6.1.4 高阶线性微分方程

一、高阶线性微分方程解的结构

1. 线性齐次方程解的结构

2. 线性非齐次方程解的结构

3. 常数变易法

二、高阶常系数线性微分方程的通解

1. 高阶常系数线性齐次微分方程

2. 高阶常系数线性非齐次微分方程

3. 欧拉方程

一、高阶线性微分方程解的结构

n 阶线性微分方程的一般形式为：

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程；} \\ f(x) \equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习：一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解：$y = \underbrace{C e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y} + \underbrace{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \int Q(x) e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}y^*}$

1. 线性齐次方程解的结构（以二阶为例）

定理1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数)

也是该方程的解. (叠加原理)

证: 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2']$$

$$+ Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]$$

$$+ C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0 \quad \text{证毕}$$

n 阶齐次方程解的叠加原理：

若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个解，则

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

也是方程的解.

说明:

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 不一定是所给二阶方程的通解.

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$$y_2(x) = 2\,y_1(x)$$ 也是齐次方程的解

但是 $$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = (C_1 + 2\,C_2)\,y_1(x)$$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义： 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**，否则称为**线性无关**.

例1. $1, \cos^2 x, \sin^2 x$，在$(-\infty, +\infty)$上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都**线性相关**；

又如，$1, x, x^2$，若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$，则根据二次多项式至多只有两个零点，可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0，故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 **线性无关**.

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为 0 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\rightleftarrows \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

(不妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\rightleftarrows \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

$y_1, y_2, \cdots y_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

Wronsky行列式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解，则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数) 是该方程的通解. (通解结构定理)

例2. 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x,$

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \ne$ 常数，故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

n 阶齐次方程通解结构定理：

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 n 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关解（**基本解组**），则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k \text{为任意常数})$$

2. 线性非齐次方程解的结构

定理 3. 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ①$$

的一个特解, $Y(x)$ 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \qquad ②$$

是非齐次方程的通解 .

证: 将 $y = Y(x) + y^*(x)$ 代入方程①左端, 得

$$(Y'' + y^{*''}) + P(x)(Y' + y^{*'}) + Q(x)(Y + y^*)$$

$$= (y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*) + (Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y)$$

$$= f(x) + 0 = f(x)$$

故 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是非齐次方程的解，又 Y 中含有两个独立任意常数，因而 ② 也是通解． 证毕

例如，方程 $y''+y=x$ 有特解 $y^*=x$

对应齐次方程 $y''+y=0$ 有通解

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

因此该方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$$

定理 4. 设 $y_k^*(x)\ (k=1,2,\ ,n)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_k(x)\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

的特解, 则 $y=\sum_{k=1}^{n} y_k^*$ 是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

的特解. (非齐次方程解的叠加原理)

定理3, 定理4 均可推广到 n 阶线性非齐次方程.

定理 5. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是对应齐次方程的 n 个线性无关特解, $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解, 则非齐次方程的通解为

$$y=\underline{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)}+y^*(x)$$

$$=Y(x)+y^*(x)$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

定理 6. 给定 n 阶非齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

设 $y^*{}_1(x), y^*{}_2(x)$ 是其特解，则它们的差

$y^*{}_1(x) - y^*{}_2(x)$ 是其对应的齐次方程的解.

例3. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解，且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关，故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3,$ 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2,$

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x.$

3. 常数变易法

复习: $y' + p(x)y = f(x)$

$$y_1(x) = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

对应齐次方程的通解: $y = C\,y_1(x)$

常数变易法: 设非齐次方程的解为 $y = C(x)y_1(x)$

代入原方程确定 $C(x)$.

