1.3 幂级数

一般项为幂函数 $a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数称为幂级数，这是一类最简单的函数项级数. 幂级数在级数理论中有着特殊的地位，在函数逼近和近似计算中有重要应用，特别是函数的幂级数展开为研究非初等函数提供了有力的工具.

一、幂级数的收敛性

二、幂级数的运算性质

三、函数的幂级数展开

一、幂级数的收敛性

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ a_n(x-x_0)^n + \cdots, \qquad (1)$$

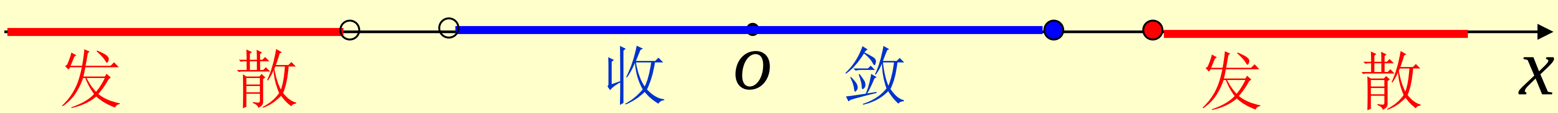
为方便起见，下面将重点讨论 $x_0 = 0$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

的情形. 因为只要把(2)中的 x 换成 $x - x_0$, 就得到(1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

定理1 (Abel第一定理) 若幂级数(2)在 $x = \bar{x} \neq 0$ 收敛, 则对满足不等式 $|x| < |\bar{x}|$ 的任何 x, 幂级数(2)收敛而且绝对收敛; 若幂级数(2)在 $x = \bar{x}$ 时发散, 则对满足不等式 $|x| > |\bar{x}|$ 的任何 x, 幂级数(2)发散.



证　设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ 收敛，从而数列 $\{a_n \bar{x}^n\}$ 收敛于零

且有界，即存在某正数 M，使得

$$|a_n \bar{x}^n| < M \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

对任意一个满足不等式 $|x| < |\bar{x}|$ 的 x，设 $r = \left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1$,

则有 $|a_n x^n| = \left|a_n \bar{x}^n \cdot \frac{x^n}{\bar{x}^n}\right| = |a_n \bar{x}^n| \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n < M r^n$.

由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n$ 收敛，故由优级数判别法知幂级数

(2)当 $|x| < |\bar{x}|$ 时绝对收敛.

下面证明定理的第二部分. 设幂级数(2)在 $x=\bar{x}$ 时发散, 如果存在一个 x_0, 满足不等式 $|x_0|>|\bar{x}|$, 且使级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则由定理得第一部分知, 幂级数(2)应该在 $x=\bar{x}$ 时绝对收敛, 与假设矛盾. 所以对一切满足不等式 $|x|>|\bar{x}|$ 的 x, 幂级数(2)都发散.

注 由定理1知道: 幂级数(2)的收敛域是以原点为中心的区间! 这是非常好的性质.若以2R表示区间的长度, 则称R为幂级数的收敛半径.

080111.已知幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$在$x=0$处收敛，在$x=-4$处发散，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$的收敛域为 $\underline{\quad (1,5] \quad}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

R为幂级数的收敛半径. 事实上，收敛半径就是使得幂级数(2)收敛的所有点的绝对值的上确界. 所以有

(i) 当 $R = 0$ 时, 幂级数(2)仅在 $x = 0$ 处收敛;

(ii) 当 $R = +\infty$ 时, 幂级数(2)在 $(-\infty, +\infty)$上收敛;

(iii) 当 $0 < R < +\infty$ 时, 幂级数(2)在 $(-R, R)$ 内收敛; 对一切满足不等式 $|x| > R$ 的 x, 幂级数(2)都发散; 至于 $x = \pm R$, (2)可能收敛也可能发散. 因此称 $(-R, R)$ 为幂级数(2)的收敛区间.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

怎样求得幂级数(2)的收敛半径和收敛区间呢?

