



第二章 离散时间信号和系统

(The Discrete Time Signal&System)



主要内容：

§ 2.1 引言

§ 2.2 离散时间信号—数字序列

§ 2.3 离散时间系统

§ 2.4 离散时间信号和系统的频域描述

§ 2.5 连续时间信号的取样

§ 2.6 Z变换

§ 2.7 系统函数

§ 2.8 全通系统与最小相位系统



§ 2.1 引言 (Introduction)

• 2.1.1 信号分类

连续信号和离散信号；模拟信号和数字信号；确定性信号和随机信号。

幅 度 \ 时 间	连 续	离 散
	模 拟	抽 样
连 续		
离 散	量 化	数 字

信号：运载信息的函数。

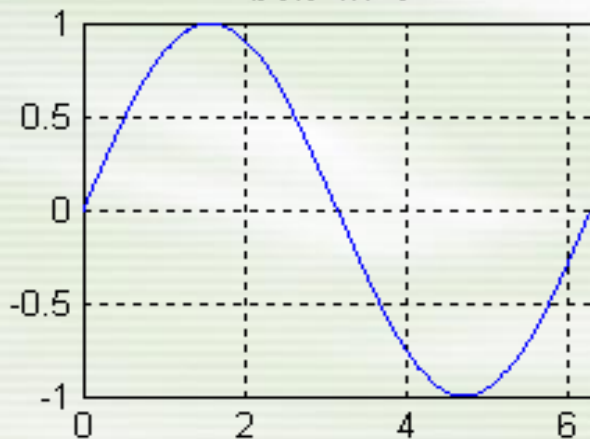
数学上表示为一个或多个自变量的函数。



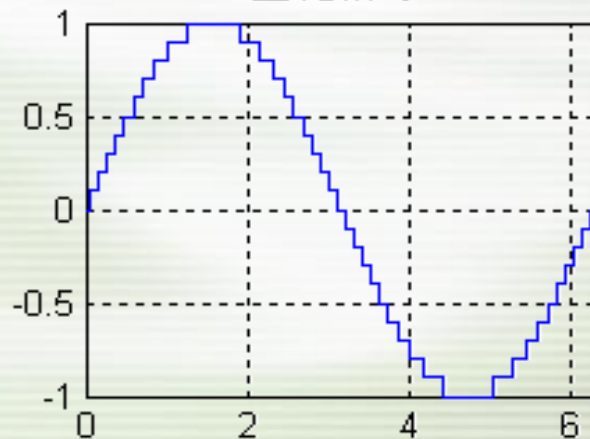
§ 2.1 引言 (Introduction)

• 2.1.1 信号分类

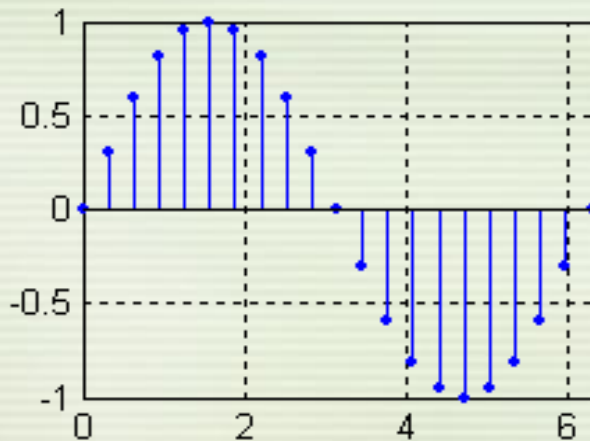
模拟信号



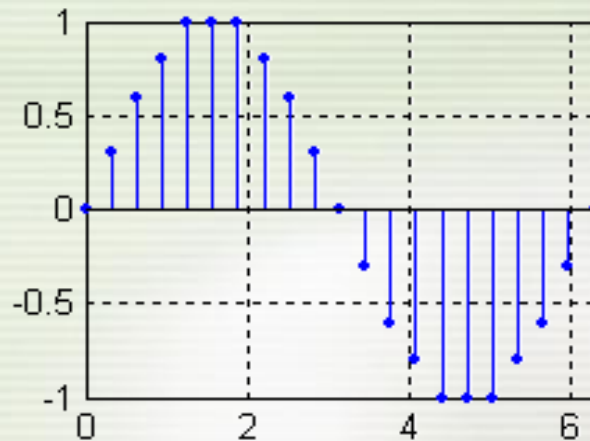
量化信号



取样信号



数字信号





• 2.1.2 数字信号处理的范围

对幅度和时间都离散的信号进行变换。

本课程主要讨论抽样（时间离散化）信号处理。

• 2.1.3 几个基本概念

连续时间系统、离散时间系统；

模拟系统、数字系统。



§ 2.2 离散时间信号—序列 (Sequence)

- 2.2.1 离散时间信号的表示

1. 数字表示

如果一个序列 x 的第 n 个数字表示为 $x(n)$ ，则全部信号序列表示为：

$$x = \{x(n)\}, -\infty < n < +\infty$$

其中 n 为整数，对于 n 的非整数点， $x(n)$ 没有定义。



为方便，将其称为序列 $x(n)$ ，如：

$$x(n) = \{2, 3, 4, 5, 6.3, 7.9\}; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x(n) = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 6.3, 7.9; n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, others \end{cases}$$

- 注意：

①有的书上也表示为 x_n ，注意n的取值范围。



②当采用5bits量化时，取样信号和数字信号的区别如下：

取样信号：

$$x(n) = \begin{cases} 0.3767, 0.2604, 0.1721, 0.6883, 0.5809, 0.2904, & n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

数字信号：

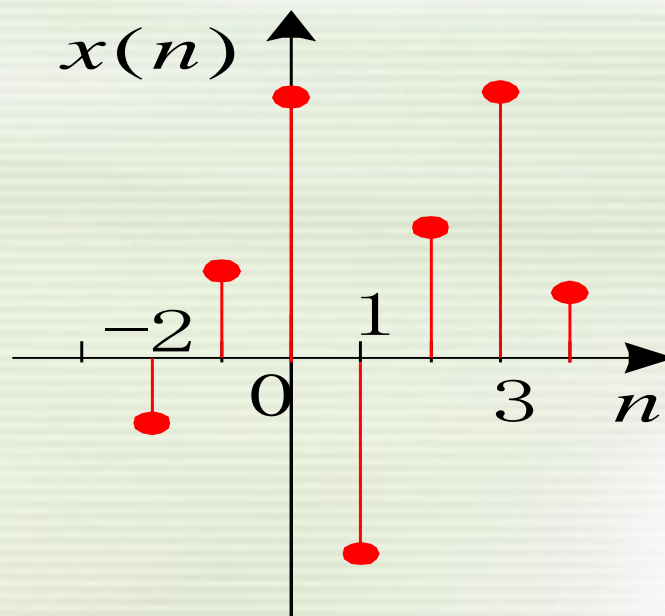
$$x(n) = \begin{cases} 0.375, 0.25, 0.125, 0.6875, 0.5625, 0.25; & n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$



2. 图形表示

$$x(n) = \begin{cases} -0.5, 0.75, 2, -1.5, 1, 2, 0.5, & n = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

序列图形如下图所示：





•2.2.2 自变量n的变换

(1) 反转: $x(n) \rightarrow x(-n)$

(2) 移位: $x(n) \rightarrow x(n + n_0)$

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$

其中 n, n_0 均为整数。

•2.2.3 常见序列

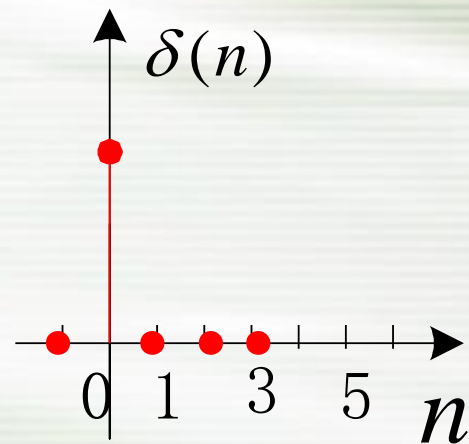
1. 单位取样序列 (Unit-sampling sequence)

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(n - n_0) = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$$



$\delta(n)$ 的波形如右图所示：



- 注意：

① $\delta(n)$ 是一个确定的物理量， $\delta(t)$ 而是一种数学抽象

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

② $x(n)\delta(n) = x(0)$ $x(n)\delta(n - n_0) = x(n_0)$

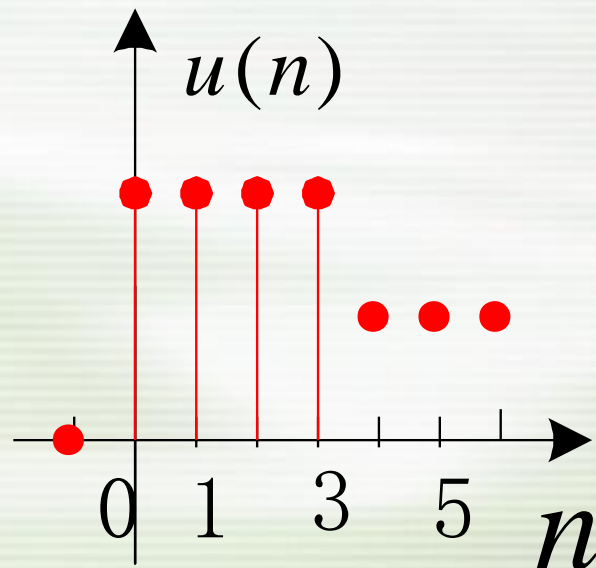
$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$



2. 单位阶跃序列 (Unit-step sequence)

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

其波形如右图所示:



• 注意:

① $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$



$$\textcircled{2} \quad u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

(令 $m=n-k$ 可完成两式之间的推导)

$$\textcircled{3} \quad u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad u(t) = \begin{cases} 1, t < 0 \\ \frac{1}{2}, t = 0 \\ 0, t > 0 \end{cases}$$

请考虑:

$\delta(-n)$ 、 $\delta(3-n)$ 、 $\delta(-3-n)$ 、 $u(-n)$ 、 $u(3-n)$ 和 $u(-3-n)$

以上各种序列的图形该如何表示?

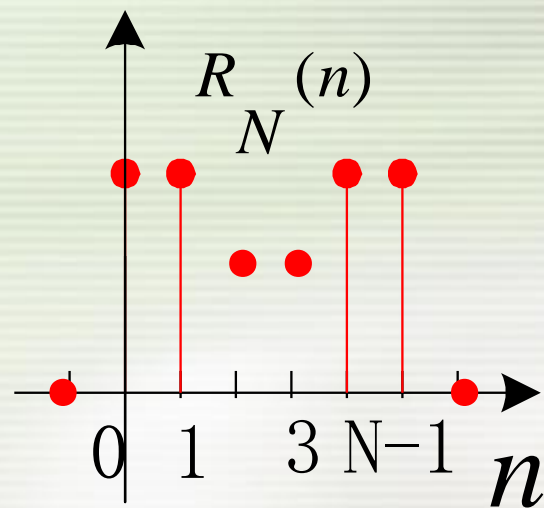


3. 矩形序列 (Rectangle sequence)

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N)$$

在 $(0, N-1)$ 区间的 N 个值为 1，
其它整数点为 0；
其波形如右图所示：





4. 实指数序列 (Real exponential sequence)

$$x(n) = a^n$$

如果 $n < 0$, $x(n) = 0$ 则有:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$



5. 复指数序列和正弦序列

(Complex exponential sequence)

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega)n} = e^{\sigma n} \cos(\omega n) + j e^{\sigma n} \sin(\omega n)$$

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad x(n) = A \sin(\omega n + \phi)$$

其中： A — 幅度 ϕ — 初相，单位为弧度(rad)；

ω — 数字域频率，单位为弧度(rad)；

比较： $x_a(t) = A \sin(\Omega t + \phi) = A \sin(2\pi f t + \phi)$

其中： $\Omega = 2\pi f$ 模拟域频率，单位为rad/s；

$\omega = \Omega T$ ， T 为采样周期。



- 注意:

$$\textcircled{1} \quad e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi m)n} \quad \cos(\omega n) = \cos((\omega + 2\pi m)n)$$

$$e^{j\Omega t} \neq e^{j(\Omega+2\pi m)t} \quad \cos(\Omega t) \neq \cos((\Omega + 2\pi m)t)$$

即：正弦序列和复指数序列对 ω 变化以为 2π 周期。

在数字域考虑问题时，取数字频率的主值区间为：

$$[-\pi, \pi] \quad \text{或者} \quad [0, 2\pi]$$

$[-\pi, \pi]$ 用于离散时间信号和系统的FT

$[0, 2\pi]$ 用于DFT



- ② 当 $\omega = 0$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最慢（不变化）；
当 $\omega = \pi$ 时, $\cos(\omega n)$ 变化最快。

在DSP中，在主值区间上，将 $\omega = 0$ 附近称为数字低频；而将 $\omega = \pi$ 附近称为数字高频。

这一特点与模拟正弦信号 $x_a(t) = \cos(\Omega t)$ 截然不同， Ω 越大, $\cos(\Omega t)$ 变化越快，注意其中 t 连续取值，而 n 只取整数值。



•2.2.4 周期序列(Periodic sequence)

