一些关于极限的补充例题

例1. 用定义验证：**(1)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1.$ **(2)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

证: (1) $\because x\to 0^-$，$\therefore$ 不妨取 $x\in(-1,0)$. $\forall \varepsilon>0$（不妨 $\varepsilon<1$），

要使 $\left|\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}-1\right|=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+1}<e^{\frac{1}{x}}<\varepsilon$， 只要 $\dfrac{1}{x}<\ln\varepsilon$， $x>\dfrac{1}{\ln\varepsilon}=-\dfrac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$.

取 $\delta=\dfrac{1}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}>0$ ，则当 $-\delta<x<0$ 时，必有 $\left|\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}-1\right|<\varepsilon$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}=1.$

(2) $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}$，要使右边小于 ε，求满足条件的 δ，分母的 $|2x+1|$ 不好处理，

所以先限制 $0<|x-1|<1$，这时 $0<x<2(x\neq 1)$，有 $|2x+1|>1$.

$\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{|x-1|}{3|2x+1|}<\dfrac{|x-1|}{3}<\varepsilon$ $(0<|x-1|<1)$ ，

只需 $|x-1|<3\varepsilon$，取 $\delta=\min\{1,3\varepsilon\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，必有 $\left|\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{2}{3}$.

例2. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ (0<a<+\infty)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1.$

证: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0 \Rightarrow$ 对 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0,\exists N>0,\forall n>N:|x_n-a|<\varepsilon=\dfrac{a}{2}$，

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{2}<x_n<\frac{3a}{2},\quad \sqrt[n]{\frac{a}{2}}<\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\frac{3a}{2}}\quad (n>N).$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3a}{2}}=1$ 和夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1.$

例3. 设 $0 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = a_k.$

证：由于 $a_k \le \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k \cdot a_k^n} = a_k\sqrt[n]{k}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k} = 1$，由夹逼准则，结论成立.

例4. 设 $a > 0$，$x_n = \sqrt[n]{1 + a^n + (\frac{a^2}{2})^n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

提示：利用上题，分别讨论 $0 < a \le 1,\ 1 < a \le 2,\ a > 2$ 的情形.

例5. 设 $x_1 > 0$，$x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} (n = 1, 2, \cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值.

证法一：由题设知 当 $n > 1$ 时，有 $3 < x_n < 3 + \frac{4}{3}$，即 $\{x_n\}$ 有界. 由

$$x_{n+1} - x_n = (3 + \frac{4}{x_n}) - (3 + \frac{4}{x_{n-1}}) = \frac{-4(x_n - x_{n-1})}{x_n x_{n-1}},$$

知 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 异号，所以 $\{x_n\}$ 不单调，不能直接用单调有界原理。

分别考虑子列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$，由

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{-4(x_{2n} - x_{2n-2})}{x_{2n} x_{2n-2}} = \frac{16(x_{2n-1} - x_{2n-3})}{x_{2n} x_{2n-2} x_{2n-1} x_{2n-3}} (n > 1),$$

知 $x_{2n+1} - x_{2n-1}$ 与 $x_{2n-1} - x_{2n-3}$ 同号。又

$$x_3 - x_1 = 3 + \frac{4}{x_2} - x_1 = 3 - x_1 + \frac{4}{3 + 4/x_1} = \frac{-3(x_1 - 4)(x_1 + 3)}{3x_1 + 4},$$

可知，当 $x_1 > 4$ 时，$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots$，$\{x_{2n-1}\}$ 单调增，

当 $x_1 > 4$ 时，$x_1 > x_3 > x_5 > \cdots$，$\{x_{2n-1}\}$ 单调减，

当 $x_1 = 4$ 时，$x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = 4$，

又 $\{x_{2n-1}\}$ 有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$ 存在. 由 $x_{2n} = 3 + \frac{4}{x_{2n-1}}$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ 也存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = b$ 在 $x_{2n+1} = 3 + \frac{4}{x_{2n}}$ 和 $x_{2n} = 3 + \frac{4}{x_{2n-1}}$ 两边分别取极限，得

$a=3+\frac{4}{b}$， $b=3+\frac{4}{a}$，解得$a=b=4$(负值舍去) ，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=4$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

证法二：由题设知 $\forall n: 3<x_n<3+\frac{4}{3}$. 又

$$0<|x_{n+1}-4|=\frac{|x_n-4|}{x_n}<\frac{1}{3}|x_n-4|<\frac{1}{3^2}|x_{n-1}-4|<\cdots<\frac{1}{3^n}|x_1-4|\to 0(n\to\infty) ,$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-4|=0$，$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=4$.

