3.4 多元函数的极值

一、自由极值

二、多元函数的最值

三、条件极值与
拉格朗日乘数法

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

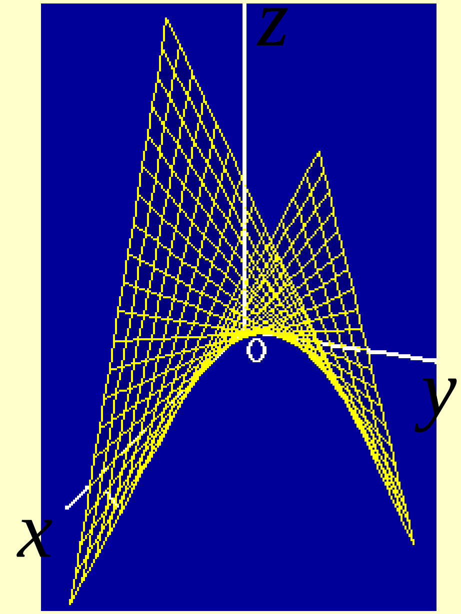
则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

例如:

$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.



定理1 **(必要条件)** 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0\,,\ \ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

证: 因 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值 , 故

$$z = f(x, y_0) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z = f(x_0, y) \text{ 在 } y = y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为**驻点** .

但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

为了讨论二元函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得极值的充分条件, 我们假定 f 具有二阶连续偏导数, 并记

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0},$$

称为 f 在点 P_0 的黑赛(Hesse)矩阵.

定理2(极值的充分条件) 设 $f(x,y)$ 在$P(x_0y_0)$ 的某邻域$U(P_0)$内具有二阶连续偏导数, 且 P_0 为 f 的稳定点, 则有如下结论:

$$\left.\begin{array}{l} H_f(P_0)\text{为正定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{为极小值,} \\ H_f(P_0)\text{为负定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{为极大值,} \\ H_f(P_0)\text{为不定矩阵} \Rightarrow f(P_0)\text{不是极值.} \end{array}\right\}$$

证 由 f 在 P_0 的一阶泰勒公式，并注意到条件

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ \ f_y(x_0, y_0) = 0,$$

有 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$= \frac{1}{2}(\Delta x, \Delta y)\, H_f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\, (\Delta x, \Delta y)^{\mathrm{T}}$$

$$\theta \in (0,1)$$

当 $H_f(P_0)$ 正定时，对任何 $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$,

恒使二次型 $(\Delta x,\Delta y)\,H_f(P_0)\,(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}>0.$

由于 $H_f(x,y)$ 为连续函数，由保号性可知，存在

某邻域 $U(P_0)$ ，当 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U^o(P_0)$ 时

有 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$=\frac{1}{2}(\Delta x,\Delta y)\,H_f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\,(\Delta x,\Delta y)^{\mathrm{T}}>0$$

即 f 在点 (x_0,y_0)取得极小值.

同理可证：当 $H_f(P_0)$ 负定时，f 在点 (x_0,y_0) 取得极大值.

最后证明: 当 $H_f(P_0)$ 为不定矩阵时, f 在点 P_0 不取极值. 这是因为, 倘若 f 取极值(设为极大值), 则沿着过 P_0 的任何直线

$$x = x_0 + t\Delta x,\ \ y = y_0 + t\Delta y,$$

$f(x,y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = \varphi(t)$ 在 $t = 0$ 亦取极大值. 由一元函数取极值的充分条件, $\varphi''(0) > 0$ 是不可能的(否则 φ 在 $t = 0$ 将取极小值), 故只能 $\varphi''(0) \le 0$. 而

$$\varphi'(t) = f_x \Delta x + f_y \Delta y,$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2,$$

$$\varphi''(0) = (\Delta x, \Delta y) H_f(P_0)(\Delta x, \Delta y)^{\mathrm{T}},$$

这表明 $H_f(P_0)$ 必须是负半定的. 同理, 倘若 f 取极小值, 则将导致 $H_f(P_0)$ 必须是正半定的. 也就是说，当 f 在 P_0 取得极值时，$H_f(P_0)$ 必须是正半定的或负半定的，这与假设相矛盾.

