4.3.4 函数的单调性与极值

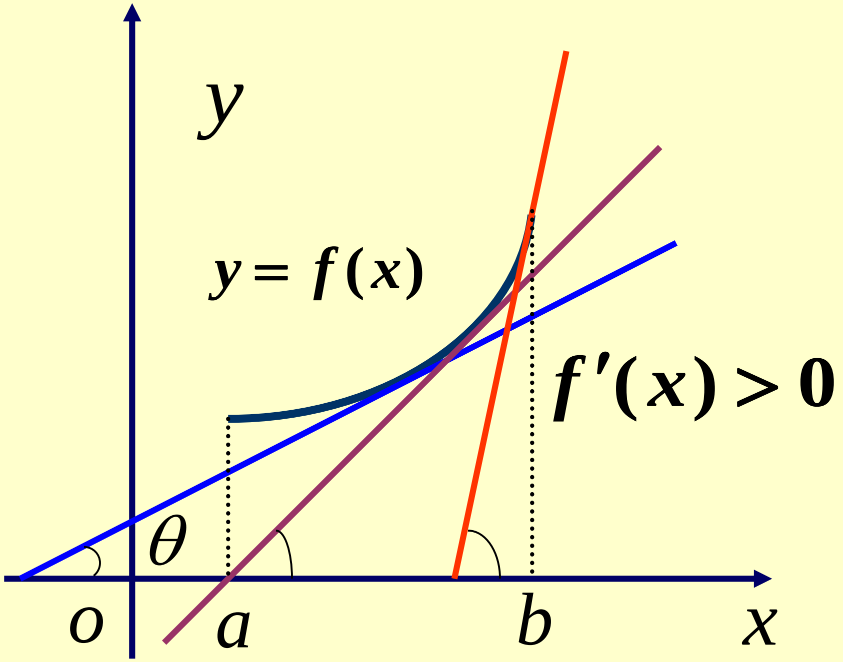
一、函数的单调性

二、函数的极值及其求法

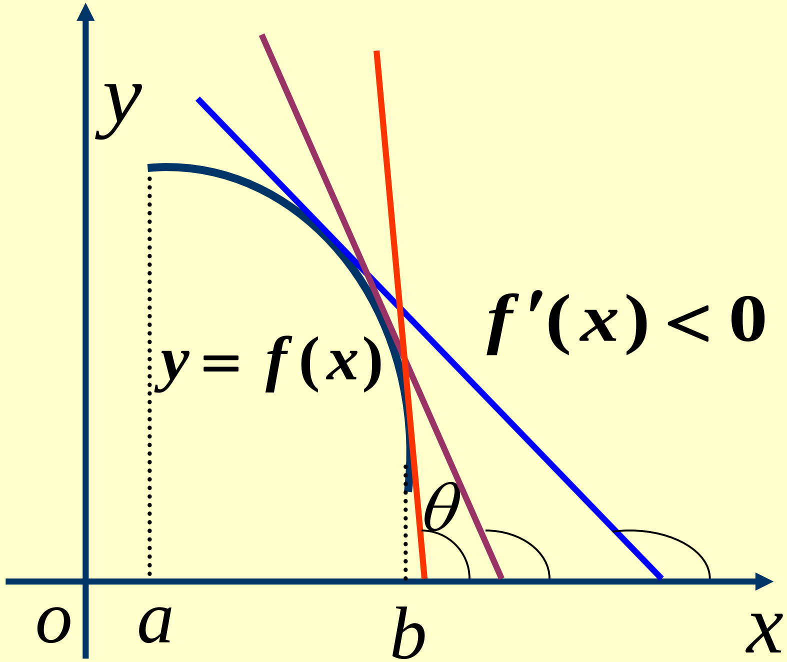
三、最大值与最小值问题

一、函数的单调性

从导数的几何意义考察函数的单调性：



$\theta<90°$，单调上升



$\theta>90°$，单调下降

定理1 （导数的正负与函数升降的关系）

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则

(i) $f(x)$在$[a,b]$上单调增（减）$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0(\le 0)$.

(ii) $f(x)$在$[a,b]$上严格单调增（减）$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0(\le 0)$,

且$\forall(\alpha,\beta)\subset(a,b), f'(x)\not\equiv 0, x\in(\alpha,\beta)$.

证: (i) 若 $f(x)$ 在(a,b) 内单调增，则 $\forall x,y\in(a,b)$ ，有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ge 0\ (x\ne y),$$

令$y\to x$, 得 $f'(x)=\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\ge 0$.

若$\forall x\in(a,b)$，$f'(x)\ge 0$ ，则由Lagrange中值定理，

$\forall x, y \in (a,b)$, 且$x < y$，有

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y) \le 0 \quad (\xi在x,y之间),$$

所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增.　单调减的情形类似可证.

(ii) 略(见教材p94定理4.3.10).

注1. 函数严格单调的充分条件:

(i) 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0(< 0)$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调增(减).

(ii) 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且除有限个点外, $f'(x) > 0(< 0)$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调增(减).

注2. 以上结论对任意区间 I 都成立.

函数单调区间的求法:

导数等于零的点和不可导点，可能是单调区间的分界点.

用方程 $f'(x)=0$ 的根及 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间, 然后判断区间内导数的符号.

