第4章 一元微分学

微积分学的创始人:

英国数学家 Newton

德国数学家 Leibniz

微分学
- 导数 —— 描述函数变化快慢
- 微分 —— 描述函数变化程度

都是描述物质运动的工具(从微观上研究函数)

4.1.1 导数的定义

一、引例

二、导数的定义

三、导数的几何意义

四、函数的可导性与连续性的关系

五、单侧导数

一、 引例

1. 变速直线运动的速度

设描述质点运动位置的函数为

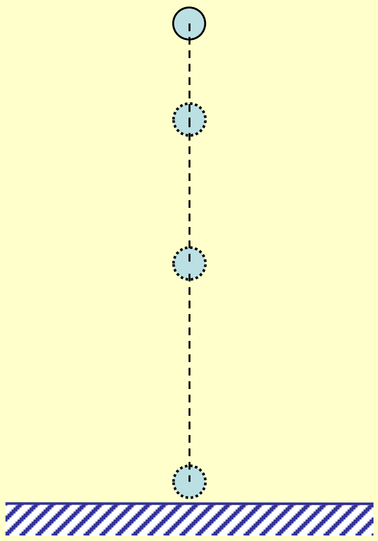
$$s = s(t)$$

则 t_0 到 t 的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

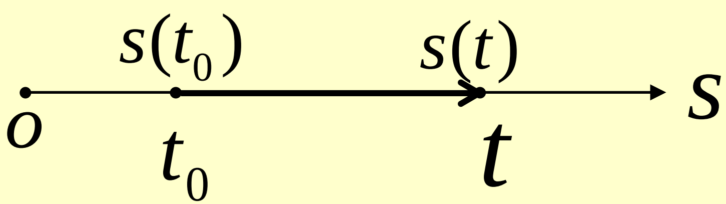
而在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$



自由落体运动

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

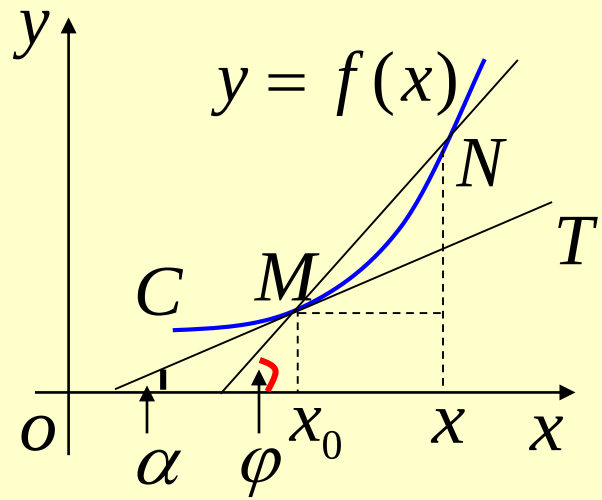


2. 曲线的切线斜率

曲线 $C: y = f(x)$ 在 $\boldsymbol{M}$ 点处的切线

—— 割线 $\boldsymbol{M\,N}$ 的极限位置 $\boldsymbol{M\,T}$

(当$\varphi \to \alpha$时)



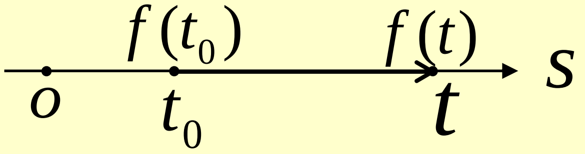
切线 $\boldsymbol{MT}$ 的斜率

$$k = \tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha} \tan\varphi$$

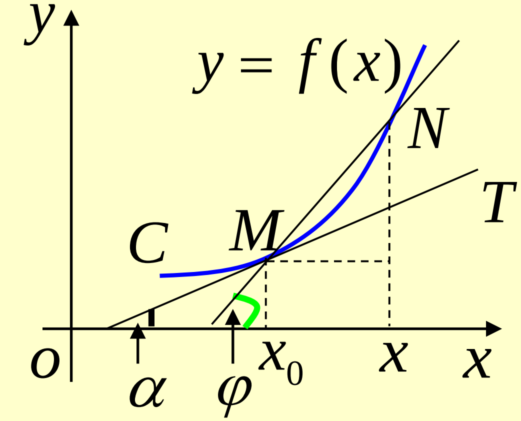
割线 $\boldsymbol{M\,N}$ 的斜率 $\tan\varphi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$k = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$



切线斜率 $k = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



两个问题的共性:

所求量为函数增量与自变量增量之比的极限 .

