第四章 恒定磁场

- 恒定磁场的基本方程
- 真空中的恒定磁场
- 磁介质中的恒定磁场
- 矢量磁位的微分方程
- 恒定磁场的边界条件
- 电感
- 恒定磁场的能量及能量密度

4.1 恒定磁场的基本方程

➢基本方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \end{cases} \xrightarrow{\text{导体内有恒定电流}} \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \end{cases}$$

恒定磁场基本方程

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

- 恒定磁场基本方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

- 本构关系：线性各向同性媒质中有 $\vec{B} = \mu \vec{H}$

- 基本特性：
  - 有旋无源场
  - “源”变量为：恒定电流密度矢量
  - 两个基本场变量：磁感应强度$\overrightarrow{B}$、磁场强度$\overrightarrow{H}$

4.2　真空中的恒定磁场

一、磁通连续性原理及矢量磁位

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ **表示了磁通连续性原理**

➢**恒定磁场是无源场/无散场/管形场，具有无散性**

1、磁感应线是一些首尾相连的闭合线。

2、可引入矢量磁位$\vec{A}$。

$\because \nabla \cdot \vec{B} = 0$, **有恒等式** $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

所以$\vec{B}$ 可以表示为一个矢量场的旋度场，即 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

•与标量电位类比$\vec{E} = -\nabla\phi$

•如何表示矢量磁位?

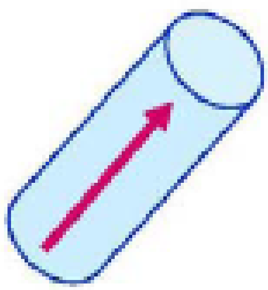
➢矢量磁位的表示

毕奥—沙伐定律

•回路C中的电流所产生的 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \dfrac{Id\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2}$

•对于回路C中的电流元 $Id\vec{l}$ 所产生的 $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2}$

•对于体电流：



如果电流分布在一个体积V'内，且电流密度为$\vec{J}$,在导体沿电流线方向取一长dl，横截面为dS的小柱体，这相当于一个电流元，可表示为：$Id\vec{l} = JSd\vec{l} = \vec{J}Sdl = \vec{J}dV'$

$$\therefore d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \times \vec{e}_R}{R^2}dV'$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_V d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J} \times \vec{e}_R}{R^2}dV'$$

$$\vec{B}=\int_V d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\vec{e}_R}{R^2}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}\times\left[-\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right]dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J}dV'$$

$$\because \nabla\times\frac{\vec{J}}{R}=\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J}+\frac{1}{R}\nabla\times\vec{J}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left(\nabla\times\frac{\vec{J}}{R}-\frac{1}{R}\boxed{\nabla\times\vec{J}}\right)dV'$$

$\vec{J}(\vec{r}\,')$是以源点坐标为变量的函数，

而$\nabla\times\vec{J}$是对场点坐标进行运算。

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left(\nabla\times\frac{\vec{J}}{R}\right)dV'$$

$$\left.\begin{aligned}&=\nabla\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}}{R}dV'\right)\\ &\text{又}\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV'+\nabla\phi+C$$

面电流 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_S \frac{\vec{J}\times\vec{e}_R}{R^2}dS' \Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{J}}{R}dS'+\nabla\phi+C$

线电流 $\vec{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'} \frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_R}{R^2} \Rightarrow \vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{Id\vec{l}\,'}{R}+\nabla\phi+C$

已定义$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV'+\nabla\phi+C$$

要唯一确定矢量磁位

- 库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$

为方便，静态场常选取$\nabla\cdot\vec{A}=0$,即满足方程$\nabla^2\phi=0\Rightarrow\nabla\phi=0$

注：满足$\begin{cases}\nabla\times\vec{A}=\vec{B}\\ \nabla\bullet\vec{A}=0\end{cases}$的$\vec{A}$可相差一个常数$C$