如果对所有的n序列都满足： $x(n) = x(n + N)$

其中N为整数，则称序列 $x(n)$ 为周期序列，且最小周期为N，记为 $\tilde{x}(n)$ 。

For $\sigma = 0$ 的复指数序列和正弦序列：

①当 $\frac{2\pi}{\omega} = \text{整数}$ 时，序列为周期性的，且周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$

如： $x(n) = A \cos(\frac{\pi}{4}n), N = 8$



② 当 $\frac{2\pi}{\omega}$ = 有理数时, 序列为周期的, 且周期大于 $\frac{2\pi}{\omega}$

如: $x(n) = A \sin(\frac{3\pi}{7}n + \phi), N = 14$

③ 当 $\frac{2\pi}{\omega}$ = 无理数时, 序列为非周期的。

如: $x(n) = A \sin(\frac{3}{7}n + \phi)$

• 2.2.5 序列的能量 (Energy of sequence)

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$



• 2.2.6 序列间的运算

对于两个序列 $x(n)$ 和 $y(n)$, 有:

$$x(n) + y(n) = \{x(n) + y(n)\} \quad , \quad \text{和}$$

$$x(n) \cdot y(n) = \{x(n) \cdot y(n)\} \quad , \quad \text{积}$$

$$\alpha x(n) = \{\alpha x(n)\} \quad , \quad \text{与数 } \alpha \text{ 相乘}$$

如果 $y(n) = x(n - n_0)$, 则称序列 $y(n)$ 为序列 $x(n)$ 的延迟序列或移位序列 (式中 n_0 为整数) 。



• 2.2.7 序列的加权表示

$$\because x(n) \cdot \delta(n) = x(0) = x(0) \cdot \delta(n)$$

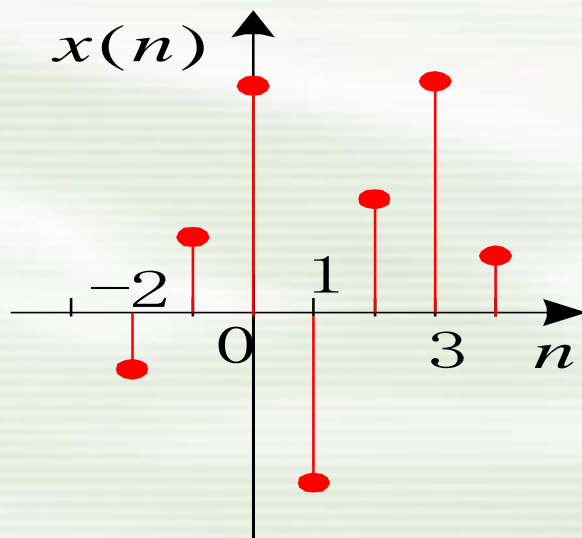
$$x(n) \cdot \delta(n - n_0) = x(n_0) = x(n_0) \cdot \delta(n - n_0)$$

$$\therefore x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n - k)$$

由于任意序列皆可以表示成各延迟单位取样序列的幅度加权和，因此，讨论系统的特性时只需讨论系统在单位取样序列作用下的响应即可。



例2.2.1 如下图所示的序列用序列 $\delta(n)$ 表示则为:



$$x(n) = -0.5\delta(n+2) + 0.75\delta(n+1) + 2\delta(n) - 1.5\delta(n-1) \\ + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 0.5\delta(n-4)$$

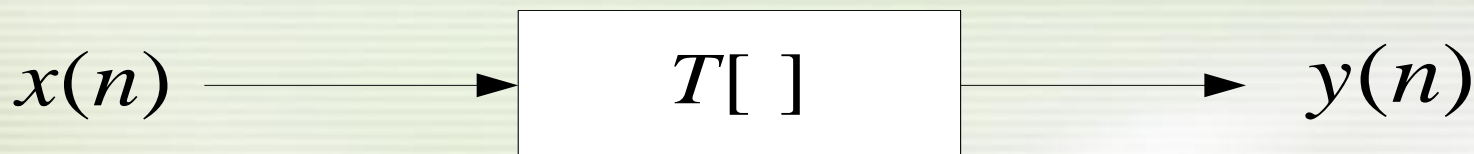


§ 2.3 离散时间系统 (Discrete Time System)

• 2.3.1 线性非移变系统

(Linear shift-invariant systems)

1. 对于系统 $T[]$ ，把系统定义为将输入序列映射成输出序列的唯一变换，表示为： $y(n) = T[x(n)]$ 。





2. 线性系统（Linear System）：

设 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 分别是系统对 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的响应，则：

线性系统满足：

$$\begin{aligned} T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= a \cdot T[x_1(n)] + b \cdot T[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n) \end{aligned}$$

（ a, b 是任意常数）

3. 非移变系统（Shift-invariant System）：

如果 $y(n) = T[x(n)]$ ，且 $y(n - k) = T[x(n - k)]$
 k 为整数，则 $T[]$ 为非移变系统。



例2.3.1 证明 $y(n) = T[x(n)] = nx(n)$ 不是非移变系统。

证明：

由于 $T[x(n-k)] = nx(n-k)$

和 $y(n-k) = (n-k)x(n-k)$

所以 $T[x(n-k)] \neq y(n-k)$

故该系统不是非移变系统。





4. 线性非移变系统:

①系统即满足线性条件，又满足非移变条件即为线性非移变系统。 设 $x(n)$ 为线性非移变系统的输入， $y(n) = T[x(n)]$ ；

当输入为 $\delta(n)$ 时， $h(n) = T[\delta(n)]$ —单位取样响应；

当输入为 $\delta(n-k)$ 时， $h(n-k) = T[\delta(n-k)]$

$$\because x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



$$\begin{aligned}\therefore y(n) &= T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= x(n) * h(n)\end{aligned}$$

即：对线性非移变系统，输入和输出满足卷积关系。

②离散卷积运算步骤：折叠移位、相乘、相加。



例. 已知线性非移变系统的单位取样响应为:

$$h(n) = u(n) - u(n-4), \text{ 输入为: } x(n) = \begin{cases} n, 0 \leq n \leq 3 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

求输出 $y(n)$ 。

解: $\because y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

$$\therefore y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = 0, \text{ 如图2.3.1(a)所示;}$$

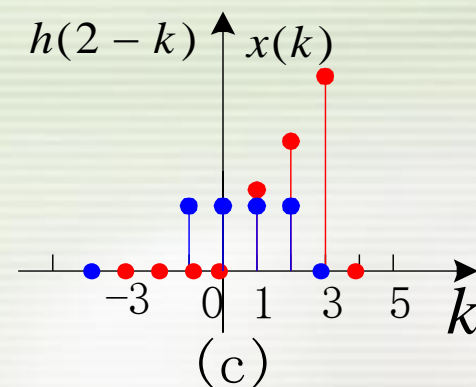
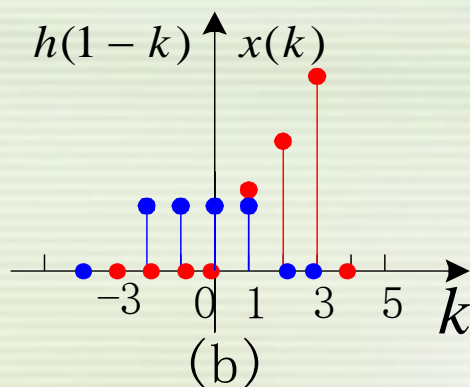
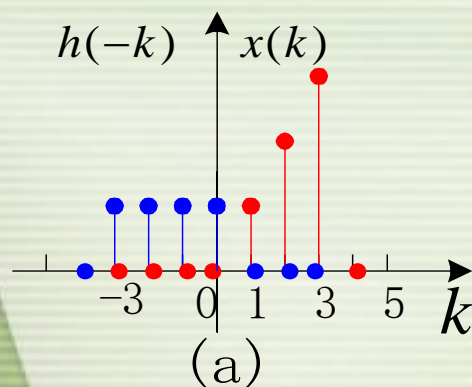
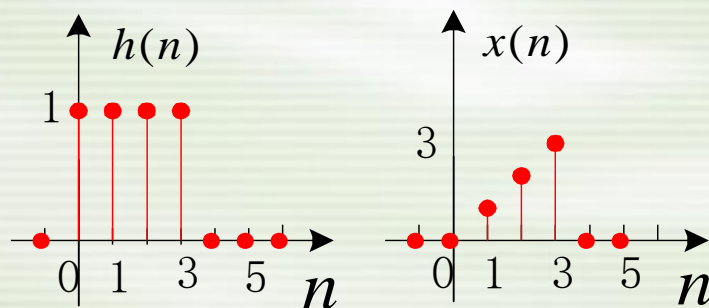
$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = 1, \text{ 如图2.3.1(b)所示;}$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = 3, \text{ 如图2.3.1(c)所示;}$$



$$y(n) = \begin{cases} 1, 3, 6, 6, 5, 3; n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

整个卷积过程如下图所示。





5.

离散卷积运算的基本规律:

①交换律

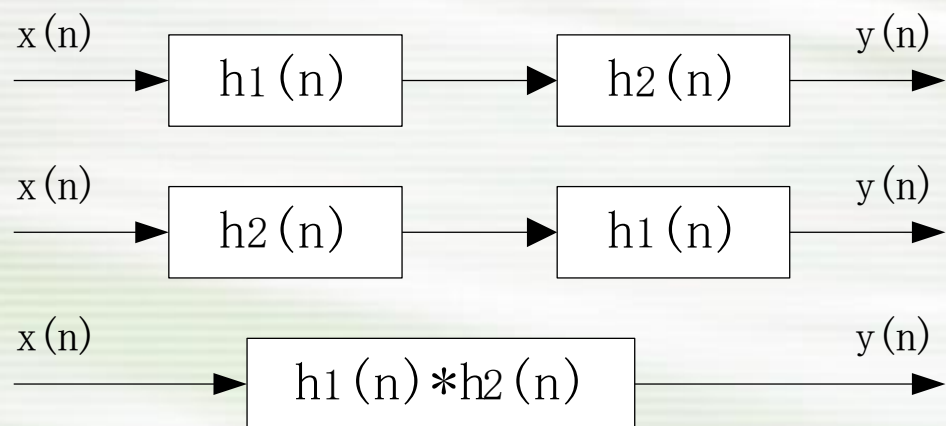
$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

②结合律

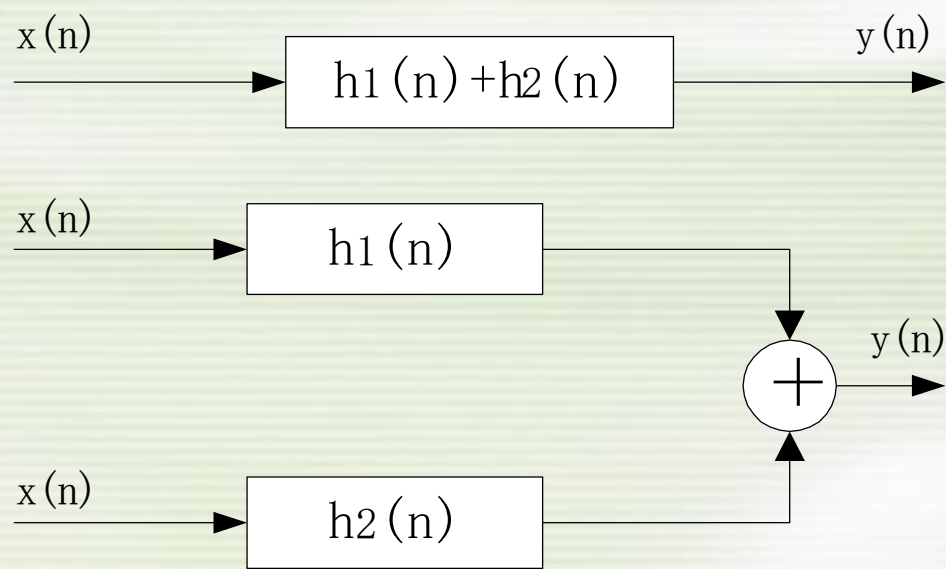
$$\begin{aligned} y(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

③分配律

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] \\ &= x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \end{aligned}$$



(a) 串联组合



(b) 并联组合



- day1



2.3.2 系统的稳定性和因果性

(The Stability & Causality of System)

1. 稳定系统 (Stable System) :

① 对于一个有界的输入 $x(n)$ ，产生有界输出 $y(n)$ 的系统。

即对于稳定系统，如果 $|x(n)| \leq M$ (M 是常数)，
则有： $|y(n)| < \infty$

例：判断系统 $y(n) = T[x(n)] = e^{x(n)}$ 的稳定性？

解：设 $|x(n)| \leq M$ ，则： $|y(n)| = |e^{x(n)}| = e^{|M|} < \infty$ ，
系统稳定。



②一个线性非移变系统稳定的充要条件是：其单位取样响应绝对可和，即：

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

证明：

**a.充分性：设上式成立并设为一个有界输入序列，
即：| x(n) | ≤ M**

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)| |h(k)| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \end{aligned}$$

$$\therefore |y(n)| < \infty$$



b.必要性：假设系统的单位取样响应不绝对可和，

即：
$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \infty$$

定义一个有界的输入：

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|}, & h(n) \neq 0 \\ 0, & h(n) = 0 \end{cases}$$

式中 $h^*(n)$ 是 $h(n)$ 的复共轭，

$$\therefore y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-k)h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = S$$

$\therefore y(0)$ **不是有界的。**



2. 因果系统 (Causal System) :

- ①输出的变化不会领先于输入的变化变化的系统。即：系统的输出值 $y(n)$ 不取决于输入 $x(n)$ 的将来值, $y(n)$ 只与 $x(n)$ 的现在值及过去值 $x(n-1), x(n-2), \dots$ 等有关, 与将来值 $x(n+1), x(n+2), \dots$ 无关。

例：
 $y(n) = T[x(n)] = x(n-1)$ 是因果系统；
 $y(n) = T[x(n)] = x(n+1)$ 是非因果系统。

- ②一个线性非移变系统为因果系统的充要条件为：

$h(n) \equiv 0, n < 0$ ，应注意：系统的“稳定性”和“因果性”与系统的输入 $x(n)$ 无关，而取决于系统本身的结构 $h(n)$ 。



例:

请判断系统 $T[x(n)] = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$ 是否为:

①稳定系统, ②因果系统, ③线性系统, ④非时变系统?

