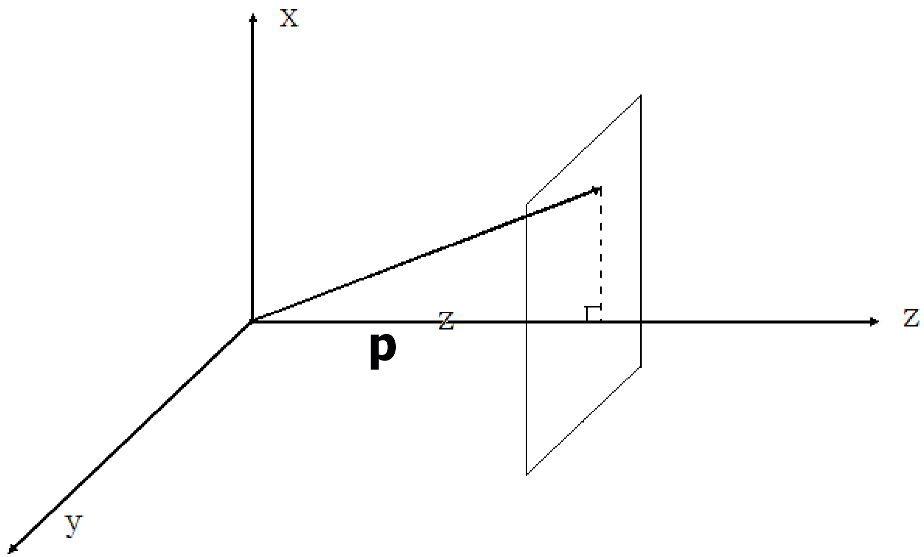
8.10 Oblique incidence on a plane boundary

Review: wave propagation in an arbitrary direction

The electric field is given as

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j\beta z} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j\beta \vec{a}_z \bullet \vec{r}}$$



where

$$\vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z$$

$$\vec{a}_z \cdot \vec{r} = z = cons\tan t$$

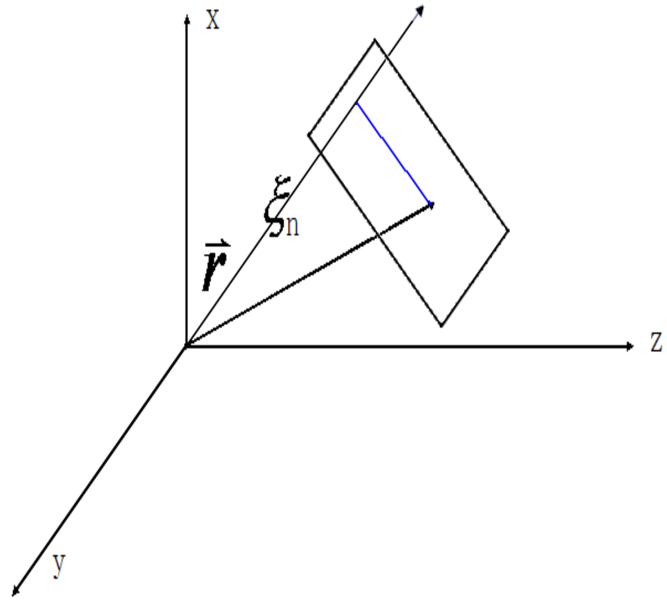
$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jkz} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jk\vec{a}_n \cdot \vec{r}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{k} = k\,\vec{a}_n$$

- Wave propagates along an arbitrary direction

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0\, e^{-j\beta\xi} = \dot{\vec{E}}_0\, e^{-j\beta\vec{a}_n \bullet \vec{r}} = \dot{\vec{E}}_0\, e^{-jk\vec{a}_n \bullet \vec{r}}$$

$$= \dot{\vec{E}}_0\, e^{-j\vec{k} \bullet \vec{r}}$$



$$\vec{k} = k\vec{a}_n = \vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z$$

$$\therefore \dot{E} = \dot{E}_0\, e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$$

$$wher\ k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon(\ dielec)$$

Since $\dot{\vec{E}} = \eta \dot{\vec{H}} \times \vec{a}_z$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\eta} \vec{a}_z \times \dot{\vec{E}}$$

$$\vec{k} = k\vec{a}_n = \vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z \cdot\cdot$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \eta \dot{\vec{H}} \times \vec{a}_n \\ \dot{\vec{H}} = \dfrac{1}{\eta} \vec{a}_n \times \dot{\vec{E}} \end{cases}$$

