1.1.3 变号级数(一般项级数)

一、交错级数及Leibniz判别法

二、绝对收敛级数及其性质

三、Abel判别法和Dirichlet判别法

一、 交错级数及其判别法

设 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$，则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为**交错级数**.

定理1 (Leibniz判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，且其和 $S \le u_1$，其余项满足

$$|r_n| \le u_{n+1}.$$

证: $\because S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\geq 0$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})$$
$$-u_{2n}\leq u_1$$

$\therefore S_{2n}$ **是单调递增有界数列，故** $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S\leq u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$

故级数收敛于S, 且 $S\leq u_1$, S_n 的余项:

$$r_n=S-S_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$$

$$\therefore\quad |r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots\ \leq u_{n+1}$$

例1. 用Leibniz 判别法判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛 ?

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

例2. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$.

解: (1) $\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi) = \sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi - n\pi + n\pi)$

$$= (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1} - n)\pi$$

$$= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$ **交错级数**

又 $u_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0 (n \to \infty)$， **且单调减，**

所以由 Leibniz 判别法，级数收敛.

问题：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2+n}\,\pi)$ 是否收敛？

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n-\ln n}$.

解: $\because u_n = \dfrac{1}{n-\ln n} > 0\ (n \geq 1)$, **所以是交错级数.**

令 $f(x) = x - \ln x (x \geq 1)$,

则 $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \geq 0 (x \geq 1)$, $f(x)\ (x \geq 1)$**单调增,**

从而 $u_n = \dfrac{1}{n-\ln n}$ **单调减.**

又 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1-\dfrac{\ln n}{n}} = 0$,

故原级数收敛.

二、绝对收敛与条件收敛

定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 , 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛** ;

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛** .

例如 : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 条件收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 绝对收敛.

定理2 绝对收敛的级数一定收敛.

证: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$

显然 $v_n\ge 0$, 且 $v_n\le|u_n|$, 由比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

$$u_n=2v_n-|u_n|$$

$$\Bigg\downarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}2v_n \text{ 收敛}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

定理2的作用: $\boxed{\text{任意项级数}} \Longrightarrow \boxed{\text{正项级数}}$

例3. 判别下列级数是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{e^n}$．　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$．

证: (1) $\because \left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \dfrac{1}{n^4}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ 收敛，

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛，

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$

解： 令 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$，

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$.

解：由例2知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$ **收敛.**

因为 $$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}(n\to\infty)$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}|\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$ **发散.**

故，原级数条件收敛.

定理3 (比值、根值判别法的推广)

设 $\sum u_n$ 为任意项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho,$$

则 (1) 当 $\rho < 1$ 时，级数绝对收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 或 $\rho = \infty$ 时，级数发散 .

注: (1)显然成立. 至于 (2), 由 $\rho > 1$ 及证明过程知

$$|u_n| > (\rho - \varepsilon)^n > 1 (n > N), \quad \lim_{n\to\infty} u_n \neq 0, \quad 级数发散 .$$

例4. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$ 的绝对收敛性.

解：级数各项绝对值所组成的级数是

$$\sum\frac{|\alpha|^n}{n!}=|\alpha|+\frac{|\alpha|^2}{2!}+\cdots+\frac{|\alpha|^n}{n!}+\cdots.$$

由比值判别法知, 对$\forall\alpha$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1}=0<1,$$

因此, 所考察的级数对任何实数 α 都绝对收敛.

注：由本题结论知 $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0\ (\alpha\in R)$.

注：由级数收敛的性质知

1. 若$\sum u_n$收敛,$\sum v_n$收敛，则$\sum (u_n \pm v_n)$收敛；

2. 若$\sum u_n$收敛,$\sum v_n$发散，则$\sum (u_n \pm v_n)$发散；

3. 若$\sum u_n$发散,$\sum v_n$发散，则$\sum (u_n \pm v_n)$敛散性不定.

对于绝对收敛和条件收敛性，有

1. 若$\sum u_n$绝对收敛,$\sum v_n$绝对收敛，则$\sum (u_n \pm v_n)$绝对收敛；

2. 若$\sum u_n$绝对收敛,$\sum v_n$条件收敛，则$\sum (u_n \pm v_n)$条件收敛；

3. 若$\sum u_n$条件收敛,$\sum v_n$条件收敛，则$\sum (u_n \pm v_n)$收敛.

例5. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}$ $(p>0)$ **的敛散性，**

是绝对收敛还是条件收敛？

解： $\because u_n=\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}$不单调，　$\therefore$不能用Leibniz判别法.