对二阶非齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad ③$$

已知对应齐次方程通解: $y = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)$

设③的解为 $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad ④$

$(c_1(x), c_2(x)$待定$)$

由于有两个待定函数, 所以要建立两个方程:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \underline{c_1' y_1 + c_2' y_2}$$

为使 y'' 中不含 c_1'', c_2''，令

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \qquad ⑤ \qquad \text{附加条件}$$

于是 $y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$

将以上结果代入方程 ③：

y_1, y_2 是对应齐次方程的解

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' \quad + (\underline{y_1'' + P\, y_1' + Q y_1})c_1$$

$$+ (\underline{y_2'' + P\, y_2' + Q y_2})c_2 = f(x)$$

得 $$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \qquad ⑥$$

因 y_1, y_2 线性无关，故⑤, ⑥的系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

于是由Cramer法则得 $c_1' = -\frac{1}{W} y_2 f, \quad c_2' = \frac{1}{W} y_1 f$

积分得: $c_1(x) = \int \frac{-y_2 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx + C_1, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx + C_2$

代入④ 即得非齐次方程的通解:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx$$

注1: 将③的解设为 $y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ 只有一个必须满足的条件即方程③, 因此必需再附加一个条件, 方程⑤的引入是为了简化计算.

注2: 此常数变易法可推广到n阶方程.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad （1）$$

注3： **若**已知齐次方程(1)的一个非零特解 $y_1(x)$.

令 $y = u(x)y_1(x)$, 代入（1）化简得

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1)u' + \underline{(y_1'' + P y_1' + Q y_1)}u = 0$$

$\Big\downarrow$ 令 $z = u'$

$$y_1 z' + (2y_1' + P y_1) z = 0 \qquad \text{(一阶线性方程)}$$

解得 $$z = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx} \Longrightarrow u = C\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx$$

得另一特解 $$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P(x)dx}dx} \qquad \text{Liouville公式}$$

由此得方程（1）的通解: $y = C_1 y_1(x) + C_2\, y_2(x)$

例4. 求方程 $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$ 的通解.

解 $\because 1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x} = 0,$

对应齐次方程一特解为 $y_1 = e^x$, 由刘维尔公式

$$y_2 = e^x \int \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int \frac{x}{1-x}dx} dx = x,$$

对应齐方通解为 $Y = C_1 x + C_2 e^x$.

设原方程的通解为 $y = c_1(x)x + c_2(x)e^x$,

$c_1'(x)$, $c_2'(x)$ 应满足方程组

$$\begin{cases} xc_1'(x) + e^x c_2'(x) = 0 \\ c_1'(x) + e^x c_2'(x) = x - 1 \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} c_1'(x) = -1 \\ c_2'(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

$$c_1(x) = -x + C_1, \qquad c_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_2$$

原方程的通解为 $y = C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1.$

例5. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该方程的通解是 (D).

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$;

(B) $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$;

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解，

二者线性无关 . (反证法可证)

内容小结

主要内容 线性方程解的结构；

线性相关与线性无关；

降阶法与常数变易法；

补充内容 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 可观察出一个特解

(1) 若 $P(x) + xQ(x) = 0$, 特解 $y = x$;

(2) 若 $1 + P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^{x}$;

(3) 若 $1 - P(x) + Q(x) = 0$, 特解 $y = e^{-x}$.

练 习 题

一、验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解, 并写出该方程的通解.

二、证明下列函数是相应的微分方程的通解:

1、$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$ $(c_1, c_2$ 是任意常数$)$是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解;

2、$y = \dfrac{1}{x}(c_1 e^x + c_2 e^{-x}) + \dfrac{e^x}{2}$ $(c_1, c_2$ 是任意常数$)$是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解.

三、已知$y_1(x)=e^x$是齐次线性方程
$(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$的一个解, 求此方程的通解 .

四、已知齐次线性方程$x^2y''-xy'+y=0$的通解为
$Y(x)=c_1x+c_2x\ln|x|$, 求非齐次线性方程
$x^2y''-xy'+y=x$的通解 .

练习题答案

一、 $y=(C_1+C_2x)e^{x^2}$.

三、 $y=C_1e^{x}+C_2(2x+1)$.

四、 $y=C_1x+C_2x\ln x+\dfrac{1}{2}x(\ln x)^2$.

二、常系数线性微分方程的通解

1、高阶常系数线性齐次微分方程:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0\ \ (a_k\text{ 均为常数})$$

2、高阶常系数线性非齐次微分方程 :

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)\ \ (a_k\text{ 均为常数})$$

3、欧拉方程

$$x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

1. 二阶常系数线性齐次微分方程:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{为常数}) \qquad ①$$

因为r为常数时, 函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子,

所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$

$$\longrightarrow \quad r^2 + pr + q = 0 \qquad ②$$

称②为微分方程①的**特征方程**, 其根称为**特征根**.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, ②有两个相异实根 r_1, r_2, 则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2. 当 $p^2-4q=0$ 时, 特征方程有两个相等实根 $r_1=r_2=\frac{-p}{2}$, 则微分方程有一个特解 $y_1=e^{r_1 x}$.