同样 $\dot{E}, \dot{H}, \vec{a}_n$ 构成右手螺旋关系

dielectric: $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}, \eta = \sqrt{\mu / \varepsilon}$

conducting: $k = \omega\sqrt{\mu \varepsilon_c}, \eta = \sqrt{\mu / \varepsilon_c}$

8.10 Oblique incidence:

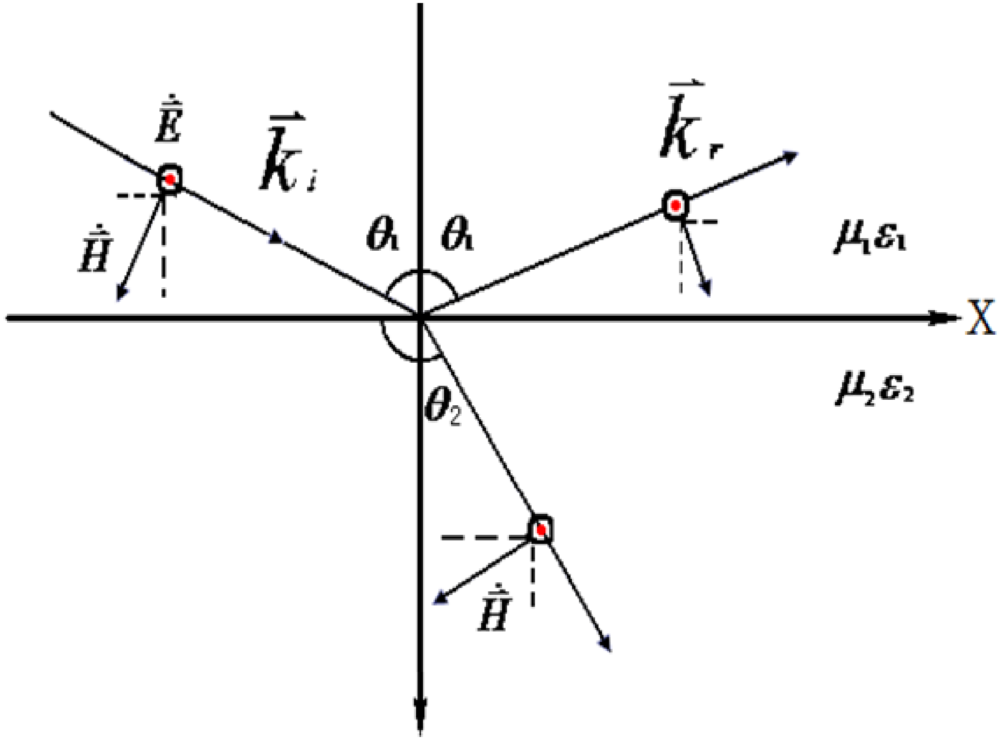
1.垂直极化波的斜入射

--电场方向垂直于入射面

- 反射系数和透射系数:
  - 场量表达式:

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}_i = \vec{a}_y \dot{E}_{i0} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}_i = (-\vec{a}_x \dot{H}_{i0} \cos\theta_1 + \vec{a}_z \dot{H}_{i0} \sin\theta_1) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \end{cases}$$

■假定入射、反射、透射电场方向相同。磁场有右手定则确定。



$$\dot{\vec{E}}_i = \vec{a}_y \dot{E}_{i0} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

$$= \vec{a}_y \dot{E}_{i0} e^{-j(\vec{a}_x k_1 \sin\theta + \vec{a}_z k_1 \cos\theta)\cdot(\vec{a}_x x + \vec{a}_z z)}$$

$$= \vec{a}_y \dot{E}_{i0} e^{-jk_1(x\sin\theta + z\cos\theta)}$$

Where $k_x = k\sin\theta$; $k_z = k\cos\theta$;

Oblique incidence:

$$\vec{H}_i = -\vec{a}_x \dot{H}_{i0} \cos\theta_1 e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + \vec{a}_z \dot{H}_{i0} \sin\theta_1 e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}}$$