类似问题还有:

加速度 是速度增量与时间增量之比的极限

角速度 是转角增量与时间增量之比的极限

线密度 是质量增量与长度增量之比的极限

电流强度 是电量增量与时间增量之比的极限

………

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ 变化率问题

二、导数的定义

定义1. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

若
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta y = f(x) - f(x_0) \\ \Delta x = x - x_0\end{gathered}}$$

存在, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0处**可导**, 并称此极限为

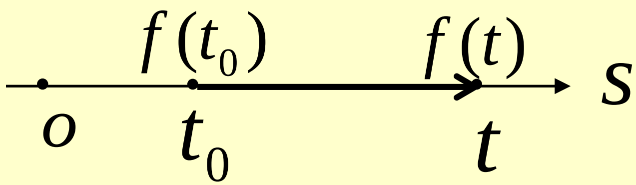
$y = f(x)$ 在点 x_0的**导数**. 记作:

$$y'\big|_{x=x_0}\ ; \quad f'(x_0)\ ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\ ; \quad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

即
$$y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

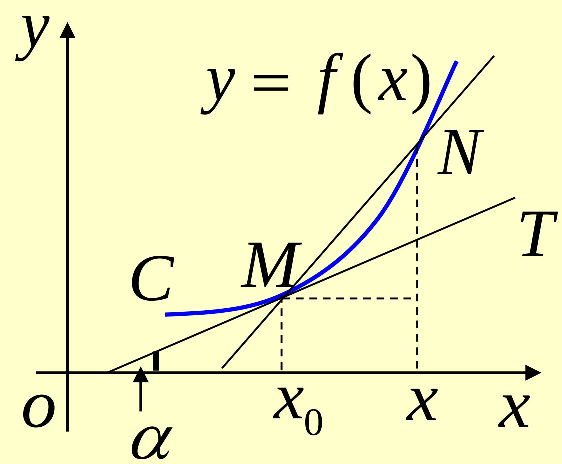
运动质点的位置函数 $s = f(t)$



在 t_0 时刻的瞬时速度

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

曲线 $C: y = f(x)$ 在 M 点处的切线斜率



$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0)$$

说明: 在经济学中, 边际成本率,

边际劳动生产率和边际税率等从数学角度看就是导数.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Delta y = f(x) - f(x_0) \\ \Delta x = x - x_0 \end{array}}$$

若上述极限不存在，就说函数 在点 x_0不可导.

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$，也称 $f(x)$ 在 x_0 的导数为无穷大 .

若函数在开区间 $\boldsymbol{I}$ 内每点都可导, 就称函数在 $\boldsymbol{I}$ 内可导.

此时导数值构成的新函数称为**导函数**.

记作: y'； $f'(x)$； $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$； $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

注意: $f'(x_0) = f'(x)\Big|_{x=x_0} \neq \dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$

例1. 求函数 $f(x)=C$ **(C 为常数) 的导数.**

解: $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

即 $\boxed{(C)'=0}$

例2. 求函数 $f(x)=x^n\ (n\in \mathrm{N}^+)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+a\,x^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$=n\,a^{n-1}$$

说明：

对一般幂函数 $y=x^{\mu}$（μ　　为常数）

$$\boxed{(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}}$$

（以后将证明）

例如，$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(\frac{1}{x})'=(x^{-1})'=-x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}})'=(x^{-\frac{3}{4}})'=\frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

例3. 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解: 令 $h=\Delta x$, 则

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0} 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}\Big/ h$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x$$

即 $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

类似可证得 $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$

例4. 求函数 $f(x)=\ln x$ 的导数.

解: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

或

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$$

即 $$\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$$

例5. 证明函数 $f(x)=|x|$ **在 $x = 0$ 不可导.**

证: $\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0 \end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ **不存在**，即 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

例6 证明 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ **在 $x = 0$ 处不可导.**

证：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ ∄

所以 f 在 $x = 0$ 处不可导.

