7.2 导电媒质中的均匀平面波

一、导电媒质中均匀平面波的电场与磁场

引入复介电常数$\varepsilon_c = \varepsilon - j\dfrac{\gamma}{\omega}$及复波速$K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$

➢在线性、各向同性、均匀的无界、无源的导电($\gamma \neq 0$)媒质中，时谐场的场强满足的波动方程即齐次亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\vec{E}} + K^2 \dot{\vec{E}} = 0 \\ \nabla^2 \dot{\vec{H}} + K^2 \dot{\vec{H}} = 0 \end{cases}$$

与理想介质中 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 所满足的亥姆霍兹方程具有相同的形式，类似可得：

$$\begin{cases} \vec{E} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jKz}, & \dot{\vec{E}}_0 = \vec{e}_x \dot{E}_{x0} + \vec{e}_y \dot{E}_{y0} \\ \vec{H} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-jKz}, & \dot{\vec{H}}_0 = \vec{e}_x \dot{H}_{x0} + \vec{e}_y \dot{H}_{y0} \end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{E}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-jKz}\\ \vec{H}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-jKz}\end{cases} \xrightarrow[\text{令}\Gamma=jK=\alpha+j\beta]{\because K\text{为复数，}} \begin{cases}\vec{E}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-\Gamma z}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\\ \vec{H}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-\Gamma z}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\end{cases}$$

振幅呈指数衰减，电磁波是衰减波。

令$\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_r}}$，类似有：$\begin{cases}\vec{E}=\eta_c\vec{H}\times\vec{e}_z\\ \vec{H}=\dfrac{1}{\eta_c}\vec{e}_z\times\vec{E}\end{cases}$ 且 $\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}\cdot\vec{e}_z=0\\ \vec{H}\cdot\vec{e}_z=0\\ \vec{E}\cdot\vec{H}=0\end{cases}$

可见，在导电媒质中均匀平面波也是TEM波，且$\vec{E},\vec{H}$和传播方向呈右手螺旋关系。

二、导电媒质中均匀平面波的传播特性

假设：$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{e}_x E_0 e^{-\Gamma z}\\ \vec{H}=\dfrac{1}{\eta_c}\vec{e}_z\times\vec{E}=\vec{e}_y H_0 e^{-\Gamma z}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-\Gamma z} \\ \vec{H} = \dfrac{1}{\eta_c}\vec{e}_z \times \vec{E} = \vec{e}_y H_0 e^{-\Gamma z} \end{cases}$$

1、导电媒质中的电磁波参量

1）复介电常数

$$\boxed{\varepsilon_c = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega}}$$

媒质损耗正切角 $\tan\delta_c = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}$，可方便描述导电媒质的损耗特性

2）复波阻抗

$$\boxed{\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\dfrac{\gamma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1 - j\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - j\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}}} = |\eta_c| e^{j\theta}}$$

其中：$|\eta_c| = \eta\left(1 + \left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{-1/4} < \eta$，　　$0 < \theta = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right) < \dfrac{\pi}{4}$

$$\boxed{\because \eta_c = |\eta_c| e^{j\theta} = \frac{\dot{E}_0}{\dot{H}_0}}$$

说明了媒质中均匀平面波的电场和磁场有相位差，且电场超前磁场相位 θ，$0 < \theta < \pi/4$

3) 传播常数Γ、衰减常数α、相位常数β $\vec{\dot{E}} = \vec{\dot{E}}_0 e^{-\Gamma z} = \vec{\dot{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

$\boxed{\text{传播常数}: \Gamma = jK = \alpha + j\beta}$

衰减常数α：场强振幅沿波的传播方向上单位距离的振幅的衰减量。

相位常数β：仍表示沿波的传播方向上单位距离的相位变化量（rad/s）

场强随距离增加按指数规律 不断减小，若电磁波传播距离l后，振幅由$|E_1|$衰减为$|E_2| = |E_1| e^{-\alpha l}$，则衰减量为：

(1) $L = \ln \dfrac{|E_1|}{|E_2|} = \alpha l$ （单位：奈培 NP）

(2) $L = 10\lg \dfrac{S_{1av}}{S_{2av}} = 20\lg \dfrac{|E_1|}{|E_2|} = 20\lg e^{\alpha l} = 8.686\alpha l$ （单位：dB） $S_{av} \propto |E|^2$

