第3章 连续性

3.1.1 函数的连续性概念

与间断点的分类

3.1.2 连续函数的性质

与初等函数的连续性

3.1.3 闭区间上连续函数的性质

函数的一致连续性

3.1.3 闭区间上连续函数的性质

1. 有界性定理
2. 最值定理
3. 零点存在定理
4. 介值定理
5. 一致连续性

1. 有界性定理　　反证法 + 致密性定理

定理1　设$f(x)\in C[a,b] \Rightarrow f(x)$ 在$[a,\ b]$上有界.

证明　设若不然，设$f(x)$在$[a,b]$上无上界.

$$\forall n\in \mathrm{N}_+,\exists x_n\in[a,b],\text{使}\left|f(x_n)\right|>n,$$

$\{x_n\}\subseteq[a,b]$,有收敛子列$\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in[a,b]$.

由f连续,$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$存在.

但由$\left|f(x_{n_k})\right|>n_k\geq k$,有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$,矛盾.

例1. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

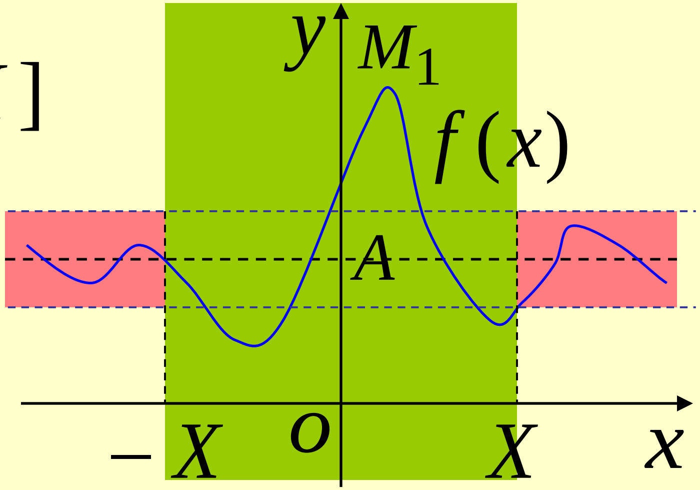
证 令 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, 则给定 $\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

又 $f(x)\in C[-X,X]$, 根据有界性定理, $\exists M_1>0$, 使

$$|f(x)|\le M_1,\quad x\in[-X,X]$$

取 $M=\max\{|A+\varepsilon|,|A-\varepsilon|,M_1\}$

则 $|f(x)|\le M$, $x\in(-\infty,\infty)$



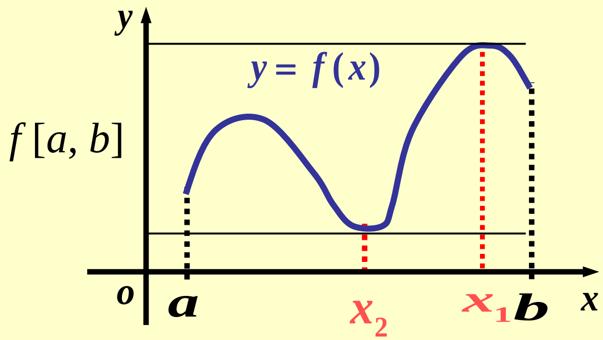
2. 最大值和最小值定理

确界原理+致密性定理+迫敛性。

定理2 设$f(x)\in C[a,b]$,

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b], \quad s.t. \quad \forall x \in [a,b],$

有 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x).$



证法一： 由确界原理，$f[a,b]$ 在$[a,b]$上有上确界M.

只需验证存在 x_1, $s.t.$ $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$ 由上确界定义，

$$\forall n\in N_+, \exists x_n \in [a,b], \quad s.t. \quad M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M$$

$\{x_n\}\subseteq[a,b]$,有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x_1\in[a,b]$,

$\Rightarrow M-\dfrac{1}{n_k}<f(x_{n_k})<M$，令$k\to\infty$可知$f(x_1)=M$.

定理2 设$f(x)\in C[a,b]$, $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]$, $s.t.$ $\forall x \in [a,b]$,

有 $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

证法二： 由确界原理，f 在$[a, b]$上有上确界M.

只需验证存在 x_1, $s.t.$ $f(x_1)=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$

假设$\forall x\in[a,b]$ 都有$f(x)<M$, 令 $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$, $x\in[a,b]$.

则$g(x)$在$[a,b]$上连续，故$g(x)$在$[a,b]$上有界，设G是g的一个上界，

则 $0<g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}\le G$, $x\in[a,b]$.

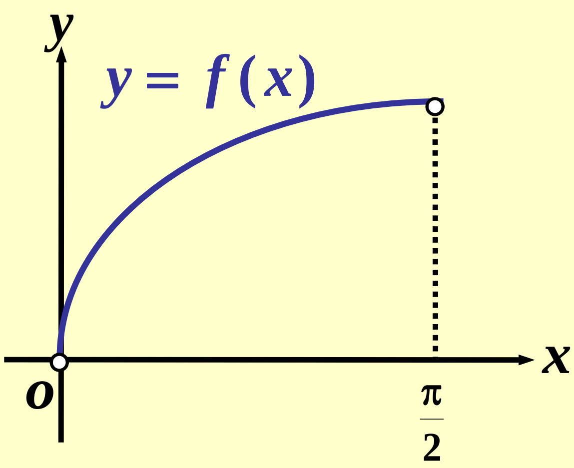
从而推得 $f(x)\le M-\dfrac{1}{G}$, $x\in[a,b]$.

