4.3.5 函数的凸性与拐点

一、凸函数的定义

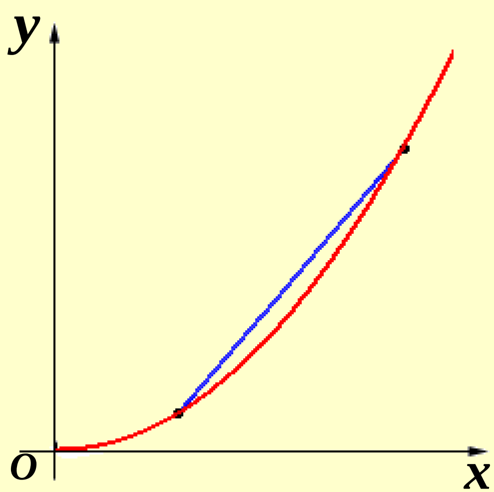
二、函数凹凸性的判别法

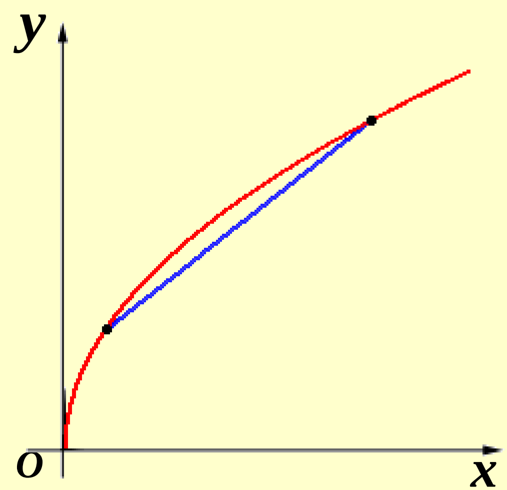
三、凸函数的性质

四、曲线的拐点

一、凸函数的定义

观察以下函数的图象： $f(x)=x^2, f(x)=\sqrt{x}$





称函数 $f(x)=x^2$ 为凸函数. 称 $f(x)=\sqrt{x}$ 为凹函数.

如何刻划这两类函数的特征？

曲线 $y=x^2$上任两点间的弧段总位于这两点连线的下端.

曲线 $y=\sqrt{x}$ 任两点间的弧段总位于这两点连线的上方.

定义1. 设 $f(x), x\in I, (I$为区间). 若 $\forall x_1, x_2\in I, \forall\lambda\in(0,1)$, 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \qquad (1)$$

则称 $f(x)$ 为I上的凸函数. 如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \qquad (2)$$

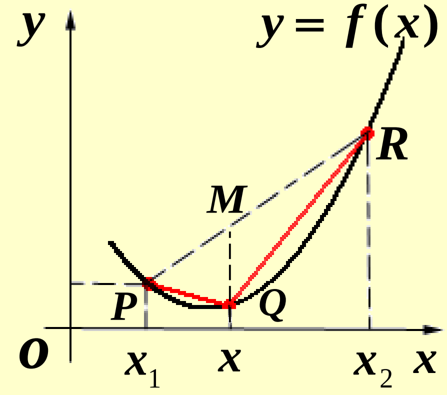
则称 $f(x)$ 为I上的凹函数.

若(1)与(2)中的不等为严格不等式,相应的函数称为严格凸(凹)函数.

$$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \qquad \lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$$

$$Q(\underline{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2},\ \underline{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)})$$

$$M(\underline{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2},\ \underline{\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)})$$



Convex function on an interval.

定义1'（凸函数的等价定义）

设$f(x)$在区间I上连续，若对$\forall x_1, x_2 \in I$，恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

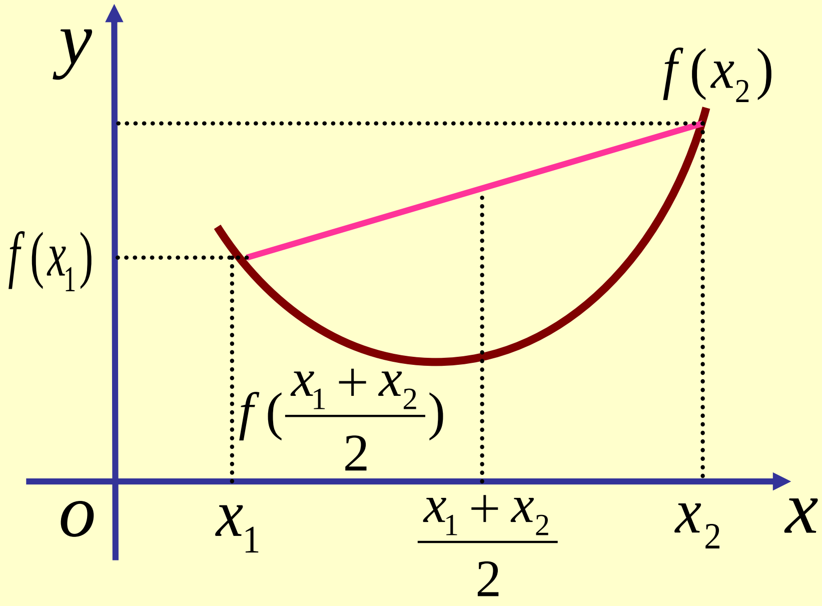
$$\text{(或：}\ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\ \text{)}$$