- 参考点的选择

电流分布在有限范围，选取无穷远处为参考点 $A_\infty=0\Rightarrow C=0$

$$\boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV'}$$

反之，选取有限远处为参考点。

$d\vec{A}$与$\vec{J}$同向，

$\vec{A}$的单位:$(T\cdot m)$或韦/米(Wb/m)

注：$\vec{B}$的单位:特(T)或韦/米^2(Wb/m^2)

➢ 矢量磁位的应用

- 为$\vec{B}$的计算提供了一种较简便的方法

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\vec{e}_R}{R^2}dV'$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV' \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

- **可用于计算磁通**

$$\Phi_m=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}=\oint_C\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

二、真空中的安培环路定理

$$\begin{cases}\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J}\end{cases} \xrightarrow{\text{真空中}\mu=\mu_0,\ \vec{H}=\vec{B}/\mu_0} \begin{cases}\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}\end{cases}$$

➢**恒定磁场是有旋场，电流是场的旋涡源，磁感应线是围绕其场源电流的闭合曲线。**

➢**应用：**

- 可由$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$，求解$\vec{B}$或$\vec{H}$.

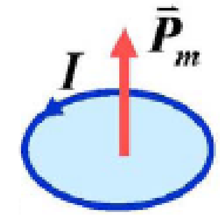
  电流分布具有对称性条件下，适当选择坐标系

  使$\vec{H}$能从积分符号中提出

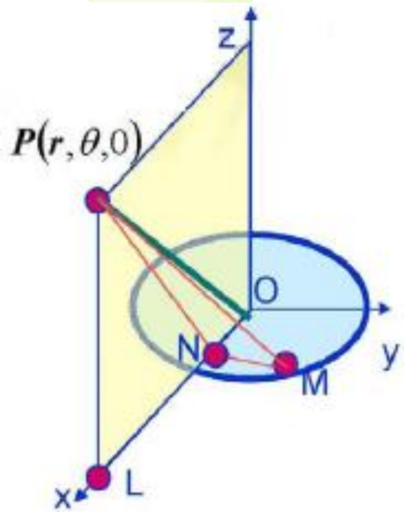
- **利用微分形式：**

  已知$\vec{H}$(或$\vec{B}$) $\rightarrow \vec{J} = \nabla\times\vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B}$

例4-2-1：试计算磁偶极子在远处产生的$\vec{A}$或$\vec{B}$



分析：已知小圆电流环为一个磁偶极子，其磁矩为：$\vec{P}_m = I\vec{S}$



设半径为a的电流圆环位于xy平面内，圆心与

坐标原点重合，采用球坐标系，

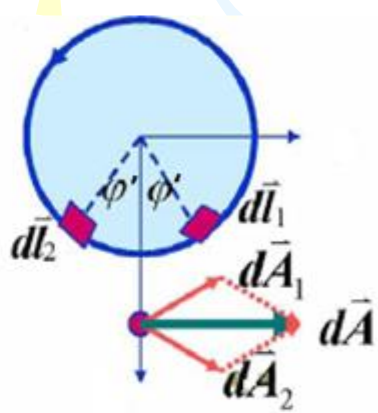
场具有轴对称性，场分布与坐标φ无关，

可取$\varphi=0$平面上一点作为待求场点，具有普遍性。

电流元$Id\vec{l}$在P点产生的矢量磁位为:$d\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l}}{R}$,

$$\boxed{\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{Id\vec{l}\,'}{R}}$$

若在圆环上对称于$\varphi=0$平面的$\pm\varphi'$处对称取电流元



$$d\vec{A}=d\vec{A}_1+d\vec{A}_2=\ \vec{e}_\varphi(2dA_1\cos\varphi')=\vec{e}_\varphi\left(2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R}\cos\varphi'\right),$$

$$\vec{A}=\int d\vec{A}=\vec{e}_\varphi\int_{\varphi'=0}^{\pi}\left(2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R}\right)\cos\varphi',$$