设另一特解 $y_2=y_1u(x)=e^{r_1 x}u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$\cancel{e^{r_1 x}}[(u''+2r_1u'+r_1^2u)+p(u'+r_1u)+qu]=0$$

$$u''+(\underline{2r_1+p})u'+(\underline{r_1^2+pr_1+q})u=0$$

注意 r_1 是特征方程的重根

$$u''=0$$

取 $u=x$, 则得 $y_2=xe^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

利用解的叠加原理，得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

小结:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (\,p,\,q\text{为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$，特征根 : r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0\ \ (a_k\text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

(1) 若特征方程含 k 重实根 r, 则对应k个线性无关的解:

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2e^{rx},\cdots,x^{k-1}e^{rx}$$

(2) 若特征方程含 k 重复根 $r=\alpha\pm i\beta$, 则有$2k$个线性无关解:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(3) 不同特征根对应的解是线性无关的.

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$, 特征根: $r_1 = -1,\ r_2 = 3$,

因此原方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$

例2. 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} + 2\dfrac{ds}{dt} + s = 0 \\ s\big|_{t=0} = 4, \quad \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = -2 \end{cases}$

解: 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $s = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, \quad C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为 $s = (4 + 2t)e^{-t}$

例3. 求一个以 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x,$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解 .

解: 根据给定的特解知特征方程有根 :

$$r_1 = r_2 = 1, \quad r_{3,4} = \pm 2i$$

因此特征方程为 $(r-1)^2(r^2+4) = 0$

即 $$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求方程为 $$y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$$

其通解为 $$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x$$

例4. 求方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4-2r^3+5r^2=0$, 特征根:

$$r_1=r_2=0,\qquad r_{3,4}=1\pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y=C_1+C_2x+e^x(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$$

例5. 解方程 $y^{(5)}-y^{(4)}=0$.

解: 特征方程: $r^5-r^4=0$, 特征根 :

$$r_1=r_2=r_3=r_4=0,\qquad r_5=1$$

原方程通解: $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x$

(不难看出, 原方程有特解 $1, x, x^2, x^3, e^x$)

例6. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}+\beta^4 w=0\ (\beta>0)$.

解: **特征方程:** $r^4+\beta^4=(r^2+\beta^2)^2-2\beta^2 r^2=0$

即 $(r^2+\sqrt{2}\,\beta\, r+\beta^2)(r^2-\sqrt{2}\,\beta\, r+\beta^2)=0$

其根为 $r_{1,2}=\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i),\ r_{3,4}=-\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

方程通解:

$$w=e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_1\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_2\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

$$+e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x}\left(C_3\cos\frac{\beta}{\sqrt{2}}x+C_4\sin\frac{\beta}{\sqrt{2}}x\right)$$

例7. 解方程 $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解: 特征方程: $r^4+2r^2+1=0$

即 $(r^2+1)^2=0$

特征根为 $r_{1,2}=\pm i,\quad r_{3,4}=\pm i$

则方程通解 :

$$y=(C_1+C_3x)\cos x+(C_2+C_4x)\sin x$$

内容小结

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: $r_1\,, r_2$

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时, 通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解 .

思考与练习

求方程 $y'' + a\,y = 0$ 的通解 .

答案: $a = 0$: 通解为 $y = C_1 + C_2\,x$

$a > 0$: 通解为 $y = C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x$

$a < 0$: 通解为 $y = C_1\,e^{\sqrt{-a}\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{-a}\,x}$

练 习 题 1

一、求下列微分方程的通解：

1、$y''-4y'=0$；　　2、$4\frac{d^2x}{dt^2}-20\frac{dx}{dt}+25x=0$；

3、$y''+6y'+13y=0$；　　4、$y^{(4)}+5y''-36y=0$.