定理2（Cauchy-Hadarmard）对于幂级数(2), 若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho \qquad (3)$$

则当

(i) $0 < \rho < +\infty$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho}$;

(ii) $\rho = 0$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R = +\infty$;

(iii) $\rho = +\infty$ 时, 幂级数(2)的收敛半径 $R = 0$.

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho,$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho,$

故只考虑根式情形.

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|,$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|=\rho|x|,$$

根据级数的根式判别法, 当 $\rho|x|<1$时, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$收敛. 当 $\rho|x|>1$时, 级数发散. 于是

(i) 当 $0<\rho<+\infty$时, 由 $\rho|x|<1$得幂级数(2)收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$;

(ii)当$\rho=0$时, 对任何 x皆有$\rho|x|<1$, 所以 $R=+\infty$;

(iii) 当$\rho=+\infty$时,则对除 $x=0$外的任何 x皆有 $\rho|x|>1$,所以 $R=0$.

注 由定理2可知, 一个幂级数的收敛域等于它的收敛区间再加该区间端点中使幂级数收敛的点.

例1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径和收敛域.

解： 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\to 1(n\to\infty)$,

所以其收敛半径 $R=1$, 即收敛区间为 $(-1,1)$.

$x=\pm 1$时, 有 $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$, 由于级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum\frac{x^n}{n^2}$ 在 $x=\pm 1$时也收敛. 于是级数 $\sum\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为$[-1,1]$.

例2. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ **的收敛半径及收敛域.**

解: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x = 1$, 级数为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, **收敛;**

对端点 $x = -1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, **发散 .**

故收敛域为 $(-1,1]$.

例3. 求下列幂级数的收敛域 :

规定: 0 ! = 1

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n; \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n .$$

解: (1)

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty\,,+\infty)$.

(2) $$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

所以级数仅在 $x = 0$ 处收敛 .

例4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径 . 缺项幂级数

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2,

故直接由比值判别法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2}x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } 4x^2 < 1 \text{ 即 } |x| < \frac{1}{2} \text{ 时级数收敛} \\ \text{当 } 4x^2 > 1 \text{ 即 } |x| > \frac{1}{2} \text{ 时级数发散}\end{array}\right\} \text{故收敛半径为 } R = \frac{1}{2}.$$

收敛域?

例5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解: 令 $t=x-1$, 级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$\therefore R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n n}\Big/\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$$

当 $t=2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t=-2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 此级数条件收敛;

因此级数的收敛域为 $-2\le t<2$, 故原级数的收敛域为 $-2\le x-1<2$, 即 $-1\le x<3$.

例6 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$的收敛半径和收敛域.

解 (i)先求收敛半径.

设 $z=x^2$, 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n-3^{2n}}$的收敛半径为

$$R=\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n-3^{2n}|}=9\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{n}{3^{2n}}}=9,$$

从而 $x^2=z<9$ 时原级数收敛, $x^2=z>9$ 原级数发散, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n-3^{2n}}$的收敛半径为$R=3.$

(ii) 再求收敛域. 当 $x=\pm 3$ 时, 相应的级数都是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}\text{，由于}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{2n}}{n-3^{2n}}\right|=1\text{，因此该级数发散，}$$

所以原级数的收敛域为 $(-3, 3)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

定理3 (Abel第二定理)

(i) 若幂级数(2)的收敛半径为 $R > 0 (= +\infty)$，则在它的收敛区间 $(-R, R)$ 内任一闭区间 $[a, b] \subset (-R, R)$ 上，级数(2)都一致收敛. **(内闭一致收敛)**

(ii) 若幂级数 (2) 的收敛半径为 $R > 0$，且在 $x = R$ (或 $x = -R$)时收敛，则级数(2)在 $[0, R]$ (或 $[-R, 0]$)上一致收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

定理3 (Abel第二定理)

(i) 若幂级数(2)的收敛半径为 $R > 0(= +\infty)$，则在它的收敛区间 $(-R, R)$ 内任一闭区间 $[a, b] \subset (-R, R)$ 上，级数(2)都一致收敛. **(内闭一致收敛)**

证 (i) 设 $\bar{x} = \max\{|a|, |b|\} \in (-R, R)$，那么对于 $[a, b]$ 上任一点 x，都有 $|a_n x^n| \le |a_n \bar{x}^n|$.

