知识点四 刚体力学

【内容预览】

知识体系	具体知识点	解题要点
刚体运动学	刚体、自由度、刚体的运动、角速度和角加速度、刚体上点的速度和加速度、角速度和角加速度矢量	这里以概念为主，要牢记各个物理量并理解，掌握各个物理量的求法。
刚体动力学	力矩、力矩的功、转动惯量、转动定律、转动动能、转动动能定理、角动量、角动量定理、角动量守恒定律、进动现象	1.用积分法、平行轴定律、垂直轴定理求转动惯量 2.类比牛顿第二定律使用转动定律 $M=J\alpha$ 3.掌握转动的动能表达式 $E=\frac{1}{2}J\omega^2$ 4.理解掌握角动量守恒定律

【知识清单】

§4.1 刚体运动学

一、刚体和自由度

1.刚体：在力的作用下，大小和形状都不变的物体称为刚体。可以认为在力的作用下组成刚体的所有质点之间的距离始终保持不变。

2.自由度：确定一个物体的位置所需要的独立的坐标数，称为这个物体的自由度。物体有几个自由度，它的运动定律就可以归结为几个独立的方程式。

☞注意：因为刚体的所有质点在力的作用下彼此之间的距离是不变的，所以沿刚体方向的速度分量和加速度分量是相等的。

二、刚体的平动和定轴转动

1.刚体的平动：指的是在刚体运动时，在刚体内所作的任一条直线都始终和自身平行的运动。

2.定轴转动：指的是刚体内各点都绕同一直线作圆周运动的运动。

三、角速度和角加速度

1.角速度：$\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}=f'(t)$

2.角加速度：$\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}=f''(t)$

3.类比线运动可得如下结论：$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega^2=\omega_0{}^2+2\alpha(\theta-\theta_0)\end{cases}$

4. 刚体上各点的速度和加速度：$\begin{cases} v = r\omega \\ a_t = r\alpha \\ a_n = r\omega^2 \end{cases}$

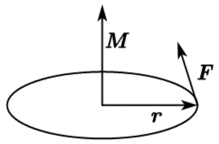
5.角速度和角加速度矢量：角速度的方向利用右手螺旋法则判断，角加速度的方向是角速度增加的方向。

结论：定义了角速度矢量后，速度和角速度的关系可以写成：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 为位置矢量

§4.2 刚体动力学

一、力矩

1.力矩：力矩是引起转动物体运动状态发生变化的原因。$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$，方向可以根据右手螺旋法则判断。



2.力矩的功：$W = M \cdot \Delta\theta$

注意：正如力是引起质点或平动物体运动状态（动量）发生变化的原因，力矩是引起转动物体运动状态（角动量）发生变化的原因。

力矩做功也可类比力做功的公式 $W = F \cdot s$ 得到。

二、转动惯量

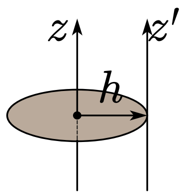
1.转动惯量：刚体对某 z 轴的转动惯量等于刚体各质元的质量与该质元到转轴垂直距离平方的乘积之和。

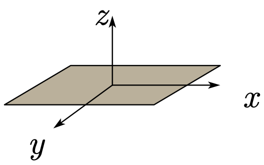
$$J_z = \int r^2 dm$$

可以看出，刚体对于轴的转动惯量大小决定于三个因素：转轴的位置，刚体的质量和质量对轴的分布情况。实际上，刚体的转动惯量可以类比于质点的质量，它在物体的转动中发挥着质量的作用。

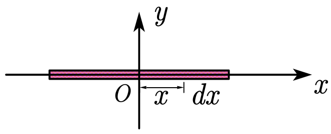
平行轴定理：刚体对任意轴的转动惯量等于通过质心并与该轴平行的轴的转动惯量加上刚体的质量与两轴间垂直距离 h 平方的乘积，即 $J_{z'} = J_z + mh^2$

