7.7 均匀平面电磁波的垂直入射

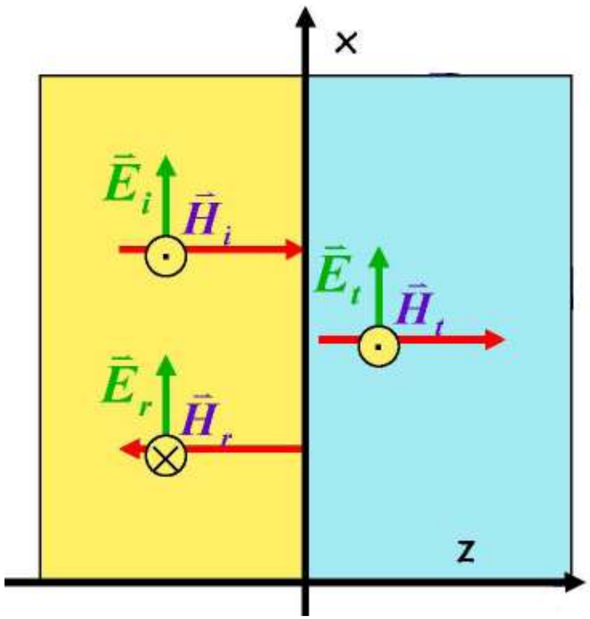
- 讨论均匀平面波垂直入射到两种不同媒质分界平面上的情况
- 假定不同媒质的分界面是无限大的平面，界面两侧媒质都是均匀的、线性的、各向同性的。

传输方向：

由Snell定律 $\Rightarrow \theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$

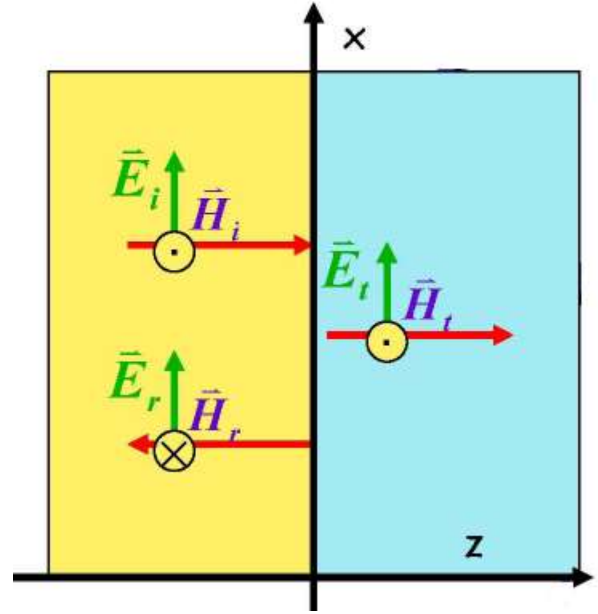
振幅大小：

入射面不确定，无垂直极化和平行极化之分



对于任意极化的入射波，可分解成两个互相垂直的线极化波的叠加，因此这里只研究线极化波入射的情况。

一、对理想介质分界面的垂直入射



入射波：设沿+z传播，分界面为$z=0$的平面

将$\vec{E}_i$的方向设为$\vec{e}_x$

$$\vec{E}_i(z)=\vec{e}_x E_{i0}e^{-j\beta_1 z},\vec{H}_i(z)=\vec{e}_y\frac{E_{i0}}{\eta}e^{-j\beta_1 z}$$

反射波：设沿$-z$传播

$$\vec{E}_r(z)=\vec{e}_x E_{r0}e^{j\beta_1 z},\vec{H}_r(z)=-\vec{e}_y\frac{E_{r0}}{\eta}e^{j\beta_1 z}$$

透射波：设沿+z传播

$$\vec{E}_t(z)=\vec{e}_x E_{t0}e^{-j\beta_2 z},\vec{H}_t(z)=\vec{e}_y\frac{E_{t0}}{\eta_2}e^{-j\beta_2 z}$$

推出媒质1中：

$$\vec{E}_1=\vec{E}_i+\vec{E}_r=\vec{e}_x E_{i0}\left(e^{-j\beta_1 z}+R\,e^{+j\beta_1 z}\right)$$

$$=\vec{e}_x E_{i0}\left[\left(1+R\right)e^{-j\beta_1 z}+R\left(e^{j\beta_1 z}-e^{-j\beta_1 z}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\vec{E}_1=\vec{e}_x E_{i0}\left[(1+R)e^{-j\beta_1 z}+j2R\sin(\beta_1 z)\right]$$

$$\Rightarrow\vec{H}_1=\vec{e}_y\frac{E_{i0}}{\eta}\left[(1+R)e^{-j\beta_1 z}-2R\cos(\beta_1 z)\right]$$