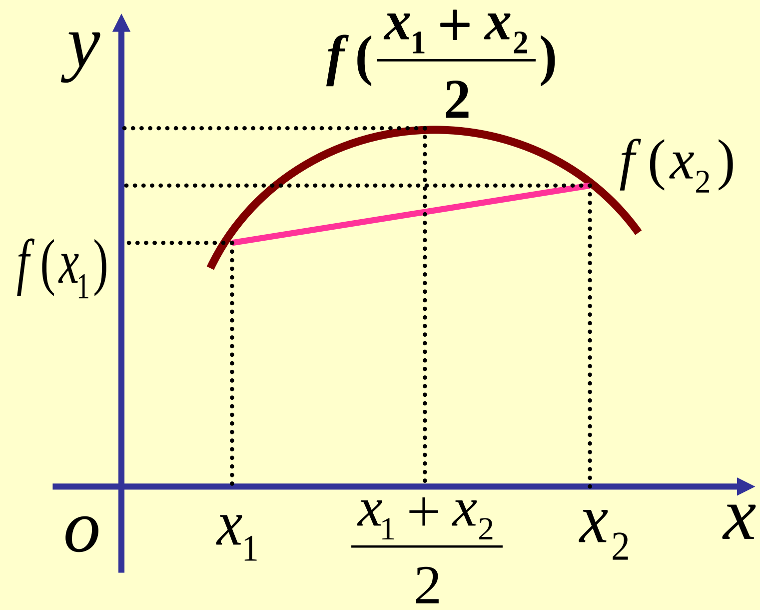
则称$f(x)$是区间I上的凸函数（凹函数）.

若不等号严格成立，则称$f(x)$是I上的严格凸（或凹）函数.

若 $f(x)$为区间I上的凸函数, 则 $-f(x)$为区间I上的凹函数.

几何角度: 曲线$f(x)$向上凸, 则曲线上任何两点$(x_1, f(x_1))$与$(x_2, f(x_2))$间的弦之中点位于曲线上相应点的下面, 即曲线在弦之上. 反之, 曲线向下凸, 则曲线在弦之下.





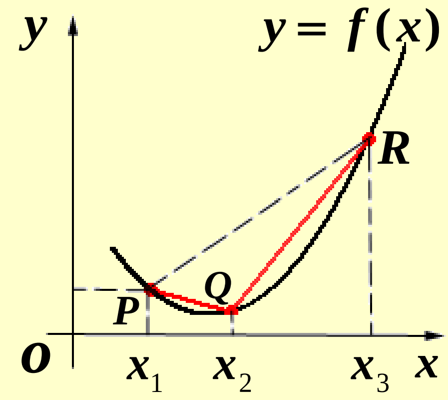
凸函数（图形下凸、凹）

Convex function

凹函数（图形上凸、凸）

Concave function

二、函数凸性的判别法



观察与发现:

$f(x)$ 为I上的凸函数.

取I上任意三点: $x_1 < x_2 < x_3$.

观察三线段的斜率: ***PQ*, *QR*, *PR*.**

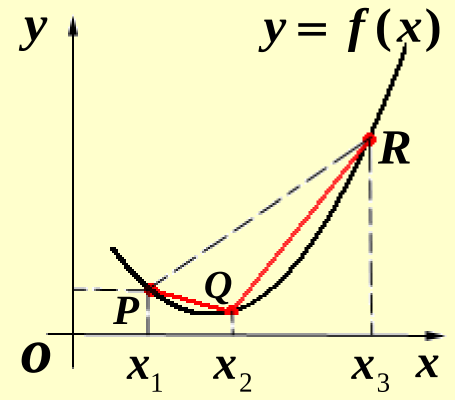
结果:

***PQ*的斜率 < *PR*的斜率 < *QR*的斜率**

引理：$f(x)$为I上的凸函数的充要条件是：

对于I上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$



证：(必要性) 只证 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$

记 $\lambda = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则 $0<\lambda<1$，$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$.

由 $f(x)$ 的凸性知：

$$f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3)$$

$$= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \left(1 - \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right) f(x_3)$$

$$= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3)$$

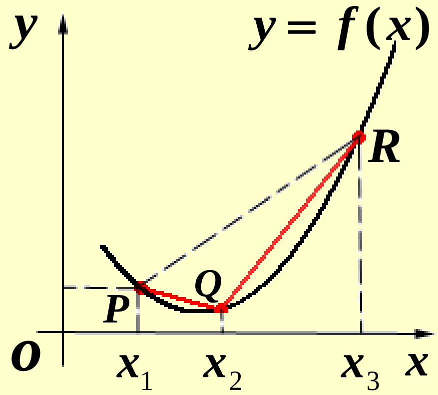
(必要性) 记 $\lambda=\dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$，则 $0<\lambda<1$，$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$.

