3.6 导体系统的电容

电容是表征导体系统特性的一个参量。

一、双导体及孤立导体的电容

双导体电容

定义：两个带电量分别为$+Q$和$-Q$的导体，它们之间的电压U与带电量Q的比值为该导体系统的电容C

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$

U大，Q大，但比值不变，与U、Q无关，只与导体的形状、尺寸、相对位置及导体间的介质有关。

孤立导体电容

定义：可看作是它是与**无穷远处**的另一个导体之间的电容，等于该导体所带电量与其对地电位差之比。

孤立导体电容可看作是双导体电容的特例。

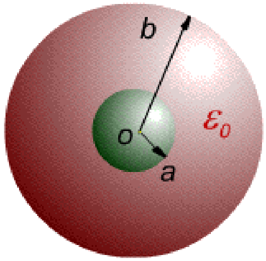
计算双导体电容的方法：

1、设两个导体上分别带有等量异号的电荷$+q$，$-q$，然后求出两导体间的电场E及电位差U，则$C = q/U$。

$$Q \to \vec{E} \quad \to U = \int \vec{E} \bullet d\vec{l} \quad \Rightarrow C = Q/U$$

2、设两导体间的电位差U，求两导体间的电场E，然后求导体上的电荷$+q$，$-q$，则$C = q/U$。

例3.6.1 试求球形电容器的电容。



球形电容器

解：设内导体的电荷为 q则

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \qquad \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{e}_r, \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

同心导体间的电压 $$U = \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}$$

球形电容器的电容 $$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

如何求孤立球形导体的电容?

当 $b \to \infty$ 时 $$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$ (孤立导体球的电容)

3.7 静电场的能量及能量密度

在静电场中，电荷从一点移动到另一点，则电场力会做功，电场力做功表明电场具有能量，电场力做的功转化为电荷的电位能的改变。与重力场相似。

静电场具有能量。

可根据建立电场所需作的功来计算带电系统中的电场的能量。

一、体电荷系统的能量

假设：

- 电荷系统中的介质是线性的；
- 建立电场过程缓慢（忽略动能与能量辐射）。
- 带电体上电荷密度与场点处电位的最终值为ρ_0、ϕ_0，在充电过程中，ρ与ϕ的增长比例为 m，$0\leq m \leq 1$。

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$$

假设：

- 电荷系统中的介质是线性的；
- 建立电场过程缓慢 （忽略动能与能量辐射）。
- 带电体上电荷密度与场点处电位的最终值为 ρ_0、 ϕ_0，在充电过程中，ρ与ϕ的增长比例为 m， $0\leq m\leq 1$。

取无穷远点为参考点，则某点的电位值等于将该点处的单位正电荷移到无穷远处，电场力所作的功，或将单位正电荷从无穷远处移到该点处，外力所作的功。

t 时刻，场中P点的电位为$\phi'(x,y,z)$，若将电荷增量dq 从无穷远处移至该点，

外力作功 $$dA=\phi'(x,y,z)dq$$

这个功转化为静电能量储存在电场中。

t 时刻电位为 $$\phi'(x,y,z)=m\phi_0(x,y,z),$$

t时刻电荷密度增量为 $$d\rho=d\left[m\rho_0(x,y,z)\right]=\rho_0(x,y,z)dm,$$

电荷增量为 $$dq=d\rho dV=\rho_0 dmdV$$

故 $$W_e=A=\int\varphi' dq=\int_0^1 mdm\int_V\rho_0(x,y,z)\varphi_0(x,y,z)dV=\frac{1}{2}\int_V\rho_0\phi_0 dV$$

体电荷系统的静电能量 $W_e = \dfrac{1}{2}\int_V \rho\phi dV$

面电荷系统 $W_e = \dfrac{1}{2}\int_S \sigma\phi dS$

点电荷系统 $W_e = \dfrac{1}{2}\sum_{K=1}^{n}\phi_K q_K$

线电荷系统 $W_e = \dfrac{1}{2}\int_L \tau\phi dl$

注意：

1、只适用于静电场能量求解

2、公式中 $\dfrac{1}{2}\rho_v\phi$ 不表示电场能量密度

3、公式中 ρ_v 为空间中自由电荷分布

4、积分范围V为整个空间，但可退化到电荷分布区域

二、能量密度

设空间某有限区域V中有体密度 ρ_v 的体电荷，则静电场总能量为：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho_v \phi dv = \frac{1}{2}\int_V (\nabla\bullet\vec{D})\phi dv$$

$$\nabla\bullet(\phi\vec{D}) = \phi\nabla\bullet\vec{D} + \nabla\phi\bullet\vec{D}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \nabla\bullet(\phi\vec{D})dv - \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\bullet\nabla\phi dv$$

将体积分扩展到整个空间

$$= \frac{1}{2}\oint_s \phi\vec{D}\bullet d\vec{s} - \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\bullet\nabla\phi dv$$

$$\phi = \int_v \frac{\rho dV'}{4\pi\varepsilon R} \qquad \vec{D} = \frac{1}{4\pi}\int_{v'} \frac{\rho_v dV'}{R^2}\vec{e}_R$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\bullet\nabla\phi dv$$

$$d\vec{s} = \vec{e}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\phi \propto \frac{1}{R}, D \propto \frac{1}{R^2}, ds \propto R^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\bullet\vec{E}dv$$

凡是静电场不为0的空间都存储着静电能。

注意：1、式中的体积分应遍及存在电场的全部空间

2、式中的被积函数为能量密度。 $w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\bullet\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 (J/m^3)$

例3-7-1：真空中一半径为a，介电常数为ε的介质球内均匀分布体密度为ρ_v的电荷，求静电能量。

分析：可用两种方法求解

$$\begin{cases} 1)W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho_v \phi dv \\ 2)W_e = \int_V \vec{D} \bullet \vec{E} dv \end{cases}$$

关键是求出E或ϕ

解：利用高斯定理，可求得

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_v r}{3\varepsilon}\vec{e}_r & r < a \\ \frac{\rho_v a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & r > a \end{cases}$$

$r < a$

$$\phi = \int_r^\infty \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_r^a \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_a^\infty \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$= \frac{\rho_v}{6\varepsilon}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{a^2 \rho_v}{3\varepsilon_0}$$

法1：由场量求静电能量

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2 dv \quad =\frac{1}{2}\int_{in}\varepsilon E_1{}^2 dv+\frac{1}{2}\int_{out}\varepsilon E_2{}^2 dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}\varepsilon E_1^2 r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=a}^{\infty}\varepsilon E_2^2 r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$=\int_{r=0}^{a}\left(\frac{\varepsilon E_1{}^2}{2}\right)4\pi r^2 dr+\int_{r=a}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon E_2{}^2}{2}\right)4\pi r^2 dr$$

$$=2\pi\rho_v a^5\left(\frac{1}{45\varepsilon}+\frac{1}{9\varepsilon_0}\right) \quad (\mathrm{J})$$

法2：由场源求静电能量

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V \rho\phi dv=\frac{1}{2}\int_{in}\rho\phi dv \quad =\frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}\rho\phi r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$=2\pi\rho_v a^5\left(\frac{1}{45\varepsilon}+\frac{1}{9\varepsilon_0}\right) \quad (J)$$