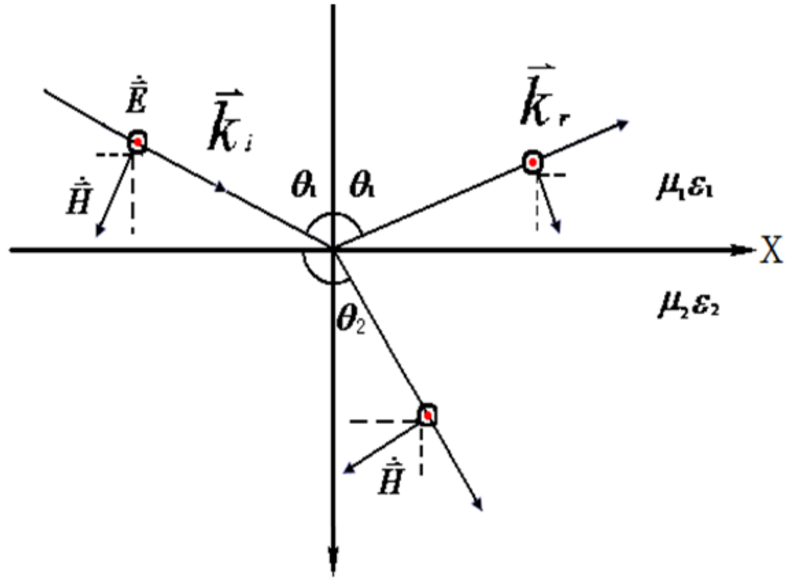
反射波因子
$$e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} = e^{-j(\vec{a}_x k_1 \sin\theta_1 - \vec{a}_z k_1 \cos\theta_1)\bullet\vec{r}}$$

折射波因子
$$e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}} = e^{-j(\vec{a}_x k_2 \sin\theta_2 + \vec{a}_z k_2 \cos\theta_2)\bullet\vec{r}}$$

由Z＝0 处.电磁场切向连续得

$$\dot{E}_{i0} e^{-jk_1 x\sin\theta_1} + \dot{E}_{r0} e^{-jk_1 x\sin\theta_1} = \dot{E}_{t0} e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$

$$-\dot{H}_{i0}\cos\theta_1 e^{-jk_1 x\sin\theta_1} + \dot{H}_{r0}\cos\theta_1 e^{-jk_1 x\sin\theta_1} = -\dot{H}_{t0}\cos\theta_2 e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$



Oblique incidence:

$$\dot{E}_{i0}e^{-jk_1 x\sin\theta_1}+\dot{E}_{r0}e^{-jk_1 x\sin\theta_1}=\dot{E}_{t0}e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$

$$-\dot{H}_{i0}\cos\theta_1 e^{-jk_1 x\sin\theta_1}+\dot{H}_{r0}\cos\theta_1 e^{-jk_1 x\sin\theta_1}=-\dot{H}_{t0}\cos\theta_2 e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$

对于任意时刻t,界面上任意点r_0,上两式都成立，则(1)指数相等。(2)振幅之间有确定关系。

(1)指数相等。

$$k_1\sin\theta_1=k_2\sin\theta_2 \longrightarrow \sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2$$

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \longrightarrow$$ 折射定理

Oblique incidence:

(2)振幅之间有确定关系。

$$\therefore \quad \begin{cases} \dot{E}_{io} + \dot{E}_{ro} = \dot{E}_{to} \\ \dot{H}_{i0} \cos\theta_1 - \dot{H}_{r0} \cos\theta_1 = \dot{H}_{t0} \cos\theta_2 \end{cases}$$

令 $R_{\perp} = \dfrac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}}, T_{\perp} = \dfrac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}}$ $\Rightarrow$ 反射、折射/透射系数

$$\therefore \quad \begin{cases} 1 + R_{\perp} = T \\ \dfrac{1}{\eta_1}(1 - R_{\perp}) \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\eta_2} T \cos\theta_2 \end{cases}$$

Oblique incidence:

反射、折射/透射系数:

$$
\begin{cases}
R_{\perp} = \dfrac{\eta_2/\cos\theta_2 - \eta_1/\cos\theta_1}{\eta_2/\cos\theta_2 + \eta_1/\cos\theta_1} \\
T_{\perp} = \dfrac{2\eta_2/\cos\theta_2}{\eta_2/\cos\theta_2 + \eta_1/\cos\theta_1}
\end{cases}
$$

Oblique incidence:

讨论：理想媒质——理想导体

- 理想导体表面切向电场为零:

$$\dot{E}_{i0}+\dot{E}_{r0}=0 \quad \Rightarrow \quad R=-1$$

- 理想导体表面及理想媒质/电介质中的场为:

电场:

$$\dot{\vec{E}}_i=\dot{E}_{i0}e^{-jk\cdot\vec{r}}=\vec{a}_y\dot{E}_{i0}e^{-jk_i(x\sin\theta_1+z\cos\theta_1)}$$

$$\dot{\vec{E}}_r=\dot{E}_{r0}e^{-jk_r\cdot\vec{r}}=\vec{a}_y\dot{E}_{r0}e^{-jk_r(x\sin\theta-z\cos\theta)}$$

$$=-\vec{a}_y\dot{E}_{i0}e^{-jk_r(x\sin\theta-z\cos\theta)}$$

Oblique incidence:

电介质中场：入射反射的合成场

$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r = \vec{a}_y \dot{E}_{i0}(e^{-jk_1 z\cos\theta} - e^{jk_1 z\cos\theta})e^{-jk_1 x\sin\theta}$$

$$= \vec{a}_y\left[-2j\dot{E}_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta_1)\right]e^{-jk_1\sin\theta_1 x}$$

磁场:

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\nabla\times\dot{\vec{E}}}{-j\omega\mu} = [\vec{a}_x(-2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos\theta\cdot\cos(zk\cos\theta)) +$$

$$\vec{a}_z(-2j\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\sin\theta\cdot\sin(zk\cos\theta))]e^{-jkx\sin\theta}$$

Oblique incidence:

- 沿x方向为行波沿x方向传播，等相位面为x＝常数的平面。

- 对于x方向为行波，$\dot{E}$为$\vec{a}_y$,$\dot{H}$为$\vec{a}_x$和$\vec{a}_z$，称TE波。

- 相速v_p=v_x：

$$v_x = \frac{\omega}{\beta_x} = \frac{\omega}{k\sin\theta_1} = \frac{v}{\sin\theta} > v \text{.....快 波}$$

- 非均匀平面波

振幅在x=常数的等相位面上是z的函数，不同位置z振幅不相等，随z变化而呈正弦/余弦变化。z=常数的面为等振幅面，等振幅面和等相位面相互垂直。

Oblique incidence:

- 理想媒质/电介质中功率传输($k_1=k, \theta_1=\theta$)

$$\vec{S}_{av2}=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}^*] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{a}_y\dot{E}_y\times(\vec{a}_x\dot{H}_x^*+\vec{a}_z\dot{H}_z^*)\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[-\vec{a}_z\dot{E}_y\dot{H}_x^*+\vec{a}_x\dot{E}_y\dot{H}_z^*)]$$

$$=\vec{a}_x\frac{2E_{i0}^2}{\eta}\sin\theta\sin^2(kz\cos\theta)$$

$$\dot{\vec{E}}_1=\dot{\vec{E}}_i+\dot{\vec{E}}_r=\vec{a}_y\dot{E}_{i0}(e^{-jk_1z\cos\theta}-e^{jk_1z\cos\theta})e^{-jk_1x\sin\theta}$$

$$=\vec{a}_y\left[-2j\dot{E}_{i0}\sin(k_1z\cos\theta_1)\right]e^{-jk_1\sin\theta x}$$

$$\dot{\vec{H}}=\frac{\nabla\times\dot{\vec{E}}}{-j\omega\mu} =[\vec{a}_x(-2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos\theta\cdot\cos(zk\cos\theta))+\vec{a}_z(-2j\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\sin\theta\cdot\sin(zk\cos\theta))]e^{-jkx\sin\theta}$$

Oblique incidence:

•理想媒质能量密度:

$$W_{av} = W_{eav} + W_{mav} = 2W_{eav} = 2 \cdot \frac{1}{4} \varepsilon \left| \dot{\vec{E}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon (2E_{i0} \sin(kz\cos\theta))^2$$

●能量沿x方向传输速度

$$v_e = \frac{S_{av}}{W_{av}} = \frac{\vec{a}_x 2E_{i0}^2 \sin\theta \sin^2(kz\cos\theta) / \eta}{\frac{1}{2}\varepsilon (2E_{i0}\sin(kz\cos\theta))^2} = \frac{\sin\theta}{\eta\varepsilon} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$= v\sin\theta \le v$ ⇨ 能速小于光速，显然有 $v_p v_e = v^2$

Oblique incidence:

- 介质中场沿z方向为驻波分布：z方向无能量传输。

磁场H_x波腹点、H_z/电场波节点

$$\sin(kz\cos\theta) = 0 \Rightarrow z = -\frac{n\pi}{k\cos\theta} = -\frac{n\lambda}{2\cos\theta} ..n = 0.1.2...$$

磁场H_x波节点、H_z/电场波腹点

$$\cos(kz\cos\theta) = 0 \Rightarrow z = -(2n+1)\frac{\pi}{2k\cos\theta} = -(2n+1)\frac{\lambda}{4\cos\theta} ..n = 0.1.2...$$

驻波比：电场最大值与最小值之比。

$$\vec{E} = \vec{a}_y\left[-2j\dot{E}_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta_1)\right]e^{-jk_1\sin\theta x}$$

$$\vec{H} = [\vec{a}_x(-2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos\theta\cdot\cos(zk\cos\theta)) + \vec{a}_z(-2j\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\sin\theta\cdot\sin(zk\cos\theta))]e^{-jkx\sin\theta}$$