由 $f(x)$ 的凸性知：

$$f(x_2)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$

$$=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\left(1-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)f(x_3)$$

$$=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$



从而有 $(x_3-x_1)f(x_2)\le(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$

$$(x_3-x_2)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_2)\le(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$

$$(x_3-x_2)f(x_2)-(x_3-x_2)f(x_1)\le(x_2-x_1)f(x_3)-(x_2-x_1)f(x_2)$$

$$(x_3-x_2)[f(x_2)-f(x_1)]\le(x_2-x_1)[f(x_3)-f(x_2)]$$

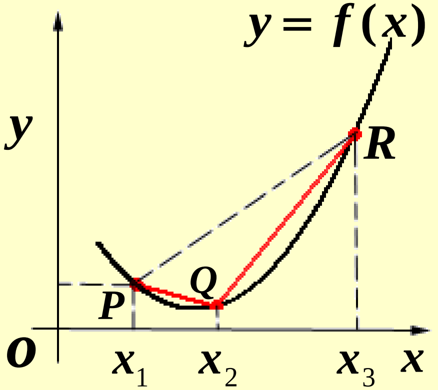
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明：(充分性)

在I上任取两点 $x_1, x_3(x_1 < x_3)$, 在 $[x_1, x_3]$ 上任取一点

$$x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3, \lambda \in (0,1).$$

即 $\lambda = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$.



由必要性的逆推导过程,可证得

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_3) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_3),$$

故 $f(x)$ 为I上的凸函数.

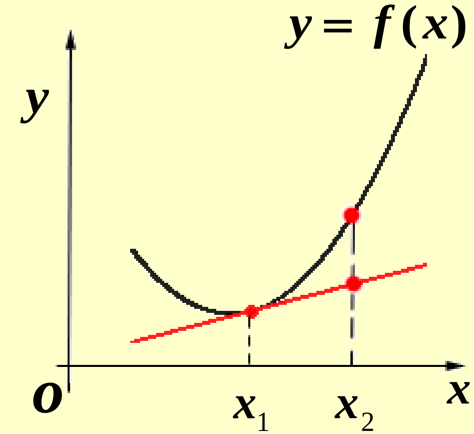
定理1. 设 $f(x)$为区间I上的**可导函数**,则下述三个命题互相等价:

(1) $f(x)$为I上的凸函数;

(2) $f'(x)$为I上的增函数;

(3) 对I上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad (3)$$



(3)的几何意义:

曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_1$ 处的切线方程为

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

(3)式意即曲线上的点 $(x_2, f(x_2))$ 在切线上的点

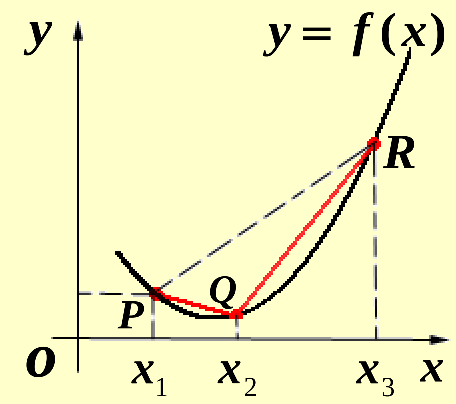
$(x_2, f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1))$ 的上方.

由x_1, x_2 的任意性, 曲线 $y = f(x)$ 总是在它的任一切线的上方.

定理1. 设 $f(x)$为区间I上的可导函数,则下述命题互相等价:

(1) $f(x)$为I上的凸函数;

(2) $f'(x)$为I上的增函数;



证: $(1)\Rightarrow(2)$ 有引理可知, 若

$x_1 < x_2, h > 0,$ 则有

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}.$$

若 $f(x)$为区间I上的可导函数,则

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} = f'(x_2),$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_1+(-h))-f(x_1)}{(-h)} = f'(x_1).$$

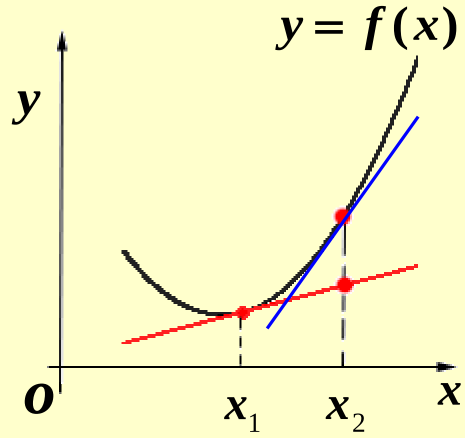
进而得 $f'(x_1)\le f'(x_2)$.

定理1. 设 $f(x)$为区间I上的可导函数,则下述命题互相等价:

(2) $f'(x)$为I上的增函数;

(3) 对I上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad (3)$$



证: $(2) \Rightarrow (3)$.

