1.1.3　一般项级数(变号级数)

由于非正项级数(一般项级数)的收敛性问题要比正项级数复杂得多, 所以本节只对某些特殊类型级数的收敛性问题进行讨论.

一、交错级数及Leibnitz判别法

二、绝对收敛级数及其性质

三、Abel判别法和Dirichlet判别法

一、 交错级数及其判别法

设 $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数** .

定理1 (Leibnitz判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛 , 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1} .$$

证: $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq 0$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1})$$

$$- u_{2n} \leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有界数列, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

故级数收敛于**S**, 且 $S \leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leq u_{n+1}$$

例1. 用Leibniz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

二、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 , 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 ;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 .

例如 : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理2 绝对收敛的级数一定收敛.

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$

显然 $v_n\ge 0$, 且 $v_n\le|u_n|$, 根据比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

$$u_n=2v_n-|u_n|$$

$$\Bigg\downarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}2v_n\ \text{收敛}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

定理2的作用: $\boxed{\text{任意项级数}} \Longrightarrow \boxed{\text{正项级数}}$

例2. 证明下列级数绝对收敛：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}.$$

证: (1) $\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛，

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \text{ 收敛}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$　　令 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$,

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

例3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}+\cdots$ 的绝对收敛性.

解：级数各项绝对值所组成的级数是

$$\sum\frac{|\alpha|^n}{n!}=|\alpha|+\frac{|\alpha|^2}{2!}+\cdots+\frac{|\alpha|^n}{n!}+\cdots.$$

应用比式判别法, 对于任意实数α,都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1}=0<1,$$

因此, 所考察的级数对任何实数 α 都绝对收敛.

练习：判别下列级数的敛散性，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n+1}{n^2+1}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$;

绝对收敛级数的两个重要性质:

1. 级数的重排 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$ (5)

我们把正整数列$\{1,2,\ldots,n,\ \ldots\}$到它自身的一一映射 $f:n\to k(n)$称为正整数列的重排, 相应地对于数列 $\{u_n\}$按映射 $F:u_n\to u_{k(n)}$所得到的数列$\{u_{k(n)}\}$称为原数列的重排. 相应地称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{k(n)}$为级数(5)的重排.为叙述上的方便,记$v_n=u_{k(n)}$,即把级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_{k(n)}$写作

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{7}$$

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad (5)$$

重排后为： $$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots, \qquad (7)$$

其中 $v_n = u_{k(n)}$

定理3 设级数(5)绝对收敛, 且其和等于S, 则任意重排后所得到的级数(7)绝对收敛且和也为S.

*证（略）

注 定理3只对绝对收敛级数成立. 条件收敛级数重排后得到的新级数, 不一定收敛, 即使收敛, 也不一定收敛于原来的和. 更进一步, 条件收敛级数适当重排后, 既可以得到发散级数, 也可以收敛于任何事先指定的数. 例如级数(2)是条件收敛的, 设其和为A, 即

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=A.$$

乘以常数$\frac{1}{2}$后,有

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{A}{2}.$$

将上述两个级数相加, 得到的是(2)的重排:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}A.$$

也可以重排(2)使其发散(参看数学分析学习指导书下册39页， 第7题):

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$$ 发散

2. 级数的乘积

由定理2知道, 若 $\sum u_n$ 为收敛级数, a为常数, 则

$a\sum u_n = \sum a u_n$,

由此可以立刻推广到收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与有限项和的乘积, 即 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k u_n$,

那么无穷级数之间的乘积是否也有上述性质?

设有收敛级数

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = A, \qquad (11)$$

$$\sum v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots = B. \qquad (12)$$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n) = (u_1 + u_2 + \cdots)(v_1 + v_2 + \cdots) = ?$$

将级数(11)与(12)中每一项所有可能的乘积列成下

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n) = (u_1 + u_2 + \cdots)(v_1 + v_2 + \cdots) = ?$$

表:

$$\begin{array}{|llllll}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \qquad (13)$$

这些乘积u_iv_j可以按各种方法排成不同的级数，常用的有按正方形顺序或按对角线顺序.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & \cdots & & u_1v_n & \cdots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_2v_1 & \leftarrow & u_2v_2 & & u_2v_3 & \cdots & & u_2v_n & \cdots \\
 & & & & & \downarrow & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
\leftarrow & u_3v_1 & \leftarrow & u_3v_2 & \leftarrow & u_3v_3 & \cdots & & u_3v_n & \cdots \\
 & & & & & & \cdots & & \downarrow & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots & & \vdots & \cdots \\
 & & & & & & & & \downarrow & \\
\leftarrow & u_nv_1 & \leftarrow & u_nv_2 & \leftarrow & u_nv_3 & \cdots & \leftarrow & u_nv_n & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \cdots & & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

正方形顺序

u_1v_1	u_1v_2	u_1v_3	$\cdots$
u_2v_1	u_2v_2	u_2v_3	$\cdots$
u_3v_1	u_3v_2	u_3v_3	$\cdots$
			$\cdots$
			$\cdots$
			$\cdots$

对角线顺序

依次相加, 于是分别有

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1 + \cdots \tag{14}$$

和 $$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots. \tag{15}$$

定理4 (柯西定理) 若级数(11)、(12)都绝对收敛, 则对(13)中 u_iv_j 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛, 且其和等于AB.