Oblique incidence:

- 在 $z=-\dfrac{n\lambda}{2\cos\theta}$处电场为零（磁场$\boldsymbol{H_x}$波腹点、$\boldsymbol{H_z}$/电场波节点）。在该处放一理想导体板不会破坏原来的场分布。即两导体板可传输TE波。此时TE波可看成入射波在两导体板来回反射而形成。

$$\vec{E}=\vec{a}_y\left[-2j\dot{E}_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta_1)\right]e^{-jk_1\cos\theta_1 x}$$

$$\vec{H}=[\vec{a}_x(-2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos\theta\cdot\cos(zk\cos\theta))+\vec{a}_z(-2j\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\sin\theta\cdot\sin(zk\cos\theta))]e^{-jkx\sin\theta}$$

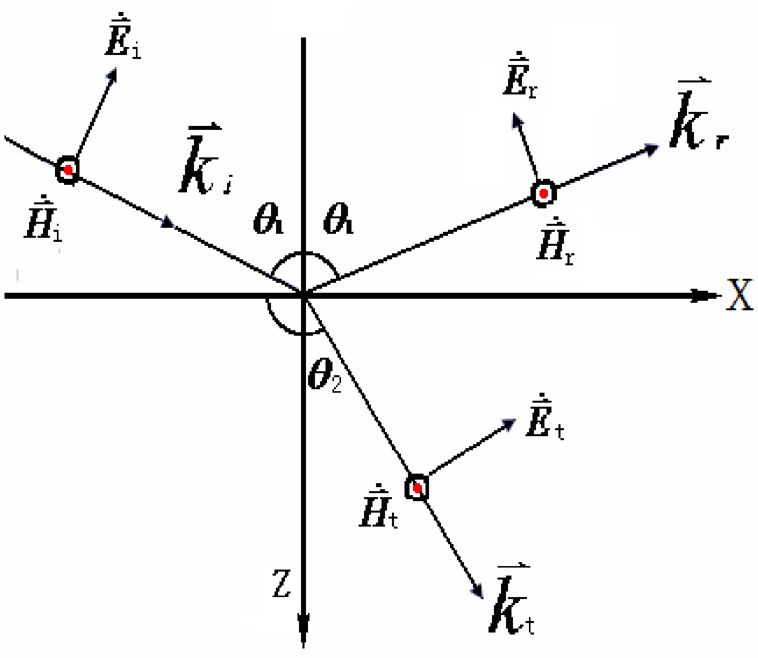
Oblique incidence:

2.平行极化波的斜入射

- 电场矢量在入射面上，或电场平行入射面-平行极化波。
- 反射系数和透射系数：
  - 假设磁场垂直入射面，入射、反射和透射方向保持不变如图所示。
  - 根据边界条件列方程如下：

$$\begin{cases} \dot{E}_{i0}\cos\theta_1 - \dot{E}_{r0}\cos\theta_1 = \dot{E}_{t0}\cos\theta_2 \\ \dot{H}_{i0} + \dot{H}_{r0} = \dot{H}_{t0} \end{cases}$$

- 假定入射、反射、透射磁场方向相同。电场由右手定则确定。



Oblique incidence:

$$\begin{cases}(\dot{E}_{i0}-\dot{E}_{r0})\cos\theta_1=\dot{E}_{t0}\cos\theta_2\\(\dot{E}_{i0}+\dot{E}_{r0})/\eta_1=\dot{E}_{t0}/\eta_2\end{cases}$$

求解得反射系数和透射系数:

$$R_{//}=\frac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}}=\frac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}$$

$$T_{//}=\frac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}$$

讨论：理想介质-理想导体

Oblique incidence:

（1）场特点

假设媒质2为理想导体，η_2=0.于是反射系数和透射系数分别为：$R_{//}=1$，$T_{//}=0$.

可见透射场(媒质2中的场)为零。媒质1(理想介质)场为：

$$\dot{\vec{H}} = \vec{a}_y \left[2 \frac{\dot{E}_{i0}}{\eta} \cos(kz \cos\theta) \right] e^{-jkx\sin\theta}$$

$$\dot{\vec{E}} = \vec{a}_x(-2j\dot{E}_{i0}\cos\theta \sin(kz\cos\theta))e^{-jkx\sin\theta} + \vec{a}_z(-2\dot{E}_{i0}\sin\theta\cos(kz\cos\theta))e^{-jkx\sin\theta}$$

Where $k_x=k\sin\theta; k_z=k\cos\theta$;

媒质1中合成场是沿x方向传播的TM波，相位常数为 $k_x=k\sin\theta$;快波

Oblique incidence:

（2）能流：x方向行波 $S_{av}=\vec{a}_x\frac{2E_{i0}^2}{\eta}\sin\theta\cos^2(kz\cos\theta)$

- 能速：$v_e=s_{av}/W_{av}=v\sin\theta<=v$.