垂直轴定理：假设 $Oxyz$ 坐标系统的 x 轴与 y 轴都包含与平行于此薄片，而 z 轴垂直于薄片的面，则 $J_z = J_x + J_y$。





例 一长为 l，质量为 m 的匀质细杆，如图所示，求该杆对通过中心并垂直于杆的轴的转动惯量。



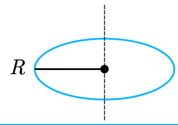
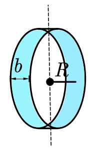
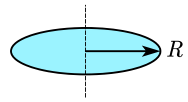
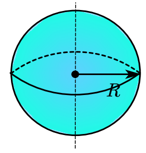
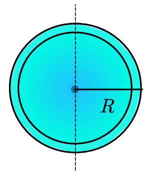
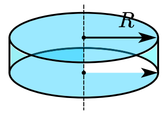
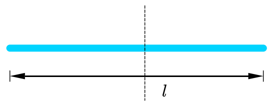
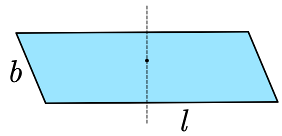
解　根据转动惯量的定义：$dJ = \dfrac{dx}{l} m x^2$

积分得：$J = \displaystyle\int dJ = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$

✦解题技巧：如果要求通过杆的一端并且与 y 轴平行的轴的转动惯量，只需改一下积分的上下限即可：

$J = \displaystyle\int dJ = \int_0^l x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$；显然满足平行轴定理。

常见刚体的转动惯量如下：

刚　　体	转　　轴	转 动 惯 量	图
匀质圆环	通过圆环中心与环面垂直	mR^2	
匀质圆柱壳	沿直径方向过柱壳中心	$\frac{1}{2}mR^2+\frac{1}{12}mb^2$	
匀质圆盘	通过圆盘中心与盘面垂直	$\frac{1}{2}mR^2$	
匀质球体	沿直径	$\frac{2}{5}mR^2$	
匀质球壳	沿直径	$\frac{2}{3}mR^2$	
匀质圆柱体	沿几何轴	$\frac{1}{2}mR^2$	
匀质细杆	通过中心与杆垂直	$\frac{1}{12}ml^2$	
匀质长方形板	通过中心与板面垂直	$\frac{1}{12}m(l^2+b^2)$	

2.转动定律：$M=J\alpha$（转动形式的牛顿第二定律）

3.转动动能：$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$

4.转动动能定理：$W=\frac{1}{2}J{\omega_2}^2-\frac{1}{2}J{\omega_1}^2$

三、角动量

1.角动量：$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$，又叫做动量矩；标量式：$L=mvr=J\omega$。

2.角动量定理：定轴转动的刚体的角动量在某一时间间隔内的增量，等于同一时间间隔内作用在刚体上的冲量矩：$\int_{t_0}^{t}M_z dt=(J_z\omega)_t-(J_z\omega)_{t_0}$

3.角动量守恒定律：如果作用在质点系上所有外力对某一固定轴的力矩之和为零，则质点系对该轴的动量矩保持不变。

✎结论：角动量守恒定律可以理解为角动量定理的一种特殊的情况，据此我们可以得出一个推论：

受有心力的刚体，角动量守恒。

四、进动

1.进动现象：一个自转的物体受外力作用导致其自转轴绕某一中心旋转，这种现象称为进动，也叫做旋进。

2.陀螺进动的角速度：$\Omega=\dfrac{mgb}{J\omega}$,其中$b$是旋转支点到重心的距离。其方向和自转的方向相同。

【常考题型】

题型 1：角速度和角加速度

1.牢记角速度和角加速度的定义，同时要理解角加速度和角速度的关系；

2.掌握角速度和速度的关系；

3.学会角速度的矢量表示。

例 4-1 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？（　　）

A.角速度从小到大，角加速度从大到小　　B.角速度从小到大，角加速度从小到大

C.角速度从大到小，角加速度从大到小　　D.角速度从大到小，角加速度从小到大

解：角速度的大小变化由角加速度决定，角加速度的大小变化由外力矩决定。显然角加速度一直是正的，所以角速度是一直增大的。而棒的合外力矩就是重力矩，显然$M=mgr$中，r是一直减小的，所以力矩在减小，所以角加速度是减小的，所以选A。

例 4-2 一刚体以每分钟 60 转绕 z 轴作匀速转动（$\vec{\omega}$沿 z 轴正方向）。设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为$\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}(\boldsymbol{SI})$，则该时刻 P 点的速度$\vec{v}$为：（　　）