〈1NP=8.686dB〉

$\Rightarrow$ α的单位为：NP/m或dB/m

$$\because \Gamma = \boldsymbol{jK} = \alpha + \boldsymbol{j}\beta$$

$$\begin{cases} \therefore \Gamma^2 = (\boldsymbol{jK})^2 = -\boldsymbol{K}^2 = -\omega^2\mu\varepsilon_c = -\omega^2\mu(\varepsilon - \boldsymbol{j}\dfrac{\gamma}{\omega}) = \boldsymbol{j}\omega\mu\varepsilon - \omega^2\mu\varepsilon \\ \text{且}\ (\alpha + \boldsymbol{j}\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + \boldsymbol{j}(2\alpha\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \\ 2\alpha\beta = \omega\mu\gamma \end{cases}$$

α、β与ω成复杂的非线性关系，随γ增加而增加

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = \omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]} \\ \beta = \omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]} \end{cases}}$$

对于非导电的理想介质

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \end{cases}}$$

4) 相速度V_p

$$V_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1}\right]^{1/2}<\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- 导电媒质中相速比理想介质中要小
- 导电媒质中相速随频率ω增加而增加。
- 这种相速随频率而改变的现象称为色散现象，具有色散特性的媒质成为色散媒质，如：导电媒质。
- 不同频率的信号以不同的相速传播，经过一段距离后，相位关系将发生变化，从而导致信号失真，这种失真称为色散失真。

5) 波长λ

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{2}}+1\right]}}$$

$$=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{2}}+1}\right]^{1/2}<\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- 导电媒质中的波长小于理想介质中的波长
- 导电媒质中的波长与γ有关，随γ增加而变小
- 导电媒质中的波长与频率有关，关系复杂

6) 能量关系

➢平均功率流密度

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\right)\times\left(\vec{e}_y\frac{E_0}{\eta_c}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\right)^*\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{e}_x E_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\right)\times\left(\vec{e}_y\frac{E_0^*}{\eta_c^*}e^{-\alpha z}e^{+j\beta z}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_z\frac{E_0E_0^*}{\eta_c^*}e^{-2\alpha z}\right]$$

$$\eta_c=|\eta_c|e^{j\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_z\frac{|E_0|^2}{|\eta_c|e^{-j\theta}}e^{-2\alpha z}\right]$$

$$=\vec{e}_z\frac{|E_0|^2}{2|\eta_c|}e^{-2\alpha z}\cos\theta$$

由于热损耗($\gamma\neq 0$)，平均功率流密度沿传播方向按指数规律 $e^{-2\alpha z}$ 衰减。

➢电场和磁场的平均能量密度为：

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega}}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{1-j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}}}$$

$$w_{eav}=\frac{1}{4}\varepsilon|E|^2=\frac{1}{4}\varepsilon|E_0|^2 e^{-2\alpha z}$$

$$w_{mav}=\frac{1}{4}\mu|H|^2=\frac{1}{4}\mu\frac{|E_0|^2}{|\eta_c|^2}e^{-2\alpha z}=\frac{1}{4}\varepsilon|E_0|^2 e^{-2\alpha z}\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$w_{av}=w_{eav}+w_{mav}=\frac{1}{4}\varepsilon|E_0|^2 e^{-2\alpha z}\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]$$

导电媒质中，磁场的平均能量密度大于电场的平均能量密度，这是由于 $\gamma\neq0$所引起的传导电流激发了附加磁场的结果。

➢能速

$$V_e=\frac{|S_{av}|}{w_{av}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{|\eta_c|}}{\frac{1}{4}\varepsilon\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]}=V_p$$

