第 7 章 功率谱估计的经典方法

周期图估计方法及其改进

邓田

华中科技大学
电子信息与通信学院

提纲

提纲

1. 基础知识
   - 功率谱估计问题
   - 估计理论基础知识
2. 自相关序列的估计
   - 随机过程的遍历性
   - 序列的无偏和有偏估计
3. 经典谱估计方法
   - 周期图方法
   - 周期图估计质量
4. 周期图改进方法
   - 周期图的改进
   - 改进方法的比较

平稳随机信号的自相关序列与功率谱

平稳随机信号的时频表示

- Wiener-Khinchin 定理: 均值为零的广义平稳随机信号的功率谱定义为自相关序列的傅里叶变换

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \tag{1}$$

- 自相关序列 $R_{xx}(m)$ 定义为滞后积 $x(n)x^*(n+m)$ 的数学期望

$$R_{xx}(m) \triangleq E[x(n)x^*(n+m)] \tag{2}$$

- 对于满足遍历性的随机信号，可以利用一个取样序列的滞后积的时间平均代替集合平均来求式 (2) 中的数学期望

$$R_{xx}(m) \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} [x(n)x^*(n+m)] \tag{3}$$

从理论公式到实际计算的困难

利用式 (3) 计算满足遍历性的平稳随机信号的自相关序列，然后按照式 (1) 求得功率谱 $S_{xx}(e^{j\omega})$ 理论上成立，但实际计算会有两个困难：

- 实际中不可能知道取样序列的所有时间上的无限个数据 $x(n)$，n 的取值范围从 $-\infty$ 到 ∞。
- 已知数据通常是被噪声或干扰"污染"了的，即实际得到的 $x(n)$ 是随机信号和噪声的叠加结果。

因此，只能根据有限个含有噪声的已知数据来估计随机信号的自相关序列，并进而估计出功率谱。

估计质量评价参数

已知某个被估计量的真值为 a，利用随机过程的一次实现中的有限数据来对它的估计记为 $\hat{a}$，那么 $\hat{a}$ 是一个随机变量。

- 估计的偏差B: 真值 a 与估计值的数学期望之差。$B=0$ 为无偏估计，$B \neq 0$ 为有偏估计，$B \to 0$ 为渐近无偏估计。

$$B = a - E[\hat{a}] \tag{4}$$

- 估计的方差$\sigma_{\hat{a}}^2$ 或 $Var[\hat{a}]$: 方差小意味着单次估计等于或趋近于真值的概率大。

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = Var[\hat{a}] \triangleq E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] \tag{5}$$

- 估计的均方误差$MS(\hat{a})$: 方差和偏差都趋近于零，称为一致估计。

$$MS(\hat{a}) \triangleq E[(a - \hat{a})^2] = \sigma_{\hat{a}}^2 + B^2 \tag{6}$$

估计质量评价参数（续）

- 置信概率和置信区间: 估计 $\hat{a}$ 以 $1-\beta$ 的置信概率处于 $[a-\Delta_2, a+\Delta_1]$ 范围内，称为置信区间。

$$P(a-\Delta_2 \leq \hat{a} \leq a+\Delta_1) = 1-\beta \tag{7}$$

- 有效估计: 两个无偏估计 $\hat{a}_1$ 和 $\hat{a}_2$ 的相对有效性定义为

$$RE \triangleq \left[\frac{Var(\hat{a}_1)}{Var(\hat{a}_2)} \times 100\right]\% \tag{8}$$

最大似然估计

最大似然估计（Maximum Likelihood Estimation, MLE）或最大似然法（Maximum Likelihood Method, MLM）原理

- 已知 N 个观测数据 $\boldsymbol{X}=[x(0),x(1)\cdots x(N-1)]^T$ 和它们的联合概率密度函数 $p(\boldsymbol{X},a)$。当观测列矢量 $\boldsymbol{X}$ 已知时，$p(\boldsymbol{X},a)$ 就只是特征量 a 的函数。求出使 $p(\boldsymbol{X},a)$ 最大的特征量 $\hat{a}$，作为 a 的最大似然估计。
- 可以证明，最大似然估计是渐近无偏估计，且在所有的无偏估计和渐近无偏估计中，它的方差最小。
- 例子：一个平稳随机信号符合高斯分布，其幅度的概率密度函数为

$$p_{x_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \tag{9}$$

分别求均值 m_x 和方差 σ_x^2 的最大似然估计 $\hat{m}_x$ 和 $\hat{\sigma}_x^2$。

最大似然估计（续）

- 均值m_x 的最大似然估计

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tag{10}$$

可以证明，$\hat{m}_x$ 是 m_x 的无偏估计和一致估计。

- 方差σ_x^2 的最大似然估计

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_x]^2 \tag{11}$$

可以证明，$\hat{\sigma}_x^2$ 是 σ_x^2 的渐近无偏估计和一致估计。

- 另外，最大似然估计 $\hat{m}_x$ 在置信概率为 90% 的置信区间

$$m_x - 1.65\sigma_x/\sqrt{N} \le \hat{m}_x \le m_x + 1.65\sigma_x/\sqrt{N} \tag{12}$$

