华中科技大学 2018 年春季期末复习

知识点归纳

注意 以下所提及的课本是指：华中科技大学数学系 段志文，韩淑霞．数学物理方程与特殊函数[M]．第二版．北京，高等教育出版社．2008 年 1 月．

一、用到的高数知识：

1. 二阶常系数线性齐次常微分方程$y''+py'+qy=0$(p,q为常数)的通解公式：

   该方程的特征方程为$r^2+pr+q=0$

   1). $\Delta=p^2-4q>0$，方程通解为$y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$

   2). $\Delta=p^2-4q>0$，方程通解为$y=(A+Bx)e^{rx}$

   3). $\Delta=p^2-4q>0$，$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，方程通解为$y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

【固有函数问题中λ分三种情况讨论就是来源如此】

2. 一阶线性常微分方程$y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$的通解公式：

   $y(x)=e^{-A(x)}(\int e^{A(x)}b(x)dx+C)$， 其中$A(x)$为$a(x)$的原函数，$C$为任意常数

   特别的，若$b(x)=0$， 则通解公式为$y=Ce^{-A(x)}$

【有限长杆热传导问题中解$T'(t)+\lambda a^2T(t)=0$用到此公式】

3. 关于方程$r^2R''+rR'=0$的求解

   令$R'(r)=p(r)$，则$r^2p'+rp=0$，即$p=\frac{C_1}{r}$

   所以$R'(r)=\frac{C_1}{r}$，则$R(r)=C_1\ln r+C_2$，其中，c,c_1,c_2 是任意常数

【课本 p44 页$\lambda=0$得到通解为$R_0(r)=C_0\ln r+D_0$的原因】

4. Euler 方程$r^2R_{rr}+rR_r-n^2R=0$的求解

   作变换$r=e^t\Rightarrow t=\ln r$，于是原方程变为$R_{tt}-n^2R=0\Longrightarrow R=C_nr^n+D_nr^{-n}$

【p44 页 Euler 方程的求解】

5. 卷积与卷积定理

   1) 卷积$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

2) 卷积定理：$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$，　$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)\cdot F_2(s)]=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]*\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$

6. Fourier 系数公式

设周期为$2l$的函数$f(x)$可以展开成 Fourier 级数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中 Fourier 系数满足：

$$a_n=\frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\qquad b_n=\frac{2}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\qquad (n=0,1,2,\dots)$$

第二章主要内容

1. 对一维波动方程和热传导方程的定解问题而言：

（1）$\begin{cases}\text{分离变量法：方程齐次，边界条件齐次}\\\text{固有函数法：方程非齐次，边界条件齐次}\\\text{作辅助函数法：边界条件非齐次}\end{cases}$

（2）分离变量法中几种常见的固有函数系的形式：

1）$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\quad\longrightarrow\quad\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}(n=1,2,\dots)$

2）$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0\quad\longrightarrow\quad\left\{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}(n=1,2,\dots)$

3）$u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0\quad\longrightarrow\quad\left\{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}(n=1,2,\dots)$

4）$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0\quad\longrightarrow\quad\left\{\cos\frac{n\pi x}{l}\right\}(n=0,1,2,\dots)$

以上几种形式适用于一维振动方程、热传导方程和矩形域上的 Laplace 方程。

5）圆域上的 Laplace 方程对应的固有函数系为 $1,\cos\theta,\sin\theta,\cos2\theta,\sin2\theta,\dots\ \cos n\theta,\sin n\theta,\dots$

（3）作辅助函数法中相应的辅助函数$w(x,t)$的表达式：

1）$u(0,t)=u_1(t),\ u(l,t)=u_2(t)\quad\longrightarrow\quad w(x,t)=\frac{x}{l}[u_2(t)-u_1(t)]+u_1(t)$

2）$u(0,t)=u_1(t),\ u_x(l,t)=u_2(t)\quad\longrightarrow\quad w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$

3）$u_x(0,t)=u_1(t),\ u(l,t)=u_2(t)\quad\longrightarrow\quad w(x,t)=u_1(t)x+u_2(t)-lu_1(t)$

4）$u_x(0,t)=u_1(t),\ u_x(l,t)=u_2(t)\quad\longrightarrow\quad w(x,t)=\frac{u_2(t)-u_1(t)}{2l}x^2+u_1(t)x$