解: ① **if** $|x(n)| \leq M$, **then** $|T[x(n)]| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x(k)| \leq (2n_0 + 1) |M|$

则该系统为稳定系统。

② $\because T[x(n)]$ 取决于 $x(n)$ 的将来值, 该系统不是因果系统;

$$\begin{aligned} \text{③ } \because T[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} [ax_1(k) + bx_2(k)] \\ &= a \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1(k) + b \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2(k) = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] \end{aligned}$$

则该系统为线性系统。

$$\text{④ } T[x(n-m)] = \sum_{k=n-m-n_0}^{n-m+n_0} x(k) = y(n-m)$$

则该系统为非移变系统。



§ 2.3.3 线性常系数差分方程

(Linear Constant-coefficient Difference Equations)

- 2.3.3.1 函数序列的差分描述
- 2.3.3.2 线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

- ① 线性非移变离散系统，输入和输出满足上述方程；
- ② 上述方程描述的系统不一定是因果的，假定（除非另作说明）在一般情况下，上述方程描述一个因果系统。



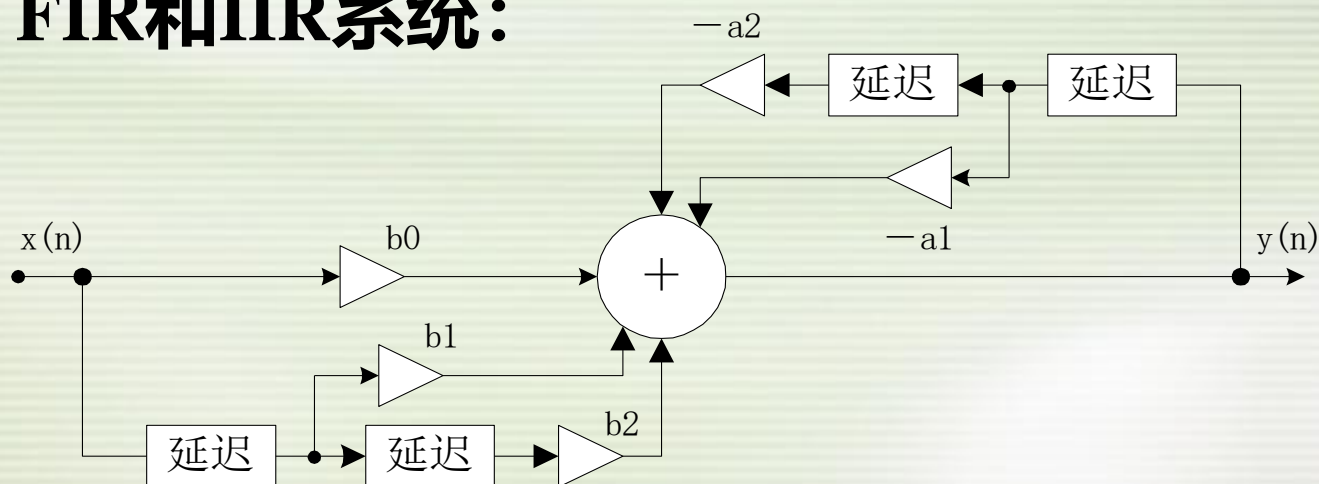
• 2.3.3.3 FIR系统和IIR系统

(1) **FIR: Finite Impulse Response**(有限冲激响应);

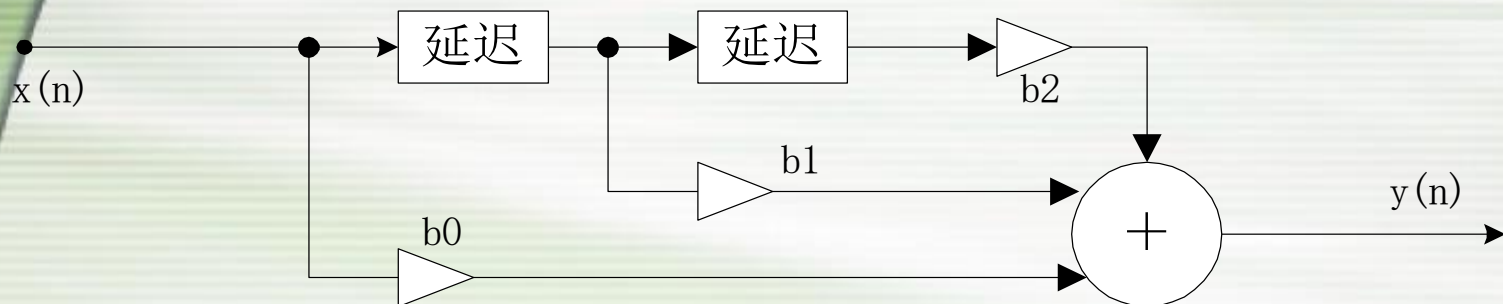
IIR: Infinite Impulse Response(无限冲激响应);

(2) 数字系统的表示: 差分方程、框图或流图、系统函数。

(3) **FIR和IIR系统:**



(a) 二阶IIR系统



(b) 二阶FIR系统

例2.4.1： 请写出上图所示系统(a)和(b)的差分方程。

解：

二阶IIR系统： $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$

二阶FIR系统： $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$



§ 2.4 离散时间信号和系统的频域表示

(The Frequency Properties of The Discrete Time Signal & System)

• 2.4.1 离散时间信号的Fourier变换

1. 连续时间信号的Fourier变换为:

$$\begin{cases} X(j\Omega) = FT[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = IFT[X(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$

式中，表示角频率（rad/s）。



2. 离散时间信号的Fourier变换定义为:

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ x(n) = IFT[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

在物理意义上, $X(e^{j\omega})$ 表示序列 $x(n)$ 的频谱, ω 为数字域频率 (rad)。

注意:

a. 一般情况下, $X(e^{j\omega})$ 为复数, 故:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$



$$X(\omega) = |X(e^{j\omega})| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})] = \arctg\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right]$$

应注意取值范围

b. $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的 ω 的连续函数；而 $X(j\Omega)$ 是角频率 Ω 的非周期连续函数；

$$\therefore X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

c. 当 $x(n)$ 为实序列时， $X(e^{j\omega})$ 的幅值 $|X(e^{j\omega})|$ 在区间 $0 \leq \omega \leq \pi$ 内是偶对称函数，相位 \arg 是奇对称函数。



证明:

因为 $|X(e^{j\omega})|$ 关于 π 偶对称, 所以: $|X(e^{j\omega})| = |X(e^{j(2\pi-\omega)})|$

因为 $\arg[X(e^{j\omega})]$ 关于 π 奇对称

所以: $\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{j(2\pi-\omega)})]$

$$\because X^*(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} = X(e^{-j\omega})$$

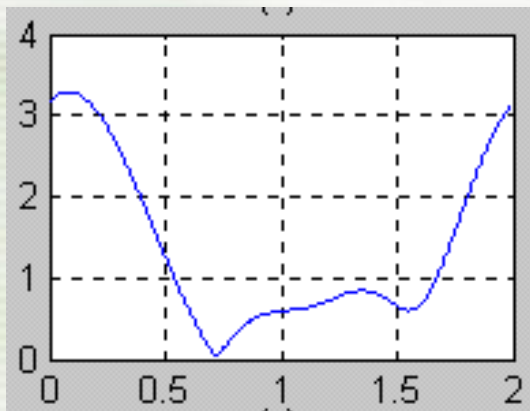
$$\therefore X_R(e^{j\omega}) - jX_I(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) + jX_I(e^{-j\omega})$$

即: $X_R(e^{j\omega})$ 偶对称, $X_I(e^{j\omega})$ 奇对称。

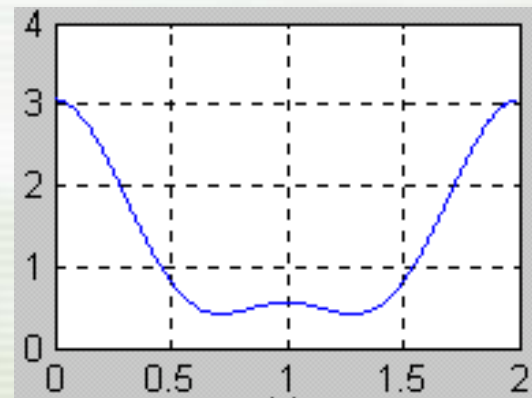
所以 $x(n)$ 为实序列时, $[0, 2\pi]$ 或 $[0, \pi]$ 内的 $X(e^{j\omega})$ 即代表其频率特性。



c.当 $x(n)$ 不为实序列时，上述结论不正确，如下图所示。



(a)复序列的幅频特性



(b)实序列的幅频特性

图(a)的序列为:
$$x(n) = \begin{cases} 1, 1, 0.75 + j0.5, 0.25 + j0.3, 0.0625; n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0; \text{others} \end{cases}$$

图(b)的序列为:
$$x(n) = \begin{cases} 1, 1, 0.75, 0.25, 0.0625; n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0; \text{others} \end{cases}$$



e. $x(n)$ 的FT存在的条件: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$ 。

f. $x(n)$ 的FT $X(e^{j\omega})$ 代表信号的频域特性。

g. 从序列Fourier变换的公式可知: 离散信号

即可用时域形式 $x(n)$ 表示, 也可用频域形

式 $X(e^{j\omega})$ 表示。



例：求具有下列单位取样响应的系统频率响应。

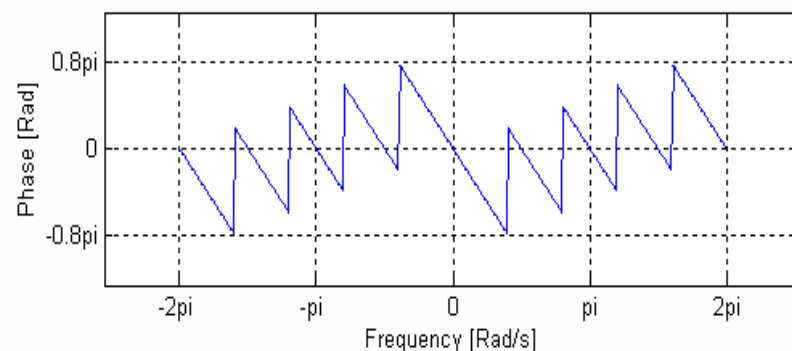
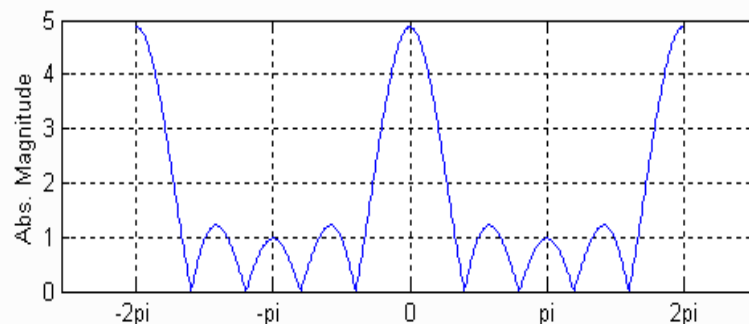
$$h(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, \text{ others} \end{cases}$$

解：右图画出的是 $N=5$ 时， $H(e^{j\omega})$ 的幅度和相位特性。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\omega}} \\ &= \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \cdot e^{-j(N-1)\omega/2} \end{aligned}$$

注：

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$





• 2.4.2 离散时间信号的Fourier变换的性质

1. 线性：设 $X_1(e^{j\omega}) = FT[x_1(n)]$, $X_2(e^{j\omega}) = FT[x_2(n)]$, 则

$$FT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

2. 序列的移位：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$, 则

$$FT[x(n-k)] = e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$$

3. 序列的调制：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$, 则

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$



4. 序列的折叠：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

5. 序列乘以 n ：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[nx(n)] = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

6. 序列的复共轭：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，则

$$FT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

$$FT[x^*(-n)] = X^*(e^{j\omega})$$



7. 序列的卷积：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$, $Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)]$

$w(n) = x(n) * y(n)$, 则

$$W(e^{j\omega}) = FT[x(n) * y(n)] = X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$$

8. 序列相乘：设 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$, $Y(e^{j\omega}) = FT[y(n)]$

$w(n) = x(n) \cdot y(n)$, 则

$$W(e^{j\omega}) = FT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \cdot Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



9. 序列的FT的对称性:

- ①定义: $x_e(n) = x_e^*(-n)$ 共轭对称序列
 $x_o(n) = -x_o^*(-n)$ 共轭反对称序列

注意:

a. 变换区间 $-\infty < n < +\infty$

b. 以 原点 为对称点

c. 频域定义: $X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$ 共轭对称函数

$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$ 共轭反对称函数

d. $x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$ $x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$

$x_{er}(n), x_{oi}(n)$ 是偶序列, $x_{or}(n), x_{ei}(n)$ 是奇序列。



②序列分解:

a. $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$ (任意长)

其中: $x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$ $x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$

b. $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

其中: $x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$ $x_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$

c. $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$

其中: $X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$



例： 已知序列 $x(n] = u(n)$ ，请画出 $x_o(n)$ 和 $x_e(n)$ 的图形？

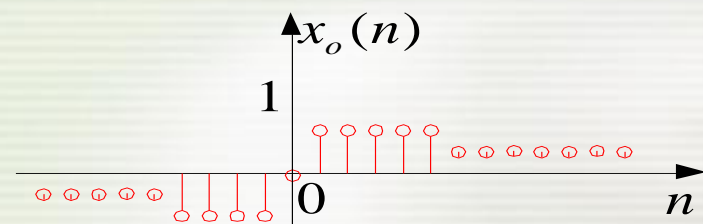
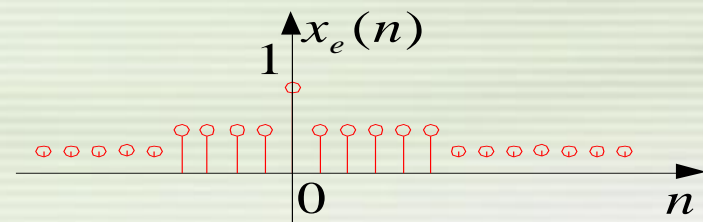
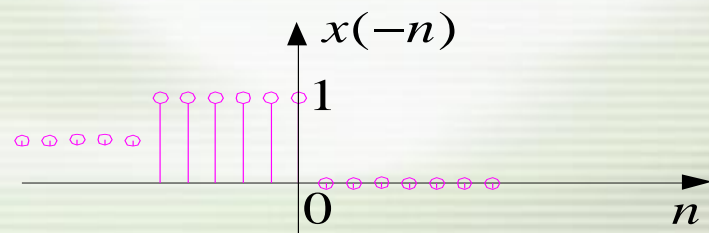
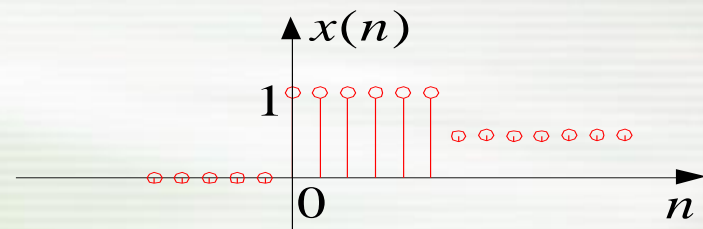
解：

当 $x(n)$ 为实序列时，有：

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$$

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$$

其图形如右图所示。





③FT的共轭对称性:

a. $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$FT[x_r(n)] = X_e(e^{j\omega})$$

$$FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega})$$

证明:

$$\because x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$\therefore FT[x_r(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] = X_e(e^{j\omega})$$



b. $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$FT[x_e(n)] = X_R(e^{j\omega})$$

$$FT[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega})$$

证明：

$$\because x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

$$\therefore FT[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

其中 $FT[x^*(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = [\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n)e^{j\omega n}]^*$

$$\underline{\underline{m = -n}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \right]^* = X^*(e^{j\omega})$$



c. 当 $x(n)$ 为实序列（任意长），且 $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ 则：

① $X(e^{j\omega})$ 共轭对称，即： $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

$$\because x_i(n) = 0 \quad \therefore FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega}) = 0$$

② 如 $x(n)$ 为实偶序列，则 $X(e^{j\omega})$ 为实偶函数，即：

$$\text{若 } x(n) = x(-n), \text{ 则 } X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\because x_o(n) = 0 \quad x_i(n) = 0$$

$$\therefore FT[x_o(n)] = jX_I(e^{j\omega}) = 0$$

$$FT[jx_i(n)] = X_o(e^{j\omega}) = 0$$



③ 如 $x(n)$ 为实奇序列，则 $X(e^{j\omega})$ 为纯虚奇对称函数，

即：若 $x(n) = -x(-n)$ ，则 $X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})$

④ 如果 $x(n)$ 为实因果序列， $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$

$$x(n) = \begin{cases} 2x_e(n), n > 0 \\ x_e(n), n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \quad x(n) = \begin{cases} 2x_o(n), n > 0 \\ x(0), n = 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$x_e(n) = \begin{cases} x(0), n = 0 \\ \frac{1}{2} x(n), n > 0 \\ \frac{1}{2} x(-n), n < 0 \end{cases} \quad x_o(n) = \begin{cases} 0, n = 0 \\ \frac{1}{2} x(n), n > 0 \\ -\frac{1}{2} x(-n), n < 0 \end{cases}$$

注： $x(n) \equiv 0, n < 0$



• 2.4.3 离散时间系统的频率响应

1. 定义:

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$, 其中 $h(n)$ 是系统的单位取样响应

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$H(\omega) = |H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad \text{为系统的幅度响应}$$

$$\varphi(\omega) = \arg[H(e^{j\omega})] = \arctg\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right] \quad \text{为系统的相位响应}$$



2. 正弦信号或复指数信号通过线性非移变系统:

设 $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，则有：

$$\begin{aligned}\because y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{j\omega_0(n-m)} \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)e^{-j\omega_0 m}\end{aligned}$$

$$\therefore y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

其中 $H(e^{j\omega_0})$ 是系统在 ω_0 处的频率响应。



设 $x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi)$,

如为 $h(n)$ 实序列, 则系统对 $x(n)$ 的响应为:

$$\begin{aligned} x(n) &= A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} (e^{j(\omega_0 n + \phi)} + e^{-j(\omega_0 n + \phi)}) \\ &= \frac{A}{2} (e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{A}{2} [e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H(e^{-j\omega_0})] \\ &= \frac{A}{2} [e^{j\phi} \cdot e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) + e^{-j\phi} \cdot e^{-j\omega_0 n} H^*(e^{j\omega_0})] \end{aligned}$$

当 $h(n)$ 为实序列时, 有: $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$

$$\therefore y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

其中, $\theta = \arg[H(e^{j\omega_0})]$ 是系统在 ω_0 处的相位响应。



例： 求一个因果的线性非移变系统，其系统的频率响

应为： $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} + \beta}{1 - \beta \cdot e^{-j\omega}}$ ， $\beta < 1$ 。求系统对下列输入信号

的响应： $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$ 。

解：该系统对输入 $x(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$ 的响应为：

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

$$y(n) = |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| \cdot \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \theta)$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\beta - j}{1 + j\beta} = -j$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 1 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$$

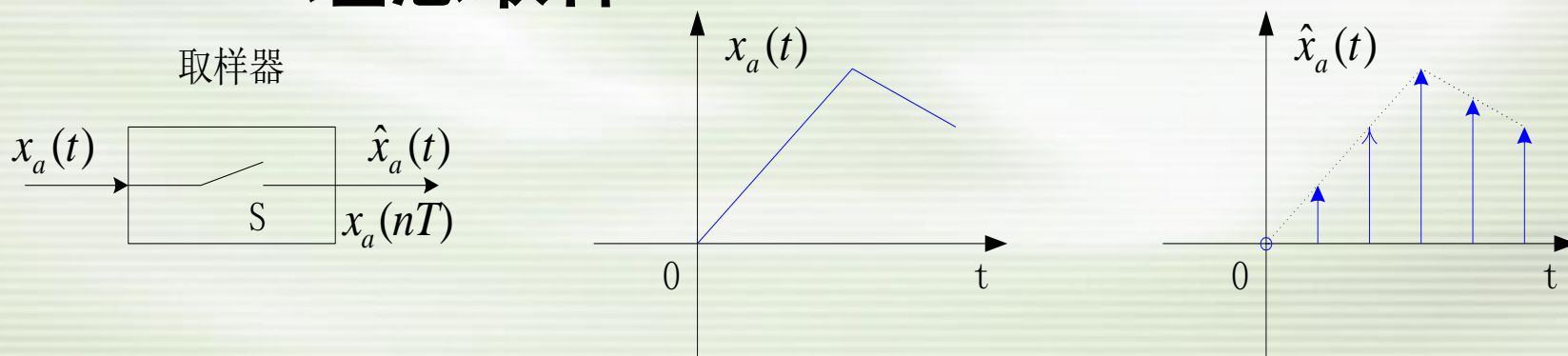
$$\therefore y(n) = \cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})$$



§ 2.5 连续时间信号的取样

(The Sampling of Continuous Time Signal)

• 2.5.1 理想取样



如上图所示，模拟信号 $x_a(t)$ 经过取样器，其输出的取样信号为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t - nT)$$

其中 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$



注意： $\hat{x}_a(t)$ 是模拟信号，不是数字信号。

数字信号（序列） $x(n)$ 是模拟信号 $x_a(t)$ 经过理想取样才得到的，即：

$$\begin{aligned} x(n) &= \{x_a(nT)\}, -\infty < n < \infty \\ &= \{\cdots, x_a(-2T), x_a(-T), x_a(0), x_a(T), x_a(2T), \dots\} \end{aligned}$$



• 2.5.2 频谱周期延拓

模拟信号 $x_a(t)$ 经过取样得到取样信号 $\hat{x}_a(t)$ ，其频谱为：

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= FT[x_a(t)p(t)] = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P(j\Omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega) * \delta(j\Omega - jr\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s)\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \quad \dots(2.6a)$$

$p(t)$ 的FT变换为： $P(j\Omega) = FT[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\Omega_s t}] = \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(j\Omega - jr\Omega_s)$

即取样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 就是模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，延拓周期的取样角频率是 Ω_s 。



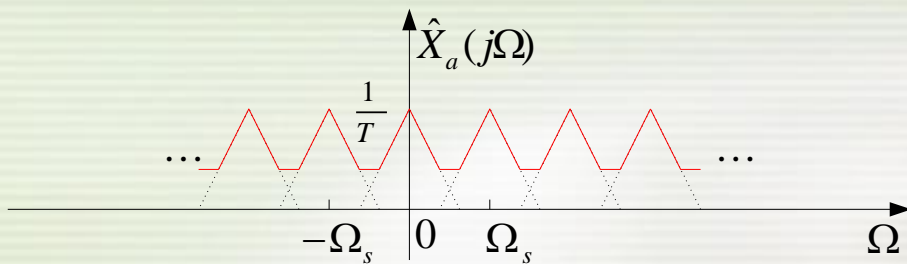
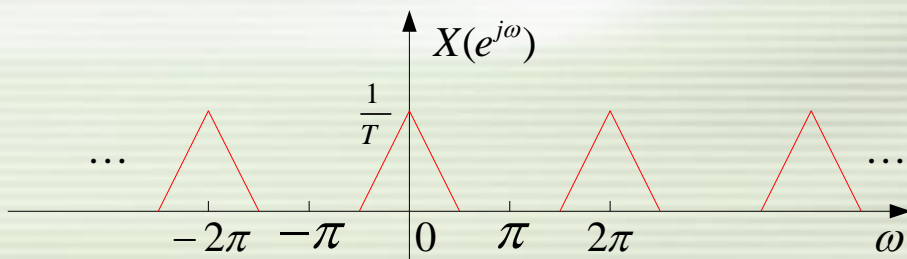
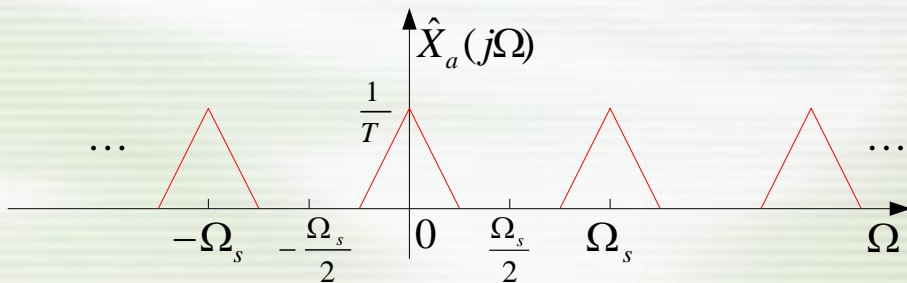
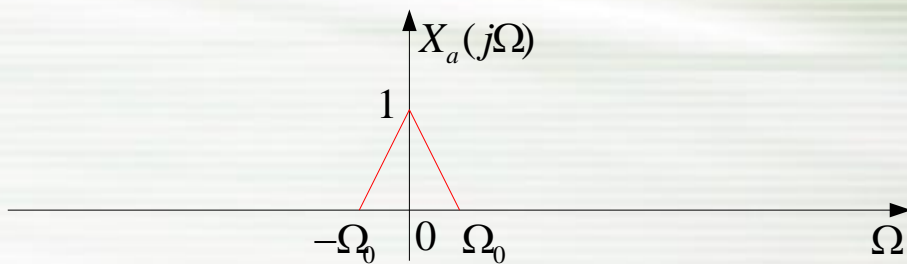
从右图可知，为使取样后的信号频谱不产生“混叠”，在信号的频带受限的情况下，取样频率应等于或大于信号最高频率的两倍，即：

$$\Omega_s \geq 2\Omega_0$$

其中：

Ω_s 称为奈奎斯特频率；

$\Omega_s / 2$ 称为折叠频率。





• 2.5.3 频率归一化

频率归一化讨论离散时间信号 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 和取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 之间的关系。假设离散时间信号 $x(n)$ 是模拟信号 $x_a(t)$ 通过周期性取样得到的，即：

$$x(n) = x_a(nT) \quad \dots(2.6b)$$

取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱为：

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= FT[\hat{x}_a(t)] = FT[x_a(t)p(t)] \\ &= FT\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot FT[\delta(t - nT)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \quad \dots(2.6c) \end{aligned}$$



