第一章

矢量分析及场论基础

标量场与矢量场

三种常用的正交坐标系

标量场的梯度

矢量场的通量与散度

矢量场的环量与旋度

亥姆霍兹定理

§1.1 矢量的基本概念

一、 标量和矢量

标量：只有大小而无方向的量，如温度、时间、质量等；

矢量：既有大小又有方向且满足平行四边形合成法则的量，如力、速度、力矩等；

二、单位矢量与矢量的分量

- 单位矢量：长度（即模）为1的矢量
- 任意矢量： $\vec{A}=\vec{e}_x A_x+\vec{e}_y A_y+\vec{e}_z A_z$

其方向为： $\vec{e}_A=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\dfrac{\vec{A}}{A}$

其模为： $|\vec{A}|=A=\left(A_x^2+A_y^2+A_z^2\right)^{1/2}$

三、位置矢量和距离矢量

- 点P的位置矢量，即从原点O指向P点的矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

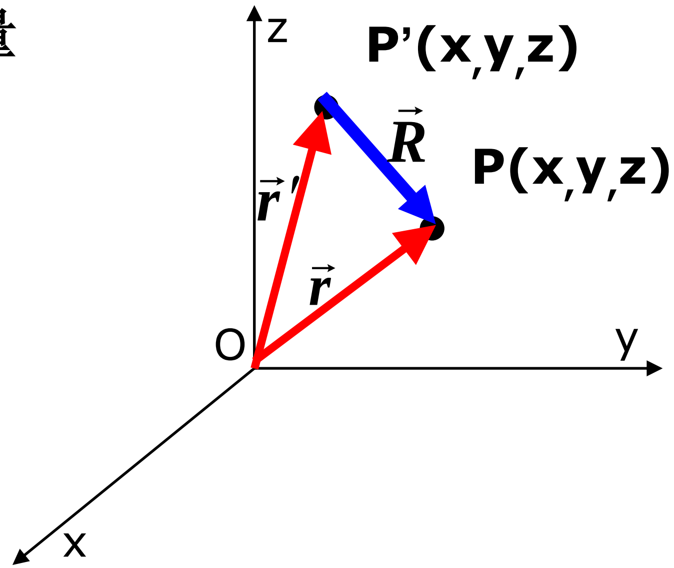
- 点P’的位置矢量

$$\vec{r}' = \vec{e}_x x' + \vec{e}_y y' + \vec{e}_z z'$$

- 点P’至点P的距离矢量

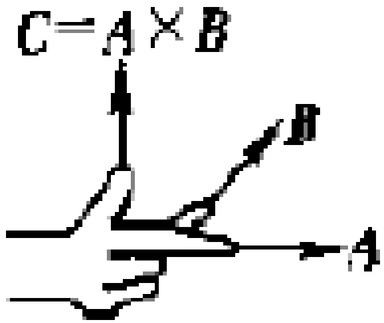
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$= \vec{e}_x (x - x') + \vec{e}_y (y - y') + \vec{e}_z (z - z')$$



四、矢量的代数运算

- 矢量加法、矢量减法
- 点积/标量积 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$
- 叉积/矢量积 $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_n AB\sin\theta$
- 其他见附录（P.456）

