幂级数与Fourier级数习题课

一. 内容小结

二. 典型例题

I. 幂级数

Abel第一定理 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} \neq \boldsymbol{0}$ 收敛，

则对 $|\boldsymbol{x}| < |\boldsymbol{x_0}|$ 的任何 x ，幂级数绝对收敛；

若在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}$ 时发散，则对 $|\boldsymbol{x}| > |\boldsymbol{x_1}|$ 的任何 $\boldsymbol{x}$ ，发散.

- 标准形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: 先求收敛半径 $\boldsymbol{R}$，再讨论 $x = \pm R$ 处的敛散性 .

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\rho}}, \quad \text{其中 } \boldsymbol{\rho} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}}\right| \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\boldsymbol{a_n}|}\,.$$

- 非标准形式 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{kn+l}$ $\begin{cases} \text{通过换元转化为标准形式} \\ \text{直接用比值法或根值法} \end{cases}$

Abel第二定理

(i) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0(= +\infty)$ ，则在收敛区间 $(-R, R)$ 内任一闭区间 $[a, b] \subset (-R, R)$ 上，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都一致收敛. (内闭一致收敛)

(ii) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$ ，且在 $x = R$ (或 $x = -R$)时收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ (或 $[-R, 0]$)上一致收敛.

幂级数的分析运算

定理 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$, 则其和函数 $S(x)$ 在收敛域上连续, 且在收敛区间内可逐项求导与逐项求积分, 运算前后收敛半径相同.

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x\in(-R,R)$$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \quad x\in(-R,R)$$

注: 运算前后端点处的敛散性要另行判断.

幂级数的四则运算

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2, 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有：

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n \quad (\lambda\text{为常数}) \qquad |x| < R_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \qquad |x| < R$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad |x| < R$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

以上结论可用部分和的极限证明 .

幂级数和函数的求法:

- 求部分和式极限
- 初等变换法: 分解、套用公式
- 映射变换法(在收敛区间内)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[r, "\text{逐项求导或求积分}"'] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n \arrow[d, "\text{求和}"] \\
S(x) & S^*(x) \arrow[l, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}$$

- 数项级数求和 $\begin{cases} \text{直接求和: 直接变换, 求部分和等} \\ \text{间接求和: 转化成幂级数求和, 再代值} \end{cases}$

函数的幂级数展开法

1. 函数的幂级数展开法

- 直接展开法 — 利用泰勒公式
- 间接展开法 — 利用已知展式的函数及幂级数性质

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1 < x \le 1)$$

例1. 求下列级数的敛散域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

解: $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$

$\therefore R=\frac{1}{e}$, 即 $-\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e}$ **时原级数收敛 .**

当 $x=\pm\frac{1}{e}$ **时,** $|u_n|=\left[\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right]^n$

$$\boxed{(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e}$$

$$>\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\frac{1}{e}\neq 0 \quad (n\to\infty)$$

因此级数在端点发散，故收敛域为 $(-\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$

解: 因 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}|x|^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^n}|x|^{2n}} = \frac{x^2}{2}$

当 $\frac{x^2}{2}<1$, 即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时, **级数收敛;**

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时, **一般项** $|u_n|=n$ **不趋于0, 级数发散;**

故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

例2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛半径.

解: 分别考虑偶次幂与奇次幂组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)}\right|=(4x)^2,\quad \therefore R_1=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\beta_{n+1}(x)}{\beta_n(x)}\right|=(2x)^2,\quad \therefore R_2=\frac{1}{2}$$

$$\because \text{原级数}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(x)$$

$\therefore$ 其收敛半径 $R=\min\{R_1,R_2\}=\frac{1}{4}$

注意:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

极限不存在

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$ 的和函数.