根据对称矩阵的定号性与其主子行列式之间的关系，定理2又可写成如下比较实用的形式——

若 f 如定理2 所设，则有如下结论:

定理2' (充分条件)若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的

某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ **时, 具有极值** $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ **时, 没有极值.**

3) 当 $AC - B^2 = 0$ **时, 不能确定 , 需另行讨论.**

$$\boxed{\det(H_f(x_0 y_0)) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_y \end{vmatrix}_{(x_0 y_0)} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}$$

正定二次型的判定

定理 设A为实对称矩阵，则以下3个命题等价：

（1）$f = X^T AX$ 为正定的；

（2）A 的特征值 λ 都大于零；

（3）矩阵A的各阶顺序主子式恒大于零．即：

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots\cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

负定二次型的判定

定理 设A为实对称矩阵，则以下3个命题等价：

（1）实二次型 $f = X^T AX$ 为负定的；

（2）A 的特征值 λ 都小于零；

（3）A 的顺序主子式的符号为负正相间.

即： $a_{11} < 0$， $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots\ldots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$$

$$\therefore f(1,0)=-5 \text{ 为极小值;}$$

在点(1,2) 处 $A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0, \therefore f(1,2)\text{不是极值;}$$

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0, \therefore f(-3,0)\text{不是极值;}$$

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值.}$$

$$f_{xx}(x,y)=6x+6,\quad f_{xy}(x,y)=0,\quad f_{yy}(x,y)=-6y+6$$

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$

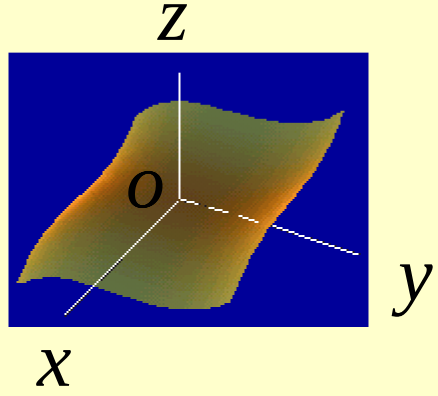
例2.讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点 , 并且在 (0,0) 都有

$$AC - B^2 = 0$$

$z = x^3 + y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases} \text{正} \\ \text{负} \\ 0 \end{cases}$, 因此 $z(0,0)$ 不是极值.



当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $z = (x^2 + y^2)^2 > z\big|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2\big|_{(0,0)} = 0$ 为极小值.

二、最值应用问题

依据

函数 f 在闭域上连续

$\Downarrow$

函数 f 在闭域上可达到最值

$$\text{最值可疑点}\begin{cases}\text{驻点}\\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小(大)值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大)值

若$f(P)$在区域D上最大值存在，则f在D上的最大值点只能是

$$\begin{cases} D\text{的边界点；} \\ D\text{的内点} \Rightarrow D\text{中极值点} \begin{cases} D\text{内的驻点；} \\ D\text{内偏导数不全存在的点。} \end{cases} \end{cases}$$

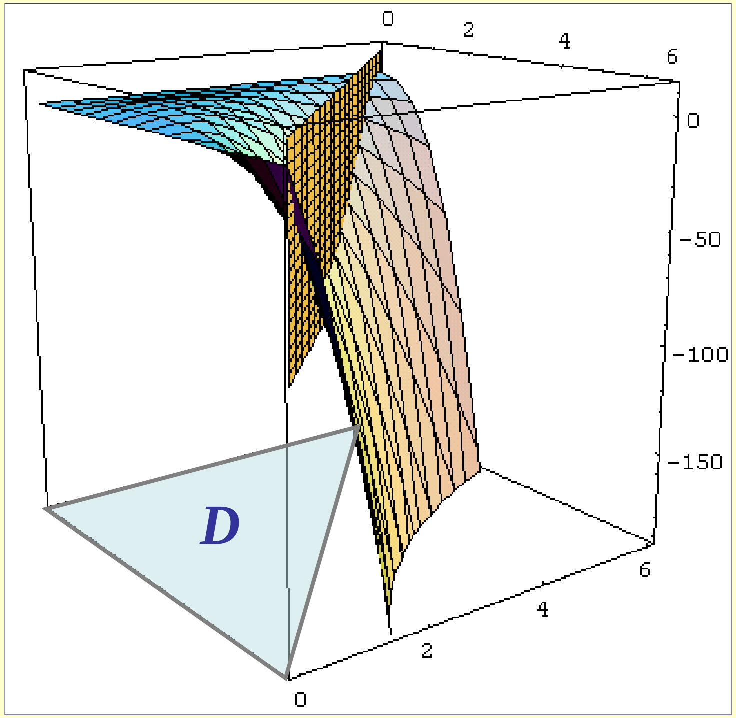
$$\max_{P\in D} f(P) = \max\{\max_{P\in D\bigcap\partial D} f(P), \max_{P\in D\text{的内部}} f(P)\}$$

