第1章 实数集与函数

§1.1 实 数 集

§1.2 函 数

1.1 实数集

1.1.1 实数集及其性质

有理数可用分数形式 $\frac{p}{q}$（p、q为整数，$q\neq0$）表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示；而无限十进不循环小数则称为无理数.

有理数和无理数统称为实数.

规定　对于正有限小数（包括正整数）x，当

$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时，其中 $0\le a_i \le 9,\ i=1,2,\cdots n, a_n \neq 0$

a_0 为非负整数，　记 $x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)999\,9\cdots,$

而当 $x = a_0$ 为正整数时，则记 $x = (a_0-1).999\,9\cdots,$

例如 2.001 记为 2.000 999⋯；对于负有限小(包括负数）y，则先将 $-y$ 表示为无限小数,再在所得无限小数之前加负号.

例如 −8 记为 −7.999 9…;

又规定数 0 表示为 0.0000⋯.

于是，任何实数x都可用一个确定的无限小数来表示:

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 a_0 为整数， $0 \le a_n \le 9$ （n=1,2⋯）为整数.

实数的性质：

1) 实数集R 对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的，即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为0)仍然是实数.

2) 实数集是有序的，即任意两实数a、b必满足下述三个关系之一：$a<b$，$a=b$，$a>b$.

3) 实数的大小关系具有传递性，即若$a>b$，$b>c$，则有$a>c$.

4) 实数具有阿基米德(Archimedes)性，即对任何 $a,b\in R$，若$b>a>0$，则存在正整数 n，使得 $na>b$.

5) 实数集R具有稠密性，即任何两个不相等的实数之间必有另一个实数，且既有有理数，也有无理数.

6）实数集具有完备性**（连续性），即任一实数都对应数轴上唯一的一点；反之，数轴上的每一点也都唯一地代表一个实数.于是，实数集 $\boldsymbol{R}$ 与数轴上的点有着一一对应关系.**

以后的叙述中，常把“实数$\boldsymbol{a}$”与“数轴上的点$\boldsymbol{a}$”这两种说法看作具有相同的含义.

例1 设a、$b\in R$，证明：若对任何正数 ε 有$a<b+\varepsilon$，则 $a\le b$.

证：（反证法）．若结论不成立，有实数集的有序性，必有

$$a>b. \quad 令 \quad \varepsilon=a-b \quad 则 \quad a=\varepsilon+b$$

这与假设$a<b$矛盾，从而必有$a\le b$.

注：注意本例中$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的用法，这是以后一直强调的一种证明问题的方法.

1.1.2 区间与邻域

1. 区间的定义　设a、$b\in R$ 且$a<b$，　开区间（a,b）、闭区间［a,b］、半开半闭区间［a,b）和（a,b］、有限区间的定义.

区间 $[a,+\infty)$、$(-\infty,a]$、$(-\infty,a)$、$(a,\ +\infty)$、$(-\infty,+\infty)=R$ 以及无限区间的定义. 有限区间和无限区间统称为区间.

满足绝对值不等式$|x-a|<\delta$的全体实数 x 的集合称为点a的δ 邻域.

2、邻域的定义

设 $a \in R, \delta > 0,$

点 a 的δ邻域 $U(a;\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\};$

点 a 的空心δ邻域 $U^{\circ}(a;\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$

$U^{o}(a;\delta)$ 与 $U(a;\delta)$ 的差别 ？

点 a 的 δ 右邻域 $U_{+}(a;\delta) = [a, a+\delta)$, 简记为 $U_{+}(a)$;

点 a 的 δ 左邻域 $U_{-}(a;\delta) = (a-\delta\ a]$, 简记为 $U_{-}(a)$.

点 a 的空心 δ 左、右邻域 $U_{+}^{0}(a)$、$U_{-}^{0}(a)$ 的定义？

∞邻域 — $U(\infty)$; $+\infty$邻域 — $U(+\infty)$; $-\infty$邻域 — $U(-\infty)$.

1.1.3 有界集·确界原理

1. 有界集的定义

定义1 设 S 为 R 中的一个数集，若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x \in S$，都有 $x \le M\left(x \ge L\right)$，则称 S 为有上界（下界）的数集，数 $M\,(L)$ 称为 S 的一个上界（下界）.

若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集. 若 S 不是有界集，则称 S 为无界集.

例2 数集 $N^+ = \{n \mid n\text{为正整数}\}$ 有下界而无上界.

例3 任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集；

由有限个数组成的数集是有界集.

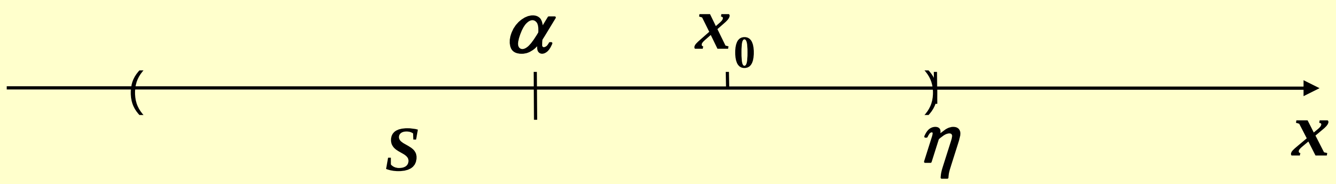
2. 数集的上确界和下确界的定义

描述性定义　若数集 S 有上界, 则显然它有无穷多个上界, 其中最小的一个上界常常具有重要的作用, 称它为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界.

定义2　设 S 是 R 中的一个数集, 若数 η 满足

（i）对一切 $x \in S$, 有 $x \le \eta$, 即 η 是 S 的上界;

（ii）对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界，则称数 η 为数集 S 的上确界, 记为 $\eta = \sup S$.



定义2　设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足

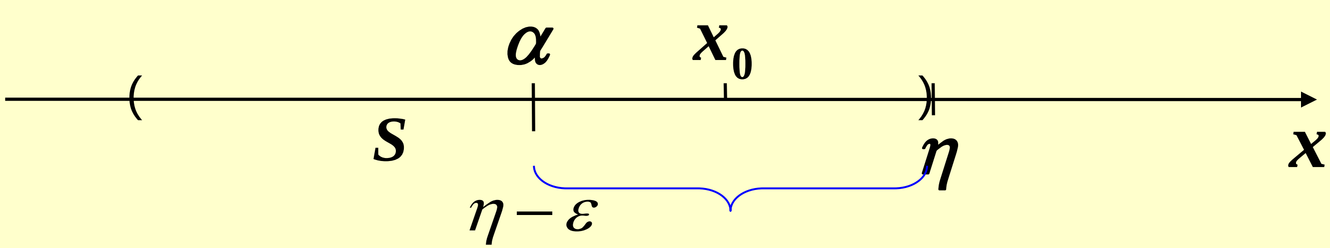
（i）对一切 $x \in S$，有 $x \le \eta$，即 η 是 S 的上界；

（ii）对任何 $\alpha < \eta$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$，即 η 又是 S 的最小上界，则称数 η 为数集 S 的上确界，记为 $\eta = \sup S$.

注1 条件(i) 说明 η 是 S 的一个上界，条件(ii)说明比 η 小的数都不是 S 的上界，从而 η 是最小的上界，即上确界是最小的上界.

注2 显然，条件 (ii) 亦可换成：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in S, x_0 > \eta - \varepsilon.$$



定义2　设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足

（i）对一切 $x \in S$, 有 $x \le \eta$, 即 η 是 S 的上界；

（ii）对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$, 即 η 又是 S 的最小上界，则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记为 $\eta = \sup S$.

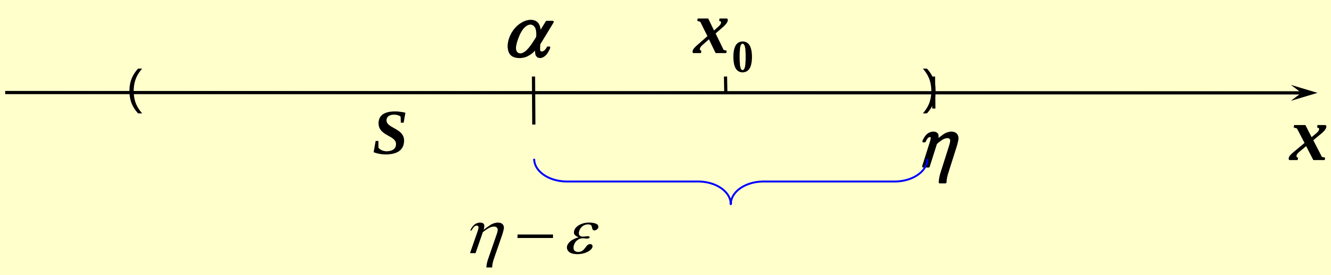
等价定义：

定义2'　设 S 是 R 中的一个数集，若数 η 满足

（i）$\forall\, x \in S$, 有 $x \le \eta$,

（ii）$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \eta - \varepsilon$.

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记为 $\eta = \sup S$.



定义3　设S是R中的一个数集．　若数 ξ 满足

（i）对一切 $x \in S$，有 $x \geq \xi$，即 ξ 是 S 的下界；

（ii）对任何 $\beta > \xi$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 < \beta$，即 ξ 又是 S 的的最大下界，则称数 ξ 为数集S的下确界，记为 $\xi = \inf S$.

上确界与下确界统称为确界.

定义3'　设 S 是 R 中的一个数集，若数 ξ 满足

（i）$\forall x \in S$，有 $x \geq \xi$；

（ii）$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S$，使得 $x_0 < \xi + \varepsilon$.