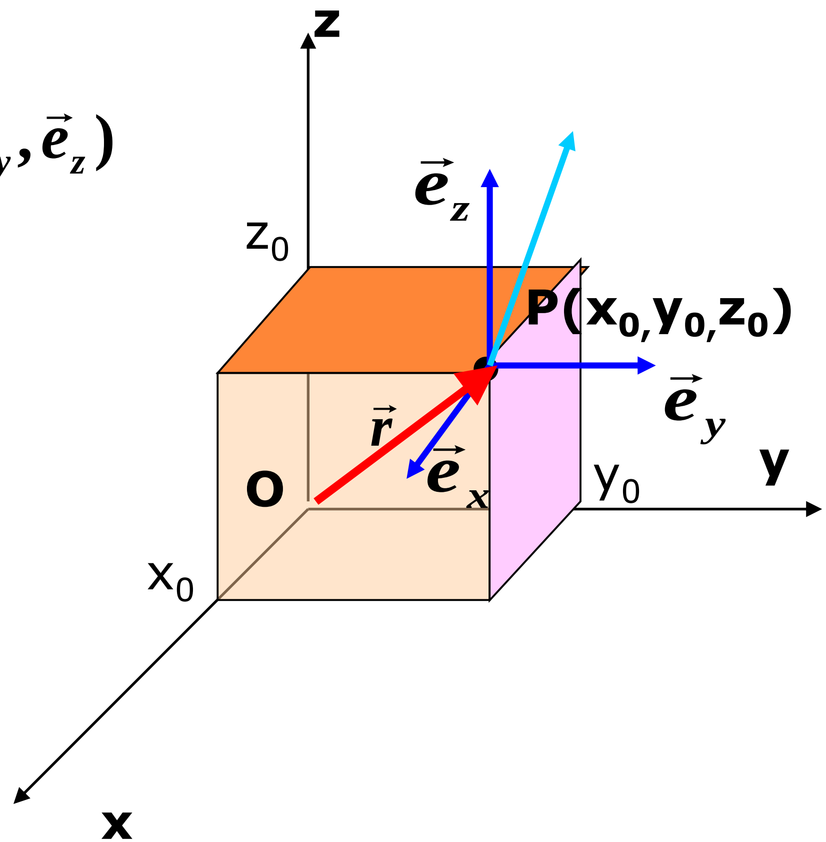


五、正交曲面坐标系

1、直角坐标系 $(x, y, z, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

坐标单位矢量

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_x x_0 + \vec{e}_y y_0 + \vec{e}_z z_0$$

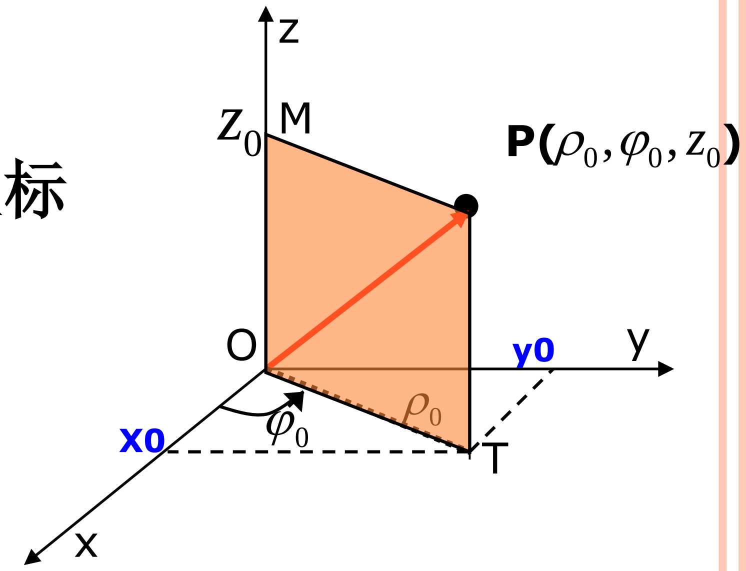
P点处矢量$\vec{F}$表示

$$\vec{F} = \vec{e}_x F_x(\vec{r}) + \vec{e}_y F_y(\vec{r}) + \vec{e}_z F_z(\vec{r})$$

坐标分量

2、圆柱坐标系 $(\rho,\varphi,z,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$

空间一点$P(x_0, y_0, z_0)$也能够在圆柱坐标系中用(ρ_0, ϕ_0, z_0)完整地描绘



- ρ_0是OP在xy平面上的投影

- ϕ_0是从正x轴到平面$OMPT$的夹角

- z_0 是OP 在z轴上的投影，

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho_0 & \text{是一个以}z\text{轴为轴线的圆柱面} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi_0 & \text{是一个过}z\text{轴的平面} \\ z = z_0 & \text{是一个垂直于}z\text{轴的平面} \end{cases}$$

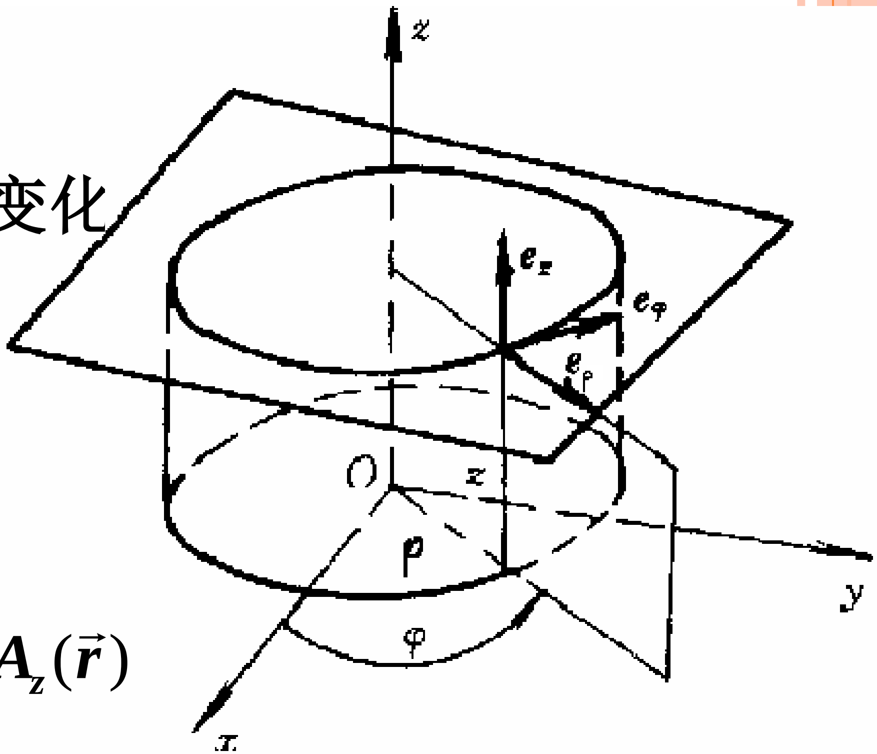
$$\begin{cases} 0 \le \rho \le \infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