离散时间信号 $x(n)$ 的FT变换为:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) \quad \dots(2.6d)$$

利用式(2.6b)的关系, 比较式(2.6c)和式(2.6d)得:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

将式(2.6a)代入上式得:

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jr\Omega_s) \quad \dots(2.6e)$$

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega}{T} - jr\frac{2\pi}{T}) \quad \dots(2.6f)$$



即在 $\omega = \Omega T$ 的条件下，离散时间信号 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 与取样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 相等。

由于 $\omega = \Omega T = \frac{2\pi f}{f_s}$ （ f_s 为取样频率）是 f 对 f_s 归一化的结果，因此可认为离散时间信号 $x(n)$ 的频谱是取样信号的频谱经频率归一化后的结果。

综上所述：离散时间信号 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 是模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓，且在频率轴上进行归一化（ f 对 f_s 归一化）。



• 2.5.4 信号重建

如果取样信号的频谱不存在混叠，让取样信号通过一理想低通滤波器，其特性为： $H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_s / 2 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_s / 2 \end{cases}$

其频谱特性为： $H(j\Omega)\hat{X}_a(j\Omega) = X_a(j\Omega), |\Omega| \leq \Omega_s / 2$

输出信号为：

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} X_a(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} T \cdot X(e^{j\Omega T}) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \right] e^{j\Omega t} d\Omega \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT) \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega \right] \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)} \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot S_a(t-nT)\end{aligned}$$

其中， $S_a(t-nT) = \frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}$ 为内插函数。

结论： 取样信号通过理想LPF后，完全可以将信号还原，而不损失任何信息。由于插值的唯一性，还原的信号也是唯一的。



例2.5.1: 对 $x_a(t)$ 进行理想取样, 取样间隔 $T = 0.25s$, 得到 $\hat{x}_a(t)$, 让 $\hat{x}_a(t)$ 通过理想低通滤波器 $G(j\Omega)$,

$G(j\Omega)$ 的表示式为: $G(j\Omega) = \begin{cases} 0.25, & |\Omega| \leq 4\pi \\ 0, & 4\pi < |\Omega| \end{cases};$

设: $x_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$, 求:

(1) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 的表达式;

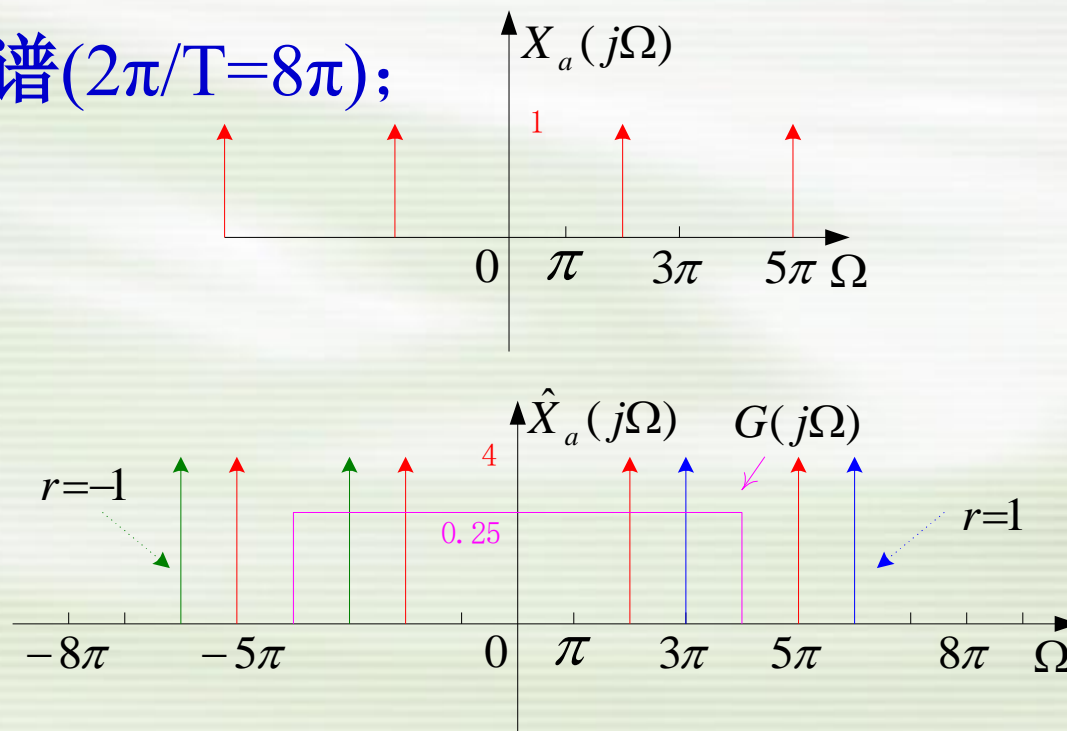
(2) 求出理想低通滤波器的输出信号 $y_a(t)$ 。

解: (1) $\because \hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$

$$\therefore \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos(2\pi nT) + \cos(5\pi nT)]\delta(t-nT)$$



(2) 如下图所示, $X_a(j\Omega)$ 为 $x_a(t)$ 的频谱, $\hat{X}_a(j\Omega)$ 为 $\hat{x}_a(t)$ 的频谱($2\pi/T=8\pi$);



由图可知, $\hat{x}_a(t)$ 通过 $G(j\Omega)$ 后其输出信号为:

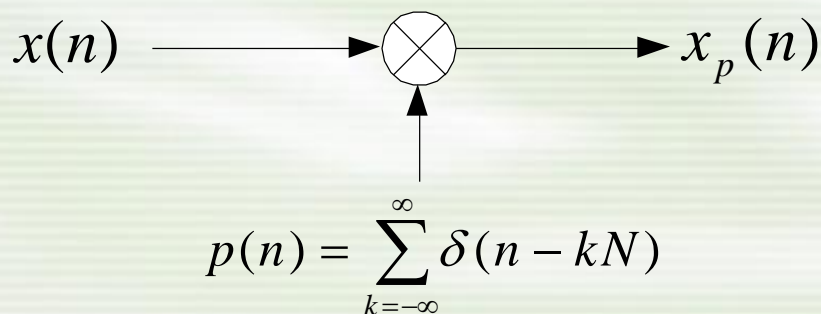
$$y_a(t) = \cos(2\pi t) + \cos(3\pi t)$$



- ## 2.5.5 离散时间信号的取样

(The Sampling of Discrete Time Signal)

1. 时域表示



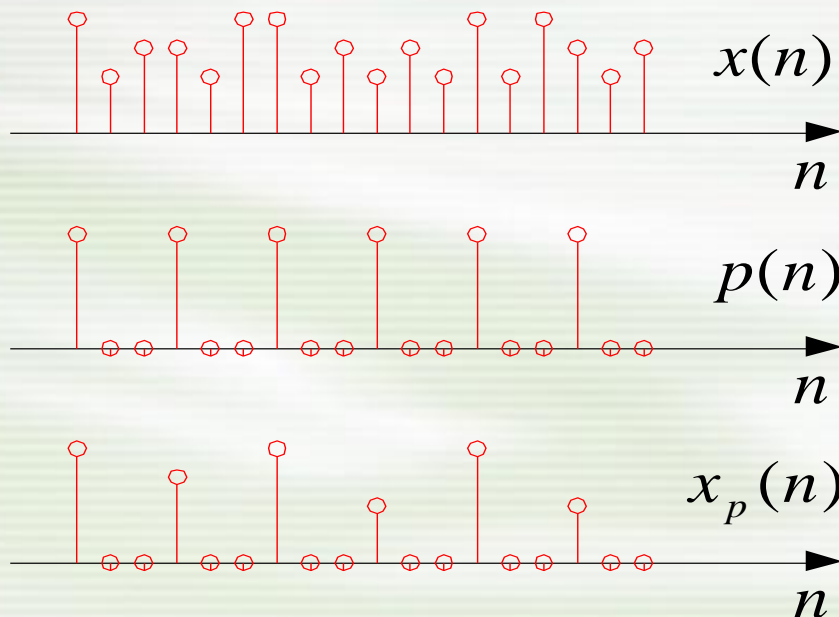
$$x_p(n) = \begin{cases} x(n), n = kN, k : \text{int} \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

上式可以看成是一个信号调制的过程，即：

$$x_p(n) = x(n)p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(Nk)\delta(n - kN) \quad \circ$$



各信号的波形如下图所示：



2. 频域表示

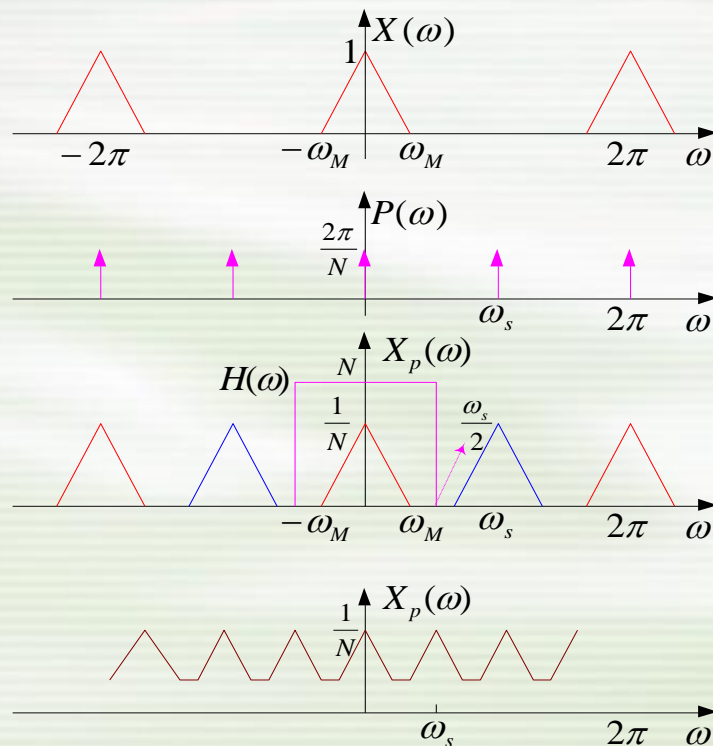
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} P(\omega) * X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\theta) X(\omega - \theta) d\theta$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad X_p(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega - k\omega_s)$$

式中 ω_s 为取样频率，且 $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$ 。



下图为离散时间信号取样的频谱和离散时间信号的恢复：



结论：离散时间序列 $x_p(n)$ 的FT $X_p(\omega)$ 是原序列 $x(n)$ 的FT $X(\omega)$ 的周期延拓，周期为取样频率 ω_s 。因此，在离散时间信号取样中，为了不发生频谱混叠失真，取样频率应满足条件： $\omega_s \geq 2\omega_M$



3. 序列 $x(n)$ 的恢复

在序列 $x_p(n)$ 的频谱没有混叠失真的情况下，用一个增益为 N ，截止频率大于 ω_M 而小于 $(\omega_s - \omega_M)$ 的低通滤波器，对 $x_p(n)$ 进行滤波，可恢复出原信号 $x(n)$ 。图中，取低通滤波器的截止频率为 $\omega_s/2$ ，其频率特性为

$$H(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$



相应的冲击响应为：

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} N \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{N}{\pi n} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} n\right)$$

恢复的序列为：

$$\begin{aligned} x_r(n) &= x_p(n) * h(n) \\ &= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \delta(n - kN) \right] * \frac{N}{\pi n} \sin\left(\frac{\omega_s}{2} n\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kN) \frac{N}{\pi(n - kN)} \sin\left[\frac{\omega_s}{2} (n - kN)\right] \end{aligned}$$



2.5.6 离散时间信号的抽取与内插

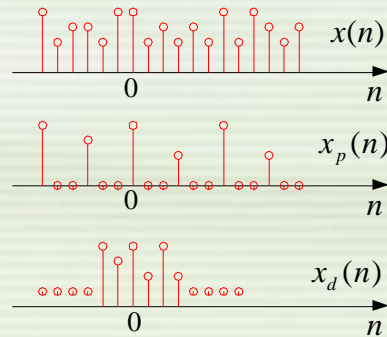
(The Decimation and Interpolation of the Discrete Time Signal)

1. 离散时间信号的抽取/减采样: $x_d(n) = x(nN) = x_p(nN)$

$x_d(n)$ 的FT为:
$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n) e^{-j\omega n / N} = X_p\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

由于在N的整倍数点外的取样值均为0，上式可写成:

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nN) e^{-j\omega n}$$

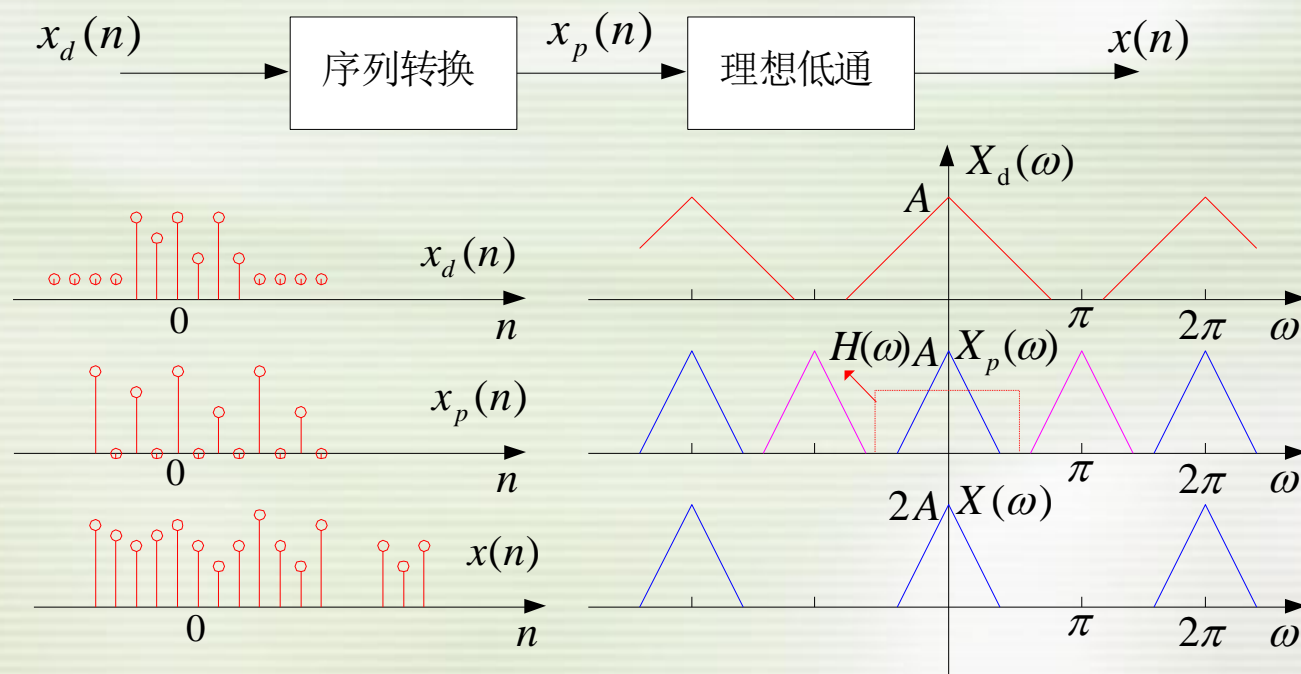


即：取样序列和抽取序列的频谱只是频率尺度不同。

注意：只有进行“过采样”，才允许进一步降低采样率，即进行“减采样”。



2.离散时间信号的内插(Interpolating)/增采样(Upsampling):
抽取的逆过程。下图所示是对序列 $x_d(n)$ 增采样得到 $x(n)$ 的过程: 先在 $x_d(n)$ 的每相邻两个序列之间插入 $N-1$ 个零值, 得到序列 $x_p(n)$, 然后用一个低通滤波器从 $x_p(n)$ 得到 $x(n)$ 内插后的序列。





§ 2.6 Z变换 (Z Transformation)

• 2.6.1 Z变换的定义

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \dots(2.7a)$$

极坐标形式: $X(re^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)r^{-n}e^{-j\omega n} \quad \dots(2.7b)$

式中 z 为复变量, 即 $z = re^{j\omega}$ 。

式(2.7a)为双边ZT, 单边ZT为:

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \dots(2.7c)$$



注意：

a. $X(z)$ 是一个Laurent级数， $x(n)$ 是系数，

一般情况下为有理分式： $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ 。

ZT的收敛域：使 $X(z)$ 收敛的 z 值，

一般为某个环域： $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ ；

ZT的零点：使 $X(z) = 0$ 的 z 值，

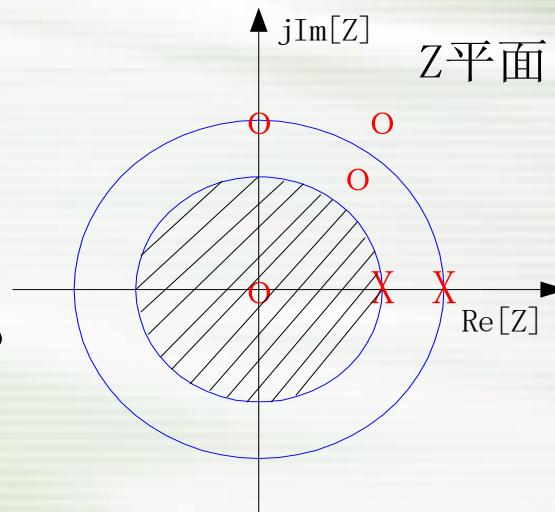
在 z 平面上用 “o”表示；

ZT的极点：使 $X(z) = \infty$ 的 z 值，

在 z 平面上用 “ \times ” 表示。



如右图所示为的
收敛域和极零点分布图。



b. 序列的ZT与FT的关系：当 $r=1$ 时，则

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

即序列在单位圆上的ZT等于序列的FT。

c. 当 $x(n)$ 为实序列时，对于FT，有： $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ ；

对于ZT有： $X(z) = X^*(z^*)$ 。

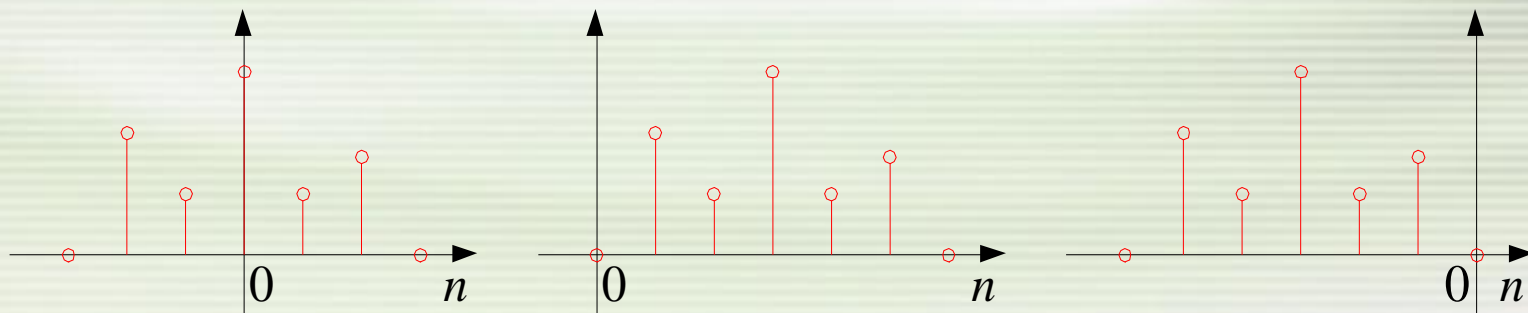


• 2.6.2 几种特殊序列的Z变换的收敛域

1. 有限长序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0, \text{others} \end{cases}, |n_1| \leq |n_2|$$

如下图所示:



其ZT为:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$



一般情况下，其收敛域为： $0 < |Z| < \infty$ ；（因为 $X(z)$ 为有限项，当 $X(z)$ 展开时，既有 z 的正幂项，又有 z 的负幂项，故： $z \neq 0$ $z \neq \infty$ ）

当 $n_1 \geq 0$ 时，收敛域为： $0 < |Z| \leq \infty$ ；（此时无 z 的正幂项）

当 $n_2 \leq 0$ 时，收敛域为： $0 \leq |Z| < \infty$ ；（此时无 z 的负幂项）

例2.6.1：求序列 $R_N(n)$ 的ZT及收敛域？

解：ZT[$R_N(n)$] $= \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$

其收敛域为：

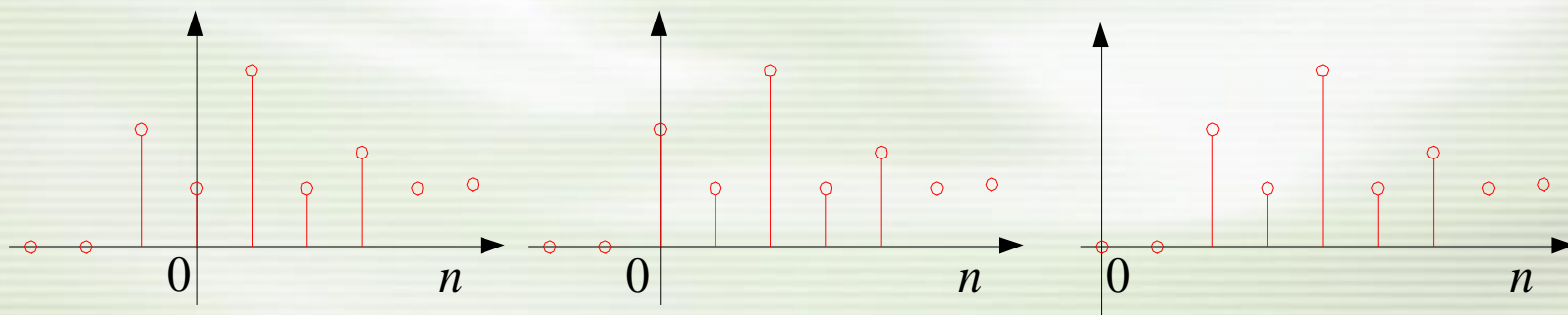
$$0 < |Z| \leq \infty$$



2. 右边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n \geq n_1 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

如下图所示：



其ZT为：

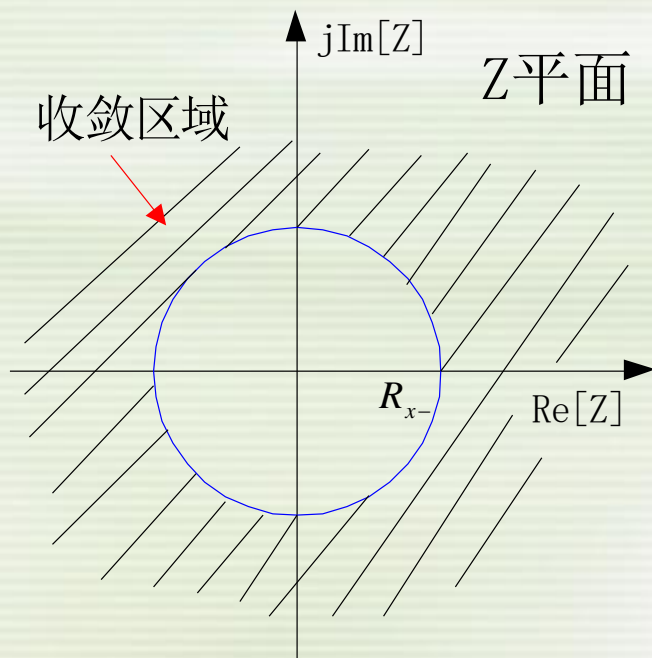
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



其收敛域是以 R_{x-} 为半径的圆的外部，

即： $|Z| > R_{x-}$ ；

收敛域如下图所示：





证明：假设级数在某个圆 $|z|=|z_1|$ 上绝对收敛，

即：
$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty$$

设 z 是这个圆外的任一点，即 $|z| > |z_1|$ ，则有：

(1) 当 $n_1 \geq 0$ 时， $\because |z|^{-n} < |z_1|^{-n} \therefore \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}| < \infty$

故级数 $\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 是收敛的。

(2) 当 $n_1 < 0$ 时，
$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x(n)z^{-n}| = \sum_{n=n_1}^{-1} |x(n)z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z^{-n}|$$

上式的第一项级数的值收敛（有限项），

参考（1）的结论可知级数收敛。



特例：因果序列： $n_1 \geq 0$ 的右边序列。其收敛域为： $R_{x-} < |Z| \leq \infty$ ；（因果序列的ZT无正幂项）

注意：对于右边序列，如存在 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ ，则该序列为因果序列。

例2.6.2：求序列 $x(n) = a^n u(n), |a| < 1$ 的ZT及收敛域？

解：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}, |az^{-1}| < 1$$

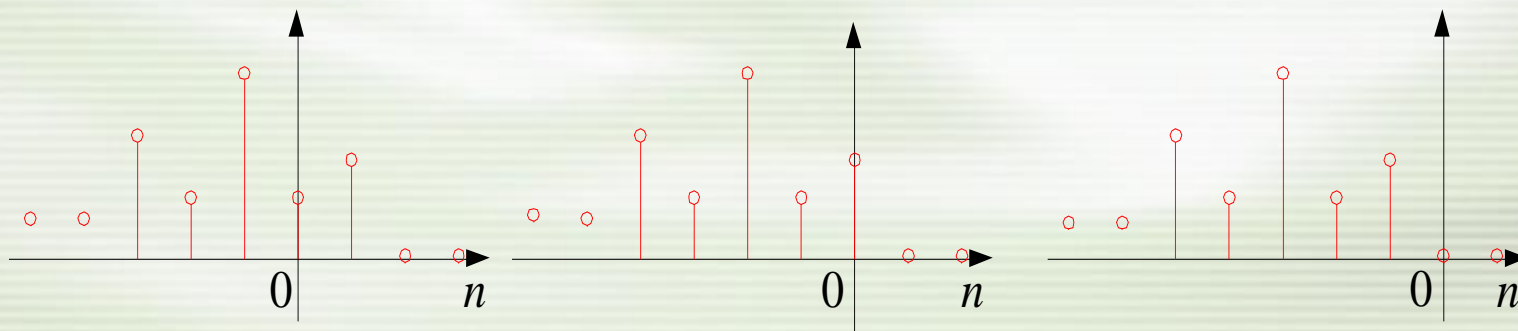
其收敛域为： $|a| < |Z| \leq \infty$



3. 左边序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), n \leq n_2 \\ 0, \text{others} \end{cases}$$