则称数 ξ 为数集 S 的下确界，记为 $\xi = \inf S$.

例4 设 $S=\left\{x \,\middle|\, x=1-\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots\right\}$, 求证

$$\sup S=1,\ \inf S=0.$$

证 先证 $\sup S=1$.

(i) $\forall x\in S,\ x=1-\frac{1}{n}\le 1$;

(ii) 设 $\alpha<1$. 若 $\alpha\le 0$, 则取 $x_0=1-\frac{1}{2}\in S,\ x_0>\alpha$.

若 $\alpha>0$, 则令 $\varepsilon=1-\alpha>0$, 由阿基米德性, $\exists\, n_0$,

使得 $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. 令 $x_0=1-\frac{1}{n_0}\in S$, 则 $x_0>1-\varepsilon=\alpha$.

因此，$\sup S=1$.

再证 $\inf S = 0$.

(i) $\forall x \in S,\ x = 1 - \dfrac{1}{n} \geq 0$;

(ii) $\forall \alpha > 0, \exists\, x_0 = 0 \in S,\ x_0 < \alpha$.

因此 $\inf S = 0$.

虽然我们定义了上确界，但并没有证明上确界的存在性，这是由于上界集是无限集，而无限数集不一定有最小值，例如 $(0, \infty)$ 无最小值.

例5 $S=\{x \mid x$ 为 区间$(0,1)$中的有理数$\}$

试按上、下界的定义验证 $\sup S=1$, $\inf S=0$.

例6 数集 $E=\left\{\frac{(-1)^n}{n} \middle| n=1,2,\cdots\right\}$ 的上、下确界分别为

$$\sup E=\frac{1}{2}, \quad \inf E=-1.$$

这两例请仿照例4自己证明。

注1 由上(下)确界的定义可见，若数集 S 存在上(下)界，则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界，则有

$$\inf S \le \sup S .$$

注2 从上面一些例子可见，数集 S 的确界可能属于S，也可能不属于S .

例7 设数集 S 有上确界. 证明

$$\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S .$$

请自证.

3. 确界原理

定理1.1（确界原理） 设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界; 若 S 有下界，则 S 必有下确界.

即：非空有界数集必有确界.

注：在本书中确界原理是极限理论的基础，作为公理，不予证明.

例8 设A、B为非空数集，满足对一切 $x \in A$和$y \in B$,有$x \le y$. 则数集A有上确界，数集B有下确界，且 $\sup A \le \inf B$.

例9 设A、B为非空有界数集，$S=A\cup B$. 证明：

(i) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(ii) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

例8 设 A, B 为非空数集. 满足:

$$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B, \text{有 } x \le y.$$

证明：数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，

且 $\sup A \le \inf B$.

证 由假设, B 中任一数 y 都是 A 的上界, A 中的任一数 x 都是 B 的下界. 因此由确界原理, A 有上确界, B 有下确界.

由定义, 上确界 $\sup A$ 是最小的上界，因此，任意 $y \in B$; $\sup A \le y$. 这样，$\sup A$ 又是 B 的一个下界，

而 $\inf B$ 是最大的下界，因此 $\sup A \le \inf B$.

例9 (ii) A 和 B 为非空有界数集，$S = A \bigcup B$.

试证明： $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证 $\forall x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 由 $\inf A$ 和 $\inf B$ 分别是 A , B 的下界,有 $x \geq \inf A$ 或 $x \geq \inf B$. $\Rightarrow$ $x \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.

即 $\min\{\inf A, \inf B\}$ 是数集 S 的下界,

$\Rightarrow$ $\inf S \geq \min\{\inf A, \inf B\}$.

又 $S \supset A, \Rightarrow S$ 的下界就是A 的下界,

$\inf S$ 是S 的下界, $\Rightarrow \inf S$ 是A 的下界,

$\Rightarrow \inf S \le \inf A;$

同理有 $\inf S \le \inf B$ 于是有

$$\inf S \le \min\{\inf A, \inf B\}.$$

综上, 有 $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}.$

例10 设 S 是 $\mathbf{R}$ 中非空有上界的数集,

(i) 若 $a \in \mathbf{R}$, 定义 $S + a = \{x + a \mid x \in S\}$,则

$$\sup\{S + a\} = \sup S + a;$$

(ii) 若 $b \in \mathbf{R}_+$, 定义 $bS = \{bx \mid x \in S\}$, 则

$$\sup\{bS\} = b \cdot \sup S.$$

(i) 若 $a \in \mathbf{R}$, 定义 $S+a=\{x+a \mid x \in S\}$,则

$$\sup\{S+a\}=\sup S+a;$$

证 (i) $\forall x+a \in S+a$, 其中 $x \in S$, 必有 $x \le \sup S$,

于是 $$x+a \le \sup S+a.$$

对于$\forall \varepsilon>0$, $\exists\, x_0 \in S$, 使 $x_0>\sup S-\varepsilon$, 从而

$$x_0+a \in S+a,$$

且 $$x_0+a>(\sup S+a)-\varepsilon,$$

因此 $$\sup(S+a)=\sup S+a.$$

(ii) 若 $b \in \mathbf{R}_+$, 定义 $bS = \{bx \mid x \in S\}$, 则

$$\sup\{bS\} = b \cdot \sup S.$$

证 (ii) $\forall\, bx \in bS$，其中 $x \in S$，必有 $x \leq \sup S$, 于是

$$bx \leq b\sup S.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b} > 0$，则存在 $x_0 \in S$，使

$$x_0 > \sup S - \varepsilon',$$

因此 $bx_0 > b\sup S - b\varepsilon' = b\sup S - \varepsilon.$

这就证明了 $\sup\{bS\} = b\sup S.$

1.2 函 数

1.2.1 函数的概念

1、函数的定义

2、函数的四则运算

3、复合函数

4、反函数

5、初等函数

1. 函数的概念

定义1 D与M是R中非空数集, 若有对应法则 f, 使 D内每一个数 x, 都有惟一的一个数 $y\in M$ 与它相对应, 则称 f 是定义在 D上的函数, 记作

$$f : D \to M,$$
$$x \mapsto y.$$

D 称为 f 的定义域;

$f(D)=\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为 f 的值域;

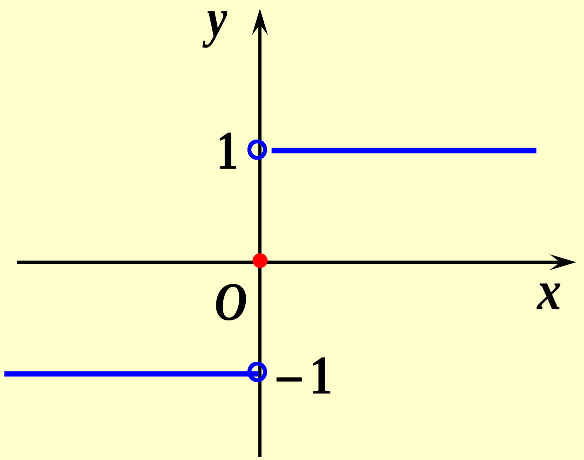
$G = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D \}$ 称为 f 的图象.

注1 函数由定义域 D 和对应法则 f 二要素完全决定，因此若给出函数的定义域和对应法则, 也就确定了函数. 它与自变量与因变量的符号无关.

注2 表示函数有多种方法，常见的有解析法、列表法和图象法. 解析法表示函数时, 若没有特别指明其定义域, 则一般约定其定义域为使该解析式有意义的自变量的全体(即存在域).

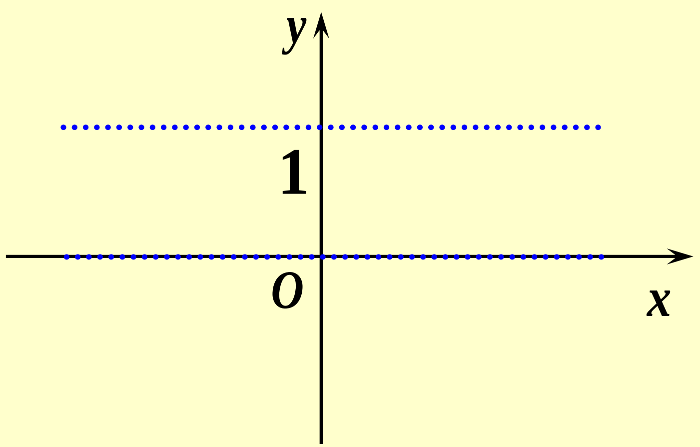
例1 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

