

《数学物理方程与特殊函数》作业题

练习一

1. 写出长为 L 的弦振动的边界条件和初始条件:
 - (1) 端点 $x=0, x=L$ 固定在平衡位置;
 - (2) 初始位移为 $f(x)$;
 - (3) 初始速度为 $g(x)$;
 - (4) 在任何一点上, 在时刻 t 时位移是有界的.
2. 写出弦振动的边界条件: (1) 在端点 $x=0$ 处, 弦是移动的, 由 $g(t)$ 给出; (2) 在端点 $x=L$ 处, 弦不固定地自由移动.
3. 验证函数 $u = f(xy)$ 是方程 $xu_x - yu_y = 0$ 的解, 其中 f 是任意连续可微函数.

练习二

1. 证明 $u(x, t) = e^{-8t} \sin 2x$ 是如下定解问题的解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin 2x.$$

2. 设 F, G 是二次可微函数,
 - (1) 证明 $y(x, t) = F(2x + 5t) + G(2x - 5t)$ 是方程 $4y_{tt} = 25y_{xx}$ 的通解;
 - (2) 求方程 $4y_{tt} = 25y_{xx}$ 满足定解条件 $y(0, t) = y(\pi, t) = 0, \quad y(x, 0) = \sin 2x, \quad y_t(x, 0) = 0$ 的解.
3. (1) 求二阶偏微分方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$ 的通解, (2) 求该方程满足定解条件 $z(x, 0) = x^2, \quad z(1, y) = \cos y$ 的特解.

练习三

1. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

2. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin \frac{3\pi x}{2l} + 6 \sin \frac{5\pi x}{2l}, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

3. 求解以下定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \sqrt{\pi^2 - 2} \sin \pi x. \end{cases}$$

练习四

1. 求下列定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(l - x). \end{cases}$$

2. 求下列固有值问题的固有值和固有函数：

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

3. 求如下定解问题的解：

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = 4 \cos \frac{5\pi x}{4}. \end{cases}$$

练习五

1. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = 1 + \cos 3\pi x, \quad u(x, 1) = 3 \cos 2\pi x. \end{cases}$$

2. 设有一内半径为 r_1 , 外半径为 r_2 的圆环形导热板, 上下两侧绝热. 如果内圆温度保持零度, 而外圆温度保持 u_0 ($u_0 > 0$) 度, 试求稳恒状态下该导热板的温度分布规律 $u(r, \theta)$. 问题归结为在稳恒状态下, 求解拉普拉斯方程 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ 边值问题, 即在极坐标系下求解定解问题:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & r_1 < r < r_2, \quad 0 < \theta < 2\pi, \\ u(r_1, \theta) = 0, \quad u(r_2, \theta) = u_0, & 0 < \theta < 2\pi, \\ u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) & \text{(自然边界条件)}. \end{cases}$$

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ u(r, 0) = 0, \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, & 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = \theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

练习六

1. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos \pi x, & (0 < x < 1, t > 0), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

2. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l, t \geq 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

3. 求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -2x, & x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1. \end{cases}$$

练习七

1. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{x}{l}, & u_t(x, 0) = x(l-x). \end{cases}$$

2. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = 8u_{xx} + \cos t + e^t \sin \frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = \sin t, & u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

3. 求解以下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^{-x} \sin \pi x. \end{cases}$$

练习八

1. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + 4 + 2e^{-x}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 1, \quad u(3, t) = -18 - e^{-3}, & t > 0, \\ u(x, 0) = -(2x^2 + e^{-x}), & 0 < x < 3. \end{cases}$$

2. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6(x-1), & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{4} + x^3 - 3x^2 + x. \end{cases}$$

3. 求定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \sin \pi x, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 1, \quad u(1, y) = 2, \\ u(x, 0) = 1 + x, \quad u(x, 1) = 1 + x - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x. \end{cases}$$

练习九

1. 求特征值问题的特征值与特征函数:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi), \quad X'(-\pi) = X'(\pi). \end{cases}$$

2. 试证明特征值问题

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$

的固有函数系 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $[1, e]$ 上带权函数 $\frac{1}{x}$ 正交.

练习十

1. 设一无限长的弦作自由振动, 弦的初始位移为 $\varphi(x)$, 初始速度为 $-k\varphi'(x)$ (k 为常数), 求此振动在时刻 t 在 x 处的位移 $u(x, t)$, 即求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -k\varphi'(x). \end{cases}$$

2. 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

3. 求解定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + at + x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

练习十一

1. 用行波法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -at < x < 0, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = \phi(t), \quad u|_{x+at=0} = \psi(t), \end{cases}$$

其中已知函数 ϕ, ψ 满足相容性条件 $\phi(0) = \psi(0)$.