在区间$[x_1, x_2]$上应用拉格朗日中值定理,得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \xi \in (x_1, x_2).$$

因 $f'(x)$ 在I递增,故有 $f'(\xi) \geq f(x_1)$, 因而得

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

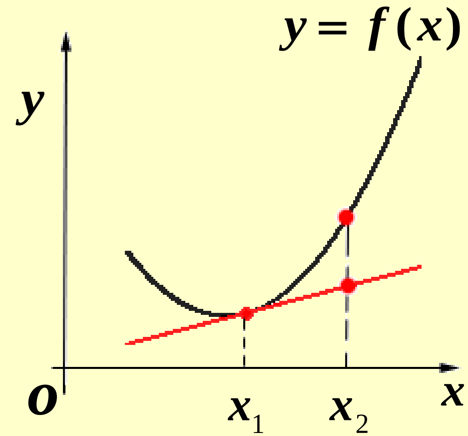
当 $x_1 > x_2$ 时,类似可证仍然成立.

定理1. 设 $f(x)$ 为区间I上的可导函数, 则下述命题互相等价:

(1) $f(x)$ 为I上的凸函数;

(3) 对I上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \ge f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad (3)$$



证: $(3) \Rightarrow (1)$ 设 x_1, x_2 为I上任意两点，记

$$x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, 0 < \lambda < 1.$$

由假设条件(3), 得 $f(x_1) \ge f(x_3) + f'(x_3)(x_1 - x_3)$

$$f(x_2) \ge f(x_3) + f'(x_3)(x_2 - x_3)$$

注意到 $x_1 - x_3 = (1-\lambda)(x_1 - x_2)$, $x_2 - x_3 = \lambda(x_2 - x_1)$.

得 $f(x_1) \ge f(x_3) + (1-\lambda) f'(x_3)(x_1 - x_2)$,

$$f(x_2) \ge f(x_3) + \lambda f'(x_3)(x_2 - x_1).$$

分别用 $\lambda, 1-\lambda$ 乘上列两式并相加，得

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \ge f(x_3) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

从而 $f(x)$ 为I上的凸函数.

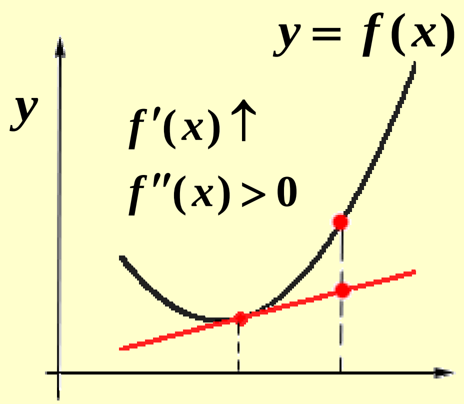
定理1. 设 $f(x)$为区间I上的可导函数,则下述三个命题互相等价:

(1) $f(x)$为I上的凸函数;

(2) $f'(x)$为I上的增函数;

(3) 对I上的任意两点 x_1, x_2, 有

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \qquad (3)$$

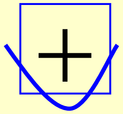


定理2. 设 $f(x)$ 为区间I上的二阶可导函数, 则在I上 $f(x)$ 为凸(凹)函数的充要条件是 $f''(x) \geq 0 (\leq 0), x \in I$.

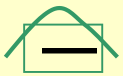
证明：由定理1及函数的单调性定理即得

定理2’. 设函数 $f(x)$ 在区间I 上有二阶导数

(1) 在 I 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 内是严格凸函数；



(2) 在 I 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 I 内是严格凹函数 .



证: $\forall x_1, x_2 \in I$，利用一阶泰勒公式可得

$$f(x_1)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cancel{f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)}+\boxed{\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$$

$\Big\downarrow$ 两式相加

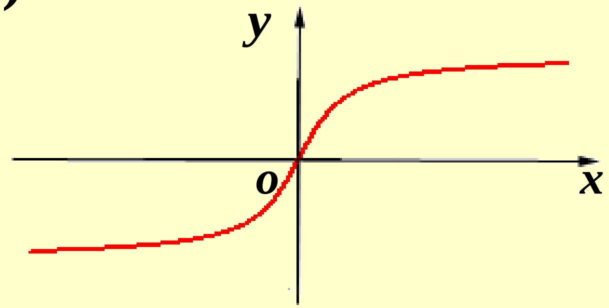
$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\underline{\frac{1}{2!}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]}$$

当$f''(x)\underset{<}{\geq}0$时，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\underset{<}{\geq}f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，说明 **(1)** 成立;

(2) 证毕

例1. 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的凸(凹)性区间.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.