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)\ (x\to 0)$$

$$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1-\frac{p(-1)^n}{n}+o(\frac{1}{n})\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{p+1}}+o(\frac{1}{n^{p+1}})$$

$$\sum\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\sum\frac{(-1)^n}{n^p}\underbrace{-\sum\frac{p}{n^{p+1}}+\sum o(\frac{1}{n^{p+1}})}_{\text{绝对收敛}}$$

$\sum\frac{(-1)^n}{n^p}$： $p>1$时，绝对收敛，$0<p\le 1$时，条件收敛；

$\sum\frac{p}{n^{p+1}}$： $p>0$时，绝对收敛；

$\sum o(\frac{1}{n^{p+1}})$： $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|o(\frac{1}{n^{p+1}})\right|}{\frac{1}{n^{p+1}}}=0,$ $\therefore p>0$时，绝对收敛.

终上所述， $p>1$时，原级数绝对收敛，

$0<p\le 1$时，原级数条件收敛.

例6. 设 $u_n \neq 0\,(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, **则级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ (　　).

(*A*) 发散 ;　　　　**(*B*) 绝~~对~~收敛;**

(*C*) 条件收敛 ;　**(*D*) 收敛性根据条件不能确定.**

解: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$, 知 $\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$,　　$\therefore$ **(*B*) 错 ;**

$$S_n=-\left(\frac{1}{u_1}+\cancel{\frac{1}{u_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{u_2}}+\cancel{\frac{1}{u_3}}\right)-\left(\cancel{\frac{1}{u_3}}+\cancel{\frac{1}{u_4}}\right)+\cdots+(-1)^n\left(\cancel{\frac{1}{u_n}}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$=-\frac{1}{u_1}+(-1)^n\frac{1}{u_{n+1}}\to-\frac{1}{u_1}\,(n\to\infty)$$　　$\therefore$ **(*A*)（*D*) 错 ;**

故，级数条件收敛.　　**选 (*C*) .**

绝对收敛级数的性质:

1. 级数的重排

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \qquad (1)$$

定理4 设级数(1)绝对收敛, 且其和等于S, 则任意重排后所得到的级数也绝对收敛且和也为S.

注: 定理4只对绝对收敛级数成立. 条件收敛级数重排后得到的新级数,不一定收敛, 即使收敛,也不一定收敛于原来的和.

2. 级数的柯西乘积

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = A, \qquad (1)$$

$$\sum v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots = B. \qquad (2)$$

定理5 (柯西定理) 若级数(1)、(2)都绝对收敛，则对 $u_i v_j$ 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛，且其和等于AB.

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}) \qquad \text{——柯西乘积}$$

$$= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \cdots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1) + \cdots$$

例7. 求Cauchy乘积 $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$, $|x|<1$.

解：当 $|x|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}$,

且绝对收敛，按Cauchy乘积，得到

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$$

$$= 1 + (x + x) + \cdots + \underbrace{(x^{n-1} + \cdots + x^{n-1})}_{n} + \cdots$$

$$= 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

注：级数乘积在幂级数中有重要应用.

三、Abel 判别法和 Dirichlet 判别法

下面补充两个判别一般项级数收敛的方法.

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (3)$$

定理6 (Abel判别法) 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，且级数 $\sum b_n$ 收敛，则级数(3)收敛.

定理7 (Dirichlet判别法) 若 $\{a_n\}$ 单调，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界，则级数(3)收敛.

例8. 证明：若级数 $\sum u_n$ 收敛，则级数

$$\sum \frac{u_n}{n^p}(p>0),\ \sum \frac{nu_n}{n+1},\ \sum (1+\frac{1}{n})^n u_n \text{ 都收敛.}$$

证：取 $a_n = u_n$, $b_n = \frac{1}{n^p}$, $\frac{n}{n+1}$, $(1+\frac{1}{n})^{n+1} u_n$

则 $\sum a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 单调且有界，

由Abel判别法即得所给级数都收敛.

例9. 若数列$\{a_n\}$具有性质:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots, \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

则级数 $\sum a_n \sin nx$ 和 $\sum a_n \cos nx$ 对任何 $x \neq 2k\pi (k \in Z)$

都收敛.

证：只需证明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ 和 $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 有界.

由 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

得 $$2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right) = \sin\frac{x}{2} + \left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right) + \cdots$$

$$+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ (x\ne 2k\pi)$$

即 $\sum\cos nx$ 的部分和数列 σ_n 当 $x\ne 2k\pi$ 时有界，

由Dirichlet判别法得级数 $\sum a_n\cos nx$ 收敛.

同理可证，级数 $\sum a_n\sin nx$ 也收敛.

作为例9 的特例，$\sum\frac{\sin nx}{n}$ 和 $\sum\frac{\cos nx}{n}$ 对 $\forall x\ne 2k\pi$ 都收敛.

思考题: 判断级数 $\sum\frac{(-1)^n\sin^2 n}{n}$，$\sum\frac{\cos 3n}{n}(1+\frac{1}{n})^n$ 的敛散性.