(3) 驻波

- 合成场在z方向为驻波，E_x和H_y在时间上相位差π/2,在z方向无平均功率传输。

  $z=-n\lambda/(2\cos\theta)$ （n=0,1,2…）：E_z和H_y为腹点，E_x为节点。

$z=-(2n+1)\lambda/(4\cos\theta)$ （n=0,1,2…）：E_z和H_y为节点，E_x为腹点。

$$\dot{\vec{H}}=\vec{a}_y\left[2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos(kz\cos\theta)\right]e^{-jkx\sin\theta}$$

$$\dot{\vec{E}}=\vec{a}_x(-2j\dot{E}_{i0}\cos\theta\sin(kz\cos\theta))e^{-jk\sin\theta x}+\vec{a}_z(-2\dot{E}_{i0}\sin\theta\cos(kz\cos\theta))e^{-jk\sin\theta x}$$

Oblique incidence:

- 在 $z=-\dfrac{n\lambda}{2\cos\theta}$ 处电场$\boldsymbol{E_x}$为零，$\boldsymbol{E_z}$和$\boldsymbol{H_y}$为腹点。在该处放一理想导体板不会破坏原来的场分布。即两导体板可传输TM波。此时TM波可看成入射波在两导体板来回反射而形成。

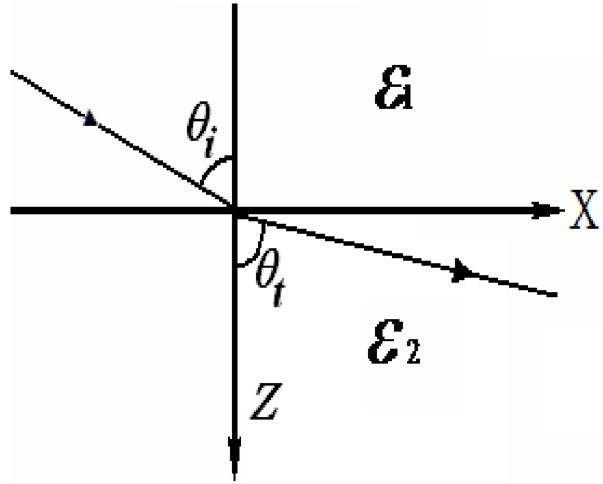
$$\dot{\vec{H}}=\vec{a}_y\left[2\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta}\cos(kz\cos\theta)\right]e^{-jkx\sin\theta}$$

$$\dot{\vec{E}}=\vec{a}_x(-2j\dot{E}_{i0}\cos\theta\sin(kz\cos\theta))e^{-jk\sin\theta x}+\vec{a}_z(-2\dot{E}_{i0}\sin\theta\cos(kz\cos\theta))e^{-jk\sin\theta x}$$

3.对理想介质分界面的斜入射

(1)全反射

当$\varepsilon_1>\varepsilon_2$,即波从光密媒质$n_1$入射到光疏媒质$n_2$，根据折射定理，$\theta_t>\theta_i$, 如右图所示。



- 当入射角增到某一角度θ_c $(<90^0)$,透射角$\theta_t=90^0$.此时折射波传播方向与分界面平行。 θ_c称临界角。
- 媒质2中的场特点

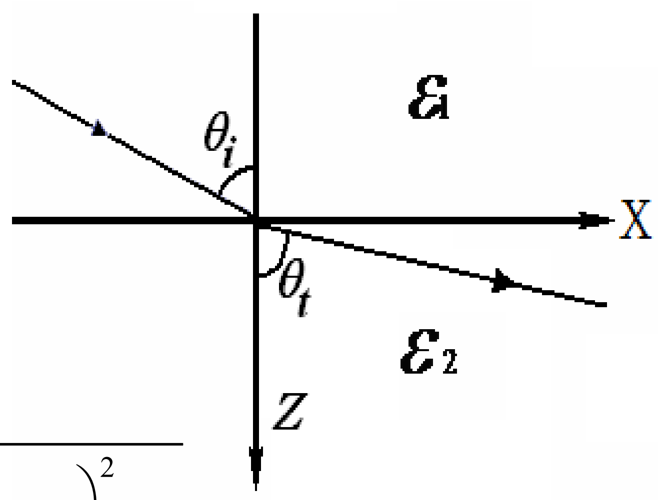
•当入射角θ_i再继续增大时，根据折射定理，透射角θ_t不再有实数解，此时

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_t\rightarrow n_1\sin\theta_c=n_2\sin 90^0$$