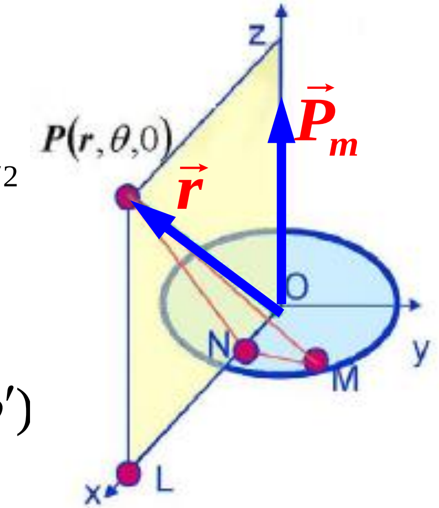
$$R^2=(PM)^2=\ (PN)^2+(NM)^2=(PL)^2+(LN)^2+(NM)^2$$

$$=(PL)^2+(LO-NO)^2+(NM)^2$$

$$R=[(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-a\cos\varphi')^2+(a\sin\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R=[(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-a\cos\varphi')^2+(a\sin\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=(r^2+a^2-2ar\sin\theta\cos\varphi')^{\frac{1}{2}}=r\left(1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-2\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi'\right)^{1/2}$$



$$\because r>>a\ \therefore \frac{1}{R}=\frac{1}{r}(1-2\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi')^{-1/2}\approx\frac{1}{r}(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi')$$

$$\Rightarrow \vec{A}=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\varphi'=0}^{\pi}\left(\frac{\cos\varphi'\,\boxed{dl}}{R}\right)\approx\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\varphi'=0}^{\pi}\frac{1}{r}\left(1+\frac{a}{r}\sin\theta\cos\varphi'\right)\cos\varphi'\,\boxed{ad\varphi'}$$

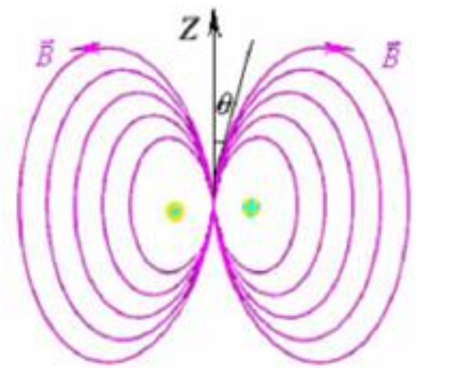
$$=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_{\varphi'=0}^{\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{r}+\frac{a}{r^2}\sin\theta\cos\varphi'^2\right)d\varphi'=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 I\,\boxed{\pi a^2}}{4\pi r^2}\sin\theta$$

$$=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\sin\theta=\quad\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 P_m}{4\pi r^2}\sin\theta=\vec{e}_\varphi\frac{\mu_0 P_m r\sin\theta}{4\pi r^3}\quad=\frac{\mu_0\vec{\mathbf{P}}_m\times\vec{\mathbf{r}}}{4\pi r^3}$$

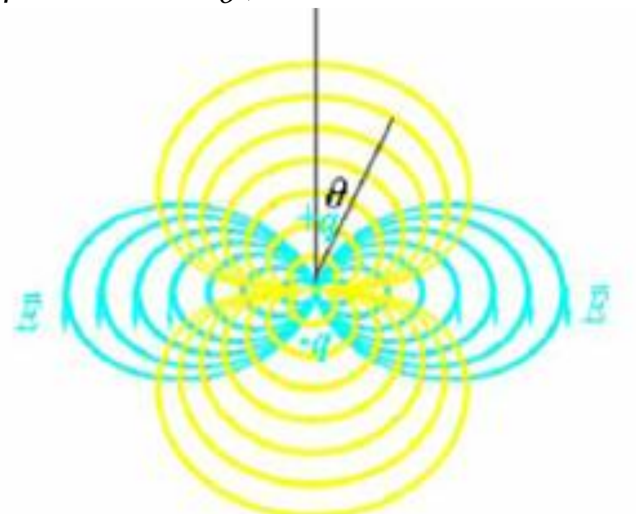
$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_r\frac{2\mu_0 IS\cos\theta}{4\pi r^3}+\vec{e}_\theta\frac{\mu_0 IS\sin\theta}{4\pi r^3}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{E}_p = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