提纲

均值遍历性的定义

如果一个广义平稳随机过程的取样均值 $\hat{m}_x(N)$ 在均方的意义上收敛于 m_x，则称该随机过程是均值遍历性的，且记为

$$\lim_{N\to\infty} \hat{m}_x(N) = m_x \tag{13}$$

一个随机过程的取样均值在均方意义上收敛的充分必要条件是:

- 取样均值是渐近无偏的，即

$$\lim_{N\to\infty} E[\hat{m}_x(N)] = m_x \tag{14}$$

- 取样均值的方差在 $N \to \infty$ 时趋近于零，即

$$\lim_{N\to\infty} Var[\hat{m}_x(N)] = 0 \tag{15}$$

这意味着，取样均值是随机过程均值的一致估计。

遍历性定理

均值遍历性充要条件: 令 $x(n)$ 是自协方差为 $C_{xx}(k)$ 的广义平稳随机过程，$x(n)$ 是均值遍历性的随机过程的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}C_{xx}(k)=0 \tag{16}$$

均值遍历性充分条件: 令 $x(n)$ 是自协方差为 $C_{xx}(k)$ 的广义平稳遍历性随机过程，$x(n)$ 是均值遍历性的随机过程的充分条件是

$$\lim_{k\to\infty}C_{xx}(k)=0 \tag{17}$$

自相关遍历性充要条件: 令 $x(n)$ 是自协方差为 $C_{xx}(k)$ 的广义平稳高斯随机过程，$x(n)$ 是自相关遍历性的随机过程的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}C_{xx}^2(k)=0 \tag{18}$$

自相关序列的无偏估计

设零均值广义平稳随机过程 $\{x_n\}$ 是自相关遍历性的，它的自相关序列 $R_{xx}(m)$ 的估计可写为

$$R'_N(m) \triangleq \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x^*(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq N-1 \quad (19)$$

可以证明，如果 $x(n)$ 是高斯过程，那么 $R'_{xx}(m)$ 是 $R_{xx}(m)$ 的最大似然估计，而且是无偏估计和一致估计。

自相关序列的有偏估计

如果将式 (19) 中的系数由 $\frac{1}{N-|m|}$ 改为 $\frac{1}{N}$，那么可以得到自相关序列的有偏估计 $R_N(m)$，可以证明它是渐近无偏估计。

$$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x^*(n+m), \quad -(N-1) \leq m \leq N-1 \tag{20}$$

利用自相关序列的无偏估计 $R'_N(m)$ 和有偏估计 $R_N(m)$ 的关系式

$$R_N(m) = \frac{N-|m|}{N} R'_N(m), \quad |m| \leq N-1 \tag{21}$$

可以证明，对于比 N 小很多的滞后值 $|m|$，$R'_N(m)$ 和 $R_N(m)$ 都是 $R_{xx}(m)$ 的一致估计，但是 $R_N(m)$ 的方差总小于 $R'_N(m)$ 的。因此，利用渐近无偏估计 $R_N(m)$ 进行功率谱估计更好。

提纲

计算周期图的间接方法（Blackman-Tukey 法）

设 $\{x_n\}$ 是均值为零的广义平稳自相关遍历性的随机过程，$x_N(n)$ 是它的一个取样序列 $x(n)$ 中的一段数据，$w_R(n)$ 是宽度为 N 的矩形窗

$$x_N(n) = w_R(n)x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & others \end{cases} \tag{22}$$

那么，自相关序列的有偏估计 $R_N(m)$ 可以用 $x_N(n)$ 表示为

$$R_N(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n)x_N^*(n+m), \quad |m| \leq N-1 \tag{23}$$

周期图间接方法：根据式（23）计算 $R_N(m)$，再根据下式计算功率谱

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_N(m)e^{-j\omega m} \tag{24}$$

计算周期图的直接方法（周期图法）

由式（23）可以把 $R_N(m)$ 看成是序列 $x_N n$ 与 $x_N(-n)$ 的线性卷积除以 N，若 $x_N(n)$ 的傅里叶变换为 $X_N(e^{j\omega})$，那么 $x_N(-n)$ 的傅里叶变换为 $X_N^*(e^{j\omega})$。因此，周期图 $S_{per}(e^{j\omega})$ 可以由下式计算

$$S_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega}) X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \tag{25}$$

