5.2.2 定积分的性质

本节将讨论定积分的性质，包括定积分不等式与积分中值定理， 这些性质为定的线性性质、关于积分区间的可加性、积积分研究和计算提供了新的工具.

一、定积分的性质

二、积分中值定理

1. 定积分的性质

线性性:

性质1 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, k 为常数, 则 kf 在 $[a,b]$ 上也可积, 且 $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

性质2 若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f \pm g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

乘积性:

性质3 若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 则 fg 在 $[a,b]$ 上也可积.

证 因 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 故在 $[a,b]$ 上都有界,

即 $\exists M > 0, \forall x \in [a, b], \left| f(x) \right| \le M, \left| g(x) \right| \le M.$

$\forall \varepsilon > 0$, 存在分割 T', 使 $\sum\limits_{T'} \omega_i^f \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2M}$; 又存在分割 T'', 使 $\sum\limits_{T''} \omega_i^g \Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{2M}.$

令 $T = T' + T''$ (合并而成的新分割), 则

$$\omega_i^{fg} = \sup\left\{ \left| f(x')g(x') - f(x'')g(x'') \right| \,\middle|\, x', x'' \in \Delta_i \right\}$$

$$\le \sup\left\{ \left| g(x') \right| \left| f(x') - f(x'') \right| + \left| f(x'') \right| \left| g(x') - g(x'') \right| \,\middle|\, x', x'' \in \Delta_i \right\}$$

$$\le M\omega_i^f + M\omega_i^g.$$

于是 $\sum_T \omega_i^{fg}\Delta x_i \le M\sum_T \omega_i^{f}\Delta x_i + M\sum_T \omega_i^{g}\Delta x_i$

$$\le M\sum_{T'} \omega_i^{f}\Delta x_i + M\sum_{T''} \omega_i^{g}\Delta x_i$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

因此 fg 在 $[a,b]$ 上可积.

区间可加性（路径性质）：

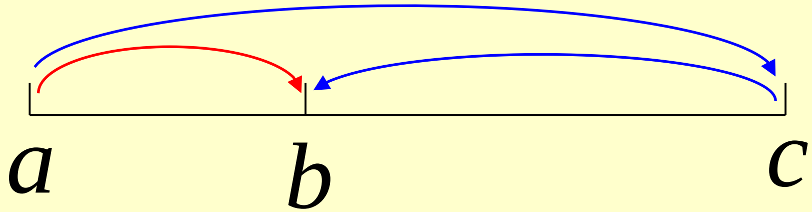
性质4 f 在$[a,b]$上可积的充要条件是：$\forall c\in(a,b)$，f 在$[a,c]$与$[c,b]$上都可积. 此时且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

注 若规定 $a>b$ 时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，$a=b$ 时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则对 a,b,c 的任何大小顺序，恒有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例如 $a<b<c$，则有



$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

保序性：

性质5 若f在$[a,b]$上非负、可积, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$

证 $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$$

推论 若 f, g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \le g(x),\ x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

证 设 $F(x) = g(x) - f(x) \ge 0,\ x \in [a,b]$, 则

$$0 \le \int_a^b F(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

绝对可积性：

性质6 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists T$, 使得 $\sum_T \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$. 由 $\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \le |f(x') - f(x'')|$,

$$\omega_i^{|f|} = \sup\{\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \,\big|\, x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\le \sup\{|f(x') - f(x'')| \,\big|\, x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]\} = \omega_i^f.$$

故 $\sum_T \omega_i^{|f|} \Delta x_i \le \sum \omega_i^f \Delta x_i < \varepsilon$, 即 $|f|$ 在 $[a, b]$ 上可积.

且由于 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, 得到

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

因此证得 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$

问：性质6 的逆命题是否成立?

估值性质：

性质7. 设 $M = \max\limits_{[a,b]} f(x),\ m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$,

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a) \quad (a<b)$

例1. 证明: $$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}.$$

证: **设** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上，有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

$$\therefore \quad f(\frac{\pi}{2}^{-}) < f(x) < f(0^{+})$$

即 $$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x$$

即 $$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$$

例2. 设 $f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\ge 0$, 且$f(x)\not\equiv 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx>0$$

证： 由题意，$\exists x_0\in[a,b]$ (不妨设$x_0\in(a,b)$)，使

$$f(x_0)>0, \text{且} \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$$

由极限的保号性，$\exists\delta>0$, 当$x\in U(x_0,\delta)\subset(a,b)$时

有 $f(x)\ge\dfrac{f(x_0)}{2}$，于是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f(x)dx+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+\int_{x_0+\delta}^b f(x)dx$$

$$\ge 0+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx+0\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx\ge\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}dx=f(x_0)\delta>0$$

思考题：

1. 确定下列积分的正负号：

(1) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int_{1/2}^{1} e^x \ln^3 x \, \mathrm{d}x$.

2. 证明：$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \pi \ (n = 0,1,2,\cdots)$.

提示：考虑和式 $\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx$.

3. 证明不等式：

$$\int_0^{2\pi} |a\sin x + b\cos x| \, \mathrm{d}x \le 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

2. 积分中值定理.