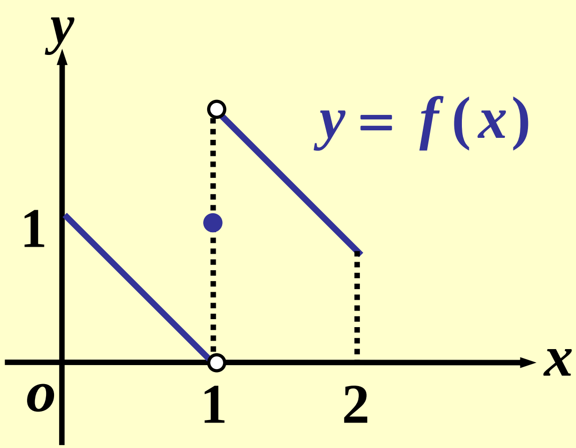
这与M为$f([a,b])$的上确界(最小上界)相矛盾.

所以必$\exists\xi\in[a,b]$, 使$f(\xi)=M$.即f在$[a,b]$上有最大值.

注意: 1.若区间是开区间，定理不一定成立;

2.若区间内有间断点，定理不一定成立.





3. 零点定理

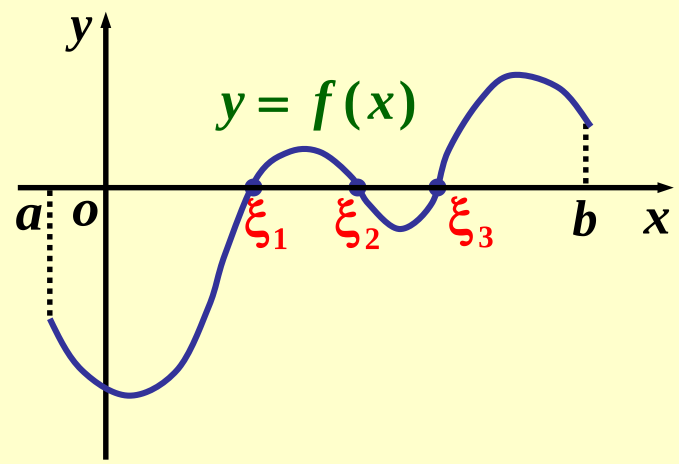
定理3 $f(x) \in C[\,a\,,\,b\,]$，且 $f(a)f(b) < 0$

$$\Longrightarrow \exists \xi \in (\,a\,,\,b\,),\ s.t.\ f(\xi) = 0\,.$$

即方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内至少存在一个实根.

几何解释

连续曲线弧 $y = f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧, 则曲线弧与 x 轴至少有一个交点.

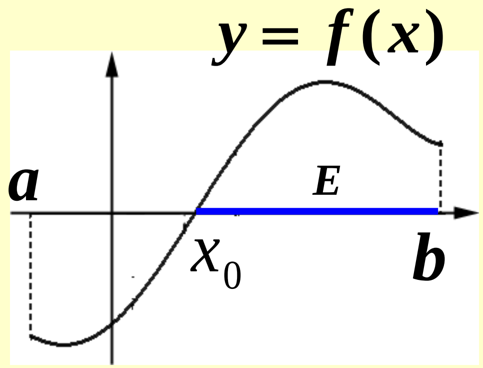


零点定理: 设 f 在闭区间$[a, b]$上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,

至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=0$.

证:（应用确界原理） 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$.

记 $E=\{x\mid f(x)>0, x\in[a,b]\}$.



E非空有界数集. (因为$E\subset[a,b]$, 且$b\in E$).

由确界原理, E有下确界. 设$x_0=\inf E$.

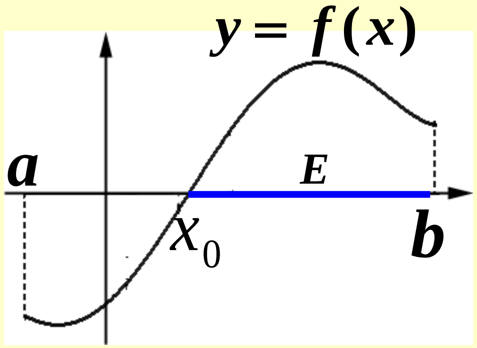
(i) 先证 $x_0\in(a,b)$.

因 $f(a)<0, f(b)>0$.由连续函数的保号性:

存在 $\delta>0$, 使 $f(x)<0, x\in[a,a+\delta); f(x)>0, x\in(b-\delta,b]$.

所以 $x_0\neq a, x_0\neq b$. 即 $x_0\in(a,b)$.