二、下列微分方程满足所给初始条件的特解：

1、$4y''+4y'+y=0$，$y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$；

2、$y''-4y'+13y=0$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$.

三、求作一个二阶常系数齐次线性微分方程，使 $1, e^x, 2e^x, e^x+3$ 都是它的解.

四、设圆柱形浮筒，直径为0.5m，铅直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为2s，求浮筒的质量.

练习题1 答案

一、1、$y = C_1 + C_2 e^{4x}$；　　2、$x = (C_1 + C_2 t)e^{\frac{5}{2}t}$；

3、$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$；

4、$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.

二、1、$y = e^{-\frac{x}{2}}(2 + x)$；　　2、$y = e^{2x}\sin 3x$.

三、$y'' - y' = 0$.　（提示：$1, e^x$ 为两个线性无关的解）

四、$M = 195\,\text{kg}$.

2. 二阶常系数线性非齐次微分方程：

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q \text{ 为常数}) \qquad ①$$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解　非齐次方程特解

求特解的方法 — **待定系数法**

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

(2) $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$ 型

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 m 次多项式 .

设特解为 $y^*=\underline{e^{\lambda x}Q(x)}$，其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda Q(x)}+\underline{Q'(x)}]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\underline{\lambda^2 Q(x)}+\underline{2\lambda Q'(x)}+\underline{Q''(x)}]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$，则取 $Q(x)$ 为 m 次待定系数多项式 $Q_m(x)$，从而得到特解形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$.

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(2) 若λ是特征方程的单根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0,$$

则$Q'(x)$为m 次多项式，故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

则$Q''(x)$ 是 m 次多项式，故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结： 对方程①，当λ 是特征方程的 k 重根 时，可设

特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad(k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (p, q\text{为常数}) \qquad ①$$

$$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$$

综上讨论

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$，$\quad k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根}, \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

注： 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程（k是重根次数）.

例1. 求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解: 本题 $\lambda=0$, 而特征方程为 $r^2-2r-3=0$,

$\lambda=0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^*=b_0x+b_1$, 代入方程 :

$$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases}-3b_0=3\\-2b_0-3b_1=1\end{cases}\longrightarrow b_0=-1,\ b_1=\frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^*=-x+\dfrac{1}{3}$.

例2. 求方程 $y'' - 5y' + 6y = x e^{2x}$ 的通解.

解: 本题 $\lambda = 2$, 特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 其根为

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 3$$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

设非齐次方程特解为 $y^* = x(b_0 x + b_1) e^{2x}$

代入方程得 $-2b_0 x - b_1 + 2b_0 = x$

比较系数, 得 $\begin{cases} -2b_0 = 1 \\ 2b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow b_0 = -\dfrac{1}{2}, \; b_1 = -1$

因此特解为 $y^* = x(-\frac{1}{2}x - 1) e^{2x}$.

所求通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - (\frac{1}{2}x^2 + x) e^{2x}$.

例3. 求解定解问题 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 2y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

解: 本题 $\lambda = 0$, 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

故对应齐次方程通解为 $Y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x}$

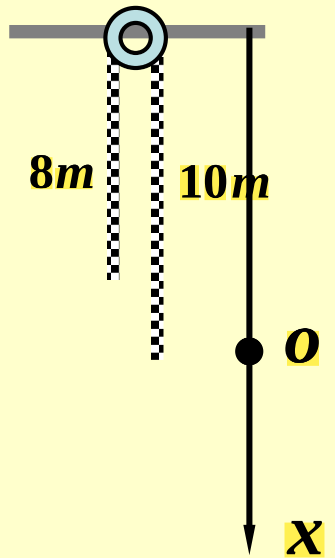
设非齐次方程特解为 $y^* = bx$, 代入方程得 $2b = 1$, 故

$y^* = \frac{1}{2}x$, 原方程通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x$

由初始条件得 $\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ -C_2 - 2C_3 = -\frac{1}{2} \\ C_2 + 4C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3}{4} \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

所求解为 $y = -\frac{3}{4} + e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}(-3 + 2x + 4e^{-x} - e^{-2x})$

例4. 一质量均匀的链条挂在无摩擦的钉子上，运动开始时，链条的一边下垂8米，另一边下垂10米，试问整个链条滑过钉子需要多少时间.



