数项级数习题课

一. 内容小结

二. 典型例题

一、内容小结

I. 数项级数

1. 概念与性质

定义：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

收敛级数的性质1 -- 性质4.

收敛 + 收敛 $\Rightarrow$ 收敛， 收敛 + 发散 $\Rightarrow$ 发散

收敛 $\Rightarrow$ 加括号后收敛， 加括号后发散 $\Rightarrow$ 发散

2. 正项级数

定理：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $(u_n \geq 0) \iff S_n \leq M$.

$\boxed{\text{必要条件} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发 散

$\downarrow$ 满足

比值判别法 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

根值判别法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow{\rho = 1}$ 不定

用它法判别

- 部分和有界
- 性质
- 比较判别法
- 拉贝判别法
- 积分判别法

$\rho < 1 \ \downarrow$ 收 敛

$\rho > 1 \ \downarrow$ 发 散

3. 任意项级数判别法

(1) 交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \ (u_n > 0)$

Leibniz判别法: $\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛

(2) 任意级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$\left\{\begin{array}{l} \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 收敛, 称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 绝对收敛 } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \\ \text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛, } \sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 发散, 称 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 条件收敛} \end{array}\right.$

绝对收敛 + 绝对收敛 → 绝对收敛

绝对收敛 + 条件收敛 → 条件收敛

(3) Abel 判别法和 Dirichlet 判别法:

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (1)$$

Abel判别法: 若 (i) $\{a_n\}$ 单调有界;

(ii) $\sum b_n$ 收敛, 则级数(1)收敛.

Dirichlet判别法: 若 (i) $\{a_n\}$单调减, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

(ii) $\sum b_n$ 的部分和数列有界,

则级数(1)收敛.

二、典型例题

例1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，且 $a_n \le c_n \le b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证: $\because 0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n \quad (n=1,2,\cdots)$，则由题设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) \text{ 收敛}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(c_n - a_n) + a_n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

例2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 ?

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散 .

问: 若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 ?

例3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛 .

证: 因 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$, $\therefore$ 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时

$$u_n^2 < u_n\,,\quad v_n^2 < v_n$$

又因

$$(u_n+v_n)^2 \le 2(u_n{}^2+v_n{}^2) < 2(u_n+v_n) \quad (n>N)$$

利用收敛级数的性质及比较判敛法易知结论正确.

例4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，试证：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1}) = S$，则

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0 \to S(n \to \infty)$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = S + a_0,\quad \Rightarrow \forall n, \exists M > 0,$ 使得 $|a_n| \le M$

$\Rightarrow |a_n b_n| \le M|b_n|,\quad$ 又 $\sum |b_n|$ 收敛，

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

例5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是否也收敛? 说明理由. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛呢?

提示: 对正项级数,由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 但对任意项级数却不一定收敛 . 例如, 取

$$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\qquad v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=1$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 .

例6. 用级数收敛的必要条件证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0\,(a>1,k\in R)$

证: (1) 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^n=0<1$$

所以，由比值判别法级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛,

再由级数收敛的必要条件知, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$

例7. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n$ 存在, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证：设 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = a$， 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当$n > N$ 时，

有 $$|n^2 u_n - a| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow |n^2 u_n| = |n^2 u_n - a + a| \le |n^2 u_n - a| + |a| < \varepsilon + |a|,$$

$\Rightarrow |u_n| < \dfrac{\varepsilon + |a|}{n^2}$， 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，从而收敛.

例8. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^p}\ (p>0)$的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛.

解：级数是交错级数.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{px^p}=0,$$

令 $f(x)=\frac{\ln x}{x^p}$，则 $f'(x)=\frac{1-p\ln x}{x^{p+1}}<0\ \ (x>e^{\frac{1}{p}})$，$f$单调减，

$\therefore n$充分大时，$u_n>u_{n+1}$，　由Leibniz判别法，级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$

当 $0<p\le 1$时， $\frac{\ln n}{n^p}>\frac{1}{n^p}$， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 发散，

当 $p>1$时， 取$\alpha>0$,使得$p-\alpha>1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-\alpha}\cdot\frac{\ln n}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=0\ ,$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\alpha}}$ 收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 收敛， 原级数绝对收敛.

综上所述，当 $0<p\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^p}$ 条件收敛；

当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n^p}$ 绝对收敛.

例9. 讨论级数 $\frac{a}{1}-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}-\frac{b}{4}+\cdots+\frac{a}{2n-1}-\frac{b}{2n}+\cdots$ 的敛散性.

解：设级数的部分和为 S_n，并设 $W_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{n}$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$， $\lim\limits_{n\to\infty}W_n=+\infty$.

$$S_{2n}=a(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n})+(a-b)(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots+\frac{1}{2n})=aT_{2n}+\frac{a-b}{2}W_n$$

$$S_{2n+1}=aT_{2n+1}+\frac{a-b}{2}W_n$$

当 $a=b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=T$，原级数收敛；

当 $a\neq b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，原级数发散.

例10. 讨论级数$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha}+\cdots$

的敛散性$(\alpha>0)$.

解：$\alpha=1$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，收敛.

$\alpha>1$时，考虑加括号后的级数

$$(1-\frac{1}{2^\alpha})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^\alpha})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha})+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^\alpha})$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^\alpha}$收敛，所以原级数发散.

$\alpha<1$时，考虑加括号后的级数

$$1-(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{5})-\cdots-(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1})+\cdots=1-\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1})$$

$\alpha<1$时， 考虑加括号后的级数

$$1-\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^\alpha}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots=1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$u_n=\frac{1}{(2n)^\alpha}-\frac{1}{2n+1}>0, \qquad \lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-2^\alpha n^\alpha}{(2n+1)2^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}\in(0,+\infty)$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$发散， 所以加括号后的级数发散，原级数也发散.

综上，$\alpha=1$时，原级数收敛；$\alpha\neq 1$时，原级数发散.