例1. 讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

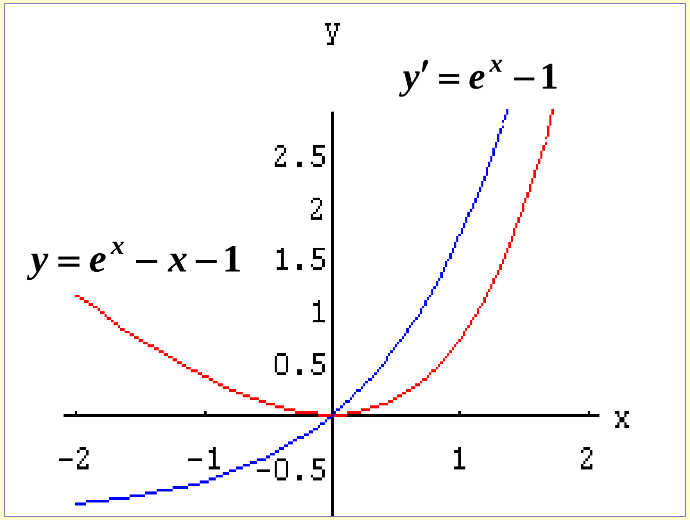
解 $D=(-\infty,+\infty)$, $y'=e^x-1.$

在 $(-\infty,0)$ 内, $y'<0$,

函数单调减少;

在 $(0,+\infty)$ 内, $y'>0$,

函数单调增加.



例2. 求函数 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ 的单调区间.

解：定义域是 R. $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(5x-7)$.

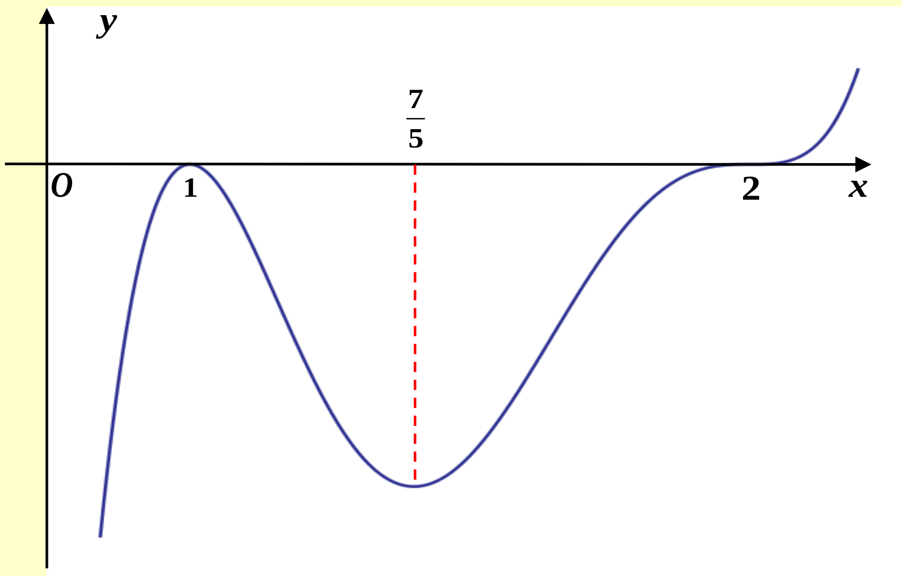
令 $f'(x)=0$ 解得 $x=1,\ \dfrac{7}{5}$ 和 2. 列表讨论如下：

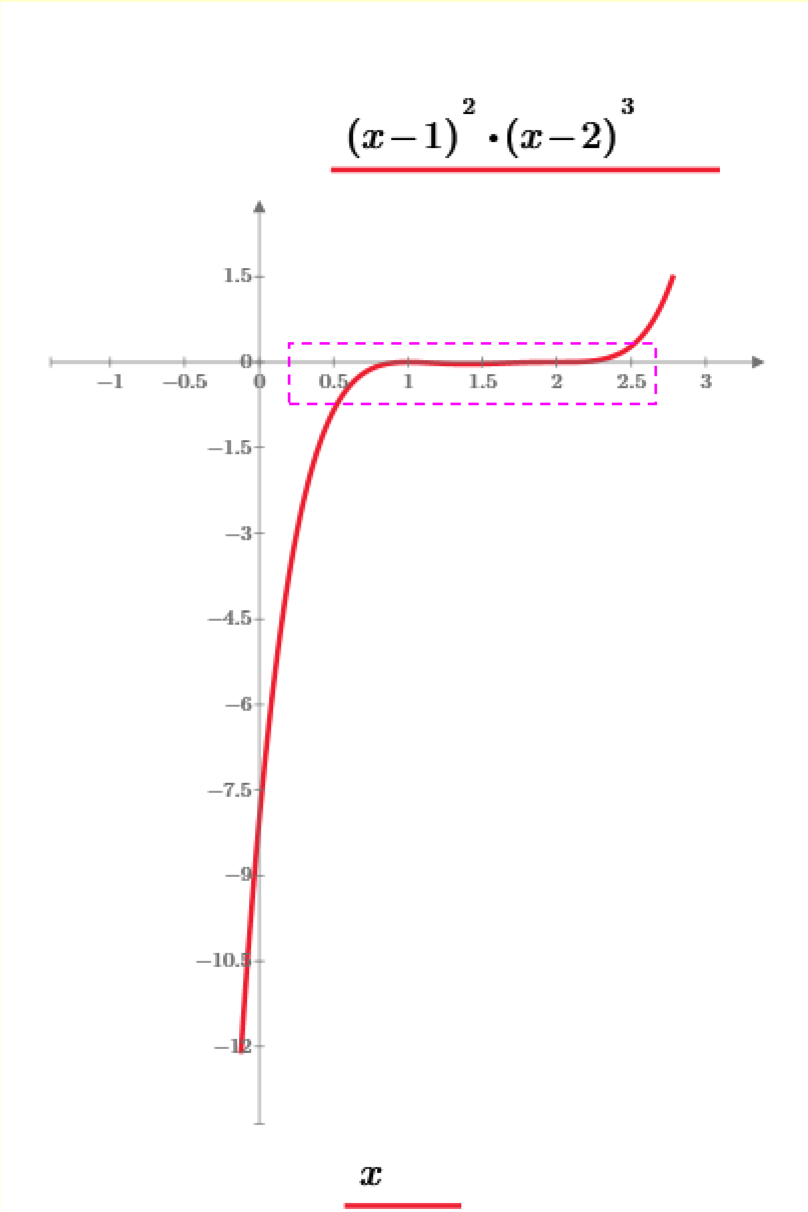
x	$(-\infty,1)$	$(1,\frac{7}{5})$	$(\frac{7}{5},2)$	$(2,+\infty)$
y'	+	—	+	+
y	↗	↘	↗	↗