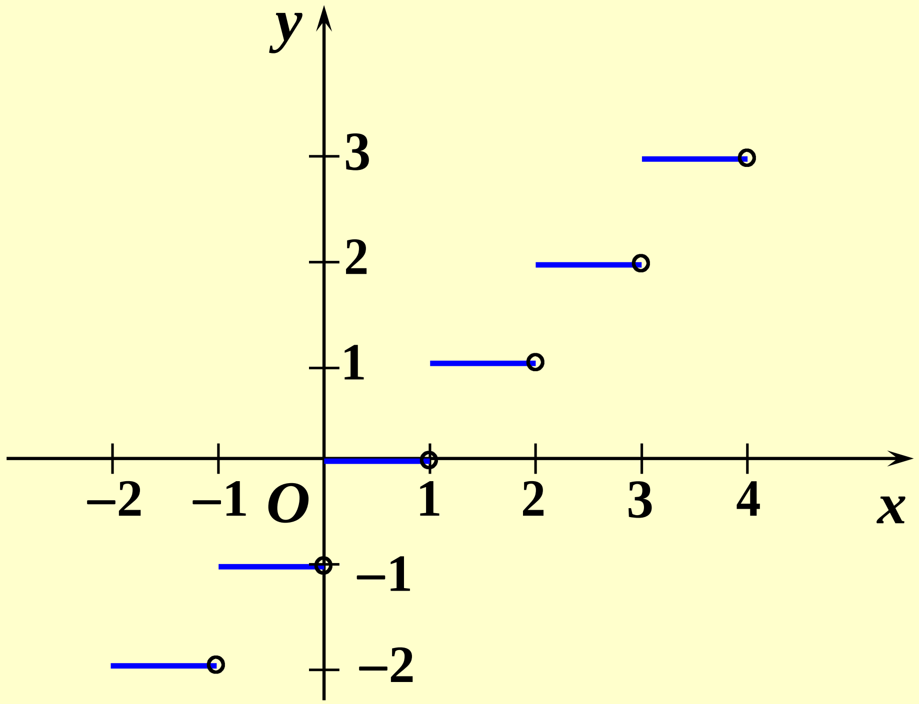


例2 狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$



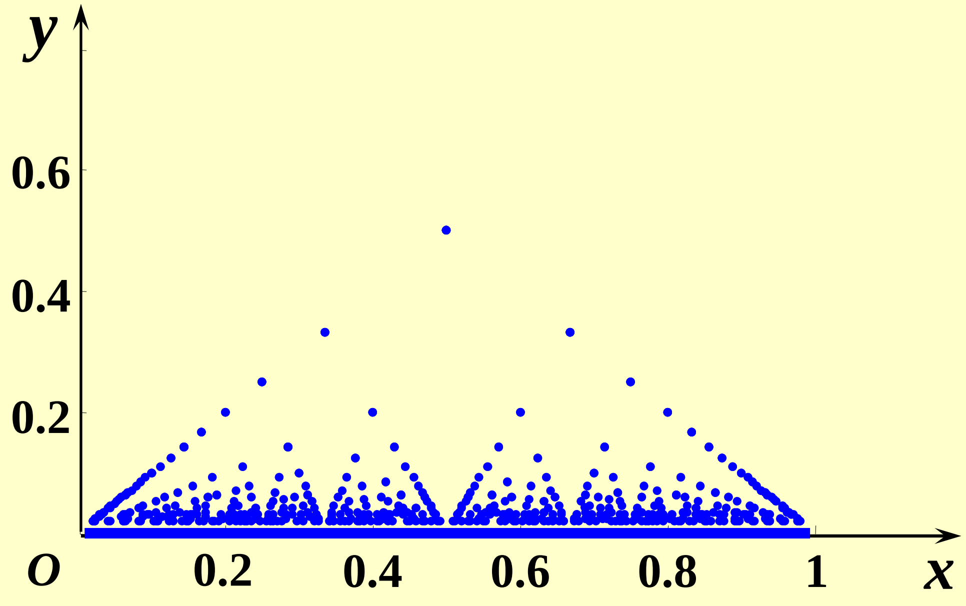
例3. 取整函数 $y = [x]$



$$\forall x \in R, \quad [x] \le x < [x] + 1$$

例4 黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & 当\ x=\dfrac{p}{q}\ \ (p,q\in \mathrm{N}_{+},\ \dfrac{p}{q}既约真分数);\\[2ex] 0, & x=0,1\ 或\ x\in(0,1)\setminus Q.\end{cases}$$



2. 函数的四则运算

设函数 f 的定义域为D_f,函数 g 的定义域为D_g.

1. $f \pm g$ 的定义域为 $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$,

且$\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$.

2. $f \cdot g$ 的定义域为 $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$,

且 $\forall x \in D_f \cap D_g$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3. $\dfrac{f}{g}$ 的定义域为 $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D^*$, 其中$D^* = \{x \mid x \in D_g$,

且$g(x) \neq 0\}$, $\forall x \in D_{\frac{f}{g}}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3. 复合函数运算

设函数 f 的定义域为D_f ,函数 g 的定义域为D_g ,
复合函数 $f\circ g$ 的定义域为

$$D_{f\circ g}=\{x\,|\,x\in D_g,\text{且}\ g(x)\in D_f\},\ \text{则}$$

$$\forall\ x\in D_{f\circ g},\ \ f\circ g(x)=f(g(x)).$$

例5 函数 $f(u)=\sqrt{u},u\in[0,+\infty)$ 与函数 $g(x)=1-x^2,x\in\mathrm{R}$ 的复合函数为 $y=f(g(x))=\sqrt{1-x^2}$,

其中$D_{f\circ g}=[-1,1]$.

例5 设 $f(x)=x^2; g(x)=\arcsin x; h(x)=\ln x$. 则

$$(f\circ g\circ h)(x)=\arcsin^2(\ln x),\ D_1=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(f\circ h\circ g)(x)=\ln^2(\arcsin x), D_2=(0,1];$$

$$(g\circ f\circ h)(x)=\arcsin(\ln^2 x), D_3=[\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}];$$

$$(g\circ h\circ f)(x)=\arcsin(\ln x^2), D_4=[\mathrm{e}^{-1/2},\mathrm{e}^{1/2}];$$

$$(h\circ f\circ g)(x)=\ln(\arcsin^2 x), D_5=[-1,0)\cup(0,1];$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=\ln(\arcsin(x^2)), D_6=[-1,0)\cup(0,1].$$

其中 $D_k, k=1,\cdots,6$ 是相应复合函数的定义域.

4. 反函数

若函数 f 的定义域为 D_f, 满足:

$$\forall y \in f(D), \exists \text{惟一}\ x \in D,\ \text{使}\ f(x) = y,$$

则存在函数 f^{-1}, $D_{f^{-1}} = f(D)$ 且 $\forall y \in f(D)$,

$f^{-1}(y) = x$,其中 x 是使 $f(x) = y$ 的惟一的 $x \in D$.

注 反函数表示式 $f^{-1}(y) = x$ 中, y 是自变量, x 是因变量. 由于函数与自变量、因变量记号无关, 因此一般反函数 f^{-1} 记为 $y = f^{-1}(x)$.

例6 双曲函数 $\mathrm{sh}\, x$ 和 $\mathrm{ch}\, x$ 定义如下：

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \in \mathbf{R}.$$

$\mathrm{sh}\, x$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增, 因此 $\mathrm{sh}\, x$ 有反函数.

设 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

解得 $x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2+1}\right)$ (负舍),

因此 $y = \mathrm{sh}\, x$ 的反函数为

$$y = \mathrm{ar\,sh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in \mathbf{R}.$$

$\operatorname{ch} x$ 在 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 的值域均为 $[1,+\infty)$, 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减.

设 $y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$, 得到 e^x 的一元二次方程

$$(\mathrm{e}^x)^2-2y\mathrm{e}^x+1=0.$$

解得 $\quad x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right)$,

因此 $\operatorname{ch} x$ 在 $\mathbf{R}_+$ 和 $\mathbf{R}_-$ 的反函数分别为

$$y_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

$$y_2=\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right),\ x\in[1,+\infty).$$

5. 初等函数

定义1 以下六类函数称为**基本初等函数**

(1) 常量函数 $y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^{x}$ ($a > 0, a \neq 1$);

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$);

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$,

$y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

定义2 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的并能用一个式子表示的函数, 称为**初等函数**.

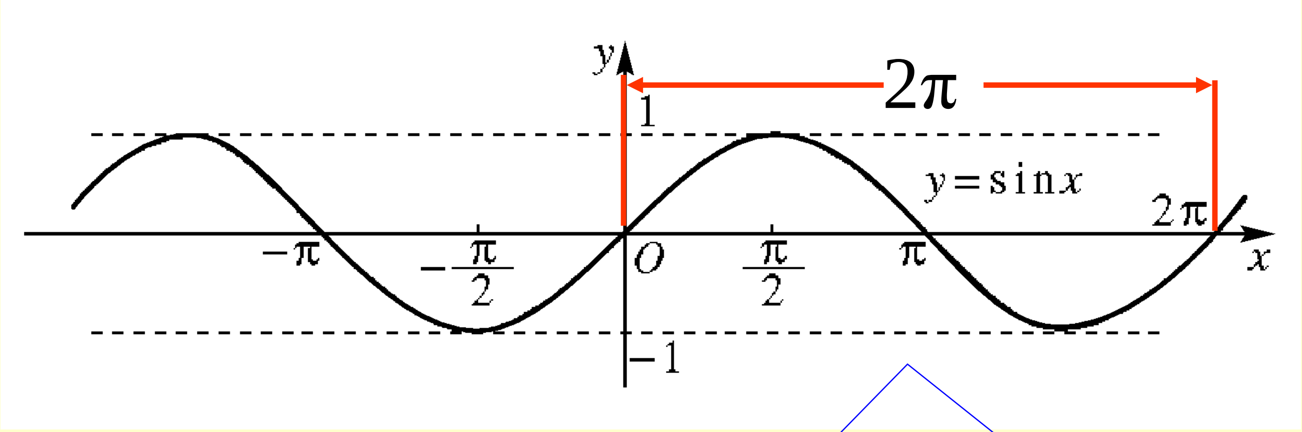
Dirichlet函数与Riemann 函数是非初等函数.