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}\rightarrow\rightarrow\theta_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1}=\arcsin\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}}$$

Oblique incidence:

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \rightarrow n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin 90^0$$



$$\theta_i > \theta_c$$

$$n_2 \sin\theta_t = n_1 \sin\theta_i > n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin 90^0$$

$$\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i > \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_c = 1$$

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\sin^2\theta_t - 1} = \pm j\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}$$

$\cos\theta_t$为纯虚数，则反射系数$|R_\perp|= |R_{//}|=1$,因此称这种$\theta_i>\theta_c$时 $|R\perp|= |R//|=1$的现象为全反射现象。此时折射波传播因子:

$$e^{-j\vec{k}_t\bullet\vec{r}} = e^{-j(\vec{a}_x k_2 \sin\theta_t + \vec{a}_z k_2 \cos\theta_t)\bullet\vec{r}} = e^{-jk_2 x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) - k_2 z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}}$$

Oblique incidence:

$$e^{-j\vec{k}_t \bullet \vec{r}} = e^{-j\left(\vec{a}_x k_2 \sin\theta_t + \vec{a}_z k_2 \cos\theta_t\right)\bullet \vec{r}} = e^{-jk_2 x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) - k_2 z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}}$$

从传播因子看，折射波沿x方向传播(相位常数$k_2 n_1 \sin\theta_i/n_2$),沿z方向按指数规律衰减，波在媒质2厚度很薄的一层内，透入深度δ:

$$e^{-j\vec{k}_t \bullet \vec{r}} = e^{-jk_2 x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) - k_2 z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}} = e^{-jk_2 x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) - 1}$$

$$\Rightarrow k_2 z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1} = 1 \Rightarrow \delta = z = 1/\left(k_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}\right)$$

折射波的等相位面(x=常数的平面)与等振幅面(z=常数的平面)垂直，故为非均匀平面波。

Oblique incidence:

$$e^{-j\vec{k}_t \bullet \vec{r}} = e^{-j\left(\vec{a}_x k_2 \sin\theta_t + \vec{a}_z k_2 \cos\theta_t\right)\bullet \vec{r}} = e^{-jk_2 x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right) - k_2 z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2 - 1}}$$

从传播因子看，折射波沿x方向传播(相位常数$k_2 n_1 \sin\theta_i / n_2 > k_2$)

其相速为

$$v_x = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_2\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)} < \frac{\omega}{k_2} = v_2$$

折射波相速小于媒质2中均匀平面波的相速，故这种表面波称为慢波。

- 全反射只发生在波从光密媒质入射到光疏媒质的界面上才发生。即临界角θ_c才有实数解。其次，发生全反射时，反射系数为复数，反射波与入射波相位不同，故沿z方向通过界面的瞬时功率流密度不为零，但平均功率流密度为零，因此全反射为平均功率的全反射。另外，垂直极化波和平行极化波都会发生全反射现象：垂直极化波发生全反射时，折射波为TE波；平行极化波发生全反射时，折射波为TM波。最后值得注意的是，由于反射全反射时垂直极化波和平行极化波的反射系数的幅角分别不同，因此，如果入射波为圆极化波或具有垂直和平行入射面两个分量的线极化波，当$\theta_i > \theta_c$时，反射波将是椭圆极化波。

Oblique incidence:

$$e^{-j\vec{k}_t\bullet\vec{r}}=e^{-j\left(\vec{a}_x k_2\sin\theta_t+\vec{a}_z k_2\cos\theta_t\right)\bullet\vec{r}}=e^{-jk_2x\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)-k_2z\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i\right)^2-1}}$$

媒质2中垂直极化波时电场场强表达式

设 $R_\perp=e^{j\varphi},T_\perp=|T_\perp|e^{j\varphi'}$,则

$$\dot{E}_{2y}=\dot{E}_t=\dot{E}_{t0}e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}}$$

$$=\dot{E}_{i0}|T_\perp|e^{j\varphi'}e^{-jk_2z\cos\theta_2-jk_2x\sin\theta_2}$$

$$=\dot{E}_{i0}|T_\perp|e^{-\alpha z}e^{-jk_2x\sin\theta_2+j\varphi'}$$

$$=\dot{E}_{i0}|T_\perp|e^{-\alpha z}e^{-j(k_2x\sin\theta_2-\varphi')}$$ 其中 $.\alpha=k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i-1}$