2. 求解以下三维波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = yz, \quad u_t(x, y, z, 0) = xz. \end{cases}$$

3. 求解以下二维波动方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^2(x + y), \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

练习十二

1. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

2. 设有一半无限长固体 ($x > 0$), 其初始温度是零度, 一个常数温度 $u_0 > 0$ 外加和保持在其表面 $x = 0$ 处, 求固体在任一点 x 和任一时刻 t 的温度. 设在点 x 处和时刻 t 的温度为 $u(x, t)$, 则问题归结为求解以下热传导方程的定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_0, \quad u(x, 0) = 0, \\ u(x, t) \text{ 有界}. \end{cases}$$

3. 设 A, ω 均为常数, 用积分变换法求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = A \sin \omega t, \quad |u(x, t)| < M \quad (x \rightarrow \infty). \end{cases}$$

练习十三

1. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos 3\pi x, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

2. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} u_t = t^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

3. 用积分变换法求解定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + ku, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

练习十四

1. 设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体, Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面. 若 u 满足下面的定解问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in K_R, \\ u|_{\Gamma_R} = 1 + \sin xy^2 z^3, \end{cases}$$

利用极值原理证明: 在 K_R 内, $u > 0$.

2. 设 K_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球体, Γ_R 表示以原点为中心以 R 为半径的球面. 若 $0 < r < R$, 且 u 满足下面的定解问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y, z) \in K_R \setminus \overline{K_r}, \\ u|_{\Gamma_r} = 1, \quad u|_{\Gamma_R} = 2, \end{cases}$$

证明: 在 $K_R \setminus \overline{K_r}$ 内, $1 < u < 2$.

3. 设 $u(r, \theta, \varphi)$ 是单位球 $K_1 = \{(r, \theta, \varphi): 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ 内的调和函数在球坐标下的表示, 且它在闭球 $\overline{K_1}$ 上连续, 若 $u(r, \theta, \varphi)$ 在上半单位球面上为 $1 - \sin \theta$, 在下半单位球面上恒为 0, 试证明单位球 K_1 内 $0 < u(r, \theta, \varphi) < 1$, 并求 $u(r, \theta, \varphi)$ 在 $r = 0$ 的值.

练习十五

1. 证明二维调和函数的积分表达式:

$$u(M_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) - \ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds.$$

2. 在下半平面 $y < 0$ 内求解拉普拉斯方程的边值问

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, y < 0, \\ u|_{y=0} = f(x). \end{cases}$$

3. 设 A 为常数, 分别用分离变量法和格林法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < 1, \\ u(1, \theta) = A \cos \theta & (-\pi < \theta \leq \pi). \end{cases}$$

4. 设 A, B 为常数, 用试探法求如下定解问题的解:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & r < a, \\ u|_{r=a} = A \cos \theta + B \sin \theta & (-\pi < \theta \leq \pi). \end{cases}$$

练习十六

1. 设 Ω 是 \mathbb{R}^3 中以足够光滑的曲面 Γ 为边界的有界区域, 若边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} + ku \right|_{\Gamma} = g(x, y, z), & (x, y, z) \in \Gamma \end{cases}$$

有解, 其中常数 $k > 0$, 试证明其解是唯一的 (提示: 用格林第一公式).

2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为任何区域, u 的所有二阶偏导数在 Ω 上存在且连续. 若对任意闭球

面 $\Gamma_a \subset \Omega$, 成立 $\iint_{\Gamma_a} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, 试证明 u 是 Ω 上的调和函数 (提示: 用格林第二公式).

3. u 是 \mathbb{R}^3 内的光滑函数, 若 $\Delta u \geq 0$, 则称 u 是下调和的. 证明以下两个命题等价:

(1). u 在 \mathbb{R}^3 内下调和.

(2). 对任意闭球面 Γ_r , $\iint_{\Gamma_r} \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$ 成立, 其中 n 是 Γ_r 的单位外法向量.