因 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以 $f(x)$ 在 $(1,\dfrac{7}{5})$ 内严格单调减，

在 $(-\infty,1)$ 和 $(\dfrac{7}{5},+\infty)$ 内严格单调增.

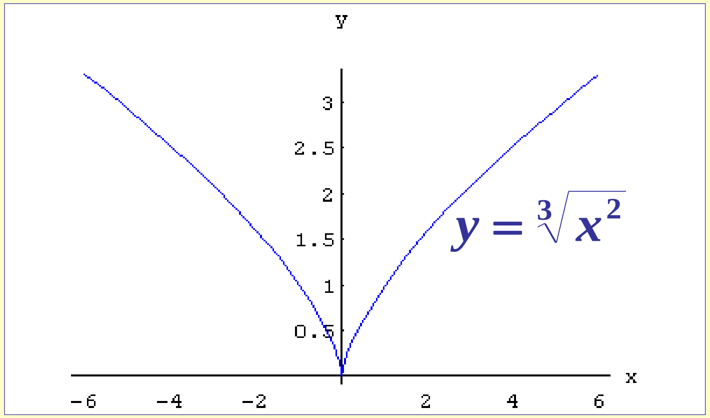
$$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$$





例3. 确定函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

解 $D=(-\infty,+\infty)$.



$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}},\qquad (x\neq 0)$$

当$x=0$时,导数不存在.

当$-\infty<x<0$时, $f'(x)<0$, $\therefore$ 在$(-\infty,0]$上单调减少;

当$0<x<+\infty$时, $f'(x)>0$, $\therefore$ 在$[0,+\infty)$上单调增加;

单调减区间为 $(-\infty,0]$, 单调增区间为 $[0,+\infty)$.

练习:求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间.

利用函数的单调性证明不等式．

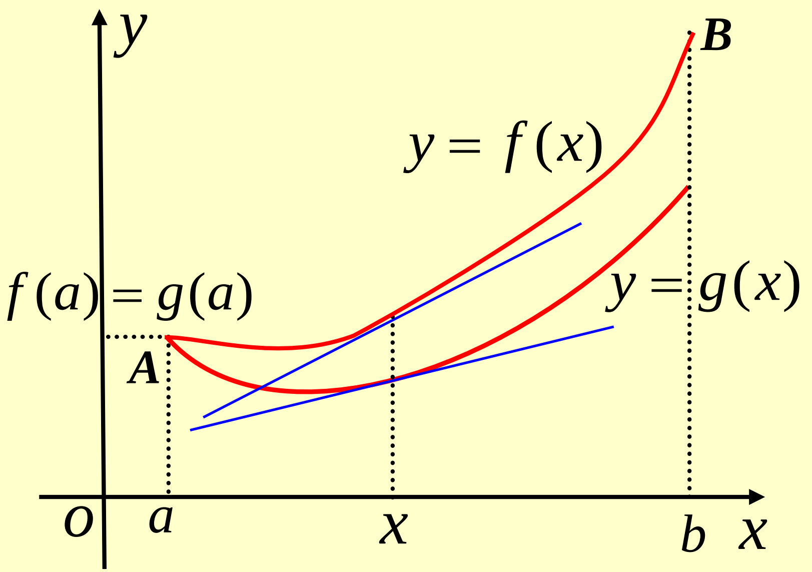
定理 2（不等式定理） 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足条件:

(1) 在$[a, b]$上连续;

(2) 在(a,b)内可导, $f'(x) > g'(x)$, (或 $f'(x) < g'(x)$);

(3) $f(a) = g(a)$, (或 $f(b) = g(b)$),

则在(a,b)内有 $f(x) > g(x)$.



几何意义:

$y = f(x)$在$y = g(x)$之上.

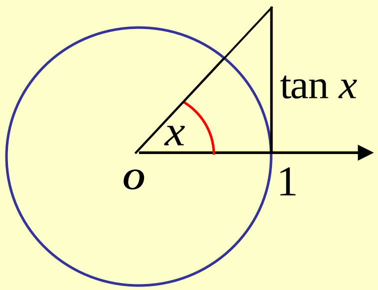
例4. 证明： $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ **时, 成立不等式** $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$.

证：令 $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}$,

则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, **且**

$$f'(x) = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\underline{(x - \tan x) \; < 0}$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减,



又 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 处左连续, **因此**

$f(x) \ge f(\frac{\pi}{2}) = 0$ **从而** $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{2}{\pi}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

例5. 比较 e^{π} 与 π^{e} 的大小.

