2018 级《微积分》(一)(下)课程期中考试试题

(2019 年 4 月 22 日， 用时 100 分钟)

专业班级____________ 学号________________ 姓名____________

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

阅卷人	
得　分	

一、填空题 (**每空** 2 **分，共** 24 **分**)

1. 函数 $f(x,y,z)=x^3y+e^{xz}+zy$ 的梯度 $\nabla f=$ $\underline{(3x^2y+ze^{xz},x^3+z,xe^{xz}+y)}$；$f$ 在点 $(1,1,1)$ 处关于方向 $\vec{a}=(1,2,3)$ 的方向导数为 $\underline{(8+4e)/\sqrt{14}}$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant x<0\\ \sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$, 则 $S(-\pi)=\underline{1/2}$, $S(0)=\underline{1/2}$, $S(1)=\underline{\sin 1}$, $S(\pi)=\underline{1/2}$。

3. 点 $P=(1,1,1)$ 到平面 $\Pi_1: x+y+z+1=0$ 的距离为 $\underline{4/\sqrt{3}}$；平面 Π_1 与平面 $\Pi_2: x+2y+3z+4=0$ 的交线 ℓ 的方程为 $\underline{(x,y,z)=(t,1-2t,-2+t)}$；点 P 到 ℓ 的距离为 $\underline{\sqrt{66}/3}$。

4. 设 (x_0,y_0,u_0,v_0) 为方程组 $\begin{cases}e^{x+y}+xy-1-uv=0\\ y+u^4-v^4=0\end{cases}$ 的解, 当 (x_0,y_0,u_0,v_0) 满足条件 $\underline{(x_0,y_0,u_0,v_0)\neq(0,0,0,0)}$ 时，存在 (x_0,y_0) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域 V, 以及 (u_0,v_0) 在 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域 U, 使得 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是由该方程组所确定的隐函数; 此时 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\underline{v^3(e^{x+y}+y)/(u^4+v^4)}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$
$\underline{\frac{(4v^3(e^{x+y}+x)-u)(8u^3v^3(e^{x+y}+x)-u^4+v^4)}{4(u^4+v^4)^3}+\frac{12v^2u^3(e^{x+y}+x)(e^{x+y}+y)+4v^3(u^4+v^4)(e^{x+y}+1)-v^3(e^{x+y}+y)}{4(u^4+v^4)^2}}$.

阅卷人	
得　分	

二、计算 (每题 8 分，共 32 分)

5. 函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 展开式。

解: 由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ -1<x\leqslant 1$ 得

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ |x|<1.$$

6. 函数 $z=z(x,y)$ 由 $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ 给出，求 $\dfrac{\partial^{2019}z}{\partial x^{1010}\partial y^{1009}}$.

解: 由 $z=\dfrac{-x+y+2x}{x-y}=-1+\dfrac{-2x}{y-x}$ 得，当 $n\geqslant 1$ 时，

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=(-2x)\cdot(-1)\cdots(-n)\cdot(y-x)^{-n-1}=(-1)^n(n!)\frac{2x}{(y-x)^{n+1}}$$
$$=n!\cdot\frac{2(x-y)+2y}{(x-y)^{n+1}}=2\cdot n!\cdot\Big((x-y)^{-n}+y(x-y)^{-n-1}\Big),$$

所以，对于 $m\geqslant 1$,

$$\frac{\partial^{n+m}z}{\partial x^m\partial y^n}=2\cdot n!\Big((-n)\cdots(-n-m+1)(x-y)^{-n-m}$$
$$+y\cdot(-n-1)\cdots(-n-m)(x-y)^{-n-m-1}\Big)$$
$$=(-1)^m 2\cdot(n+m-1)!\frac{nx+my}{(x-y)^{n+m+1}}.$$

从而

$$\frac{\partial^{2019}z}{\partial x^{1010}\partial y^{1009}}=-2\cdot 2018!\cdot\frac{1010x+1009y}{(x-y)^{2020}}.$$

7. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+3}x^{4n+3}$ 的收敛域以及和函数，从而计算 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+3}$.

