思考题1

1. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，且对 $\forall x_1$，$x_2 \in R$，都有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

若 $f'(0) = 1$，证明：对 $\forall\, x \in R$，都有 $f'(x) = f(x)$.

证：令 $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$.

若 $f(0) = 0$，则 $\forall x \in R$，有

$$f(x) = f(x+0) = f(x) f(0) = 0, \Rightarrow f'(x) = 0 = f(x).$$

若 $f(0) = 1$，则对 $\forall x \in R$，有

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= f(x) f'(0) = f(x).$$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$ ，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

解： $\because f(x)$在$x=a$可导，$\therefore f$ 在$x=a$ 连续，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\frac{f(a)}{f(a)}=1.$$ 原极限为1^∞型不定式极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}}\right)^{\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}\frac{1}{f(a)}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

3. 试构造一个函数 $f(x)$，它在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可导，

但 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x) \right)$ 处处存在.

答：*Dirichlet*函数.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases} (\alpha>0)$

证明：当 $\alpha>1$ 时，$f'(0)$ 存在；当 $\alpha\leq 1$ 时，$f'(0)$ 不存在.

提示：$\alpha>1$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}=0.$

$\alpha\leq 1$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\sin\frac{1}{x}$不存在（？）.

5. 证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)=K$ ，

$f'_+(a)f'_-(b)>0$ ，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=K$.

提示：不妨设 $f'_+(a)>0,\ f'_-(b)>0.$

由 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$和极限的保号性，$\exists\delta_1>0,$

对$\forall x\in(a,a+\delta_1),\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$

取$x_1\in(a,a+\delta_1)$,则$\dfrac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}>0,\Rightarrow f(x_1)>f(a)=K.$

同理，$\exists x_2\in(b-\delta_2,b)(\delta_2>0)$,使得$f(x_2)<f(b)=K.$

对$g(x)=f(x)-K$在区间$[x_1,x_2]$上用零点定理,即得结论成立.

6. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，数列 α_n,β_n 满足:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=x_0,\quad \alpha_n<x_0<\beta_n\ (n\in N^+)$$

证明: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$

证 首先，容易看到

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

$$=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}. \tag{1}$$

若记 $\lambda_n=\dfrac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}$，则 $\dfrac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}=1-\lambda_n$，且 $0<\lambda_n<1$，$0<1-\lambda_n<1$，式(1)可改写成

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lambda_n\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}.$$

但 $f'(x_0)=\lambda_nf'(x_0)+(1-\lambda_n)f'(x_0)$，故易知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|$$

$$\leqslant\lambda_n\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-f'(x_0)\right|+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$$<\lambda_n\varepsilon+(1-\lambda_n)\varepsilon=\varepsilon.$$

原极限获证.

证法2: $\because f(x)$在x_0可导，由题设，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}=f'(x_0)$

$$\Rightarrow f(\beta_n)=f(x_0)+f'(x_0)(\beta_n-x_0)+o(\beta_n-x_0)\ (n\to\infty)$$

同理 $f(\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)(\alpha_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)\ (n\to\infty)$

$$\Rightarrow f(\beta_n)-f(\alpha_n)=f'(x_0)(\beta_n-\alpha_n)+o(\beta_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|=\left|\frac{o(\beta_n-x_0)+o(\alpha_n-x_0)}{\beta_n-\alpha_n}\right|$$

$$=\left|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}+\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\alpha_n-x_0}\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\right|$$

$$\le\left|\frac{o(\beta_n-x_0)}{\beta_n-x_0}\right|+\left|\frac{o(\alpha_n-x_0)}{\alpha_n-x_0}\right|\to 0\ (n\to\infty)$$

$\therefore$ 原式成立.

思考题2

1. 设 m 为正整数，定义 $f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

(1) m 为何值时, $f(x)$ 在 $x_0=0$ 可导;

(2) m 为何值时，$f'(x)$ 在 $x_0=0$ 连续.