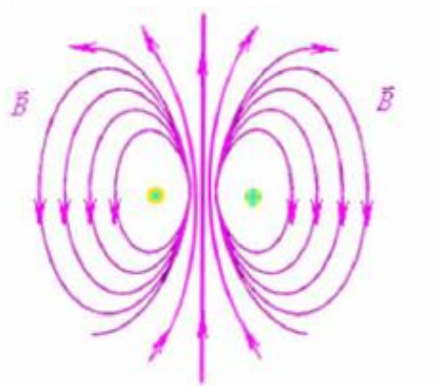


磁偶极子远场区

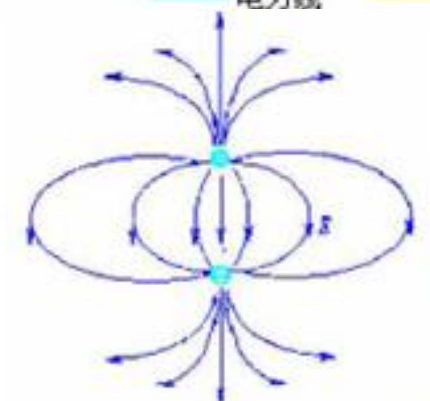


电偶极子远场区

电力线　电位线



磁偶极子近场区



电偶极子近场区

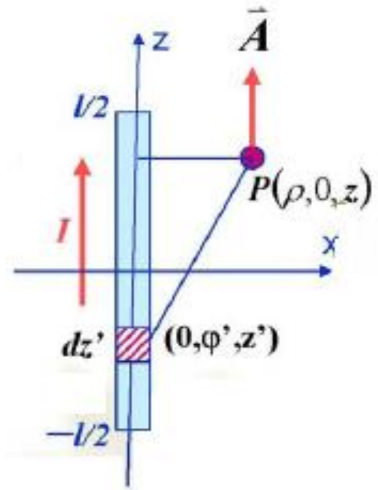
◆ 与电偶极子的比较

- 在远离偶极子处，磁偶极子和电偶极子的场分布是相同的，
- 但在偶极子附近，二者场分布不同
- 磁力线是闭合的，电力线是间断的

例4-2-2：无限长细直导线通过电流I，求导线外的$\vec{B}$

先求得$\vec{A} \to \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

先计算一根有限长的长直电流I产生的矢量磁位，
采用圆柱坐标系，以圆柱轴线为z轴，取无穷远处为参考。



$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz' \vec{e}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$\vec{A} = \int d\vec{A} = \vec{e}_z \int dA = \vec{e}_z \int_{z'=-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left\{ \frac{(l/2 - z) + \sqrt{\rho^2 + (z - l/2)^2}}{-(l/2 + z) + \sqrt{\rho^2 + (z + l/2)^2}} \right\}$$

对于无限长直导线电流， $l \to \infty$时，

$$\vec{A} \approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln\left\{ \frac{l/2 + \sqrt{\rho^2 + (l/2)^2}}{-(l/2) + \sqrt{\rho^2 + (l/2)^2}} \right\} \approx \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left\{ \frac{l}{\rho} \right\}$$

当$l \to \infty$时， $\vec{A} \approx \vec{e}_z \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left\{\dfrac{l}{\rho}\right\}$， $\vec{A} \to \infty$,

应选择有限远处$\rho = \rho_0$为参考点。

$$\vec{\boldsymbol{A}}_{\rho\rho_0} = \vec{\boldsymbol{A}}_{\rho} - \vec{\boldsymbol{A}}_{\rho_0} = (\vec{\boldsymbol{A}}_{\rho} - \vec{\boldsymbol{A}}_{\infty}) - (\vec{\boldsymbol{A}}_{\rho 0} - \vec{\boldsymbol{A}}_{\infty}) = \vec{\boldsymbol{A}}_{\rho\infty} - \vec{\boldsymbol{A}}_{\rho_0\infty}$$

$$= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{l}{\rho}\right) - \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{l}{\rho_0}\right) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