(ii) 再证 $f(x_0) \geq 0$.　$\because x_0 = \inf E$,



$\therefore$ 由确界的定义，$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E, s.t.$

$$x_0 \leq x_\varepsilon < x_0 + \varepsilon.$$

取 $\varepsilon = \dfrac{1}{n}(n = 1, 2, \cdots)$,　得数列 $\{x_n\} \subset E, s.t.$　$x_0 \leq x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

由 $f(x_n) > 0$ 且 $f(x)$ 在 x_0 连续　$\Rightarrow f(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \geq 0$.

(iii) 最后证 $f(x_0) = 0$.　若 $f(x_0) > 0$, 则由局部保号性:

存在 $\eta > 0$，当 $x \in U(x_0; \eta) \subset [a, b]$ 时, 有 $f(x) > 0$.

特别地 $f(x_0 - \dfrac{h}{2}) > 0$　$\Rightarrow x_0 - \dfrac{\eta}{2} \in E$, 这与 $x_0 = \inf E$ 矛盾.

故有 $f(x_0) = 0$.

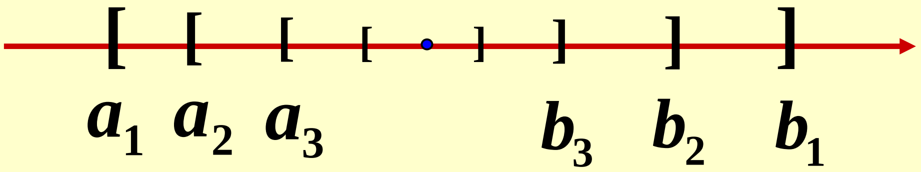
下面用区间套定理证明零点定理.

一、区间套定理

定义1 设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$具有如下性质：

（i） $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \quad n = 1, 2, \cdots.$

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$



则称$\{[a_n, b_n]\}$为闭区间套，或简称区间套.

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1$$

用单调有界原理证明区间套定理

定理1（区间套定理） 若$\{[a_n,b_n]\}$是一个区间套，则在实数系中存在唯一的一点 ξ，使

$$\xi\in[a_n,b_n]\ (n=1,2,\cdots).$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi.$

$$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots\le\xi\le\cdots\le b_n\le\cdots\le b_2\le b_1$$

证:（存在性） 由条件(i) 知 $\{a_n\}$ 为递增有上界数列，依单调有界原理，$\{a_n\}$有极限 ξ，且 $a_n\le\xi, n=1,2,\cdots$

递减有下界数列$\{b_n\}$也有极限，并按区间套的条件(ii)有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$ 且 $a_n\le\xi\le b_n, n=1,2,\cdots$

证:（唯一性） 即证明 ξ 是唯一的.

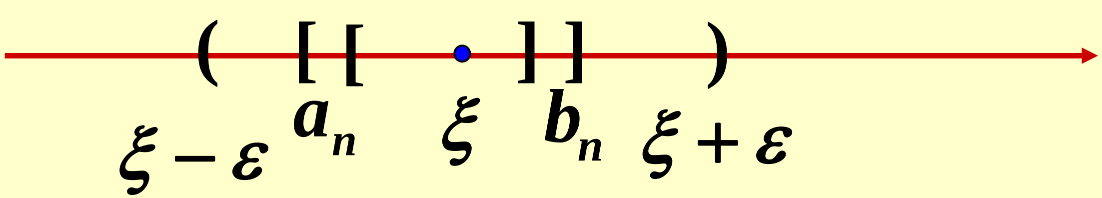
若$\exists\xi'$，满足 $a_n \le \xi' \le b_n$ 则 $|\xi-\xi'|\le b_n-a_n$,

$$\lim_{n\to\infty}|\xi-\xi'|\le\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$$

$$\therefore \xi=\xi'.$$

推论 若 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$ 是区间套$\{[a_n,b_n]\}$ 所确定点， 则$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0, \forall n>N$, 有

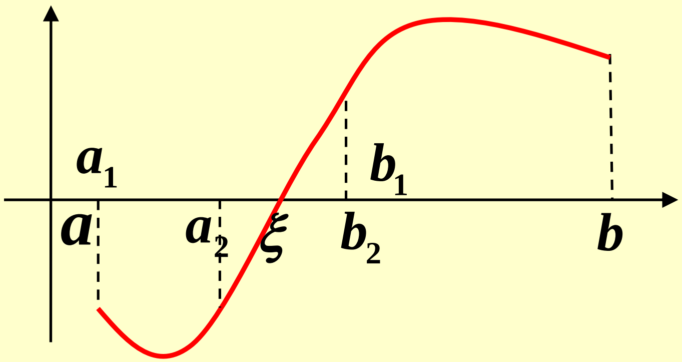
$$[a_n,b_n]\subset U(\xi,\varepsilon).$$



用区间套定理证明零点定理.

(零点定理) 设 $f \in C[a,b]$, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$,

则存在 $\boldsymbol{\xi \in (a,b)}$, 使得 $\boldsymbol{f(\xi)=0}$.



证: 不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$.

设 $[a,b]$ 的中点为 c.

若 $f(c)=0$, 则定理得证.

