第三章 静电场和恒定电场

相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷称为静电荷。静电荷产生的电场称为静电场。

不随时间变化的电流称为恒定电流。若导体中有恒定电流，则导体内必存在恒定电场,导体内及其周围的介质必存在恒定电流产生的恒定磁场。

静电场、恒定电场和恒定磁场统称为静态场，其场量不随时间变化。

3.1 静电场的基本方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\bullet\vec{B}=0 \\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial t}=0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J} \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\bullet\vec{B}=0 \\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\vec{J} \\ \nabla\bullet\vec{B}=0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho \end{cases} \end{cases}$$

电场和磁场分离

非限定

在线性、各向同性的介质中，

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \quad \boxed{\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho \\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E} \end{cases}}$$

基本性质：
有源无旋场

微分形式（限定）

3.2 真空中的静电场

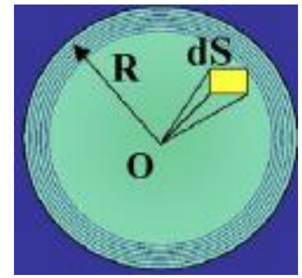
一、可从库仑定律出发证明真空中的两个基本方程式

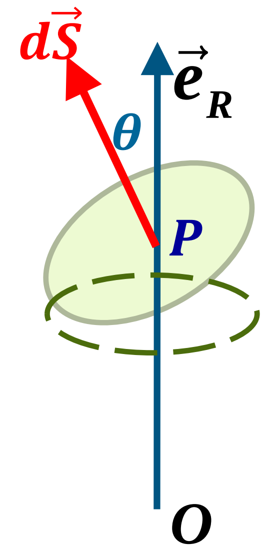
立体角的概念

平面角 $\theta = \dfrac{l}{R}$

在半径为R的球面上，

某一面元 $d\vec{S}$ 对球心O所张的立体角为 $d\Omega = \dfrac{dS}{R^2}$





整个球面对球心所张的立体角为 $\Omega = \dfrac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$

若不是球面元，

某一面元 $d\vec{S}$ 对点O所张的立体角为 $d\Omega = \dfrac{dS\cos\theta}{R^2} = \dfrac{d\vec{S}\bullet\vec{e}_R}{R^2}$

$dS\cos\theta$

$d\vec{S}$ 在球面上的投影与 R^2 的比值

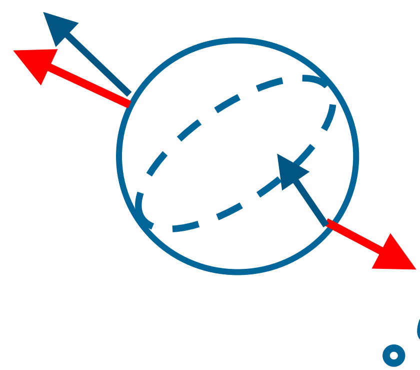
$\vec{e}_R$ 是O点到面元的距离矢量的方向单位矢量

立体角有正负之分

对任意闭合曲面，

若O点在闭合面内，则立体角为4π

若O点不在闭合面内，则立体角为0



- 先从库仑定律出发证明高斯通量定律

闭合面S对点电荷q所张的立体角

无限真空中一个点电荷：

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S} = \oint_s \varepsilon_0 \vec{E}\bullet d\vec{S} = \oint_s \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R \bullet d\vec{S} = \frac{q}{4\pi}\boxed{\oint_s \frac{\vec{e}_R \bullet d\vec{S}}{R^2}} = \begin{cases} q, & q\text{在闭合面内} \\ 0, & q\text{不在闭合面内} \end{cases}$$

若有N个点电荷，其中闭合面S内所围的点电荷有K个，则：

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S} = \oint_s \sum_{i=1}^{N} \vec{D}_i \bullet d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \oint_s \vec{D}_i \bullet d\vec{S} = \sum_{i=1}^{K} q_i$$

推广到体电荷：

$$\oint_s \vec{D}\bullet d\vec{S} = \int_v \rho_v dv \iff \boxed{\nabla \bullet \vec{D} = \rho_v} \Rightarrow \boxed{\nabla \bullet \vec{E} = \rho_v / \varepsilon_0}$$