定理5.2.3 (积分第一中值定理)

若 f 在 $[a,b]$上连续, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续，因此存在最大值 M 和最小值 m. 由于 $m\le f(x)\le M,\ x\in[a,b]$, 因此

$$m(b-a)=\int_a^b m\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

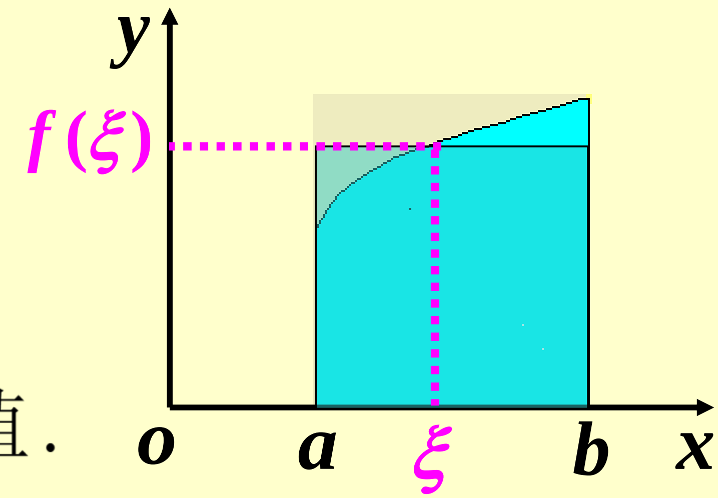
$$\le\int_a^b M\,\mathrm{d}x = M(b-a),$$

即 $$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M.$$

由连续函数的介值性定理, $\exists \xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：几何意义如图所示:



$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi)$$

理解为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

是有限个数的平均值概念的推广.

定理5.2.3（推广的积分第一中值定理）

若 f, g 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号,

则 $\exists \xi \in [a,b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

证 不妨设 $g(x) \geq 0, x \in [a,b]$. 若 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下确界与上确界, 则

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), x \in [a, b].$$

若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则因 $g(x)$ 非负、连续,必定使得

$$g(x) \equiv 0, x \in [a,b],$$

$$0 = m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0.$$

此时可任取 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, 则 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M.$

由连续函数的介值性定理, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

即 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

例3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证：由积分中值定理, $\exists\eta\in[0,\frac{1}{2}]$, 使得

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=e^{1-\eta}f(\eta),\quad e^{-\eta}f(\eta)=e^{-1}f(1).$$

对 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上应用罗尔定理，知

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0,\quad\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi).$$

例4. (Cauchy-Schwarz不等式)设 $f, g \in C[a,b]$**，证明:**

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证：　$\forall\lambda,$ 有

$$(\lambda f(x)+g(x))^2=\lambda^2 f^2(x)+2\lambda f(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\ge 0$$

$$\Rightarrow \Delta=(2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2-4\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\le 0$$

$$\Rightarrow (\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

例5. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 且 $f(x)>0$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge 1.$$

证：由C-S不等式，有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$=\left(\int_0^1\mathrm{d}x\right)^2=1.$$

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.}$$

注：5.2.14 (积分第二中值定理) 设 f 在$[a, b]$上可积.

(i) 若函数 g 在 $[a, b]$ 上单调减, 且 $g(x)\geq 0$, 则存在 $\xi\in[a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x.$

(ii) 若函数 g 在 $[a, b]$ 上单调增, 且 $g(x)\geq 0$, 则存在 $\eta\in[a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$

推论 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积, $g(x)$ 在$[a,b]$上单调, 则存在 $\xi\in[a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

证*: 这里只证 (i), 类似可证 (ii). 证明分以下五步:

(1) 对任意分割 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$I = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[\,g(x) - g(x_{i-1})\,]\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

(2) 因 $|f(x)| \le L,\ x \in [a, b]$, 故

$$|I_1| = \left|\ \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)[\,g(x) - g(x_{i-1})\,]\mathrm{d}x\ \right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_{i-1})|\mathrm{d}x \le L\sum_{i=1}^{n}\omega_i^g \Delta x_i .$$

因 g 可积, 故 $\exists T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow |I_1| \le \varepsilon.$$

(3) 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= g(x_0)[F(x_1) - F(x_0)] + \cdots \\ &\quad + g(x_{n-1})[F(x_n) - F(x_{n-1})] \end{aligned}$$

$$= F(x_1)[g(x_0) - g(x_1)] + \cdots$$

$$+ F(x_{n-1})[g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})] + F(x_n)g(x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).$$

由对 g 的假设，$g(x_{n-1}) \geq 0,\ g(x_{i-1}) - g(x_i) \geq 0.$ 记

$$m = \min_{x \in (a,b)} \{ F(x) \},\quad M = \max_{x \in (a,b)} \{ F(x) \},$$

则 $$I_2 \leq M \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + Mg(x_{n-1}) = Mg(a),$$

$$I_2 \geq m \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + mg(x_{n-1}) = mg(a),$$

于是 $\quad mg(a) \leq I_2 \leq Mg(a).$

(4) 综合 (2), (3), 得到

$$mg(a) - \varepsilon \leq I_1 + I_2 \leq Mg(a) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 便得 $mg(a) \leq I \leq Mg(a).$

(5) 若 $g(a)=0$, 则 $I=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$, 此时任取

$\xi\in[a,\ b]$, 满足 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

若 $g(a)>0$, 则 $m\le\dfrac{I}{g(a)}\le M$. 由 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

的连续性, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$F(\xi)=\int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{I}{g(a)},$$

即 $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,

则存在 $\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证*： 若 g 为单调递减函数， 令 $h(x)=g(x)-g(b)$,

则 h 非负、单调减, 由注5.2.14(i)，$\exists\xi\in[a,b]$, 使

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=[\,g(a)-g(b)]\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此 $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=[\,g(a)-g(b)\,]\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-g(b)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

思考题：

1. 设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\, f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证明：$f(x)$在(a, b)内至少有3个零点.

（问：能否将此题推广到更一般的情形？）

2. 设 $f(x)$在$[0, 2\pi]$上单调减，证明：对 $n \in N^+$，有

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \geq 0.$$