三角函数

(i) 正弦函数

形式： $y = \sin x.$

定义域: $x \in (-\infty, +\infty).$ 值域: $y \in [-1, 1].$

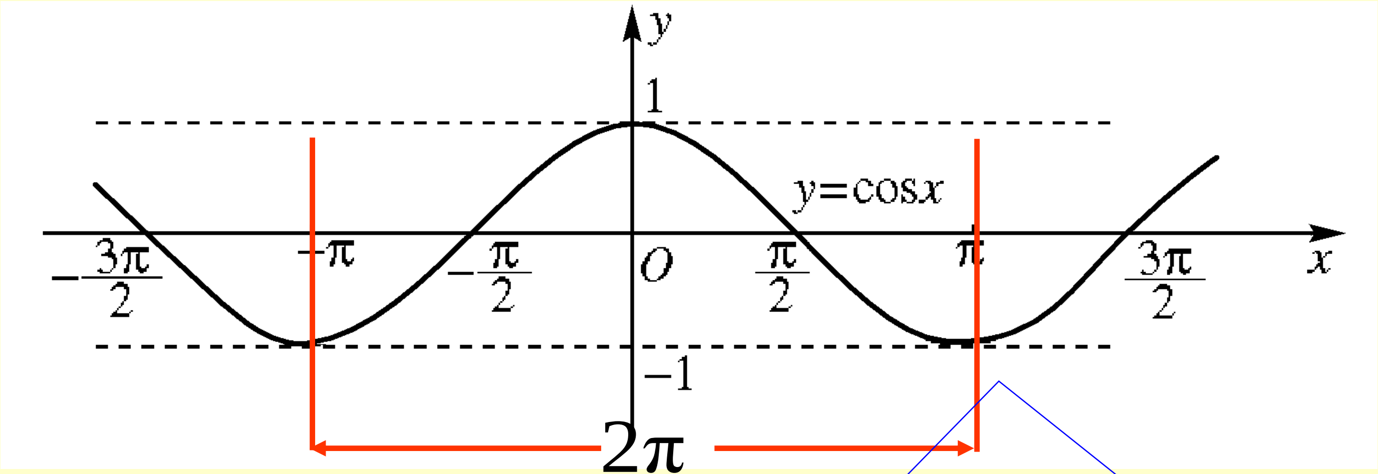


几何特性：奇函数; $(-\infty, +\infty)$内非单调函数;
周期 $T = 2\pi$ ；有界函数.

(ii) 余弦函数

形式: $y = \cos x.$

定义域: $x \in (-\infty, +\infty).$ 值域: $y \in [-1, 1].$



几何特性：偶函数; $(-\infty, +\infty)$内非单调函数;

周期 $T = 2\pi$ ；有界函数.

(iii) 正切函数

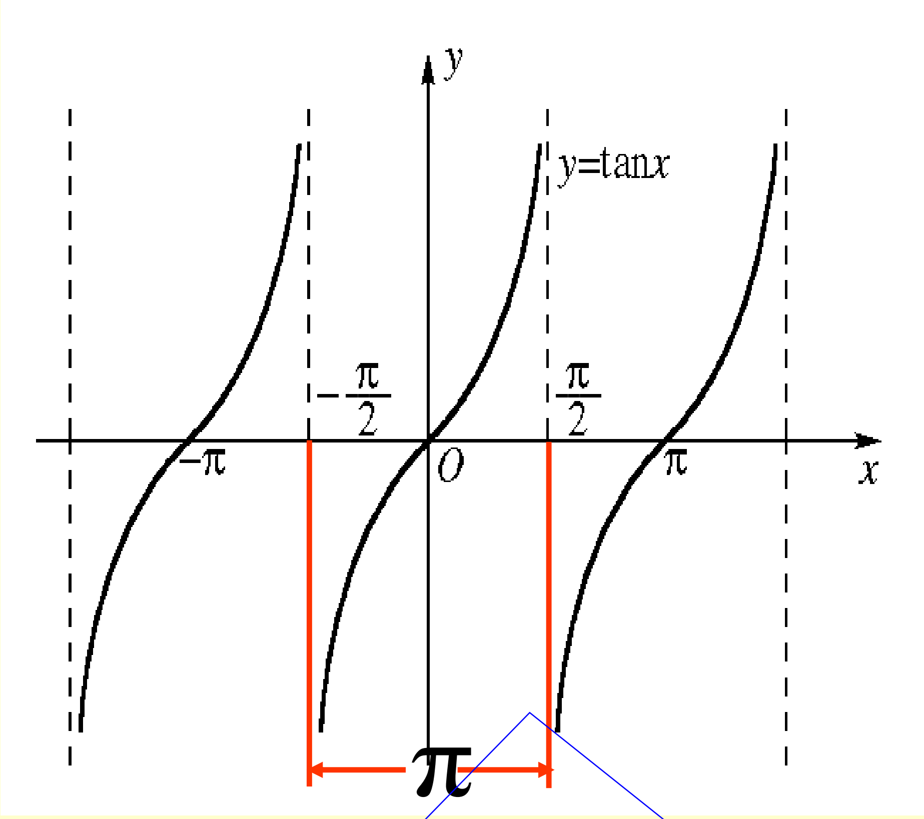
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

形式: $y = \tan x.$

定义域: $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$

值域: $y \in (-\infty, +\infty).$



几何特性：奇函数; 在 $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加；周期 $T = \pi$ ；无界函数.

(iv) 余切函数

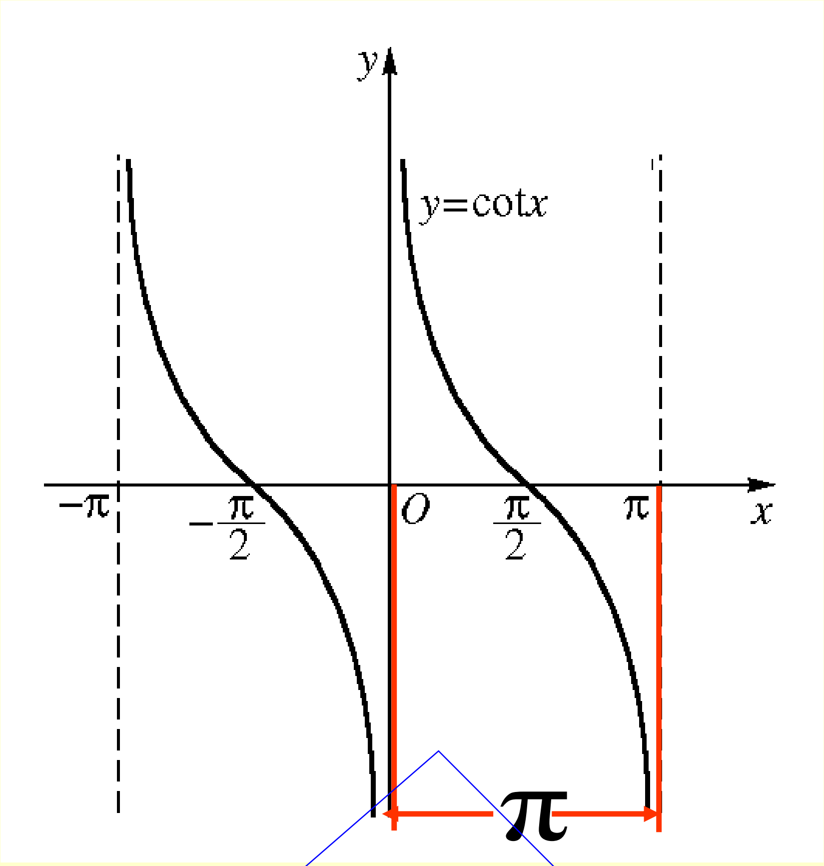
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

形式: $y = \cot x.$

定义域: $x \neq n\pi,$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

值域: $y \in (-\infty, +\infty).$



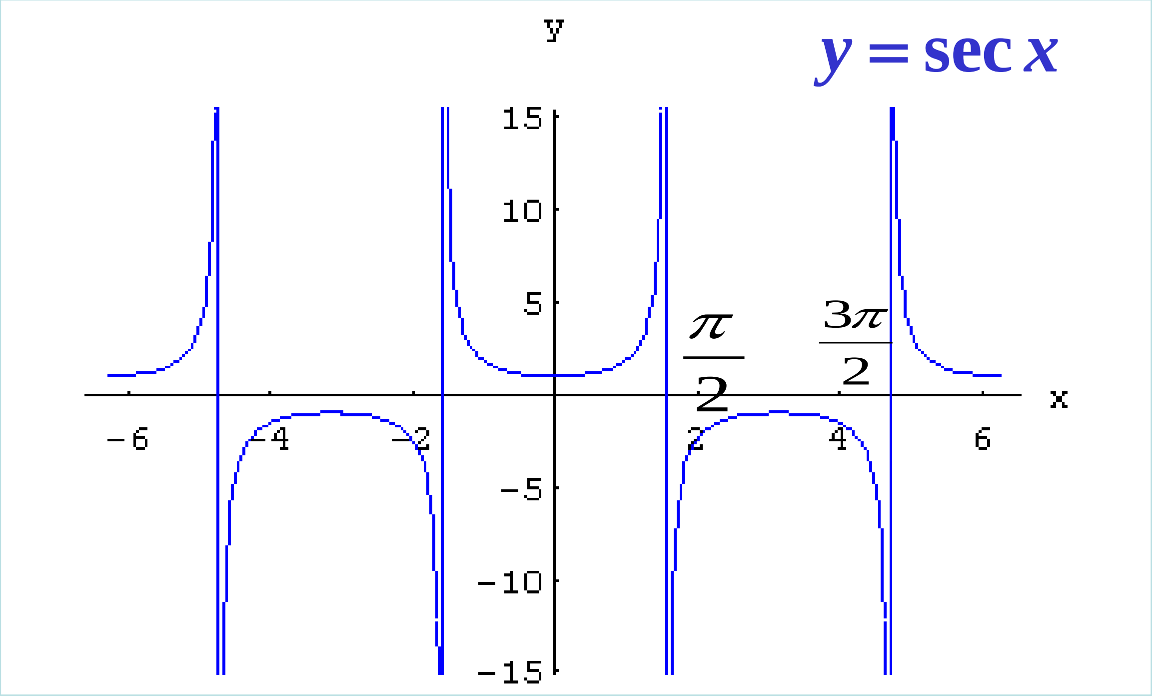
几何特性: 奇函数; 在 $(n\pi, n\pi + \pi)$ 内单调减少; 周期 $T = \pi$; 无界函数.