解：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},(x>0)$

则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}\begin{cases}<0, & x>e,\\ >0, & 0<x<e,\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上严格单调减，又 $e<\pi$

$\therefore\ \dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln \pi}{\pi} \quad \Rightarrow e^{\pi}>\pi^{e}.$

例6. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上二阶可导，且 $f(0)=0, f''(x)<0.$

证明：$f(x)/x$在$(0,+\infty)$上单调减.

证 要证 $f(x)/x$单调减，只要证明其导数

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\le 0$$

令 $g(x)=x f'(x)-f(x)$, 则 $g(0)=0$

且当$x>0$时，$g'(x)=xf''(x)<0$

$\Rightarrow g(x)$在（$0,+\infty$)上单调减，又$g(x)$在$[0,+\infty)$上连续

$\therefore g(x)<g(0)=0$

$\therefore \left(\frac{f(x)}{x}\right)'<0, \Rightarrow \frac{f(x)}{x}$在（$0,+\infty$）上单调减.

小结:(函数的单调性)

单调性的判别是拉格朗日中值定理定理的重要应用.

定理中的区间换成其它有限或无限区间，结论仍然成立.

应用：利用函数的单调性可以确定某些方程实根的个数和证明不等式.

思考题

若 $f'(0)>0$，是否能断定 $f(x)$ 在原点的充分小的邻域内单调递增?

思考题解答

不能断定.　例 $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(1+2\cdot\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x})=1>0$$

但 $f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x},\quad x\neq 0$

当 $x=\dfrac{1}{(2k+\frac{1}{2})\pi}$ 时，$f'(x)=1+\dfrac{4}{(2k+\frac{1}{2})\pi}>0$

当 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$ 时，$f'(x)=-1<0$

注意 k 可以任意大，故在 $x_0=0$ 点的任何邻域内，$f(x)$ 都不单调递增.

思考题:

证明下列不等式:

1. $e^x > 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} \quad (x > 0, n \in N^+).$

2. $\tan(\sin x) > \sin(\tan x) \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2}).$

3. $(1-x)(x^2 e^{\frac{1}{x}} - e^x) > 0 \ (x > 0, x \neq 1).$

4. $(1+\dfrac{1}{x})^x < e < (1+\dfrac{1}{x})^{x+1} \quad (x > 0).$

5. $(1+\dfrac{1}{x})^x (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq 4 \quad (x > 0).$

二、函数的极值及其求法

定义: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内 $U(x_0)$ 内有定义，

对 $\forall x \in U(x_0)$,

(1) $f(x) \le f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极大点，

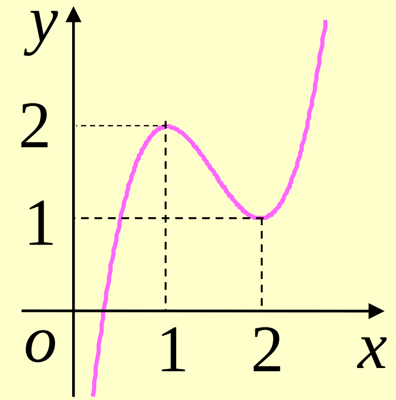
称 $f(x_0)$ 为函数的极大值；

(2) $f(x) \ge f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的极小点，

称 $f(x_0)$ 为函数的极小值 .

极大点与极小点统称为极值点 .

例如 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

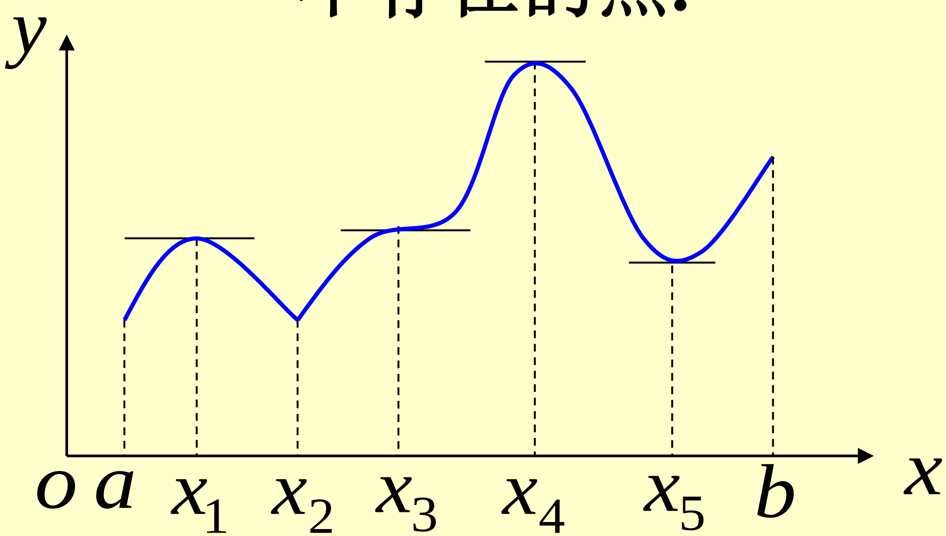


$x=1$ 为极大点，$f(1)=2$ 是极大值

$x=2$ 为极小点，$f(2)=1$ 是极小值

注意： 1) 函数的极值是函数的局部性质.

