7.4 电磁波的极化

1、极化的概念

- 无界媒质中，沿+z轴传播的均匀平面波， $\vec{E}=\vec{e}_x E_x+\vec{e}_y E_y$

$$\boxed{\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}}$$

E_{xm}和E_{ym}为正实数

$0 \le |\varphi_x - \varphi_y| \le \pi$

在给定的等相位面上，E_x和E_y两者的时空关系决定了$\vec{E}$的轨迹

给定等相位面

均匀平面波

等相位面是平面 $\vec{E}$在等相位面上

- 概念：在空间任一给定点上，电磁波的**电场强度**矢量$\vec{E}$的取向随时间变化的方式，称为电磁波的极化。
- 可用电场强度矢量的矢端随时间在空间描绘的轨迹来表示。
  - 一般情况下，其轨迹为椭圆，成为椭圆极化。
  - 特殊情况下，其轨迹为圆极化或线极化。

2、极化的类型

$$\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

1）线极化　若电场的两个分量E_x和E_y的相位相等或相差180°，则合成的电场表现为直线线极化波

为简单起见，空间任一固定点取$z = 0$的固定点讨论

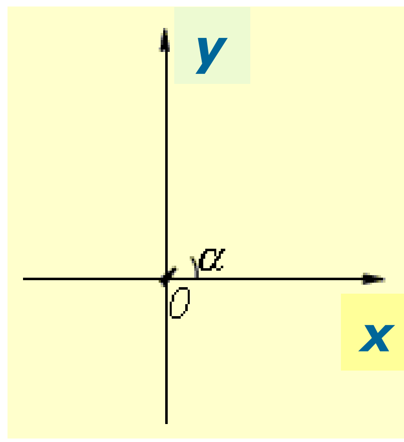
若：$\varphi_x = \varphi_y = \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t + \varphi_0) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$

$\Rightarrow$合成的电场强度矢量为 $\vec{E} = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y$

大小：$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos(\omega t + \varphi_0)$

方向（与x轴夹角θ）：$tg\theta = \dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{E_{ym}}{E_{xm}} =$ 正常数

若：$\varphi_x - \varphi_y = \pm\pi \Rightarrow tg\theta = \dfrac{E_y}{E_x} = -\dfrac{E_{ym}}{E_{xm}} =$ 负常数



直线极化的平面波

2）圆极化

若电场的两个分量E_x和E_y的振幅相等，相位相差90°，则合成的电场表现为圆极化波

空间任一固定点取$z=0$的点讨论 令$E_{xm}=E_{ym}=E_m$， $\varphi_x=\varphi$， $\varphi_y=\varphi_x\pm\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases} E_x=E_m\cos(\omega t+\varphi) \\ E_y=E_m\cos(\omega t+\varphi\pm\frac{\pi}{2})=\mp E_m\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$\Rightarrow$合成的电场强度矢量为$\vec{E}=\vec{e}_x E_x+\vec{e}_y E_y$

大小：$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{\left[E_m\cos(\omega t+\varphi_0)\right]^2+\left[\mp E_m\sin(\omega t+\varphi_0)\right]^2}$

$=E_m=$常数

方向（与x轴夹角θ）：$tg\theta=\dfrac{E_y}{E_x}=\mp\tan(\omega t+\varphi)\Rightarrow\theta=\mp(\omega t+\varphi)$

合成的电场的大小不随时间改变，但方向却随时间以角速度ω旋转，矢端轨迹为圆，故称为圆极化。

$$\varphi_y = \varphi_x \pm \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \theta = \mp(\omega t + \varphi)$$

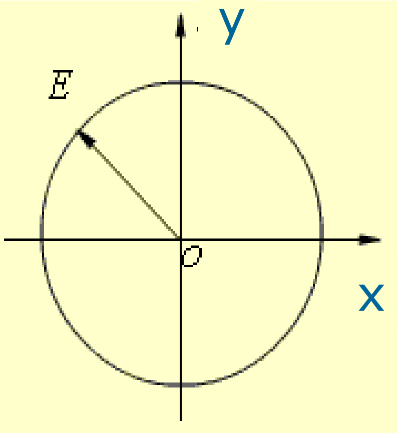
$$\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

当$\varphi_y - \varphi_x = -\dfrac{\pi}{2}$时，$\theta = \omega t + \varphi$

$t\uparrow$，$\theta\uparrow$

若波沿+z方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与波的传播方向满足右手螺旋关系，称为右旋圆极化波；