推出媒质2中：

$$\begin{cases}\vec{E}_2=\vec{E}_t=\vec{e}_x TE_{i0}e^{-j\beta_1 z}\\ \vec{H}_2=\vec{H}_t=\vec{e}_y\dfrac{T}{\eta_2}E_{i0}e^{-j\beta_1 z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\quad T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$$

且$R+1=T$

特点：

（1）媒质2中透射波仍为单向传播的行波

（2）媒质1中合成波为行驻波（或称混和波），即有固定的波节点和波腹点，但波节点处振幅不为0。

$$\because \vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{e}_x E_{i0}\left(e^{-j\beta_1 z} + R\, e^{+j\beta_1 z}\right) = \vec{e}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}\left(1 + R\, e^{+j2\beta_1 z}\right), \text{且} R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$|\vec{E}_1| = |E_{i0}|\,|1 + R\, e^{j2\beta_1 z}| = |E_{i0}|\,(1 + R^2 + 2R\cos 2\beta_1 z)^{1/2}$$

$(a)\quad \eta_2 > \eta_1$时，$R > 0$

$$\Rightarrow |\vec{E}_1|_{\max} = |E_{i0}|(1 + R)$$

此时$2\beta_1 z = -2n\pi$

$$z_{\max} = -\frac{n\pi}{\beta_1} = -n\frac{\lambda_1}{2}\ (n = 0, 1, 2\cdots)$$

波腹点

$$\Rightarrow |\vec{E}_1|_{\min} = |E_{i0}|(1 - R)$$

此时$2\beta_1 z = -(2n+1)\pi$

$$z_{\min} = -\frac{(2n+1)\pi}{2\beta_1} = -(2n+1)\frac{\lambda_1}{4}\ (n = 0, 1, 2\cdots)$$

波节点

$(b)\quad \eta_2 < \eta_1$时，$R < 0$, 反之

同理可求得$\vec{H}_1$的波腹点和波节点与$\vec{E}$的波腹点和波节点位置刚好相反.

驻波比：定义为驻波电场强度振幅最大值和最小值的比值

$$\rho = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{1+|R|}{1-|R|} \Rightarrow |R| = \frac{\rho-1}{\rho+1}$$

反映了行驻波状态的驻波成分大小

$|\boldsymbol{R}| = 0, \rho = 1$，行波状态，无反射

$|\boldsymbol{R}| = 1, \rho = \infty$，纯驻波状态，全反射

$0 < |\boldsymbol{R}| < 1, \quad 1 < \rho < \infty$，行驻波状态，部分反射

电磁功率关系

$$\because \vec{S}_{iav} = \vec{e}_z \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} \quad \therefore \vec{S}_{rav} = -\vec{e}_z \frac{|E_{r0}|^2}{2\eta_1} = -\vec{e}_z \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} |R|^2$$

$$\therefore \vec{S}_{tav} = \vec{e}_z \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} = \vec{e}_z \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_2} |T|^2$$

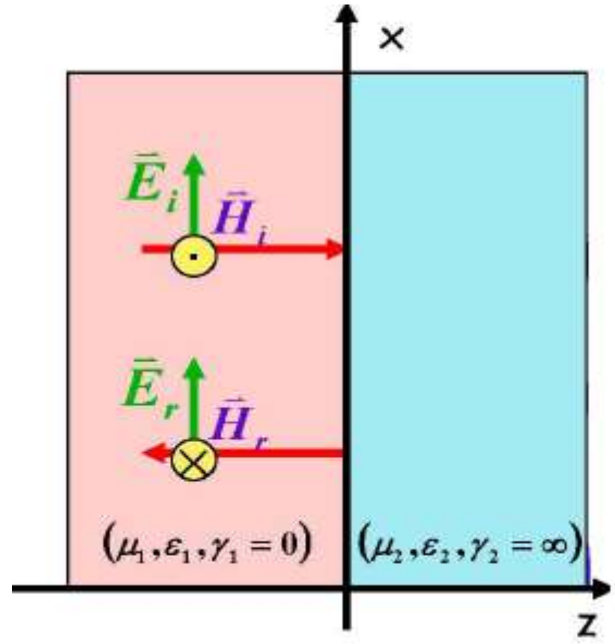
$$\Rightarrow S_{rav} + S_{tav} = S_{iav}$$