坐标单位矢量 $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

除$\vec{e}_z$为常矢量外，

$\vec{e}_\rho$和$\vec{e}_\varphi$的方向随P点位置φ的不同而变化

且$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z, \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho, \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$



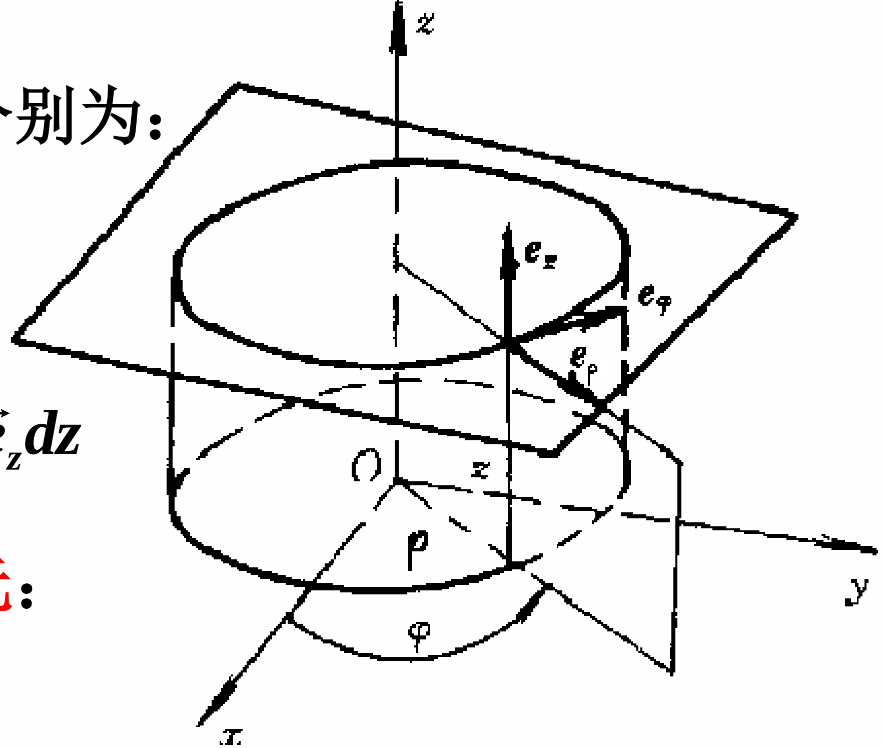
位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho_0 + \vec{e}_z z_0$

矢量表示$\vec{A} = \vec{e}_\rho A_\rho(\vec{r}) + \vec{e}_\varphi A_\varphi(\vec{r}) + \vec{e}_z A_z(\vec{r})$

坐标分量随P点位置的变化而变化

沿三个坐标单位矢量方向的长度元分别为：

$$d\vec{l}_\rho = \vec{e}_\rho d\rho \quad d\vec{l}_\varphi = \vec{e}_\varphi \rho d\varphi \quad d\vec{l}_z = \vec{e}_z dz$$

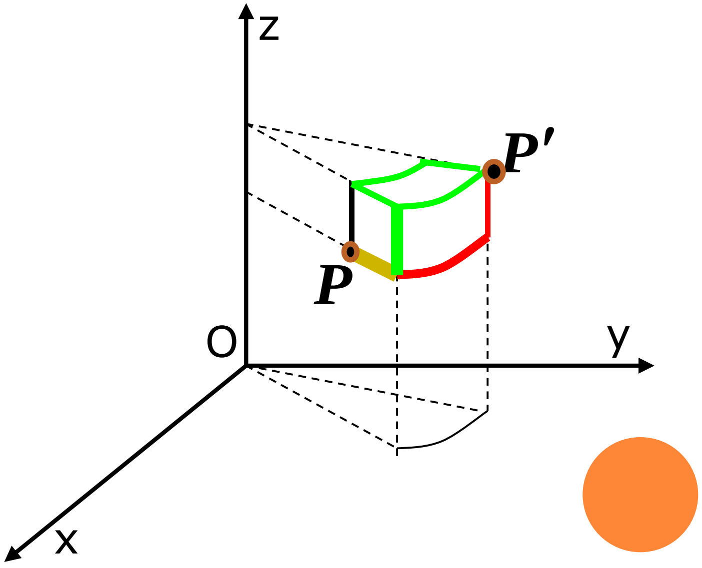


沿任意方向的矢性长度元为：

$$d\vec{l} = d\vec{l}_\rho + d\vec{l}_\varphi + d\vec{l}_z = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\varphi \rho d\varphi + \vec{e}_z dz$$

