\,)\end{cases}$



将其展为傅氏级数 .

解答提示

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\pi}\Big[\,\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\,\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\pi}\left[\ \frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}\ \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi}\,\frac{1-e^{\pi}(-1)^n}{1+n^2} \qquad (n=1,\,2,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

$$(\,x \neq k\pi\,,\,k=0\,,\pm 1\,,\pm 2\,,\cdots\,)$$

思考：如何利用本题结果求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}$ 的和？

提示：根据付式级数收敛定理，当 $x = 0$ 时，有

$$\frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2} = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{2}$$