若波沿−z方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与波的传播方向满足左手螺旋关系，称为左旋圆极化波；



当$\varphi_y - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$时，$\theta = -(\omega t + \varphi)$

$t\uparrow$，$\theta\downarrow$

若波沿+z方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与波的传播方向满足左手螺旋关系，称为左旋圆极化波；

若波沿−z方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与波的传播方向满足右手螺旋关系，称为右旋圆极化波；

3) 椭圆极化 若电场的两个分量E_x和E_y的振幅和相位之间为任意关系，则合成的电场表现为椭圆极化波

空间任一固定点取$z = 0$的点讨论 $\varphi_x = \varphi, \quad \varphi_y = 0$

$$\boxed{\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t + \varphi) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t) \end{cases}$$

设法消去时间变量t

$$\boxed{\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{xm}E_{ym}}\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

这是椭圆方程，圆心在原点，长轴与x轴夹角为α，且

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2 - E_{ym}^2}\cos\varphi$$

合成的电场不断改变其大小和方向，矢端轨迹为椭圆，故称椭圆极化。

$$\Rightarrow \theta = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\frac{E_{ym}\cos(\omega t+\varphi_y)}{E_{xm}\cos(\omega t+\varphi_x)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\text{的旋转角速度为}\frac{d\theta}{dt} = \frac{E_{xm}E_{ym}\omega\sin(\varphi_x-\varphi_y)}{E^2_{xm}\cos^2(\omega t+\varphi_x)+E^2_{ym}\cos^2(\omega t+\varphi_y)}$$

$$\boxed{(1)\quad 0<\varphi_x-\varphi_y<\pi\text{时},\frac{d\theta}{dt}>0}$$

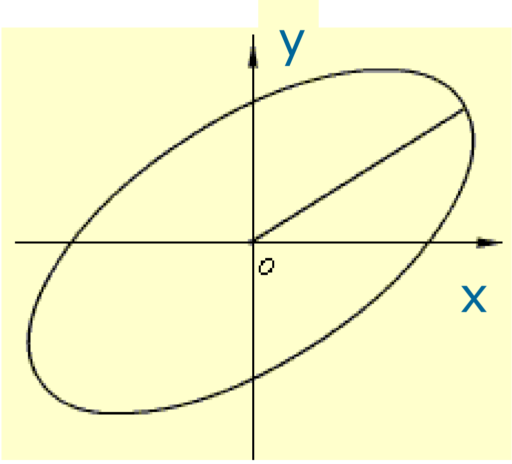
若波沿$+z$方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与$\vec{E}$的传播方向满足右手螺旋关系，称为右旋椭圆极化波

若波沿$-z$方向传播，则$\vec{E}$的旋转方向与$\vec{E}$的传播方向满足左手螺旋关系，称为左旋椭圆极化波

$$\boxed{(2)\quad -\pi<\varphi_x-\varphi_y<0\text{时},\frac{d\theta}{dt}<0}$$

若波沿$+z$方向传播，为左旋椭圆极化波

若波沿$-z$方向传播，为右旋椭圆极化波



左旋椭圆极化波

4) 讨论：极化波的分解及合成

$$\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t+\varphi_x) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t+\varphi_y) \end{cases}$$

椭圆极化是一般的极化状态，线极化和圆极化为特殊情况

当$\varphi_x-\varphi_y=0$或$\pm\pi$时，椭圆极化$\rightarrow$线极化

当$E_{xm}=E_{ym}$，且$\varphi_x-\varphi_y=\pm\pi/2$时，椭圆极化$\rightarrow$圆极化

当$E_{xm}=0, E_y=E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$，椭圆极化$\rightarrow$线极化