导电媒质中，均匀平面波的能速等于相速。

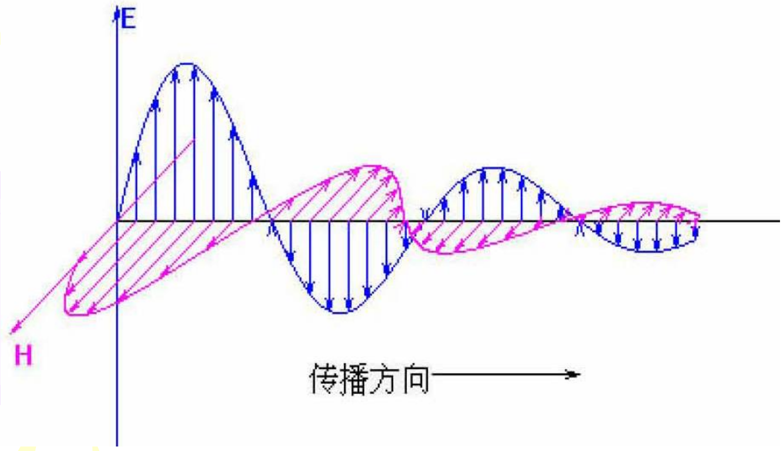
2、基本传播特性

•仍为TEM波（横电磁波），即$\vec{E}$、$\vec{H}$均与波的传播方向垂直，且三者互相垂直，满足右手螺旋关系。

•为衰减波，场强随传播距离增加按 $e^{-\alpha z}$ 指数规律衰减。频率越高，或γ越大，则α越大，衰减越快。

•为色散波，导电媒质中相速与频率有关，存在色散现象。

•电场相位超前磁场相位 $0<\theta=\dfrac{1}{2}\mathbf{arctan}\left(\dfrac{\gamma}{w\varepsilon}\right)<\dfrac{\pi}{4}$



•磁场的平均能量密度大于电场的平均能量密度。

3、媒质导电性对场的影响

媒质导电性由比值 $\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}$ 决定，不仅与媒质特性有关，还与频率有关。

(1) 良介质 $\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon}<10^{-2}\right)$

泰勒展开

$$\because \boldsymbol{K}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1-\boldsymbol{j}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1-\boldsymbol{j}\frac{\gamma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1-\boldsymbol{j}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\boldsymbol{j}\frac{\gamma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

$$\because \boldsymbol{K}=\beta-\boldsymbol{j}\alpha$$

$$\begin{cases}\alpha\approx\dfrac{\gamma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}},\quad \beta\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon},\quad \boldsymbol{V}_p\approx\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\\ \lambda\approx\dfrac{1}{\boldsymbol{f}\sqrt{\mu\varepsilon}},\quad \eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\boldsymbol{j}\dfrac{\gamma}{2\omega\varepsilon}\right)\approx\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\end{cases}$$

平面波在良介质中的传播特性与理想介质中的平面波十分相似，只有微弱的损耗引起的衰减，$\vec{E}$和$\vec{H}$时间相位差极小，近似为0。

(1) 良导体 $\left(\dfrac{\gamma}{\omega\varepsilon} > 100\right)$

1可忽略

$$\because K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(-j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\omega\mu\gamma}\,\boldsymbol{e}^{-j\pi/4} = (1 - \boldsymbol{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 - j\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(-\boldsymbol{j}\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\boldsymbol{e}^{j\frac{\pi}{4}} = (1 + \boldsymbol{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}$$

$$\begin{cases} \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\dfrac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu\gamma}, \quad V_p = \dfrac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\gamma}} = 2\sqrt{\dfrac{\pi f}{\mu\gamma}} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{\beta} \approx 2\pi\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\gamma}} = 2\sqrt{\dfrac{\pi}{f\mu\gamma}}, \quad \eta_c \approx (1+j)\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\gamma}} \end{cases}$$

- 良导体中均匀平面波为色散波
- γ越大，电磁波的传播速度越慢，波长越短

$f = 465MHz$的电磁波在真空中的相速为$3.0\times10^8 m/s$,波长为$0.645m$.

$f = 465MHz$的电磁波在铜（$\gamma = 6.8\times10^7 S/m$）中传播，其相速为$283.15m/s$,波长为$0.018mm$.

单位：西/米

- 电场相位超前磁场相位$\pi/4$，$|\eta_c| << 1$
- $w_m >> w_e$

$$w_{eav} = \frac{1}{4}\varepsilon|E_0|^2 e^{-2\alpha z} \qquad w_{mav} = \frac{1}{4}\varepsilon|E_0|^2 e^{-2\alpha z}\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

$$\boxed{\vec{S}_c = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^* = \vec{e}_z\frac{1}{2}E_0^2\sqrt{\frac{\gamma}{2\mu w}}e^{-2\alpha z}(1+j)} \qquad \boxed{\vec{E} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}}$$

- 平均功率流密度沿波的传播方向按指数规律$e^{-2\alpha z}$衰减，而场的振幅按$e^{-\alpha z}$衰减，频率越高，或γ越大，则α越大，衰减越快（趋肤效应）。

例7-2-1 有一均匀平面波，在海水中($\varepsilon_r=80, \mu_r=1, \gamma=4s/m$)，沿＋z方向传播，在z＝0处，$\vec{E}=\vec{e}_x 100\cos\left(10^7\pi t\right)\quad (V/m)$