(以下总假设在中分点处的函数值都不为零)

若 $f(c)<0$, 则取 $[a_1,b_1]=[c,b]$, 否则取 $[a_1,b_1]=[a,c]$,

则 $[a_1,b_1]$ 满足: $f(a_1)<0, f(b_1)>0$, 且$\boldsymbol{b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}}$.

再设$[a_1,b_1]$ 的中点为 c_1 ，重复上述过程，得区间$[a_2,b_2]$.

则 $[a_2,b_2]$满足: $f(a_2)<0, f(b_2)>0$, 且$\boldsymbol{b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}}$.

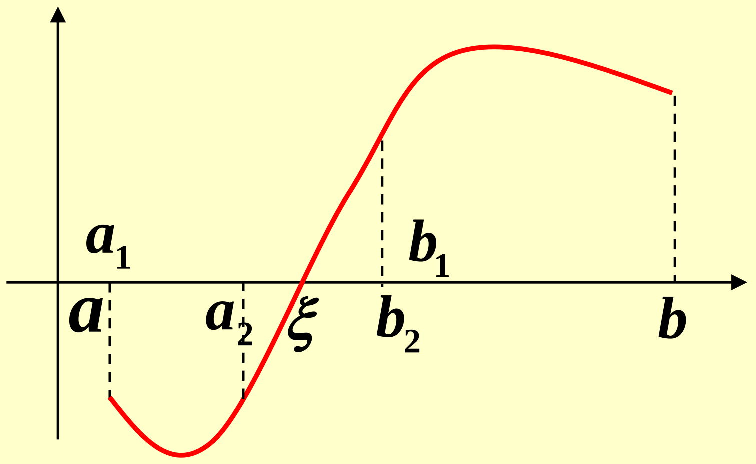
如此下去，得闭区间套：$[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$，它满足：

(1) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}](n=1,2,\cdots)$; **(2)** $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$,

(3) $f(a_n)<0<f(b_n)$.

由闭区间套定理，存在唯一的一点ξ，使

$$a_n\le\xi\le b_n \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi.$$



再由函数 $f(x)$ 的连续性及(3), 有

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(\lim_{n\to\infty}a_n)=f(\xi)\le 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(\lim_{n\to\infty}b_n)=f(\xi)\ge 0.$$

故 $$f(\xi)=0.$$

例2 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根 .

证 显然 $f(x)=x^3-4x^2+1\in C[0,1]$, 又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0$$

说明:

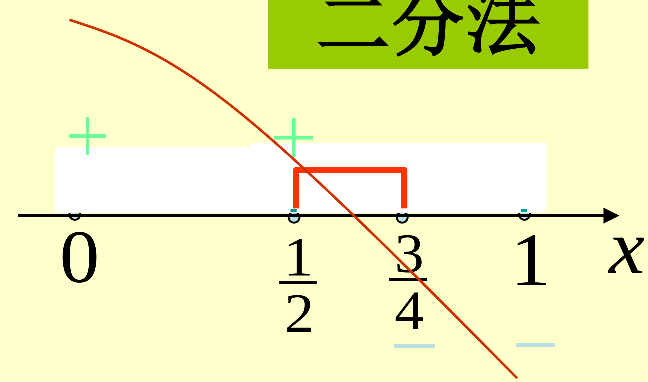
二分法

取 $[0,1]$ 的中点 $x=\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}>0$,

则 $(\frac{1}{2},1)$ 内必有方程的根 ;

取 $[\frac{1}{2},1]$ 的中点 $x=\frac{3}{4}$, $f(\frac{3}{4})<0$,

则 $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ 内必有方程的根 ; $\cdots$ 可用此法求近似根.



例3. 证明任意奇次代数方程必有实根.

证: 设$p(x)=x^{2n+1}+a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}$,

可见$p(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

$$p(x)=x^{2n+1}\left(1+\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\cdots+\frac{a_{2n-1}}{x^{2n}}+\frac{a_{2n}}{x^{2n+1}}\right)$$

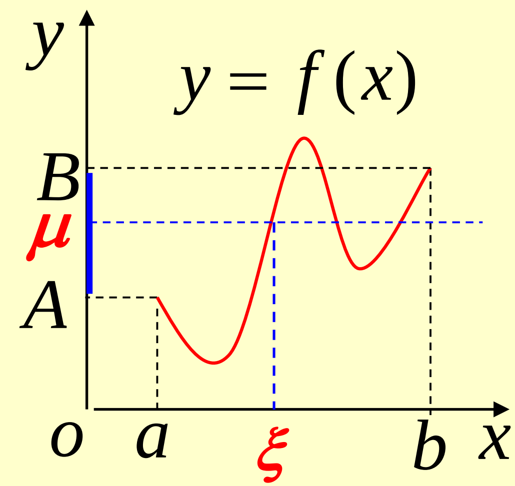
$$\therefore \lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty.$$

故 $\exists a,b\in R,\ s.t.\quad a<b,\ p(a)<0,\ p(b)>0.$

由零点定理$\Rightarrow\exists\xi\in(a,b)$, 使 $p(\xi)=0.$

4.介值定理

定理4 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$，则对 A 与 B 之间的任一数 m，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\mu$.



