第1章 无穷级数

无穷级数是数学分析三大组成部分之一。

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

无穷级数
- 数项级数
- 函数项级数
- 幂级数
- **Fourier级数**

1.1 数项级数

1.1.1 数项级数的概念和性质

1.1.2 正项级数及其判别法

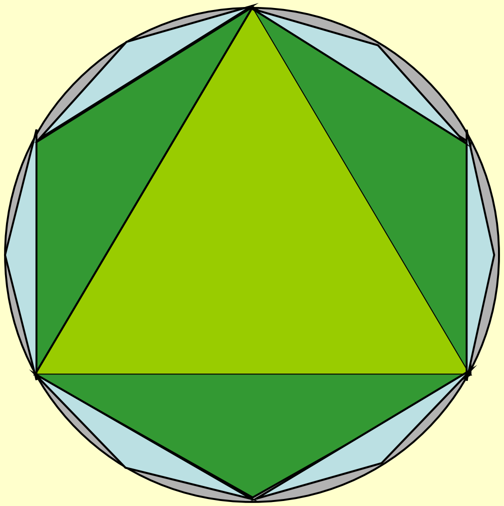
1.1.3 一般项级数及其判别法

1.1.1 数项级数的概念和性质

1、数项级数的概念

引例 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$ 边形,设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正 3×2^n 边形面积为



$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$n\to\infty$时,这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

定义1: 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

称上式为无穷级数, 其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项,

级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和.

定义2: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数**收敛**, 并称 S 为级数的**和**, 记作 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数**发散**.

当级数收敛时, 称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为级数的**余项**.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

例1. 讨论等比级数(又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a - a q^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

2). 若 $|q|=1$, 则

当 $q=1$ 时, $S_n = na \to \infty$, 因此级数发散 ;

当 $q=-1$ 时, 级数成为

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n\text{ 为奇数} \\ 0, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在 , 因此级数发散.

综合 1)、2)可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛 ;

$|q|\geq 1$ 时, 等比级数发散 .

例2. 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}; \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

解: (1)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$=\ln(n+1)\to\infty \quad (n\to\infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

(2) $$S_n = \frac{1}{\underline{1\cdot 2}} + \frac{1}{\underline{2\cdot 3}} + \frac{1}{\underline{3\cdot 4}} + \cdots + \frac{1}{\underline{n\cdot(n+1)}}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 “**拆项相消**” 求和

2、级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 也收敛，其和为 cS .

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c u_k = c S_n$，

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛，其和为 cS .

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变 .

性质2. 设有两个收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

(收敛级数可逐项相加或减)

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n \pm \sigma_n \to S\pm\sigma \quad (n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明:

(1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减.

(2) 若两级数中一个收敛一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散. (用反证法可证)

但若二级数都发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例3.判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

3、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0.$

证: $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见: **若级数的一般项不趋于0 , 则级数必发散 .**

例如, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$, 其一般项为

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

当$n\to\infty$时, u_n不趋于0, 因此这个级数发散.

注意: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散 .

事实上, 假设调和级数收敛于 S, 则

$$\lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真 .

例4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}{n^{n+\frac{1}{n}}}$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}{n^{n+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}{n^{n}n^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n^{2}}\right)^{n^{2}}\right]^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{n}}}=1\neq 0$$

所以由级数收敛的必要条件知原级数发散.

例5. 判断下列级数的敛散性, 若收敛求其和:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}.$$

解: (1) 令 $u_n=\dfrac{e^n n!}{n^n}$, 则

$$\boxed{(1+\tfrac{1}{n})^n < e < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{e^n n!}{n^n}}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\quad (n=1,2,\cdots)$$

故 $\quad u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, 这说明级数(1) 发散.

(2) 因

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

进行拆项相消

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{4}$, 这说明原级数收敛 , 其和为 $\dfrac{1}{4}$.

(3) $$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n-\tfrac{1}{2}S_n$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\underline{\frac{3}{2^2}}+\underline{\frac{5}{2^3}}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)-\left(\underline{\frac{1}{2^2}}+\underline{\frac{3}{2^3}}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\underline{\frac{2n-1}{2^{n+1}}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$\therefore\quad S_n=3-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$,

这说明原级数收敛, 其和为 3 .

4. 级数收敛的Cauchy准则

定理1(柯西准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:

任给正数 ε, 总存在正整数 N, 使得当 $m > N$

以及对任意的正整数 p 都有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon.$$

根据定理1以及数列发散的充要条件，可以立刻写出级数发散的充要条件是：存在某正数 ε_0，对任何正整数N,总存在正整数$m_0(>N)$和p_0，有

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0 .$$

例6 讨论调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性.

解 取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对任何正整数 N 只要 $m>N$ 和 $p=m$

就有 $\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{2m}\right|=\left|\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|$

$$\geq\left|\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}\right|=\frac{1}{2},$$

因此调和级数发散.

例7 运用级数收敛的柯西准则证明级数 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛.

证 由于

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|$$

$$=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}.$$

因此, 对任意$\varepsilon>0$, 可取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当$m>N$及任意正整数$p$,由上式可得 $\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon$,

依级数收敛的柯西准则, 知级数$\sum\frac{1}{n^2}$收敛.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性已由例2的证明过程所显示.