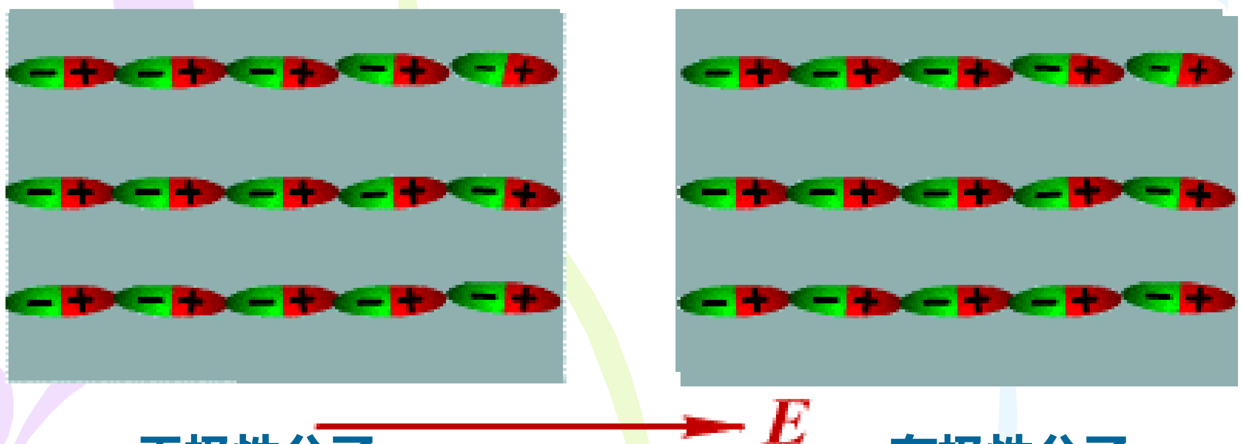
3.3 电介质中的静电场

当电场中放入电介质时，电介质在电场作用下会发生极化现象。

电极化将影响原有的场分布。



无极性分子　　　　　　　　　　有极性分子

电介质的极化

如何影响场？其影响可归结为电介质内形成的电偶极子的宏观效应

极化强度矢量 $\vec{P}=\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\sum\vec{P}}{\Delta V}$

在电介质中取一**体积元** dV'，它具有电偶极矩 $\vec{P}dV'$

由前例题知，电偶极矩$\vec{p}$产生的电位 $\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

所以，体积元内的电偶极矩所产生的电位 $d\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(\vec{P}dV')\cdot\vec{r}}{r^3}$

而整个电介质中的电偶极矩所产生的电位

$$\phi=\int_{V'}d\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\vec{P}\bullet\vec{R}}{R^3}dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\vec{P}\bullet\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\nabla'\bullet\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left(-\frac{\nabla'\bullet\vec{P}}{R}\right)dV'$$

$$\because\nabla'\bullet\left(u\vec{A}\right)=\vec{A}\bullet\nabla'u+u\nabla'\bullet\vec{A}$$

$$\therefore\nabla'\bullet\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)=\vec{P}\bullet\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{R}\nabla'\bullet P$$

$$\therefore\vec{P}\bullet\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla'\bullet\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)-\frac{1}{R}\nabla'\bullet\vec{P}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\nabla'\bullet\left(\frac{\vec{P}}{R}\right)dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left(-\frac{\nabla'\bullet\vec{P}}{R}\right)dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{s}\frac{\vec{P}}{R}\bullet d\vec{S}'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left(-\frac{\nabla'\bullet\vec{P}}{R}\right)dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{s}\frac{\boxed{\vec{P}\bullet\vec{e}_n}}{R}dS'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left(\frac{\boxed{-\nabla'\bullet\vec{P}}}{R}\right)dV'$$

与真空中面电荷和体电荷所产生的电位的计算公式比较

$$\begin{cases}\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{s}\dfrac{\rho_s dS'}{R} \\ \phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\dfrac{\rho_V dV'}{R}\end{cases}$$

$$\rho_s=\vec{P}\bullet\vec{e}_n$$

$$\rho_v=-\nabla'\bullet\vec{P}$$

$\therefore$ 介质极化后的场相当于$\rho'_s=\vec{P}\bullet\vec{e}_n$的束缚面电荷

及$\rho_v=\left(-\nabla'\bullet\vec{P}\right)$的束缚体电荷在真空中所产生的场

电介质在外电场作用下，电偶极子在介质表面或内部对应等效电荷分布，称之为束缚电荷，它与极化强度的关系：

$$\begin{cases} \text{束缚面电荷：} \rho'_s = \vec{P} \bullet \vec{e}_n \\ \text{束缚体电荷：} \rho'_v = -\nabla' \bullet \vec{P} \end{cases}$$