证 作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\mu$

则 $\varphi(x)\in C[a,b]$，且

$$\varphi(a)\ \varphi(b)=(A-\mu)(B-\mu)<0$$

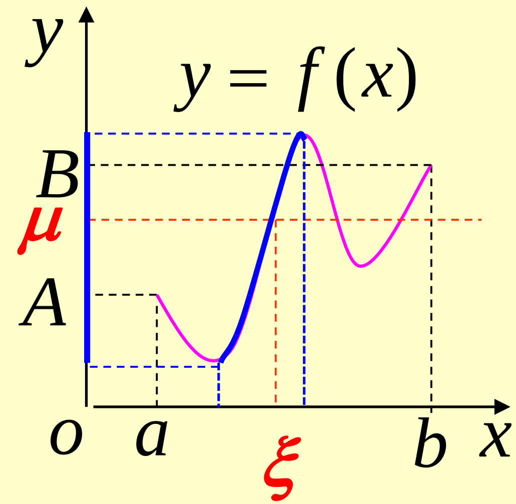
故由零点定理知，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi(\xi)=0$，

即 $f(\xi)=\mu$.

推论1　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

$$(M = f(x_1) \geq f(x))$$

$$(m = f(x_2) \leq f(x))$$



推论2 闭区间上非常数的连续函数的**值域为闭区间**.

$$(f([a,b]) = [m, M])$$

例5. $f \in C(a,b), a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$

求证：$\exists \xi \in (a,b), f(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$

证： 易见$f \in C[x_1, x_n]$,

令$m = \min\limits_{x\in[x_1,x_n]} f(x), M = \max\limits_{x\in[x_1,x_n]} f(x).$

$$m \le \mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \le M$$

$\therefore \exists \xi \in (x_1, x_n)$,使$f(\xi) = \mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$

思考题：某短跑运动员跑完100米用了10秒，证明其中有10米的距离恰好用1秒跑完.

思考题

一、证明方程 $x = a\sin x + b$ ，其中 $a > 0, b > 0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a + b$.

二、若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有 ξ ，使 $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots\ldots + f(x_n)}{n}$.

三、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $a < c < d < b$, 试证明：对任意正数p和q；至少有一点 $\xi \in [c, d]$, 使 $pf(c) + qf(d) = (p + q) f(\xi)$.

5. 函数的一致连续性

连续的定义

$\forall \varepsilon>0,\ \underline{\exists \delta>0},$ 使当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

与x_0有关

是一个局部概念

整体化

一致连续——在某个区间上“一起”连续

一致连续是区间上整体的性质,强调有公共的δ.

连　　续: $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon, x_0).$

一致连续: $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon).$

$\delta = \delta(\varepsilon).$

定义1 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$,总有:

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称$f(x)$ 在 I 上一致连续.

显然, $f(x)$在区间 I 上一致连续

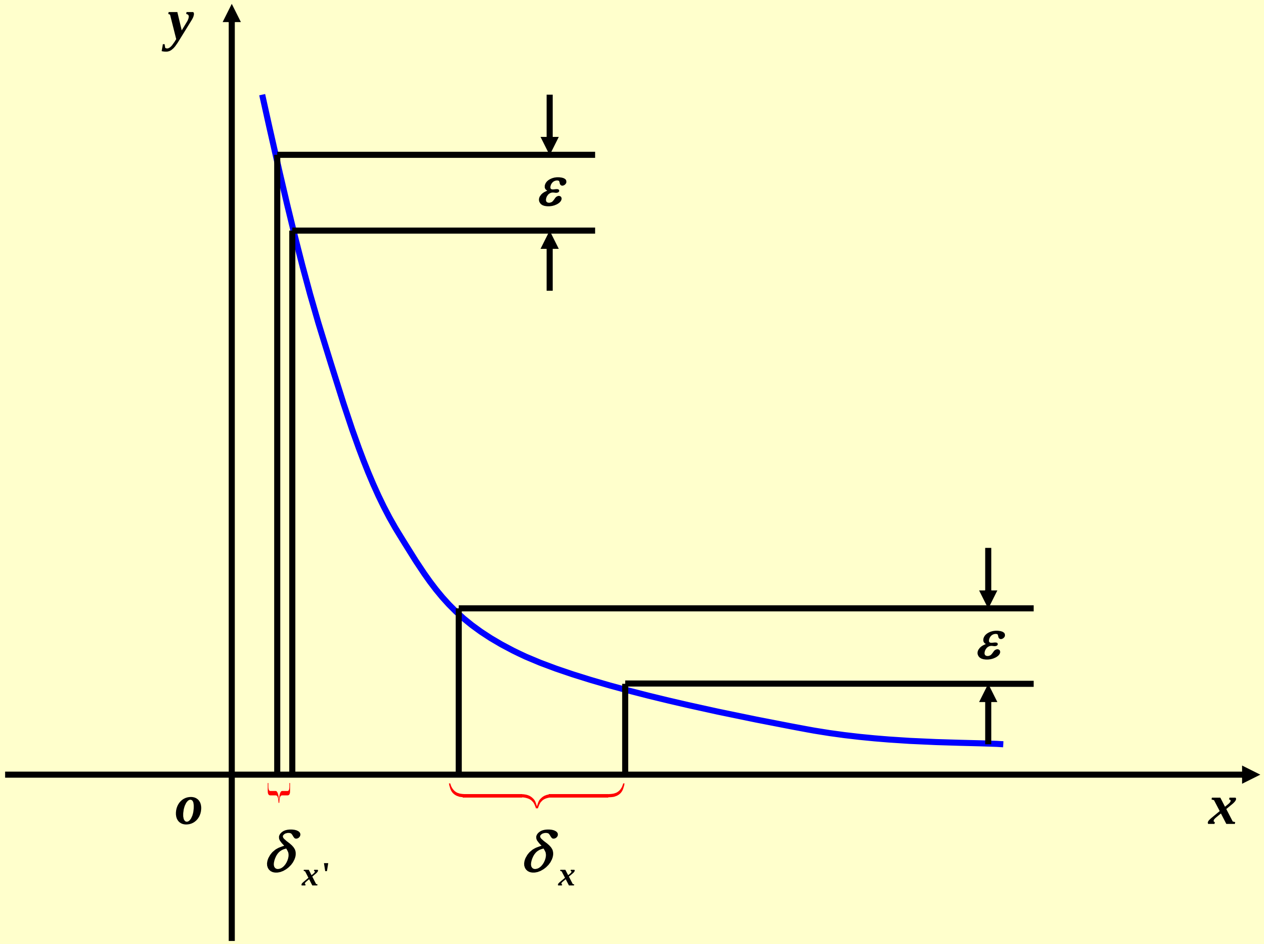
$\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $f(x)$在区间I上连续

