知识点三 动量和能量守恒

【内容预览】

知识体系	具体知识点	解题要点
功与动能定理	恒力的功	1.已知变力关于位置的关系式,求某一段时间内力做的功，积分求解 2.利用动能定理求物体的速度
	变力的功	
	常见力的功	
	功率 $P=\frac{F\cdot dr}{dt}=Fv\cos\ \theta$	
	质点动能定理	
	质点系动能定理	
势能与机械能守恒定律	保守力	1.牢记保守力做功和与其相应的势能的变化的关系 2.根据功能原理求能量变化或得到关系式 3.利用机械能守恒求速度 4.理解能量守恒定律
	势能	
	势能曲线	
	功能原理	
	机械能守恒定律	
	能量守恒定律	
动量与冲量	动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$	1.已知力的随时间变化的表达式,求某一段内的冲量，积分求解 2.根据动量定理求速度 3.根据动量守恒求速度
	冲量 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}t$	
	质点的动量定理	
	质点系的动量定理	
	动量守恒定律	
	完全弹性碰撞	
	完全非弹性碰撞	
	非完全弹性碰撞	

【知识清单】

§3.1 功与动能定理

一、功

1.恒力的功：$A=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=F\Delta r\cos\theta$

2.变力的功：$A=\int_{a(L)}^{b}F\cos\theta ds$

3.常见力的功：
$$\begin{cases}\text{重力的功：} A=mg(h_1-h_2)\\ \text{弹力的功：} A=\frac{1}{2}kx_1{}^2-\frac{1}{2}kx_2{}^2\\ \text{万有引力的功：} A=GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\\ \text{摩擦力的功(在水平面上)：} A=\mu mgs\end{cases}$$

4.功率：$P=\frac{\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}}{dt}=Fv\cos\theta$

二、动能定理

1.质点动能定理：合外力对物体做的功等于物体动能的增量，即 $A=E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$

2.质点系动能定理：质点系动能的增量等于作用于质点系内各质点上的所有力在这一过程中所做功的总和，即 $\sum_i A_i=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i2}{}^2-\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i1}{}^2$

§3.2 势能与机械能守恒定律

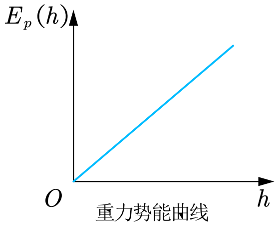
一、保守力与势能

1.做功与物体的运动路径无关，只与物体的始末位置有关的力称为保守力，否则称为非保守力：
$$\begin{cases}\oint_L \boldsymbol{F}_{保}\cdot d\boldsymbol{r}=0\\ \oint_L \boldsymbol{F}_{非保}\cdot d\boldsymbol{r}\neq 0\end{cases}$$

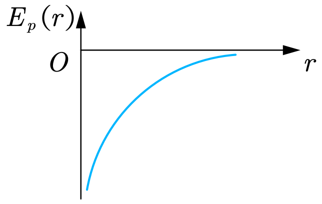
2. 由第一节的结论：
$$\begin{cases}\text{重力的功：} A=mg(h_1-h_2)\\ \text{弹力的功：} A=\frac{1}{2}kx_1{}^2-\frac{1}{2}kx_2{}^2\\ \text{万有引力的功：} A=GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)\end{cases}$$

可以看出重力、弹性力、万有引力都是保守力，而势能是物体在保守力场中与物体位置相对应的能量。
$$\begin{cases}\text{重力势能} E_p=mgh\\ \text{万有引力势能} E_p=-G\frac{Mm}{r}\\ \text{弹性势能} E_p=\frac{1}{2}kx^2\end{cases}$$

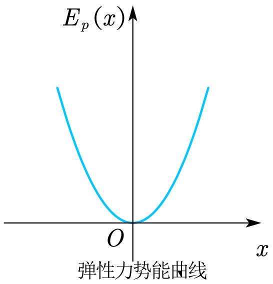
3.势能曲线是表示势能和相对位置关系的图形。常见的势能曲线如图：



重力势能曲线



万有引力势能曲线



弹性力势能曲线

注意：在一维情况下，按势能的定义，保守力$F_{保守}$在位移dx上的元功等于势能增量的负值，即$dA=F_{保守}dx=-dE_p$或$F_{保守}=-\frac{dE_p}{dx}$；所以保守力做正功，相应的势能减小，保守力做负功，相应的势能增大。