例7. 设 $f'(x_0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{2(-h)}\right]$

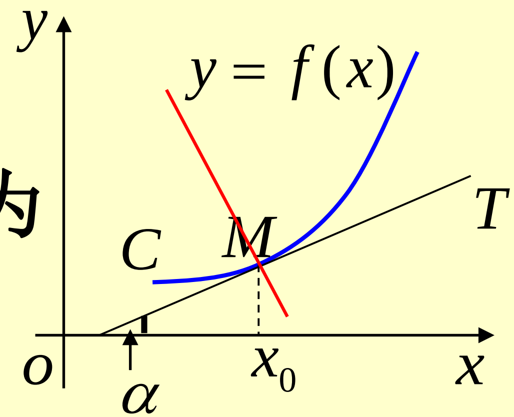
$$=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0)$$

注: 是否可按下述方法作?

令 $t=x_0-h$, 则

原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+2h)-f(t)}{2h}\cancel{=}\lim\limits_{h\to 0}f'(t)\cancel{=}f'(x_0)$

三、 导数的几何意义

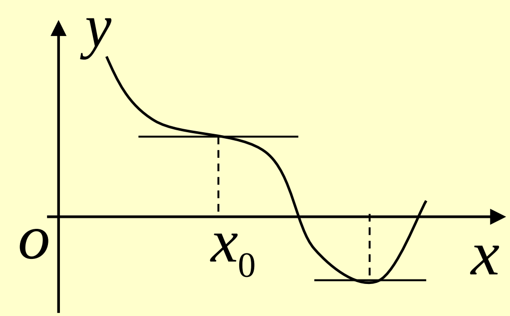


曲线$y=f(x)$在点$(x_0\,,\,y_0)$的切线斜率为

$$\tan\alpha = f'(x_0)$$

若 $f'(x_0)=0$, **切线与 x 轴平行, x_0称为驻点;**

若 $f'(x_0)=\infty$,**切线与 x 轴垂直 .**



$f'(x_0)\neq\infty$时, **曲线在点$(x_0\,,\,y_0)$处的**

切线方程: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线方程: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$

例8. 问曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 哪一点有垂直切线？哪一点处的切线与直线 $y=\frac{1}{3}x-1$ 平行？写出其切线方程.

解: $\because\ y'=(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad\therefore\ y'\big|_{x=0}=\infty$,

故在原点 (0 , 0) 有垂直切线 $x=0$

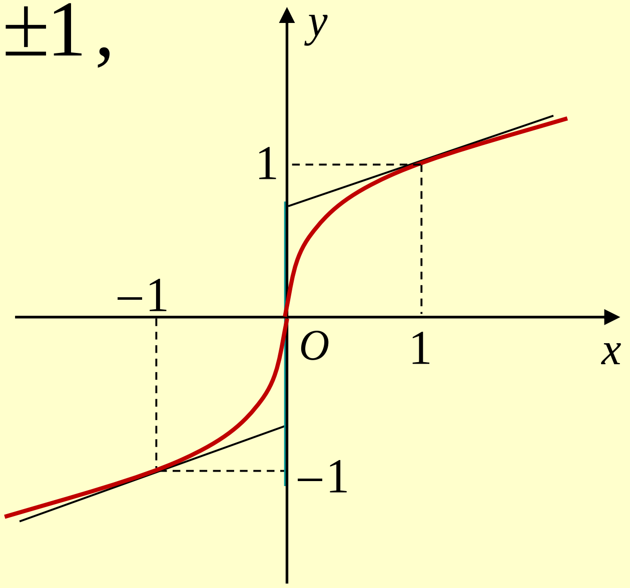
令 $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}$, 得 $x=\pm1$, 对应 $y=\pm1$,

则在点(1,1) , (–1,–1) 处与直线

$y=\frac{1}{3}x-1$ 平行的切线方程分别为

$$y-1=\frac{1}{3}(x-1),\quad y+1=\frac{1}{3}(x+1)$$

即 $\quad x-3y\pm2=0$



四、 函数的可导性与连续性的关系

定理1. $f(x)$ 在点 x 处可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x 处连续

证: 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在，因此必有

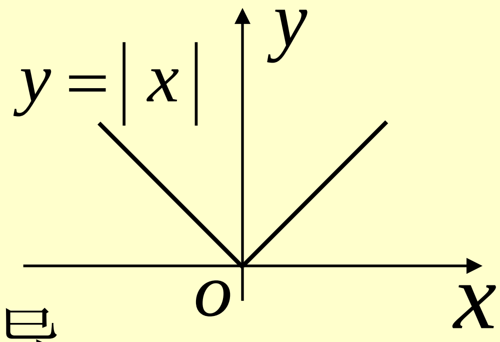
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha\,,\ \text{其中}\ \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

故 $$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\,\Delta x \xrightarrow{\Delta x\to 0} 0$$

所以函数 $y=f(x)$ 在点 x 连续 .