2) 对常见函数，极值可能出现在导数为 0 或不存在的点.



x_1, x_4 为极大点

x_2, x_5 为极小点

x_3 不是极值点

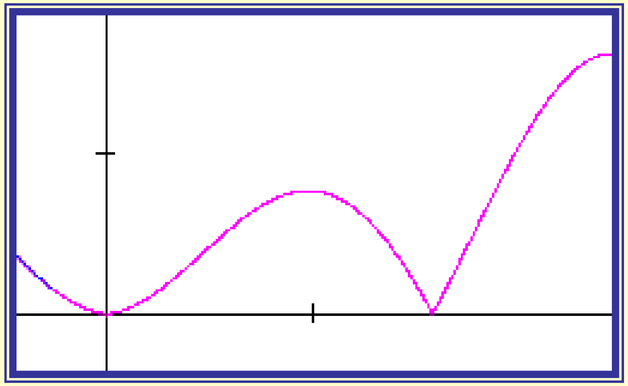
定理 3 (极值的第一充分条件)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续, **且在空心邻域内有导数,** 当x由小到大通过 x_0 时,

(1) $f'(x)$ "左正右负" ,则 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) $f'(x)$ "左负右正" ,则 $f(x)$ 在 x_0 取极小值;

(自证)



点击图中任意处动画播放\暂停

例5. 求函数 $f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值 .

解: 1) 求导数 $f'(x)=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}$

2) 求极值可疑点

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{2}{5}$; 　令 $f'(x)=\infty$, 得 $x_2=0$

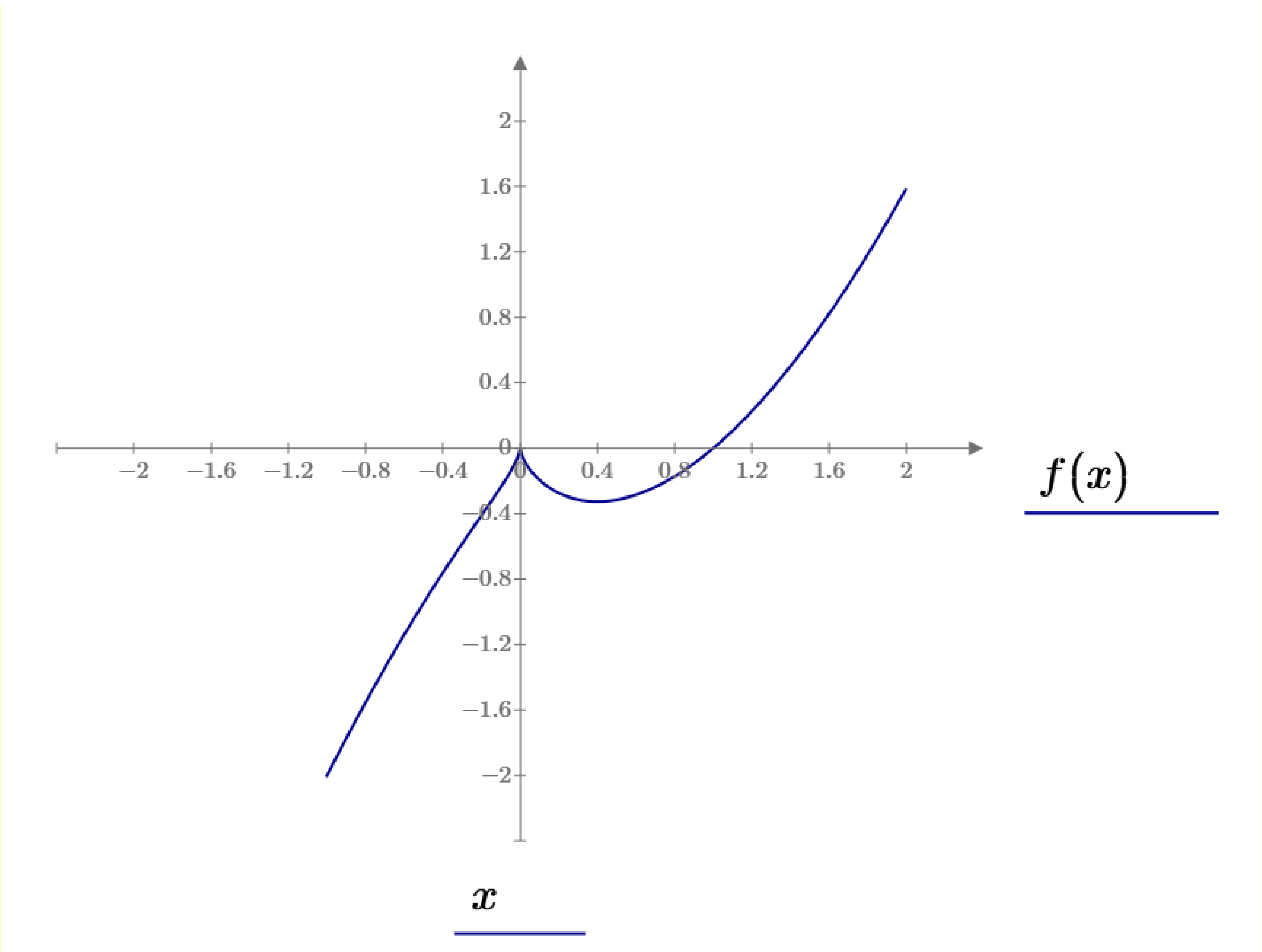
3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-0.33	$\nearrow$

$\therefore x=0$ 是极大点, 其极大值为 $f(0)=0$

$x=\frac{2}{5}$ 是极小点, 其极小值为 $f(\frac{2}{5})=-0.33$

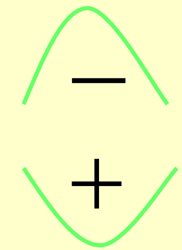
$$f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$$



定理4 **(极值第二充分条件)** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$

(1) 若 $f''(x_0)<0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值；

(2) 若 $f''(x_0)>0$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 取极小值.