与坐标单位矢量相垂直的三个面积元：

$$\begin{cases} ds_\rho = dl_\varphi dl_z = \rho d\varphi dz & (\text{与}\vec{e}_\rho\text{垂直}) \\ ds_\varphi = dl_\rho dl_z = d\rho dz & (\text{与}\vec{e}_\varphi\text{垂直}) \\ ds_z = dl_\rho dl_\varphi = \rho d\rho d\varphi & (\text{与}\vec{e}_z\text{垂直}) \end{cases}$$

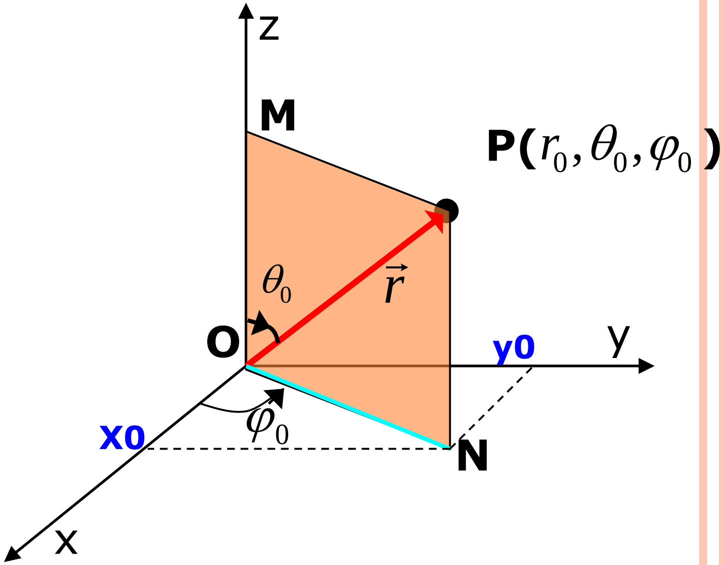


体积元：

$$dv = dl_\rho dl_\varphi dl_z = \rho d\rho d\varphi dz$$

3、球坐标系　$(r,\theta,\varphi,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$

空间一点P(x_0, y_0, z_0)也能够在球坐标系中用（r_0, θ_0, ϕ_0）完整地描绘



- r_0是P点位置矢量OP的大小
- θ_0是z轴与位置矢量OP构成的夹角
- ϕ_0是正x轴与平面$OMPN$之间的夹角

$\because \vec{r}$在xy平面上的投影 $ON = r\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_0 \\ \theta = \arccos(\dfrac{z}{r}) = \theta_0 \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi_0 \end{cases}$$

以原点为球心的球面

与z轴夹角一定的锥平面

过z轴的平面

$$\begin{cases} 0 \le r \le \infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

在点P，这三个面相互垂直

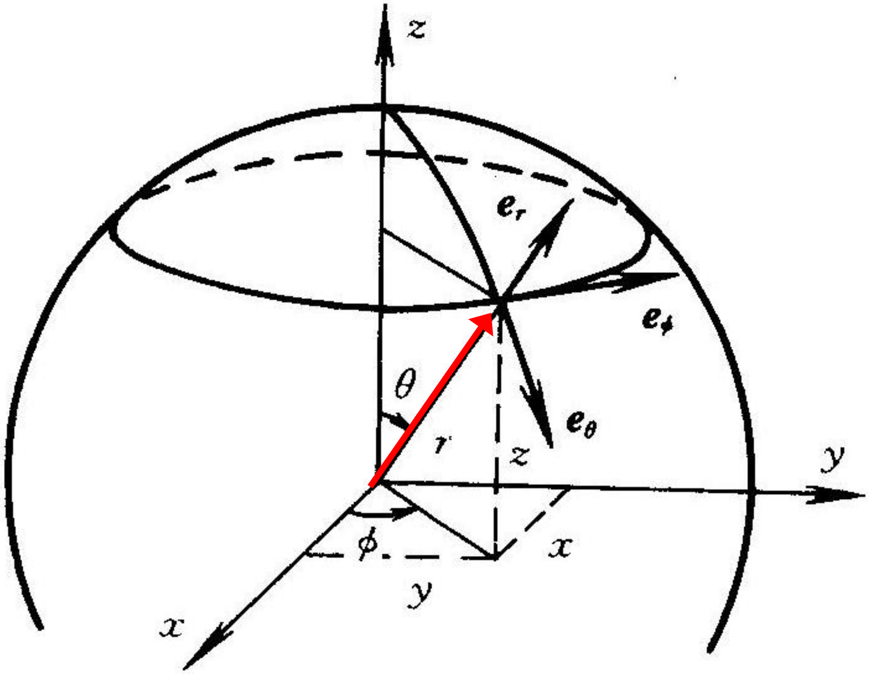
坐标单位矢量 $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_\varphi$都不是常矢量，