而 $\max\limits_{P\in D\text{的内部}} f(P)$

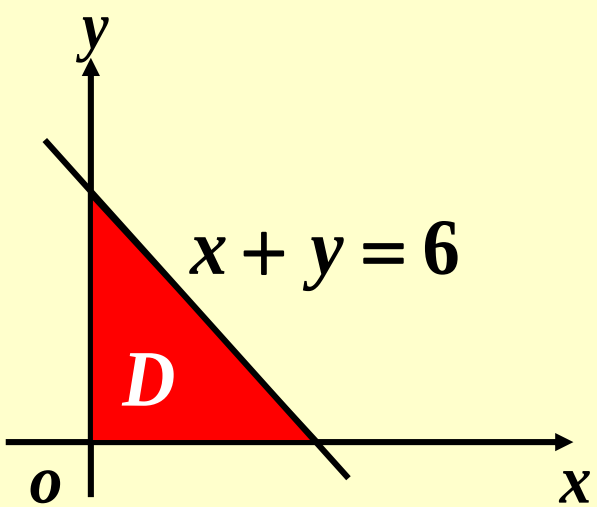
$=\max\{f(P)|P$为偏导数不全存在的点、驻点$\}$

例 3　求二元函数 $z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

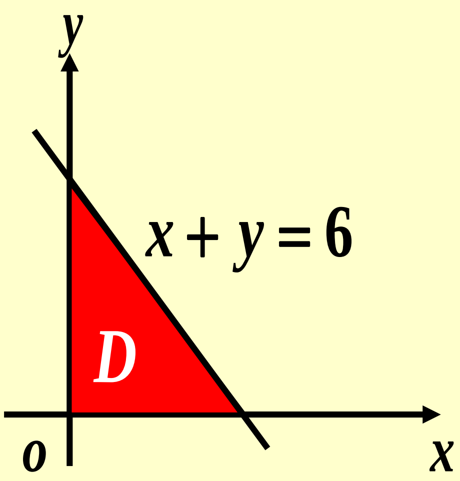
解　如图,



先求函数在 D 内的驻点,



解方程组



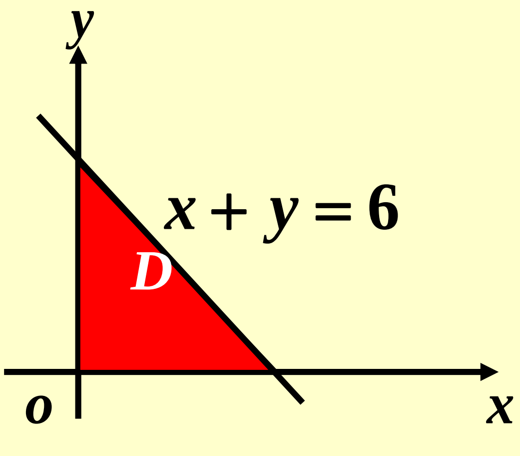
$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy(4-x-y) - x^2y = 0 \\ f'_y(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2y = 0 \end{cases}$$

得区域D内唯一驻点$(2,1)$ 且$f(2,1)=4$,

再求$f(x,y)$在D边界上的最值,

在边界$x=0$和$y=0$上$f(x,y)=0$,

在边界$x+y=6$上，即$y=6-x$



于是$f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$,

由 $f'_x=4x(x-6)+2x^2=0$,

得$x_1=0, x_2=4 \quad \Rightarrow y=6-x\,|_{x=4}=2$,

$f(4,2)=-64$,

比较后可知$f(2,1)=4$为最大值,

$f(4,2)=-64$为最小值.

例4. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

解: 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\frac{2}{xy}$ m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right)\quad \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2(y - \frac{2}{x^2}) = 0 \\ A_y = 2(x - \frac{2}{y^2}) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

高为 $\frac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

三、条件极值

极值问题
- 无条件极值: 对自变量只有定义域限制
- 条件极值: 对自变量除定义域限制外, 还有其它条件限制

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x, y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x, y)$ 的极值

$\Big\Downarrow$ 转化 从条件 $\varphi(x, y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x, \psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2 拉格朗日乘数法. 例如,

在条件$\varphi(x,y)=0$下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述 , 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题, 故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记

$$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数***F*** 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

设 $F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z)$

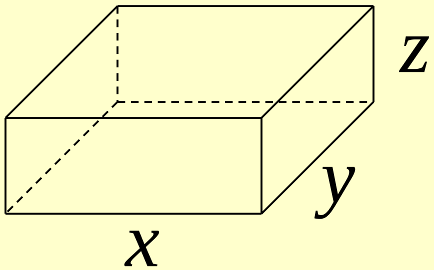
解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_1} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例5. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省？