二、功能原理和机械能守恒定律

1.**功能原理**：$A_{外力}+A_{非保守内力}=\Delta E=E-E_0$

2.**机械能守恒定律**：在仅有保守力做功时，质点的动能和势能可以相互转化，但动能和势能总和保持不变，即$E_k+E_p=E_{k_0}+E_{p_0}=$常量

易错：在用功能关系的时候，保守力做的功和相应的势能增量不可重复计算；且功能原理只适用于惯性系，涉及的位移、速度等都必须是相对同一个惯性参考系而言的。

三、能量守恒定律

能量既不能消失，也不能创造，只能从一种形式转化为另一种形式，从一个物体传递到另一个物体；对一个封闭系统来说，不论发生何种变化，各种形式的能量相互转化，但它们总和是一个常量。

§3.3 动量与冲量

一、质心、动量与冲量

质心：质量的中心；

1.对于一维的质心位置的算法：$x_C=\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i x_i}{m}$

质心的速度：$v_C=\frac{\sum_i m_i v_i}{m}$

质心运动定理：质心系的质量与其质心加速度乘积等于作用在质点系上所有外力的矢量和。

2.动量：$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=mv_x\boldsymbol{i}+mv_y\boldsymbol{j}+mv_z\boldsymbol{k}$

3.冲量：$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{F}t$

易错：动量和冲量不同于能量，是矢量，所以既有大小又有方向，在回答相关问题的时候，不要忘记其方向。

注意：质心系也是一种参考系，即以质心为参考，**在质心参考系下，系统的总动量为零**，所以以质心为参考系在某些情况下会简化很多做题过程，当然，对质心系熟悉的的同学可以使用质心系解题；如果对质心系不熟则不建议使用，容易出错。

质心的运动状态完全取决于质点系所受的外力，内力不能使质心产生加速度。

二、动量定理与动量守恒定律

1.质点动量定理：$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}(t)dt=\int_{v_1}^{v_2}md\boldsymbol{v}=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1$，当 F 为恒力的时候，$\boldsymbol{F}t=m(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)$

2.质点系动量定理：$\sum_i \boldsymbol{I}_i=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0$

3.动量守恒定律：如果系统不受外力作用，或所受外力的矢量和为 0 时，系统的总动量保持不变，即 $\boldsymbol{p}=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=$ 常矢量

注意：质点系的动量定理和质点系的动能定理略有不同：质点系的动能定理等式左边是外力做功加非保守内力做功，而质点系动量定理等式左边只有外力的冲量，没有任何内力的冲量；也就是说，**质点系的内力可能会引起系统能量的变化，但质点系的内力却一定不会引起质点系动量的变化**。

三、碰撞

1.完全弹性碰撞：系统机械能守恒的碰撞是完全弹性碰撞。根据完全弹性碰撞的性质可列出如下两个方程：

$$\begin{cases} m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2 \end{cases}$$

两个式子变形得到：
$$\begin{cases} m_1(v_1-v_1')=m_2(v_2'-v_2) \\ m_1(v_1-v_1')(v_1+v_1')=m_2(v_2'-v_2)(v_2'+v_2) \end{cases}$$

由此得到一个重要的关系式：$v_1+v_1'=v_2+v_2'$

结合这个关系式和动量守恒可推出：

$$\begin{cases} v_1'=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)=v_C-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \\ v_2'=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}+\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2)=v_C+\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \end{cases}$$

现对结果进行分析：

a)若 $m_1=m_2$，则 $v_1'=v_2, v_2'=v_1$，即**质量相等的两球相撞，碰后两球交换速度**；

b)若 $m_1\ll m_2$，且 $v_2=0$，则 $v_1'\approx -v_1, v_2\approx 0$，即**轻球撞静止的重球时，重球不动而轻球以原速率返回**；

c)若 $m_1\gg m_2$，且 $v_2=0$，则 $v_1'\approx v_1, v_2'\approx 2v_1$，即**重球撞静止的轻球的时候，重球的速度几乎不变，而轻球的速度变为原来重球速度的两倍**。

