第五章　时变电磁场

➢ **静态场：**

•场不随时间发生变化（静电场、恒定电场、恒定磁场）。
•特性：电场和磁场各自独立存在，互不影响，可以分开讨论。

➢**时变电磁场：**

•场是时间和空间位置的函数。
•特性：
1）电场与磁场相互依存，不可分割；
2）电场和磁场互为对方的漩涡源。在空间可形成脱离源的电磁波的传播；
3）电力线和磁力线相互环绕。

➢英国科学家麦克斯韦提出位移电流和感应电场的假说，将静态场、恒定电场、时变场的电磁基本特性用统一的电磁场基本方程组概括。

➢电磁场基本方程组是研究宏观电磁现象的理论基础。

设场量的一阶导数连续，

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \vec{J}_{外} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \end{cases}$$

➢本章的知识结构图：

Maxwell方程组

时谐场

复数形式的场量、Maxwell方程及边界条件

亥姆霍兹方程

复坡印廷定理与复坡印廷矢量

波动方程

坡印廷定理与坡印廷矢量

动态位$\vec{A}$和φ

5.1 波动方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \vec{J}_{外} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \end{cases}$$

假定线性、各向同性、均匀的**无源**媒质中，

$(\vec{J}_{外}=0,\rho=0)$

$\Longrightarrow$

代入媒质的本构关系

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{H} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\bullet\vec{H} = 0 \\ \nabla\bullet\vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla\times\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu\frac{\partial(\nabla\times\vec{H})}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$= -\mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\because \nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}\text{且}\nabla\cdot\vec{E} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\vec{E} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2\vec{H} - \mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}}$$

类似可得：

线性、各向同性、均匀的无源媒质中，矢量$\vec{E}$或$\vec{H}$所满足的方程，即波动方程。

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\gamma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

若是不导电媒质

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0$$

无源区域中，场矢量的波动方程为齐次波动方程

有源区域中，场矢量的波动方程为非齐次波动方程

如不导电的线性、均匀、各向同性的有源媒质中，

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}+\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

时变电磁场是随时间变化且在空间中传播的电磁波；

而变化的电荷和电流是产生电磁波的初始源；一旦产生了电磁波，它就可以脱离源继续向前传播。

场矢量和源量之间关系很复杂，直接求解比较困难，可引入辅助位函数间接求解。

5.2 时变电磁场的位函数

一、（动态）矢量位和（动态）标量位

$$\because \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

引入矢量磁位函数$\vec{A}$　　$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$

$$\therefore \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

引入标量电位函数ϕ　　$\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi}$

对应的位函数不唯一，例如：　$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \varphi,$　φ为任一标量函数

$$\because \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi' \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

引入洛仑兹规范　　$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}}$

注意：满足洛仑兹规范的$\vec{A}$和ϕ总是存在的，且不唯一。

二、位函数的波动方程

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

在线性各向同性均匀的不导电的有源媒质中

$$\because \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} left: \frac{1}{\mu}\left(\nabla \times \vec{B}\right) = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \nabla \times \vec{A}) = \frac{1}{\mu}[\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}] \\ right: \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

$$and \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \nabla \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

引入洛仑兹规范

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}}$$

简化为达朗贝尔方程

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}}$$

讨论：

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}+\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}\\ \nabla^2\phi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

- 引入洛仑兹条件，简化了位函数与场源的关系。此时，矢量磁位$\vec{A}$仅由电流分布$\vec{J}$决定，φ仅由电荷分布ρ决定。

- 若场量不随时间变化，波动方程蜕变为泊松方程

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}\\ \nabla^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$$

相应洛仑兹规范退化为库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$

- 洛仑兹条件是电流连续性原理的体现

对于时变场，电流分布和电荷分布不是彼此无关的，若满足洛仑兹条件，则$\vec{J}$和ρ自动满足电流连续性方程。

- 引入位函数，可使问题求解更容易。

波动方程通过引入位函数，变成4个未知标量函数的方程组.