A.$\boldsymbol{v}=94.2\boldsymbol{i}+125.6\boldsymbol{j}+157.0\boldsymbol{k}$　B.$\boldsymbol{v}=-25.1\boldsymbol{i}-18.8\boldsymbol{j}$　C.$\boldsymbol{v}=-25.1\boldsymbol{i}+18.8\boldsymbol{j}$　D.$\boldsymbol{v}=31.4\boldsymbol{k}$

解：角速度的方向是 z 轴的正方向，大小为$\omega=2\pi\ rad/s$，所以$\vec{\omega}=2\pi\boldsymbol{k}\ rad/s$，根据公式$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$进行矢量的乘法可得答案为 C。

题型 2：转动惯量

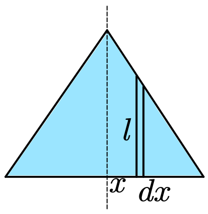
1.记住转动惯量的定义，学会用基本的积分法求转动惯量，同时会利用平行轴定理和垂直轴定理

2.类比牛顿第二定律，理解转动定律

3.掌握转动的动能表达式

例 4-3 现有一正三角形薄板，总质量为 m，边长为 a，求它绕通过其中心且与其一边垂直的轴的转动惯量。

解:显然这个要根据定义来求：根据图中几何关系：$\dfrac{l}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{\frac{a}{2}-x}{\frac{a}{2}}$



所以：$J=2\int_0^{\frac{a}{2}}\dfrac{l dx}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}m\cdot x^2=\dfrac{1}{24}ma^2$

例 4-4 一质量为M的均匀细棒，长度为L，可绕其一端旋转；现有一质量为m的子弹射入棒的自由端，此时棒的转动惯量为多少？

解：根据转动惯量的可加性：$J=J_1+J_2=\frac{1}{3}ML^2+mL^2$

结论：转动惯量是可加的，两个不同物体的对同一个轴的转动惯量是可以相加的，这一点可以类比质量的相加。

例 4-5 正方形薄板绕其对角线的转动惯量和绕过中心且平行于一边的轴的转动惯量相比，哪个更大？

解：根据垂直轴定理$J_z=J_x+J_y$，因为$J_x=J_y$，所以$J_x=\frac{1}{2}J_z$，又因为正方形的对称性，所以建坐标系时候，x 轴既可以是对角线也可以是过中心且平行于一边的直线，所以两者的转动惯量是一样的。

题型 2：角动量

1.牢记角动量的定义； 2.理解掌握角动量守恒定律

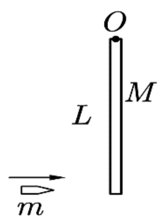
例 4-6 一个人坐在轮椅上，双手各持一哑铃，哑铃与转轴的距离均为 0.6m，先让人体以 5rad/s 的角速度随轮椅旋转，此后，人回收手臂使哑铃到转轴的距离减为 0.2m。人体和转椅对轴的转动惯量为$5kg\cdot m^2$,并视为不变，每个哑铃的质量为 5kg,可视为质点。则哑铃被拉回后，人体转动的角速度为_____。

解：根据角动量守恒：

$$(J_1+2mr_1^2)\omega=(J_1+2mr_2^2)\omega'\Rightarrow(5+2\times5\times0.6^2)\times5=(5+2\times5\times0.2^2)\times\omega'$$

$$\Rightarrow\omega'=7.96\ rad/s$$

例 4-7 如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L、质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为$\frac{1}{3}ML^2$ 。一质量为 m、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射出并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为$\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为：(   )



A. $\frac{mv}{ML}$　　B. $\frac{3mv}{2ML}$　　C. $\frac{5mv}{3ML}$　　D. $\frac{7mv}{4ML}$

解：根在该题中，棒和子弹构成的系统受到指向 O 点的有心力，所以角动量守恒：

$mvL=\frac{1}{2}mvL+\frac{1}{3}ML^2\omega\Rightarrow\omega=\frac{3mv}{2ML}$，所以选 B

✦解题技巧：在列角动量守恒关系式的时候，一般列标量式，因为$L=mvr=J\omega$，所以在选择公式的时候，对于做平动运动的物体，采取前一个表达式；对于做转动的物体，采取后一个表达式。

【精选习题】