练习十七

1. 证明: (1) $\frac{d}{dx}[xJ_0(x)J_1(x)] = x[J_0^2(x) - J_1^2(x)];$

$$(2) \int x^2 J_1(x) dx = 2xJ_1(x) - x^2 J_0(x) + c.$$

$$(3) J_2(x) - J_0(x) = 2J_0''(x);$$

$$(4) \int x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1)x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 \int x^{n-2} J_0(x) dx.$$

2. 计算积分:

$$(1). \int_0^3 (3-x) J_0\left(\frac{\mu_2^{(0)}}{3} x\right) dx;$$

$$(2). \int_0^R r(R^2 - r^2) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right) dr.$$

3. 设 u_0 为常数, 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 < r < 1, t > 0 \\ u(1, t) = 0, & |u(r, t)| < M (\text{当 } r \rightarrow 0), \\ u(r, 0) = u_0. \end{cases}$$

练习十八

1. 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0, & 0 \leq r < 1, 0 < z < 1, \\ u_z(r, 0) = 0, & u(r, 1) = 1, \\ u(1, z) = 0, & |u(0, z)| < +\infty. \end{cases}$$

2. 设 A 为常数, 求解如下定解问题 (用固有函数展开法):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + A, & 0 < r < 1, t > 0, \\ u(1, t) = 0, & |u(r, t)| < M (\text{当 } r \rightarrow 0), \\ u(r, 0) = 0, & u_t(r, 0) = 0. \end{cases}$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（一）

- 一 （15 分） 求特征值问题的特征值与特征函数 $\{y_n(x)\}$

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \lambda y(x) = 0, & 1 < x < e, \\ y(1) = 0, y(e) = 0. \end{cases}$$

并证明特征函数系 $\{y_n(x)\}$ 在 $[1, e]$ 上带权函数 $\frac{1}{x}$ 正交。

- 二 （12 分） 求特征值问题的特征值与特征函数。

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

- 三 （15 分） 求下述有界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & (0 < x < l, t > 0) \\ u_x(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{l}, u_t(x, 0) = 1 & (x > 0). \end{cases}$$

- 四 （15 分） 求下述有界弦的强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi x}{l}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = 3, u(l, t) = 6, & (t > 0) \\ u(x, 0) = 3(1 + \frac{x}{l}), u_t(x, 0) = \sin \frac{4\pi x}{l}, & (0 < x < l). \end{cases}$$

- 五 （15 分） 求均匀薄圆盘的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r), & (0 \leq r < R, t > 0), \\ u|_{r=R} = 0, & (t > 0), \\ u|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, & (0 \leq r < R). \end{cases}$$

- 六 （10 分） 用积分变换法求无限长杆的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u(x, 0) = \cos x, & (t > 0). \end{cases}$$

七 (10 分) 利用波动方程 $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ 的通解公式 $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$

求无界弦的自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ u|_{x-at=0} = x^2, \quad u|_{x+at=0} = \sin x + x^2, & (0 < x < l). \end{cases}$$

八 (8 分) 求解上半空间 $z > 0$ 内的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, & (z > 0), \\ u|_{z=0} = f(x, y), & (-\infty < x, y < +\infty). \end{cases}$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题 (一) 参考答案

一. 解 令 $x = e^t, t = \ln x, dt = \frac{dx}{x} = e^{-t} dx, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = -e^{-2t} \frac{dy}{dt} + e^{-2t} \frac{d^2 y}{dt^2},$$

原问题化为 $\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0, \\ y(0) = 0, y(1) = 0. \end{cases}$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, y_n(t) = \sin n\pi t, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, y_n(x) = \sin n\pi \ln x, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\int_1^e \frac{1}{x} y_n(x) y_m(x) dx = \int_0^1 y_n(t) y_m(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

二. 解 关于 λ 作三种情况讨论

(i) $\lambda < 0, \quad X(x) = Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x},$ 由边条件得 $A = B = 0, \quad X(x) = 0.$

(ii) $\lambda = 0, \quad X(x) = Ax + B, \quad X(x) = B = \text{const}.$

(iii) $\lambda > 0, \quad X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$

$$X'(x) = -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda}x + B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x$$

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{\lambda} B = 0 \Rightarrow B = 0 \\ X'(l) &= -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi, n=1,2,\dots \\ \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x, n=1,2,\dots \end{aligned}$$

总之 $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x, n=0,1,2,\dots$

三. 解 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入方程得到两个常微分方程

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0 \end{aligned}$$

解特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$

$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x, n=0,1,2,\dots$ 。 解关于 t 的方程

$n=0, \lambda_0=0, \quad T_0(t) = \frac{1}{2}b_0 t + \frac{1}{2}a_0$

$n>0, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t$

由叠加原理可得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}b_0 t + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{l} t) \cos \frac{n\pi x}{l}$$

代入初始条件得解: $u(x,t) = t + \cos \frac{3\pi a t}{l} \cos \frac{3\pi x}{l}$ 。

四. 解 设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, $w(x) = \frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + \frac{3}{l}x + 3$, 则 v 满足