当$E_{ym}=0, E_x=E_{xm}\cos(\omega t+\phi_y)$，椭圆极化$\rightarrow$线极化

任何极化波都可以用两个极化方向相互垂直的线极化波叠加而成；或任何极化波都可以分解成两个极化方向相互垂直的线极化波。

两个彼此正交、时间相位相同的线极化波 $\Longleftrightarrow$ 线极化波

两个彼此正交、时间相位相差90°且振幅相等的线极化波 $\Longleftrightarrow$ 圆极化波

两个彼此正交、时间相位相差90°且振幅不等的线极化波 $\Longleftrightarrow$ 椭圆极化波

两个振幅相等、旋向相反的圆极化波 $\Longleftrightarrow$ 线极化波

两个振幅不等、旋向相反的圆极化波 $\Longleftrightarrow$ 椭圆极化波

例7-4-1:证明一线极化波可分解成振幅相等、旋向相反的两个圆极化波。

证： 假设平面波向＋z方向传播，不失一般性，取x轴平行与电场强度

$$\vec{E}=\vec{e}_x E_0 e^{-jkz}=\vec{e}_x E_0 e^{-jkz}+\frac{1}{2}j\vec{e}_y E_0 e^{-jkz}-\frac{1}{2}j\vec{e}_y E_0 e^{-jkz}$$

$$=\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x+j\vec{e}_y)e^{-jkz}+\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x-j\vec{e}_y)e^{-jkz}$$

$$=\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x e^{j0}+\vec{e}_y e^{+j\pi/2})e^{-jkz}+\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x e^{j0}+\vec{e}_y e^{-j\pi/2})e^{-jkz}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x\cos(-kz+\omega t)+\vec{e}_y\cos(-kz+\frac{\pi}{2}+\omega t))+}$$

$\varphi_y-\varphi_x=\pi/2 \quad t\uparrow,\theta\downarrow$

左旋圆极化波

$$\boxed{\frac{E_0}{2}(\vec{e}_x\cos(-kz+\omega t)+\vec{e}_y\cos(-kz-\frac{\pi}{2}+\omega t))}$$

$\varphi_y-\varphi_x=-\pi/2 \quad t\uparrow,\theta\uparrow$

右旋圆极化波

它们的振幅相同。 得证。

三、极化的判别方法

1、利用E_x和E_y的振幅和相位之间的关系判断

$$\vec{E}=\vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_x)+\vec{e}_y E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_y)$$

当$\varphi_y-\varphi_x=0$或$\pm\pi$时，$\rightarrow$线极化

当$E_{xm}=E_{xm}$，且$\varphi_y-\varphi_x=\pm\pi/2$时，$\rightarrow$圆极化

若$\varphi_y-\varphi_x=+\pi/2$，沿$+z(-z)$传播的波为左旋（右旋）波

若$\varphi_y-\varphi_x=-\pi/2$，沿$+z(-z)$传播的波为右旋（左旋）波

其他一般情形，$\rightarrow$椭圆极化

若$0<\varphi_y-\varphi_x<\pi$，沿$+z(-z)$传播的波为左旋（右旋）波

若$-\pi<\varphi_y-\varphi_x<0$，沿$+z(-z)$传播的波为右旋（左旋）波

2、利用复数形式判断

$$\dot{\vec{E}}=\vec{e}_x E_{xm} e^{j(-kz+\varphi_x)}+\vec{e}_y E_{ym} e^{j(-kz+\varphi_y)}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}(z=0)&=\vec{e}_x E_{xm} e^{j\varphi_x}+\vec{e}_y E_{ym} e^{j\varphi_y}\\&=\vec{e}_x E_{xm}(\cos\varphi_x+j\sin\varphi_x)+\vec{e}_y E_{ym}(\cos\varphi_y+j\sin\varphi_y)\\&=(\vec{e}_x E_{xm}\cos\varphi_x+\vec{e}_y E_{ym}\cos\varphi_y)+j(\vec{e}_x E_{xm}\sin\varphi_x+\vec{e}_y E_{ym}\sin\varphi_y)\\&=\vec{E}_R+j\vec{E}_I\end{aligned}$$

$$\vec{E}_R=\vec{e}_x E_{xm}\cos\varphi_x+\vec{e}_y E_{ym}\cos\varphi_y$$

$$\vec{E}_I=\vec{e}_x E_{xm}\sin\varphi_x+\vec{e}_y E_{ym}\sin\varphi_y$$

若：$\vec{E}_R // \vec{E}_I$　或$\vec{E}_R=0$　或$\vec{E}_I=0$　$\rightarrow$线极化

若　$\vec{E}_R \perp \vec{E}_I$且$|\vec{E}_R|=|\vec{E}_I|$　$\rightarrow$圆极化

若$\vec{E}_I$、$\vec{E}_R$与波的传播方向符合右手螺旋关系，则为右旋波；
若$\vec{E}_I$、$\vec{E}_R$与波的传播方向符合左手螺旋关系，则为左旋波。