直观地说, f 在 I 上一致连续意味着:

不论两点 x'与 x''在 I 中处于什么位置, 只要它们的距离

小于 δ , 就可使 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

几何解释



可以看出，一致连续要求函数变化不要“太陡”

例6 $\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

证： $\forall \varepsilon > 0$,

$$\because \left|\cos x_1 - \cos x_2\right| = \left|-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$$

取$\delta = \varepsilon$ 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 都有

$$\left|\cos x_1 - \cos x_2\right| < \varepsilon$$

$\therefore \cos x$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

$$\boxed{\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\quad.}$$

例7 $f(x)=\dfrac{1}{x}\in C(\ 0,\ 1\ ]$，但不一致连续.

证 因为 $\varepsilon_0=1$，对任意 $\delta>0$，取 $N=[\dfrac{1}{\delta}]\in \mathrm{N}^+$

取点 $x_1=\frac{1}{n}$，$x_2=\frac{1}{n+1}$ $(n>N)$，

则 $$\left|x_1-x_2\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n}<\delta$$

但 $$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|n-(n+1)\right|=1\geq\varepsilon_0$$

这说明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 (0 , 1] 上不一致连续.

f 在 I 上不一致连续 $\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,$

$\exists x_1,x_2,\left|x_1-x_2\right|<\delta$ $s.t.\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\varepsilon_0.$

例8. 证明：$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[\sigma,+\infty)$上一致连续$(\sigma>0)$.

证：$\forall\varepsilon>0$， 对$\forall x_1,x_2\in[\sigma,+\infty)$，要使

$$\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|=\frac{\left|x_2-x_1\right|}{x_1x_2}\le\frac{1}{\sigma^2}\left|x_2-x_1\right|<\varepsilon$$

只需$\left|x_2-x_1\right|<\sigma^2\varepsilon$， 取$\delta=\sigma^2\varepsilon$，

则当$\left|x_2-x_1\right|<\delta$时，必有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|<\varepsilon.$

所以$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$[\sigma,+\infty)$上一致连续.

定理5（Cantor一致连续性定理） 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

即：闭区间上的连续函数都是一致连续的.

证明方法：反证法 + 致密性定理

证 假设 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续 $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathrm{N}_+,$

$$\exists x_n, y_n, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad s.t. \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0 .$$

由于 $\{x_n\} \subset [a,b]$，必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a,b].$$

设 $\{y_{n_k}\}$ 为 $\{y_n\}$ 的任一子列

小结

闭区间上连续函数的性质:

设 $f(x) \in C[a,b]$，则

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;
2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上达到最大值与最小值;
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值;
4. 当 $f(a)f(b) < 0$ 时，必存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = 0$;
5. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

思考题

1. 设 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，$x_i \in [a,b], \lambda_i > 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，证明：$\exists\, \xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi)=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_1)+\cdots+\lambda_n f(x_n).$$

2. 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：$\forall n \in N^+, \exists \xi \in [0,1]$，使得 $f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$.

3. 某短跑运动员跑完100米用了10秒，证明其中必有10米的距离恰好用1秒跑完.

压缩映像原理：

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且满足：

(i) $f([a,b])\subset[a,b]$;

(ii) $\exists k\in(0,1)$, 使得 $\forall\, x,y\in[a,b]$, 有

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le k\left|x-y\right|.$$

则 (1) f 有唯一不动点，即 $\exists|\,\xi\in[a,b]$, $s.t.\ f(\xi)=\xi$.