➢ 从库仑定律出发证明旋度方程

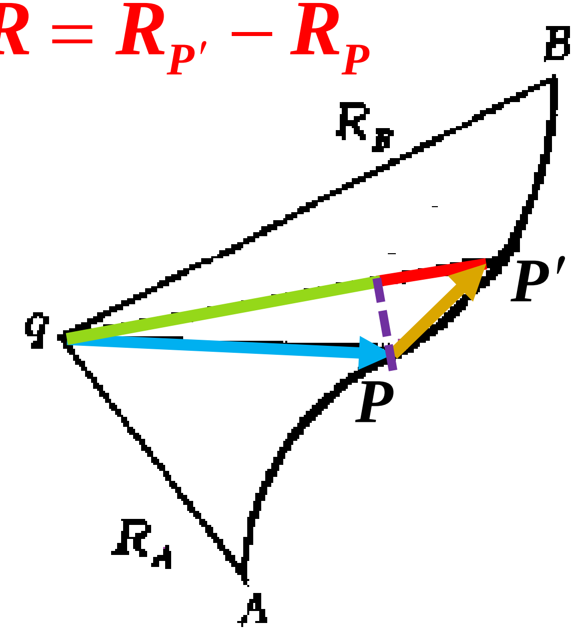
在点电荷q的电场中，A, B两点间任取一曲线，则

$$\int_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_l \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \underline{\vec{e}_R \bullet d\vec{l}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

对于闭合回路：

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_A}\right) = 0$$

$$dR = R_{P'} - R_P$$



对于多个点电荷，也有 $\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$

进一步推广到任意电荷分布的电场

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_v dv}{R^2} \vec{e}_R = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_v dv}{R}\right)$$

$$\because \nabla \times (\nabla f) = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

$$\therefore \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

二、静电场的无旋性及电位

1、电位函数ϕ：

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$$

$\vec{E}$指向电位减小最快的方向，即从高电位指向低电位。

2、物理意义：

Φ沿dl方向的电位增量

$$d\phi = \frac{d\phi}{dl} dl = (\nabla \phi \bullet \vec{e}_l) dl = \nabla \phi \bullet d\vec{l} = (-\vec{E}) \bullet d\vec{l}$$

空间任意两点A、B之间的电位差为：

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B (-\vec{E}) \bullet d\vec{l}$$

或：

$$\phi_A - \phi_B = \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

A、B两点的电位差等于将单位正电荷从A点移到B点电场力所做的功。

若取B点为参考点P $\phi_P = \phi_B = 0$ 则：

$$\boxed{\phi_A = \int_A^P \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

3、参考点的选择

原则上可任取，最好使电位函数表达式比较简单

若电荷分布在有限区域内，通常选无穷远处为参考点

若电荷分布在无限区域内，通常选有限远处为参考点

4、电位函数的表示

□ 对于点电荷，场中A、B两点的电位差为

$$\phi_A-\phi_B=\int_A^B\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_A^B\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e}_R\bullet d\vec{l}=\int_A^B\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dR=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R}\right)_{R_A}^{R_B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

取B点为参考点，则 $\phi_A=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}+C,\left(C=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_B}\right)$

取无穷远点为参考点，则 $C=0$ 电位具有简单形式 $\boxed{\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

□ 当多个点电荷分布在有限区域内，并选无穷远处为参考点，则：

$$\boxed{\phi=\sum_i\phi_i=\sum_i^N\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i}}$$

□ 体电荷、面电荷、线电荷

$$\boxed{\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho_v dv}{R}}\qquad\boxed{\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho_s ds'}{R}}\qquad\boxed{\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\rho_l dl'}{R}}$$

5、电位分布可用一系列不相交的等位面或等位线表示

$\vec{E}$与等位面或等位线必正交

$\vec{E}=-\nabla\phi$ 指向电位减小最快的方向，大小等于电位随距离的最大变化率。

三、真空中静电场的有源性--------高斯定理

$$\begin{cases}\nabla\times\overline{E}=0\\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho\end{cases}$$

$$\nabla\bullet\vec{E}=\rho_v$$

$$\oint_s\vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_v\rho_v dv$$

有源无旋场

反映了静电场与场源电荷之间的关系

静电场是有源场，静电荷就是静电场的通量源/散度源

电力线从正电荷发出而终止于负电荷

注意：

由积分形式可知，$\vec{E}$是整个带电系统内所有电荷（包含闭合面S内外）产生的场强，但$\vec{E}$的通量只与闭合面内的电荷的总量有关。

四、静电场的计算举例

通过若干算例，说明基本理论的具体运用

$$\begin{cases}\oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l} = 0 \\ \oint_s \vec{E}\bullet d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho_v dv\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\bullet\vec{E} = \rho_v/\varepsilon_0\end{cases}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$$