（v）正割函数

形式： $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}.$

定义域: $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$

值域： $y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

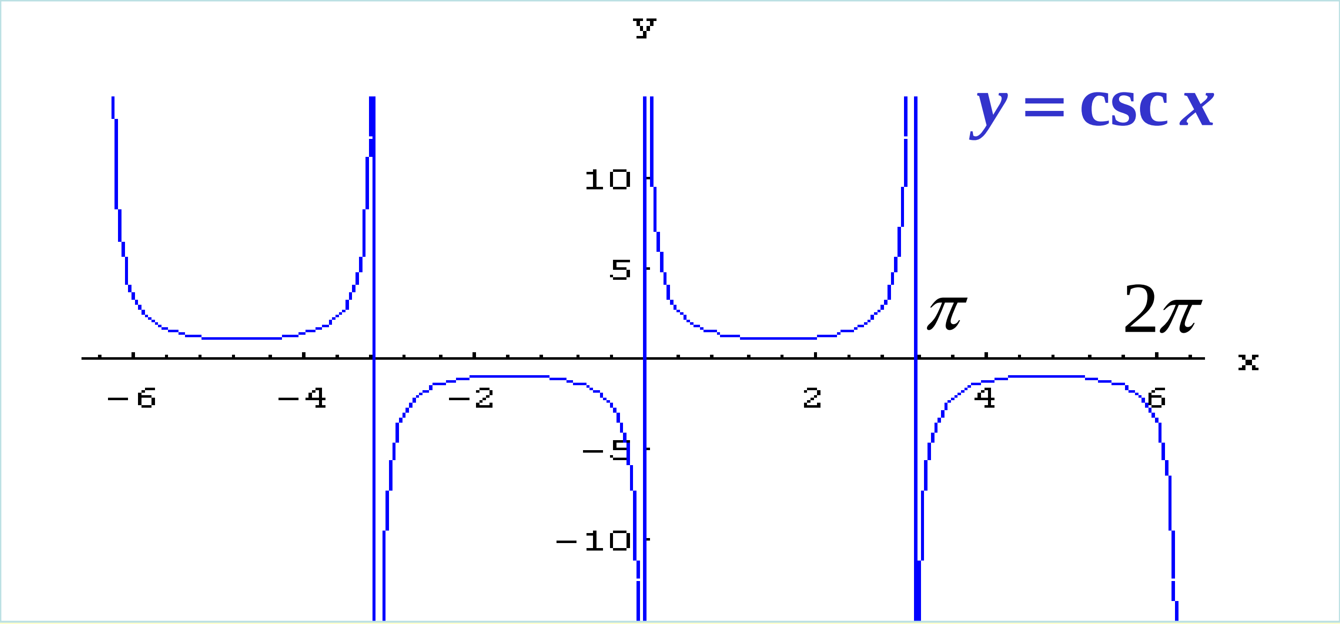


(vi) 余割函数

形式：$y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

定义域：$x \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

值域：$y \in (-\infty, -1] \bigcup [1, +\infty)$



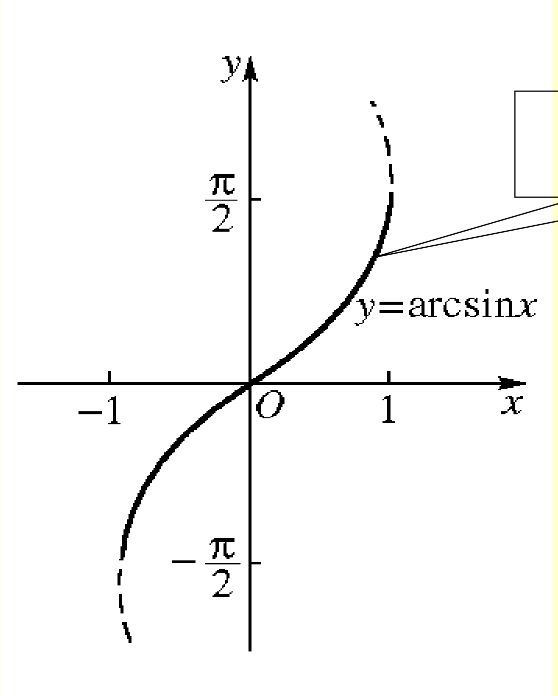
反三角函数

(i) 反正弦函数

形式: $y = \arcsin x.$

定义域: $x \in [-1,1].$

值域: $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$



单调增加

$y = \arcsin x$ 是 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数.

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1,1]$$

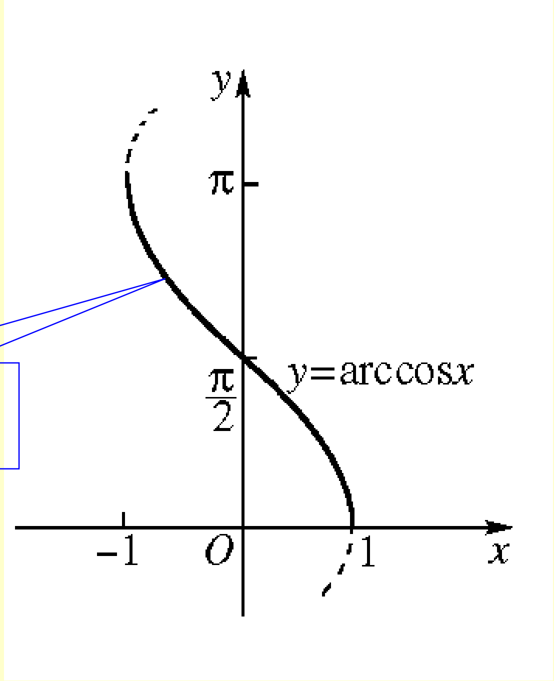
(ii)反余弦函数

形式: $y = \arccos x.$

定义域: $x \in [-1,1].$

值域: $y \in [0, \pi].$

单调减少



$y = \arccos x$是 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数.

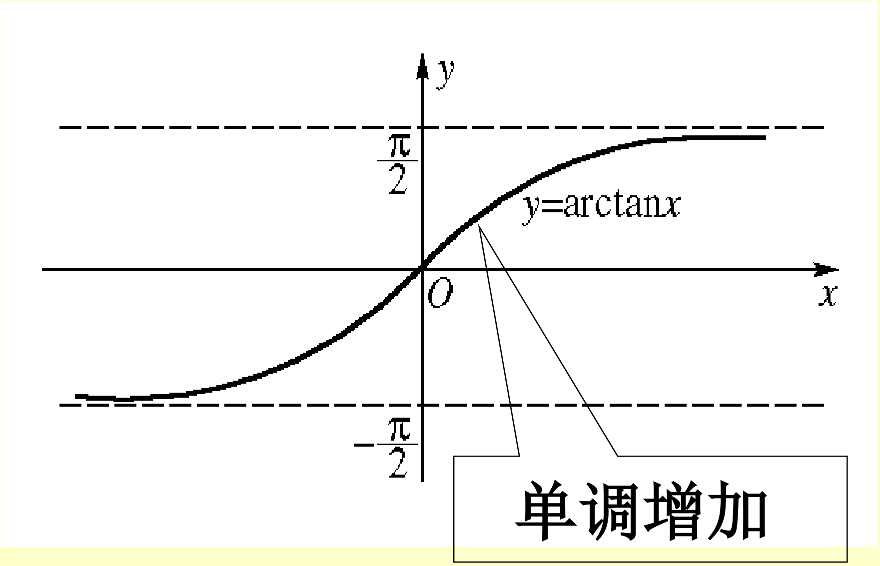
$$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1,1]$$

(iii)反正切函数

形式: $y = \arctan x$.

定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$.

值域: $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

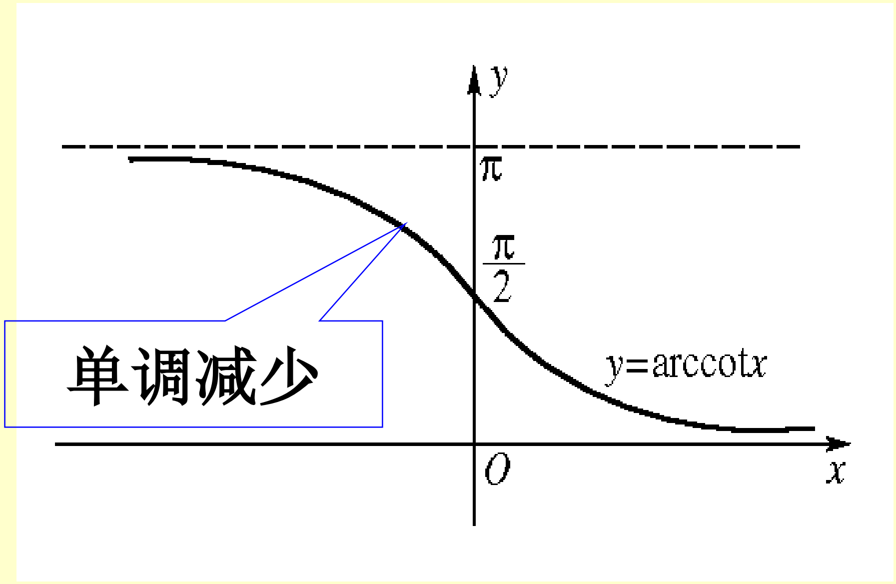


(iv)反余切函数

形式: $y = \operatorname{arccot} x$.