Abel判别法和Dirichlet判别法的证明

引理1 (Abel部分求和公式) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$是两个数列，则对任意正整数 n，$B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_n B_n .$$

证：记 $B_0=0$，则 $b_k=B_k-B_{k-1}\,(k=1,2,\cdots,n)$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n} a_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} a_k B_k-\sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_k B_k-\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_n B_n .$$

引理2 (Abel引理) 设 $\{a_n\}$ 为单调数列，$B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i$，如果 $|B_k|\le M\,(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le M(|a_1|+2|a_n|).$$

证：不妨设 $\{a_n\}$ 单调减，由部分求和公式，得

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k + a_n B_n\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}|a_k-a_{k+1}||B_k| + |a_n||B_n|$$

$$\le M\left(\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1}) + |a_n|\right)$$

$$= M\left(a_1-a_n+|a_n|\right) \le M(|a_1|+2|a_n|).$$

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots \qquad (3)$$

定理5 (Abel判别法) 若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，

且级数 $\sum b_n$ 收敛，则级数(3)收敛.

证: 因 $\sum b_n$ 收敛，所以由柯西准则，$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$

当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in N_+$，都有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right| < \varepsilon.$

又 $\{a_n\}$有界，即 $\exists M > 0,$ 使 $|a_n| \le M$. 由Abel引理知

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 3M\varepsilon.$$

再由柯西准则知，级数(3)收敛.

定理6 **(Dirichlet判别法)** 若数列$\{a_n\}$单调，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，又级数$\sum b_n$的部分和数列有界，则级数(3)收敛.

证 由于$\sum b_n$部分和数列$B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$有界，故存在正数$M$，使$|B_n| \le M$，因此当$n$，$p$为任何正整数时，

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \le 2M.$$

又数列$\{a_n\}$单调(不妨单调设为减），且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，

$\therefore \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|a_n| < \varepsilon$.

由Abel引理知

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \le 2M(|a_{n+1}|+2|a_{n+p}|)$$

$$< 2M\cdot 3\varepsilon = 6M\varepsilon.$$

由柯西准则知级数(3)收敛.

注：1. Abel判别法和Dirichlet判别法都是针对任意项级数的，它们的条件互有强弱，用哪个判别法好，要视具体问题而定.

2. 交错级数的Leibniz判别法是Dirichlet判别法的特例.

内容小结

1. Leibniz判别法:

$$\left.\begin{array}{r} u_n \geq u_{n+1} > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{则交错级数} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \text{ 收敛.}$$

2. 概念:

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛.}$$

3. Abel判别法和Dirichlet判别法.

思考与练习

1. 讨论下列级数的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[e-(1+\frac{1}{n})^n]$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^p})$ $(p>0)$.

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个收敛的级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$，能否断言 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也是收敛级数？请研究如下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right).$$

3. 讨论级数 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^q}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^q}-\frac{1}{6^p}+\cdots\ (p>0,q>0)$ 的

的敛散性，并判断是绝对收敛还是条件收敛.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个任意项的级数，令

$$a_n^+=\frac{|a_n|+a_n}{2}=\begin{cases} a_n, & a_n>0, \\ 0, & a_n\le 0; \end{cases} \qquad a_n^-=\frac{|a_n|-a_n}{2}=\begin{cases} -a_n, & a_n<0, \\ 0, & a_n\ge 0, \end{cases}$$

证明：(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散.

练 习 题

一、填空题:

1、$p-$级数当________时收敛, 当________时发散;

2、若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的后项与前项之比值的根等于ρ,

则当_________时级数收敛; _________时级数发散;

______________时级数可能收敛也可能发散 .

二、用比较审敛法或极限审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n} \quad (a>0)$.

三、用比值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{3^n}{n\cdot 2^n}+\cdots$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

四、用根值审敛法判别下列级数的收敛性:

1、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$; 2、$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

五、判别下列级数的收敛性:

1、$\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\cdots$;

2、$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$; 3、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}\quad(a>0)$.

六、判别下列级数是否收敛?如果是收敛的, 是绝对收敛还是条件收敛?

1、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;

2、$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

3、$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

七、若$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n$存在, 证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

八、证明:$\lim_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0$.

练习题答案

一、1、 $p>1, p\leq 1$；

2、 $\rho<1, \rho>1$(或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$), $\rho=1$.

二、1、发散；　　　　　2、发散.

三、1、发散；　　　　　2、收敛.

四、1、收敛；　　　　　2、收敛.

五、1、发散；　2、收敛；　3、$\begin{cases} a>1, \text{收敛}; \\ 0<a<1, \text{发散}; \\ a=1, \text{发散}. \end{cases}$

六、1、绝对收敛；　2、条件收敛；　3、条件收敛.