其方向都随P点位置而变

$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_r,$

$\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \quad (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi \ldots)$

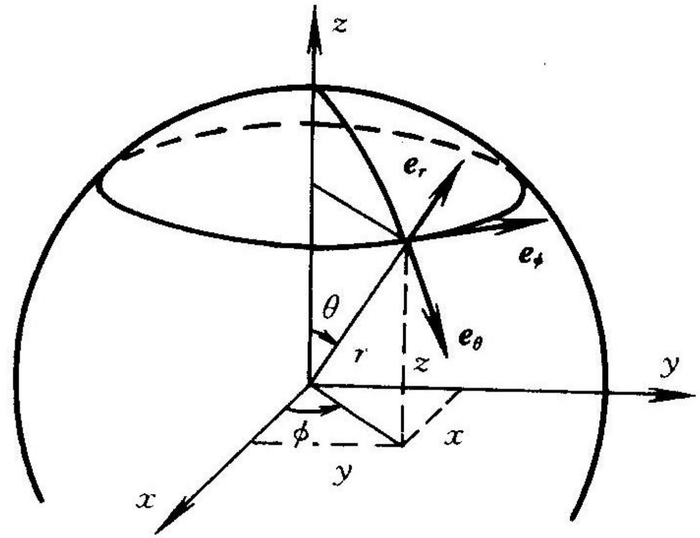


位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_r r_0$

矢量表示 $\vec{A} = \vec{e}_r A_r(\vec{r}) + \vec{e}_\theta A_\theta(\vec{r}) + \vec{e}_\varphi A_\varphi(\vec{r})$

沿三个坐标单位矢量方向的长度元分别为：

$$d\vec{l}_r = \vec{e}_r dr, d\vec{l}_\theta = \vec{e}_\theta r d\theta, d\vec{l}_\varphi = \vec{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$



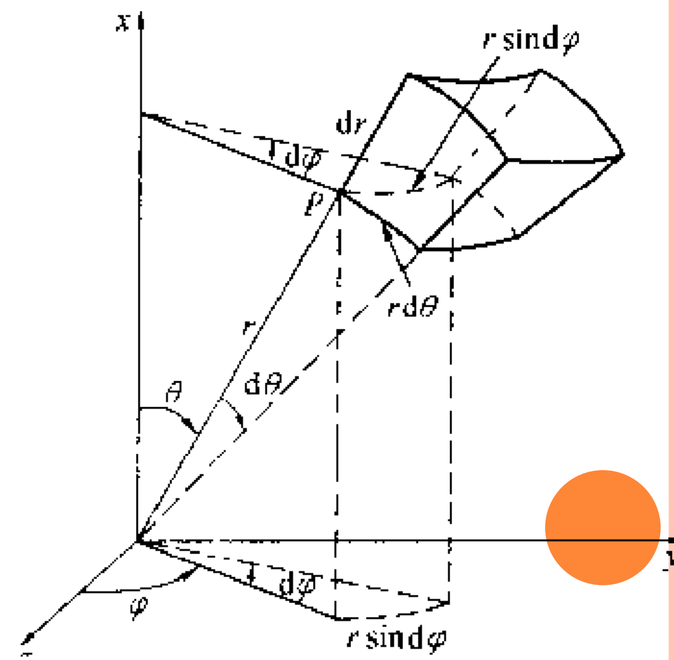
沿任意方向的矢性长度元为：

$$\therefore d\vec{l} = d\vec{l}_\rho + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi$$

$$= \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\varphi r \sin\theta d\varphi$$

与坐标单位矢量相垂直的三个面积元：

$$\begin{cases} ds_r = dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi & (与\vec{e}_r垂直) \\ ds_\theta = dl_r dl_\varphi = r\sin\theta dr d\varphi & (与\vec{e}_\theta垂直) \\ ds_\varphi = dl_r dl_\theta = r dr d\theta & (与\vec{e}_\varphi垂直) \end{cases}$$



体积元：$dv = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

4、三种坐标系之间坐标变量之间的关系

- 直角坐标系与圆柱坐标系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

- 直角坐标系与球坐标系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_0 \\ \theta = \arccos(\dfrac{z}{r}) = \theta_0 \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \varphi_0 \end{cases}$$