电介质中束缚电荷所产生的附加场现相当于真空中其束缚电荷所产生的场。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_s \frac{\rho'_s}{R} \bullet dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho'_V}{R} dV'$$

电介质中的场相当于原来无介质时的外加场（自由电荷产生的电场）以及束缚电荷在真空中产生的场的叠加。

电介质中的电场相当于自由电荷和束缚电荷在真空中产生的。

电介质中的电场（不考虑介质表面）相当于自由电荷和束缚电荷在真空中产生的。由高斯定理的微分形式：

基本方程和性质

$$\because \nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho'_v}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_v - \nabla' \bullet \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho_v - \boxed{\nabla' \bullet \vec{P}}$$ 电介质内部某点极化强度的散度

$$\Rightarrow \nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_v$$

又 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

$$\Rightarrow \nabla \bullet \vec{D} = \rho_v$$

$$\oint_s \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho_v dV$$

$\vec{D}$ 的积分和微分只与自由电荷有关，与束缚电荷无关，求解更方便。

真空中：$\nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \rho_v$

物质中：$\nabla \bullet \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_v$

$$\Rightarrow \nabla \bullet \vec{D} = \rho_v$$

自由电荷和束缚电荷所产生的电场都是库仑电场

具有无旋性：

$$\nabla\times\vec{E}=0,\oint_{c}\vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi,\phi_{A}=\int_{A}^{P}\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

可证明在简单媒质中，用 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ **代替** ε_0

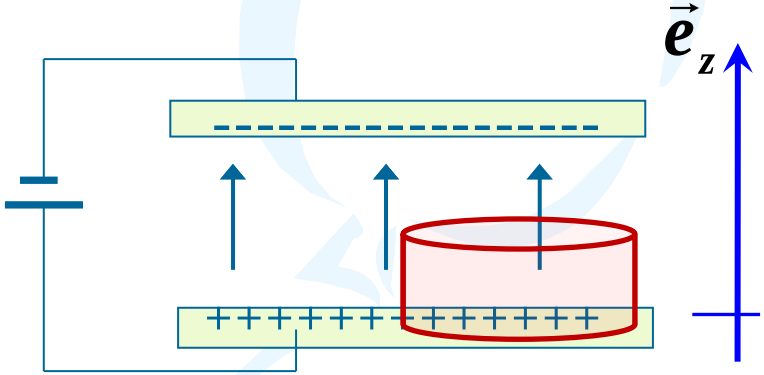
点电荷 $\phi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R}$

面电荷 $\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{s'}\dfrac{\rho_s dS'}{R}$

体电荷 $\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\dfrac{\rho_v dV'}{R}$

线电荷 $\phi=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l}\dfrac{\rho_l dl'}{R}$

例1：两块很大的平行导体板，板间距离为d， d比平板的长和宽均小很多，两板接上直流电压源u，充电后又断开电源，然后再两板间插入一块均匀介质板，其相对介电常数为9，假设介质板的厚度略小于d ，因而留下空气隙，求（1）放入介质板前后，平行板间各点$\vec{E}$；（2）介质内部的体电荷密度和表面的面电荷密度。



解：加入介质板前

充电使得两极板分别带上等量的正电荷和负电荷，设自由电荷面密度分别为 $+\rho_s, -\rho_s$

因d远小于极板的长、宽，可忽略边缘效应。

两板间电场方向与极板垂直

根据高斯定理，构造一个柱形高斯面(注：下底面在导体内) $\oint_s \vec{D} \bullet d\vec{S} = \rho_s \Delta S$

理想导体内$\vec{E}$为0 $\Rightarrow$ $\oint_s \varepsilon_0 \vec{E} \bullet d\vec{S} = \varepsilon_0 E \Delta S = \rho_s \Delta S$ $\Rightarrow$ $E = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0}$

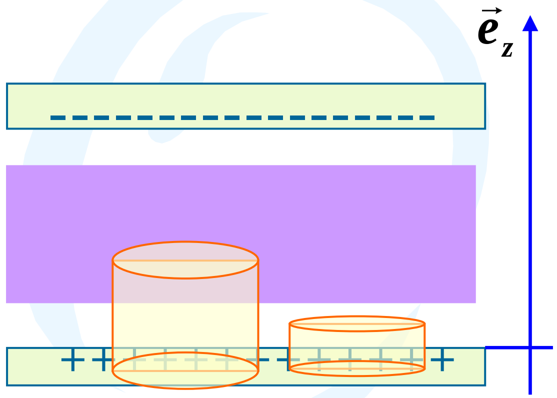
两板间电场为均匀场，方向与极板垂直，则 $\vec{E} = \dfrac{U}{d}\vec{e}_z$

$\Rightarrow$ $\rho_s = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \dfrac{U}{d}$

