2015～2016 学年第一学期

《微积分（一）》（上）课程期中考试试卷

(闭卷，88 学时)

院(系) 启明学院 专业班级________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2015-11-22　　　　考试时间: 19:00- 21:00

题号	一	二	三	四	总分
满分	24	32	20	24	100
得分					

得　分	
评卷人	

一、填空题（每空 4 分，共 24 分）

1、设 $a_n=(n^{2015}+2015^n)^{\frac{1}{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ 2015.

2、描述 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在的 $Cauchy$ 准则: $\exists\varepsilon_0>0$, $\forall M>0$. 总存在 $x_1,x_2>M$. 使得 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$.

3、若 $f(x)=x[\frac{1}{x}]$，其中[ ]表示取整函数，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$ 1.

4、设曲线由方程 $xy+e^{x+y}=0$ 所确定，则曲线在点 $(0,0)$ 的切线方程为: $y=-x$.

5、设点 P_0 位于曲线段 $y=x^2,x\in[0,1]$ 上. 如果曲线段在点 P_0 处的切线与曲线段两个端点连线所在的直线平行，则点 P_0 的坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

6、已知 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y-ty^3+e^t=0\end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ -2.

得　分	
评卷人	

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

7、设对一切自然数 n 都有 $0<a_n<1$，且 $a_{n+1}(1-a_n)\geq\frac{1}{4}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：$a_{n+1}-a_n \geqslant \frac{1}{4(1-a_n)}-a_n=\frac{(1-2a_n)^2}{4(1-a_n)}\geqslant 0$

$a_n\uparrow$ 又 $0<a_n<1$ 知 a_n 收敛

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 由 $a_{n+1}(1-a_n)\geqslant\frac{1}{4}$ 知

令 $n\to\infty$ 得，$a(1-a)\geqslant\frac{1}{4}$ 即 $(a-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$ $\underline{a=\frac{1}{2}}$

8、试求极限：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\arcsin x}-1}{x^x-1}$.

解：由 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ 及 $e^x-1\sim x$ （当 $x\to 0$）

知 $e^{x\ln x}-1\sim x\ln x$ （当 $x\to 0$）

而

$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\cdot x\ln x=1\times 0=0$

知 $e^{\arcsin x\cdot\ln x}-1\sim\arcsin x\ln x$

故 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\arcsin x}-1}{x^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\arcsin x\ln x}-1}{e^{x\ln x}-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arcsin x\ln x}{x\ln x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arcsin x}{x}=1$ $\boxed{/\!/}$

或 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}\cdot\frac{\sin x/x-1}{1-\cos x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot(\cos x-1)}{3\cdot x^2} = -\frac{1}{3}$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$ $\boxed{/\!/}$

9、试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解：当 $x>0$ 时，$\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x} = \frac{\ln\sin x - \ln x}{1-\cos x}$

由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x - \ln x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

而 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ 是关于 x 的偶函数

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$. $\boxed{/\!/}$

10、设 $f(x)=(\arcsin x)^2$，求 $f^{(2015)}(0)$.

解：$f'(x) = 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$-1<x<1$

之 $\sqrt{1-x^2}\,f'(x) = 2\arcsin x$　　$f'(0)=0$

平方，$(1-x^2)(f'(x))^2 = 4(\arcsin x)^2 = 4f(x)$

求导知 $-2x(f'(x))^2 + (1-x^2)\cdot 2f'(x)f''(x) = 4f'(x)$

注意到 $f'(x)\neq 0$，此时，$-xf'(x) + (1-x^2)f''(x) = 2$

求 n 阶导数知 $-\left[xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x)\right] + \left[(1-x^2)f^{(n+2)}(x) + n(-2x)f^{(n+1)}(x) - 2\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(x)\right]$

令 $x\to 0$ 知，$f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0)$

故 $f^{(2015)}(0) = (2013)^2\cdot(2011)^2\cdots 1^2 f'(0) = (2013!!)^2 f'(0) = 0.$ $\boxed{/\!/}$

得 分	
评卷人	

三、解答题（每小题10分，共20分）

11、设 $xf'(x)-f(x)=0$ 对一切 $x>0$ 成立，且 $f(1)=1$，求 $f(2)$.

解：设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$x>0$

则 $g'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=0 \quad \forall x>0$

故 $g(x)\equiv C$ 为常数

特别地 $g(2)=g(1)$，即 $\frac{f(2)}{2}=\frac{f(1)}{1}=1$，$f(2)=2$

12、设 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 试求 $f'(x)$，并讨论 $f''(x)$ 的存在性.

解：当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$

故 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时 $f''(x)=6x\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在

故 $f''(0)$ 不存在，即 $f''(x)=\begin{cases} 6x\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ \text{不存在}, & x=0 \end{cases}$

得 分	
评卷人	

四、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

13、用极限定义($\varepsilon-\delta$语言)证明：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$.

证明. $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$, $x\neq 1$

从而

$$\left|\frac{1}{x}-1\right|=\frac{|1-x|}{x}\leq 2|1-x|<2\delta\leq\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$.

14、证明 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是一致连续的.

证明. 设

$$g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & 0<x<1\\ \sin 1 & x=1\end{cases}$$

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续

特别地, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续. 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$

$\forall x_1, x_2\in(0,1)$, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 都有

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$$

而在 $(0,1)$ 上, $g(x)=f(x)$ 从而 $|f(x_1)-f(x_2)|=|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon$

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是一致连续的.

15、 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)<0$，$f(b)<0$，又有一点 $c\in(a,b)$ 满足 $f(c)>0$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明.

设 $g(x)=e^{x}f(x)$

则 $g(a)<0$, $g(c)>0$ 且 $g(b)<0$

由零值定理知 存在 $c_1\in(a,c)$, 使得 $g(c_1)=0$

存在 $c_2\in(c,b)$ 使得 $g(c_2)=0$

对函数 g. 在 $\underbrace{[c_1,c_2]}_{\subset(a,b)}$ 上 由 Rolle 中值定理知

存在 $\xi\in(c_1,c_2)\subset(a,b)$, 使得

$g'(\xi)=0$

而 $g'(\xi)=e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)$

故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$ $\boxed{//}$

3