由于级数(2)在点 $\bar{x}$ 绝对收敛，由优级数判别法得级数(2)在 $[a, b]$ 上一致收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

定理3 (Abel第二定理)

(ii) 若幂级数 (2) 的收敛半径为 $R > 0$ ，且在 $x = R$ (或 $x = -R$)时收敛, 则级数(2)在 $[0, R]$ (或 $[-R, 0]$)上一致收敛.

证(ii) 设级数(2)在 $x = R$ 时收敛, 对于 $x \in [0, R]$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 函数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 在 $[0, R]$ 上

递减且一致有界，即

$$1 \geq \frac{x}{R} \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \cdots \geq \left(\frac{x}{R}\right)^n \geq \cdots \geq 0.$$

故由函数项级数的**Abel判别法**，级数(2)在 $[0, R]$ 上一致收敛.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots, \qquad (1)$$

对于一般幂级数(1)的收敛性问题，可仿照上述的办法来确定它的收敛区间和收敛半径.

二、幂级数的运算性质

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

由定理Abel第二定理和一致收敛性性质立刻可得

定理4 (i) 幂级数(2)的和函数是 $(-R, R)$ 内的连续函数; (ii)若幂级数(2)在收敛区间的左(右)端点上收敛, 则其和函数也在这一端点上右(左)连续.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (2)$$

下面讨论幂级数的逐项求导与逐项求积性质，先来确定幂级数(2)在收敛区间 $(-R, R)$ 内逐项求导与逐项求积后得到的幂级数

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \qquad (7)$$

与

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\cdots \qquad (8)$$

的收敛区间.

定理5 幂级数(2)与幂级数(7)、(8)具有相同的收敛区间.

幂级数的分析运算--逐项求导和逐项求积

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

定理6 设幂级数(2)在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数为 f, 若 x 为 $(-R, R)$ 内任意一点, 则

(i) f 在 x 可导, 且 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;

(ii) f在区间 $[0, x]$ 上可积, 且

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

证 由定理5，级数(2), (7), (8)具有相同的收敛半径R. 因此, 对任意一个$x \in (-R, R)$，总存在正数r, 使得$|x| < r < R$, 根据定理3，级数(2), (7)在$[-r, r]$上一致收敛. 再由一致收敛的逐项求导与逐项求积定理，就得到所要证明的结论(i)与(ii).

注 由本定理立即可以得到幂级数在其收敛区间上可以逐项求导和逐项求积. (并没有要求在其收敛区间上一致收敛!)

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

推论1 设 f 为幂级数(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 上的和函数, 则在 $(-R, R)$ 上 f 具有任意阶导数, 且可任意次逐项求导, 即

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1) n (n-1) \cdots 2 a_{n+1} x + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2)$$

推论2 设 f 为幂级数(2)在 $x=0$ 某邻域内的和函数，则级数(2)的系数 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 与 f 在 $x=0$ 处的各阶导数有如下关系：

$$a_0 = f(0),\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n=1,2,\cdots).$$

注 推论2还表明，若级数(2)在 $(-R, R)$ 上有和函数 f，则级数(2)由 f 在 $x=0$ 处的各阶导数所惟一确定. 这是一个非常重要的结论，在后面讨论幂级数展开时要用到.

幂级数的四则运算

定理7 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在 $x=0$ 的某邻域内有相同的和函数, 则它们同次幂项的系数相等, 即

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

这个定理的结论可直接由定理6的推论2得到.

根据这个推论还可推得: 若幂级数(2)的和函数为奇(偶)函数, 则(2)式不出现偶(奇)次幂的项.

定理8 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 则有

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, |x| < R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R,$$

式中 λ 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

定理的证明可由数项级数的相应性质推出.