例7-4-2:判断下列平面电磁波的极化形式

(1) $\vec{E} = E_0(-\vec{e}_x + j\vec{e}_y)e^{-jkz}$

$\because \quad \vec{E} = E_0(\vec{e}_x e^{j\pi} + \vec{e}_y e^{j\pi/2})e^{-jkz}$

$\Rightarrow E_{xm} = E_{ym} = E_0, \quad \varphi_y - \varphi_x = -\dfrac{\pi}{2}$

沿+z方向传播

$\boxed{\Rightarrow \text{右旋圆极化波}}$

(2) $\vec{E} = E_0(j\vec{e}_x - 2j\vec{e}_y)e^{-jkz}$

$\because \quad \vec{E} = (E_0\vec{e}_x e^{j\pi/2} + 2E_0\vec{e}_y e^{-j\pi/2})e^{-jkz}$

$\Rightarrow E_{xm} \neq E_{ym}$, 但$\varphi_y - \varphi_x = -\pi$

$\boxed{\Rightarrow \text{线极化波}}$

(3) $\vec{E} = E_0(\vec{e}_x + 3j\vec{e}_z)e^{-jky}$

注意坐标轴的不同
z, x, y符合右手螺旋规则

$\because \quad \vec{E} = (\vec{e}_z 3E_0 e^{j\pi/2} + \vec{e}_x E_0)e^{-jky}$

$\Rightarrow E_{xm} \neq E_{zm}, \quad \phi_x - \phi_z = -\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ 右旋椭圆极化波

沿$+y$方向传播

方法2：在$y=0$处写出$\vec{E}$的复数形式

$$\vec{E}(y=0) = (\vec{e}_z 3E_0 e^{j\pi/2} + \vec{e}_x E_0) = \vec{e}_x E_0 + j\vec{e}_z 3E_0 = \vec{E}_R + j\vec{E}_I$$

$$\Rightarrow \vec{E}_R = \vec{e}_x E_0, \quad \vec{E}_I = \vec{e}_z 3E_0$$

$\because \vec{E}_I \times \vec{E}_R \neq 0$,且$|\vec{E}_R| \neq |\vec{E}_I|$,应为椭圆极化波

又波沿$+y$方向传播，应为右旋椭圆极化波

若$\vec{E}_I$、$\vec{E}_R$与波的传播方向符合右手螺旋关系，则为右旋波；
若$\vec{E}_I$、$\vec{E}_R$与波的传播方向符合左手螺旋关系，则为左旋波。

(4) $\vec{E}=E_0(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y-5j\vec{e}_z)e^{-j(8x-6y)}$

沿任意方向传播的波$\vec{E}=\vec{E}_0e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}}$

先求传播方向

$\vec{k}\cdot\vec{r}=k_xx+k_yy+k_zz=8x-6y\Rightarrow k_x=8,k_y=-6,k_z=0$

$\Rightarrow\vec{k}=\vec{e}_x8-\vec{e}_y6 \qquad \Rightarrow\vec{e}_n=\vec{e}_x0.8-\vec{e}_y0.6$

又当 $\vec{k}\cdot\vec{r}=0$ 时

$$\vec{E}=E_0(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y-5j\vec{e}_z)$$
$$=E_0(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y)+j(-5E_0\vec{e}_z)$$

$\Rightarrow\vec{E}_R=E_0(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y),\vec{E}_I=-5E_0\vec{e}_z$

$\because|\vec{E}_R|=|\vec{E}_I|=5,$

且$\vec{E}_I\cdot\vec{E}_R=(-5\vec{e}_z)\times(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y)=0$ $\qquad\Rightarrow$圆极化波

又$\vec{E}_I\times\vec{E}_R=(-5\vec{e}_z)\times(3\vec{e}_x+4\vec{e}_y)=-15\vec{e}_y+20\vec{e}_x$

$\therefore\vec{E}_I\times\vec{E}_R//\vec{e}_n=-0.6\vec{e}_y+0.8\vec{e}_x$ $\qquad\Rightarrow$右旋圆极化波

即$\vec{E}_I$、$\vec{E}_R$和传播方向符合右手螺旋规则，

(5) $\vec{E} = (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)\cos(\omega t - \beta z) + (4\vec{e}_x + \vec{e}_y)\sin(\omega t - \beta z)$

