2017～2018 学年第二学期

《微积分学(一)下》课程期末考试试卷(A 卷)

(闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级__________学号____________ 姓名___________

考试日期: 2018-06-24 **考试时间:** 8:30 - 11:00

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	28	8	12	28	24	100
得 分						

解答内容不得超过装订线

得 分	
评卷人	

一、 填空题（每空 4 分，共 28 分）

1、设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛， $x=2$ 处发散，则该幂级数的收敛域为 ______________.

2、设 $z=e^{x^2 y}$，则 $dz=$__________________________.

3、若函数 $f\left(x,y\right)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a=$__________.

4、函数 $u=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ 在点 $\mathrm{A}\left(1,0,1\right)$ 处沿 A 点指向 $\mathrm{B}\left(3,-2,2\right)$ 点方向的方向导数为_________.

5、交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$_________________________.

6、求通过直线 $L_1:\begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$，且平行于直线 $L_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ 的平面方程：____________________.

7、设 $\vec{F}=(y^2+2bxz)\vec{i}+y(ax+bz)\vec{j}+(y^2+bx^2)\vec{k}$ 是梯度场，则 $a=$__________，$b=$_________.

得　分	
评卷人	

二、 判断题(每小题 2 分，共 8 分). 请在正确说法相应的括号中画“√ ”，在错误说法的括号中画“×”.

8. 设 $\sum a_n$ 是正项级数且 $\sum(a_{2n}+a_{2n+1})$ 收敛，则级数 $\sum a_n$ 也必收敛. ( )

9. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 a,b 两点收敛 $(\mathrm{a}<\mathrm{b})$，则该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛. ( )

10. 二元函数 $\mathrm{f}(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 存在，则 $\mathrm{f}(x,y)$ 在该点连续. ( )

11. 设 $f(x,y)=\begin{cases} xysin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$ 则 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续. ( )

得　分	
评卷人	

三、解答题（每小题 6 分，共 12 分）

12. 计算重积分 $\mathrm{I}=\iiint_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中区域 Ω 是由曲面 $2z=x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围成的区域.

13. 计算 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是从点 $\mathrm{A}(-1,0)$ 经过单位圆的下半圆到点 $\mathrm{B}(1,0)$，再通过连接 BC 的直线到点 $\mathrm{C}(-1,2)$ 的路径.

得　分	
评卷人	

四、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

14．求函数 $f\left(x\right)=x^2, x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数以及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和.

15．计算曲面积分

$$\iint_S (x^2-z)dxdy+(z^2-y)dzdx,$$

其中S为旋转抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 在 $z\in[0,1]$ 的部分，其法向量与z轴正向成锐角.

16. 计算曲线积分 $I=\oint_C ydx+zdy+xdz$，其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向看是逆时针方向.

17. 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty} t^6 e^{-at^2}dt$，$a>0$.

得　分	
评卷人	

五、证明题（每小题 6 分，共 24 分）

18. 用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+y^2)=5$.

19. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对收敛且一致收敛，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

20. 设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 有二阶连续偏导数，满足

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},$$

且函数 $w=w(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$

证明：$w=w(x(u,v),y(u,v))$ 满足方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$

21. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续二阶偏导数，在 $x^2+y^2<1$ 内满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$，且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x,y)\ge 0$，证明：当 $x^2+y^2\le 1$ 时，$u(x,y)\ge 0$.