以上4种辅助函数的情形对一维振动方程和热传导方程都适用

特别注意 当方程中的自由项 f 和边界条件中的u_1,u_2 都与自变量 t 无关，只是x的函数时，则可选取适当的也与t无关的辅助函数$w(x)$，通过函数代换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$,使得到的关于$v(x,t)$的方程与边界条件同时化成齐次的【详见p59例2】。

2、对于二维 Laplace 方程的边值问题而言：

均用分离变量法$\begin{cases}\text{圆域：} & \text{采用极坐标}\\ \text{矩形域：} & \text{采用直角坐标}\end{cases}$

3、对于二维 Poisson 方程的边值问题而言：

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=F(r,\theta) \quad (0<r<r_0)\\ u|_{r=r_0}=f(\theta)\end{cases}$$

(P)

思路一：找出此 Poisson 方程的一个特解$w(r,\theta)$，令$u(r,\theta)=v(r,\theta)+w(r,\theta)$，则转化为求$v(r,\theta)$的 Laplace 方程：

$$\begin{cases} v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0, \quad (0<r<r_0)\\ v|_{r=r_0}=f(\theta)-w(r_0,\theta)\end{cases}$$

对于此方程，可用分离变量法

思路二：将问题 P 看成两部分，令$u(r,\theta)=v(r,\theta)+w(r,\theta)$，$v(r,\theta)$和$w(r,\theta)$分别满足

$$\begin{cases} v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=F(r,\theta), \quad (0<r<r_0)\\ v|_{r=r_0}=0\end{cases}$$

(P1) $$\begin{cases} w_{rr}+\frac{1}{r}w+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0, \quad (0<r<r_0)\\ v|_{r=r_0}=f(\theta)\end{cases}$$ (P2)

(P1)可用固有函数法求解，（P2）可用分离变量法求解

第三章主要内容（适用于无界区域）

1、无限长弦自由振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (-\infty<x<+\infty,t>0)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x)\end{cases} \qquad (*)$$

的 D'Alembert 解公式

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)d\alpha$$

其中方程（*）的通解公式为$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$

2、无限长弦强迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

的解为公式

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

3、积分变换法的应用

会用 Fourier 变换和 Laplace 变换求解定解问题（课本上例子，课后习题及记住常见的变换和逆变换）

第四章主要内容（二维、三维 Laplace 方程边值问题）

1、二维、三维 Laplace 方程的基本解分别为

$$u_0 = \ln\frac{1}{r} \qquad\qquad u_0 = \frac{1}{r} \qquad (r \neq 0)$$

2、空间上 Green 第二公式

$$\iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \iint_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

平面上 Green 公式

$$\iint_{D} (u\Delta v - v\Delta u)d\sigma = \int_{C} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\mathrm{d}s$$

3、调和函数的积分表达式

调和函数是指这样的$u(x,y,z)$，它满足

$$\nabla^2 u = 0$$

三维情形

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\ \frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$$

二维情形

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_C\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\ln\frac{1}{r_{MM_0}}\ \frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds$$

4. 调和函数的基本性质

性质 1

$$\iint_\Gamma\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

性质 2（平均值定理）

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_{\Gamma_a}udS$$

性质 3（极值原理） 若函数$u(x,y,z)$在Ω内调和，在$\Omega+\Gamma$上连续，且不为常数，则它的最大值、最小

值只能在边界Γ上达到。

5. 利用极值原理证明 Laplace 方程或 Poisson 方程 Dirichlet 问题解的唯一性【p103】

学会结合极值原理和 Dirichlet 问题解的唯一性处理问题【如 Green 函数性质 5、p118 的第 8 题】

6. Green 函数法（求解 Laplace 方程的狄利克雷问题）

（1）三维情形

$$\begin{cases}\Delta u(x,y,z)=0, & (x,y,z)\in\Omega\\ u|_\Gamma=f(x,y,z)\end{cases}$$

其解可表示为

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma f(x,y,z)\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

其中，$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-v$，且$u$，$G$在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数。

（2） 二维情形

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in\Omega\\ u|_C=f(x,y)\end{cases}$$