说明反射功率与透射功率之和等于入射波的功率，符合能量守恒。

二、对理想导体表面的垂直入射

假设媒质1为理想介质，媒质2为理想导体

$\gamma_1 = 0, \eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$为实数，$\gamma_2 = \infty$，$\eta_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1 - j\gamma / w}} = 0$



无透射波，即全反射，

由电场边界条件得$E_{rm} = -E_{im}$

(规定正方向下，反射波和入射波的复振幅)

$$\Rightarrow \begin{cases} R = -1 \\ T = 0 \end{cases}$$

合成波的电磁场为：

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{i0}\left((1+R)e^{-j\beta_1 z} + j2R\sin(\beta_1 z)\right) = \vec{e}_x E_{i0}\left(-j2\sin(\beta_1 z)\right)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_y \frac{E_{i0}}{\eta}\left((1+R)e^{-j\beta_1 z} - 2R\cos(\beta_1 z)\right) = \vec{e}_y \frac{2E_{i0}}{\eta}\cos(\beta_1 z)$$

瞬时形式为：

$$\vec{E}_1(z,t) = \mathrm{Re}[\dot{\vec{E}}_1 e^{j\omega t}] = \vec{e}_x 2|E_{i0}|\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t + \varphi_i)$$

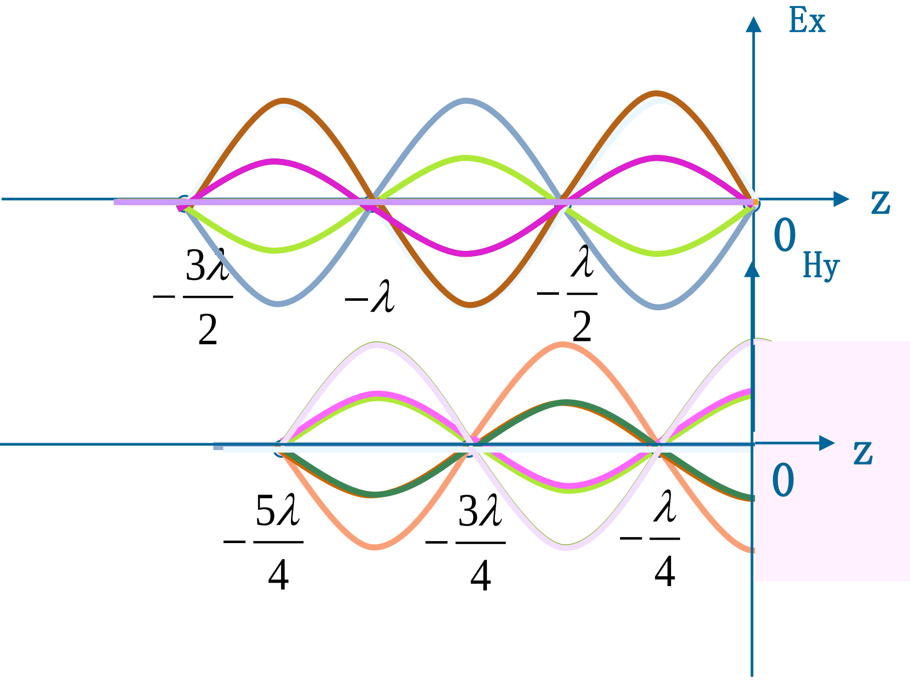
$$\vec{H}_1 = \mathrm{Re}[\dot{\vec{H}}_1 e^{j\omega t}] = \vec{e}_y \frac{2|E_{i0}|}{\eta}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\text{令}\varphi_i=0 \Rightarrow \quad \vec{E}_1(z,t)=\vec{e}_x 2|E_{i0}|\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t)$$

$$\vec{H}_1=\vec{e}_y \frac{2|E_{i0}|}{\eta}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t)$$

- 对任意时刻t在 $\beta z=-n\pi \quad or \quad z=-n\frac{\lambda}{2}(n=o,1,2,.....)$ 电场皆为零。
- 对任意时刻t在$\beta z=-(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad or \quad z=-(2n+1)\frac{\lambda}{4}(n=o,1,2,.....)$ 磁场皆为零。