可仅由电流分布$\vec{J}$决定$\vec{A}$ (变成求解3个未知标量函数的方程)，并由洛仑兹规范确定φ，进而确定场矢量$\vec{E}$和$\vec{H}$。

5.3　坡印廷定理和坡印廷矢量

一、坡印廷定理

➢时变场中电场和磁场是随时间、空间变化的，而磁场和电场均存贮着能量，因此能量的流动是时变场中的一个重要现象。

➢流动的能量同空间媒质所消耗的能量以及电磁储能之间应满足能量守恒定律，即Poynting定理，也称能流定理。

在线性、各向同性的**无源**媒质中：

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$=-\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\sigma\vec{E}-\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu H^2\right)-\sigma E^2-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(w_m+w_e)-\sigma E^2=-\frac{\partial}{\partial t}(w_m+w_e)-p$$

$$\because\ \frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{H})=2\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2,\quad w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2,$$

$$p=\vec{E}\cdot\vec{J}=\sigma E^2$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(w_m + w_e\right) - \sigma E^2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(w_m + w_e\right) - p$$

令$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

得坡印廷定理的微分形式

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla\cdot\vec{S}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(w_m + w_e\right)} + \boxed{p}$$

单位时间单位体积
内焦耳热损耗

单位时间内
流入单位体
积中的能量

单位体积内电场能量和磁场能量的增加率

物理意义：

外界向电磁场某点提供的电磁功率密度，等于该点电磁场能量密度的时间增加率，与对这点自由电荷提供的功率密度之和。

$$-\nabla\cdot\vec{S}=\frac{\partial}{\partial t}\left(w_m+w_e\right)+p$$

取体积分，由高斯散度定理得坡印廷定理的积分形式：

$$\boxed{-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S}}=\boxed{\frac{d}{dt}\int_V (w_m+w_m)dv}+\boxed{\int_V p dv}$$

单位时间体积V内焦耳热损耗

单位时间穿过闭合面S进入体积V的能量（假设体积V内无外加源）

体积V内电场能量和磁场能量的增加率

物理意义：

某时刻外界通过闭合面进入其所包围体积V中的电磁功率，等于V中电磁场能量的时间增加率，与V中焦耳热损耗的瞬时功率之和。

坡印廷定理是电磁场中的能量守恒和转换定律。

表明电磁场是能量的携带者和传播者。

二、坡印廷矢量

由坡印廷定理可知，$\oint_s \vec{S}\cdot d\vec{s} = \oint_s (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{s}$ 表示通过闭合面S的总瞬时功率。

定义: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ 为坡印廷矢量，也称为**能流密度矢量**

大小：表示通过单位面积的瞬时功率，即瞬时功率流密度

方向：该点瞬时功率流动的方向，与$\vec{E}$和$\vec{H}$成右手螺旋关系。

单位：单位面积上流过的功率，瓦/米^2（W/m^2）

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t)\times\vec{H}(t)$$

瞬时值坡印廷矢量

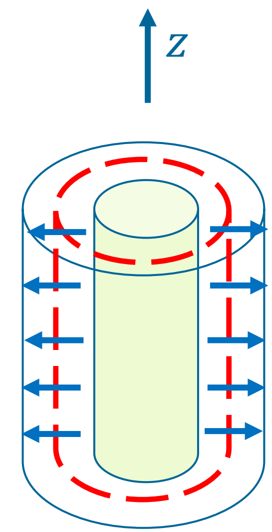
$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)\right]dt$$

平均坡印廷矢量

例6-1-1　设同轴线内导体半径为a，外导体内半径为b，内外导体间为空气。若内外导体间加恒定电压U，内外导体上有大小相等，方向相反的恒定电流I。

（1）忽略导体的电阻，计算内外导体间的坡印亭矢量和同轴线的传输功率；

（2）考虑导体的有限电导率，计算通过内导体表面进入内导体的功率，并证明它等于内导体的损耗。



解：采用圆柱坐标系，以同轴线的轴为z轴，内导体中电流为z方向。

（1）理想导体内$\vec{E}$为0，由$E_{1t}=E_{2t}$，内导体表面空气侧$\vec{E}$只有$\vec{e}_\rho$分量

由高斯定理

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = q$$

内导体表面：　$D_{2n}-D_{1n}=\rho_s$　　$\because D_{1n}=0, D_{2n}\neq 0, \therefore \rho_s \neq 0$

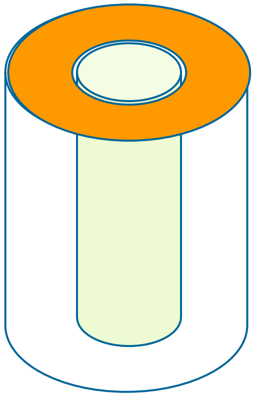
上表面：　$\vec{D}=D\vec{e}_\rho, d\vec{s}=ds\cdot\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{E}=\vec{e}_\rho\frac{q}{2\varepsilon_0\pi\rho}$$