解 设链条的线密度为μ,经过时间t,链条下滑了x米,

则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (10+x)\mu g - (8-x)\mu g,$$

即 $x'' - \dfrac{g}{9}x' = \dfrac{g}{9}$, $x(0)=0,\ x'(0)=0.$

解此方程得 $x(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t}\right) - 1,$

整个链条滑过钉子,即 $x = 8$

代入上式得 $t = \dfrac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$ (秒)

(2) $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

*分析思路:

第一步 将 $f(x)$ 转化为

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求出如下两个方程的特解

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第三步 利用叠加原理求出原方程的特解

第四步 分析原方程特解的特点

第一步 利用欧拉公式将 $f(x)$ 变形

$$f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+\widetilde{P}_n(x)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]$$

$$=\left[\frac{P_l(x)}{2}+\frac{\widetilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda+i\omega)x}$$

$$+\left[\frac{P_l(x)}{2}-\frac{\widetilde{P}_n(x)}{2i}\right]e^{(\lambda-i\omega)x}$$

令 $m=\max\{n,l\}$，则

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)}\,e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

第二步 求如下两方程的特解

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \qquad ②$$

$$y'' + py' + qy = \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}} \qquad ③$$

设 $\lambda+i\omega$ 是特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$), 则 ② 有特解:

$$y_1^* = x^k Q_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x} \quad (Q_m(x)\text{为}m\text{次多项式})$$

故 $\quad (y_1^*)'' + p(y_1^*)' + q\,y_1^* \equiv P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}$

等式两边取共轭 :

$$\overline{y_1^*}'' + p\,\overline{y_1^*}' + q\,\overline{y_1^*} \equiv \overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

这说明 $\overline{y_1^*}$ 为方程 ③ 的特解 .

第三步 求原方程的特解

原方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

利用第二步的结果, 根据叠加原理, 原方程有特解 :

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[Q_m e^{i\omega x} + \overline{Q_m}\, e^{-i\omega x}\right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[\, Q_m (\cos\omega x + i\sin\omega x) + \overline{Q_m}(\cos\omega x - i\sin\omega x)\right]$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \widetilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

其中 $R_m, \widetilde{R}_m$ 均为 m 次多项式 .

第四步 分析 y^*的特点

$$y^* = y_1^* + \overline{y_1^*}$$

$$= x^k e^{\lambda x}\left[R_m \cos\omega x + \tilde{R}_m \sin\omega x\right]$$

因

$$\overline{y^*} = \overline{y_1^* + \overline{y_1^*}} = \overline{y_1^*} + \overline{\overline{y_1^*}}$$

$$= \overline{y_1^*} + y_1^*$$

$$= y^*$$

所以 y^*本质上为实函数，因此 $R_m, \tilde{R}_m$ 均为 m 次实多项式 .

小结:

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 $(k = 0, 1)$, 则可设特解:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m \cos\omega x + \widetilde{R}_m \sin\omega x]$$

其中 $m = \max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例4. 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda = 0,\ \omega = 2,\ P_l(x) = x,\ \widetilde{P}_n(x) = 0,$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$

$\lambda \pm i\omega = \pm 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (ax + b)\cos 2x + (cx + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3ax - 3b + 4c)\cos 2x - (3cx + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数 , 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\therefore\ a = \dfrac{-1}{3},\ d = \dfrac{4}{9}$

$b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \dfrac{-1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$.

例5. 求方程 $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2 + 9 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$\pm 3i$ 为特征方程的单根，因此设非齐次方程特解为

$$y^* = x(a\cos 3x + b\sin 3x)$$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x \underline{- 6a}\sin 3x = \underline{18}\cos 3x \underline{- 30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a = 5,\quad b = 3,$

因此特解为 $y^* = x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$

所求通解为

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$$

例6. 设下列高阶常系数线性非齐次方程的特解形式:

(1) $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$

(2) $y^{(4)}+y''=x+e^{x}+3\sin x$

解: (1) 特征方程 $r^{4}+2r^{2}+1=0$, 即 $(r^{2}+1)^{2}=0$, 有二重根 $r=\pm i$, 所以设非齐次方程特解为

$$y^{*}=x^{2}(a\cos x+b\sin x)$$

(2) 特征方程 $r^{4}+r^{2}=0$, 即 $r^{2}(r^{2}+1)=0$ 有根

$$r_{1,2}=0,\quad r_{3,4}=\pm i$$

利用叠加原理，可设非齐次方程特解为

$$y^{*}=x^{2}(ax+b)+ce^{x}+x(d\cos x+k\sin x)$$

例7. 求方程 $y'' + y = \tan x$ 的通解.