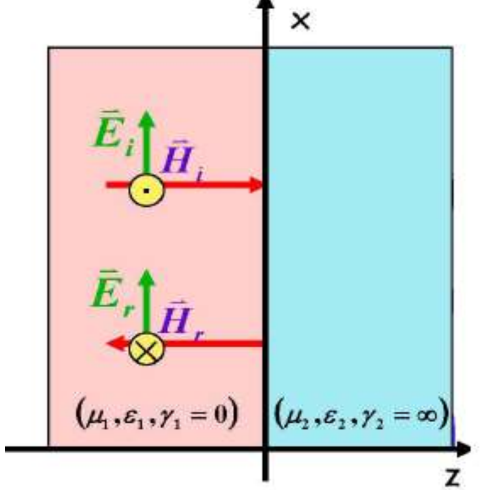
$\omega t=0$ $\omega t=\frac{\pi}{4}$ $\omega t=\frac{\pi}{2}$ $\omega t=\frac{3\pi}{4}$ $\omega t=\pi$ $\omega t=\frac{5\pi}{4}$ $\omega t=\frac{3\pi}{2}$ $\omega t=\frac{7\pi}{4}$ $\omega t=2\pi$



- 两个振幅相等、传播方向相反的行波合成的结果形成驻波。
- 在给定时刻t电场和磁场随距离作正弦变化。

$$\vec{E}_1(z,t)=\vec{e}_x 2|E_{i0}|\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t)$$

$$\vec{H}_1=\vec{e}_y\frac{2|E_{i0}|}{\eta}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t)$$



边界上$E=0$和$H=H_{max}$

为满足边界条件，理想导体表面上会有x方向的感应电流

$$\vec{J}_s=\vec{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)|_{z=0}=(\vec{e}_z)\times\left(0-\vec{e}_y\frac{2E_{i0}}{\eta}\cos(wt)\right)=\vec{e}_x\frac{2E_{i0}}{\eta}\cos(wt)$$

$$\dot{\vec{J}}_s=\vec{e}_x\frac{2\dot{E}_{i0}}{\eta}$$

$$\vec{E}_1=\vec{e}_x E_{i0}\left(-j2\sin(\beta_1 z)\right)$$

$$\vec{H}_1=\vec{e}_y\frac{2E_{i0}}{\eta}\cos(\beta_1 z)$$

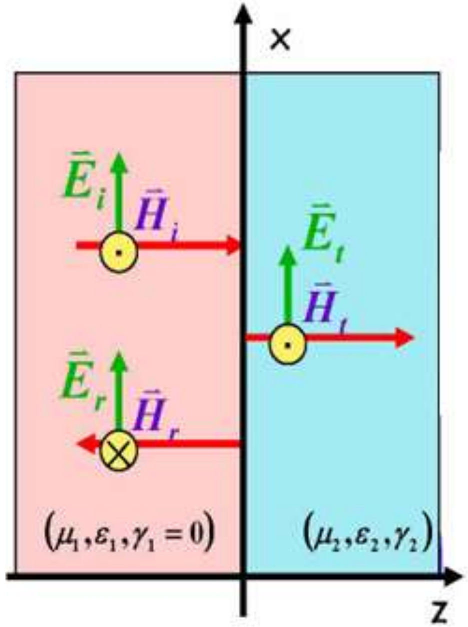
驻波不传输电磁能量，只存在能量转换

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_x\left(-j2E_{io}\sin\beta z\right)\times\vec{e}_y\frac{2E_{io}^*}{\eta}\cos\beta z\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_z\left(-j\frac{2|E_{io}|}{\eta}\sin 2\beta z\right)\right]=0$$

三、对良导体表面的垂直入射

假设媒质1为理想介质，媒质2为良导体



$$\gamma_1=0,\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\text{为实数，}\gamma_2\neq\infty\text{，}\quad\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2-j\gamma_2/w}}=\eta_c\text{为复数}$$

$$R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1},T=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\text{均为复数}$$

分界面上的反射和透射将引入一个附加的相移

$$\gamma_2\uparrow,\frac{\gamma_2}{w\varepsilon}\uparrow,\Rightarrow|\eta_2|\downarrow\Rightarrow|R|\uparrow\text{ 且 }|T|\downarrow$$

$$\vec{E}_t=\vec{e}_xE_{t0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H}_t=\vec{e}_yH_{t0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