解: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4n+3}\right)^{1/n}=1$, 所以此级数的收敛半径为 1. 由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4n+3}$ 收敛，所以它的收敛域为 $[-1,1]$. 设此幂级数和函数为 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$。由 Abel 第二定理可知，此幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 f, 因此 f 在 $[-1,1]$ 上连续。对任意的 $x\in(-1,1)$, 有

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+2}=\frac{x^2}{1+x^4}.$$

又因为 $f(0)=0$, 所以当 $x\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}
f(x)&=\int_0^x\frac{t^2}{1+t^4}dt=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(1+\frac{1}{t^2})+(1-\frac{1}{t^2})}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+2}d\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t+\frac{1}{t})^2-2}d\left(t+\frac{1}{t}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

当 $x\in(-1,0)$ 时，

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t-\frac{1}{t})^2+2}d\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{(t+\frac{1}{t})^2-2}d\left(t+\frac{1}{t}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

从而由 f 的连续性得

$$f(1)=\lim_{t\to1-}f(t)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)+\frac{\pi}{4\sqrt{2}},$$

$$f(-1)=\lim_{t\to-1+}f(t)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

8. 设函数 $u=u(x,y)$ 为二阶连续可微函数，满足 $u(x,2x)=x$, $u_x(x,2x)=x^2$ 和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{8.1}$$

求 $u_{xx}(x,2x)$, $u_{xy}(x,2x)$ 与 $u_{yy}(x,2x)$.

解: 对 $u(x,2x)=x$ 两边求 $\dfrac{d}{dx}$ 得 $u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1$. 注意到 $u\in C^2$, 所以 $u_{xy}=u_{yx}$. 再对 $u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1$ 两边求 $\dfrac{d}{dx}$ 得

$$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)+4u_{yy}(x,2x)=0. \tag{8.2}$$

对 $u_x(x,2x)=x^2$ 求两边求 $\dfrac{d}{dx}$ 得

$$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x. \tag{8.3}$$

由 (8.1), (8.2), (8.3) 解得

$$u_{xx}(x,2x)=u_{yy}(x,2x)=-\frac{4}{3}x,\ \ u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

阅卷人	
得　分	

三、**解答题** (**每题** 10 **分，共** 20 **分**)

9. (1) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 讨论函数列 $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^\alpha x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一致收敛性。

(2) 设 $a < b$ 为实数, 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在区间 $[a,b]$ 上的一致收敛性。

解: (1) 当 $\alpha = 0$ 时，$f_n(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, 因此 f_n 一致收敛于函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.
当 $\alpha > 0$ 时，因为 $1+n^\alpha x^2 \geqslant 2n^{\alpha/2}|x|$, 所以 $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2n^{\alpha/2}}$. 因此 $f_n(x)$ 收敛于 0. 并且 $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \leqslant \frac{1}{2n^{\alpha/2}} \to 0$, 所以 $f_n \rightrightarrows 0$, $n \to \infty$.

当 $\alpha < 0$ 时，$f_n(x) \to x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 并且 $|f_n(x) - x| = \dfrac{n^\alpha |x|^3}{1+n^\alpha x^2}$. 所以

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - x| = +\infty \nrightarrow 0.$$

即 f_n 收敛于 $f(x) = x$，但是不一致收敛。

(2) 当 $x_0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ 时，$\cos nx_0 = 1$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx_0}{n}$ 发散。因此，若存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $2k\pi \in [a,b]$ 那么，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx_0}{n}$ 在 $[a,b]$ 上发散。

若不存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得 $2k\pi \in [a,b]$, 那么存在整数 m 使得 $[a,b] \subseteq (2m\pi, 2(m+1)\pi)$. 因为 2π 是 $\cos nx$ 的周期，所以我们不妨假设 $m = 0$, 即 $[a,b] \subseteq (0, 2\pi)$. 因为

$$\sin\frac{x}{2}\cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right),$$

所以，当 $x \in [a,b]$ 时

$$\sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{2N+1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right),$$

即

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \max\left\{\frac{1}{\sin\frac{a}{2}}, \frac{1}{\sin\frac{b}{2}}\right\},$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos nx$ 一致有界，由 A-D 判别法可知，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

10. 设 n,m,k 为正整数，讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^k+y^2}, & x^k+y^2\neq 0\\ 0, & x^k+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性。

解: 当 k 为奇数时，选取 $\alpha=m+1+2n/k$, 则 $\alpha>2$,

$$\lim_{y\to 0+} f((-y^2+y^\alpha)^{1/k},y)=\lim_{y\to 0+}\frac{(-y^2+y^\alpha)^{n/k}y^m}{y^\alpha}=\lim_{y\to 0+}\frac{(-1+y^{\alpha-2})^{n/k}}{y}=\infty,$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处不连续。

当 $k=2\ell$ 为偶数，并且 $n+m\ell\leqslant k$ 时，$f(0,0)=0$，但是

$$\lim_{x\to 0+} f(x,x^\ell)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2}x^{n+m\ell-k}=\begin{cases}1/2, & n+m\ell=k,\\ +\infty, & n+m\ell<k.\end{cases}$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处不连续。