$+(2\sqrt{2}\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y)\cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{4})$

$\because \vec{E} = (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)\cos(\omega t - \beta z) + (4\vec{e}_x + \vec{e}_y)\cos(\omega t - \beta z - \frac{\pi}{2})$

$+(2\sqrt{2}\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y)\cos(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{4})$

$\therefore \vec{E}(z=0) = (2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) + (4\vec{e}_x + \vec{e}_y)e^{-\frac{\pi}{2}j} + (2\sqrt{2}\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y)e^{\frac{\pi}{4}j}$

$$= (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) + j(-2\vec{e}_x) = \vec{E}_R + j\vec{E}_I$$

$\because \vec{E}_I \times \vec{E}_R = (-2\vec{e}_x) \times (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) = -8\vec{e}_z \neq 0$，且 $|\vec{E}_R| \neq |\vec{E}_I|$，

又波沿$+z$方向传播，应为左旋椭圆极化波

7.5 相速、群速与色散

1、相速Vp

➢单一频率正弦波上恒定相位点（面）传播的速度称为相速。

$$\boxed{V_p = \frac{\omega}{\beta}}$$

➢理想介质中（γ=0)：

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta \qquad \Rightarrow V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$ 与频率无关

➢导电媒质中（$\gamma \neq 0$, 且 $\gamma \neq \infty$）：

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - j\alpha \Rightarrow \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}$$

$V_p = \dfrac{\omega}{\beta}$ 是一个与频率相关的函数

这种现象称为色散，导电媒质为色散媒质。

2、群速Vg

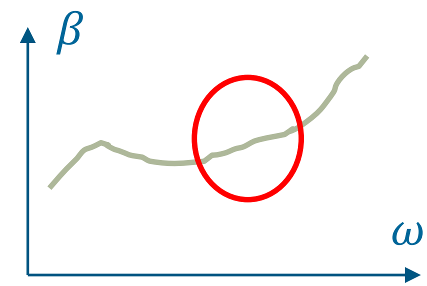
➢群速的引入

实际运用的电磁波都是由频率分布在一定范围内的简谐波以不同相位和振幅合成的波群，在色散媒质中传播时，每个谐波的相速度不同，如何确定一个实际信号在色散媒质中的传播速度？

设有两个电场幅值相同 方向相同，向$+z$方向传播的均匀平面波 角频率分别为$\omega_0+\Delta\omega$和$\omega_0-\Delta\omega$，相位常数分别为$\beta_0+\Delta\beta$和$\beta_0-\Delta\beta$，其中$\Delta\omega << \omega_0$

$$E_1 = E_m\cos[(\omega_0+\Delta\omega)t-(\beta_0+\Delta\beta)z] \qquad E_1 = E_m e^{j(\omega_0+\Delta\omega)t-j(\beta_0+\Delta\beta)z}$$

$$E_2 = E_m\cos[(\omega_0-\Delta\omega)t-(\beta_0-\Delta\beta)z] \qquad E_2 = E_m e^{j(\omega_0-\Delta\omega)t-j(\beta_0-\Delta\beta)z}$$



合成波：$E = E_1 + E_2$

$$= E_m e^{j(\omega_0+\Delta\omega)t-j(\beta_0+\Delta\beta)z} + E_m e^{j(\omega_0-\Delta\omega)t-j(\beta_0-\Delta\beta)z}$$

$$= E_m e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}\left[e^{j(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)} + e^{-j(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)}\right]$$

$$= \boxed{2E_m\cos(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)}\boxed{e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}}$$

合成波可看成是一个角频率为ω_0，而振幅按$\cos(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)$缓慢变化，向$+z$方向传播的行波。

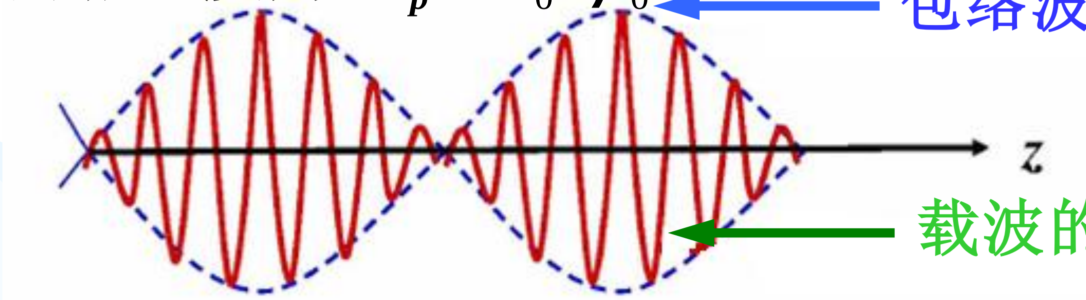
$$2E_m\cos(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)e^{j(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{E(t)=2E_m\cos(\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z)\cos(\omega_0 t-\beta_0 z)}$$