当 $x\le 0$ 时, $f''(x)\ge 0$;

当 $x\ge 0$ 时, $f''(x)\le 0$,

从而在 $(-\infty,0]$ 上 $f(x)$ 为凸函数

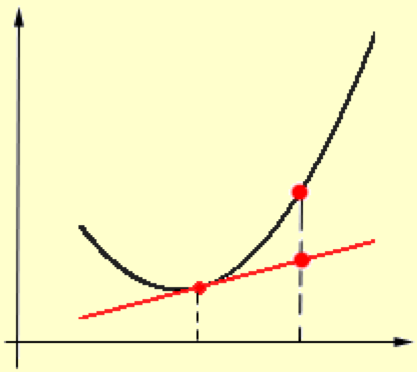
在 $[0,+\infty)$ 上, $f(x)$为凹函数.

三、凸函数的性质

例2. 若函数 $f(x)$为定义在开区间 (a,b)内的可导的

凸函数，则 $x_0 \in (a,b)$ 为 $f(x)$ 的极小值点的

充要条件是 $f'(x_0)=0.$



证：必要性：由费马定理给出.

充分性：

任取 $x \in (a,b), x \neq x_0$. 因$f(x)$为I上的凸函数，故有

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

因 $f'(x_0)=0$，故 $f(x) \geq f(x_0)$,

即 x_0为 $f(x)$ 的极小值点（也是最小值点）.

例3.（Jensen不等式）

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凸函数,则对任意

$$x_i \in [a,b], \lambda_i > 0, (i = 1, 2, \cdots n), \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

有 $$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

思路:用数学归纳法.

证明见华东师大《数学分析》（上册，第三版）Page151，例3.

例4. 证明不等式 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c$，其中 a,b,c 均为正数.

证：设 $f(x)=x\ln x, x>0$, 则

$$f'(x)=\ln x+1, \quad f''(x)=\frac{1}{x},$$

故当 $x>0$ 时 $f(x)$ 为凸函数. 由Jensen不等式有

$$f(\frac{a+b+c}{3}) \le \frac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c)),$$

从而 $\dfrac{a+b+c}{3}\ln\dfrac{a+b+c}{3} \le \dfrac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c),$

又 $\sqrt[3]{abc} \le \dfrac{a+b+c}{3},$

所以 $\dfrac{a+b+c}{3}\ln\sqrt[3]{abc} \le \dfrac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c),$

$$\frac{a+b+c}{3}\ln(abc) \le \ln(a^a b^b c^c), \quad \text{即} \quad (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \le a^a b^b c^c.$$

例5 试证：对 $\forall x>0$、$y>0$，$x\neq y$ 及 $\alpha>1$，有

$$\frac{1}{2}(x^{\alpha}+y^{\alpha})>(\frac{x+y}{2})^{\alpha}.$$

证 令 $f(t)=t^{\alpha}$，则 $f''(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$，

在 $t>0$ 时有 $f''(t)>0$，$\therefore$ 在 $t>0$ 时 f 是凸函数。

$\therefore$ 对 $\forall$ x、$y\in(0,+\infty)$ 且 $x\neq y$，有

$$\frac{1}{2}(f(x)+f(y))>f(\frac{x+y}{2}),$$

即所证不等式成立。

思考题：

1. 证明：当$a_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时，有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

2. 设$0 < x_i < \pi\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 令$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$,

证明：$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sin x_i}{x_i} \le \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n.$

例6. 设 $f(x)$ 为开区间I内的凸函数.证明 $f(x)$ 在I内任一点 x_0 都存在左、右导数.

证明分析：只证 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在的情形.

由引理, 若 $f(x)$ 为I上的凸函数, 对于I上任意三点 $x_1<x_2<x_3$,

有
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

进而当 $0<h_1<h_2$ 时, $\dfrac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}\le\dfrac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}.$

即函数 $F(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 单调递增.

又当 $x'<x_0$ 时, $\dfrac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'}\le\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=F(h)$

即 $F(h)$ 有下界.由单调有界定理可得证.

例6. 设 $f(x)$ 为开区间I内的凸函数.证明 $f(x)$ 在I内任一点 x_0 都存在左、右导数.

证: 设 $0 < h_1 < h_2$, 则有 $x_0 < x_0 + h_1 < x_0 + h_2$(这里取充分小的 h_2, 使 $x_0 + h_2 \in I$).

由引理有
$$\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} \le \frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}.$$

令
$$F(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

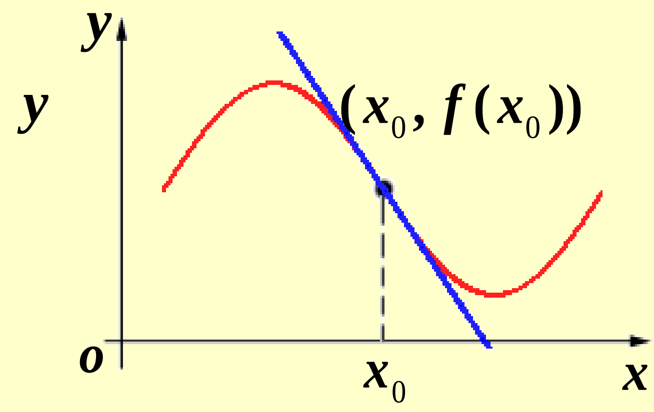
则 $F(h)$ 为增函数. 任取 $x' \in I$ 且 $x' < x_0$, 则对任何 $h>0$, 只要 $x_0 + h \in I$
$$\frac{f(x_0)-f(x')}{x_0-x'} \le \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = F(h),$$

即 $F(h)$ 有下界. 据单调有界定理, $\lim\limits_{h\to 0^+} F(h)$ 存在, 也就是
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在, 即 $f'_+(x_0)$ 存在. 同理可证 $f'_-(x_0)$ 存在.