如下图所示：



其ZT为：

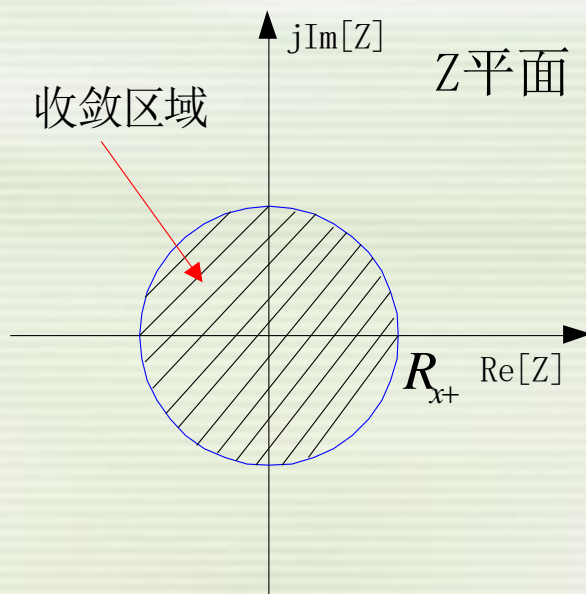
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$



其收敛域是以 R_{x+} 为半径的圆的内部,

即: $|Z| < R_{x+}$;

收敛域如下图所示:





特例：逆因果序列 $n_2 \leq 0$ 的左边序列。其收敛域为 $0 \leq |Z| < R_{x+}$ ；（因果序列的ZT无负幂项）

注意：对于左边序列，如存在 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ ，则该序列为逆因果序列。

例2.6.3：求序列 $x(n) = b^n u(-n-1)$ 的ZT及收敛域？
解：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (bz^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n = \frac{b^{-1}z}{1 - b^{-1}z}, |b^{-1}z| < 1$$

其收敛域为： $0 \leq |Z| < b$



(4) 双边序列

$n = -\infty \sim +\infty$ ，序列都有非零值；

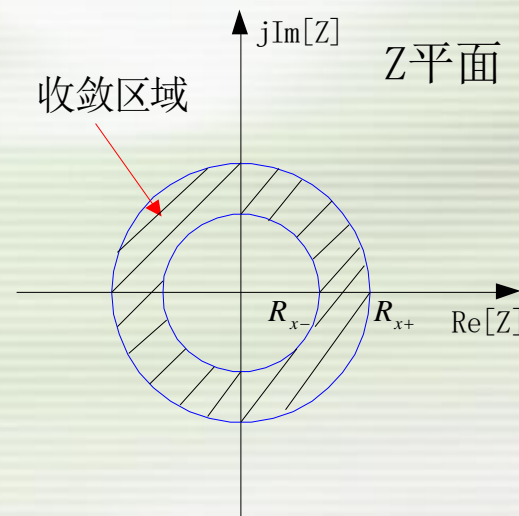
其ZT为：
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

收敛域为 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 的收敛域的公共部分，

一般情况下为： $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$ ；

如右图所示：

注意：如果 $R_{x+} < R_{x-}$ ，双边序列ZT无收敛域。





例2.6.4: 求序列 $x(n) = \begin{cases} a^n, n > 0 \\ -b^n, n < 0 \end{cases}, (a < b)$ 的ZT及其收敛域。

解: 该序列为双边序列, 其ZT为:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

其收敛域为: $a < |Z| < b$

其中:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \xrightarrow{m=-n} \sum_{m=1}^{\infty} b^{-m} z^m = b^{-1} z \sum_{m=0}^{\infty} b^{-m} z^m = \frac{b^{-1} z}{1-b^{-1} z} = \frac{-z}{(z-b)}$$



结论：

- ①序列 ZT 为有理分式的收敛域以极点为边界（包括 $0, \infty$ ）；
- ②收敛域内不能包括任何极点，可以包含零点；
- ③相同的零极点分别可能对应不同的收敛域，即：
不同的序列可能有相同的 ZT ；
- ④收敛域汇总：右外、左内、双环、有限长 Z 平面。



• 2.6.3 逆Z变换

1. 幂级数法

如果序列的ZT能表示成幂级数的形式，则序列 $x(n)$ 是幂级数 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ 中 z^{-n} 的系数。

注意：这种方法只对某些特殊的ZT有效。

如果ZT为有理函数，可用长除法将 $X(z)$ 展开成幂级数。若为右边序列（特例：因果序列），将 $X(z)$ 展开成负幂级数；若为左边序列（特例：逆因果序列），将 $X(z)$ 展开成正幂级数。



2. 部分分式法

如果 $X(z)$ 是一个有理分式（两个多项式之比），分母的阶次大于分子的阶次，且只有单阶极点，则可表示成部分分式，

即：

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

式中 $d_k (k = 1, 2, \dots, N)$ 是 $X(z)$ 的极点。

$X(z)$ 的收敛域为以最大极点的模为半径的圆的外部，即：

$$|Z| > \max\{|a_k|\} \quad A_k = X(z)(1 - d_k z^{-1})|_{z=d_k}$$

（上面两种逆Z变换的例题请见教材）



3. 留数定理法

Cauchy积分公式: $\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz = x(k), \quad \dots(2.7a)$

式中c是反时针方向环绕原点的围线。

对 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$ 两边 $\times z^{k-1}$, 并在 $X(z)$ 的收敛域内

作围线积分得:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{-n+k-1} dz \end{aligned}$$

当 $n = k$, 参考 (2.7a) 式得:
$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$



$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \dots (2.7b)$$

式中 c 是 $X(z)z^{n-1}$ 收敛域中反时针方向环绕原点的闭合曲线， n 为整数。注意：

①留数定义： $\text{Re } s[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c f(z) dz$ 是 $f(z)$ 在 z_0 的留数；

②Cauchy留数 (Residue Theorem)/积分定理(Integral Theorem)：

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个奇点 z_1, z_2, \dots, z_n

外处处解析； C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭

合曲线，则：
$$\oint_c f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \text{Re } s[f(z), z_k]$$

③由留数定理可知：围线内外的留数之和等于零；



④设在有限Z平面上, $\{a_k\} (k = 1, 2, \dots, N)$ 是 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 在围线c内的极点集, $\{b_k\} (k = 1, 2, \dots, N)$ 是 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 在围线c外的极点集。

由Cauchy留数定理, 有:

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, a_k] \quad \dots (2.7c)$$

$$\text{或: } x(n) = -\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, b_k] - \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, \infty] \quad \dots (2.7d)$$

当 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 在 $z = \infty$ 处有二阶或二阶以上的零点, 即 $X(z) \cdot z^{n-1}$ 的分母多项式的阶数比分子多项式的阶数高二阶或二阶以上时, 无穷远处的留数为零, 故有:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} s[X(z)z^{n-1}, b_k] \quad \dots (2.7e)$$

例2.6.6: 设 $X(z) = \frac{z(a-1/a)}{(z-1/a)(z-a)}$, $a < |z| < \frac{1}{a}$ 。其中 $0 < a < 1$,

求 $x(n)$ 。

解: 有两个极点 $1/a$ 和 a 。

$$\text{被积函数为 } X(z)z^{n-1} = \frac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)(z-a)}$$

当 $n \geq 0$ 时, 围线内仅包含极点 a , 使用式 (2.7c) 得:

$$x(n) = \left. \frac{(a-1/a)z^n}{(z-1/a)} \right|_{z=a} = a^n u(n)$$

当 $n < 0$ 时, 围线外仅包含一个极点 a^{-1} , 所以根据式 (2.7d) 得:

$$x(n) = -\text{Res}[X(z)z^{n-1}, a^{-1}] = -\left. \frac{(a-1/a)z^n}{(z-a)} \right|_{z=1/a} = a^{-n} u(-n-1)$$

$$\text{最后得 } x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ a^{-n}, n < 0 \end{cases}$$

或者表示为 $x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n-1)$ 。

2.6.4 Z变换的性质与定理

1. 线性

设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

$Y(z) = ZT[y(n)]$, $R_{y-} < |Z| < R_{y+}$

则 $ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$,

$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |Z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$;

一般情况下，收敛域变小。但在组合ZT可能出现新的零极点抵消的情况时，收敛域可能增大。

如： $a^n u(n)$, $a^n u(n-1)$ ，收敛域 $|Z| > a$ ；

但 $\delta(n) = a^n u(n) - a^n u(n-1)$ ，收敛域：整个Z平面。



2. 序列移位：设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

则： $ZT[x(n-m)] = z^{-m} X(z)$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

注意：

收敛域在 $z = 0 / \infty$ 处有例外，如 $\delta(n)$ 收敛域为整个 Z 平面。但 $\delta(n-1)$ 在 $z = 0$ 处不收敛， $\delta(n+1)$ 在 $z = \infty$ 处不收敛。

3. 乘以指数序列 a^n ：设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

则： $ZT[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$, $|a| R_{x-} < |Z| < |a| R_{x+}$



4. 序列的折叠：设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

$$\text{则： } ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{R_{x+}} < |Z| < \frac{1}{R_{x-}}$$

5. 复序列的共轭：设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

$$\text{则： } X^*(z^*) = ZT[x^*(n)], R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

6. $X(z)$ 的微分：设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$,

$$\text{则： } -z \frac{dX(z)}{dz} = ZT[nx(n)], R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$



7. 初值定理:

对于因果序列 $x(n)$: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$;

对于逆因果序列 $x(n)$: $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$;

注意: 对于因果序列 $x(n)$, 有: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

对于逆因果序列 $x(n)$, 有: $x(0) = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$;

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^0 x(n)z^{-n} = x(0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n}$$

8. 终值定理: 若 $x(n)$ 是因果序列, 且 $X(z)$ 除在 $z=1$ 处有一阶极点外, 全部其它极点都在单位圆内, 则: $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$



证明: $(z-1)X(z) = zX(z) - X(z) = ZT[x(n+1) - x(n)]$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n} \quad (x(n) \text{ 为因果序列})$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)]z^{-k}$$

由于 $(z-1)X(z)$ 抵消了函数 $X(z)$ 在 $z=1$ 处的可能极点,
故 $(z-1)X(z)$ 的收敛域将包括单位圆, 对上式两端求

极限得: $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-1}^n [x(k+1) - x(k)]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(0) - 0 + x(1) - x(0) + \dots + x(n+1) - x(n)]$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n)$$



9. 序列的卷积： 设 $w(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$ ，
则： $W(z) = ZT[x(n) * y(n)] = X(z) \cdot Y(z)$

$$\max(R_{x-}, R_{y-}) < |Z| < \min(R_{x+}, R_{y+})$$

证明： $W(z) = ZT[x(n) * y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)]z^{-n}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-n}$$

令 $m = n - k$ ， 则：

$$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-n} = X(z) \cdot Y(z)$$



10. 复卷积定理:

设 $w(n) = x(n) \cdot y(n)$, $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

$Y(z) = ZT[y(n)]$, $R_{y-} < |Z| < R_{y+}$; 则:

$$W(z) = ZT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv$$

其 $R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+}$

式中c是v平面收敛域中任一条环绕原点的逆时针方向的闭合曲线, v平面的收敛域为: ;

$$\max\left[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}\right]$$



证明：

$$\begin{aligned}
 W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(v)v^{n-1} z^{-n} dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(v)v^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] dv \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1} dv \quad \text{—复卷积公式}
 \end{aligned}$$

其中： c 是 $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$ 在 v 平面收敛域中的围线， $\{v_k\}$

是 c 所包含的全部极点。 $W(z)$ 在 Z 平面中的收敛域

和 $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$ 在 v 平面中的收敛域为：

$$X(z): R_{x-} < |Z| < R_{x+}$$

$$Y(z): R_{y-} < |Z| < R_{y+}$$



与之对应: $X\left(\frac{z}{v}\right): R_{x-} < \left|\frac{z}{v}\right| < R_{x+} \quad \dots(2.6d)$

$$Y(v): R_{y-} < |v| < R_{y+} \quad \dots(2.6e)$$

合并(2.6d)式和(2.6e)式得 $W(z)$ 在 Z 平面的收敛域为:

$$R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+} ;$$

将(2.6d)式变成倒数形式, 得:

$$\frac{|z|}{R_{x+}} < |v| < \frac{|z|}{R_{x-}} \quad \dots(2.6f)$$

由(2.6e)式和(2.6f)得 $X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}$ 在 v 平面中的收敛域为:

$$\max\left[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}\right]$$



例2.6.8: 已知 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的ZT如下, 用复卷积公式求

$$\text{ZT}[x(n) \cdot y(n)]。 X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}, |z| > 0.5, \quad Y(z) = \frac{1}{1-2z}, |z| < 0.5$$