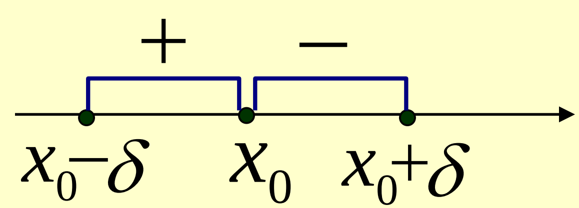


证: (1) $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}$

由 $f''(x_0)<0$ 知, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

故当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, $f'(x)>0$;

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $f'(x)<0$,



由第一判别法知 $f(x)$ 在 x_0 取极大值.

(2) 类似可证 .

例6. 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值 .

解: 1) 求导数

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2,\qquad f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1)$$

2) 求驻点

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$

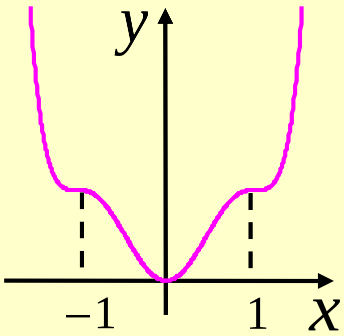
3) 判别

因 $f''(0)=6>0$，故 $f(0)=0$ 为极小值 ;

又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.

由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm 1$ 左右邻域内不变号,

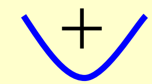
$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm 1$ 没有极值.



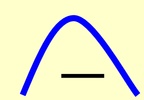
定理5 **(极值第三充分条件)** 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点有直到 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$,

则：1) 当 n 为偶数时, x_0 为极值点，且

$f^{(n)}(x_0)>0$ 时, x_0 是极小点；



$f^{(n)}(x_0)<0$ 时, x_0 是极大点 .



2) 当 n 为奇数时, x_0 不是极值点 .

证: 利用 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$+o((x-x_0)^n)$$

$$\Rightarrow \quad f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

(1)当n为偶数时，若$f^{(n)}(x_0)>0$,则由保号性

$$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0),\text{ 有 }\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}>0,$$

$$\Rightarrow f(x)>f(x_0),\ f(x_0)\text{为极小值；}$$

若$f^{(n)}(x_0)<0$,同理可得$f(x_0)$为极大值.

(2)当n为奇数时,$\Rightarrow$当$x<x_0$时，$f(x)>f(x_0)$,

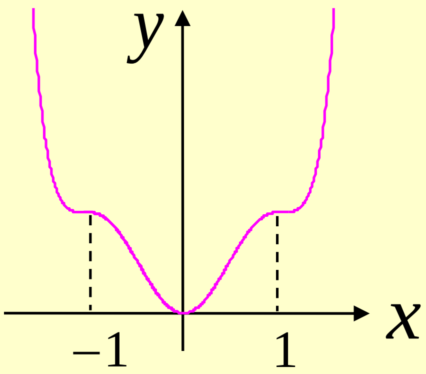
当$x>x_0$时，$f(x)<f(x_0)$,

$\therefore f(x_0)$不是极值.

例如 , 例2中 $f(x)=(x^2-1)^3+1$

$$f'''(x)=24x(5x^2-3),\quad f'''(\pm 1)\neq 0$$

所以 $x=\pm 1$不是极值点 .

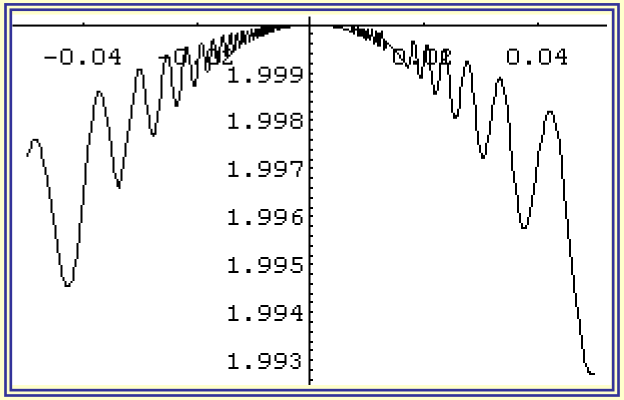


说明: 极值的判别法(定理1 ~ 定理3) 都是充分的.

当这些充分条件不满足时, 不等于极值不存在 .

例如:

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$



$f(0)=2$为极大值 , 但不满足定理1 ~ 定理3 的条件.