充电电源已断开，极板上自由电荷密度保持不变

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S}=Q\Rightarrow D\Delta S=\rho_s\Delta S \qquad \Rightarrow \vec{D}=\vec{e}_z\rho_s=\vec{e}_z\frac{\varepsilon_0 U}{d}$$

$\rho_s \to \vec{D} \to \vec{E}$



$\therefore\Rightarrow$ 空气隙中的电场：$\vec{E}_0=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\vec{e}_z\dfrac{U}{d}$

电介质中的电场：$\vec{E}=\dfrac{\vec{D}}{\varepsilon}=\vec{e}_z\dfrac{\varepsilon_0 U}{\varepsilon_0\varepsilon_r d}=\vec{e}_z\dfrac{U}{9d}$

（2）介质内部的体电荷密度和表面的面电荷密度。

由极化强度求束缚电荷密度

$$\boxed{\rho_s=\vec{P}\bullet\vec{e}_n}$$
$$\boxed{\rho_v=-\nabla'\bullet\vec{P}}$$

$\because \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

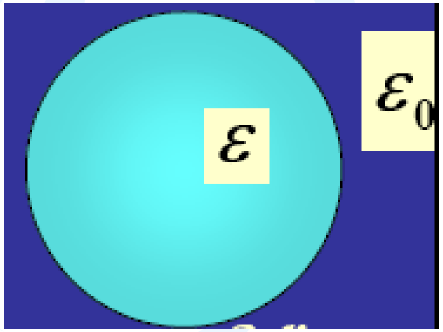
$$\therefore \vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{e}_z\frac{\rho_s}{\varepsilon}=\frac{8}{9}\rho_s\vec{e}_z$$

介质内部：$\rho'_v=-\nabla\bullet\vec{P}=0$

介质上表面：$\rho'_{s1}=\vec{P}\bullet\vec{e}_{n1}=\vec{P}\bullet\vec{e}_z=\dfrac{8}{9}\rho_s$

介质下表面：$\rho'_{s2}=\vec{P}\bullet\vec{e}_{n2}=-\vec{P}\bullet\vec{e}_z=-\dfrac{8}{9}\rho_s$

例2：设自由电荷均匀分布在半径为a的介质球内，其体密度为ρ_v，球内的介电常数为ε，球外的介电常数为ε_0，求（1）电位的分布（设无限远处电位为0）；（2）介质球内的体电荷密度和表面的面电荷密度。



分析：球对称性，先求$\vec{E}$（可利用高斯定理），再求ϕ

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S} = Q$$

解：采用球坐标系，取半径为r的球面为高斯面

(1) a.在球内（$r < a$）：

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S} = 4\pi r^2 \varepsilon E_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\rho_v r}{3\varepsilon}\vec{e}_r$$

b.在球外（$r >= a$）：

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S} = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{a^3\rho_v}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

假设无限远处为0电位参考点，则：

$$\boxed{\varphi_A = \int_A^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

a.在球内（$r < a$）：

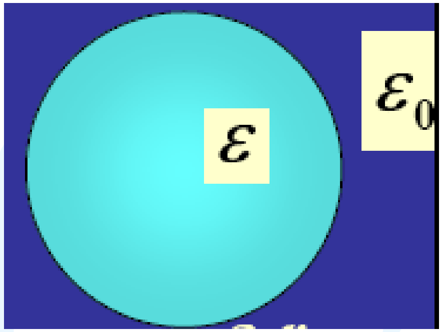
$$\varphi_1 = \int_r^\infty \vec{E}\bullet d\vec{l} = \int_r^a \vec{E}_1 \bullet d\vec{l} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \bullet d\vec{l} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\rho_v\left(a^2 - r^2\right)}{6\varepsilon} + \frac{\rho_v a^2}{3\varepsilon_0}$$

b.在球外（$r >= a$）：

$$\varphi_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \bullet d\vec{l} = \frac{a^3\rho_v}{3\varepsilon_0 r}$$

(2)由极化强度求束缚电荷密度

$$\because \vec{E}_1 = \frac{\rho_v r}{3\varepsilon}\vec{e}_r$$



$$\because \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\therefore \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} \quad = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon}\rho_v r \vec{e}_r$$

所以球内束缚电荷体密度为：

$$\rho_v' = -\nabla \bullet \vec{P} \quad = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_v$$

球表面上束缚电荷面密度为： $\rho_s = \vec{P} \bullet \vec{e}_n \big|_{r=a} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon}\rho_v a$

故，介质球内总的束缚电荷为：

$$Q_v = \frac{4\pi a^3}{3} \bullet \rho'_v = \frac{4\pi a^3}{3} \bullet \left(-\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\rho_v\right) = -\frac{4\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)a^2 \rho_v}{3\varepsilon}$$

介质球表面总的束缚电荷为：

$$Q_s = 4\pi a^2 \bullet \rho'_s = 4\pi a^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{3\varepsilon}\rho_v \quad = -Q_v$$