知识点一 质点运动学

【内容预览】

知识体系	具体知识点	解题要点
运动学方程	$x=f_1(t)$、$y=f_2(t)$、$z=f_3(t)$	结合物理关系和几何关系求运动学方程
	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$	
	$s=f(t)$	
位移、速度和加速度及其表示	$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ $\Delta r=\lvert\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\rvert-\lvert\boldsymbol{r}(t)\rvert$	1.已知某一$x(t)$表达式，求导求相应的某时刻的速度和加速度 2.已知加速度表达式，结合初值条件，积分求相应的速度和位移 3.图像题
	$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ $\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	
	$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$ $\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$	
	$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{v}=\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{a}=\frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}$	
	$\boldsymbol{v}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_t$ $\quad\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{a}_t=\frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n+\frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t$	
圆周运动的角量	$\Delta\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{\theta}_1$	将$\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha}$与$\Delta\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}$类比
	$\overline{\boldsymbol{\omega}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}$ $\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\theta}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$	
	$\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}$ $\boldsymbol{\alpha}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$	
相对运动（坐标系的伽利略变换）	$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{u}$	分清相对速度和牵连速度
	$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e$	

【知识清单】

§1.1 描述质点运动的物理量

一、运动学方程

1.定义：确定了在选定参考系中质点位置随时间变化的关系的方程，称为质点运动学方程。

2.表示：有直角坐标表示、位矢表示和自然坐标表示三种表示。注意：自然坐标一般是表示轨迹已知的曲线运动。

$$\begin{cases} \text{直角坐标} \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \\ \text{位矢 } \boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \\ \text{自然坐标 } s = f(t) \end{cases}$$

3.轨迹方程：在质点运动学方程里消去时间参量 t 即可得到运动的轨迹方程。

二、位移

1.位移的定义式：$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$

2.位移的直角坐标表示：$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$

3.位移的大小：$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)|$

> 易错：注意位移的大小$|\Delta\boldsymbol{r}|$和位矢大小的增量$\Delta r = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t)| - |\boldsymbol{r}(t)|$ 的区别，两者一般是不同的；事实上，在某段时间Δt内某矢量增量的大小$|\Delta\boldsymbol{A}|$与同一时间段内该矢量大小的增量ΔA一般是不同的。

三、速度

1.平均速度：$\overline{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$

2.瞬时速度：$\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ，其大小$|\boldsymbol{v}| = \left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ 称为速率

3.速度在直角坐标系下的表示：$\boldsymbol{v} = \dfrac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \dfrac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \dfrac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$

4.速度在自然坐标系下的表示：$\boldsymbol{v} = \dfrac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_t$， $\boldsymbol{e}_t$表示切线正方向的单位矢量

四、加速度

1.平均加速度：$\overline{\boldsymbol{a}} = \dfrac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$

2.瞬时加速度：$\boldsymbol{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$

3.加速度在直角坐标系下的表示：$\boldsymbol{a} = \dfrac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \dfrac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}$

4.加速度在自然坐标系下的表示：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t = \dfrac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n + \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t$

> 易错：注意在自然坐标系下求加速度时，直接对速度求导得到的不是最终的加速度，而只是切向的加速度，引起速度大小的变化，要得到加速度，还要与引起速度方向变化的法向加速度$\boldsymbol{a}_n = \dfrac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n$矢量相加。

§1.2 圆周运动的角量

一、角位移、角速度、角加速度

1.角位移：$\boldsymbol{\Delta\theta}=\boldsymbol{\theta}_2-\boldsymbol{\theta}_1$

2.角速度：$\begin{cases}\text{平均角速度}\,\overline{\boldsymbol{\omega}}=\dfrac{\boldsymbol{\Delta\theta}}{\Delta t}\\ \text{瞬时角速度}\,\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{\Delta\theta}}{\Delta t}=\dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}\end{cases}$

3.角加速度：$\begin{cases}\text{平均角加速度}\,\overline{\boldsymbol{\alpha}}=\dfrac{\boldsymbol{\Delta\omega}}{\Delta t}\\ \text{瞬时角加速度}\,\boldsymbol{\alpha}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\boldsymbol{\Delta\omega}}{\Delta t}=\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=\dfrac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}\end{cases}$