注意: 函数在点 x **连续未必可导**.

反例: $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导.



例9. 证明函数$f(x)=x^2D(x)$ 仅在 $x=0$ 处可导，

其中 $D(x)$ 是熟知的Dirichlet函数.

证: 当 $x_0\neq 0$ 时, 用归结原理容易证明 $f(x)$ 在点 x_0 不连续, 由定理 1, $f(x)$ 在点 x_0 不可导.

当 $x_0=0$ 时，因为 $|D(x)|\leq 1$，所以有

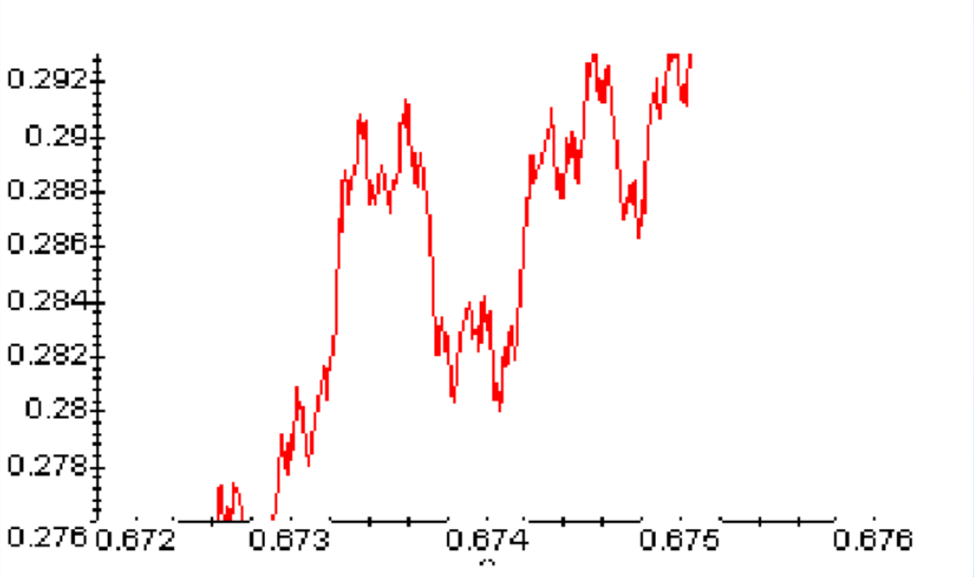
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0\,.$$

◆ Weiestrass 函数 处处连续处处不可导

$$W(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(b^n x)$$

其中： $b>1>a>0,\quad ab\ge 1$

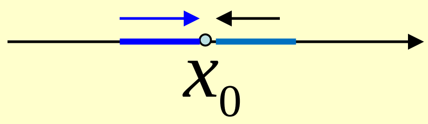
◆ Weiestrass 函数 $(a=2, b=3)$



五、单侧导数

定义2 . 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0的某个右 (左) 邻域内有定义, 若极限

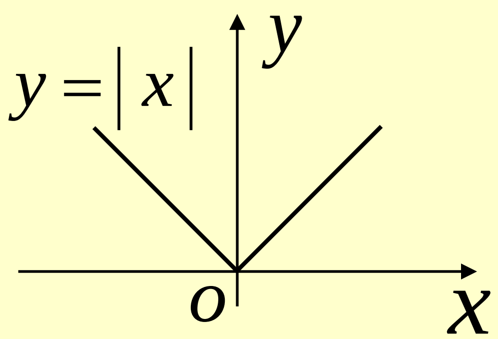
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+ \\ (\Delta x\to 0^-)}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



存在,则称此极限值为$f(x)$在 x_0 处的右 (左) 导数,记作

$f'_+(x_0)$ $(f'_-(x_0))$

即 $$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^{\pm}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



例如, $f(x)=|x|$ 在 $\boldsymbol{x=0}$ 处有

$$f'_+(0)=+1,\qquad f'_-(0)=-1$$

定理2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导的**充分必要**条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 存在, 且 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

简写为 $\boxed{f'(x_0)\text{存在} \iff f'_+(x_0)=f'_-(x_0)}$

定理3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右 **(左)** 导数存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 必 右 **(左)** 连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

显然:

$f(x)$ 在闭区间 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 上可导 $\Longrightarrow$ $f(x)\in C[a,b]$

例10. 设 $f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x\geq 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

试求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右导数和导数.