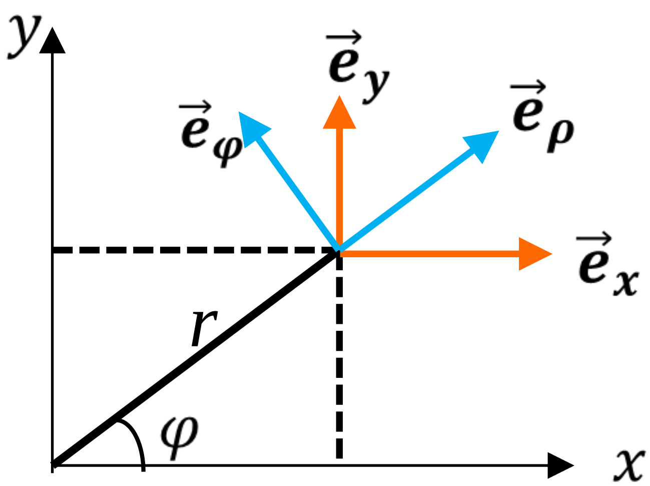
- 圆柱坐标系与球坐标系

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin(\dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}) \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

5、三种坐标系之间坐标单位矢量之间的转换

- 直角坐标系与圆柱坐标系



	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{e}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

例：$\vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos\varphi + \vec{e}_y \sin\varphi$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\rho \cos\varphi - \vec{e}_\varphi \sin\varphi$$

6、三种坐标系之间矢量函数之间的转换

➢ 直角坐标系与圆柱坐标系

$$\vec{A}=\vec{e}_x A_x(\vec{r})+\vec{e}_y A_y(\vec{r})+\vec{e}_z A_z(\vec{r})$$

$$\vec{A}=\vec{e}_\rho A_\rho(\vec{r})+\vec{e}_\varphi A_\varphi(\vec{r})+\vec{e}_z A_z(\vec{r})$$

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	0
$\vec{e}_\varphi$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

$$A_\rho(\vec{r})=\vec{e}_\rho\cdot\vec{A}$$

$$A_\varphi(\vec{r})=\vec{e}_\varphi\cdot\vec{A}$$

$$A_z(\vec{r})=\vec{e}_z\cdot\vec{A}$$

$$\begin{aligned}A_\rho(\vec{r})&=\vec{e}_\rho\cdot(\vec{e}_x A_x(\vec{r})+\vec{e}_y A_y(\vec{r})+\vec{e}_z A_z(\vec{r}))\\&=A_x(\vec{r})\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_x+A_y(\vec{r})\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_y+A_z(\vec{r})\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_z\\&=A_x(\vec{r})\cos\phi+A_y(\vec{r})\sin\phi\end{aligned}$$

	A_x	A_y	A_z
A_ρ	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
A_ϕ	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
A_z	0	0	1

7、注意

- 直角坐标系中，任一点处的坐标单位矢量方向相同

  圆柱坐标系中，$\vec{e}_\rho$和$\vec{e}_\varphi$的方向随坐标φ变化

  球坐标系中，$\vec{e}_\varphi$随坐标φ变化，$\vec{e}_r$和$\vec{e}_\theta$的方向随坐标θ,φ变化

- 矢量的不变特性

  矢量及矢量的运算规则和结果与选择的坐标系无关，只是表达形式的不同.

  因此实际应用中，针对不同的问题，选择合适的坐标系能使问题分析更简洁、明了

§1.2 标量场和矢量场

一、场的概念

如果在空间的某区域中，某个物理系统的状态都可以用空间地点$\vec{r}$ 和时间的函数 $\phi(\vec{r},t)$来描绘, 则$\phi(\vec{r},t)$称为场函数，该区域称为场域。

所以，场是一个位置函数

若物理状态可单纯用一个数来表示，则对应标量场

如温度场、电荷分布、电位场，高度场等;

若物理状态不仅需要定出大小，而且需要定方向，则对应矢量场　如流速场、电场、磁场等

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{标量场} \ f(\vec{r},t) \\ \text{矢量场} \ \vec{A}(\vec{r},t) \end{cases}$$

如果描述物理状态的函数与时间无关，即场量只是空间位置的函数而不随时间变化，则代表静态场；反之，则代表动态的时变场

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{静态场} \ f(\vec{r}), \ \vec{A}(\vec{r}) \\ \text{时变场} \ f(\vec{r},t), \ \vec{A}(\vec{r},t) \end{cases}$$