例7 几何级数在收敛域$(-1,1)$内有

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots. \quad (10)$$

对级数(10)在$(-1,1)$内逐项求导得

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots, \quad (11)$$

$$f''(x)=\frac{2!}{(1-x)^3}=2+3\cdot 2x+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots, \quad (12)$$

将级数(10)在$[0, x]$ $(x<1)$上逐项求积得到

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n \mathrm{d}t,$$

所以

$$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad (|x|<1). \quad (13)$$

上式对$x=-1$也成立. 于是有

$$\ln\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots,$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

通过逐项求导或逐项求积可间接地求幂级数的和函数.

例8. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ 的和函数 $S(x)$. 先积后导型

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , $x=\pm 1$ 时级数发散,

故当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$

$$= x\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例9. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.　　先导后积型

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , 且 $x=-1$时级数收敛 , 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\qquad (0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

$$S(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x), \qquad (0<|x|<1 \text{ 及 } x=-1)$$

而 $S(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=1$,

因此由和函数的连续性得:

$$S(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

例10. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ **的和函数 .**

解: 由例2可知级数的收敛半径 $R = +\infty$. 设

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

则 $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

故有 $$\left(e^{-x}S(x)\right)'=0$$

因此得 $$S(x)=Ce^x$$

由 $S(0)=1$ 得 $S(x)=e^x$, **故得** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

例11. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$, $x\in(-1,1)$, 则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad (x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$$

$$=-\ln(1-x)$$

∴ $$S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\qquad (x\neq 0)$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

例12 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$的和函数.

解 首先求出收敛域. 因为$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$, 且级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$都发散, 所以收敛域为$(-1,1)$.

采用逐项求积法来求和函数. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$$

$$=x\cdot g(x)\quad x\in(-1,1).$$

对$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$进行逐项积分, 得

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=xh(x).$$

对 $h(x)$ 逐项积分, 得

$$\int_0^x h(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$$

$$=\frac{x}{1+x},\quad x\in(-1,1).$$

所以 $$h(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2};$$

$$g(x)=(xh(x))'=\left[\frac{x}{(1+x)^2}\right]'=\frac{1-x}{(1+x)^3};$$

$$S(x)=xg(x)=\frac{x-x^2}{(1+x)^3}\quad x\in(-1,1).$$

本题还可以用逐项求导的方法求和函数, 请自行练习.

内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性 .

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求 .

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

思考与练习

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛 , 问该级数收敛半径是多少 ?

答: 根据Abel 定理可知, 级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛 ,

$|x| > |x_0|$ 时发散 . 故收敛半径为 $R = |x_0|$.

2. 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ **中,**

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3/2\,, & \boldsymbol{n}\text{ 为奇数} \\ 1/6\,, & \boldsymbol{n}\text{ 为偶数} \end{cases}$$

能否确定它的收敛半径不存在？

答: 不能. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

当 $|x|<2$ 时级数收敛，$|x|>2$ 时级数发散，$\therefore R=2.$

说明: 可以证明

比值判别法成立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 根值判别法成立

练习题 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n})$, 其中 $a>1$.

解: 令 $S_n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a^k}$

作幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$$

$$=x\cdot(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$

三、函数的幂级数展开式

两类问题: 在收敛域内

$$\text{幂级数}\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}}\ \text{和函数}\ S(x)$$

内容:

1、泰勒 (Taylor) 级数

2、函数展开成幂级数

1、泰勒 (Taylor) 级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 ***n*** **+ 1** 阶导数, 则在该邻域内有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

此式称为 ***f*** **(*x*)** 的 ***n*** 阶泰勒公式 ,其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ **(** ξ 在 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x_0}$ 之间**)**

称为拉格朗日余项 .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数, 则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数 .

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数 .

待解决的问题 :

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

定理9 . 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\bigcup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

证明: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in \bigcup(x_0)$$

$\Updownarrow$

令 $$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_{n+1}(x)\right] = 0, \quad x \in \bigcup(x_0)$$

定理10. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则 $\qquad a_0 = f(0)$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots; \qquad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots; \qquad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots; \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

显然结论成立 .

2、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

I. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数 , 并求出其收敛半径 R ;

第三步 判别在收敛区间 $(-R, R)$ 内 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)$ 是否为0.