证:(略)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}\right)$$

例2 等比级数 $\dfrac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots, \ |r|<1$

是绝对收敛的. 将 $(\sum r^n)^2$ 按(15)的顺序排列, 则得到

$$\frac{1}{(1-r)^2}=1+(r+r)+(r^2+r^2+r^2)+\cdots+\underbrace{(r^n+\cdots+r^n)}_{n+1}+\cdots,$$

$$=1+2r+3r^2+\cdots+(n+1)r^n+\cdots.$$

注 级数乘积在幂级数中有重要应用.

三、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (20)$$

定理5 (Abel判别法) 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, 且级数$\sum b_n$ 收敛, 则级数(20)收敛.

定理6 (Dirichlet判别法) 若数列$\{a_n\}$单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界, 则级数(20)收敛.

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (20)$$

定理5 (Abel判别法) 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，且级数$\sum b_n$ 收敛，则级数(20)收敛.

例2. 若级数 $\sum u_n$ 收敛，则级数

$$\sum \frac{u_n}{n^p}(p>0), \quad \sum \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} \quad \text{都收敛.}$$

解：取 $a_n = u_n,\quad b_n = \dfrac{1}{n^p}, \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

由Abel判别法即得.

例4. 若数列$\{a_n\}$具有性质:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots, \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

则级数 $\sum a_n \sin nx$ 和 $\sum a_n \cos nx$ 对任何 $x \in (0, 2\pi)$ 都收敛.

解 因为

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) = \sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right) + \cdots$$

$$+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

当 $x\in(0,2\pi)$ 时, $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, 故得到

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{21}$$

所以级数$\sum\cos nx$ 的部分和数列当 $x\in(0,2\pi)$时有界, 由狄利克雷判别法得级数 $\sum a_n\cos nx$ 收敛. 同理可证级数$\sum a_n\sin nx$也是收敛的.

作为例3 的特殊情形, 得到级数 $\sum\frac{\sin nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos nx}{n}$ 对一切 $x\in(0,2\pi)$ 都收敛.

例4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$收敛但不绝对收敛.

解 由于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的绝对值级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{\cos 2n}{n}\right),$$

其中$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$收敛(根据例3结论), 故

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$发散.

又因 $\sin^2 n = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2n)$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n} - \frac{\cos 2n}{n}\right),$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ 收敛,而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2+\pi)n}{n},$$

根据例3也收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\sin^2 n}{n}$ 为条件收敛.

内容小结

1. 利用部分和数列的极限判别级数的敛散性

2. 利用正项级数判别法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发 散

$\Downarrow$ 满足

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

$\Downarrow \quad \not\Uparrow$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow[\text{用它法判别}]{\rho=1}$ 不定

- 比较判别法
- 部分和极限
- 积分判别法

$\rho<1$ $\Downarrow$ 收 敛

$\rho>1$ $\Downarrow$ 发 散

3. 任意项级数判别法

概念：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 收敛，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ 绝对收敛 \\ 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \ 发散，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ 条件收敛 \end{cases}$$

Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 则交错级数 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n 收敛$$

Abel判别法和Dirichlet判别法

思考与练习

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛？

提示: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

由比较判敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛 .

注意: 反之不成立. 例如,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛 }, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散 } .$$

练习题

$p-$级数 $:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

1. 判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

不是 p–级数

解: (1) $\because\ \ln(n+1)<n,\ \therefore\ \frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 , 故原级数发散 .

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\Big/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 , 故原级数发散 .

2. 设 $u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ (C).

(A) 发散 ;　　　　(B) ~~绝~~对收敛;

(C) 条件收敛 ;　(D) 收敛性根据条件不能确定.

分析: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$, $\therefore$ (B) 错 ;

又 $S_n=-\left(\dfrac{1}{u_1}+\cancel{\dfrac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{u_2}}+\cancel{\dfrac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\dfrac{1}{u_3}}+\cancel{\dfrac{1}{u_4}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{u_4}}+\dfrac{1}{u_5}\right)$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

思考题

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛？反之是否成立？

思考题解答

由正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，可以推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_n^2}{u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

反之不成立．　例如：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

练 习 题

一、填空题:

1、p－级数当________时收敛，当________时发散;

2、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项与前项之比值的根等于ρ，则当________时级数收敛；________时级数发散；____________时级数可能收敛也可能发散．

二、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+\dfrac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\dfrac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}\quad (a>0)$．

三、用比值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

四、用根值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

五、判别下列级数的收敛性:

1、$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{\left(a+\frac{1}{n}\right)^n}\quad(a>0)$.

六、判别下列级数是否收敛?如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

2、$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

七、若 $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n$ 存在, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

八、证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

练习题答案

一、1、$p>1, p\le 1$；

2、$\rho<1, \rho>1$(或$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$), $\rho=1$.

二、1、发散；　　2、发散.

三、1、发散；　　2、收敛.

四、1、收敛；　　2、收敛.

五、1、发散；　2、收敛；　3、$\begin{cases} a>1, \text{收敛}; \\ 0<a<1, \text{发散}; \\ a=1, \text{发散}. \end{cases}$

六、1、绝对收敛；　2、条件收敛；　3、条件收敛.