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & (0 < x < l, t > 0) \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, & (t > 0) \\ v(x,0) = \frac{l^2}{32\pi^2} \sin \frac{4\pi x}{l}, \quad v_t(x,0) = \sin \frac{4\pi x}{l}, & (0 < x < l). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l} \\
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} -\frac{l^2}{32\pi^2 a^2} & n=4 \\ 0 & n \neq 4 \end{cases} \\
b_n &= \frac{l}{n\pi a} \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{4\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{4\pi a} & n=4 \\ 0 & n \neq 4 \end{cases} \\
u(x,t) &= \frac{l^2}{32\pi^2} \sin \frac{4\pi x}{l} + \frac{3}{l}x + 3 + (-\frac{l^2}{32\pi^2} \cos \frac{4\pi at}{l} + \frac{l}{4\pi a} \sin \frac{4\pi at}{l}) \sin \frac{4\pi x}{l}
\end{aligned}$$

五. 解 $u(r,t) = F(r)T(t)$, 代入方程得要求 $\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0, \\ T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \end{cases}$

由边界条件和有界性条件 $F(R) = 0, |F(0)| < +\infty$ 解特征值问题

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0. \lambda_m = (\frac{\mu_m^{(0)}}{R})^2, & F_m(r) = J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r), \\ F(R) = 0, |F(0)| < +\infty, \end{cases}$$

$$T_m(t) = a_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} a\right)^2 t} \cdot u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} a\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right)$$

$$a_m = \frac{\int_0^R r(1 - \frac{r^2}{R^2}) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right) dr}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} = \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2} J_1^2(\mu_m^{(0)})}$$

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} a\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r\right)$$

六. 解 关于 x 作傅氏变换, 原问题化为

$$\begin{cases} \frac{dU(\lambda,t)}{dt} = -a^2 \lambda^2 U(\lambda,t) & (-\infty < \lambda < +\infty, t > 0) \\ U(\lambda,0) = \pi[\delta(\lambda+1) + \delta(\lambda-1)] & (t > 0) \end{cases}$$

$$U(\lambda,t) = \pi[\delta(\lambda+1) + \delta(\lambda-1)] e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

由逆变换的定义可得

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi [\delta(\lambda + 1) + \delta(\lambda - 1)] e^{-a^2 \lambda^2 t} e^{j\lambda x} d\lambda = e^{-a^2 t} \cos x.$$

七. 解 将边界条件代入可得

$$x = at, \quad f(0) + g(2x) = x^2, g(x) = \frac{x^2}{4} - f(0)$$

$$x = -at, \quad f(2x) + g(0) = \sin x + ax, f(x) = \sin \frac{x}{2} + \frac{ax}{2} - g(0),$$

$$f(0) + g(0) = 0$$

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

$$= \sin \frac{x - at}{2} + \frac{(x - at)^2}{4} + \frac{(x + at)^2}{4}.$$

八. 解 上半空间的格林函数为

$$\begin{aligned} G(M, M_0) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} G(M, M_0)|_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial z} G(M, M_0)|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dx dy$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（二）

一、(本题满分 12 分) 求周期特征值问题的特征值和特征函数(请写出解题过程).

$$X''(\theta) + \lambda X(\theta) = 0, \quad X(\theta) = X(\theta + 2\pi).$$

二、(本题满分 15 分) 设 a, l 是正常数, 用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, & (1) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0, & (2) \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l & (3) \\ u_t(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{l}\right) - 2\sin\left(\frac{6\pi x}{l}\right), & 0 \leq x \leq l, & (4) \end{cases}$$

三、(本题满分 15 分) 设 B 是正常数, 用分离变量法求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + B, & 0 < x < \pi, t > 0 & (1) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, & (2) \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, & (3) \end{cases}$$

四、(10 分) 用行波法求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + xt^2, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 4xe^{-x^2}, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

五、(13 分) 用积分变换法求解下列问题 (提示: y 的 Laplace 变换 $L(y) = \frac{1}{s^2}$,

$$L(1) = \frac{1}{s})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, & x > 0, y > 0, & (1) \\ u|_{x=0} = y + 1, & y \geq 0, & (2) \\ u|_{y=0} = 1, & x \geq 0. & (3) \end{cases}$$

六、(15 分) 求均匀薄圆盘的热传导问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + u_r/r) & (0 \leq r < R, t > 0), \\ u|_{r=R} = 0 & (t > 0), \\ u|_{t=0} = 1 - r^2/R^2 & (0 \leq r < R). \end{cases}$$

七、(本题满分 10 分) 写出半平面 $(-\infty < x < +\infty, y > 0)$ 上的格林函数, 并利

用此格林函数写出下列拉普拉斯方程第一边值解的形式

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\infty < x < +\infty, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, y) \rightarrow 0 & \text{当 } x^2 + y^2 \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

八、(10 分) 设 u 在区域 $\Omega \subset R^3$ 内调和, 以点 a 为球心 R 为半径的球 $B(a, R) \subset \Omega$.