1、已知场求场源

$$\vec{E} \Rightarrow \rho_v = \varepsilon_0\nabla\bullet\vec{E}$$

2、已知场源求场

1）直接积分或求和

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho_v dV}{R^3}\vec{R}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}}$$

2）通过电位间接求

$$\boxed{\rho_v \Rightarrow \phi = \int_v \frac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\phi}$$

3）利用高斯定理积分形式求

$$\boxed{\int_s \vec{E}\bullet d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho_v dv \Rightarrow \vec{E}, \phi = \int_A^P \vec{E}\bullet d\vec{l}}$$

需根据电荷分布的对称性选择合适的坐标系和高斯面，将$\vec{E}$从积分符号内提出。

例3.1-1　画出电偶极子的等位线和电力线$(r>>d)$。

选无穷远处为参考点

电介质在外加电场的作用下将产生极化现象，每个被极化的分子和原子可等效看成是电偶极子。

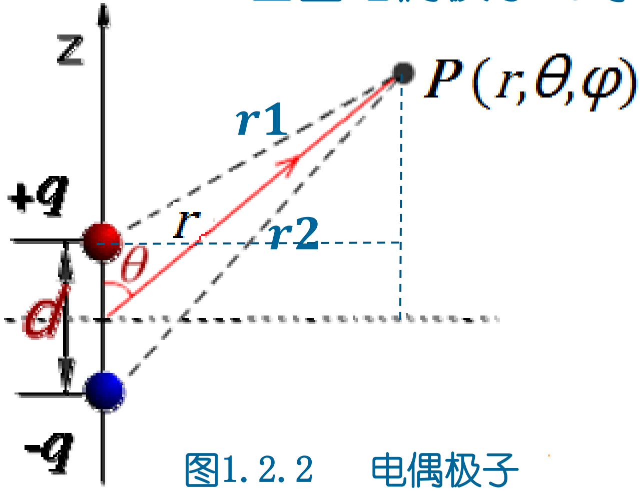


图1.2.2　电偶极子

在球坐标系中：

$$\varphi_p=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}$$

$$r_1=\left(r^2+\frac{d^2}{4}-rd\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}},\quad r_2=\left(r^2+\frac{d^2}{4}+rd\cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$r>>d$ 用泰勒级数展开，得

$$r_1=r-\frac{d}{2}\cos\theta \qquad r_2=r+\frac{d}{2}\cos\theta$$

代入上式，得

$$\phi_p=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

p表示电偶极矩，方向由负电荷指向正电荷。

$$\vec{E}_p=-\nabla\varphi=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\vec{e}_r+\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

等位线方程（球坐标系）：

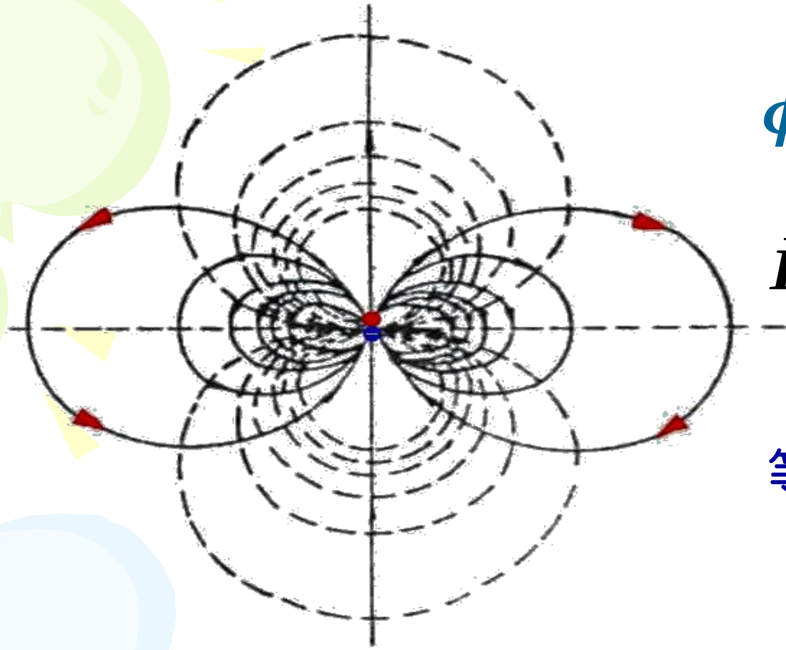
$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=C,\quad r=C'\sqrt{\cos\theta}$$