二、角量和线量之间的关系（R 表示圆周运动的半径）

1.角位移和路程：$s=\Delta\theta R$

2.角速度和线速度：$v=\omega R$；矢量表达式：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}$

3.角加速度和加速度：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{R}$

4.类比匀变速直线运动公式得出匀变速转动的运动公式：$\begin{cases}\Delta\theta=\omega t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2\\ \omega=\omega_0+\alpha t\\ \omega^2-\omega_0{}^2=2\alpha\Delta\theta\end{cases}$

§1.3 相对运动

相对运动一节内容较少，只需掌握速度叠加原理（$\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{u}$）和加速度叠加原理（$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e$）即可：

1.绝对速度=相对速度+牵连速度

2.绝对加速度=相对加速度+牵连加速度　　（式中的“+”均是指矢量加法）

☞注意：虽然相对运动的内容不多，但是相对运动的思想可以渗透到很多题目当中，相对运动的本质其实就是坐标系的变换，所以在一些题目当中可以转换参考系来解题，这样可以简单许多。最简单的，例如：在两质点系中，如果两个质点都是运动的，就可以以其中一个为参考系，这样就变成了“一动一静”，做起题来也简单。

【常考题型】

题型 1：不定型极限的计算问题

1.牢记三个物理量之间的关系；2.掌握常用的解题方法：积分法、求导法。

例 1-1 如图 1.1 所示，有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖面上的船向岸边运动。设该人以匀速率 v_0 收绳，绳不可伸长，则小船的加速度方向为__________。（填左或右）

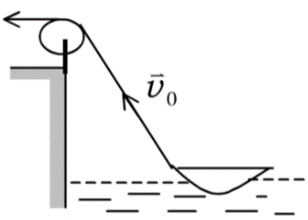

图 1.1

解：已知小船做直线运动，且受到向左的作用力，故向岸边加速靠近。由于加速度方向为速度改变方向，所以加速度方向向左。

$\boxed{例\ 1\text{-}2}$ 一辆汽车在半径为 $R=200\ m$ 的圆弧形公路上行驶，其运动学方程为 $s=20t-0.2t^2$，式中 s 以 m 计，t 以 s 计，试求汽车在 t=1s 时的速度和加速度大小。

解： 第一类质点运动学问题：求导问题；

根据题意：$v=s'=20-0.4t$，$a_t=v'=-0.4$，所以 t=1 s 时：$v=20-0.4\times1\ m/s=19.6\ m/s$，

$$a_t=-0.4\ m/s^2\ ,\ a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{19.6^2}{200}\ m/s^2=1.9208\ m/s^2\ ,\ 所以：a=\sqrt{a_n{}^2+a_t{}^2}\approx1.96\ m/s^2$$

提示： 运动方程是用自然坐标系下给出的，所以在求加速度的时候注意不要忘了向心加速度，只对 s 求二阶导是不对的。

$\boxed{例\ 1\text{-}3}$ 质点以速度 $v=4+t^2\ m/s$ 作直线运动，沿质点运动直线作 OX 轴，并已知 t=3s 时，质点位于 x=9m 处，则该质点的运动学方程为：（　　）

A.$x=3t$　　B.$x=4t+\frac{1}{2}t^2$　　C.$x=4t+\frac{1}{3}t^3-12$　　D.$x=4t+\frac{1}{3}t^3+12$

解： 第二类质点运动学问题：积分问题；

已知速度求位移：$x=\int vdt=\int(4+t^2)dt=4t+\frac{1}{3}t^3+C$，结合已知的初值条件，代入方程即可求出 C=-12，所以答案是 C。

题型 2：圆运动的量

对于圆运动的量，最简单的方法是类比线运动的三个量、类比线运动的三个量之间的关系，同时要记住圆运动的量和线运动的量之间的关系。

$\boxed{例\ 1\text{-}4}$ 一细杆可绕通过其一端的水平轴在铅直平面内自由转动，如图 1.2 所示。当杆与水平线夹角为 θ 时，其角加速度为 $\alpha=\frac{3g}{2l}\cos\ \theta$，$l$ 为杆长，试求：

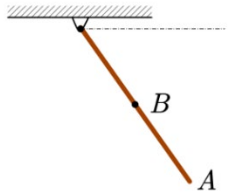

图 1.2

（1）杆自静止由 $\theta_0=\frac{\pi}{6}$ 开始，转至 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时杆的角速度；