解法1：易求出级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})'$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \right)'$$

$$= \frac{1}{2}(x\sin x)'$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{x}{2}\cos x, \quad x \in (-\infty,+\infty)$$

解法2: 先求出收敛域 $(-\infty,+\infty)$, **设和函数为** $S(x)$,

则 $$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}\int_0^x x^{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{x}{2}\sin x$$

$$\therefore\quad S(x)=\left(\frac{x}{2}\sin x\right)'=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x,\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

例4. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

$x\neq 0$

解: (1)

$$原式=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})'=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)'=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\qquad \left(0<\frac{x^2}{2}<1\right)$$

显然 $x=0$ 时上式也正确, 而在 $x=\pm\sqrt{2}$ 级数发散,

故和函数为 $S(x)=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$\boxed{x\neq 0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}\,t-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x t^n\,\mathrm{d}\,t\right)$$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)\mathrm{d}\,t-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^n\right)\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}\,t-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}\,t\qquad(0<|x|<1)$$

$$=-\ln(1-x)+1+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

$$=1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)$$

即得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x),\quad 0<|x|<1$

显然 $x = 0$ 时, 和为 0 ; $x = \pm 1$ 时, 级数也收敛 .

根据和函数的连续性 , 有

$$S(x)=\begin{cases}1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$$

例5： 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和 .

解： 原式= $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left[(2n+1)+1\right]}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}}+\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 1+\sin 1]$$

函数的幂级数展开

例6. 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ **展开成** x **的幂级数.**

解: $$\frac{1}{(2-x)^2}=\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n},\quad x\in(-2,2)$$

例7. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ **在$x=0$处展为幂级数.**

$\boxed{\begin{aligned}&2+x-3x^2\\&=(1-x)(2+3x)\end{aligned}}$

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此 $f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n\qquad(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

例8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解：$\because$ $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$$

$$\therefore\quad \arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

于是 $$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1]$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

例9. 设 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}x^n$, $g(x)=f(f(x))$, 求 $g'(0)$, $g''(0)$.

解： $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$， $g'(0)=f'(f(0))f'(0)=f'(1)f'(0)$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1},\quad f'(0)=1,\quad f'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1.\quad g'(0)=e-1.$$

$$g''(x)=f''(f(x))f'^2(x)+f'(f(x))f''(x)$$

$$g''(0)=f''(f(0))f'^2(0)+f'(f(0))f''(0)=f''(1)+(e-1)f''(0)$$

$$f''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1}\right)'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)!}x^k,\qquad f''(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}=1$$

$$g''(0)=f''(1)+(e-1)f''(0)=1+\frac{e-1}{2}=\frac{e+1}{2}$$

例10. 证明： $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}.$

证： $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in [-1,1).$ 由**Abel**第二定理，右边级数

右边级数在 $[0,1)$ 是内闭一致收敛，所以当 $t \in [0,1)$ 时，有

$$\int_0^t \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2},$$

令 $t \to 1^-$，得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

1. 设函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 定义在 $[0,1]$ 上, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上满足方程

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1).$$

证明 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为 $[-1,1]$, 由幂级数的性质可知, $f(x)\in C[0,1]$, 在 $(0,1)$ 内可导且 $f(0)=0$. 记

$$F(x)=\begin{cases} f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x), & x\in(0,1),\\ f(1), & x=0,1, \end{cases}$$

则 $F(x)\in C[0,1]$ 且在 $(0,1)$ 可导. 下证 $F(x)=f(1)$.

先证 $F(x)\equiv$ 常数. 事实上, $\forall x\in(0,1)$, 有

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$-\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{n-1}}{n}=0.$$

故 $F(x)\equiv$ 常数 $C, x\in(0,1)$. 又因为

$$C=\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\right]$$

$$=f(0)+f(1)+\lim_{x\to0^+}(x\ln x)\frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$=f(1).$$

注 要证明一个函数恒为零 (函数等式变形后化为函数恒为零), 只要证明函数恒为常数, 再证某点或极限为零即可. 此题用到幂级数逐项求导性质和初等函数的幂级数展开.

