1.1.2 正项级数及其判别法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\rightleftarrows$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: "$\Longrightarrow$" 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 , 则$\{S_n\}$收敛, 故有界.

"$\Longleftarrow$" $\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故$\{S_n\}$ 收敛 , 从而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2. (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数, 且存在 $N \in Z^+$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le k\, v_n$ (常数 $k > 0$), 则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证: 因在级数前加、减有限项不改变其敛散性, 故不妨设对一切 $n \in Z^+$, 都有 $u_n \le k\, v_n$,

令 S_n 和 σ_n 分别表示弱级数和强级数的部分和, 则有

$$S_n \le k\sigma_n$$

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

因此对一切 $n \in Z^+$, 有 $S_n \le k\sigma$

由定理 1 可知, 弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 .

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, 这说明强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例1. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$(常数 $p>0$) 的敛散性.

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

2) 若$p>1$,因为当$n-1\le x\le n$时, $\dfrac{1}{n^p}\le\dfrac{1}{x^p}$, 故

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\,\mathrm{d}x$$

$$\le\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$$

考虑强级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$的部分和

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k^{p-1}}-\frac{1}{(k+1)^{p-1}}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

故强级数收敛,由比较判别法知 p 级数收敛.

$$P-\text{级数}:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{cases}\text{当}p>1\text{时,收敛}\\ \text{当}p\le 1\text{时,发散}\end{cases}$$

重要参考级数: 几何级数, P-级数, 调和级数.

定理：若存在$N\in Z^+$, 对一切$n\ge N$,

$$(1)\ \ u_n\ge\frac{1}{n},\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{发散};$$

$$(2)\ \ u_n\le\frac{1}{n^p}\ \ (p>1),\ \text{则}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ \text{收敛}.$$

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散.

证: 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\geq\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散

根据比较判别法可知, 所给级数发散.

例3. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^3+1}}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n}$;

例4. 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

推论 (比较判别法的极限形式)　设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \qquad (l \neq \infty)$$

$$(l-\varepsilon)v_n \le u_n \le (l+\varepsilon)v_n \qquad (n>N)$$

(1) 当$0<l<\infty$时， 取$\varepsilon<l$, 由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；

(2) 当$l=0$时, 利用 $u_n<(l+\varepsilon)v_n$ $(n>N)$, 由定理2 知 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当$l=\infty$时， 存在 $N\in Z^+$, 当$n>N$时, $\dfrac{u_n}{v_n}>1$, 即

$$u_n>v_n$$

由定理2可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

$\sum u_n, \sum v_n$ 是两个**正项级数**, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$,

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛时，$\sum u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum v_n$ 发散时, $\sum u_n$ 也发散 .

特别取 $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, 对正项级数 $\sum u_n$, 可得**比阶判别法**：

$$\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \quad \begin{cases} p \le 1,\ 0 < l \le \infty \implies \sum u_n \text{ 发散} \\ p > 1,\ 0 \le l < \infty \implies \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

例5. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性 .

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散.

例6. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

$$\ln(1+\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{n^2}$$

解: $\because \lim_{n\to\infty} n^2\ln[1+\frac{1}{n^2}] = \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{n^2} = 1$

根据比较判别法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

例7. 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n}$; (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{2^n-n}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(1-\cos\frac{\alpha}{n})$; (6) $\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$.

例8. 判断正项级数 $\sum \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$, 故可将 $\sum \frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$ 与 $\sum \frac{1}{n^2}$ 进行比较. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty} n^{2(1-n\sin\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty} e^{2(1-n\sin\frac{1}{n})\ln n},$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)\ln n=\lim_{n\to\infty}\left(1-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\ln n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-n^2\cdot o\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{\ln n}{n}\right)=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}e^{2(1-n\sin\frac{1}{n})\ln n}=1.$

根据比较判别法, 原级数收敛.

定理3（比值判别法，D'Alembert）

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$时, 取 ε 使 $\rho+\varepsilon<1$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

知存在 $N\in Z^+$, 当$n>N$时, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon<1$

$$\therefore\ u_{n+1}<(\rho+\varepsilon)u_n<(\rho+\varepsilon)^2u_{n-1}<\cdots$$

$$<(\rho+\varepsilon)^{n-N}u_{N+1}$$

$\sum(\rho+\varepsilon)^k$ 收敛 , 由比较判别法可知 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 当$\rho > 1$或 $\rho = \infty$时,必存在 $N \in Z_+$, $u_N \neq 0$, 当$n \geq N$

时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 从而

$$u_{n+1} > u_n > u_{n-1} > \cdots > u_N$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq u_N \neq 0$, 所以级数发散.

说明: 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

例如, ***p*** – 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$

但 $\begin{cases} p > 1, \text{ 级数收敛 ;} \\ p \leq 1, \text{ 级数发散 .} \end{cases}$

例9. 判别级数下列的敛散性：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!}{10^n};$$

$$(3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^{2n}}{n^2}\ (a\neq 0).$$

例10. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\ (x>0)$ 的敛散性 .