试证明对任何 $0 < \rho < R$, 如下球平均值公式成立:

$$u(a) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \int_{B_\rho(a)} u(x, y, z) dx dy dz.$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题 (二) 参考答案

一. 解: 对应方程的特征方程为 $r^2 + \lambda = 0$,

(1) 当 $\lambda < 0$ 时, 方程通解为 $X(\theta) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\theta} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$, 代入定解条件得 $C_1 = C_2 = 0$, 没有非零解. (3 分)

(2) 当 $\lambda = 0$ 时, 方程通解为 $X(\theta) = C_1 + C_2 \theta$, 代入定解条件得 $X(\theta) = C_1$. 所以特征值 $\lambda = 0$ 时, 特征函数为 $X(\theta) = 1$. (3 分)

(3) 当 $\lambda > 0$ 时, 方程通解为 $X(\theta) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\theta) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}\theta)$, 代入定解条件后得特征值 $\lambda_n = n^2$, 特征函数为 $X_n(\theta) = \cos(n\theta), \sin(n\theta)$, $n = 1, 2, \dots$. (3 分)

所以特征方程的特征根为 $\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$. 特征函数为

$$\{1, \cos(n\theta), \sin(n\theta); \quad n=1,2,\dots\}. \quad (3\text{分}).$$

二. 解: 由分离变量法, 令 $u(x,y) = X(x)T(t)$, 代入方程 (1) 得特征值问题:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \quad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \quad (6) \quad (5\text{分})$$

则(5)特征值为: $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$, 对应特征函数为: $X_n(x) = \sin(\frac{n}{l}\pi x)$, $n=1,2,\dots$

将 λ_n 代入方程 (6), 得其通解为: $T_n(t) = C_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi a t}{l})$,

$n=1,2,\dots$. 于是, 得到问题(1)-(4)的一系列特征解:

$$u_n(x,y) = X_n(x)T_n(t) = [C_n \cos(\frac{n\pi a t}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi a t}{l})] \sin(\frac{n}{l}\pi x), \quad n=1,2,\dots \quad (5\text{分})$$

由叠加原理, 原问题的解可表示为:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \sin(\frac{n\pi a t}{l}) + D_n \sin(\frac{n\pi a t}{l})] \sin(\frac{n}{l}\pi x).$$

由初始条件(3)和(4)得: $C_n = 0, D_3 = -D_6 = \frac{l}{3\pi a}$, 其余 $D_n = 0$. 故原问题的解为:

$$u(x,y) = \frac{l}{3\pi a} [\cos(\frac{3\pi a t}{l}) \sin(\frac{3\pi x}{l}) - \cos(\frac{6\pi a t}{l}) \sin(\frac{6\pi x}{l})]. \quad (5\text{分})$$

三. 解: 由相应的特征值问题可知: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx) \quad (4) \quad (5\text{分})$

由傅立叶变换知: $B = \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{2B}{n\pi} (1 - (-1)^n)] \sin(nx), \quad (5)$

将(4)(5)代入方程(1)有: $u_n'(t) + a^2 n^2 u_n(t) - \frac{2B}{n\pi} [1 - (-1)^n] = 0, \quad (6)$

利用初始条件(3)得到: $u_n(0) = 0. \quad (7) \quad (5\text{分})$

解(6)(7)有:
$$u_n(t) = \frac{2B}{a^2 n^3 \pi} [1 - (-1)^n] [1 - e^{-a^2 n^2 t}],$$

所以原问题解为:
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2B}{a^2 n^3 \pi} (1 - (-1)^n) \right] [1 - e^{-a^2 n^2 t}] \sin(nx) \quad (5 \text{ 分})$$

四. 解:
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(s+t) + \sin(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 4\alpha e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi \tau^2 d\xi$$

$$= \sin x \cos t + e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} + \frac{1}{12} x t^4 \quad (5 \text{ 分}) \quad (\text{若用积分变换, 对比给分}).$$

五. 解 1: 记 u 关于 y 的拉氏变换为 \tilde{u} , 对方程两边作拉氏变换, 有:

$$\frac{\partial}{\partial x} \{s\tilde{u} - 1\} = \frac{1}{s}, \tilde{u}(0, s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{解此常微分方程, 得: } \tilde{u} = \frac{x}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{用逆拉氏变换, 得到原方程的解为: } u(x, y) = xy + y + 1. \quad (5 \text{ 分})$$