II. Fourier 级数

系数公式及计算技巧；收敛定理；

设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) = S(x)$$

其中 $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x & (n = 0, 1, \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

正弦级数，余项级数——奇、偶延拓方法

定理 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的Fourier级数收敛 , 且有

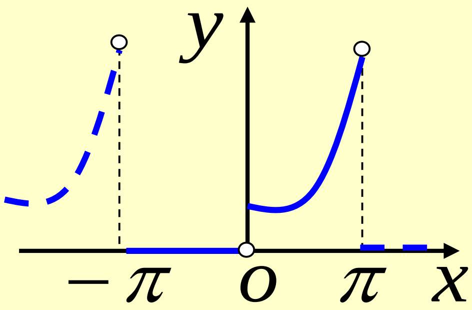
$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\,a_n\cos nx+b_n\sin nx\,)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的Fourier系数 .

例1. 设 $f(x)$是周期为2π的函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ e^x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$$



将其展为傅氏级数 . 并求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}$$ 的和.

解: $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \;=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,\mathrm{d}\,x$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{1+n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n-1}{1+n^2}$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin nx \,\mathrm{d}\, x \quad = \frac{1}{\pi}\Big[\, \frac{e^x(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2} \,\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{n}{\pi}\frac{1-e^{\pi}(-1)^n}{1+n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}\,(\cos nx - n\sin nx)$$

$$(\, x \neq k\pi\,,\, k = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \cdots\,)$$

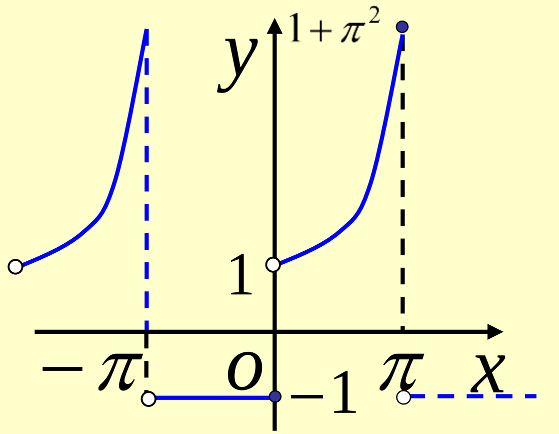
根据付氏级数收敛定理，当 $x = 0$ 时，有

$$S(0) = \frac{e^{\pi}-1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} = \frac{\pi + 1 - e^{\pi}}{2}$$

例2. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi < x \le 0\\ 1+x^2, & 0 < x \le \pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\pi^2/2}$，在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示: $\dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

例3. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$, 又设 $S(x)$是 $f(x)$在 $(0,\pi)$内以2π为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当 $x\in(\pi,2\pi)$时$S(x)$ 的表达式 .

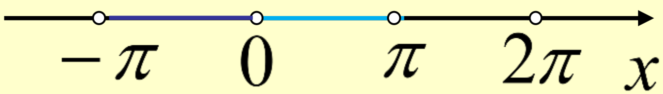
解: 由题设可知应对 $f(x)$ 作奇延拓:

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在$(-\pi,\pi)$上, $S(x)=F(x)$; 在$(\pi,2\pi)$上, 由周期性:

$$S(x)=S(x-2\pi)$$

$$x-2\pi\in(-\pi,0)$$



定义域

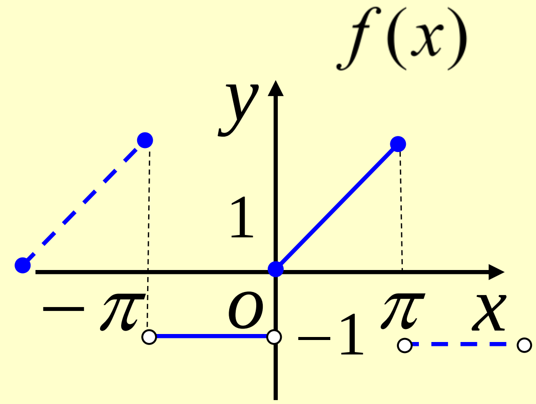
$$=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2$$

$$=x^2-3\pi x+2\pi^2$$

例4. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$

在 $[-\pi,\pi]$ 上 **傅氏级数的和函数 .**

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{\pi-1}{2}, & x=\pm\pi\end{cases}$



例5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其傅氏系数为 a_n，b_n，则 $f(x+h)$（h为常数）的傅氏系数

$a'_n =$ $\underline{\ a_n\cos nh + b_n\sin nh\ }$，$b'_n =$ $\underline{\ b_n\cos nh - a_n\sin nh\ }$.