电力线微分方程（球坐标系）：

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}$$

将 E_θ 和 E_r 代入上式,解得 E 线方程为

$$r=D\sin^2\theta$$



$$\phi_p = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_p = -\nabla\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)$$

等位线方程 $r = C'\sqrt{\cos\theta}$

$\vec{E}$线方程为 $r = D\sin^2\theta$

电偶极子的等位线和电力线

电力线与等位线（面）的性质：

- **$\vec{E}$线不能相交;**
- **$\vec{E}$线起始于正电荷，终止于负电荷;**
- **$\vec{E}$线愈密处，场强愈大;**
- **$\vec{E}$线与等位线（面）正交;**

例3.1-2:计算均匀电荷面密度为ρ_s的无限大平面的电场

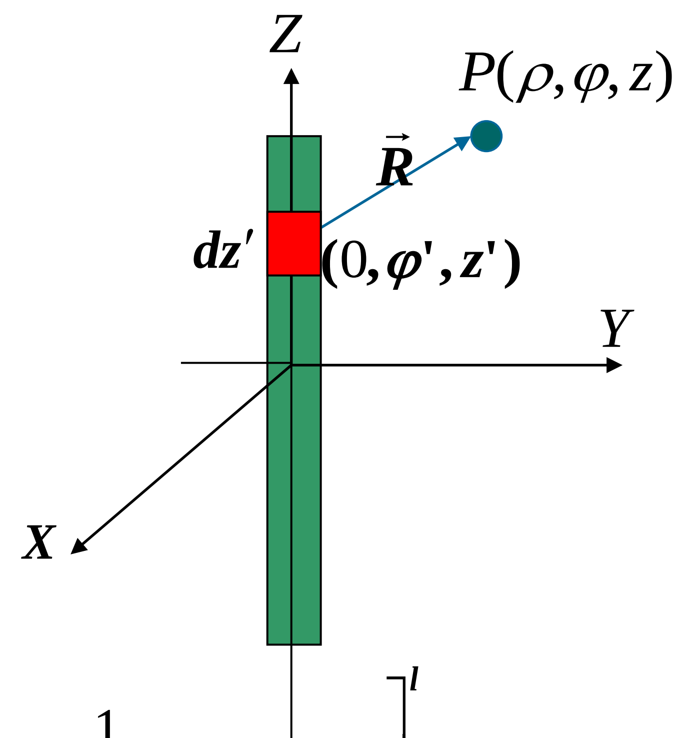
解：用高斯定理，坐标系可选直角/圆柱坐标系

$$\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\rho_s}{2}\vec{e}_z & (z>0) \\ -\dfrac{\rho_s}{2}\vec{e}_z & (z>0) \end{cases}$$

在平面边界上,$\vec{D}$发生突变: $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$

例3.1-3：真空中有一段长为2l的细直导线，电荷线密度为τ，求空间中任一点的电位。

$$\boxed{\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\rho_l dl'}{R}+C}$$



取无穷远处为电位参考点，则$C=0$

解：采用圆柱坐标系， 直导线与轴重合，

$$dl'=dz' \qquad R=\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}$$

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\tau dz'}{\left(\rho^2+\left(z-z'\right)^2\right)^{1/2}}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{1}{\left(z-z'\right)+\left(\rho^2+\left(z-z'\right)^2\right)^{1/2}}\right]_{-l}^{l}$$

$$=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\left(z+l\right)+\left(\rho^2+\left(z+l\right)^2\right)^{1/2}}{\left(z-l\right)+\left(\rho^2+\left(z+l\right)^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$l \to \infty, \phi = ?$$

由$$\phi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(z+l)+\left(\rho^2+(z+l)^2\right)^{1/2}}{(z-l)+\left(\rho^2+(z+l)^2\right)^{1/2}}\right]$$

当$l \to \infty$, 则$\dfrac{\rho}{l} << 1$ $\Rightarrow$ $\phi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{2l}{\rho}$ $\Rightarrow \phi = \infty$

参考点选择原则：

若电荷分布在有限区域内，通常选无穷远处为参考点
若电荷分布在无限区域内，通常选有限远处为参考点

取$\rho = \rho_0$有限远点B为参考点P

$$\phi_{AP} = \phi_A - \phi_P = \phi_A - \phi_B$$

$$= (\phi_A - \phi_\infty) - (\phi_B - \phi_\infty) = \phi_{A\infty} - \phi_{B\infty}$$

$$= \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{\rho_A} - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2l}{\rho_B} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho}{\rho_0}$$