解： 容易看到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又因

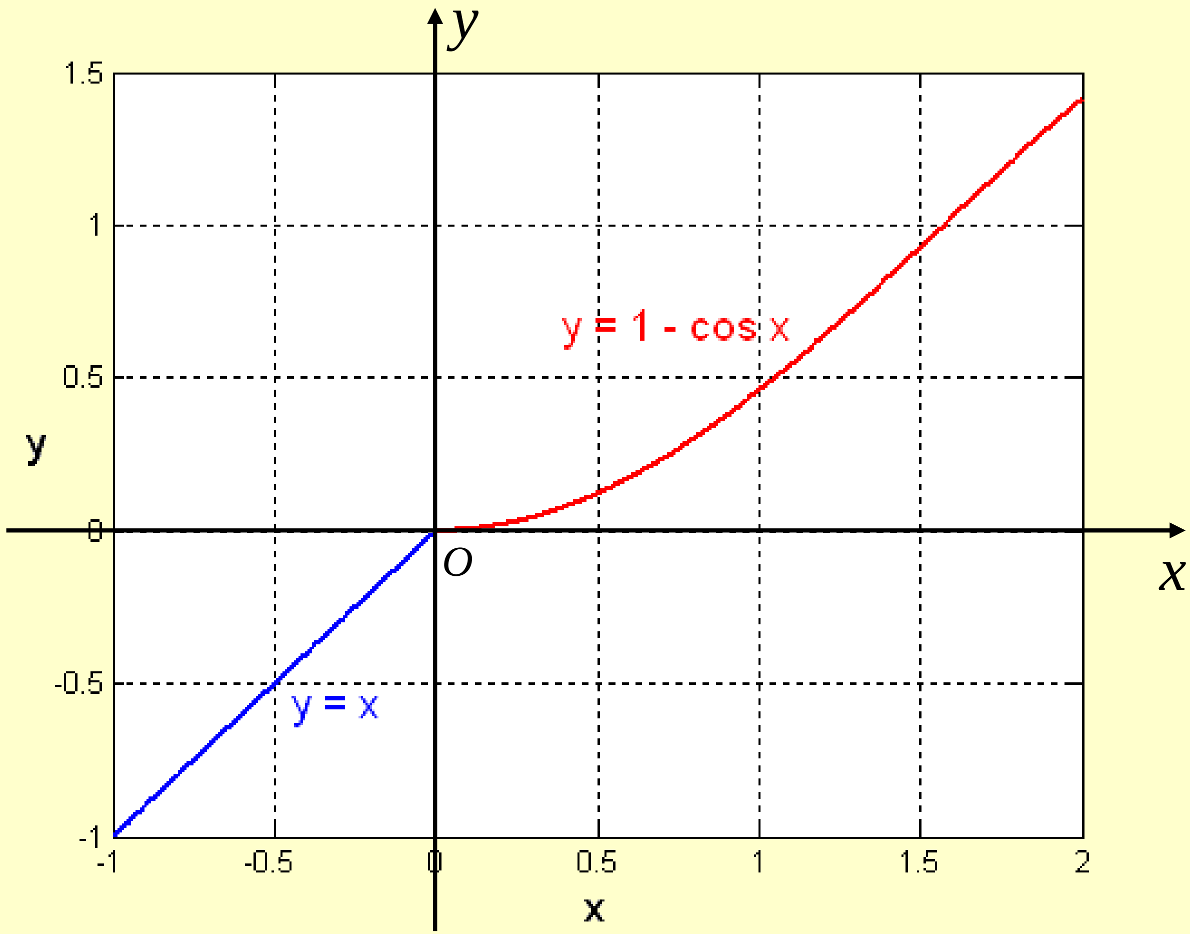
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}, & \Delta x>0,\\ 1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

所以 $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}=0,$

$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}1=1.$

$\Rightarrow f'(0)\nexists$

由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.



例11. 证明：若 $f'_+(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使对任何 $x\in(x_0, x_0+\delta)$, 有

$$f(x)>f(x_0). \tag{1}$$

证：由右导数的定义:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$$

与极限保号性，推知存在 $\delta>0$, 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\ ,\ \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta).$$

再由 $x>x_0$, 得 $f(x)-f(x_0)>0$, 于是 (1) 式成立.