证法三： $|x_{n+1}-x_n|=\left|\frac{-4(x_n-x_{n-1})}{x_n x_{n-1}}\right|<\frac{4}{9}|x_n-x_{n-1}|$，应用压缩映象原理可得.

例6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{3n\pi}{4n+3}$.

注：错解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{3n\pi}{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{3\pi}{4}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n=0.$

正确解法： $\frac{3\pi}{4}<\sin\frac{3n\pi}{4n+3}\le\frac{6\pi}{11}$， $(\sin\frac{3\pi}{4})^n<\sin^n\frac{3n\pi}{4n+3}\le(\sin\frac{6\pi}{11})^n$,

由夹逼准则可得： $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{3n\pi}{4n+3}=0.$

例 7. 举出满足下列条件的数列例子：

(1) 既有收敛子列，又有无穷大子列；

(2) 有 3 个不同极限的收敛子列的有界数列.

解：(1) $x_n=n\cos\frac{n\pi}{2}$. $\{x_{4n+1}\}$为收敛子列， $\{x_{4n}\}$为无穷大子列。

(2) $x_n=\sin\frac{n\pi}{3}$. $\{x_{6n-1}\},\{x_{6n}\},\{x_{6n+1}\}$为有 3 个不同极限的收敛子列。

例 8. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中$a_i(i=1,\cdots,n)$为常数，且对$\forall x\in R$，有$|f(x)|\le|\sin x|$，证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$.

提示：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx}{x}=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，

在$|f(x)|\le|\sin x|$两边同除以$x(x\neq0)$，再令$x\to0$ 即得.

例 9. 设 $f(x)=\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}, x\neq0, a_i>0, a_i\neq1, (i=1,\cdots n)$, n 为大于 1 的整数.

求：(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；　　(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

答案: (1) $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$　　(2) $\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$　　(3) $\min\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$

解: (1) $f(x)=\left[\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=\left\{\left[1+\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}{n}\right]^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}}\right\}^{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}{n}\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}{n}\right]^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}}=e,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots a_n^x-n}{n}\frac{1}{x}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x-1}{x}+\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots\frac{a_n^x-1}{x}\right)$$
$$=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

(2) 记$a=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$，因$x\to+\infty$，所以不妨设$x>1$，有

$$a\frac{1}{n^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\le f(x)=\left[\frac{na^x}{n}\right]^{\frac{1}{x}}=a,$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\frac{1}{x}}=1$及夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}a=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i\}$.

(3) 令$x=-t$，与（2）类似可得.

例 10. 若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

解: 要使$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$成立，必有$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，且$f(x)\sim1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$.

$$\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

例 11．已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{x^b-(x-1)^b}=2020$，求$a$、$b$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{x^b-(x-1)^b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{a-b}}{1-(1-\frac{1}{x})^b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{a-b}}{-(-\frac{b}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{a-b+1}}{b}=2020$

$\Rightarrow a-b+1=0$，$\dfrac{1}{b}=2020$ $\Rightarrow b=\dfrac{1}{2020},a=-\dfrac{2019}{2020}$.

例 12. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$，求$a,b$.

解：要使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}-a-\dfrac{b}{x})=0$成立，必须

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}-a-\frac{b}{x})=0\text{，从而得}$$

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+4x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{2},$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-\sqrt{2}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x[\sqrt{1+(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2})}-1]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2}x\cdot\frac{1}{2}(\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2})=\sqrt{2}.$$

评注：此题实际上是求出了曲线 $y=\sqrt{2x^2+4x-1}$ 的一条斜渐近线 $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$.

问：若 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+4x-1}-ax-b)=0$成立，则$a,b=?$.

例 13. 分析下列极限是否存在：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})^x$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})$.

解： (1) 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\arctan t=\dfrac{\pi}{2}$，

同理 $\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to-\infty}\arctan t=-\dfrac{\pi}{2}$，

左右极限，所以原极限不存在.

（2）取 $x_n=n\pi, y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ，则当 $n\to\infty$ 时， $f(x_n)\to 1, f(y_n)\to e$，

由归结原则，原极限不存在.