(1)求其衰减常数α，相位常数β，相速V_p，波长λ及波阻抗η_c；

(2)确定E的振幅衰减为z＝0处的1%时的z值；

(3)写出E(z,t)和H(z,t)在z＝0.8m处的函数表示式

分析： $\because \vec{E}(z=0,t)=\vec{e}_x 100\cos(10^7\pi t) \Rightarrow \omega=10^7\pi$

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{4}{10^7\pi\times\frac{1}{36\pi}10^{-9}\times 80}=180>100,\text{为良导体}$$

(1) $$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}=\sqrt{\frac{10^7\pi\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}{2}}=8.89(Np/m)$$

$$V_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{10^7\pi}{8.89}=3.53\times 10^6(m/s)\qquad \lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{2\pi}{8.89}=0.707(m)$$

$$\eta_c=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{10^7\pi\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}}=\pi e^{j\frac{\pi}{4}}(\Omega)$$

(2) 确定$\vec{E}$的振幅衰减为$z=0$处1%时的z值。

波的振幅按$e^{-\alpha z}$规律衰减，设$z=z_1$处，波的振幅衰减为$z=0$处的1%

$$e^{-\alpha z_1}=0.01\Rightarrow z_1=-\frac{\ln 0.01}{\alpha}=\frac{4.605}{8.89}=0.518(m)$$

(3) 写出$\vec{E}(z,t)$和 $\vec{H}(z,t)$在$z=0.8m$处的函数表达式

$$\because \vec{E}(z=0,t)=\vec{e}_x 100\cos(10^7\pi t)$$

$$\boxed{\vec{H}=\frac{1}{\eta_c}\vec{e}_z\times\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 100 e^{-\alpha z}\cos(10^7\pi t-\beta z)$$

$$\vec{H}(z,t)=\vec{e}_y\frac{100}{|\eta_c|}e^{-\alpha z}\cos(10^7\pi t-\beta z-\theta) \qquad \eta_c=|\eta_c|e^{j\theta}$$

$$\therefore \vec{E}(z=0.8,t)=\vec{e}_x 100 e^{-8.89\times 0.8}\cos(10^7\pi t-8.89\times 0.8)$$

$$=\vec{e}_x 0.082\cos(10^7\pi t-7.11) \quad (V/m)$$

又$\eta_c=\pi e^{j\frac{\pi}{4}}\Rightarrow|\eta_c|=\pi,\quad \theta=\pi/4$

$$\therefore \vec{H}(z=0.8,t)=\vec{e}_y\frac{0.082}{\pi}\cos\left(10^7\pi t-7.11-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\vec{e}_y 0.026\cos(10^7\pi t-7.895) \quad (A/m)$$

例7-2-2 海水的电磁参量为$\varepsilon_r=80, \mu_r=1, \gamma=4s/m$，频率为3kHz和30MHz的电磁波在紧切海平面下侧处的电场强度为1V/m,求：

(1)电场强度衰减为1uV/m处的深度；(2)频率为3kHz的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度。

解：(1)

$$\boxed{f=3kHz\text{时}, \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{2\pi\times3\times10^{3}\times80\times\frac{1}{36\pi}10^{-9}}=3\times10^{5}>>1,\text{为良导体}}$$

$$\because e^{-\alpha l}=\frac{|E(z=l)|}{|E(z=0)|}=\frac{10^{-6}}{1}=10^{-6}$$

$$\Rightarrow l=-\frac{1}{\alpha}\ln10^{-6}=63.3m$$

$$\because \alpha\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}=\sqrt{\frac{2\pi\times3\times10^{3}\times4\pi\times10^{-7}\times4}{2}}=0.218(Np/m)$$

例7-2-2 海水的电磁参量为$\varepsilon_r=80, \mu_r=1, \gamma=4s/m$，频率为3kHz和30MHz的电磁波在紧切海平面下侧处的电场强度为1V/m,求：

(1)电场强度衰减为1uV/m处的深度；(2)频率为3kHz的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度。

$$f=3MHz\text{时}, \frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{2\pi\times3\times10^{7}\times80\times\frac{1}{36\pi}10^{-9}}=30, \text{为不良导体}$$

$$\therefore \alpha=w\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{w\varepsilon}\right)^{2}}-1\right]}\approx 21.4 \quad \Rightarrow l=-\frac{1}{\alpha}\ln10^{-6}=\frac{\ln10^{6}}{21.4}=0.645m$$