Oblique incidence:

- 全反射只发生在波从光密媒质入射到光疏媒质的界面上才发生。即临界角θ_c才有实数解。
- 其次，发生全反射时，反射系数为复数，反射波与入射波相位不同，故沿z方向通过界面的瞬时功率流密度不为零，但平均功率流密度为零，因此全反射为平均功率的全反射。
- 另外，垂直极化波和平行极化波都会发生全反射现象：垂直极化波发生全反射时，折射波为TE波；平行极化波发生全反射时，折射波为TM波。
- 最后值得注意的是，由于反射全反射时垂直极化波和平行极化波的反射系数的幅角分别不同，因此，如果入射波为圆极化波或具有垂直和平行入射面两个分量的线极化波，当$\theta_i>\theta_c$时，反射波将是椭圆极化波。
- 电磁波全反射现象是实现表面波传输的基础，广泛应用于介质波导和光纤技术中。

Oblique incidence:

设 $R_{\perp} = e^{j\varphi}, T_{\perp} = |T_{\perp}| e^{j\varphi'}$, 则

媒质 1 中垂直极化波时的电场场强

$$\dot{E}_{1y} = \dot{E}_{i0} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \dot{E}_{r0} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}$$

$$= \dot{E}_{i0} \left(e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + e^{j\varphi} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \right)$$

$$= \dot{E}_{i0} \left(e^{-jk(x \sin\theta + z\cos\theta)} + e^{j\varphi} e^{-jk(x\sin\theta - z\cos\theta)} \right)$$

$$= \dot{E}_{i0} e^{-jkx\sin\theta + j\frac{\varphi}{2}} \left(e^{-jkz\cos\theta - j\frac{\varphi}{2}} + e^{jkz\cos\theta + j\frac{\varphi}{2}} \right)$$

$$= 2\dot{E}_{i0} e^{-jkx\sin\theta + j\frac{\varphi}{2}} \left[2\cos(kz\cos\theta - \frac{\varphi}{2}) \right]$$

Oblique incidence:

(2)全透射/折射

- 当平行极化波斜射到两种非磁性的电介质的分界面上时，其反射系数在某一入射角时变为零，此时无反射波存在，这种现象称全折射现象。
- 根据平行极化波斜射反射系数公式

$$R_{//}=\frac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}}=\frac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}$$

$$T_{//}=\frac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_2+\eta_1\cos\theta_1}$$

及反射系数=0有：

$$\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}=\frac{\cos\theta_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

$$\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta_2}{\varepsilon_2}}$$

$$(\because\ \sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1=\sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2)$$

$$\frac{1-\sin^2\theta_1}{\varepsilon_1}=\frac{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_1}{\varepsilon_2}$$

可求入射角。

Oblique incidence:

$$\frac{1-\sin^2\theta_1}{\varepsilon_1}=\frac{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_1}{\varepsilon_2} \longrightarrow \sin\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

反射系数为零，全折射时的入射角θ_1称布儒斯特角θ_B。

$$\theta_1=\theta_B=\sin^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}=tg^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

此时入射角和折射角之和为**90^0.(**证明**p345)**

？垂直极化波斜入射可发生全透射/折射现象吗？

- 采用同样的方法让反射系数为零，求其入射角。

$$\begin{cases} R_\perp=\dfrac{\eta_2/\cos\theta_2-\eta_1/\cos\theta_1}{\eta_2/\cos\theta_2+\eta_1/\cos\theta_1} \\ T_\perp=\dfrac{2\eta_2/\cos\theta_2}{\eta_2/\cos\theta_2+\eta_1/\cos\theta_1} \end{cases}$$

反射、折射/透射系数：

Oblique incidence:

(2)全透射/折射

$$\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin^2\theta_2}$$

$$\because \quad \sqrt{\varepsilon_1}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1}$$

可见，只有两种媒质相同时，入射角才有解，否则没一个角满足上式。所以垂直极化波在两种不同媒质交界面上不会反射全透射/折射。
应用：如任意极化入射波以布儒斯特角斜射到交界面上时，平行极化波全透射，反射波中只有垂直极化成分。极化滤除作用。极化滤波器。

- 作业：阅读中文教材7.5相速群速色散—重点概念
- 阅读中文教材例题7-9
- 中文教材：p348-351
- T7.1;T7.2;T7.3;T7.4;T7.12;T7.13;
  T7.17;T7.18;T7.23;T7.27;T7.28;T7.30;T7.33

The end