定义域: $x \in (-\infty, +\infty)$.

值域: $y \in (0, \pi)$.



双曲函数与反双曲函数

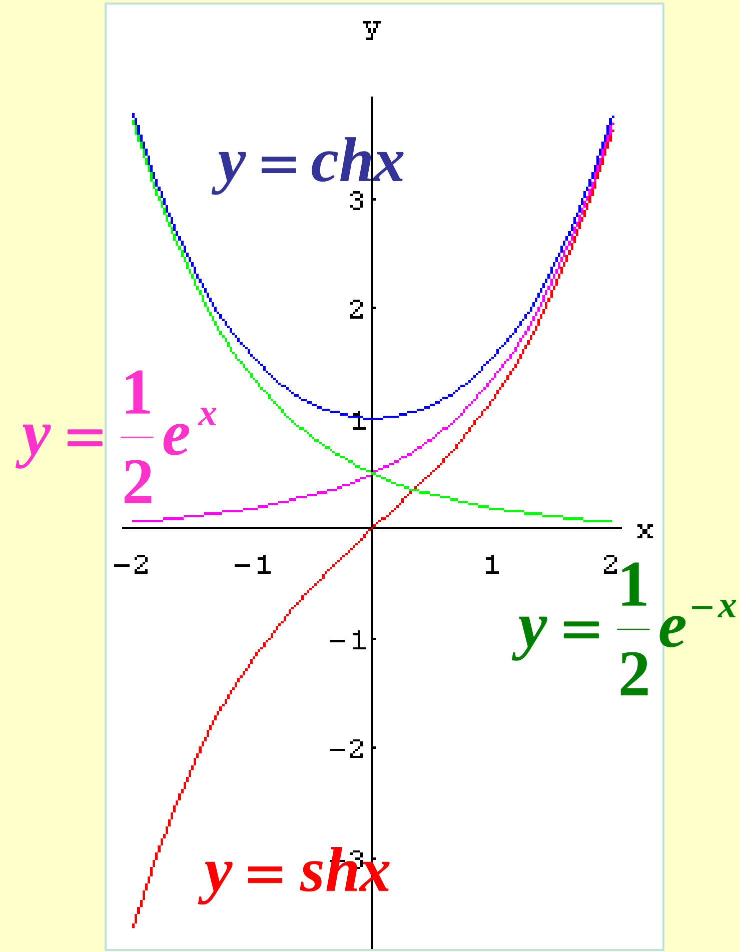
1、双曲函数

双曲正弦 $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

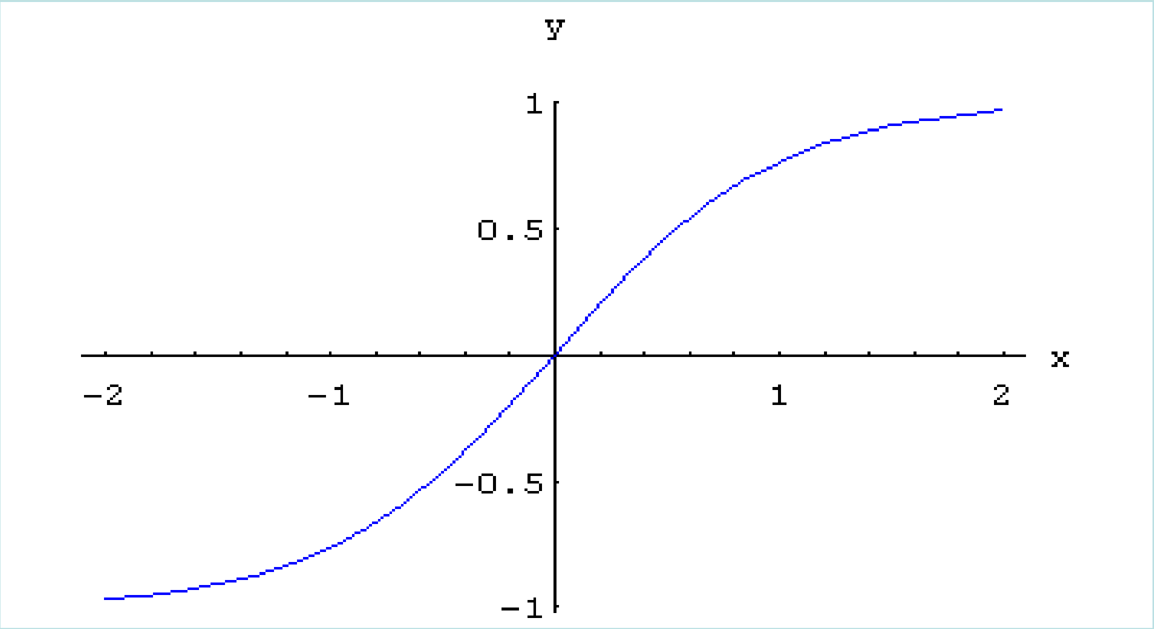
双曲余弦 $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 偶函数.