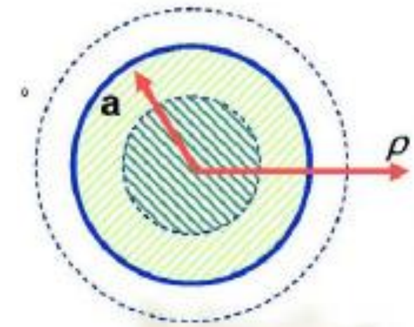
$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{e}}_{\varphi} \frac{\boldsymbol{\mu}_0 \boldsymbol{I}}{2\pi\rho}$$

参考点的选择影响矢量磁位，但不影响磁感应强度的计算。

例4-2-3：半径为a的无限长直导线（截面为圆形）通过电流I，求导体内外的$\vec{B}$。

分析：采用圆柱坐标系，以圆柱轴线为z轴。

电流均匀分布在导体截面上，呈轴对称分布，磁场仅与坐标ρ有关，且沿圆周切线方向。



利用安培环路定律积分形式

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

左边：

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_l B(\rho)\vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = \oint_l B(\rho)\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi dl = \oint_l B(\rho)\rho d\varphi = B(\rho)2\pi\rho$$

右边：

$$\mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \mu_0 I & (\rho > a) \\ \mu_0 I \dfrac{\rho^2}{a^2} & (\rho < a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = B(\rho)\vec{e}_\varphi = \begin{cases} \vec{e}_\varphi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & (\rho \ge a) \\ \vec{e}_\varphi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \dfrac{\rho}{a^2} & (\rho \le a) \end{cases}$$

例4-2-4:求解空气中,载有恒定电流密度为K_0的无限大平面所产生的磁感应强度$\vec{B}$.

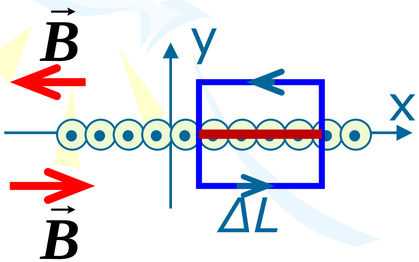
分析：设载有面电流的平面为XOZ平面，且$\vec{K}=\vec{e}_z K_0$

上半平面$\vec{B}$沿$-x$方向，下半平面沿$+x$方向，

且$\vec{B}$与x无关(只与y有关)，可用安培环路定律求解

$$\boxed{\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$$

在XOY平面内取对称于x轴的矩形回路C



$$\left.\begin{aligned}&\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=B_1\Delta L+B_2\Delta L=2B\Delta L\\&\mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}=\mu_0\int_l \vec{J}\cdot\vec{e}_N dl=\mu_0\int_l K_0\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z dl\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=\frac{\mu_0 K_0}{2}$$

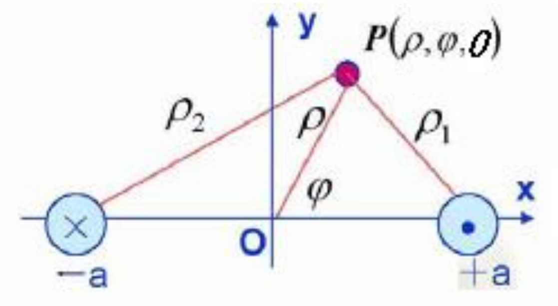
$$=\mu_0 K_0\Delta L$$

$$\Rightarrow \vec{B}=\begin{cases}-\vec{e}_x B=-\vec{e}_x\dfrac{\mu_0 K_0}{2} & (y>0)\\[2ex] \vec{e}_x B=\vec{e}_x\dfrac{\mu_0 K_0}{2} & (y<0)\end{cases}$$

例4-2-5：双导体传输线中电流大小为I,线间距离为 $2a$,求$\vec{A}$和$\vec{B}$.