解 对应齐方通解 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$

用常数变易法求非齐方程通解

设 $y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x,$

则 $y' = \underline{-c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x} + \underline{c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x}$

令 $c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \qquad (1)$

则 $y'' = -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x - c_1(x)\cos x - c_2(x)\sin x$

将 y、y'' 代入原方程，得

$$-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \tan x \qquad (2)$$

由(1)、(2)解得

$$c_1'(x) = -\sin x \tan x, \quad c_2'(x) = \sin x$$

积分得 $$\begin{cases} c_1(x) = \sin x - \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C_1 \\ c_2(x) = -\cos x + C_2 \end{cases},$$

原方程通解为

$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x,$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln\left|\sec x + \tan x\right|.$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,e^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 $k\,(=0,1,2)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x)\,e^{\lambda x}$$

2. $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 $k\,(=0,1)$ 重根，则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l\,,\,n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.

思考与练习

1 . (填空) 设 $y'' + y = f(x)$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k\,e^{2x}$$

提示: $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \widetilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + \widetilde{R}_m(x)\sin\omega x\right]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

2. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$ 的通解（其中 α 为实数）.

解: 特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0$, 特征根: $r_1 = r_2 = -2$

对应齐次方程通解: $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

$\alpha \neq -2$时, 令 $y^* = Ae^{\alpha x}$, 代入原方程得 $A = \dfrac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{(\alpha+2)^2} e^{\alpha x}$

$\alpha = -2$时, 令 $y^* = Bx^2 e^{\alpha x}$, 代入原方程得 $B = \dfrac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \dfrac{1}{2} x^2 e^{\alpha x}$

3. 已知二阶常微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y = e^{-x}(1 + xe^{2x})$，求微分方程的通解 .

解: 将特解代入方程得恒等式

$$(1 - a + b)e^{-x} + (2 + a)e^x + (1 + a + b)xe^x = ce^x$$

比较系数得 $\begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 2 + a = c \\ 1 + a + b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

故原方程为 $y'' - y = 2e^x$

$\boxed{y = e^{-x} + xe^x}$

对应齐次方程通解: $Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

原方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$

练 习 题 2

一、求下列微分方程的通解:

1、$y'' + a^2 y = e^x$;

2、$y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$;

3、$y'' + 4y = x\cos x$;

4、$y'' - y = \sin^2 x$.

二、求下列各微分方程满足已给初始条件的特解:

1、$y'' - 4y' = 5$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$;

2、$y'' - 2y' + y = xe^x - e^x$, $y|_{x=1} = 1$, $y'|_{x=1} = 1$;

3、$y'' + 4y = \dfrac{1}{2}(x + \cos 2x)$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 0$.

三、设函数 $\varphi(x)$连续, 且满足

$$\varphi(x)=e^{x}+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x \varphi(t)dt,$$

求 $\varphi(x)$.

四、设$f(x)$可导，且满足

$$f(x)\cos x+2\int_0^x f(x)\sin x dx=x+1$$

求$f(x)$.

练习题2 答案

一、1、 $y = C_1\cos ax + C_2\sin ax + \dfrac{e^x}{1+a^2}$;

2、 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}(\dfrac{3}{2}x^2 - 3x)$;

3、 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{3}x\cos x + \dfrac{2}{9}\sin x$;

4、 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + \dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{2}$.

二、1、 $y = \dfrac{1}{16}(11 + 5e^{4x}) - \dfrac{5}{4}x$;

2、 $y = [\dfrac{2}{e} - \dfrac{1}{6} + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e})x]e^x + \dfrac{x^3}{6}e^x - \dfrac{x^2}{2}e^x$;

3、 $y = -\dfrac{1}{16}\sin 2x + \dfrac{1}{8}x(1 + \sin 2x)$.