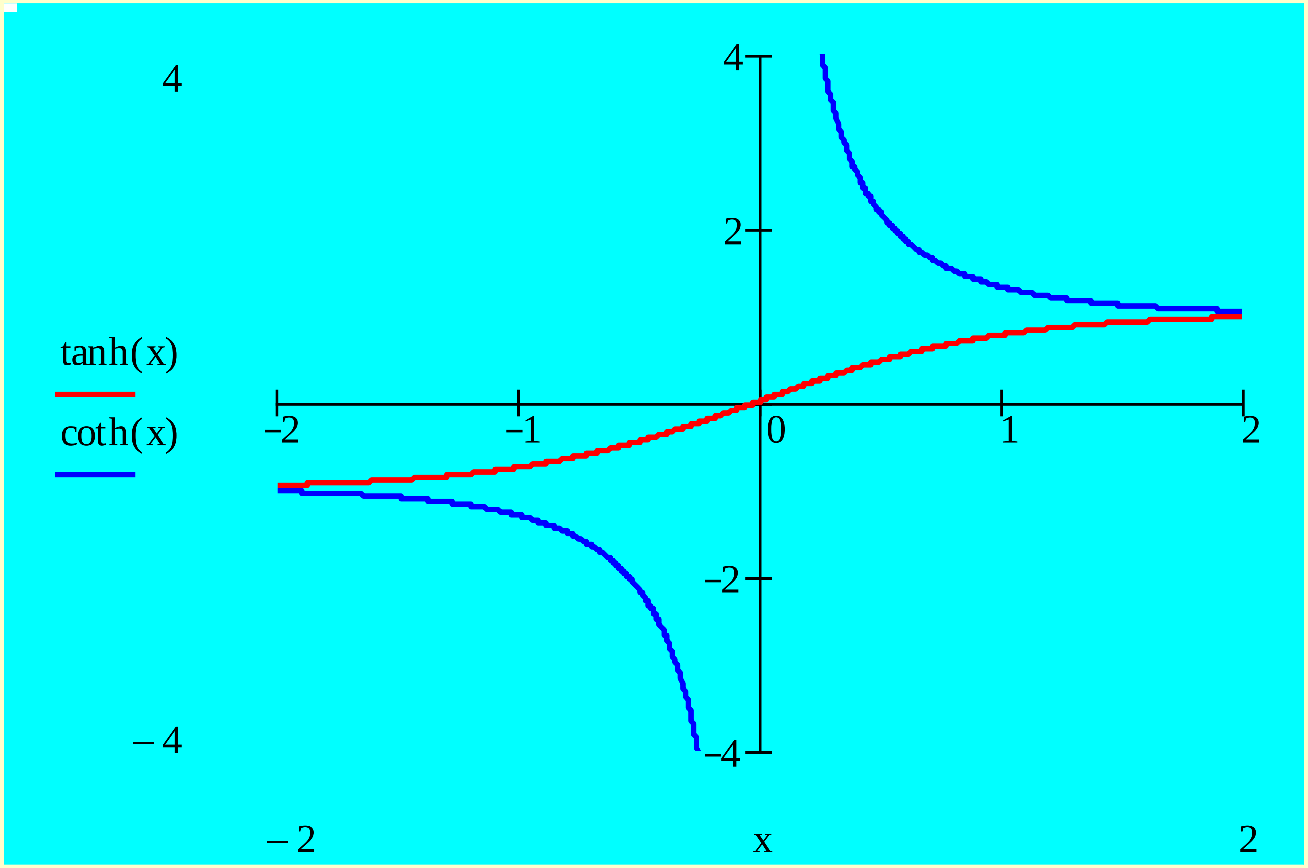


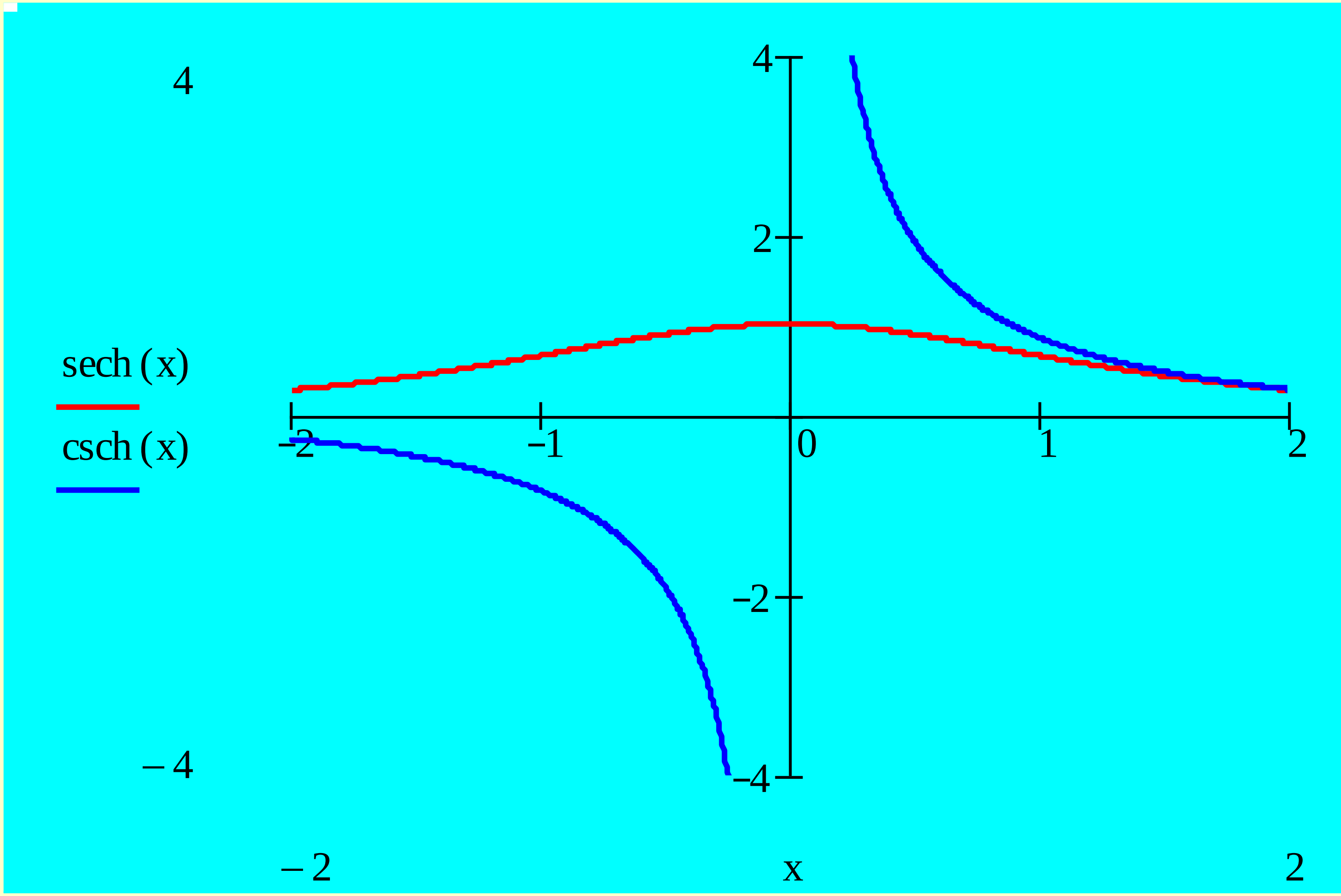
$$双曲正切\ thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$D:(-\infty,+\infty)$ 奇函数, 有界函数,



双曲余切 $cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$




4
sech (x)
csch (x)
– 4
– 2
x
2
4
2
–2
–4
–2
–1
0
1
2

双曲函数常用公式

$$sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy;$$

$$ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy;$$

$$ch^2 x - sh^2 x = 1;$$

$$sh2x = 2shxchx;$$

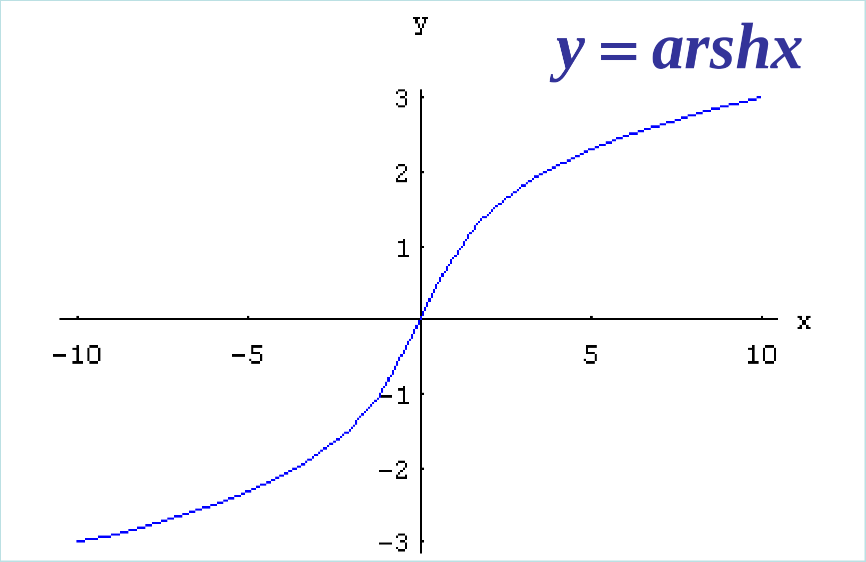
$$ch2x = ch^2 x + sh^2 x.$$

2、反双曲函数

反双曲正弦 $y = \mathrm{ar}sh x$;

$y = \mathrm{ar}sh x$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

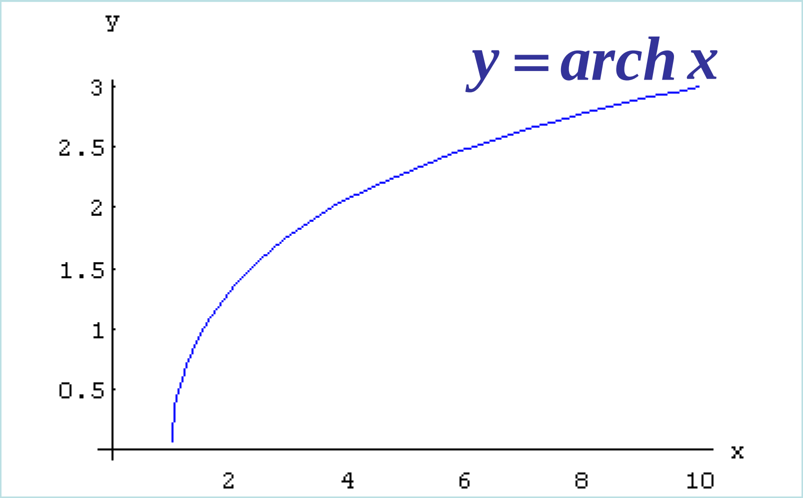


$D: (-\infty, +\infty)$

奇函数,

在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲余弦 $y = archx$



$$y = \text{ar}chx$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$D:[1,+\infty)$

在 $[1,+\infty)$ 内单调增加.

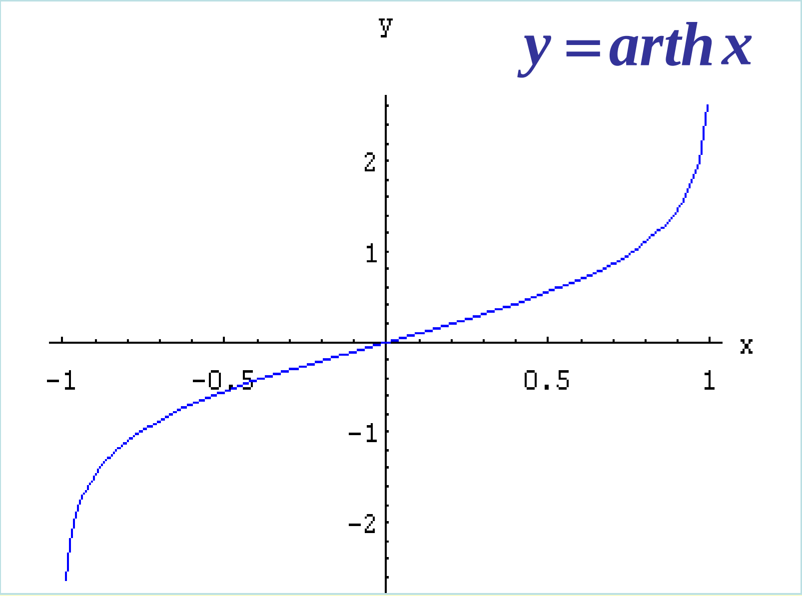
反双曲正切 $y = arthx$

$$y = arthx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D:(-1,1)$

奇函数,



在 $(-1,1)$ 内单调增加.

1.2.2　函数的某些特性

1、有界性

2、单调性

3、奇偶性

4、周期性

1、有界性

定义1 设 f 定义在D上.

若$\exists M\in\mathbf{R},\forall x\in D, f(x)\le M$,则称 f 在 D上有上界;

若$\exists L\in\mathbf{R},\forall x\in D, f(x)\ge L$, 则称 f 在D上有下界;

若$\exists M\in\mathbf{R},\forall x\in D,\left|f(x)\right|\le M$, 则称 f 在 D上有界.

易证 f 在D上有界$\Leftrightarrow$ f 在D上既有上界又有下界.

若$\forall M\in\mathbf{R},\exists\, x_0\in D, f(x_0)>M$, 则称 f 在 D 上无上界;

若$\forall L\in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, f(x_0)<L$, 则称 f 在D上无下界;

若$\forall M\in \mathbf{R}, \exists x_0 \in D, |f(x_0)|>M$, 则称 f 在D上无界.

例1 求证: $f(x)=\tan x$ 在$[0,\frac{\pi}{2})$上无上界,有下界.