分析：双导体传输线可看作是2个方向相反的无限长平行直线电流

利用单根导线 $\vec{A}=\vec{e}_z\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)$



采用圆柱坐标系

$$\therefore \vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$$

$$\vec{A}_1=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \qquad \vec{A}_2=\vec{e}_z\frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)$$

$$\therefore \vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{(\rho\sin\varphi)^2+(\rho\cos\varphi+a)^2}}{\sqrt{(\rho\sin\varphi)^2+(\rho\cos\varphi-a)^2}}\right)$$

$$=\vec{e}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{\rho^2+a^2+2\rho a\cos\varphi}{\rho^2+a^2-2\rho a\cos\varphi}\right)$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\;=\vec{e}_\rho\left(-\frac{\mu_0 I}{\pi}a\sin\varphi\frac{a^2+\rho^2}{\rho_1^2+\rho_2^2}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\mu_0 Ia(\rho^2-a^2)\cos\varphi}{\pi\rho_1^2\rho_2^2}\right)$$

求解磁场的方法：

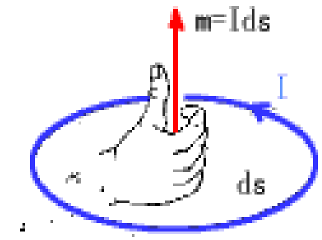
1、场源积分法（毕奥-萨伐尔定律）

2、安培环路定律

3、通过矢量磁位间接求解

4、通过矢量磁位微分方程

4.3　磁介质中的恒定磁场

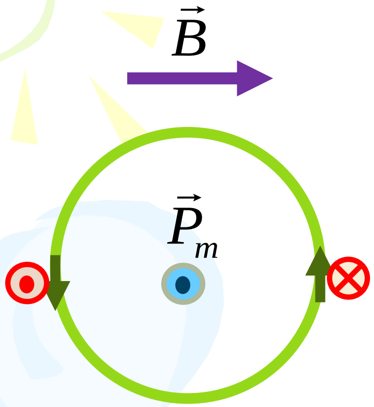


磁偶极子

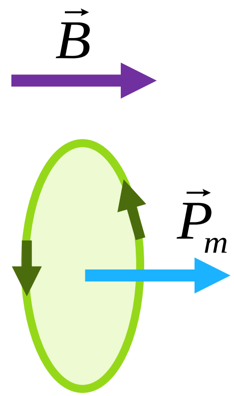
➢磁偶极子

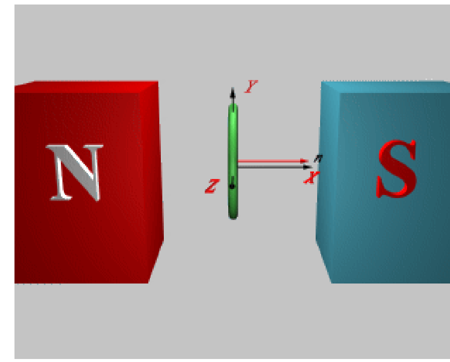
磁偶极矩　$\vec{P}_m = I d\vec{S}$ Am^2

I—分子电流，电流方向与$d\vec{S}$方向成右手螺旋关系

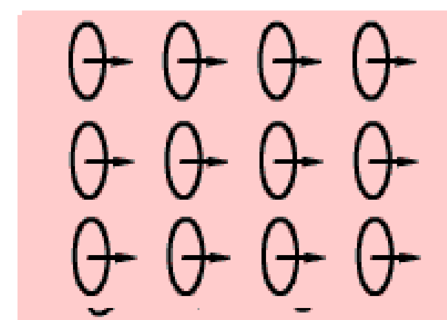


$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

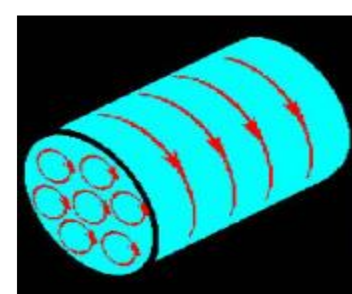




➢磁化现象： 磁介质在外磁场作用下，分子磁矩的方向趋向于外加磁场的方向，使得磁介质的总磁矩不为0，宏观上表现出磁特性从而影响原来的场分布。



➢束缚电流： 磁介质被磁化后，内部和表面可能会出现附加电流，称为磁化电流（束缚电流）。



➢磁化强度：磁介质单位体积内所有分子磁矩的矢量和。

$$\vec{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_{mi}}{\Delta V}\quad (A/m^2)$$