例13. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n!}\Big/\dfrac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x之间)

故 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots,\ \ x\in(-\infty,+\infty)$

例14. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 **x** 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k, & n=2k+1\end{cases}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

得级数: $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

其收敛半径为 $R=+\infty$, 对任何有限数 **x** , 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

类似可推出:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

例15. 将函数$f(x)=(1+x)^m$ 展开成 $\boldsymbol{x}$ 的幂级数, 其中$\boldsymbol{m}$ 为任意常数 .

解: 易求出 $f(0)=1,\ f'(0)=m,\ f''(0)=m(m-1)$,

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)\,,\ \cdots$$

于是得 级数 $1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=1$

因此对任意常数 $\boldsymbol{m}$, 级数在开区间 **(－1, 1)** 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为$F(x), -1<x<1$

则 $F(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right]$$

$$(1+x)F'(x)=mF(x),\quad F(0)=1$$

推导

$$\int_0^x \frac{F'(x)}{F(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^x \frac{m}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln F(x)-\ln F(0)=m\ln(1+x)$$

$$F(x)=(1+x)^m$$

由此得

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

称为二项展开式 .

说明:

(1) 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关 .

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的二项式定理.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$

$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$

$$(-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

II. 间接展开法

利用一些已知的函数展开式及幂级数的运算性质，将所给函数展开成 幂级数.

例16. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

把 x 换成 x^2 ，得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$(-1 < x < 1)$$

例17. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$

从 0 到 x 积分, 得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\ \boxed{-1<x\le 1}$$

上式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也是成立的, 于是收敛区间为 $-1<x\le 1$.

利用此题可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$$

例18. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

例19. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+1)(x+3)}=\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(3+x)}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$$\boxed{(\,|x-1|<2\,)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \qquad (-1<x<3)$$

函数幂级数展开式的应用:近似计算

例20. 计算 $\ln 2$ 的近似值,使准确到 10^{-4}.

解: 已知 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad(-1<x\le 1)$

$$\therefore\quad \ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\quad(-1\le x<1)$$

故
$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$
$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)\quad(-1<x<1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$ 得 $x=\frac{1}{3}$, 于是有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because\ |r_4| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+(\frac{1}{9})^2+\cdots\right)=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}$$

$$=\frac{1}{78732}<0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore\ \ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931$$

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式 ;

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数 .

2. 常用函数的幂级数展开式

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$

$x \in (-1, +1]$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$$

当 $m = -1$ 时

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1)$$

思考与练习

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处“有泰勒级数”与“能展成泰勒级数”有何不同 ?

提示: 后者必需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 前者无此要求.

2. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数 ?

提示: $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

练习题 1. 将下列函数展开成 x 的幂级数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

解: $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x=\pm1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$**,因此**

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

2. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 $x=0$ 处展为幂级数.

$$2+x-3x^2 \\ =(1-x)(2+3x)$$

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1\le x<1)$$

$$\ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n \qquad (-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此 $$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n \qquad (-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

练 习 题

一、将下列函数展开成x 的幂级数, 并求展开式成立的区间:

1、a^x;

2、$(1+x)\ln(1+x)$;

3、$\arcsin x$;

4、$\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

二、将函数$f(x)=\sqrt{x^3}$展开成$(x-1)$的幂级数, 并求展开式成立的区间 .

三、将 函 数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展 开 成 $(x+4)$ 的 幂 级 数 .

四、将级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$的和函数展开成$(x-1)$的幂级数 .

练习题答案

一、1、$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}x^n \quad (-\infty < x < +\infty)$;

2、$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1} \quad (-1 < x \le 1)$;

3、$x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!}{(n!)^2(2n+1)}(\frac{x}{2})^{2n+1} \quad (-1 \le x \le 1)$;

4、$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1} \quad (-1,1)$.

二、$1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{3}{(n+1)(n+2)2^n}(\frac{x-1}{2})^{n+2}$

$(0 \le x \le 2)$.

三、$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n \qquad (-6,-2).$

四、$\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n}$

$+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1} \qquad (-\infty,+\infty).$