（2）杆的端点 A 和中点 B 的线速度大小。

解： 本题中角加速度不是常量，所以此运动是变加速运动

（1）根据角加速度定义式：

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\omega\Rightarrow\alpha d\theta=\omega d\omega\Rightarrow\frac{3g}{2l}\cos\ \theta d\theta=\omega d\omega$$

结合初值条件，两边积分得：$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3g}{2l}\cos\ \theta d\theta=\int\omega d\omega=\frac{1}{2}\omega^2$，所以 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

（2）根据角量和线量的关系：　$v_A=l\omega=\sqrt{\frac{3gl}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$，$v_B=\frac{1}{2}l\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gl}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

✦**解题技巧：** 求角速度的一般思路是利用 $d\omega=\alpha dt$，若角加速度为常量，则可直接套用公式，若为变量，则进行积分，但在本题中，角加速度是变量，但却是关于角度的变量，而微元是时间的微元，导致无法积分，这时就考虑凑出一个角度的微元得到表达式 $\boxed{\omega d\omega=\alpha d\theta}$，同样的还有：已知 $a=kx$，求速度，则根据微元关系 $kx=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ 推出 $\boxed{kxdx=vdv}$，然后对 x 积分。

☞**注意：** 在大学物理中，注意利用微元结合高等数学中微积分的知识解题。

题型 3：相对运动

找出相对速度和牵连速度，并进行矢量相加得到绝对速度

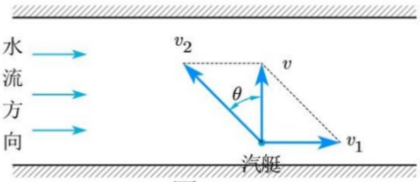

图 1.3

例 1-5 江水由西向东流，假设江水相对于岸的流速为$v_1=3.0\ m/s$，江面宽度为$b=2400\ m$。要想用10min 由南向北横渡过江，求汽艇相对于江水的航向和航速。

解：设汽艇相对江水的速度为v_2，显然v_2是相对速度；则速度关系如图；

根据题意，绝对速度 v 的大小为$v=\dfrac{b}{t}=4.0\ m/s$，方向垂直于岸边，指向对岸。根据右图可知：

$$v_2=\sqrt{v^2+v_1^2}=5.0\ m/s$$

所以

$$\tan\theta=\frac{v_1}{v}=\frac{3}{4}\Rightarrow\theta=36°52'$$

所以汽艇要沿北偏西$36°52'$ 方向，以$5m/s$的航速航行。

例 1-6 一升降机以加速度$1.22m/s^2$上升，当上升速度为$2.44\ m/s$时，有一螺帽自升降机的天花板上松落，天花板与升降机的底面相距$2.74m$。计算螺帽从天花板落到底面所需的时间和螺帽相对于升降机外固定柱的下降距离。

解一：以松开点作为坐标原点，把Oy轴的正方向选定为竖直向上的方向，则，在螺帽松脱时候，即$t=0$时，

螺帽以速度$v_0=2.44\ m/s$作竖直向上运动，到t时刻，它的坐标为$s_1=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

而在这段时间内，升降机以初速v_0作加速度$a=1.22\ m/s^2$的匀加速运动，它上升的高度是

$$s_2=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

因为螺帽与机底相遇时，s_2与s_1之差实际上是升降机的高度 h，所以$s_2-s_1=\dfrac{1}{2}(a+g)t^2=h$

所以得到$t=\sqrt{\dfrac{2h}{a+g}}=0.71\ s$，代入第一个式子得$s_1=-0.74\ m$，负号表示下降了$0.74m$.

解二：以升降机为参考系：，则螺帽的初速度为0，加速度为$a+g$，其中，a是升降机的加速度，则

$$\frac{1}{2}(a+g)t^2=h\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{a+g}}=0.71\ s$$

在这段时间内，相对升降机下降了$h=2.74m$，而升降机上升了$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2=2\ m$

所以相对外面的柱子下降了$0.74m$。

✦解题技巧：本题解二就是采用了变换参考系的方法解的，显然步骤要简单许多；实际上，变换参考系是相当于走了一条捷径，用较少的思维过程得到同样的等式，其解题的本质是没有改变的，但过程却简单许多。

【精选习题】