(2) $\forall\, x_1\in[a,b]$, 由递推公式 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$

定义的数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

注：称满足条件(i)(ii)的映射称为压缩映射，k为压缩常数.

例7. 用压缩映像原理证明以下数列收敛，并求其极限：

(1) $\alpha > 0, x_1 > 0, x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n}\ (n = 1, 2, \cdots).$

(2) $c > 1, x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{c(1 + x_n)}{c + x_n}\ (n = 1, 2, \cdots).$

(3) $0 \le x \le 1, y_1 = \dfrac{x}{2}, y_{n+1} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y_n^2}{2}\ (n = 1, 2, \cdots).$

实数完备性基本定理的等价性

实数完备性的六个基本定理，即：

1. 确界原理（定理1.1.1）；

2. 单调有界定理（定理2.1.7）；

3. 柯西收敛准则（定理2.1.8）；

4. 区间套定理（定理3.2.1）；

5. 聚点定理（定理3.2.2）

6. 有限覆盖定理（定理3.2.3）

在实数系中这六个命题是相互等价的 。

在有理数系中这六个命题不一定成立 。

实数集的完备性基本定理

1. 确界原理：非空数集必有上确界与下确界.

2. 单调有界定理：在实数系中，单调有界数列必有极限.

3. 柯西收敛准则：

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+, \forall n,m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$

4. 区间套定理： 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个区间套, 则在实数系中存在

唯一的一点 ξ， 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots,$

且
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

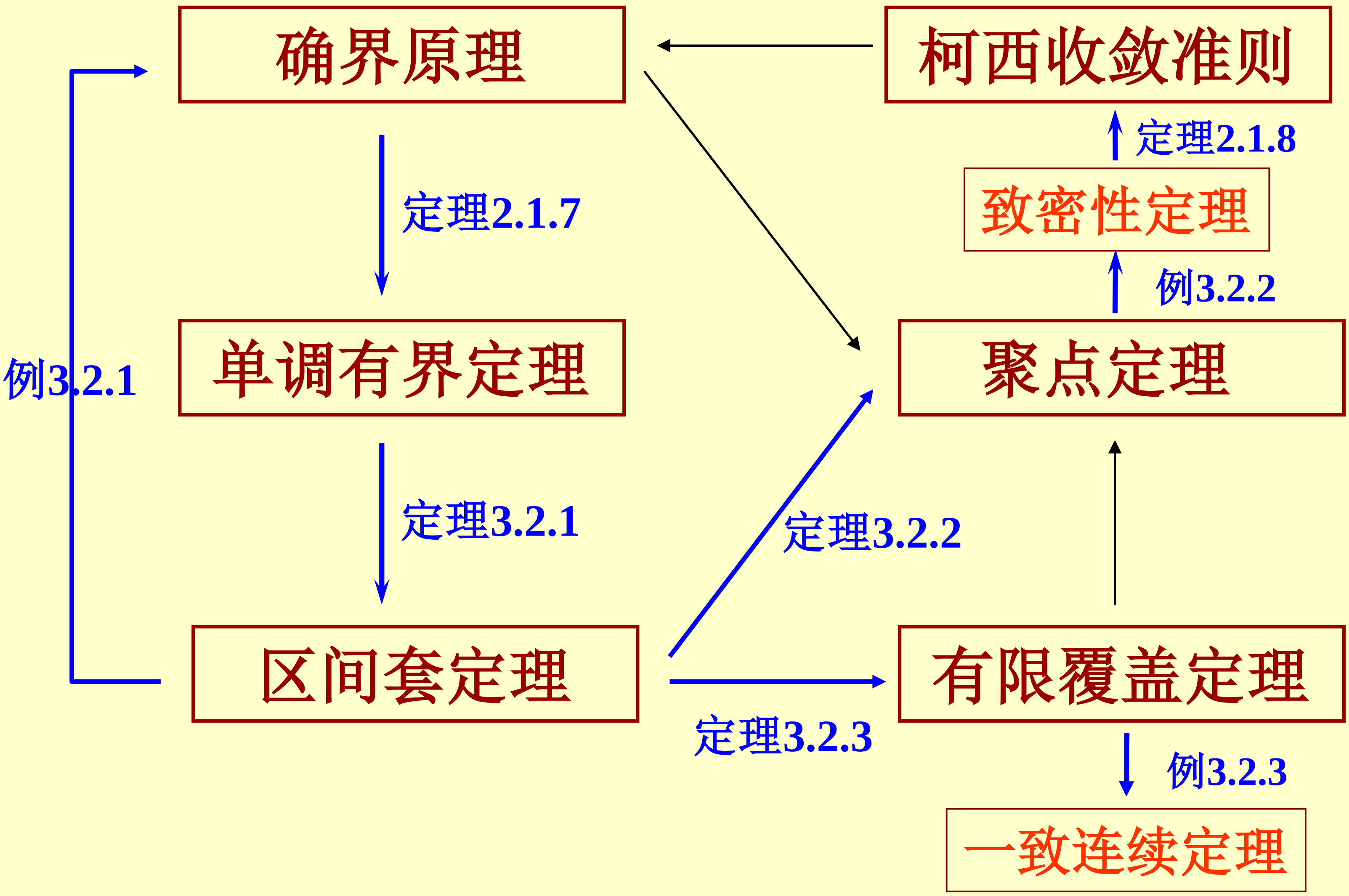
5. 聚点定理(Bolzano-Weierstrass定理)(致密性定理是其特例)：

实数集上的任一有界无限点集S至少有一个聚点.