内容小结

1. 导数的实质: 增量比的极限;

2. $f'(x_0)=a \rightleftarrows f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=a$

3. 导数的几何意义: 切线的斜率;

4. 可导必连续, 但连续不一定可导;

5. 已学求导公式 :

$(C)'=0;\qquad (x^\mu)'=\mu x^{\mu-1};\qquad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(\sin x)'=\cos x;\qquad (\cos x)'=-\sin x;$

6. 判断可导性 $\left\{\begin{array}{l}\text{不连续, 一定不可导.}\\ \text{直接用导数定义;}\\ \text{看左右导数是否存在且相等.}\end{array}\right.$

补充例题

1. 函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 与导函数 $f'(x)$ 有什么区别与联系？

区别： $f'(x)$ 是函数， $f'(x_0)$ 是数值；

联系： $f'(x)\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$

注意： $f'(x_0) \cancel{\overset{?}{=}} [f(x_0)]'$

2. 设 $f'(x_0)$ 存在，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=\underline{\ -f'(x_0)\ }.$$

3. 若 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 是否在 $x=0$ 可导?

解: 由题设 $f(0)=0$

$$0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$$

由夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，且

$$f'(0)=0$$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x\,, & x<0\\ a\,x\,, & x\ge 0\end{cases}$，问 $\boldsymbol{a}$ 取何值时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，并求出 $f'(x)$.

解: 显然该函数在 $\boldsymbol{x=0}$ 连续.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax-0}{x-0}=a$$

故 $a=1$ 时 $f'(0)=1$，此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 都存在，

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

5. **设** $f'(x)$ **存在，且** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$**，求** $f'(1)$.

解：因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{(-x)}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)=-1$$

所以 $f'(1)=-2.$

6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明:

$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

证：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 所以有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

又 $f(x)$在 $x=0$ 处连续, 故 $f(0)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

思考题

1. 设$f(x)$ 是定义在R上的函数，且对 $\forall x_1$， $x_2 \in R$， 都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$$

若 $f'(0)=1$ ， 证明：对 $\forall\, x \in R$ ， 都有

$$f'(x)=f(x).$$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f'(a)\neq 0$ ， 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$.

3. 试构造一个函数 $f(x)$， 它在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可导，

但 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f(x+\dfrac{1}{n})-f(x)\right)$ 处处存在.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x=0. \end{cases}(\alpha>0)$

证明：当 $\alpha>1$时，$f'(0)$ 存在；当 $\alpha\leq 1$ 时，$f'(0)$ 不存在.

5. 证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)=K$ ，

$f_{+}'(a)=f_{-}'(b)>0$ ，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ ，使得

$$f(\xi)=K.$$

6. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，数列 α_n,β_n 满足:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=x_0,\quad \alpha_n<x_0<\beta_n\ (n\in N^{+})$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$

知识扩展

定理4(达布(Darboux)定理，导数的介值定理)

如果 f 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，k 是介于 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = k$.

证 令 $F(x) = f(x) - kx$，则 $F'(x) = f'(x) - k$.根据费马定理，只要证明 $F(x)$ 在 (a, b) 上有极值点即可.

由于 $F'_+(a) \cdot F'_-(b) = (f'_+(a) - k) \cdot (f'_-(b) - k) < 0$，可

设 $F'_{+}(a)>0$, $F'_{-}(b)<0$. 由例 10，分别存在

$$x_1\in U_{+}^{\circ}(a),\ x_2\in U_{-}^{\circ}(b),\ 且\ x_1<x_2,$$

使得

$$F(x_1)>F(a),\ F(x_2)>F(b).$$

由此可知，$[a,b]$ 上的连续函数 F，其最大值必在某一点 $c\in(a,b)$ 处取得. 区间内取得的最大值一定是极大值，由费马定理得 $F'(c)=0$，即

$$f'(c)=k,\quad c\in(a,b).$$

定理5（导数的极限定理）

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^{o}(x_0)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 也可导，且 $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A.$

注1： 导数的介值定理表明“介值定理”不是连续函数所特有的，某些不连续函数也有其“介值定理”.

闭区间上的可导函数的导函数（区间端点处考虑左右导数）可能有间断点，但“介值定理”成立.

注2： 导函数不可能有第一类间断点，即：有第一类间断点的函数一定不是某函数的导函数.