2.完全非弹性碰撞：碰后两个物体不分开，以相同的速度一起运动，此时：

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=v_C$$

3.非完全弹性碰撞：碰撞后两个物体分开，碰撞过程有动能损失。

4.恢复系数e：实际上，实验证明，对于材料一定的两个球，$\frac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2}=e$，是一个常数，仅和两个球的材料性质有关。显然，对于完全弹性碰撞，$e=1$；对于完全非弹性碰撞，$e=0$；对于非完全弹性碰撞，e介于0和1之间。此时，两小球的速度为：

$$\begin{cases} v_1'=v_1-\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(1+e)(v_1-v_2) \\ v_2'=v_2+\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(1+e)(v_1-v_2) \end{cases}$$

5.斜碰：两物体碰撞前后的运动方向不在两物体的连心线上时，这类碰撞叫斜碰。对于斜碰，只要分沿连线方向和垂直连线方向进行分析即可。

☞注意：在引入恢复系数之后，可以计算碰撞过程中，动能的损失为$\Delta E=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(v_1-v_2)^2$，其中$\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$称为折合质量；显然，完全非弹性碰撞是动能损失最大的一种碰撞。

对于完全弹性碰撞后的速度的推导过程最好记住，这也是解方程的一种方法，而且记住这种方法可以在考试中更灵活地应对多变的题目。

【常考题型】

题型 1：功与能量

1.学会利用积分求变力做功；

2.学会根据动能定理、功能关系和机械能守恒定律解题；

3.理解能量守恒定律。

例 3-1 一个质量为$m=10$ kg的物体，在合外力$F=5+4x$(SI)作用下，沿x轴作直线运动。已知在$x_A=1.0$ m处，物体的速度为$v_A=2.0$ m/s。求：

（1）当物体从A处运动到B处（$x_B=10.0$ m）的过程中，合外力所做的功；

（2）物体在B处的速率。

解：（1）显然这是变力做功问题，所以积分求解：$A=\int_{1.0}^{10.0}(5+4x)dx=243$ J

（2）根据质点的动能定理 $A=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$

可得物体到达B处的速率为 $v_B=\sqrt{\frac{2A}{m}+v_A^2}=7.25$ m/s

例 3-2 如图 3.1 所示：一个劲度系数为k的轻质弹簧，上端固定，下端挂一个质量为m的重物。先用手将重物托住，使弹簧保持原长。然后突然放手，使重物从静止开始运动。试求：

（1）当弹簧伸长量为x时，物体的运动速度；

（2）弹簧的最大伸长量。

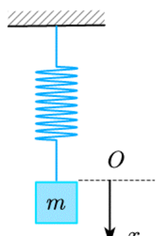


图 3.1

解：以弹簧、重物和地球为系统，则当托住重物的支持力撤去之后，系统内只有重力和弹力做

功，没有外力和非保守力做功，所以此时该系统的机械能是守恒的。

（1）根据机械能守恒：$$mgx=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

所以 $$v=\sqrt{-\frac{k}{m}x^2+2gx}$$

（2）弹簧达到最大伸长量的时候，速度为 0，所以

$$\sqrt{\frac{k}{m}x^2-2gx}=0\Rightarrow x=\frac{2mg}{k}$$

✦**解题技巧**：功能关系、动能定理和机械能守恒实际上没有本质上的差别，只是理解不同，比如：mgh 在动能定理中是重力做功，在机械能守恒中是重力势能，所以做题时看个人习惯，只要记得有了保守力做功就不要再有相应的势能就可以了。

☞**注意：伸长量最大的地方速度为零，速度最大的地方加速度为零。**

题型 2：冲量和动量

1.掌握动量定理和动量守恒定律；　2.记住碰撞的相应的结论

例 3-3 运动员跳蹦床，假设 60*kg* 的人从离水平网 3.2*m* 高处自由落下，着网后沿竖直方向回到 5*m* 高处，接触时间为 1.2*s*，设网对人施加恒力，求此力的大小。

解：

下降阶段：$mgh_1=\frac{1}{2}mv_1^2-0$　　上升阶段：$mgh_2=\frac{1}{2}mv_2^2-0$

根据冲量定理：$$(F-mg)\Delta t=m(v_2-(-v_1))$$

得：$$F=1500\ N$$

易错：应用动量定理的时候，等式右边的 $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$ 要注意两者的方向，原式是矢量相减，我们在进行标量运算的时候，**若两者方向相反，要大小相加**。这个时候式中的重力很容易被忽略掉，造成失分，要牢记等式左边的 $\boldsymbol{F}$ 是指的物体所受的合外力。