解: 设 x , y , z 分别表示长、宽、高,则问题为求 x , y , z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

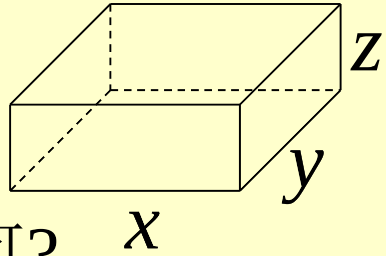
令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$



解方程组 $$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\,xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等.

例 6 在第一卦限内作椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为椭球面上一点,

$$令 F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

则 $F'_x|_P=\dfrac{2x_0}{a^2}$， $F'_y|_P=\dfrac{2y_0}{b^2}$， $F'_z|_P=\dfrac{2z_0}{c^2}$

过 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

化简为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}+\dfrac{z\cdot z_0}{c^2}=1,$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0},$$

所围四面体的体积 $V=\dfrac{1}{6}xyz=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0},$

在条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$下求 V 的最小值,

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$,

$$G(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right),$$

由$\begin{cases} G'_{x_0}=0, \quad G'_{y_0}=0, \quad G'_{z_0}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$,

即 $$\begin{cases} \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{2\lambda x_0}{a^2} = 0 \\ \dfrac{1}{y_0} + \dfrac{2\lambda y_0}{b^2} = 0 \\ \dfrac{1}{z_0} + \dfrac{2\lambda z_0}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

可得 $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_0 = \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \\ z_0 = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

当切点坐标为 $(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}, \dfrac{c}{\sqrt{3}})$时,

四面体的体积最小$V_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}abc.$

例 9 将正数 12 分成三个正数 x, y, z 之和 使得 $u = x^3 y^2 z$ 为最大.

解 令 $F(x, y, z) = x^3 y^2 z + \lambda(x + y + z - 12)$,

则 $$\begin{cases} F'_x = 3x^2 y^2 z + \lambda = 0 \\ F'_y = 2x^3 yz + \lambda = 0 \\ F'_z = x^3 y^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

解得唯一驻点 $(6,4,2)$,

故最大值为 $u_{\max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912.$

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x, y)$在条件$\varphi(x, y) = 0$下的极值,

设拉格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点 .

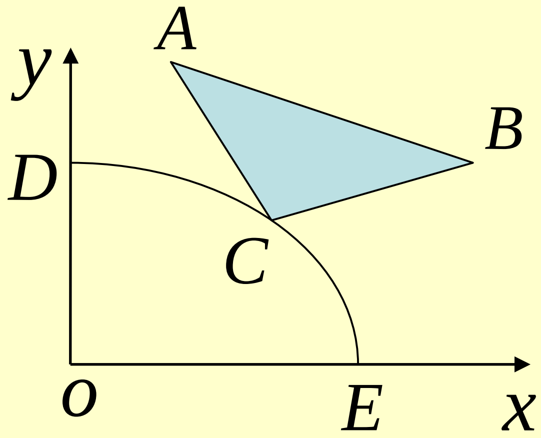
3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y),

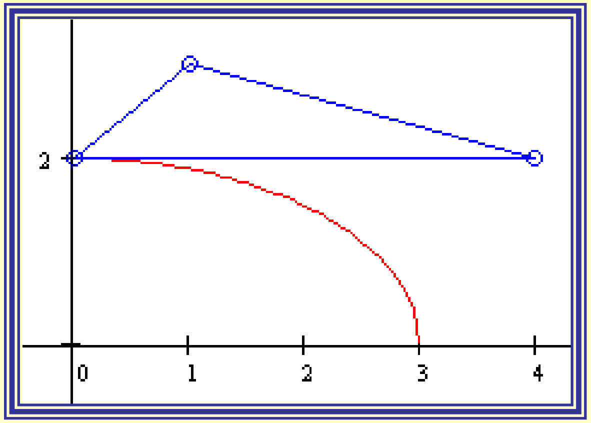
则 $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$



点击图中任意点
动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_C=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