四、曲线的拐点及其求法

定义2. 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，且在切点两近旁,曲线在切线两侧分别是严格凸和严格凹的，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.



定义2'

连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点.

注意:拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.

拐点的求法：

定理3. 如果 $f(x)$在$U(x_0)$内存在二阶导数，则点$(x_0, f(x_0))$为拐点的必要条件为$f''(x_0)=0$.

定理4:（拐点的第一充分条件）

设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导，且$f''(x_0)=0$,

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号，点$(x_0, f(x_0))$即为拐点；

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号，点$(x_0, f(x_0))$不是拐点.

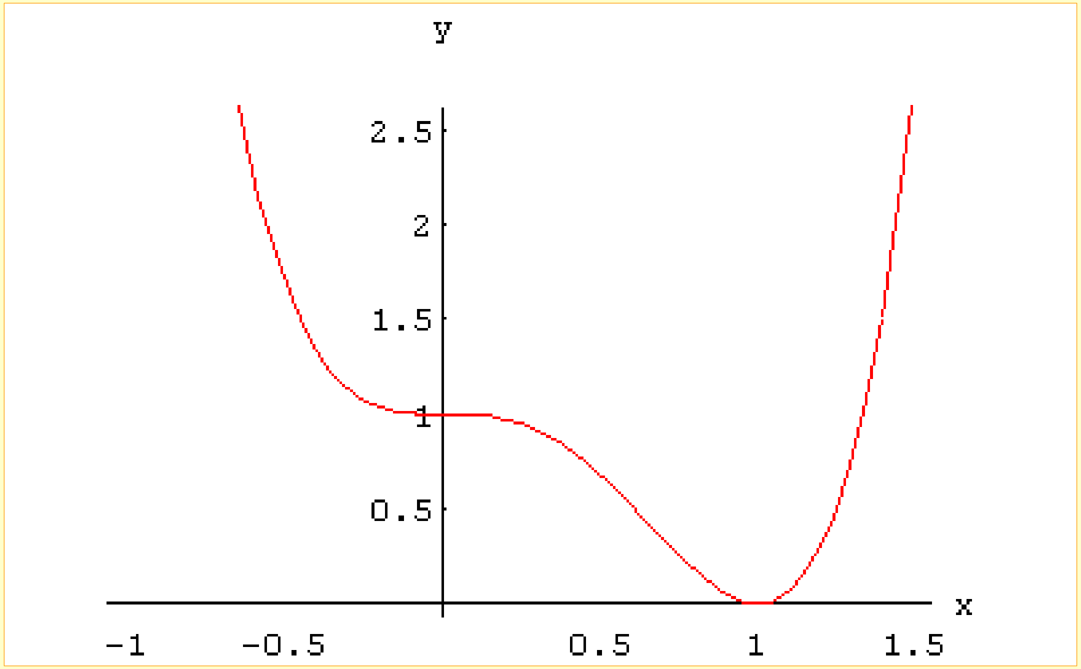
例7　求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解　$\because D: (-\infty, +\infty)$

$y' = 12x^3 - 12x^2, \qquad y'' = 36x(x - \frac{2}{3}).$

令 $y'' = 0$,　得 $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$.

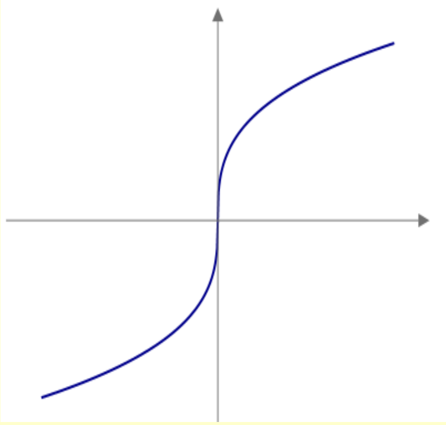
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	拐点 $(0,1)$	$\cap$	拐点 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$	$\cup$



凹凸区间为$(-\infty,0]$, $[0,\frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3},+\infty)$.

注意: 若 $f''(x_0)$ 不存在,点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例8. 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.



解: 当 $x \neq 0$ 时, $y' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y'' = -\dfrac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}$,

$x = 0$ 是不可导点, y', y'' 均不存在.

但在 $(-\infty, 0)$ 内, $y'' > 0$, 曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的;

在 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$, 曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凸的.

$\therefore$ 点 $(0,0)$ 是曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的拐点.