解 2 记 u 关于 x 的拉氏变换为 \tilde{u} , 对方程两边作拉氏变换, 有:

$$\frac{\partial}{\partial y} \{t\tilde{u} - y - 1\} = \frac{1}{t}, \tilde{u}(t, 0) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{解此常微分方程, 得: } \tilde{u} = \frac{y}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{用逆拉氏变换, 得到原方程的解为: } u(x, y) = xy + y + 1. \quad (5 \text{ 分})$$

六. 解: $u(r, t) = F(r)T(t)$, 代入方程得

$$r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0, \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (5 \text{ 分})$$

由边界条件和有界性条件 $F(R) = 0, |F(0)| < +\infty$, 解特征值问题

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0 \\ F(R) = 0, |F(0)| < +\infty \end{cases}$$

$$\lambda_m = \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}\right)^2, F_m(r) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}r\right), T_m(t) = a_m e^{-\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{R}a\right)^2 t} \quad (5 \text{ 分})$$

由叠加原理 $u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-(\frac{\mu_m^{(0)} a}{R})^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r)$

$$a_m = \frac{\int_0^R r(1 - \frac{r^2}{R^2}) J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r) dr}{\frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} = \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} \quad (5 \text{ 分})$$

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{\mu_m^{(0)2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} e^{-(\frac{\mu_m^{(0)} a}{R})^2 t} J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{R} r)$$

七. 解: 设上半平面内任意一点 $M_0(x_0, y_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点

$M_1(x_1, y_1) = M_1(x_0, -y_0)$, 因此 $q = \frac{r_{MM_1}}{r_{MM_0}} \Big|_{y=0} = 1$, 从而, 所求格林函数为:

$$\begin{aligned} G(M, M_0) &= \frac{1}{2\pi} [\ln(\frac{1}{r_{MM_0}}) - \ln \frac{1}{r_{MM_1}}] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}] \\ &\quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}, \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

于是, 所求问题的解为

$$u(x_0, y_0) = -\int_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0 f(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx. \quad (5 \text{ 分})$$

八. 解: 由球面平均值公式, 有:

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(a)} u(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^\rho (\int_{\Gamma_r(a)} u(x, y, z) dS) dr = \int_0^\rho 4\pi r^2 u(a) dr \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho^3 u(a) \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

所以 $u(a) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \int_{B_\rho(a)} u(x, y, z) dx dy dz. \quad (5 \text{ 分})$

《数学物理方程与特殊函数》测试题（三）

一、(10 分) 设 a, l 是正常数, 用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 3\sin(\frac{3\pi x}{2l}) + 5\sin(\frac{5\pi x}{2l}), \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

二、(15 分) 设 a, l 是正常数, 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t \cos \frac{\pi x}{l}, & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

三、(15 分) 设 a, l 是正常数, 求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 16\sin \frac{4\pi}{l} x, & (0 < x < l, \quad t > 0) \\ u(0, t) = 1, \quad u(l, t) = 2 \\ u(x, 0) = 1 + \frac{x}{l}. \end{cases}$$

四、(10 分) 用行波法求解下列问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t, & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

五、(10 分) 用积分变换法求解下列问题 (提示: Laplace 变换 $L(y^2) = \frac{2}{s^3}$, $L(1) = \frac{1}{s}$):

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 1, & (x > 0, \quad t > 0) \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty). \end{cases}$$

六、(15 分) 求如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r & (0 \leq r < 1, t > 0) \\ u(1, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \\ u(r, 0) = 0, \quad u_t(r, 0) = 1 - r^2. \end{cases}$$

七、(15 分) 用试探法和格林函数法求解如下定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 6, & (-\infty < x < +\infty, -\infty < z < +\infty, y < 0), \\ u(x, 0, z) = f(x, z). \end{cases}$$

八、(10 分) 叙述调和函数的极值原理, 并用其证明如下方程解的唯一性:

$$\begin{cases} \Delta u = F(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} = f(x, y, z). & (x, y, z) \in \Gamma \end{cases}$$

《数学物理方程与特殊函数》测试题(三) 参考答案

一.解: 设 $u(x, y) = X(x)T(t)$, 带入方程分离变量, 得到下面两个常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

由边界条件得 $X(0) = X'(l) = 0$. 考虑固有值问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

其固有值为: $\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l} \right]^2, n = 1, 2, \dots$,

对应的固有函数为: $X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x$. (4 分)

将 λ_n 代入另外一个常微分方程, 得其通解为:

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{(2n-1)\pi a}{2l} t + D_n \sin \frac{(2n-1)\pi a}{2l} t, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6 \text{ 分})$$