三、$\varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^{x})$.

四、$f(x)=\cos x+\sin x$.

3. 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

$(p_k$为常数)

令 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$

$\downarrow$

常系数线性微分方程

欧拉方程的算子解法:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow x y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Longrightarrow x^2 y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

…… 计算繁!

记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ D^k=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\ (k=2,3,\cdots)$,则由上述计算可知:

$$xy'=Dy$$

$$x^2y''=D^2y-Dy=D(D-1)y$$

用归纳法可证 $x^k y^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)\,y$

于是欧拉方程

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

转化为常系数线性方程:

$$D^n y+b_1D^{n-1}y+\cdots+b_ny=f(e^t)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}\,t^n}+b_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}+\cdots+b_ny=f(e^t)$$

例1. 求方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x$ 的通解.

解: 令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x$, 记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$, 则原方程化为

$$D(D-1)y - 2Dy + 2y = t^2 - 2t$$

即 $$(D^2 - 3D + 2)y = t^2 - 2t$$

亦即 $$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^2 - 2t \qquad ①$$

特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 其根 $r_1 = 1, r_2 = 2$,

则①对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

设特解: $y^* = At^2 + Bt + C$

代入①确定系数, 得

$$y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

① 的通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

换回原变量, 得原方程通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}\ln^2 x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}$$

例2. 求方程 $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$ 的通解.

解: 将方程化为 $x^2 y'' - x y' + y = 2x$ (欧拉方程)

令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程化为

$$[D(D-1) - D + 1]\, y = 2e^t$$

即 $$(D^2 - 2D + 1) y = 2e^t \qquad ②$$

特征根: $r_1 = r_2 = 1$,

设特解: $y = At^2 e^t$, 代入 ② 解得 $A = 1$, 所求通解为

$$y = (C_1 + C_2\, t\,)e^t + t^2 e^t$$

$$= (C_1 + C_2 \ln x)\, x + x \ln^2 x$$

例3. 设函数 $y=y(x)$ 满足

$$xy+\int_1^x[3y+t^2y''(t)]\,\mathrm{d}\,t=5\ln x,\quad x\geq 1$$

且 $y'|_{x=1}=0$，求 $y(x)$.

解: 由题设得定解问题

$$\begin{cases} x^2y''+xy'+4y=\dfrac{5}{x} & ③\\ y(1)=0,\quad y'(1)=0 & ④\end{cases}$$

令 $x=e^t$, 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$, 则③化为

$$[D(D-1)+D+4]\,y=5e^{-t}$$

$$(D^2+4)\,y=5e^{-t} \qquad ⑤$$

特征根: $r=\pm 2i$, 设特解: $y^*=Ae^{-t}$, 代入⑤得 $A=1$

得通解为

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-t}$$
$$= C_1 \cos(2\ln x) + C_2 \sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

利用初始条件④得

$$C_1 = -1, \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

故所求特解为

$$y = -\cos(2\ln x) + \frac{1}{2}\sin(2\ln x) + \frac{1}{x}$$

思考: 如何解下述微分方程

$$(x+a)^2 y'' + p_1(x+a)\,y' + p_2 y = f(x)$$

提示: 原方程

先令 $u = x+a$

$$u^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}u^2} + p_1 u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + p_2 y = f(u-a)$$

令 $u = e^t$, 记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$[D(D-1) + p_1 D + p_2]\,y = f(e^t - a)$$

直接令

$x + a = e^t$

记 $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

小结

欧拉方程解法思路

变系数的线性微分方程	$\xrightarrow[x = e^t \text{ 或 } t = \ln x]{\text{变量代换}}$	常系数的线性微分方程

注意：欧拉方程的形式.

练 习 题 3

求下列欧拉方程的通解：

1. $x^2y'' + xy' - y = 0;$
2. $x^2y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x;$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x.$

练习题3 答案

1. $y = C_1 + \dfrac{C_2}{x}.$

2. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \dfrac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \dfrac{1}{4}.$

3. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \dfrac{1}{6} x^2 \ln^3 x.$