对于良导体，透射波磁场的复振幅近似等于入射波磁场复振幅的2倍 $H_{t0}\approx 2H_{i0}$

良导体中：$\alpha\approx\sqrt{\frac{w\mu\gamma}{2}}=\sqrt{\pi f\mu\gamma}$

特点： 媒质1中为行驻波，媒质2中为衰减的行波，$\gamma_2\uparrow$，$\alpha\uparrow$,衰减越快

趋肤效应：　良导体中电磁波及其产生的电流只存在于其表面的现象

趋肤深度δ：电磁波场强的振幅衰减到表面值的1/e所经过的距离

$$e^{-\alpha\delta}=\frac{1}{e}\Rightarrow\delta=\frac{1}{\alpha}$$

良导体中：$\delta=\frac{1}{\alpha}\approx\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}=\sqrt{\frac{2}{w\mu\gamma}}$

良导体中：$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}} = \sqrt{\frac{2}{w \mu \gamma}}$

$f \uparrow \delta \downarrow$，趋肤效应越显著

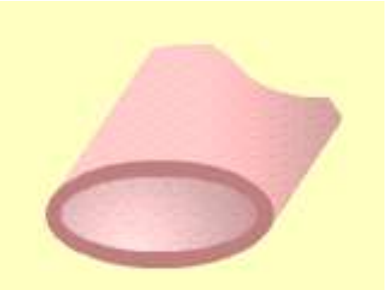
例如：　银的电导率$\gamma = 6.15 \times 10^7 s/m$，铜的电导率$\gamma = 1.59 \times 10^7 s/m$

$f = 3GHz$，　银$\delta = 1.17 \mu m$，　黄铜$\delta = 2.30 \mu m$

$f = 1MHz$，　银$\delta = 0.064mm$，　黄铜$\delta = 0.126mm$

$f = 1kHz$，　银$\delta = 2.03mm$，　黄铜$\delta = 3.98mm$

$f = 60Hz$，　银$\delta = 8.3mm$，　黄铜$\delta = 16.3mm$



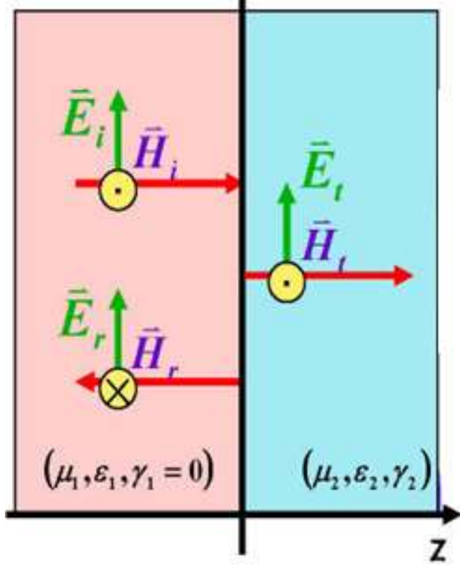
应用：

1、可屏蔽电磁波

2、微波元器件常用黄铜制成，但在内表面上镀几个微米厚的银层，可减小损耗，增加元器件内壁上的导电性能。

注意：直流没有趋肤效应

表面阻抗：定义为导体表面上单位长度的电压复振幅U与单位宽度上的电流复振幅I之比。



良导体中的透射波：

$$\vec{E}_t=\vec{e}_x E_{t0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

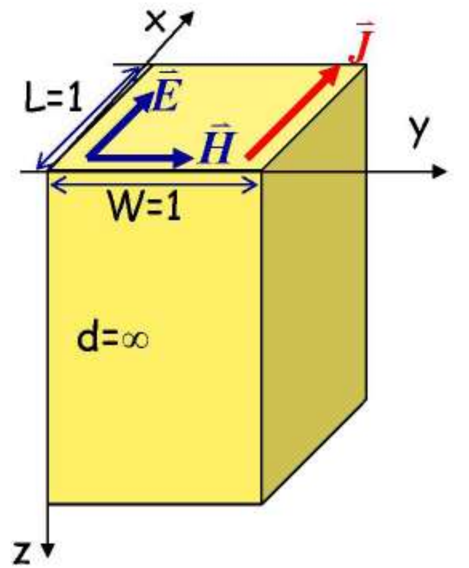
$$\vec{H}_t=\vec{e}_y H_{t0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$$

对于长为1，宽为1，厚度为∞的一块导体

$$Z_s=\frac{U}{I}=\frac{\int\vec{E}_t\cdot d\vec{l}}{\int\vec{J}\cdot d\vec{S}}\qquad \int\vec{E}_t\cdot d\vec{l}=E_{t0}$$

$$\because \vec{J}=\gamma\vec{E}_t=\vec{e}_x\gamma\eta_c H_{t0}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}=\vec{e}_x\gamma\eta_c H_{t0}e^{-\Gamma z}$$

$$\int\vec{J}\cdot d\vec{S}=\gamma\eta_c H_{t0}\int_0^\infty e^{-\Gamma z}\,dz=\frac{\gamma\eta_c H_{t0}}{\Gamma}=\frac{\gamma(1+j)\sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}}}{(1+j)\sqrt{\frac{w\mu\gamma}{2}}}H_{t0}=H_{t0}$$



$$\therefore Z_s=\frac{E_{t0}}{H_{t0}}=\eta_c=(1+j)\sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}}=R_s+jX_s$$