(2) 频率为3kHz的电磁波从海平面下侧向海水中传播的平均功率流密度

$$\because f=3kHz\text{时海水为良导体}, \Rightarrow \eta_c\approx\sqrt{\frac{\mu w}{\gamma}}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \vec{S}_{av}=\vec{e}_z\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{|\eta_c|}e^{-2\alpha z}\cos\theta\approx\vec{e}_z\frac{|E_0|^2}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\mu\omega}}\cos\frac{\pi}{4}$$

平均功率密度为：

$$|\vec{S}_{av}|=\frac{|E_0|^2}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{2\mu\omega}}=\frac{|E_0|^2}{4}\frac{\gamma}{\alpha}\approx4.6 \quad (W/m^2)$$

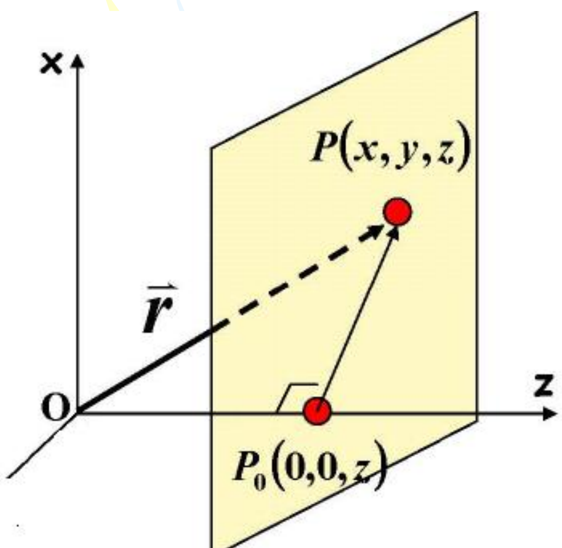
7.3 沿任意方向传播的均匀平面波

➢前面讨论中，假定均匀平面波是沿+z方向传播，得到无界理想介质中正弦平面波的场矢量可表示为：

$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-jkz},\ \vec{H}=\vec{H}_0 e^{-jkz},\quad 且\vec{E}=\eta\vec{H}\times\vec{e}_z 或\vec{H}=\frac{1}{\eta}\vec{e}_z\times\vec{E}}$$

等相位面方程为：$z=$常数，是垂直于传播方向的平面

等相位面方程的左边**可看做是：坐标原点到场点所在的等相位面的距离。**



P点处的位置矢径：$\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$

$$\Rightarrow \vec{e}_z\cdot\vec{r}=\vec{e}_z\cdot(\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z)=z$$

等相位面方程 ，z =常数 可表示为：$\vec{e}_z\cdot\vec{r}=$常数

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\vec{E}}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-jkz}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-jk\vec{e}_z\cdot\vec{r}}=\dot{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\\ \dot{\vec{H}}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-jkz}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-jk\vec{e}_z\cdot\vec{r}}=\dot{\vec{H}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{cases}}$$

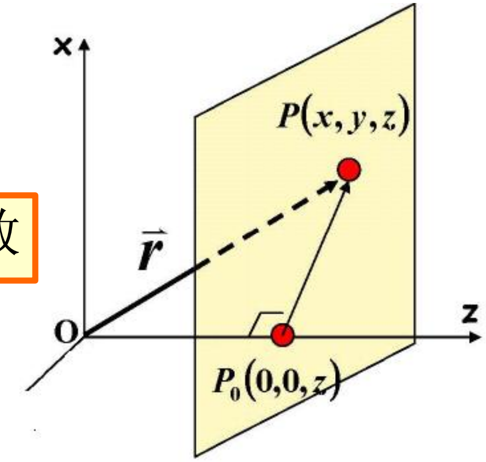
$$\boxed{\vec{k}=k\vec{e}_z}$$

等相位面方程 ， z =常数 可表示为：$\vec{e}_z \cdot \vec{r} = $常数

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jkz} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jk\vec{e}_z \cdot \vec{r}}$$

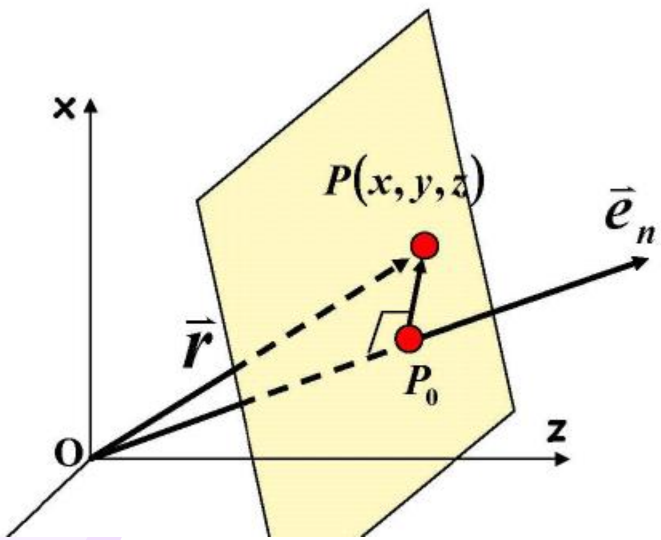
用场点位置矢量和传播方向表达等相位面方程：$\boxed{\vec{e}_n \cdot \vec{r} = \text{常数}}$