又$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_a^b E d\rho \Rightarrow q=2\varepsilon_0\pi U/\ln\frac{b}{a}$

$$\vec{E}=\vec{e}_\rho\frac{U}{\rho\ln(b/a)}$$

$$\vec{E} = \vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)}$$



由安培环路定理

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho}$$

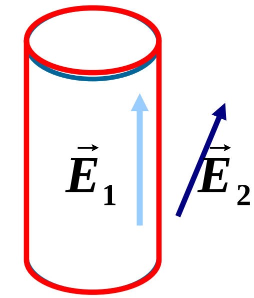
内外导体间的坡印亭矢量为

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \times \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi\rho} = \vec{e}_z \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)}$$

同轴线传输功率为

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\vec{e}_z \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} \right) \cdot \vec{e}_z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \quad = UI$$

（2）考虑导体的有限电导率，计算通过内导体表面进入内导体的功率，并证明它等于内导体的损耗。



设导体的有限电导率为γ，

设内导体分界面空气一侧电场强度为$\vec{E}_2$，导体一侧为$\vec{E}_1$，

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\gamma}=\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\gamma}\quad \because E_{2t}=E_{1t}\quad\Rightarrow \vec{E}_{2t}=\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\gamma}$$

用高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s}=q$

上下表面通量和为0 $\therefore \vec{E}_{2n}=\vec{e}_\rho\left.\frac{U}{\rho\ln(b/a)}\right|_{\rho=a}$

$$\vec{E}_2=\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\gamma}+\vec{e}_\rho\frac{U}{a\ln(b/a)}$$

内导体表面的坡印亭矢量为：

$$\vec{S}=\vec{E}_2\times\vec{H}=\left(\vec{e}_\rho\frac{U}{a\ln(b/a)}+\vec{e}_z\frac{I}{\pi a^2\gamma}\right)\times\vec{e}_\varphi\frac{I}{2\pi a}=\vec{e}_z\frac{UI}{2\pi a^2\ln(b/a)}+\vec{e}_\rho\left(-\frac{I^2}{2\pi^2a^3\gamma}\right)$$

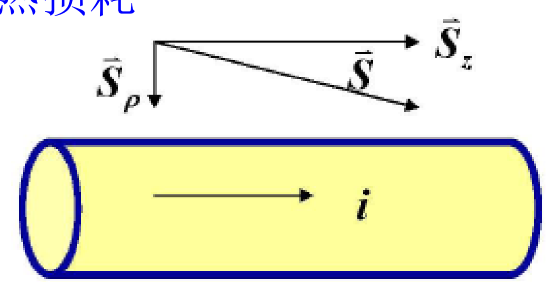
一部分能量继续向前传播，一部分进入导体内部

进入长度为l的内导体内部的功率为：

由于是静态场，电磁场的能量变化率为0，全部变为焦耳热损耗

$$P=S_\rho\cdot 2\pi a l=\frac{I^2}{2\pi^2a^3\gamma}\cdot 2\pi a l=I^2\boxed{\frac{l}{\pi a^2\gamma}}=I^2R$$

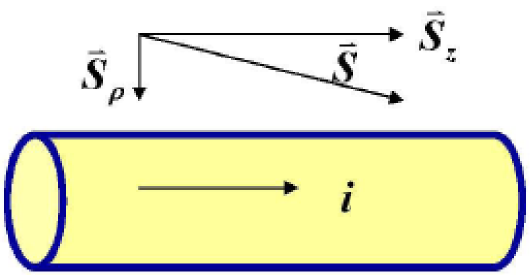
长度为l的导线的直流电阻



• 导线只起着引导能量的作用

导线中并不传输能量,若导线不是理想导体，则导线将消耗一部分功率,导线中的坡印廷矢量无轴向分量；

传输给负载以及导线上损耗的功率都是在导线外的电磁场中传输的。由安培环路定理知电场和磁场被约束在导线周围，使电磁能量在导线附近的空间中沿一定方向传输。



• 当频率较低时，如上所示，均可按准静态场处理。当频率提高，变化的电场将产生变化的磁场，变化的磁场又产生变化大的电场，这是导线附近的电磁场形成电磁波向四周传播，能量损耗掉了。

• 这时利用静电屏蔽原理，可在导线外加金属管套，即同轴线结构，使能量在同轴线中的介质中传输。