当 $k=2\ell$ 为偶数，并且 $n+m\ell>k$ 时，由平均值不等式得

$$\begin{aligned}x^k+y^2 &=\frac{x^k}{n}+\cdots+\frac{x^k}{n}+\frac{y^2}{m\ell}+\cdots+\frac{y^2}{m\ell}\geqslant (n+ml)\left(\frac{x^{kn}}{n^n}\cdot\frac{y^{2m\ell}}{(m\ell)^{m\ell}}\right)^{1/(n+m\ell)}\\ &=(n+m\ell)n^{-n/(n+m\ell)}(m\ell)^{-m\ell/(n+m\ell)}(|x|^n|y|^m)^{k/(n+m\ell)}.\end{aligned}$$

因此

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{n^{n/(n+m\ell)}(m\ell)^{m\ell/(n+m\ell)}}{n+m\ell}\left(|x|^n|y|^m\right)^{\frac{n+m\ell-k}{n+m\ell}}.$$

从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$$

即 f 在 $(0,0)$ 处连续。

阅卷人	
得　分	

四、证明题（**每题** 12 **分，共** 24 **分**）

11. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不可微，在 $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 上可微。

证明: 由偏导数的定义可知

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1.$$

假设 f 在 $(0,0)$ 处可微，则有

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),\ (x,y)\to(0,0),$$

即

$$\frac{x^5+y^3}{x^2+y^2}-y=o(\sqrt{x^2+y^2}),\ (x,y)\to(0,0),$$

换句话说，成立

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0.$$

但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5-x^3}{(x^2+x^2)^{3/2}}=2^{-3/2}\neq 0,$$

从而得出矛盾，即假设不成立，得到 f 在 $(0,0)$ 处不可微。

对于任意的 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$, $x_0^2+y_0^2\neq 0$, 因为函数 $g(x,y)=x^2+y^2$ 在 (x_0,y_0) 处连续且不为 0，所以函数 $h(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ 在 (x_0,y_0) 处连续。当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^6+5x^4y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2y-2x^5y}{(x^2+y^2)^2},$$

因此 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在 (x_0,y_0) 处连续。从而得到 f 在 (x_0,y_0) 处可微。

12. (1) 设 $1=n_1<n_2<\cdots<n_m<\cdots$ 为一个正整数数列。设 $\{a_m\}_{m\geqslant 1}$ 为一个实数数列。如果对于任意的 $m\geqslant 1$, 都有 $a_{n_m}, a_{n_m+1}, \cdots, a_{n_{m+1}-1}$ 同号，并且级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{n_m}+a_{n_m+1}+\cdots+a_{n_{m+1}-1}\right)$$

收敛，利用 Cauchy 收敛准则证明 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ 收敛。

(2) 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛，其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数。

证明: (1) 令 $A_m=a_{n_m}+a_{n_m+1}+\cdots+a_{n_{m+1}-1}$, 则级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ 收敛，由 Cauchy 收敛准则可知，对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N=N_\varepsilon$ 使得当 $m\geqslant N$ 时，对于任意的非负整数 k 都有

$$|A_m+\cdots+A_{m+k}|\leqslant\varepsilon.$$

对 $n\geqslant n_N$ 以及任意的非负整数 ℓ, 设 $n_m\leqslant n<n_{m+1}$, $n_{m+k}\leqslant n+\ell<n_{m+k+1}$, 那么

$$\begin{aligned}|a_n+\cdots+a_{n+\ell}| &\leqslant |a_n+\cdots a_{n_{m+1}-1}|+|a_{n_{m+1}}+\cdots+a_{n_{m+k}-1}|+|a_{n_{m+k}}+\cdots+a_{n+\ell}|\\ &\leqslant |A_m|+|A_{m+1}+\cdots+A_{m+k-1}|+\cdots+|A_{m+k}|\leqslant 3\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ 收敛。

(2) 当 $m^2\leqslant n\leqslant(m+1)^2-1$ 时, $[\sqrt{n}]=m$, 因此

$$\sum_{n=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=(-1)^m\sum_{n=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{1}{n}.$$

令 $B_m=\sum\limits_{n=m^2}^{(m+1)^2-1}\dfrac{1}{n}$, 当 $m>1$ 时，有

$$B_m=\sum_{n=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{1}{n}\leqslant\int_{m^2-1}^{(m+1)^2-1}\frac{1}{x}dx=\ln\frac{(m+1)^2-1}{m^2-1}=\ln\frac{m}{m-1};$$

当 $m\geqslant 1$ 时，有

$$B_m=\sum_{n=m^2}^{(m+1)^2-1}\frac{1}{n}\geqslant\int_{m^2}^{(m+1)^2}\frac{1}{x}dx=2\ln\frac{m+1}{m}.$$

从而 $B_m > B_{m+1}$ 对任意的 $m \geqslant 1$ 都成立。由 Leibniz 判别法可知 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m B_m$ 收敛。再由 (1) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.