由叠加原理, 原问题的解可表示为:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos \frac{(2n-1)\pi a}{2l} t + D_n \sin \frac{(2n-1)\pi a}{2l} t] \sin \frac{(2n-1)\pi}{2l} x.$$

由初始条件得

$$C_n = \begin{cases} 3, & n = 2, \\ 5, & n = 3, \\ 0 & n \neq 2, 3, \end{cases} \quad D_n = 0. \quad (9 \text{ 分})$$

故原问题的解为:

$$u(x, y) = 3 \cos(\frac{3\pi a}{2l} t) \sin(\frac{3\pi}{2l} x) + 5 \cos(\frac{5\pi a}{2l} t) \sin(\frac{5\pi}{2l} x). \quad (10 \text{ 分})$$

二. 解: 方程所对应的固有函数系为 $\left\{ \cos \frac{n\pi}{l} x, n = 0, 1, \dots \right\}$, (2 分)

设

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

$$t \cos \frac{\pi}{l} x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (6 \text{ 分})$$

由傅里叶级数可知

$$f_n(t) = \begin{cases} t, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

将级数形式代入方程得:

$$u_1'(t) + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 u_1(t) = t, u_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 u_n(t) = 0, \quad n \neq 1 \quad (10 \text{ 分})$$

又由初始条件有 $u_n(0) = 0$, 解常微分方程得

$$u_n(t) = 0, \quad n \neq 1,$$

$$u_1(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \tau d\tau = \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 t - \left(\frac{l}{\pi a}\right)^4 [1 - e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}].$$

(13 分)

故方程的解为:

$$u(x,t) = \left\{ \left(\frac{l}{\pi a} \right)^2 t - \left(\frac{l}{\pi a} \right)^4 [1 - e^{-(\frac{\pi a}{l})^2 t}] \right\} \cos \frac{\pi}{l} x. \quad (15 \text{ 分})$$

三. 解: 设问题的解为

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x), \quad (2 \text{ 分})$$

带入方程得

$$v_{tt} = a^2(v_{xx} + w_{xx}) + 16 \sin \frac{4\pi}{l} x,$$

为使关于 v 的方程及边界条件为齐次的, $w(x)$ 需满足

$$\begin{cases} a^2 w_{xx} + 16 \sin \frac{4\pi}{l} x = 0, \\ w(0) = 1, w(l) = 2. \end{cases} \quad (6 \text{ 分})$$

上面常微分方程的解为

$$w(x) = \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi}{l} x + \left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad (8 \text{ 分})$$

因此, $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, \\ v(x,0) = -\frac{l^2}{\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi}{l} x. \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

满足方程及边界条件的解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (12 \text{ 分})$$

又由初始条件 $c_n = \begin{cases} 0, & n \neq 4, \\ -\frac{l^2}{\pi^2 a^2}, & n = 4, \end{cases}$

所以
$$v(x,t) = -\frac{l^2}{\pi^2 a^2} e^{-(\frac{4\pi a}{l})^2 t} \sin \frac{4\pi}{l} x. \quad (14 \text{ 分})$$

原问题的解为 $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$

$$= -\frac{l^2}{\pi^2 a^2} e^{-\left(\frac{4\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{4\pi}{l} x + \frac{l^2}{\pi^2 a^2} \sin \frac{4\pi}{l} x + \left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad (15 \text{ 分})$$

四. 解:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\sin(x + at) + \sin(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} y dy + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \pi dy d\tau \quad (5 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(x + at) + \sin(x - at)] + tx + \int_0^t \tau(t - \tau) d\tau \quad (7 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(x + at) + \sin(x - at)] + tx + \frac{1}{6} t^3. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{或 } (= \sin x \cos at + tx + \frac{1}{6} t^3)$$

五. 解: 记 $U(x, s) = L[u(x, t)]$, 对方程关于 t 作拉普拉斯变换,

$$U_{xx} - s^2 U = \frac{1}{s} \quad (4 \text{ 分})$$

对边界条件作拉普拉斯变换得

$$U(0, s) = 0, \quad U(x, s) \rightarrow 0, (x \rightarrow \infty). \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{解方程得 } U(x, s) = \frac{1}{s^3} (e^{-\frac{x}{a}s} - 1). \quad (8 \text{ 分})$$

取拉普拉斯逆变换, 并利用延迟性质得

$$u(x, t) = L^{-1}[U(x, s)] = \begin{cases} -\frac{1}{2} t^2, & 0 \leq t < x, \\ \frac{1}{2} x^2 - tx, & t \geq x. \end{cases} \quad (10 \text{ 分})$$

六. 解 设 $u(r, t) = F(r)T(t)$, 代入方程得

$$\begin{aligned} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) &= 0 \\ T'''(t) + \lambda T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5 \text{ 分})$$

由边界条件和有界性条件 $F(1) = 0, |F(0)| < +\infty$.

