参考答案

一、填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. $\{\sin y\sin z, \sin z\sin x, \sin x\sin y\}$；　　2. $(\frac{1}{e}, e)$；　　3. $\frac{1}{2}$；

4. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx, x\in(0,h)\cup(h,\pi]$；

5. $\int_{-1}^{1}dy\int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　6. $M=48, m=-16$；　　7. $x^2+y^2=1+4z^2$.

二、判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“ √ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. ×；　9. ×；　10. ×；　11. √.

三、解答题（每小题 6 分, 共 12 分）

12. 解法 1：曲线 L 在 xOy 平面上的投影的方程为 $2x^2+y^2=4$，可得 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sin t, \qquad t\in[0,2\pi] \\ z=2-\sqrt{2}\cos t, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_L ydx+zdy+xdz \\ &= \int_0^{2\pi}[2\sin t(-\sqrt{2}\sin t)+(2-\sqrt{2}\cos t)2\cos t+\sqrt{2}\cos t\sqrt{2}\sin t]dt \\ &= -4\sqrt{2}\pi \text{。} \end{aligned}$$

解法 2：取 S 为曲线 L 在平面 $x+z=2$ 上围成的半径为 2 的圆盘，上侧为正。根据斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_L ydx+zdy+xdz = \iint_S (0-1)dydz+(0-1)dzdx+(0-1)dxdy \\ &= -\iint_S(\frac{1}{\sqrt{2}}+0+\frac{1}{\sqrt{2}})dS = -\sqrt{2}\iint_S dS = -4\sqrt{2}\pi . \end{aligned}$$

13. 解：设 D_1 为 D 在第一象限的部分，化为极坐标形式，有

$$D_1: 0\le r\le\sqrt{2\cos 2\theta},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

再由对称性及极坐标系，得

原式$=\iint_D (x^2+2xy+y^2)dxdy = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$

$$=4\iint_{D_1} r^2\cdot rdrd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2\cos 2\theta}} r^3dr=\frac{\pi}{2}.$$

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14. 解： 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\cdot\dfrac{(2n)!!}{n+(-1)^n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+2}=0$，

知，收敛半径$R=+\infty$，所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{(2n)!!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{2^n n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+e^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

15.解：L 的参数方程为： $x=\cos t,y=\sin t,z=\sin t,t\in[0,2\pi]$

$$\int_L z^2ds=\int_0^{2\pi}z^2(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sqrt{1+\cos^2 t}d(-\cos t)$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{1+u^2}du=4\int_0^1\sqrt{1-u^4}du\qquad(u=\cos t)$$

$$=4\int_0^1\sqrt{1-v}\frac{1}{4}v^{-\frac{3}{4}}dv\quad(v=u^4)$$

$$=\mathrm{B}(\frac{1}{4},\frac{3}{2}).$$

16.解：记$D:x^2+y^2\le 1$，补充两块平面 $S_1:z=0,(x,y)\in D$，取下侧，

$S_2:z=1,(x,y)\in D$，取上侧，并设S,S_1,S_2围成空间区域V，

则由高斯公式及对称性，

$$I=\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}=\iiint_V(x-z)dv-0-\iint_D(x-y)dxdy$$

$$=-\iiint_V zdv=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^1 zdz=-\frac{\pi}{2}\ .$$

17. 解：$P(x,y)=\dfrac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+(y-1)^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2-(y-1)^2}{[x^2+(y-1)^2]^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

P、Q在L所围椭圆区域内有奇点(0,1)，作圆$l:x^2+(y-1)^2=\varepsilon^2$，取逆时针方向，且

$\varepsilon > 0$，

充分小，使 l 在 L 所围椭圆区域内部. 记 l 与 L 之间的区域为 D，l 所围区域为 D_1，则由格林公式，有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_L \; - \int_l \; + \int_l \; = \int_{L-l} \; + \int_l \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \int_l \frac{(y-1)dx - xdy}{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \\
&= 0 + \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \int_l (y-1)dx - xdy = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \iint_{D_1} (-2) dxdy \\
&= \frac{-2}{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \iint_{D_1} dxdy = \frac{-2}{\boldsymbol{\varepsilon}^2} \boldsymbol{\pi\varepsilon}^2 = -2\boldsymbol{\pi}.
\end{aligned}
$$

五、证明题（每小题 8 分, 共 24 分）

18. 证明：令 $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$， $v_n(x) = \arctan \dfrac{x}{n}$，

则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛，因而一致收敛.

又对固定的 $x \in (-\infty, +\infty)$， $v_n(x)$ 单调，且 $|v_n(x)| < \dfrac{\pi}{2}$， 即 $v_n(x)$ 对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致有界，由 Abel 判别法知，原级数一致收敛.

19. 证明：由题设知， $F(x,y,z) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x,y), (x,y) \in D$，且有

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'},
$$

S 的面积为

$$
A = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \left(-\frac{F_x'}{F_z'} \right)^2 + \left(-\frac{F_y'}{F_z'} \right)^2}\, dxdy,
$$

$$
= \iint_D \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'|} dxdy
$$

20. 证明：由题意知， $f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$

对充分小的 h，当 $(x_0 + h, y_0) \in N((x_0, y_0))$ 时，有

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)h+\frac{1}{2!}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2$$

$$=\frac{1}{2!}f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)h^2\ (0<\theta<1).$$

由于 $f(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的极大值，所以当 h 充分小时，有

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)\le 0,$$

于是 $$f_{xx}(x_0+\theta h,y_0)\le 0.$$

注意到 f_{xx} 的连续性，令 $h\to 0$，即得 $f_{xx}(x_0,y_0)\le 0$.

同理可得 $f_{yy}(x_0,y_0)\le 0$.

综上所得，$f_{xx}(x_0,y_0)+f_{yy}(x_0,y_0)\le 0$.