解：（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}$,

易知当$m>1$时，上述极限为0 ，当$m\le 1$时，极限不存在.

所以当$m>1$时，$f(x)$在$x_0=0$可导，且$f'(0)=0.$

当$m\le 1$时，$f(x)$在$x_0=0$不可导.

(2) 当$m>1$时，$f'(0)=0$.　$x\neq 0$时，有

$$f'(x)=\left(x^m\sin\frac{1}{x}\right)'=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}+x^m\cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})$$

$$=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos(\frac{1}{x})$$

当$m>2$时，

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos(\frac{1}{x})=0=f'(0),$$

这时，$f'(x)$在$x=0$连续.

当$m\leq 2$时，$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos(\frac{1}{x})$不存在，

这时，$f'(x)$在$x=0$不连续.

2. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，且 $\forall x, y \in R$ 都有

$$f(x+y)=e^{x} f(y)+e^{y} f(x).$$

若 $f'(0)=e$，求 $f(x)$.

解： 令$x=y=0$，得$f(0)=2f(0)$，$\Rightarrow f(0)=0$. 又

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{x} f(\Delta x)+e^{\Delta x} f(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=e^{x}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}+f(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=e^{x} f'(0)+f(x)=e^{x+1}+f(x)$$

$$\Rightarrow e^{-x}(f'(x)-f(x))=e, \quad (e^{-x} f(x)-ex)'=0$$

$$\Rightarrow e^{-x} f(x)-ex=C, \quad \text{令} x=0 \Rightarrow C=f(0)=0,$$

$$\Rightarrow f(x)=xe^{x+1}.$$

3. 设 $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在且有限，令

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) \quad (n \in N^+),$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ，并利用以上结果计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n^2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

答案：(1) $\frac{1}{2}$;　(2) $\frac{1}{2}$;　(3) $\sqrt{e}$.

证: 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=a$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-a\right|<\varepsilon$，即 $|f(x)-ax|<x\varepsilon$. 取 $N_1=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]+1$，当 $n>N_1$ 时有

$$\begin{aligned}&\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-\frac{a}{2}\right|\\<&\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{a}{n^2}\right|+\cdots+\left|f\left(\frac{n}{n^2}\right)-\frac{na}{n^2}\right|+\left|\frac{n(n+1)a}{2n^2}-\frac{a}{2}\right|\\\leqslant&\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\varepsilon+\left|\frac{n(n+1)a}{2n^2}-\frac{a}{2}\right|=\frac{n(n+1)}{2n^2}\varepsilon+\left|\frac{n(n+1)a}{2n^2}-\frac{a}{2}\right|.\end{aligned}\tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$，对上述 $\varepsilon>0$，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时有

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}<1,\left|\frac{n(n+1)a}{2n^2}-\frac{a}{2}\right|<|a|\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，由 (1) 式知

$$\left|f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-\frac{a}{2}\right|<(1+|a|)\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a}{2}=\dfrac{f'(0)}{2}$.

4. 证明：不存在定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的可导函数 $f(x)$，满足 $f(f(x))=-x^3+x^2+1.$

证：如果这样的 f 存在，我们来求 $f\circ f$ 的不动点，即满足 $f\circ f(x)=x$ 的 x. 由假设 $x=-x^3+x^2+1$，得 $x=1$，这表明 $f\circ f$ 有唯一的不动点 $x=1$. 现设 $f(1)=\alpha$，那么 $f(f(1))=f(\alpha)=1$，因而 $f(f(\alpha))=f(1)=\alpha$，这说明 α 也是 $f\circ f$ 的不动点，因而 $\alpha=1$，即 $f(1)=1$. 在等式

$$f(f(x))=-x^3+x^2+1$$

的两边求导，得 $f'(f(x))f'(x)=-3x^2+2x$，令 $x=1$，即得

$$(f'(1))^2=-1,$$

这是不可能的.