例9. 讨论 $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ 的凹凸性与拐点

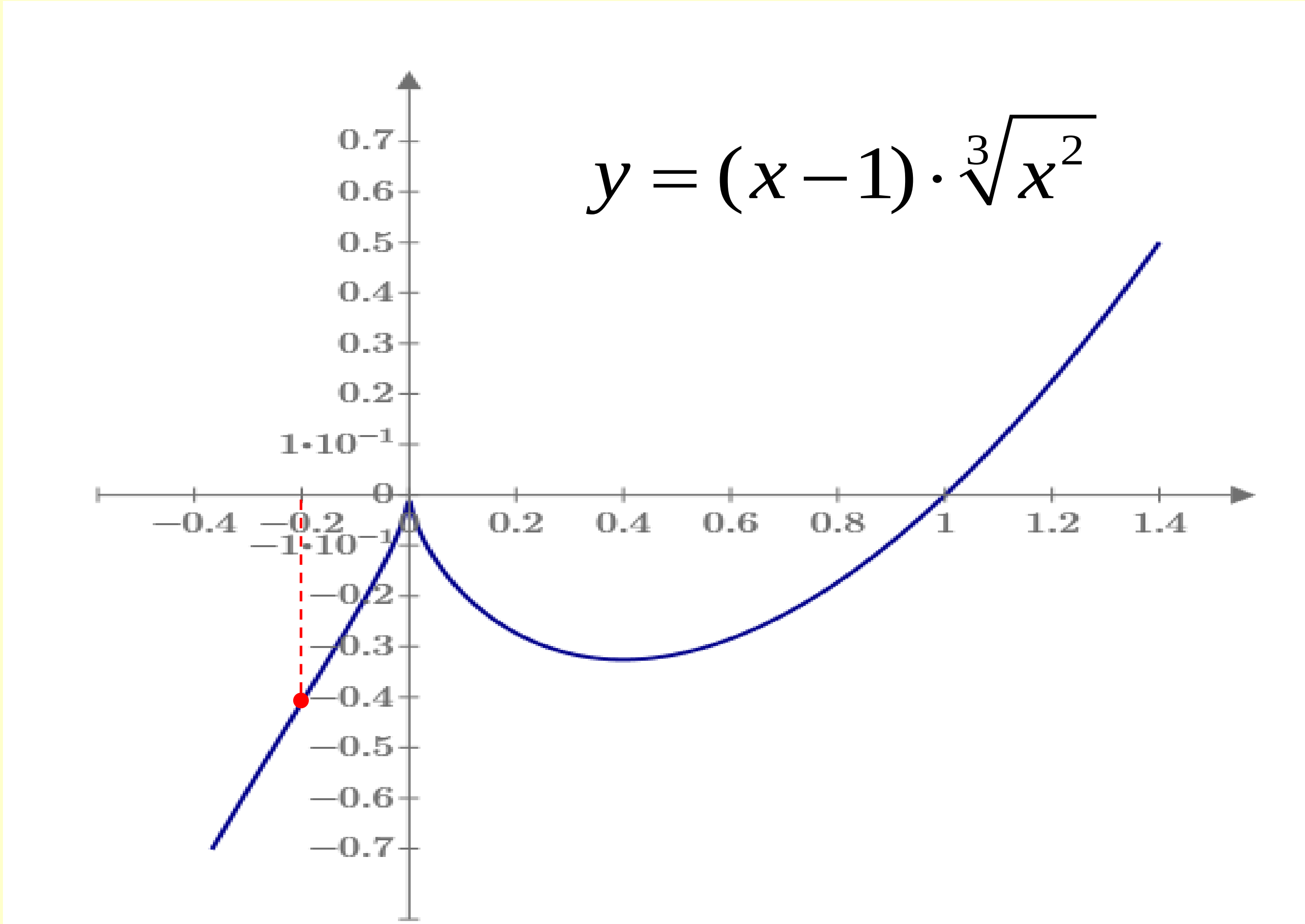
解 定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

: $y''=\dfrac{2(5x+1)}{9x^{4/3}}$, 零点为 $-\dfrac{1}{5}$, 不存在的点为 0. 列表:

x	$(-\infty,\ -\frac{1}{5})$	$-\frac{1}{5}$	$(-\frac{1}{5},\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	不存在	$+$
$f(x)$	$\cap$	拐点	$\cup$	非拐点	$\cup$

$\therefore$ 函数在 $(-\infty,\ -1/5]$ 上是凹函数、在 $[-1/5,\ 0]$ 及 $[0,\ +\infty)$ 上是凸函数，拐点为 $-1/5$.

问：能否说此函数的图形在 $[-1/5,\ +\infty)$ 上是凹的？



此函数在 $(-\infty,\ -1/5]$ 上是凹函数、在 $[-1/5,\ 0]$ 及 $[0,\ +\infty)$ 上是凸函数，拐点为 $-1/5$.