解: 由复卷积公式得:

$$\begin{aligned} \text{ZT}[x(n)y(n)] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z}{v(v-0.5)(v-2z)} dv \end{aligned}$$

v 平面极点: $v=0, v=0.5, v=2z$,

$X(z)$ 收敛域为: $0.5 < |z| \leq \infty$

$Y(z)$ 收敛域为: $0 \leq |z| \leq 0.5$



所以 v 平面收敛域为: $\max[0,0] < |v| < \min[2|z|, 0.5]$,

即: $\max[\frac{|z|}{R_{x+}}, R_{y-}] < |v| < \min[\frac{|z|}{R_{x-}}, R_{y+}]$

无论 z 取何值, v 平面收敛域内只有一个极点 $v=0$,

则:

$$ZT[x(n)y(n)] = \text{Res}[X(\frac{z}{v})Y(v)v^{-1}, 0] = [\frac{z}{z-0.5v} \cdot \frac{1}{1-2v}]|_{v=0} = 1$$

收敛域为: $R_{x-}R_{y-} < |z| < R_{x+}R_{y+}$

即: $ZT[x(n)y(n)] = 1$

$$0 \leq |z| \leq \infty$$



11.Parseval公式:

设 $X(z) = ZT[x(n)]$, $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

$$Y(z) = ZT[y(n)], R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

且: $R_{x-} R_{y-} < 1 < R_{x+} R_{y+}$

$$\text{则: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv$$

式中 c 是 $X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1}$ 收敛域中环绕逆时针方向的围线, v 平面的收敛域由下式确定:

$$\max\left[\frac{1}{R_{y+}}, R_{x-}\right] < |v| < \min\left[\frac{|z|}{R_{y-}}, R_{x+}\right]$$



证明：设 $w(n) = x(n)y^*(n)$ ，应用复序列的共轭ZT的性质和复卷积公式得：

$$W(z) = ZT[x(n)y^*(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

$$R_{x-}R_{y-} < |Z| < R_{x+}R_{y+}$$

\because 已经假设 $X(z)$ 与 $Y(z)$ 的公共收敛域包括单位圆，

$$\text{即：} R_{x-}R_{y-} < 1 < R_{x+}R_{y+}$$

$\therefore W(z)$ 在单位圆上收敛，则：

$$W(z)|_{z=1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$



又因：
$$W(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$

$$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

如 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 在单位圆上收敛，则围线 c 为单位圆。

令 $v = e^{j\omega}$ ， $\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \oint_c X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

当 $x(n) = y(n)$ 时，有：
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Parseval公式的物理意义：在时域中对序列求能量与在频域中对频谱求能量是一致的。



§ 2.7 系统函数 (System Function)

• 2.7.1 定义

①设 $x(n)$, $y(n)$ 和 $h(n)$ 分别是线性非移变系统的输入、输出和单位取样响应, $X(z)$, $Y(z)$ 和 $H(z)$ 分别表示其对应的Z变换。则:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad \dots(2.7a)$$

表示该系统的系统函数。



②设一个系统的输入输出满足下列差分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

则该系统的系统函数为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \dots (2.7b)$$

式中和分别表示在Z平面上的极点和零点。

注意：系统函数由系统本身的结构决定，与系统的输入输出无关。



• 2.7.2 系统稳定性与系统函数的关系

线性非移变系统稳定的充要条件是： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

而 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$,

如果 $h(n)$ 的ZT存在，则上式右边的级数绝对收敛：

即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) \cdot z^{-n}| < \infty$

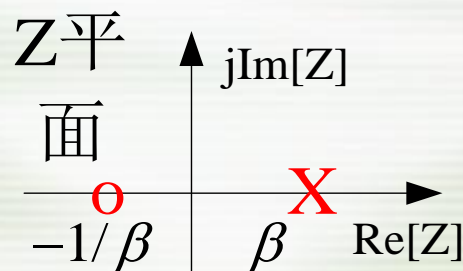
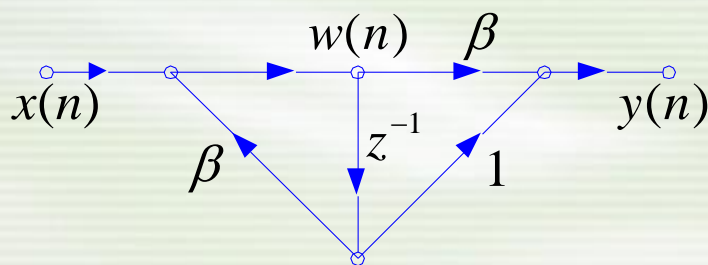
当 $|z|=1$ 时，上式变成： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

如果系统函数的收敛域包括单位圆，则系统稳定；反之亦然。

请考虑：一个稳定的因果系统的系统函数 $H(z)$ 的极点应该怎样分布？



例2.7.1：如图所示表示一个因果的线性非移变系统，求该系统的系统函数 $H(z)$ ，并画出极零点图；如果该系统是稳定的，求 β 的取值范围。



解：如图，得：

$$\begin{cases} w(n) = x(n) + \beta \cdot w(n-1) \\ y(n) = \beta \cdot w(n) + w(n-1) \end{cases}$$

对上式两边进行ZT得：

$$\begin{cases} W(z)(1 - \beta \cdot z^{-1}) = X(z) \\ Y(z) = (\beta + z^{-1})W(z) \end{cases}$$

$$\therefore H(z) = \frac{z^{-1} + \beta}{1 - \beta \cdot z^{-1}} \quad \text{极点：} z = \beta ;$$

如果该系统是稳定的，则： $\beta < 1$ 。



• 2.7.3 系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

如果系统是稳定的，令 $z = e^{j\omega}$ ，代入系统函数 $H(z)$ ，得：
$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

• 2.7.4 系统极零点对系统频率响应的影响

由式(2.7b)得：

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

式中， $A = b_0 / a_0$ ， c_r 是 $H(z)$ 的零点， d_k 是其极点。

A 参数影响传输函数的幅度大小，影响系统特性的是零点 c_r 和极点 d_k 的分布。



将上式分子分母均乘以 z^{N+M} ，得到：

$$H(z) = Az^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

设系统稳定，将 $z = e^{j\omega}$ 代入上式，得到传输函数：

$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)}$$

设 $N=M$ ，由上式得：

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} \quad \dots(2.7c)$$



在Z平面上, $e^{j\omega} - c_r$ 用一根由零点 c_r 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点B的向量 $\vec{c_r B}$ 表示,

同样, $e^{j\omega} - d_r$ 用由极点 d_r 指向 $e^{j\omega}$ 点B的向量表示, 即:

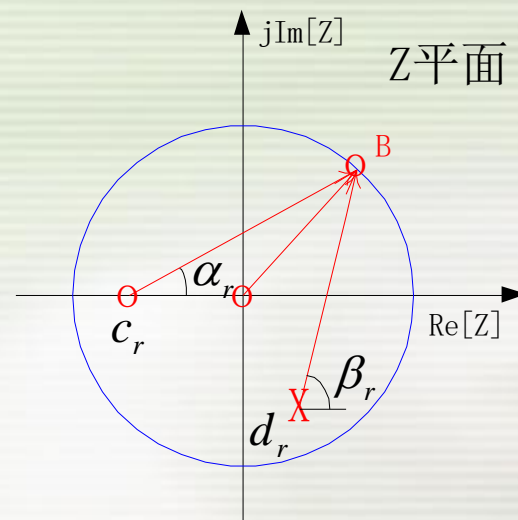
$$\vec{c_r B} = e^{j\omega} - c_r \quad \vec{d_r B} = e^{j\omega} - d_r$$

$\vec{c_r B}$ 和 $\vec{d_r B}$ 分别称为零点矢量和极点矢量, 用极坐标表示

为: $\vec{c_r B} = c_r B e^{j\alpha_r} \quad \vec{d_r B} = d_r B e^{j\beta_r}$

将 $\vec{c_r B}$ 和 $\vec{d_r B}$ 代入式(2.7c)得:

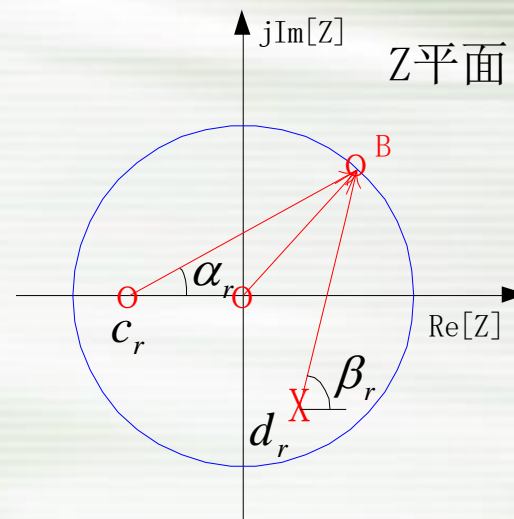
$$H(e^{j\omega}) = A \frac{\prod_{r=1}^N \vec{c_r B}}{\prod_{r=1}^N \vec{d_r B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$





$$|H(e^{j\omega})| = A \frac{\prod_{r=1}^N c_r B}{\prod_{r=1}^N d_r} \quad \dots(2.7d)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=0}^N \alpha_r - \sum_{r=0}^N \beta_r \quad \dots(2.7e)$$



系统的频率特性如右图所示：

系统的频率特性由式（2.7d）和（2.7e）确定。当向量的终点B转到极点附近时，极点矢量长度最短，峰值愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上，则幅度特性为 ∞ ，系统不稳定；当B点转到零点附近，零点矢量长度变短，幅度特性特性将出现谷值，零点愈靠近单位圆，谷值愈接近零。当零点位于单位圆上时，谷值为零。

结论：极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度，零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。



§ 2.8 全通系统与最小相位系统 (All Pass System and Minimum Phase System)

2.8.1 全通系统

1、全通系统 (Allpass System)

- 全通系统是幅度响应 $|H(e^{j\omega})| \equiv C$ (C为常数) 的系统。
- 应用范围：滤波器结构设计、多速率信号处理、滤波器组和信道相位均衡等。



- 系统函数: $H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$ (一阶系统)

对于单位取样为实系数的多阶系统, 有:

$$H_{ap}(z) = A \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_r} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}$$

其中:

$$|d_k| < 1, |e_k| < 1$$



2、全通系统的特点

(1) $H_{ap}(z)$ 的每个极点 z_p 都有一个与之配对的共轭倒数零点 $z_o = \frac{1}{z_p^*}$ 。

(2) 一阶全通系统:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}}$$

令: $a = re^{j\theta}$, 有:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}}$$



$$= e^{-j\omega} \frac{1 - re^{j(\omega-\theta)}}{1 - re^{-j(\omega-\theta)}} = e^{-j\omega} \frac{1 - r \cos(\omega-\theta) - jr \sin(\omega-\theta)}{1 - r \cos(\omega-\theta) + jr \sin(\omega-\theta)}$$

- 其相位函数为：

$$\phi(\omega) = -\omega - 2 \arctg \left[\frac{r \sin(\omega-\theta)}{1 - r \cos(\omega-\theta)} \right]$$

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \frac{-(1-r^2)}{[1 - r \cos(\omega-\theta)]^2 + r^2 \sin^2(\omega-\theta)} < 0$$

- 即：一阶全通滤波器的相位响应 ϕ 是单调递减的。



• 2.8.2 最小相位系统

1、最小相位系统、最大相位系统

(1) 最小相位系统：系统函数 $H_{\min}(z)$ 所有零、极点都在单位圆内的系统。

(2) 最小相位序列：序列 z 变换的所有零、极点都在单位圆内的序列。

(3) 最大相位系统：系统函数 $H_{\max}(z)$ 所有零点都在单位圆外的系统。

(4) 对最小相位系统，存在一个稳定的因果逆系统 $H_{\min}^{-1}(z)$ ，有：

$$H_{\min}^{-1}(z)H_{\min}(z)=1$$



2、全通系统与最小相位系统级联

- 任何系统都可以表示成一个最小相位系统和一个全通系统的级联，即：

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

证明： $H(z) = H_1(z)(z^{-1} - d^*) \quad |d| < 1$ ，一个零点在单位园外。

$$= H_1(z)(1 - dz^{-1}) \left[\frac{z^{-1} - d^*}{1 - dz^{-1}} \right]$$

$$= H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

上式中： $H_1(z)$ 和 $H_1(z)(1 - dz^{-1})$ 为最小相位系统，

$$\left[\frac{z^{-1} - d^*}{1 - dz^{-1}} \right] \quad \text{为全通系统。}$$



2. 18. 3、相位延迟和群延迟

- 对数字滤波器，有： $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$ 。

1、相位延迟 (Phase delay)

- 数字滤波器的相位延迟定义为： $T_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$ ，
表示输入是频率为 ω 的单一正弦波时的延迟时间。

例：设信号 $x(n)$ 经过系统后输出为： $y(n) = x(n-m)$

则有：

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} = e^{-j\omega m}$$

信号的延迟时间为：

$$-\frac{\phi(\omega)}{\omega} = m$$



2、群延迟 (Group Delay)

数字滤波器的群延迟或包络延迟定义为： $T_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$ ，

表示某一频率 ω 邻域内（窄带信号）的延迟性质，或者说反映了某一频率的包络的延迟时间。



本章结束

谢谢大家！