2013 级启明学院《一元分析学》课程期中试题

参考答案

一. 对错错(1. 用数列无界和无穷大的定义可证明; 2. 间断点是第一类的, 是可去间断点, 因为 $\forall x_0, \lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$, 见学习材料 p37 例 3.1.6; 3. 反例见学习材料 p89 思考 1)

二. 4. $\exists M_0>0, \forall \delta>0, \exists x_\delta \in (a, a+\delta), \ni: |f(x_\delta)| \le M_0$.

5. $\exists \varepsilon_0>0, \forall M>0, \exists x_1, x_2>M, \ni: |f(x_1)-f(x_2)| \ge \varepsilon_0$.

三. 6. $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$f^{(2013)}(x)=\frac{(-1)^{2013}(2013!)}{3}\left(\frac{2^{2013}}{(2x-1)^{2014}}+\frac{1}{(x+1)^{2014}}\right)$$

$\therefore \quad f^{(2013)}(0)=-\dfrac{2013!}{3}\left(2^{2013}+1\right)$.

注: 也可由 Taylor 公式来求得.

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t+\sin t+t\cos t}=\tan t$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=1$.

$t=\dfrac{\pi}{4}$ 时, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1+\dfrac{\pi}{4})$, $\quad y=x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(1-\dfrac{\pi}{4})$.

$\therefore$ 切线方程为

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-\frac{\pi}{4})+x-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+\frac{\pi}{4}),\ \text{即}\quad y=-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi a+x.$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\sec^2 t}{at\cos t}$, $\therefore \quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{a\pi}$.

三. 8. $\forall \varepsilon>0$, 由

$$|\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}|=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}<\varepsilon$$

解得 $n>\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right]$ (或 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$), 则 $\forall n>N$, 有

$$|\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=0$.

9. $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} x\cos\dfrac{1}{x}=0,\quad f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$，$\therefore\quad f'(0)=0$.

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 2x, & x\ge 0.\end{cases}$$

$\because\quad \lim\limits_{x\to 0^-} 2x\cos\dfrac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

$\therefore\quad \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$不存在. 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处间断.

五. 10. $\because\quad 1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+\cdots+(n+1-1)\cdot n!$

$$=2!+3!+\cdots+(n+1)!-(1!+2!+\cdots+n!)=(n+1)!-1$$

$$\therefore\ 原式=\lim_{n\to\infty} n\left[(1-\frac{1}{(n+1)!})-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{(n+1)!}=0.$$

注: 可用 Stolz 定理来做.

11. $\because\quad (1+\dfrac{2}{x})^x-e^2=e^2\left[e^{x\ln(1+\frac{2}{x})-2}-1\right]\sim e^2[x\ln(1+\dfrac{2}{x})-2]\quad (x\to+\infty)$

这里利用了等价关系 $e^t-1\sim t\quad (t\to 0)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\dfrac{2}{x}=2.$

$\therefore$ 原式 $=e^2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x[x\ln(1+\dfrac{2}{x})-2]=e^2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot[x(\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{2x^2}+o(\dfrac{1}{x^2}))-2]=-2e^2$.

注: 上式中可令 $t=1/x$ 后用 H'ospital 法则.

另解: 令 $t=1/x$，则 $x\to+\infty$ 时 $t\to 0^+$. 于是由 H'ospital 法则得到

$$原式=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+2t)^{\frac{1}{t}}-e^2}{t}=\lim_{t\to 0^+}(1+2t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{2t-(1+2t)\ln(1+2t)}{t^2(1+2t)}$$
$$=e^2\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{2t-(1+2t)\ln(1+2t)}{t^2}=e^2\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{2-2\ln(1+2t)-2}{2t}$$
$$=e^2\cdot\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+2t)}{t}=-2e^2.$$

六. 12. $\because\quad f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续，$\therefore\quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_1, x_2\in[a,b)$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

方法 1: 于是对上述 δ，$\forall z_1, z_2\in(b-\delta,b)$ 有 $|z_1-z_2|<\delta$，从而有 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$. 由 Cauchy 收敛准则，$f(b-0)$ 存在.

方法 2: 在区间$[a,b)$内任取收敛于b的点列$\{x_n\}$，由数列的 Cauchy 收敛准则，对上述的δ，$\exists N, \forall n,m>N$，有$|x_n-x_m|<\delta$. 因此

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon \quad (\forall n,m>N),$$

即$\{f(x_n)\}$为 Cauchy 基本列，从而收敛. 故，由 Heine 定理知 $f(b-0)$ 存在.

13. 由 $f(0)f(2)>0$ 和 $f(1)f(2)<0$ 知 $f(0)f(1)<0$. 连续函数 $f(x)$ 依次在区间$[0,1]$和$[1,2]$上用零点定理，存在$x_1\in(0,1), x_2\in(1,2)$使得 $f(x_1)=0=f(x_2)$. 令$h(x)=e^{-ax}f(x)$，则$h(x)$在区间$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，且$h(x_1)=0=h(x_2)$. 由 Rolle 中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(0,2)$，使得 $h'(\xi)=0$. 而 $h'(x)=e^{-ax}(f'(x)-af(x))$，$e^{-ax}>0$，所以 $f'(\xi)-af(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=af(\xi)$.

14. $\because$

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(a-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta_1)}{2}(a-\frac{a+b}{2})^2, \quad \eta_1\in(a,\frac{a+b}{2})$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(b-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta_2)}{2}(b-\frac{a+b}{2})^2, \quad \eta_2\in(\frac{a+b}{2},b)$$

$\therefore$ 两式相加，得到

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi),$$

其中$\xi\in[\eta_1,\eta_2]$由 Darbourx 定理(导函数的介值性定理，学习材料 p66, p79)得到. 证毕.

15. 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}\neq0$，所以由函数极限的局部保号性，存在$\delta_1>0$，使当$x\in(-\delta_1,0)$时 $f(x)$ 与 $f'(0)$ 反号，即 $f(x)f'(0)<0$. 又因为 $f'(x)$ 连续，所以存在$\delta_2>0$，使当$x\in(-\delta_2,0)$时 $f'(x)$ 与 $f'(0)$ 同号. 取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则$\delta>0$，且当$x\in(-\delta,0)$时有 $f(x)f'(x)<0$. 同理，对$x\in(-\delta,0)$有 $g(x)g'(x)<0$，此δ与上述δ不同时取较小者.

注意到$y'=\dfrac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{y}$和当$x\in(-\delta,0)$时$y>0$，因此当$x\in(-\delta,0)$时$y'<0$.

故δ在$(-\delta,0)$内严格单调减少. 证毕.