证 $L=0$, 则 $\forall x\in[0,\frac{\pi}{2})$, $f(x)\ge L$, 因此 f 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上有下界. $\forall M\in \mathbf{R}^+$, 令$x_0=\arctan(M+1)$, 则 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2})$, 且$\tan x_0=M+1>M$, 因此 f 在 $[0,\frac{\pi}{2})$上无上界.

例2设函数 $f(x), g(x)$ 是D上的正值有界函数.

求证： $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

证 $\forall x \in D$, $\quad f(x) \le \sup\{f(x)\}$,

$$g(x) \le \sup\{g(x)\},$$

因此 $f(x)g(x) \le \sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$,

由 x 的任意性, 可知 $\sup\{f(x)\}\sup\{g(x)\}$

是$\{f(x)g(x)\}$的一个上界,

因此 $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)g(x)\} \le \sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$.

例3 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 D 上有界, 证明:

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$$

证 $\forall\varepsilon>0, \exists\, x_0\in D, f(x_0)<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\varepsilon.$

又 $g(x_0)\le\sup_{x\in D}\{g(x)\}$, 故

$$f(x_0)+g(x_0)<\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}+\varepsilon.$$

因此

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\le f(x_0)+g(x_0)$$

$$\le\inf_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}.$$

2、单调性

定义2 设 f 是定义在 D上的函数.

若$\forall x_1, x_2 \in D$, 当$x_1 < x_2$时,

(i) 有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为D上的增函数;

特别有 $f(x_1) < f(x_2)$时, 称 f 为严格增函数.

(ii) 有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 则称 f 为D上的减函数;

特别有 $f(x_1) > f(x_2)$时, 称 f 为严格减函数.

不难知道, 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是正值严格增的, 则 $f(x)g(x)$ 也是正值严格增的.

例4 任意 $n\in\mathbf{N}_+$, $y_{2n-1}=x^{2n-1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增; $y_{2n}=x^{2n}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减.

证 由 $y_1=x$ 在 $\mathbf{R}_+$上为正值严格增, 可知 $y_2=y_1y_1$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上亦正值严格增. 由归纳法, 若已证 y_n 在 $\mathbf{R}_+$ 上为正值严格增, 可知 $y_{n+1}=y_1y_n$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上亦正值严格增.

若 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $0 < -x_2 < -x_1$, 于是

$$(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n},\ (-x_2)^{2n-1} < (-x_1)^{2n-1},$$

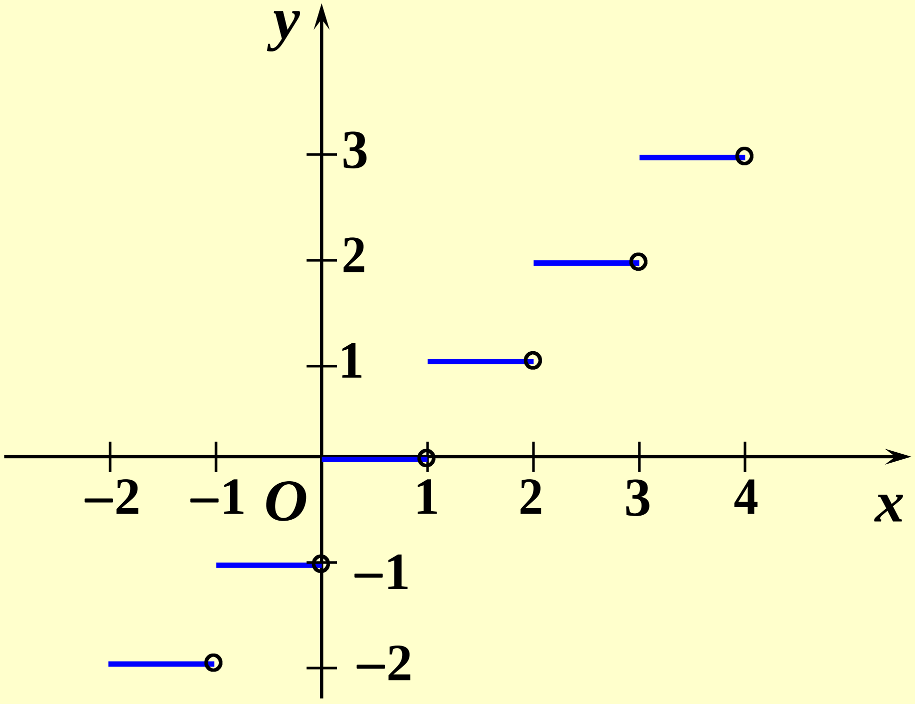
即 $x_2^{\ 2n} < x_1^{\ 2n}$, $x_2^{\ 2n-1} > x_1^{\ 2n-1}$. 这就证明了 y_{2n} 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格减, 而 y_{2n-1} 在 $\mathbf{R}_-$ 上严格增.

若 $x_1 \le 0 < x_2$ 或 $x_1 < 0 \le x_2$, 则

$$x_1^{2n-1} \le 0 < x_2^{2n-1} \text{ 或 } x_1^{2n-1} < 0 \le x_2^{2n-1},$$

这证明了 y_{2n-1} 在 $\mathbf{R}$ 上严格增.

例5 易证函数 $y=[x]$ 在R上是增函数, 但非严格增.



定理　设 $y=f(x), x\in D$ 为严格增函数,则 f 必有反函数 f^{-1},且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增函数.

类似地, 严格减函数 f 必有反函数 f^{-1},且 f^{-1} 在其定义域上也是严格减函数.

证 设 f 在 D 上严格增, 则 $\forall y\in f(D)$ 只有一个 $x\in D$, 使 $f(x)=y$.

事实上, 若 $\exists x_1<x_2$, 使 $f(x_1)=y=f(x_2)$, 则与 f

的严格增性质相矛盾. 再证 f^{-1}必是严格增的:

$$\forall\, y_1, y_2 \in f(D),\quad y_1 < y_2,$$

$$x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2),$$

由于 $y_1 < y_2$ 及 f 的严格增性,必有 $x_1 < x_2$,即

$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 因此 f^{-1}也是严格增函数.

例6 由于 $y_n = x^n$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 因此 y_n 的反函数 $z_n = x^{1/n}$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上严格增, 故对任意有理数 $r = \dfrac{n}{m}$, $y = x^r$ 在 $\mathbf{R}_+$ 上亦为严格增.

3、奇偶性

定义3 设D关于原点对称,即:$\forall x \in D$,必有$-x \in D$.

若$\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$, 称f为D上的奇函数.

若$\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$, 称f为D上的偶函数.

显然, 若记$G(f)$为f的图象, 则 $f(x)$是奇函数或偶函数的充要条件是:

$$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (-x, -y) \in G(f);$$

或 $$(x, y) \in G(f) \Leftrightarrow (-x, y) \in G(f).$$

例如, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = x^{2n+1}$ 是奇函数, 而 $y = \cos x$, $y = x^{2n}$ 是偶函数.

$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数 $y_1 = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 的反函数, 从而由奇函数的图象性质可知它也是奇函数.

4、周期函数

定义4 设 f 为D上定义的函数. 若$\exists\sigma>0$, 使$\forall x\in D$

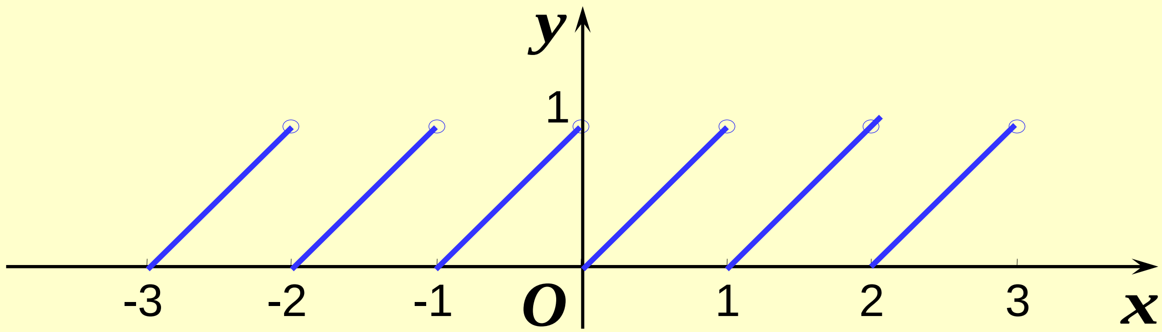
必有$x\pm\sigma\in D$,且 $f(x\pm\sigma)=f(x)$,

则称 f 为周期函数, σ为 f 的一个周期.

若周期函数 f 的所有正周期中有一个最小的周期,

则称此最小正周期为 f 的基本周期, 简称周期.

例如函数 $f(x)=x-[x]$的周期为1. 见后图.



例8 $\sin x$ 的周期为 2π, $\tan x$ 的周期为 π,

注1 周期函数的定义域不一定是R. 例如:

$$f(x)=\sqrt{\sin x}.$$

注2 周期函数不一定有最小周期. 例如狄利克雷函数以任意正有理数为周期，但没有最小周期.

例9 任意正有理数是狄利克雷函数 $D(x)$的周期.

证 设 $r \in \mathbf{Q}_{+}$, $x \in \mathbf{R}$.

若 $x \in \mathbf{Q}$, 则 $x + r \in \mathbf{Q}$, $D(x + r) = 1 = D(x)$;

若 $x \notin \mathbf{Q}$, 则 $x + r \notin \mathbf{Q}$, $D(x + r) = 0 = D(x)$.

因此, r 是 $D(x)$ 的一个周期.