练习题 1. 求半径为R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x , y , z ,则

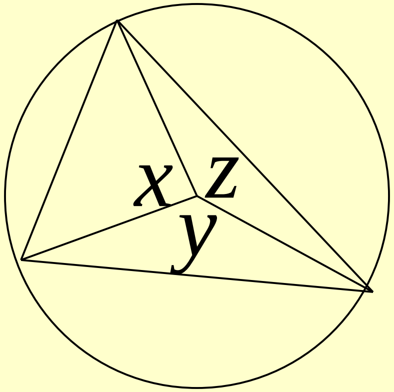
$$x+y+z=2\pi\ ,\quad x\ge 0\ ,\ y\ge 0\ ,\ z\ge 0$$

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\tfrac{1}{2}R^2\sin x\ ,\quad S_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin y\ ,\quad S_3=\tfrac{1}{2}R^2\sin z$$

设拉氏函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

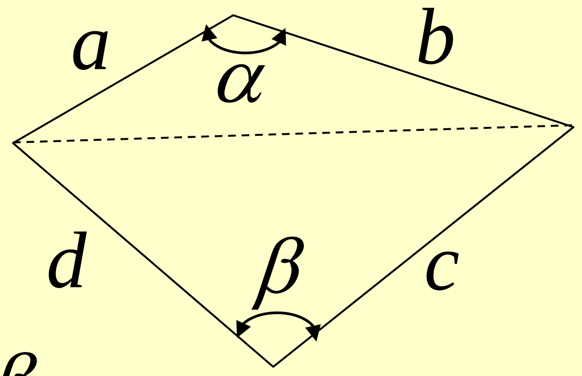
解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$, 得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大 , 最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2\ .$$

2. 求平面上以 a,b,c,d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数： $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta$

$$(0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi)$$

约束条件： $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\beta$

答案: $\alpha+\beta=\pi$, 即四边形内接于圆时面积最大.

练 习 题

一、填空题:

1、函数 $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$ 在________点取得极__________值为____________.

2、函数 $z=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极_______值为_______________.

3、方程 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的极大值是_____________,极小值是_______________.

二、在平面 xoy 上求一点，使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方之和为最小.

三、求内接于半径为 a 的球且有最大体积的长方体.

四、在第一卦限内作球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1$的切平面, 使得切平面与三坐标面所围的四面体的体积最小, 求切点的坐标.

练习题答案

一、1、$(3,2)$, 大, 36；　2、大, $\frac{1}{4}$；　3、7, -1.

二、$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

三、当长, 宽, 高都是$\frac{2a}{\sqrt{3}}$时, 可得最大的体积.

四、$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

考研试题

1.(0801_17)已知曲线$C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0, \\ x+y+3z=5, \end{cases}$求$C$上距离$xoy$面最远的点和最近的点。

答： （1,1,1） 和 （$-5,-5,5$)

2.(070117) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值。

2.(070117) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$$ 上的最大值和最小值。

【分析】 由于 D 为闭区域，在开区域内按无条件极值分析，而在边界上按条件极值讨论即可。

【详解】 因为 $f'_x(x,y)=2x-2xy^2$， $f'_y(x,y)=4y-2x^2y$，

解方程组：$$\begin{cases} f'_x=2x-2xy^2=0, \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$$

得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$. 其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2.$

又当 $y=0$ 时， $f(x,y)=x^2$ 在 $-2\le x\le 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组 $\begin{cases} F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-4=0, \end{cases}$ 得可能极值点：

$(0,2),(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$，其对应函数值为 $f(0,2)=8, f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{7}{4}.$

比较函数值 $2,0,4,8,\frac{7}{4}$，知 $f(x, y)$在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

3.(0601_10)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y^1(x,y)\neq 0$．已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 【 D 】

令 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} F_x'=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 & (1)\\ F_y'=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 & (2)\\ F_\lambda'=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

$\because$ $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0,\ \therefore \lambda=-\dfrac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$ 代入**(1)** 得 $f_x'(x_0,y_0)=\dfrac{f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$

又 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0,\ \therefore f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)\neq 0$ 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$ **故选[D]**

例 1 在闭的三角形 $D=\{(x,y):0\leqslant x,y,x+y\leqslant\pi\}$ 上求函数

$$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$$

的最大值和最小值.

最小值等于0，在边界上达到.

最大值为 $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

1. 求下列函数的极值：

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;

(2) $f(x,y)=x^2-3x^2y+y^3$;

(3) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$;

(4) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

2. 求函数 $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,b>0)$的极值.

3. 求函数 $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$在正方形$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$上的极值.

4. 设 $f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2$. 证明：限制在每一条过原点的直线上，原点是 f 的极小值点，但是函数 f 在原点处不取极小值.

在 xy 平面上，画出点集

$$P=\{(x,y):f(x,y)>0\},\quad Q=\{(x,y):f(x,y)<0\}.$$