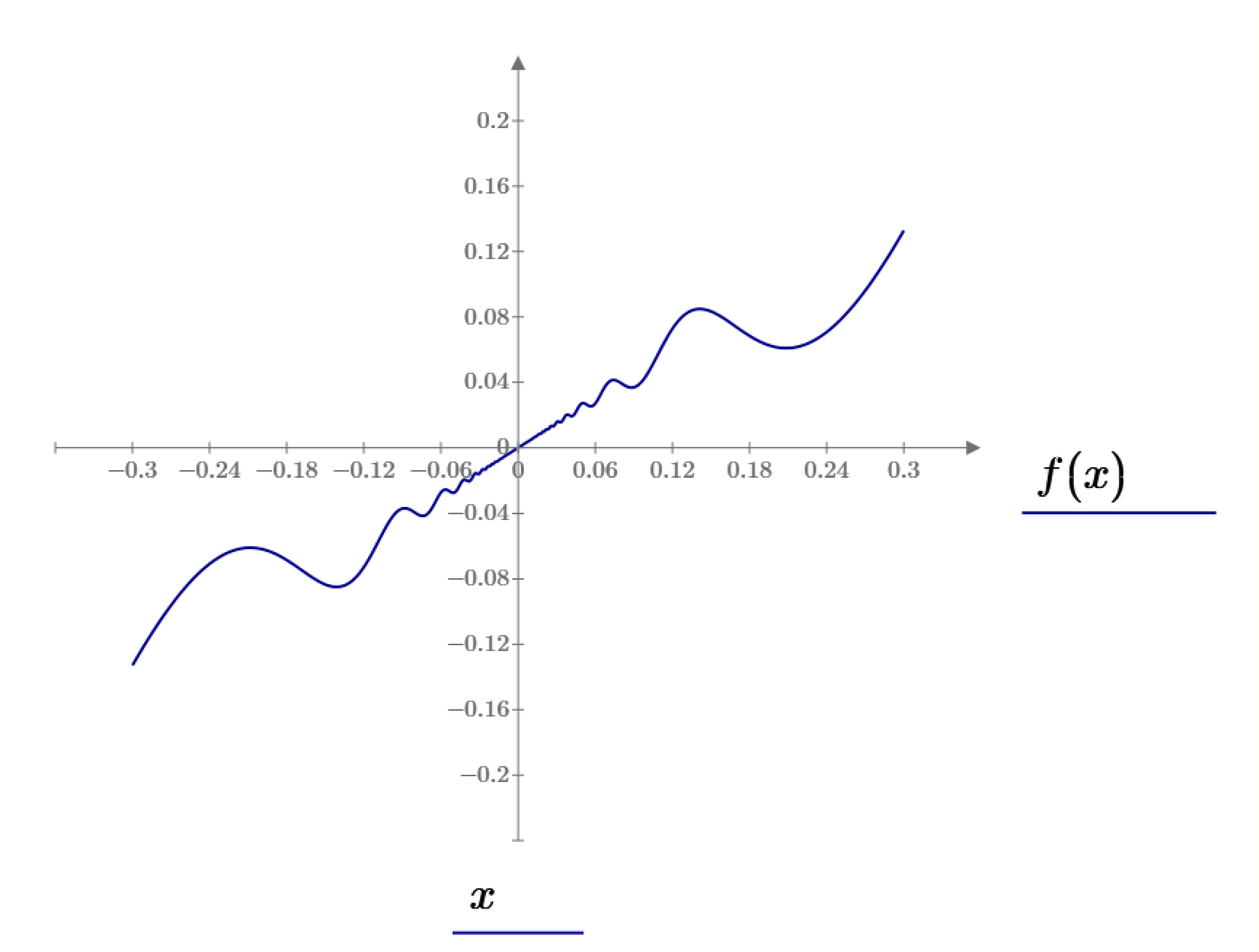
思考题：

讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1) 在 $x=0$ 点是否可导？

(2) 是否存在 $x=0$ 的一个邻域，使 $f(x)$ 在该邻域内单调？



0.2
0.16
0.12
0.08
0.04
0
−0.04
−0.08
−0.12
−0.16
−0.2
−0.3
−0.24
−0.18
−0.12
−0.06
0
0.06
0.12
0.18
0.24
0.3
f(x)
x

三、最大值与最小值问题

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, **则其最值只能在极值点或端点处达到 .**

求函数最值的方法:

(1) 求 $f(x)$ 在 (a,b) **内的极值可疑点**

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\ ,\ x_m$$

(2) 最大值

$$M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

最小值

$$m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m),f(a),f(b)\}$$

特别:

- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内只有一个极值可疑点时,

  若在此点取极大 (小) 值 , 则也是最大(小)值 .

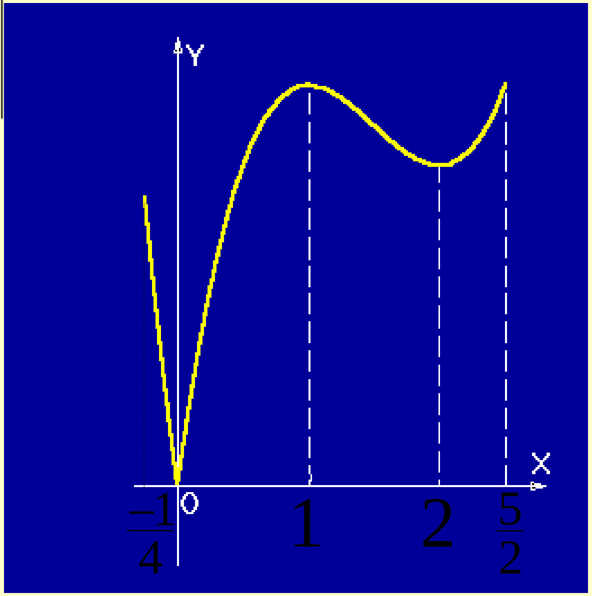
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.

- 对应用问题 , 有时可根据实际意义判别求出的

  可疑点是否为最大 值点或最小值点 .

例7. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$

上的最大值和最小值 .



解: 显然 $f(x)\in C[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$, 且

$$f(x)=\begin{cases}-(2x^3-9x^2+12x), & -\frac{1}{4}\le \\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0 \\ 6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 内有极值可疑点 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$

$$f(\tfrac{-1}{4})=3\tfrac{19}{32},\ f(0)=0,\ f(1)=5,\ f(2)=4,\ f(\tfrac{5}{2})=5$$

故函数在 $x=0$ 取最小值 **0** ; 在 $x=1$ 及 $\frac{5}{2}$ 取最大值 **5.**

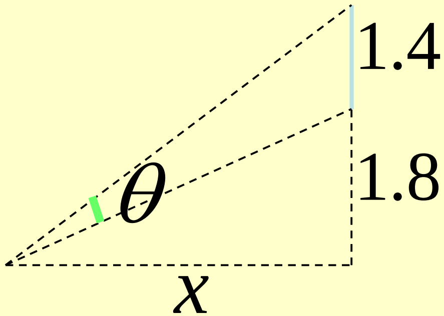
例7. 求函数 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}]$ 上的最大值和最小值 .