解特征值问题

$$\begin{cases} r^2 F''(r) + rF'(r) + \lambda r^2 F(r) = 0 \\ F(1) = 0, |F(0)| < +\infty \end{cases},$$

其固有值和固有函数为

$$\lambda_m = (\mu_m^{(0)})^2, F_m(r) = J_0(\mu_m^{(0)}r), \quad (9 \text{ 分})$$

将 λ_n 代入另外一个常微分方程, 得其通解为:

$$T_m(t) = c_m \cos(\mu_m^{(0)}t) + d_m \sin(\mu_m^{(0)}t) \quad (10 \text{ 分})$$

由叠加原理 $u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} [c_m \cos(\mu_m^{(0)}t) + d_m \sin(\mu_m^{(0)}t)] J_0(\mu_m^{(0)}r),$

由初始条件得

$$\begin{aligned} c_m &= 0 \\ d_m &= \frac{\int_0^1 r(1-r^2) J_0(\mu_m^{(0)}r) dr}{\frac{1}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}) \mu_m^{(0)}} = \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \end{aligned} \quad (13 \text{ 分})$$

故方程的解为

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_m^{(0)})}{(\mu_m^{(0)})^3 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \sin(\mu_m^{(0)}t) J_0(\mu_m^{(0)}r). \quad (15 \text{ 分})$$

七. 解: 容易得到方程的一个特解为 $u_*(x, y, z) = 3y^2$. (形式有很多) (3 分)

令 $v = u - u_*$, 则 v 满足 $\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{y=0} = f(x, z). \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$

设右半平面内任意一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点 $M_1(x_1, y_1) =$

$M_1(x_0, -y_0, z_0)$, 因此所求格林函数为:

$$\begin{aligned}
G(M, M_0) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

(9 分)

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{y_0}{[(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}}, \quad (13 \text{ 分})$$

于是,

$$v(x_0, y_0, z_0) = - \int_{\Gamma} f(M) \frac{\partial G}{\partial n} ds = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0 f(x, z)}{[(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} dx dz.$$

(14 分)

原问题的解为

$$u(x_0, y_0, z_0) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0 f(x, z)}{[(x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} dx dz + 3y_0^2.$$

(15 分)

八. 解: 极值原理: 若函数在 Ω 内调和, 在 $\Omega + \Gamma$ 上连续, 且不为常数, 则它的最大值和最小值只能在边界上取得。

(5 分)

假设 u_1, u_2 为方程的两个解, 则 $v = u_1 - u_2$ 满足

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

由极值原理 $v = 0$. 所以方程的解是唯一的。

(10 分)

《数学物理方程与特殊函数》测试题（四）

一、（15 分）用分离变量法求解如下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, t > 0, \\ u(0, t) = u_x(2, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x^2 - 4x, & u_t(x, 0) = 3 \sin \frac{3\pi x}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

二、（15 分）设 a 为正常数，求以下定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \sin \frac{3\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

三、（15 分）求以下定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 1, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 2, u_x(l, t) = 3, & t > 0, \\ u(x, 0) = 8 \sin \frac{3\pi x}{2l} + 2 - \frac{x^2}{2a^2} + (3 + \frac{l}{a^2})x, & 0 < x < l. \end{cases}$$

四、（15 分）解以下初边值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 \leq r < R, t > 0, \\ u(R, t) = 0, |u(0, t)| < +\infty, & t > 0, \\ u(r, 0) = R^2 - r^2, & 0 \leq r < R. \end{cases}$$

五、（10 分）用分离变量法求以下定解问题.

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, 0 < r < a, 0 \leq \theta \leq \pi, \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, 0 < r < a, \\ u(a, \theta) = \sin 2\theta + 3\sin 5\theta. \end{cases}$$

六、(10 分) 求解以下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin x, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

七、(10 分) 写出半空间 $(-\infty < x, y < +\infty, z < 0)$ 上的 Green 函数, 并用 Green 函数法求解以下定解问题.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, -\infty < x, y < +\infty, z < 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y), -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

八、(10 分) 在以下两题中任选一题, 若做两题, 按第一题评分.

1、设 $u(x, y, z)$ 是区域 Ω 内的调和函数, Γ 为区域 Ω 的边界, $u(x, y, z)$ 在 $\Omega + \Gamma$ 上有一阶连续偏导数, 利用 Green 第二公式证明

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

2、用积分变换法解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - tu = 0, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

$$(\text{已知 } F^{-1}(e^{-\lambda^2 t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}).$$