在磁介质中取一体积元dV'，则dV'内具有的磁偶极矩为$\vec{M}dV'$

这一磁矩在场点P产生的矢量磁位为：

$$\because\ \vec{P}_m\to\frac{\mu_0\vec{P}_m\times\vec{R}}{4\pi R^3}$$

$$d\vec{A}=\frac{\mu_0(\vec{M}dV')\times\vec{R}}{4\pi R^3}$$

$$=\frac{\mu_0\vec{M}}{4\pi}\times\frac{\vec{R}}{R^3}dV'=\frac{\mu_0\vec{M}}{4\pi}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

整个磁介质中所有磁矩在场点P产生的矢量磁位为：

$$\vec{A}=\int_V d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\vec{M}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)dV'$$

$$\nabla'\times(u\vec{A})=u\nabla'\times\vec{A}-\vec{A}\times\nabla'u$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\times\left(\frac{\vec{M}}{R}\right)dV'$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\times\left(\frac{\vec{M}}{R}\right)dV'$$

利用恒等式 $\int_{V'}\nabla\times\vec{A}dV'=-\oint_{S}\vec{A}\times d\vec{S}$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{M}}{R}\times d\vec{S}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boxed{\nabla'\times\vec{M}}}{R}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boxed{\vec{M}\times\vec{e}_n}}{R}dS'$$

体电流：$\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV'+C$

面电流：$\vec{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'}\frac{\vec{J}}{R}dS'+C$

与真空中矢量位计算公式比较：

介质磁化后产生的场相当于束缚面电流和束缚体电流在真空中所产生的磁场。

➢磁化强度与束缚电流的关系

$$\begin{cases}\text{介质内部束缚体电流密度：}\vec{J}'_v=\nabla'\times\vec{M}\\ \text{介质表面束缚面电流密度：}\vec{J}'_S=\vec{M}\times\vec{e}_n\end{cases}$$

束缚电荷、极化强度关系比较：

$$\begin{cases}\rho'_v=\nabla'\cdot\vec{P}\\ \rho'_s=\vec{P}\cdot\vec{e}_n\end{cases}$$

- 磁介质中的场等效为原来无介质时外加场以及束缚电流在真空中产生场的叠加。

- 磁介质中的磁场的基本方程 $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$ $\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$ $\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$

磁介质中总的磁场等效为传导电流和束缚体电流共同在真空中产生。

$$\because \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}_v) = \mu_0(\vec{J} + \nabla \times \vec{M})$$

$$\therefore \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \nabla \times \vec{M}) = \nabla \times \left(\boxed{\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \right)$$

引入辅助量 $\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$

引入$\vec{H}$，则不需要考虑束缚电流，只与自由电流I有关，求解较方便。

$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$

磁介质中总的磁场等效为传导电流和束缚体电流共同在真空中产生。

$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$

磁介质中总的恒定磁场也应具有磁通连续性，为无源场。

$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$

$$\because \vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$= \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

$$= \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

实验证明，除铁磁材料，

$\vec{M}$与$\vec{H}$成线性关系，

$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ 线性、各向同性的磁介质

➢束缚（磁化）电流与自由电流的关系

在线性、各向同性、均匀的媒质中，

前提：恒定电流产生的恒定磁场

已知$\vec{H}$或$\vec{B}$的分布，则

自由电流体密度矢量：$\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$

束缚电流体密度矢量：$\vec{J}_v = \nabla \times \vec{M}$

$$\boxed{\vec{J}_v = (\mu_r - 1)\vec{J}}$$

$$\vec{J}_v = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \nabla \times ((\mu_r - 1)\vec{H}) = (\mu_r - 1)\nabla \times \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{J}$$