提示：

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,dx \qquad \boxed{令\ t = x+h}$$

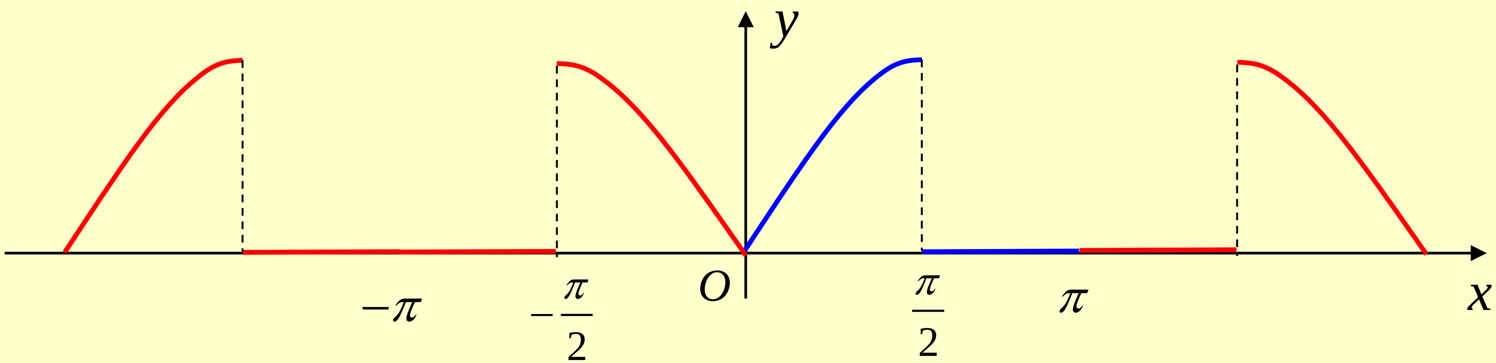
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}\,t$$

利用周期函数性质 $\int_{-\pi+h}^{\pi+h} = \int_{-\pi}^{\pi}$

$$= \cos nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \sin nh\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \cos nh\cdot a_n + \sin nh\cdot b_n$$

例6. 将 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \pi/2,\\ 0, & \pi/2<x\le\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数.



解：(1) 先将 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，有

$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{2}{\pi}$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\frac{1}{\pi}$$

当 $n\geq 2$ 时，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}(n\sin\frac{n\pi}{2}-1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{-1}{4k^2-1}, & n=2k,\\[2ex] \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^k(2k+1)-1}{4k(k+1)}, & n=2k+1,\end{cases}\qquad k=1,2,\cdots$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{2}-1}{n^2-1}\cos nx,\qquad x\in[0,\pi],x\neq\frac{\pi}{2}.$$

或 $$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cos x-\frac{2}{3\pi}\cos 2x-\frac{1}{\pi}\cos 3x-\frac{2}{15\pi}\cos 4x+\frac{1}{3\pi}\cos 5x-\cdots,$$

$$x\in[0,\pi],x\neq\frac{\pi}{2}.$$

例7. 证明: 当 $0 \le x \le \pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$.

提示：将左边展开为余弦级数.

例8. 把$f(x)=\cos ax\ (a\notin Z)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数.

解：把 $f(x)$ 延拓为R上的以 2π 为周期的函数，记延拓后的函数为$F(x)$，则 $F(x)$ 为R上的以 2π 为周期的连续的偶函数.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cdot\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(a-n)x+\cos(a+n)xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}\ (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots)$$

得$F(x)$的Fourier展开式

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right),x\in R$$

限制在 $[-\pi,\pi]$ 上，得$f(x)$的Fourier展开式

$$f(x)=\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right),x\in[-\pi,\pi]$$

注： 在上式中，令 $x=0$ 得

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\quad(a\notin Z).$$

由此又可证明： $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\quad(0<\alpha<1).$

又可证明余元公式： $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\,(0<\alpha<1).$