2017～2018 学年第二学期《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷)

一．　**单项选择题**（每小题 3 分, 6 个小题共 18 分. 将选择结果涂填在答题卡上.）

1. 函数 $f(x,y)=|x|\cos y$ 在原点 $(0,0)$ 处【　】.

A. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 存在　　B. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

C. $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在　　D. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

2. 设 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}v$ 化为球面坐标系下的逐次积分，下列结果正确的是【　】.

A. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　B. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\mathrm{d}\rho$

C. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$　　D. $I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(\rho)\mathrm{d}\rho$

3. 设 $\Omega:0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$，$\Omega_1$ 为 Ω 在第一卦限的部分区域,则下面式子正确的是【　】.

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v$　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_1} x^2\mathrm{d}v$　C. $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=0$　D. $\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_1} xy\mathrm{d}v$

4. 关于数项级数的敛散性,下面说法正确的是【　】.

A. 若正项级数 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l<1$　　B. 若 $\sum a_n$ 收敛, 则 $\sum a_n^2$ 收敛

C. 若 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛, 则 $\sum(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛　　D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l<1$, 则 $\sum a_n$ 收敛

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，对于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 以下结论正确的是【　】.

A. 在 $x=1$ 处条件收敛　　B. 在 $x=3$ 处发散

C. 在 $x=2$ 处绝对收敛　　D. 在 $x=0$ 处条件收敛

6. 在 xoy 面上,若积分 $\int_L(2xe^{x^2}y^3+ax\cos y)\mathrm{d}x+(be^{x^2}y^2-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则【　】.

A. $a=2,b=-3$　　B. $a=-2,b=3$　　C. $a=-2,b=-3$　　D. $a=2,b=3$

二．　**填空题**（每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上.）

7. 函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在 $(1,1,1)$ 点的全微分 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=$ ____.

8. 设区域 $D:|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D(1-x)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ____.

9. 设 $f(x)=x+1$，$-\pi\le x\le\pi$，将 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的傅立叶级数 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$．则 $a_{2018}=$ ___．

10. 设矢量函数 $\boldsymbol{F}=\{x,y,z\}$，$\boldsymbol{G}=\{y,z,x\}$，则 $\mathrm{div}(\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G})=$ ___．

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x^2+y^2-5z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,2,1)$ 处的切线方程.

12. 设 $u=f(x+y^2,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

13. 设 $x=r^2\cos\theta,y=r\sin\theta\,(r\ne 0)$确定的隐函数为 $r=r(x,y),\theta=\theta(x,y)$，求 $\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial x}$.

14. 求 $I=\int_L(x+y^2)\,\mathrm{d}s$，其中 L 是圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 x 轴和 y 轴所围平面图形的整个边界.

15. 求 $I=\iint\limits_S xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le 1$）取上侧.

16. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ 的和.

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程.）

17. 已知函数 $u=\ln(xy^2z^3)$ 在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6R^2\,(R>0)$的第一卦限部分上存在最大值. 求出该最大值点，并由此证明:对任意正实数 a,b,c，成立 $ab^2c^3\le\left(\frac{a+2b+3c}{6}\right)^6$.

18. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$、柱面 $x^2+y^2=2x$ 以及 xy 坐标面围成的空间区域. 求（1）Ω 的体积 V；（2）Ω 表面上锥面块的面积 S.

五. 分析证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程.）

19. 计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以 $(1,0)$ 为圆心、以 $R(R>0,\ R\ne 1)$ 为半径的圆周，取逆时针方向.

20. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数，证明 $\int_0^1 e^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 e^{-f(x)}\mathrm{d}x\ge 1$.