高阶导数思考题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ -x^2, x<0 \end{cases}$，求$f''(x)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0; \\ 0 & x=0. \end{cases}$ 求$f'(x)$, $f''(x)$. 又$f^{(n)}(0)=?$

3. 设多项式$p(x)$只有实零点, 求证:

$(p'(x))^2\geq p(x)p''(x)$对一切$x\in R$成立.

4. 设 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}(n\in N^+)$，求 $f^{(n)}(1)$.

5. 设 $f_n(x)=x^n\ln x(n\in N^+)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$.

1.解: $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2-0}{x-0}=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=0$

$\Rightarrow f'(0)=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\geq 0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$$

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x-0}{x-0}=-2$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-0}{x-0}=2$

$\Rightarrow f''(0)\nexists$

$$\therefore\quad f''(x)=\begin{cases} 2, & x>0 \\ \nexists, & x=0 \\ -2, & x<0 \end{cases}$$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0; \\ 0 & x=0. \end{cases}$ 求$f'(x)$, $f''(x)$. 又$f^{(n)}(0)=?$

解: 当$x\neq 0$时, $f'(x)=\left(xe^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=e^{-\frac{1}{x^2}}+xe^{-\frac{1}{x^2}}(\frac{2}{x^3})=(1+\frac{2}{x^2})e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0 \qquad \therefore\ f'(x)=\begin{cases}(1+\frac{2}{x^2})e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当$x\neq 0$时, $f''(x)=\left((1+\frac{2}{x^2})e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=(-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5})e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{-\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t+2t^2}{e^{t^2}}=0$$

$$\therefore\ f''(x)=\begin{cases}(-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5})e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

一般地，当$x \neq 0$时，有 $f^{(n)}(x) = P_{3n-1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, n = 1, 2, \cdots$

其中，$P_{3n-1}(t)$为t的$3n-1$次多项式.

$\because f'(0) = 0$，若设 $f^{(k)}(0) = 0$，则有

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} P_{3k-1}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \to \infty} \frac{P_{3k}(t)}{e^{t^2}} = 0$$

$\therefore$由归纳法可知，对一切正整数n, $f^{(n)}(0) = 0$.

3. 设多项式 $p(x)$只有实零点, 求证:

$(p'(x))^2 \geq p(x)p''(x)$对一切$x \in R$成立.

证: 不妨设 $p(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, 其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为实数.

不等式对 $x=a_i(i=1,2,\cdots,n)$显然成立. 当$x\neq a_i$时, 有

$$p'(x)=(x-a_2)\cdots(x-a_n)+(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)+\cdots$$
$$+(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}).$$

$\Rightarrow \dfrac{p'(x)}{p(x)}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i},$ 两边再对x求导, 得

$$\frac{p''(x)p(x)-p'^2(x)}{p^2(x)}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2},$$

$$\Rightarrow p'^2(x)-p(x)p''(x)=p^2(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2}>0,$$

综合起来有 $p'^2(x)\geq p(x)p''(x)$.

4. 设 $f(x)=(1+\sqrt{x})^{2n+2}(n\in N^{+})$, 求 $f^{(n)}(1)$.

解: 令$g(x)=(1-\sqrt{x})^{2n+2}$, 容易证得 $g^{(n)}(1)=0$. 又由二项式定理得

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{2n+2}C_{2n+2}^{k}(\sqrt{x})^{k}+\sum_{k=0}^{2n+2}C_{2n+2}^{k}(-\sqrt{x})^{k}=2\sum_{k=0}^{n+1}C_{2n+2}^{2k}x^{k}$$

两边求n阶导数，得

$$f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)=2n!C_{2n+2}^{2n}+2(n+1)!C_{2n+2}^{2n+2}x$$

令 $x=1$, 得

$$f^{(n)}(1)=2n!C_{2n+2}^{2n}+2(n+1)!C_{2n+2}^{2n+2}=4(n+1)(n+1)!.$$

5. 设 $f_n(x)=x^n\ln x(n\in N^+)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$.

解: $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$

$$\Rightarrow\quad \frac{f_n'(x)}{n}=f_{n-1}(x)+\frac{1}{n}x^{n-1},$$ 两边再对x求导，得

$$\frac{f_n''(x)}{n}=f_{n-1}'(x)+\frac{n-1}{n}x^{n-2}=(n-1)f_{n-2}(x)+\frac{n-1}{n}x^{n-2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{f_n''(x)}{n(n-1)}=f_{n-2}(x)+\frac{1}{n}x^{n-2},\qquad \cdots$$ 由归纳法可得

$$\Rightarrow\quad \frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{1}{n}.$$ 由此递推，可得

$$\frac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\ln x+1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n},\quad \Rightarrow \frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}=-\ln n+1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}\to\gamma(n\to\infty).$$

其中，γ为欧拉常数.