其解可表示为

$$u(M_0)=-\int_C f(x,y)\frac{\partial G}{\partial n}ds$$

其中，$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-v$，且$u$，$G$在$\Omega+\Gamma$上具有一阶连续偏导数。

7. Green 函数的应用

（1）求解上半空间$z>0$的狄利克雷问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 & (z>0) \\ u|_{z=0}=f(x,y), & -\infty<x,y<+\infty \end{cases}$$

上半空间的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

得到定解问题的解为

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)z_0dxdy}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2]^{\frac{3}{2}}}$$

（2）求解上半平面的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & (y>0) \\ u|_{y=0}=f(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

上半平面的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\ln\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

解的积分表达式为

$$u(M_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)y_0dx}{(x-x_0)^2+{y_0}^2}$$

【学会用同样的思路解决下半平面、左（右）半平面的 Dirichlet 问题】

（3）求解球域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 & (x,y,z)\in\Omega \\ u|_{\Gamma}=f(x,y,z) \end{cases}$$

其中Ω是以O为心，R为半径的球域，边界为Γ

球域上的 Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{R}{r_{OM_0}}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)$$

解的积分表达式为

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Gamma}f(x,y,z)\frac{R^2-{r_0}^2}{(R^2+{r_0}^2-2Rr_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}dS$$

第五章主要内容（Bessel 函数的应用，分离变量法的思想）

1. n阶 Bessel 方程的固有值问题

$$\begin{cases} r^2F''+rF'+(\lambda r^2-n^2)F=0 \\ F(R)=0, \quad |F(0)|<+\infty \end{cases}$$

n阶 Bessel 方程的通解可表示为

$$F(r)=CJ_n(\sqrt{\lambda}r)+DY_n(\sqrt{\lambda}r)$$

且有$Y_n(0)$为无穷大

固有值和固有函数分别为

$$\lambda_m{}^{(n)}=\left(\frac{\mu_m{}^{(n)}}{R}\right)^2, \qquad F_m(r)=J_n\left(\frac{\mu_m{}^{(n)}}{R}r\right)(m=1,2,\dots)$$

2. n阶 Bessel 函数的递推公式

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$$

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$$

特别的，

$$J_0'(x)=-J_1(x), \qquad \frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x)$$

3. Fourier-Bessel 级数

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}C_mJ_n\left(\frac{\mu_m{}^{(n)}}{R}r\right)$$

其中系数C_m由下式确定

$$C_m=\frac{\int_0^R rf(r)J_n\left(\frac{\mu_m{}^{(n)}}{R}r\right)dr}{\frac{R^2}{2}J_{n+1}^2(\mu_m{}^{(n)})}$$

4. Bessel 函数的应用（分离变量法），书上例子。

想）

大

复习建议（仅供参考）

1. 建议复习时间**最少有一周**
2. 掌握好一些固定题型，如固有值、固有函数问题，分离变量法、固有函数法、作辅助函数法，达朗贝尔解公式，积分变换法，格林函数的应用，贝塞尔函数的应用等。掌握好知识点归纳里的内容，要考的知识几乎全部归纳。
3. 重视老师课堂上特意讲的题型，以及最后一节课提醒的复习内容（包括书本例题与课后习题）。
4. 最主要是多做题，每年题型差不多，通过做题强化知识记忆，建议每套题都做一下，实在没时间——**我不信你提前一个星期复习（或开始学习）会没有时间**。
5. 祝大家复习愉快，取得好成绩。
6. **如果你是属于“不到最后一刻绝不复习”的人**：如果你提前一个星期开始，每天少玩点游戏（你平时都玩了那么多了，看了那么多视频和闲书，我不信你还缺期末考试前这一点娱乐量），坚持抱住学霸大腿的基本理念，贯彻落实“不懂就看书再死缠学霸”的基本方针，那么你在考试之前一两天就不需要任何熬夜复习、起早贪黑大搞自习等非常手段，也不用幻想师生情谊，甚至还有可能获得高分。而如果你现在还要作死，继续打游戏看视频看小说，那么你考前一天就要熬夜通宵，第二天还必须拖着疲惫不堪的身躯绷紧心里的每一根弦，却只能勉强过关。

继续拖延或现在开始，你自己掂量掂量吧。

祝大家考试顺利！