(3) 记 $x_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+n})=\sin[(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)+n\pi]$

$$=(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)=(-1)^n\sin\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，知

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=-\dfrac{\pi}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\dfrac{\pi}{2}$ ，所以原极限不存在.

例 14. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$ ；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|})$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n})(m,n\in N)$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)+\sin(2x)}{\tan x-2\arcsin 2x}$.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$

解:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x}-2+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-2-\sqrt{1-x})}{x^2(\sqrt{1+x}-2-\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(x+2-2\sqrt{1+x})}{x^2(\sqrt{1+x}-2-\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}-2-\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(x+2+2\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{4}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}{x^2}$

解：令 $\sqrt[5]{1+5x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{5}(t^5-1)$，$1+x=\dfrac{1}{5}(t^5+4)$ ．于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}{x^2}=\lim_{t\to 1}\frac{t-\frac{1}{5}(t^5+4)}{\frac{1}{25}(t^5-1)^2}=5\lim_{t\to 1}\frac{5(t-1)-(t^5-1)}{(t^5-1)^2}$$

$$=5\lim_{t\to 1}\frac{5(t-1)-(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)}{(t-1)^2(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}=-5\lim_{t\to 1}\frac{t^4+t^3+t^2+t-4}{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}$$

$$=-5\lim_{t\to 1}\frac{(t^4-1)+(t^3-1)+(t^2-1)+(t-1)}{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}=-5\lim_{t\to 1}\frac{t^3+2t^2+3t+4}{(t^4+t^3+t^2+t+1)^2}=-2.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$

解：令 $t=x-\dfrac{\pi}{3}$ ，则

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos(t+\pi/3)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t+o(t)}{\frac{1}{2}t^2+o(t^2)+\sqrt{3}(t+o(t))}=\lim_{t\to 0}\frac{1+o(t)/t}{\frac{1}{2}t+o(t^2)/t+\sqrt{3}(1+o(t)/t)}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x})^x$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})^x \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to0^+}(\cos t+\sin t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t\to0^+} e^{\frac{1}{t}\ln(\cos t+\sin t)}$

$= e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}\ln(\cos t+\sin t)} = e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}(\cos t+\sin t-1)}\, e^{\lim\limits_{t\to0^+}(\frac{\sin t}{t}-\frac{1-\cos t}{t})} = e$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|})$

解：$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|})=\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{2e^{-\frac{2}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x})=0+1=1$,

$\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|})=\lim\limits_{x\to0^-}(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-\frac{\sin x}{x})=2-1=1$，　故 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|})=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

(7) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n})\,(m,n\in N)$

解：$\lim\limits_{x\to1}(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}) \overset{x=1+t}{=} \lim\limits_{t\to0}\left[\frac{n}{(1+t)^n-1}-\frac{m}{(1+t)^m-1}\right]$

$=\lim\limits_{t\to0}\left[\frac{n}{nt+C_n^2t^2+o(t^2)}-\frac{m}{mt+C_m^2t^2+o(t^2)}\right]=\lim\limits_{t\to0}\frac{(nC_m^2-mC_n^2)t^2+o(t^2)}{mnt^2+o(t^2)}$

$=\frac{nC_m^2-mC_n^2}{mn}=\frac{m-n}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$ (有界量与无穷小的乘积)

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

解：利用 $x\to0$ 时， $\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\tan x)}{x^3}+2\lim_{x\to0}\frac{\sin(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\tan^3 x}{x^3}+2\lim_{x\to0}\frac{2\sin\frac{\tan x-\sin x}{2}\cos\frac{\tan x+\sin x}{2}}{x^3}$$

$$=1+4\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\frac{\tan x-\sin x}{2}\cos0=1+2\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\frac{x^3}{2}=2.$$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)+\sin(2x)}{\tan x-2\arcsin 2x}$

解：因 $x\to0$ 时， $\tan x\sim x$， $\tan(\sin x)\sim\sin x\sim x$， $\arcsin 2x\sim2x$，且

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\neq-1$， $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{2\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{4x}=\dfrac{1}{4}\neq1$，由课件中的一个附注知，

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)+\sin(2x)}{\tan x-2arc\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x+2x}{x-4x}=-1.$$

评注：利用等价无穷小代换求极限，一般对乘积项使用，若对和差项使用，则需附加条件，即，$\lim\dfrac{u}{v}\neq\mp1$，目的是使两个等价无穷小之和（或差）后不能消去低阶项而产生高阶项，大家以后学到 Taylor 公式时会更有体会。