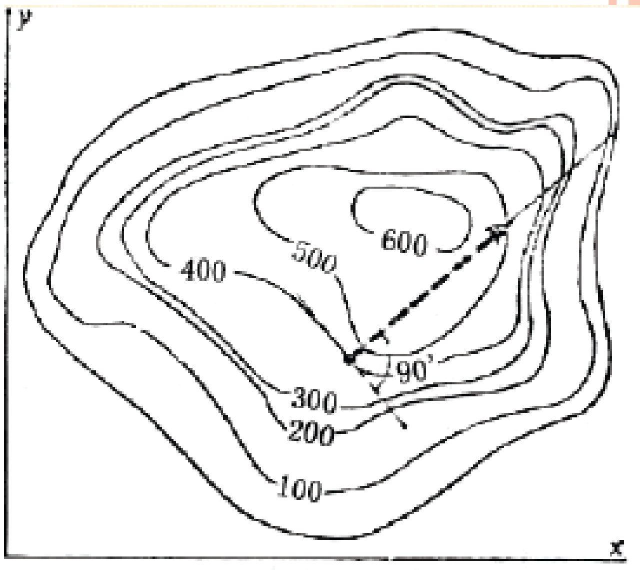
二、场图　　形象描绘场分布的工具

1、 标量场*f* (*r*, *t*) —— “等值面” 图

- 等值面：

空间内标量值相等的点集合形成的曲面，称为等值面

$f(\bar{r})=$常数值



对应不同的常数值，得到不同的曲面。

如：f （x, y)=c，绘出等高线：

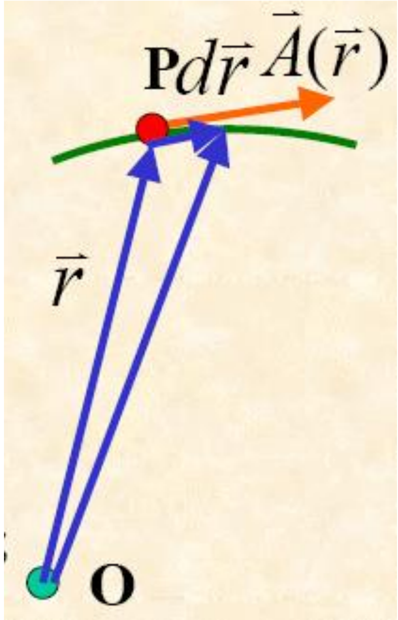
- 等值面不相交

每一点只对应一个确定的场量值。

思考

在某一高度沿什么方向高度变化最快？

2、 矢量场$\vec{A}(\vec{r},t)$——“矢量线”



矢量线，又称力线/流线，是一些有向曲线：

- 曲线在某点处的切线方向表示该点处矢量场的方向，
- 该点处曲线的疏密程度表述该处场强的大小

（该点垂直于矢量线的单位面积上通过的矢量线数正比于该处矢量的大小）

所有矢量线互不相交

力线的微分方程：$\boxed{\vec{A}(\vec{r})\times d\vec{r}=0}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r})\times d\vec{r}=\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}=0$$

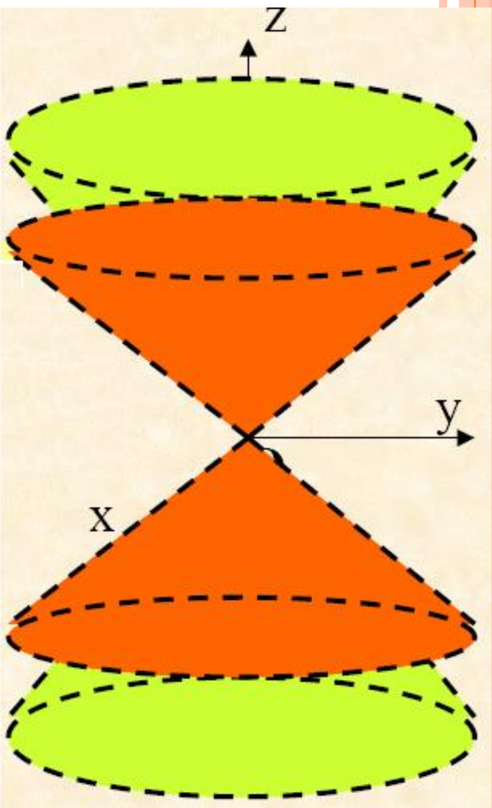
在直角坐标系中，矢性长度元 $d\vec{r}=\vec{e}_x dx+\vec{e}_y dy+\vec{e}_z dz$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dx}{A_x(\vec{r})}=\frac{dy}{A_y(\vec{r})}=\frac{dz}{A_z(\vec{r})}}$$

3、 例题

例1-1：已知标量场， $f(\vec{r}) = \arcsin\left(z / \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

求其等值面方程并说明其几何形状及函数f(r)的实数定义域



解：令$f(\vec{r}) = \arcsin\left(z / \sqrt{x^2 + y^2}\right) =$ 常数C

则，等位面方程：$z^2 = (x^2 + y^2)\sin^2 C$

等值面几何形状：一簇以原点为顶点，以z轴为轴线的圆锥面族。

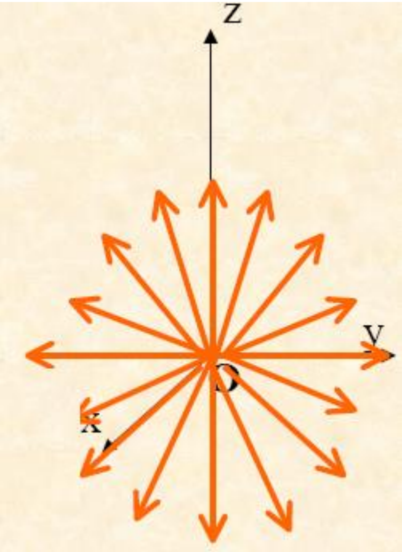
定义域：坐标满足$z^2 \le x^2 + y^2$的点所在的空间

$$\because \left|\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| = |\sin C| \le 1 \qquad \therefore |z| \le \left|\sqrt{x^2 + y^2}\right|$$