某一时刻，合成波随z的分布如图所示：

载波的相速度为：$V_p=\omega_0/\beta_0$

包络波的速度V_g



载波的相速度V_p

合成波的振幅随时间按余弦变化，是一调幅波，该包络波的等相位面（某时刻）为： $\Delta\omega\cdot t-\Delta\beta\cdot z=$常数 $\Rightarrow z=$常数

- 定义：包络波上某一恒定相位点传播的速度为群速Vg

$$\therefore V_g=\frac{dz}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}\xrightarrow{\text{当}\Delta\omega\to 0}\boxed{V_g=\frac{d\omega}{d\beta}}$$

注意：只有对窄带信号（$\Delta\omega<<\omega_0$），且β随ω近似为线性变化的情况下，群速才有意义。

3、群速和相速的关系

$$V_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d}{d\beta}\left(V_p \beta\right)$$

$$\boxed{V_p = \frac{\omega}{\beta}} \qquad \boxed{V_g = \frac{d\omega}{d\beta}}$$

用相速和角频率表达群速

$$V_g = V_p + \beta \frac{dV_p}{d\beta} = V_p + \beta \frac{dV_p}{d\beta}\frac{d\omega}{d\omega} = V_p + \beta \frac{dV_p}{dw}\boxed{\frac{dw}{d\beta}}$$

$$= V_p + \beta \frac{dV_p}{d\omega} V_g$$

$$\boxed{\Rightarrow V_g = \frac{V_p}{1-\beta \dfrac{dV_p}{d\omega}} = \frac{V_p}{1-\dfrac{\omega}{V_p}\dfrac{dV_p}{d\omega}}}$$

用相速和波长表达群速

$$V_g = V_p + \beta \frac{dV_p}{d\beta} = V_p + \beta \frac{dV_p}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}$$

$$\because \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \qquad \therefore \frac{d\lambda}{d\beta} = -\frac{2\pi}{\beta^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow V_g = V_p - \frac{2\pi}{\beta}\frac{dV_p}{d\lambda} = V_p - \lambda \frac{dV_p}{d\lambda}}$$

$$\boxed{V_g = \frac{V_p}{1 - \frac{\omega}{V_p}\frac{dV_p}{d\omega}}}$$

$$\boxed{V_g = V_p - \lambda \frac{dV_p}{d\lambda}}$$

- 对于非色散媒质：

$$\frac{dV_p}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_g = V_p}$$

- 对于色散媒质： $\dfrac{dV_p}{d\omega} \neq 0$

$$\boxed{\text{若}\frac{dV_p}{d\omega} < 0 \text{或} \frac{dV_p}{d\lambda} > 0, \quad \text{则} V_g < V_p}$$ 正常色散

$$\boxed{\text{若}\frac{dV_p}{d\omega} > 0 \text{或} \frac{dV_p}{d\lambda} < 0, \quad \text{则} V_g > V_p}$$ 非正常色散

四、能速

➢能量传播的速度，即能速，定义为平均坡印廷矢量与时间平均能量密度之比

$$\boxed{V_e = \frac{S_{av}}{w_{av}}}$$

表示单位时间内平均能量传送的距离

◆理想介质中：

$$\boxed{V_e = V_g = V_p}$$

$$\boxed{V_g = \frac{V_p}{1 - \dfrac{\omega}{V_p}\dfrac{dV_p}{d\omega}}}$$

◆色散媒质中：

正常色散媒质中：$\dfrac{dV_p}{d\omega} < 0$

$$\boxed{V_g < V_p \quad V_e = V_g}$$

如一般媒质

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1}\right]^{1/2}$$

非正常色散媒质中：$\dfrac{dV_p}{d\omega} > 0$

$$\boxed{V_g > V_p \quad V_e \neq V_g}$$

如良导体

$$V_p \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$