解: $\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}} = x$

根据定理4可知:

当$0<x<1$时, **级数收敛 ;**

当$x>1$时, **级数发散 ;**

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

定理4（Cauchy判别法, 或根式判别法) 设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且存在某正数 N_0 及常数 l,

(i) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \le l < 1, \tag{9}$$

则级数 $\sum u_n$ 收敛;

(ii) 若对一切 $n > N_0$, 成立不等式

$$\sqrt[n]{u_n} \ge 1, \tag{10}$$

则级数 $\sum u_n$ 发散.

证 由(9)式有 $u_n \le l^n$, 因为等比级数 $\sum l^n$ 当 $1 < l < 1$ 时收敛，故由比较原则，这时级数 $\sum u_n$ 也收敛，对于情形(ii), 由(10)式可得

$$u_n \ge 1^n = 1.$$

显然当 $n \to \infty$ 时, u_n 不可能以零为极限, 因而由级数收敛的必要条件可知, 级数 $\sum u_n$ 是发散的.

定理4（Cauchy判别法，或根式判别法） 设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$ (11)

则 (i) 当 $l<1$ 时，级数 $\sum u_n$ 收敛；

(ii) 当 $l>1$ 时，级数 $\sum u_n$ 发散.

证 由(11)式，当取 $\varepsilon<|1-l|$ 时，存在某正数 N，对一切 $n>N$，有 $l-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<l+\varepsilon.$

于是由根式判别法就得到推论所要证明的结论.

例11. 研究级数 $\sum \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\dfrac{1}{2}$,

所以级数是收敛的.

注：若在(11)式中 $l=1$, 则根式判别法仍无法对级数的敛散性做出判断. 例如对 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 和 $\sum\dfrac{1}{n}$, 都有 $\sqrt[n]{u_n}\to 1(n\to\infty)$, 但 $\sum\dfrac{1}{n^2}$ 是收敛的, 而 $\sum\dfrac{1}{n}$ 却是发散的.

例12. 判别下列级数的敛散性：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$； (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$； (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解 (i) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1,$$

由比式判别法，原级数为收敛.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$; (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$,

原级数为收敛.

(iii) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{e}{2}>1$, 原级数发散.

定理6 (Raabe判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l$$

则 (i) $l>1$ 时，原级数收敛；

(ii) $l<1$ 时，原级数发散；

(iii) $l=1$ 时，敛散性不定.

例13. 判别下列级数的敛散性：

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,\qquad \text{收敛.}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{n+1}}-1\right]=\ln 2<1,\qquad \text{发散.}$$

定理5 (积分判别法) 设 f 为$[1,+\infty)$ 上非负减函数, 那么正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

证 由假设 f 为$[1,+\infty)$上非负减函数, 对任何正数 A, f 在$[1, A]$上可积, 于是

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \le f(n-1), n = 2,3,\cdots.$$

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \le f(n-1), n = 2, 3, \cdots.$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \le \int_{1}^{m} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n). \quad (12)$$

若反常积分收敛, 则由(12)式左边, 对任何正整数m, 有

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \le f(1) + \int_{1}^{m} f(x)\mathrm{d}x \le f(1) + \int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

所以, 级数 $\sum f(n)$ 收敛.

反之, 若$\sum f(n)$为收敛级数, 则由(12)式右边, 对任一正整数 $m(>1)$有

$$\int_1^m f(x)\mathrm{d}x \le S_{m-1} \le \sum f(n) = S. \qquad (13)$$

因为$f(x)$为非负减函数, 故对任何正数 A, 都有

$$0 \le \int_1^A f(x)\mathrm{d}x \le S_n < S, n \le A \le n+1.$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad \text{收敛}.$$

用同样方法,可以证明 $\sum f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是同时发散的.

例14.讨论 p 级数 $\sum \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 函数$f(x)=\frac{1}{x^p}$,当$p>0$时在$[1,+\infty)$上是非负减函数, 反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$在$p>1$时收敛, $p\le 1$时发散. 故由积分判别法得$\sum \frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛, 当$0<p\le 1$时发散. 至于$p\le 0$ 的情形, 则可由收敛的必要条件知它也是发散的.

例15. 讨论下列级数的敛散性:

$$\text{(i)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p};\qquad \text{(ii)}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}.$$

解: (i) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}$

当 $p>1$时收敛, $p\le 1$时发散, 根据积分判别法得级数(i) 在 $p>1$时收敛, $p\le 1$时发散.

对于(ii), 考察反常积分 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)(\ln\ln x)^p}$,同样可

推得级数 (ii) 在 $p>1$时收敛, 在 $p\le 1$时发散.

例16. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 收敛于S，并估计以部分和 S_n 近似代替和 S 时所产生的误差 .

解: $\because\ \sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)$

由定理5可知该级数收敛 . 令 $r_n=S-S_n$，则所求误差为

$$0<r_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)^{n+2}}+\cdots$$

$$<\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+\frac{1}{(n+1)^{n+2}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)^n}$$

例17. 用适当的方法判别级数下列的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n(n+1)(n+2)}$;

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^p}{\ln n}(p>0)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}[n(\sqrt[n]{3}-1)]^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}a^n\sin\frac{\pi}{b^n}\ (b>a>0)$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+a^n}{1+b^n}\ (a,b>0)$;