R_s为表面电阻，X_s为表面电抗，

$$R_s=X_s=\sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}}=\frac{1}{\gamma\delta}$$

R_s随频率增加而增加

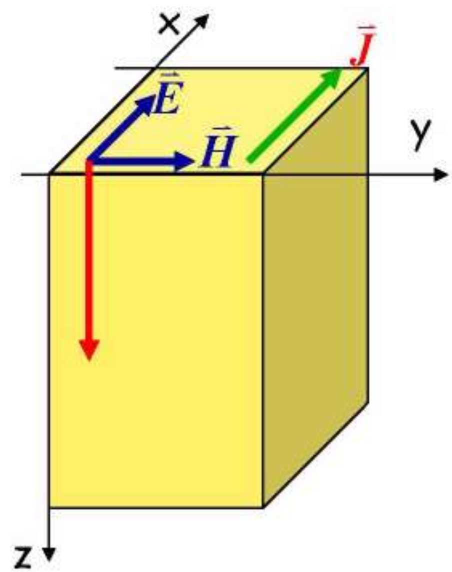
损耗功率的计算

若$d >> \delta$，则进入导体内的透射波所携带的能量，在传输过程中将全部被导体所吸收，

因此，导体**表面单位面积**所吸收的平均功率 = 表面处的透射波的平均功率流密度

$$\boxed{P_L = S_{av}|_{z=0}}$$

设$\eta_c = |\eta_c| e^{j\theta}$ 对于良导体，$\eta_c = (1+j)\sqrt{\dfrac{w\mu}{2\gamma}}, |\eta_c| = \sqrt{\dfrac{w\mu}{\gamma}}$



$$\vec{S}_{av} = \vec{e}_z \frac{|E_{t0}|^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos\theta = \vec{e}_z \frac{|\eta_c| |H_{t0}|^2}{2} e^{-2\alpha z} \cos\theta$$

$$\approx \vec{e}_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w\mu}{\gamma}} H_{t0}^2 e^{-2\alpha z} \cos\frac{\pi}{4} = \vec{e}_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}} H_{t0}^2 e^{-2\alpha z}$$

$$S_{av}|_{z=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}} H_{t0}^2 = \vec{e}_z \frac{1}{2} R_s H_{t0}^2$$

$$\because R_s = \frac{1}{\gamma\delta} = \sqrt{\frac{w\mu}{2\gamma}}, \qquad 且 I = H_{t0}$$

$$\Rightarrow P_l = S_{av}|_{z=0} = \frac{1}{2}|I|^2 R_s$$

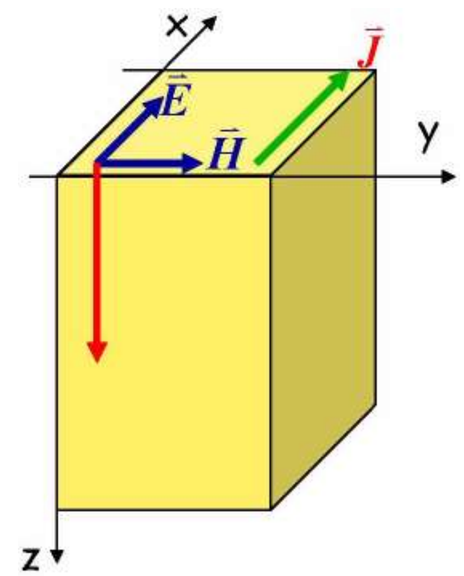
良导体单位面积表面上损耗的平均功率等于电流I在表面电阻R_s上损耗的平均功率

损耗功率的实际计算

$$P_l = S_{av}|_{z=0} = \frac{1}{2}|I\ |^2 R_s$$

$$\because I = H_{t0} \approx 2H_{i0}$$

$$\Rightarrow P_l = S_{av}|_{z=0} = \frac{1}{2}|I\ |^2 R_s = \frac{1}{2}|2H_{i0}|^2 R_s$$



作业：
7.26（1，2，5），
7.29, 7.30，7.36 7.38