例1-2： 设点电荷q位于坐标原点，它在空间任一点$P(x,y,z)$处所产生的电场强度矢量为，$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$ 式中q，ε_0均为常数，$\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$

为P点的位置矢量，求矢量线方程

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dx}{A_x(\vec{r})}=\frac{dy}{A_y(\vec{r})}=\frac{dz}{A_z(\vec{r})}}$$



解：
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z)$$

$$=\vec{e}_x E_x+\vec{e}_y E_y+\vec{e}_z E_z$$

x,y,z相互独立，取积分

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \quad \Rightarrow \begin{cases} \ln x+C_1=\ln y+C_2 \\ \ln y+C_3=\ln z+C_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y=ax \\ z=by \end{cases}, a, b\text{为任意常数}$$

电力线是一簇从点电荷出发向空间发散的径向辐射直线，形象描绘出点电荷的电场在空间的分布状况

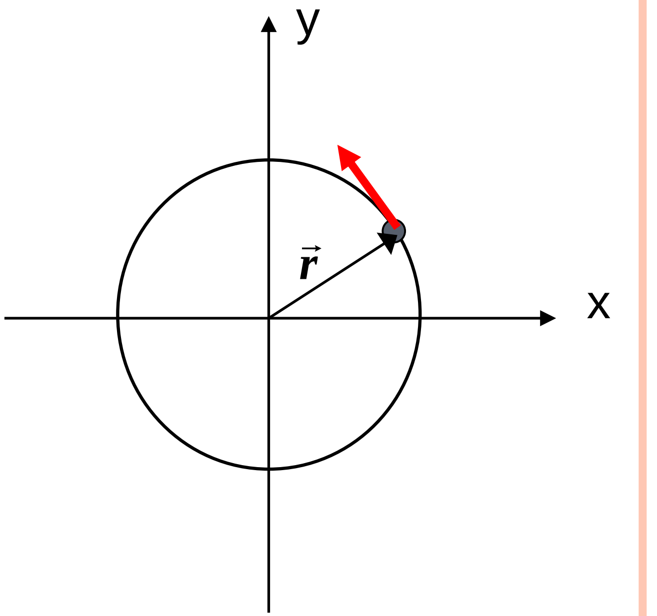
例1-3：有一个二维矢量场，$\vec{F}(\vec{r})=\vec{e}_x(-y)+\vec{e}_y(x)$
求力线，并定性绘制该矢量场图形

分析：利用 $\boxed{\vec{F}\times d\vec{r}=0}$

解：（1）直角坐标系：$\boxed{\dfrac{dx}{F_x}=\dfrac{dy}{F_y}=\dfrac{dz}{F_z}}$

$\Rightarrow xdx=-ydy \quad \Rightarrow x^2+y^2=c^2$

c^2为积分常数



力线是一簇同心圆

力线的方向与疏密程度?

矢量场$\vec{F}(\vec{r})$的大小：

$$\left|\vec{F}(\vec{r})\right|=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

不直观！

方向：

$$\vec{e}_F=\frac{\vec{F}(\vec{r})}{\left|\vec{F}(\vec{r})\right|}=\vec{e}_x\left(-\frac{y}{r}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{x}{r}\right)$$

解：(2)在圆柱坐标系中分析：

根据矢量不变特性，从直角坐标系到圆柱坐标系

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{e}_x(-y) + \vec{e}_y(x) = \vec{F}(\rho,\varphi)$$

$$= (\vec{e}_r \cos\varphi - \vec{e}_\varphi \sin\varphi)(-\rho\sin\varphi) + (\vec{e}_r \sin\varphi + \vec{e}_\varphi \cos\varphi)(\rho\cos\varphi)$$

$$= \rho\vec{e}_\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho\vec{e}_\varphi$$

$$\because \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ 0 & \rho & 0 \\ d\rho & \rho d\varphi & dz \end{vmatrix} = \vec{e}_\rho \rho dz - \vec{e}_z \rho d\rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} dz = 0 \\ \rho d\rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = C_1 \\ \rho^2 = C_2 \end{cases}$$

表示某一平面（ $z = C1$ ）上的同心圆。

力线对应为一簇同心圆

$\because \vec{F}(\vec{r})$的大小$\propto \rho$

半径方向上力线的密度正比于ρ

又$\because \vec{F}(\vec{r})$的方向是$\vec{e}_\varphi$

力线沿逆时针方向