$$\vec{e}_n = \vec{e}_x \cos\alpha + \vec{e}_y \cos\beta + \vec{e}_z \cos\gamma$$



等相位面是垂直于传播方向的平面

$\vec{e}_n \cdot \vec{r}$是坐标原点到场点所在等相位面的距离



均匀平面波的一般表达式为：

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jk\vec{e}_n \cdot \vec{r}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-jk\vec{e}_n \cdot \vec{r}} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{cases}$$

波特性不变

且 $\dot{\vec{H}} = \dfrac{1}{\eta} \vec{e}_n \times \dot{\vec{E}}$

其中：$\vec{k} = \vec{e}_n k$称为波矢量

$$\vec{k} = \vec{e}_n k = (\vec{e}_x \cos\alpha + \vec{e}_y \cos\beta + \vec{e}_z \cos\gamma) k$$

$$= \vec{e}_x k \cos\alpha + \vec{e}_y k \cos\beta + \vec{e}_z k \cos\gamma$$

$$= \vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z$$

例7-3 已知空气中一均匀平面波的磁场强度复矢量为

$$\dot{\vec{H}} = \left(-\vec{e}_x A + \vec{e}_z 4\right)e^{-j\pi(4x+3z)} \quad (mA/m)$$

求：(1)波传播方向的单位矢量；(2)常数A；(3)电场强度复矢量E；(4)波长λ，平均坡印廷矢量S_{av}。

解：（1）$\boxed{\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-jk\vec{e}_n\cdot\vec{r}} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}}$ $\Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{H}}_0 = \left(-\vec{e}_x A + \vec{e}_z 4\right) \\ \vec{k}\cdot\vec{r} = \pi(4x+3z) = 4\pi x + 3\pi z \end{cases}$

$$又\ \vec{k}\cdot\vec{r} = (\vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z)\cdot(\vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z) = k_x x + k_y y + k_z z$$

$$\Rightarrow k_x = 4\pi, \quad k_y = 0,, \quad k_z = 3\pi \Rightarrow \vec{k} = \vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z = \vec{e}_x 4\pi + \vec{e}_z 3\pi$$

（2）求常数A

由于电场、磁场和传播方向相互垂直

$$\because \vec{k} = \vec{e}_n k = \vec{e}_x 4\pi + \vec{e}_z 3\pi$$

$$\because \vec{k}\cdot\vec{H} = 0 \Rightarrow (\vec{e}_x 4\pi + \vec{e}_z 3\pi)\cdot(-\vec{e}_x A + \vec{e}_z 4) = 0$$

$$\Rightarrow A = 3$$

（3）求电场强度复矢量

$$\boxed{\dot{\vec{E}} = \eta \dot{\vec{H}} \times \vec{e}_n}$$

$$\because \vec{k} = \vec{e}_n k = \vec{e}_x 4\pi + \vec{e}_z 3\pi$$

$$\Rightarrow \vec{e}_n = \vec{e}_x 0.8 + \vec{e}_z 0.6$$

$$= 120\pi(-\vec{e}_x 3 + \vec{e}_z 4)e^{-j\pi(4x+3z)} \times (\vec{e}_x 0.8 + \vec{e}_z 0.6)$$

$$\approx \vec{e}_y 1885 e^{-j\pi(4x+3z)} (mV/m)$$

$$\approx \vec{e}_y 1.885 e^{-j\pi(4x+3z)} (V/m)$$

（4）求波长、平均坡印廷矢量

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(4\pi)^2 + (3\pi)^2}} = \frac{2}{5}$$

$$\vec{S}_{av} = \vec{e}_n \frac{|E_0|^2}{2\eta} = (\vec{e}_x 0.8 + \vec{e}_z 0.6)\frac{1.885^2}{2 \times 120\pi}$$

$$= (\vec{e}_x 3.77 + \vec{e}_z 2.83) \times 10^{-3} (W/m^3)$$