6. 有限覆盖定理(Heine-Borel定理)：

若H 为闭区间 $[a,b]$的一个(无限)开覆盖, 则从H 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a,b]$.

本教材中实数完备性基本定理的等价性的证明



补充例题

1. 计算： $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

化为指数函数或利用公式

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim(f(x)-1)g(x)} \qquad (1^{\infty})$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x^2)}\ln\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

2. 设 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，$\forall x_1, x_2 \in R$，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明 $f(x)$ 对一切 x 都连续.

提示:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$$

$$=f(x)+f(0)$$

$$=f(x+0)\quad=f(x)$$

3. 设$f \in C[a,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

求证：$f(x)$在$[a,+\infty)$有界.

证明：设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,

$\exists N > a$，使$x > N$时，$|f(x) - A| < 1$.

① $|f(x)| = |f(x) + A - A| \le |f(x) - A| + |A| < 1 + A$.

② 在$[a, N]$上f连续，必有界.

$\therefore \forall x \in [a, N], |f(x)| \le M$.

③ 令$L = 1 + |A| + M$，则对一切$x \in [a,+\infty)$,

总有$|f(x)| \le L$.

4. $f \in C(a,b)$，且 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 存在（包括无穷大）

且异号，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $f(\xi)=0$.

证明： 令 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A, \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = B$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} A & x = a, \\ f(x) & x \in (a,b), \\ B & x = b. \end{cases}$$

$\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，而 $\tilde{f}(a+0)\tilde{f}(b-0) < 0$

$\exists \xi \in (a,b)$，s.t. $\tilde{f}(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) = 0$.

5. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ (p,q\text{为正整数},\ \dfrac{p}{q}\text{为既约真分数})\\ 0, & x=0,1,\text{ 或为区间}(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

在(0,1)内任何无理点都连续，任何有理点处都不连续.

读题：(1) $R(\sqrt{2}/3)=?,R(\sqrt{3}/3)=?,R(\pi/4)=?,R(e/5)=?$

(2) $R(1/9)=?,R(2/9)=?,R(4/9)=?,R(7/9)=?$

$R(3/9)=?,R(6/9)=?$

(3) 使 $R(x)=\dfrac{1}{9}$ 的x有几个? 使 $R(x)>\dfrac{1}{9}$ 的x有几个?

使 $R(x)=\dfrac{1}{9}$ 的x有不会超过8个.

使 $R(x)>\dfrac{1}{9}$ 的函数值为: $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{8},$

使 $R(x)>\dfrac{1}{9}$ 的x不会超过: $1+2+\cdots+7$

(4) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,使 $R(x)>\varepsilon$ 的x至多有几个? (有限个!)

5. 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, \quad (p,\ q\text{为正整数},\ \dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}) \\ 0, & x=0,1,\text{或为区间}(0,1)\text{中的无理数}\end{cases}$$

在(0,1)内任何无理点都连续,任何有理点处都不连续.

证: 先证在有理点不连续.

设 x_0 为(0,1)内的有理点. 以下证 $\lim\limits_{x\to x_0}(R(x)-R(x_0))\neq 0$.

设 $x_0=\dfrac{p}{q}$, 则 $R(x_0)=\dfrac{1}{q}$.

对 $\forall\delta>0$, 在 $U(x_0,\delta)$内总可以找到无理数x, 使得

$$|R(x)-R(x_0)|=\frac{1}{q},$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)\neq R(x_0)$, 故R(x)在点 x_0 不连续.

证: 再证函数在无理点连续. 设 $\xi \in (0,1)$ 为无理点, 则 $R(\xi)=0$.

以下要证: $\lim\limits_{x\to\xi} R(x) = R(\xi) = 0$.

即要证: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x-\xi| < \delta$ 时有

$$|R(x)-R(\xi)| = R(x) < \varepsilon.$$

(i) 当x为无理数时,显然有 $|R(x)-R(\xi)| = 0 < \varepsilon$.

(ii) 当x为有理数时, $|R(x)-R(\xi)| = \dfrac{1}{q}$, 能使 $\dfrac{1}{q} \ge \varepsilon$ 的q只有有限个,

从而使 $R(x) > \varepsilon$ 的有理数 x 也只有限有个, 不妨设为 $x_1, x_2, \cdots x_n$.

这些点与 ξ 的最小距离为: $\delta = \min\{|x_1-\xi|, |x_2-\xi|, \cdots |x_n-\xi|\}$.

对于满足 $|x-\xi| < \delta$ 的有理点 x, 有 $|R(x)-R(\xi)| < \varepsilon$.

故只要x满足 $|x-\xi| < \delta$ 就有 $|R(x)-R(\xi)| < \varepsilon$,

即 $R(x)$在 ξ 连续.