例 3-4 如图 3.2 所示，在光滑水平面上放有一质量为 m_0 的直角三角形柱体，在其斜面上又放一个质量为 m 的小直角三角形柱体。m_0 的水平直角边为 a，m 的水平直角边的边长为 b，两者接触面的倾角为 θ。开始时，m 静止于 m_0 的顶端，然后由静止开始沿 m_0 的斜面向下滑动。试求当 m 的下边缘滑到水平面时，m_0 在水平面上移动的距离。

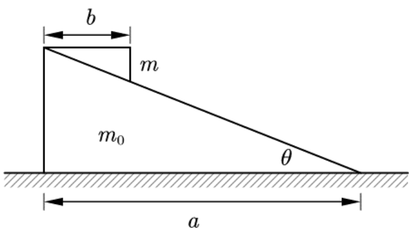


图 3.2

解：以这两个物体为一个系统，因为地面没有摩擦力，所以在水平方向上，系统动量守恒：$m_0u=mv$

其中 u,v 是小物体滑到底端时候两物体水平方向上的速度，所以有：$m_0u\Delta t=mv\Delta t$

积分得：$m_0x_1=mx_2$

x_1,x_2 分别是两个物体移动的距离，根据相对运动可以知道：$x_1+x_2=a-b$

所以：$$x_1=\frac{m}{m+m_0}(a-b)$$

例 3-5 如图 3.3 所示，在光滑桌面上，质量分别为m_1，m_2的两个物块之间连有劲度系数为k的轻弹簧，开始时静止。质量为m的子弹以v_0射入木块 1，不考虑子弹在木块 1 中的时间。

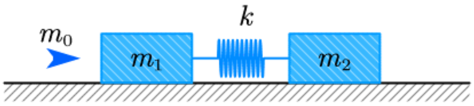


图 3.3

（1）试分析说明该系统之后是如何运动的；

（2）求弹簧的最大的压缩量；

（3）求木块 2 的最大速度和最小速度。

解：（1）子弹飞入瞬间，1 物体获得一个速度，开始向右运动，压缩弹簧，开始减速，然后 2 物体受力开始加速运动，直到两物体速度相等，两者靠得最近，弹簧的压缩量最大，然后弹簧开始伸长，当两物体再次速度相等的时候，弹簧的伸长量最大。之后如此反复，整体向前移动，同时弹簧一伸一缩。

（2）根据（1）的分析，当两者速度相等时候，弹簧的压缩量最大，根据动量守恒：

$$m_0v_0=(m_0+m_1+m_2)v$$

在子弹射入 1 物体的过程里动量守恒：$m_0v_0=(m_0+m_1)v'$

根据能量守恒：
$$\frac{1}{2}(m_0+m_1)v'^2=\frac{1}{2}(m_0+m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2$$

得：
$$x_m=m_0v_0\sqrt{\frac{m_2}{k(m_0+m_1)(m_0+m_1+m_2)}}$$

（3）弹簧处于原长的时候，即没有弹力的时候，速度是取最大值或最小值，此时：

$$\frac{1}{2}(m_0+m_1)v'^2=\frac{1}{2}(m_0+m_1)v_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\,2}$$

$$m_0v_0=(m_0+m_1)v_1+m_2v_2$$

得到：
$$v_2=0\text{或}v_2=\frac{2m_0v_0}{m_0+m_1+m_2}$$

这就是最小速度和最大速度。

✦解题技巧：前两问不是很难，第三问在解方程的时候有一定的难度，这时就用到了求解完全弹性碰撞碰后速度的方程时使用的方法，这样就将二次方程化为了一次方程，简单了许多；但是注意，在化简过程中，$\begin{cases}(m_0+m_1)(v'-v_1)(v'+v_1)=m_2v_2^{\,2}\\(m_0+m_1)(v'-v_1)=m_2v_2\end{cases}$不能随便相约，因为速度有可能为 0，如果直接约掉，可能会导致少一个解，这个解就是最小时速度 0。有兴趣的同学可以类比分析讨论一下 1 物体的最大速度和最小速度。

☞注意：在这种水平面上带有弹簧的碰撞中，弹簧伸长量为 0 时，速度取最大或最小；当两物体速度相等时，弹簧达到最大伸长量或最大压缩量。

【精选习题】