定理5（拐点的第二充分条件）

设$f''(x_0)=0$且$f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0$为$f(x)$的拐点。

证 $\because f''(x)=f''(x_0)+f'''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

$$=f'''(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}=f'''(x_0)$$

$\therefore$在x_0邻近$\dfrac{f''(x)}{x-x_0}$与$f'''(x_0)$同号

$\Rightarrow$在x_0的左右邻近$f''(x)$异号

$\therefore x_0$为$f(x)$的拐点。证毕。

例10. 求曲线 $y = \sin x + \cos x$ ([0,2π]内) 的拐点.

解：$y' = \cos x - \sin x$， $y'' = -\sin x - \cos x$，

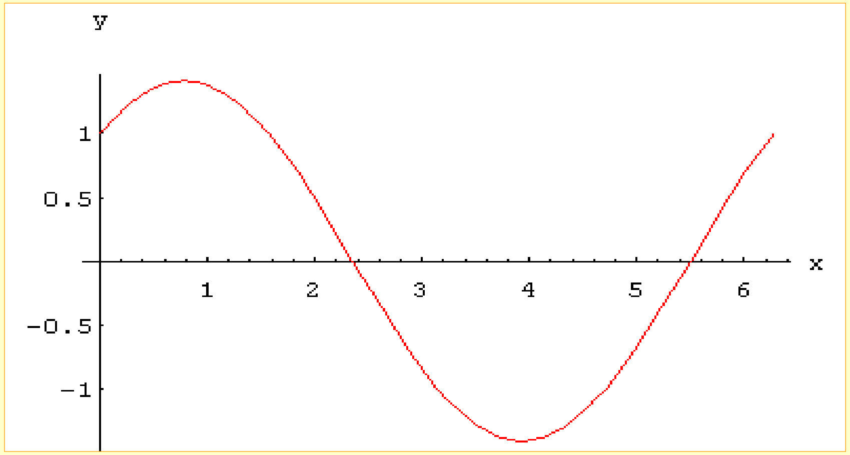
$y''' = -\cos x + \sin x$.

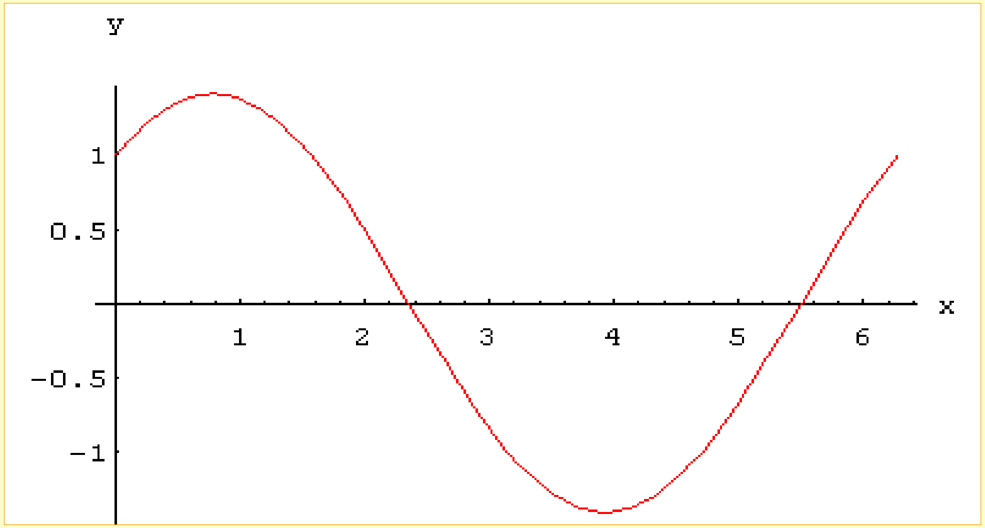
令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$.

$f'''(\dfrac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \neq 0$, $f'''(\dfrac{7\pi}{4}) = -\sqrt{2} \neq 0$,

∴ 在[0,2π]内曲线有拐点为

$(\dfrac{3\pi}{4},0)$, $(\dfrac{7\pi}{4},0)$.





$\therefore$ 在$[0,2\pi]$内曲线有拐点为 $(\frac{3\pi}{4},0)$, $(\frac{7\pi}{4},0)$.

注意: 若 $f''(x_0)$ 不存在,点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

思考题：

1.已知函数$y=f(x)$对一切x满足$xf''(x)+3xf'^2(x)=1-e^{-x}$,若$f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则　（　　）

$A.$　$f(x_0)$是$f(x)$的极大值；

$B.$　$(x_0 f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

$C.$　$f(x_0)$是$f(x)$的极小值；

$D.$　$f(x_0)$不是$f(x)$的极值,$(x_0 f(x_0))$不是$y=f(x)$的拐点.

2. 在下面两题中，分别指出满足条件的函数是否存在. 若存在，举一例，并证明满足条件；若不存在，请给出证明.

(1) 函数$f(x)$在x=0处可导，但在x=0的某去心邻域内处处不可导；

(2) 函数$f(x)$在$(-\delta,\delta)(\delta>0)$上可导，$f(0)$为极值，且$(0, f(0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.