周期图 $S_{per}(e^{j\omega})$ 是功率谱 $S_{xx}(e^{j\omega})$ 的估计，它是直接计算 $x_N(n)$ 的傅里叶变换来得到周期图，故称为周期图的直接方法。

周期图估计的数学期望

周期图的期望值 $E[S_{per}(e^{j\omega})]$ 可表示为

$$E[S_{per}(e^{j\omega})] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(m) R_{xx}(m) e^{j\omega} \tag{26}$$

式中 $w_B(m)$ 是三角窗（Bartlett 窗），即

$$w_B(m) = \begin{cases} 1 - \frac{|m|}{N}, & |m| \le N-1 \\ 0, & |m| \ge N \end{cases} \tag{27}$$

时域乘积等于频域卷积，因此

$$E[S_{per}(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\theta}) W_B[e^{j(\omega-\theta)}] \mathrm{d}\theta \tag{28}$$

式中 $W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} [\frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)}]^2$。

周期图的偏差

周期图的偏差: 由式 (28) 可知，当 N 趋近于 ∞ 时，Bartlett 窗 $W_B(e^{j\omega})$ 收敛于一个冲激响应，因此

$$\lim_{N\to\infty} E[S_{per}(e^{j\omega})] = S_{xx}(e^{j\omega}) \tag{29}$$

这意味着，$S_{per}(e^{j\omega})$ 是 $S_{xx}(e^{j\omega})$ 的渐近无偏估计。

该 Bartlett 窗是加在自相关序列上的窗，称为滞后窗，它对周期图期望值 $E[S_{per}(e^{j\omega})]$ 有两方面的影响:

- 由于 $W_B(e^{j\omega})$ 的主瓣不是无限窄的，因此导致信号中的功率扩散到带宽约为 $4\pi/N$ 的整个主瓣范围内，称为滞后窗的平滑作用。
- 由于 $W_B(e^{j\omega})$ 有许多旁瓣，这使得与信号功率谱相卷积的结果，在 $\omega_k \approx \omega_0 \pm \frac{2\pi}{N}k$ 等频率点上形成其它的谱峰，称为滞后窗的旁瓣泄露。

周期图的方差

由于周期图的方差与随机过程的 4 阶矩有关，因此要计算一般随机过程的周期图的方差是困难的。对于高斯白噪声随机过程，其周期图的方差与功率谱的平方成正比例关系

$$Var[S_{per}(e^{j\omega})] = S_{xx}^2(e^{j\omega}) \tag{30}$$

由此可见，虽然周期图是功率谱的无偏估计，但其方差并不随数据记录长度的增加而下降。任何一组数据计算得到的周期图，都是在真实功率谱附近随机起伏，而且不会随着数据记录长度的增加而减弱。

出现新的问题: 随着数据长度 N 的增大，周期图上的不相关频率点越来越靠近，因此，周期图的随机起伏就越来越密集。而且，由于周期图的方差等于常数，周期图上的随机起伏幅度也不会越来越弱。

提纲

改善周期图质量的方法

- 修正周期图法: 数据加窗，即用其它形状的窗 $w(n)$ 代替矩形窗 $w_R(n)$

$$S_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 \tag{31}$$

- Bartlett 法: 周期图的平均

$$S_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iL)e^{-j\omega n} \right|^2 \tag{32}$$

- Welch 法: 修正周期图的平均
  - 让子序列 $x_i(n)$ 有部分重叠
  - 对每个子序列都加数据窗 $w(n)$
- Blackman-Tukey 法: 周期图的加窗平滑（见课本第 417 页表 7.3）

改进方法的性能指标

- 变异性ν：归一化方差

$$\nu = \frac{Var[S_{xx}(e^{j\omega})]}{E^2[S_{xx}(e^{j\omega})]} \tag{33}$$

- 品质因数μ：变异性与分辨率之积，越小越好。

$$\mu = \nu \Delta\omega \tag{34}$$

经典谱估计方法的主要性能指标

谱估计方法	变异性 ν	分辨率 $\Delta\omega$	品质因数 μ
周期图法	1	$0.89(2\pi/N)$	$0.89(2\pi/N)$
Bartlett 法	$1/K$	$0.89K(2\pi/N)$	$0.89(2\pi/N)$
Welch 法	$\frac{9}{8K}$	$1.28(2\pi/L)$	$0.72(2\pi/N)$
Blackman-Tukey 法	$\frac{2M}{3N}$	$0.64(2\pi/M)$	$0.43(2\pi/N)$

总结

- 估计理论的基本概念。
- 自相关序列的估计方法。
- 周期图的间接和直接计算方法。
- 改善周期图的方法和性能评价。

- 未涉及的谱估计方法:
  - 以平稳随机信号的参数模型为基础的现代谱估计方法。