结论：

1、磁化电流仍然遵循电流守恒关系：$\nabla \cdot \vec{J}_v = 0$

2、若磁介质中无自由电流，则无体磁化电流。

3、若在磁介质内部存在自由电流，则在自由电流处存在束缚电流，顺磁质（$\mu_r > 1$）中同向，抗磁质（$\mu_r < 1$）反向。

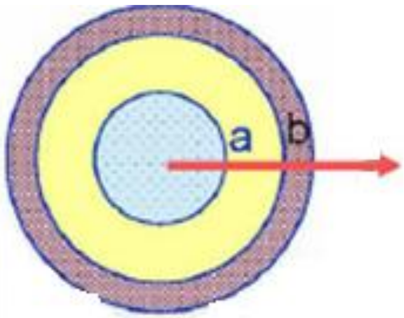
4、磁介质表面一般存在磁化电流：$\vec{J}_s = (\vec{M}_1 - \vec{M}_2) \times \vec{e}_n$

例4-3-1 设无限长同轴线的内导体半径为a，外导体的内半径为b，外导体厚度不计，并设导体的磁导率为μ_0，内外导体间充满磁导率为μ的磁介质，内外导体分别由大小为I方向相反的轴向电流，求：1）各处的$\vec{B}$和$\vec{H}$，2）磁介质中的体束缚电流密度；3）磁介质内外表面上的面束缚电流密度.

若无特殊说明，不考虑磁介质的导电性和导体的磁化效应。

分析：电流是轴对称分布，且同轴线无限长，故磁场也是轴对称分布，沿圆周方向，且与坐标z和φ无关，可利用安培环路定理求磁场。

$$\vec{H} \to \vec{B} \to \vec{M} \to \vec{J}_m$$



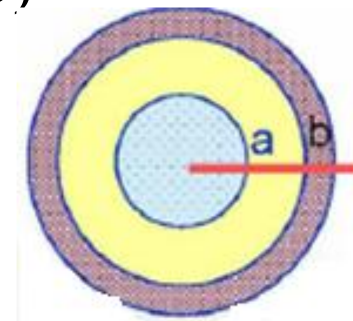
1) $$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum I$$

采用圆柱坐标系，取半径为ρ的圆为积分路径

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H(\rho)\vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} = \oint_C H(\rho)\rho d\varphi = H(\rho) \cdot \rho 2\pi$$

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} I\dfrac{\rho^2}{a^2} & (0<\rho<a) \\ I & (a<\rho<b) \\ 0 & (\rho>b) \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{H} = \begin{cases} \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi & (0<\rho<a) \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi & (a<\rho<b) \\ 0 & (\rho>b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \begin{cases} \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi & (0<\rho<a) \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi & (a<\rho<b) \\ 0 & (\rho>b) \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = \mu\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\varphi & (0<\rho<a) \\ \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi & (a<\rho<b) \\ 0 & (\rho>b) \end{cases}$$



2)磁介质中的束缚电流密度

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{J}'_v &= \nabla' \times \vec{M} \\ \vec{J}'_S &= \vec{M} \times \vec{e}_n \end{aligned}}$$

在$a<\rho<b$磁介质中， $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \left(\dfrac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\left(\dfrac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi\right)$

在 $\rho = a$ 的磁介质表面上：

$$\vec{J}_{s1} = \vec{M} \times \vec{e}_n\Big|_{\rho=a} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\left(\frac{I}{2\pi a}\vec{e}_\varphi\right) \times (-\vec{e}_\rho) = \vec{e}_z\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{I}{2\pi a}$$

在 $\rho = b$ 的磁介质表面上：

$$\vec{J}_{s2} = \vec{M} \times \vec{e}_n\Big|_{\rho=b} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\left(\frac{I}{2\pi b}\vec{e}_\varphi\right) \times (\vec{e}_\rho) = -\vec{e}_z\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\frac{I}{2\pi b}$$

磁介质内外表面的磁化电流强度大小相等方向相反。

在 $a<\rho<b$ 的磁介质中： $\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0$