说明:

令 $\varphi(x)=f^2(x)$

由于 $\varphi(x)$ 与 $f(x)$ 最值点相同，因此也可通过 $\varphi(x)$ 求最值点. (自己练习)

例8. 一张 **1.4 m** 高的图片挂在墙上，它的底边高于观察者的眼睛**1.8 m**，问观察者在距墙多远处看图才最清楚(视角θ最大)？



解：设观察者与墙的距离为 **x m**，则

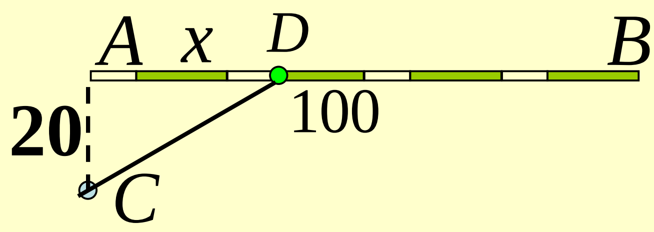
$$\theta = \arctan\frac{1.4+1.8}{x} - \arctan\frac{1.8}{x}, \quad x\in(0,+\infty)$$

$$\theta' = \frac{-3.2}{x^2+3.2^2} + \frac{1.8}{x^2+1.8^2} = \frac{-1.4(x^2-5.76)}{(x^2+3.2^2)(x^2+1.8^2)}$$

令 $\theta' = 0$，得驻点 $x = 2.4 \in (0,+\infty)$

根据问题的实际意义，观察者最佳站位存在，驻点又唯一，因此观察者站在距离墙 **2.4 m** 处看图最清楚 .

例9. 铁路上 AB 段的距离为100 km , 工厂C 距 A 处20 Km , $AC \perp AB$, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 3:5 , 为使货物从B 运到工厂C 的运费最省, 问 D 点应如何选取?



解: 设$AD = x$ (km), 则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$, 总运费

$$y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \qquad (0 \le x \le 100)$$

$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400 + x^2}} - 3\right), \qquad y'' = 5k\frac{400}{(400 + x^2)^{3/2}}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 15$, 又 $y''\big|_{x=15} > 0$, 所以 $x = 15$为唯一的极小点 , 从而为最小点 , 故 AD =15 km 时运费最省 .

内容小结

1. 连续函数的极值

(1) 极值可疑点 : 使导数为0 或不存在的点

(2) 第一充分条件

$f'(x)$ 过 x_0 由**正**变**负** $\Longrightarrow$ $f(x_0)$为极大值

$f'(x)$ 过 x_0 由**负**变**正** $\Longrightarrow$ $f(x_0)$为极小值

(3) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow$ $f(x_0)$为极大值 $-$

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow$ $f(x_0)$为极小值 $+$

(4) 判别法的推广

2. 连续函数的最值

最值点应在极值点和边界点上找；

应用题可根据问题的实际意义判别 .

思考与练习

1. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 则在点 a 处(B).

(A) $f(x)$ 的导数存在 , 且 $f'(a)\neq 0$;

(B) $f(x)$ 取得极大值 ;　(C) $f(x)$ 取得极小值;

(D) $f(x)$的导数不存在.

提示: 利用极限的保号性 .

2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (D).

(A) 不可导 ;

(B) 可导, 且 $f'(0)\neq 0$;

(C) 取得极大值 ;

(D) 取得极小值 .

提示: 利用极限的保号性 .

3. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，

若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 (A)

(A) 取得极大值；

(B) 取得极小值；

(C) 在某邻域内单调增加；

(D) 在某邻域内单调减少．

提示: 将 $f(x)$ 代入方程，令 $x=x_0$，得

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$$

4. 试问a为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{2}{3}\pi$ 时取得极值，求出该极值，并指出它是极大还是极小.

解: $\because \quad f'(x)=a\cos x+\cos 3x$，由题意应有

$$f'(\frac{2}{3}\pi)=a\cos(\frac{2}{3}\pi)+\cos 3(\frac{2}{3}\pi)=0$$

$$\therefore \quad a=2$$

又 $\because \quad f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x, \quad f''(\frac{2}{3}\pi)<0$

$\therefore \quad f(x)$ 取得极大值为 $f(\frac{2}{3}\pi)=\sqrt{3}$

5. 设 $f(x)=nx(1-x)^n, n\in N$, 试求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

解: $\because \quad f'(x)=n(1-x)^n-nx\cdot n(1-x)^{n-1}$

$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$$

令 $f'(x)=0$, 得 $(0,1)$ 内的唯一驻点 $x=\frac{1}{n+1}$

易判别 x 通过此点时 $f(x)$ 由增变减, 故所求最大值为

$$M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}$$

6. 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值，是否可断定在 x_0 充分小邻域内，$f(x)$ 在 x_0 的左侧递增，右侧递减？试考察例子：

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

7. 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，且仅有惟一的极值点 x_0。试问当 $f(x_0)$ 为极大(小) 值时，为什么 $f(x_0)$ 必为 I 上的最大(小)值？