练习一

1.（1）$u(0,t)=0, u(L,t)=0.$

（2）$u(x,0)=f(x).$

（3）$u_t(x,0)=g(x).$

(4) 存在$M<+\infty$使得$|u(x,t)|<M, \forall x\in[0,L], t>0.$

2. (1) $u(0,t)=g(t).$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0.$

练习二

2. (2) $y(x,t)=\sin 2x\cos 5t.$

3. （1）通解$z(x,y)=\frac{x^3y^2}{6}+f(x)+g(y).$

(2) $z(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+\cos y-\frac{y^2}{6}+x^2-1.$

练习三

1. $\lambda_n=\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, X_n=A_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$

2. $u(x,t)=3\cos\frac{3\pi at}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l}+6\cos\frac{5\pi at}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l}.$

3. $u(x,t)=\sin\left(\sqrt{\pi^2-2}t\right)\sin\pi x.$

练习四

1. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}.$

2. $\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}, X_n=A_n\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$

$u(x,t)=4e^{-\frac{25\pi^2t}{16}}\cos\frac{5\pi x}{4}.$

练习五

1. $u(x,y)=1-y+\dfrac{3}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\left(e^{2\pi y}-e^{-2\pi y}\right)\cos 2\pi x+\left(\dfrac{1}{1-e^{6\pi}}e^{3\pi y}+\dfrac{1}{1-e^{-6\pi}}e^{-3\pi y}\right)\cos 3\pi x.$

2. $u(x,\theta)=u_0\ln\dfrac{r}{r_1}\Big/\ln\dfrac{r_2}{r_1}.$

3. $u(r,\theta)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi}r^{2n}\sin 2n\theta.$

练习六

1． $u(x,t)=\dfrac{1}{\pi^2}(e^{-\pi^2 t}-1)\cos\pi x.$

2. $u(x,t)=\dfrac{l^2}{\pi^2a^2}(t-\dfrac{l}{\pi a}\sin\dfrac{\pi at}{l})\sin\dfrac{\pi x}{l}.$

3. $u(x,y)=1-\dfrac{x}{4}(1-x^2-y^2).$

提示：令$u(x,y)=v(x,y)+1$，则

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=-2x, x^2+y^2<1, \\ v|_{x^2+y^2=1}=0. \end{cases}$$

$v$ 的求解见课本 53 页例三。

练习七

1. $u(x,t)=\dfrac{x}{l}+\cos\dfrac{3\pi at}{l}\sin\dfrac{3\pi x}{l}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^3}{n^4\pi^4a}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$

提示: 令$u(x,t)=v(x,t)+\dfrac{x}{l}$，则$v(x,t)$满足:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{xx}, 0<x<l, t>0, \\ v(0,t)=0, v(l,t)=0, \\ v(x,0)=\sin\dfrac{3\pi x}{l}, v_t(x,0)=x(l-x). \end{cases}$$

2. $u(x,t)=\sin t+\dfrac{e^t-e^{-2t}}{3}\sin\dfrac{x}{2}.$

提示：令$u(x,t)=v(x,t)+\sin t$，则$v(x,t)$满足

$$\begin{cases} v_t = 8v_{xx} + e^t \sin\dfrac{x}{2}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ v(0,t) = 0, v_x(\pi,0) = 0, \\ \mathrm{v}(\mathrm{x},0) = 0. \end{cases}$$

练习八

1. $u(x,t) = -x^2 - 9 - e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{288}{(2\mathrm{n}-1)^3\pi^3} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{18}} \cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{6}.$

提示：因自由项及边界条件不依赖于时间，可以选取辅助函数 $w(x)$ 将自由项和边界条件同时齐次化。即 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$， $w, v$ 分别满足：

$$\begin{cases} w''(x) = -2 - e^{-x}, \\ w'(0) = 1, w(3) = -18 - e^{-3}, \end{cases}$$

求解得 $w(x) = -x^2 - e^{-x} - 9$，因而

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx}, 0 < x < 3, t > 0, \\ v_x(0,t) = 0, v(3,t) = 0, \\ v(\mathrm{x},0) = 9 - \mathrm{x}^2. \end{cases}$$

注：解法二 很显然函数 $w(x) = 2x^2 + e^{-x}$ 满足边界条件 $w'(0) = 1, w(3) = -18 - e^{-3}$，二阶导数为 $4 + 2e^{-x}$。令 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$，则 $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t = 2v_{xx} - 4, 0 < x < 3, t > 0, \\ v_x(0,t) = 0, v(3,t) = 0, \\ v(x,0) = 0. \end{cases}$$

此时得到的解为

$$u(x,t) = -(2\mathrm{x}^2 + e^{-x}) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{288}{(2\mathrm{n}-1)^3\pi^3}\left[e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{18}} - 1\right]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{6},$$

两个解形式上不一样，其实是相等的。

2. $u(x,t) = x^3 - 3x^2 + x + e^{-\frac{\pi^2 t}{16}} \sin\dfrac{\pi x}{4}.$

提示：选取辅助函数 $w(x)$ 将自由项和边界条件同时齐次化，即

$$\begin{cases} w'(x) = 6(x-1), 0 < x < 2, \\ w(0) = 0, w'(2) = 1. \end{cases}$$

求解得 $w(x)=x^3-3x^2+x$ 。令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$，则

$$\begin{cases} v_t=v_{xx}, 0<x<2, t>0, \\ v(0,t)=0, v_x(2,t)=0, \\ v(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{4}. \end{cases}$$

3. $u(x,y)=1+x-\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x+\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x\left[\cosh\pi y-\coth\pi\sinh\pi y\right].$

提示：令 $u(x,y)=v(x,y)+w(x)$，其中 $w(x)$ 满足

$$\begin{cases} w''(x)=\sin\pi x, \\ w(0)=1, w(1)=2. \end{cases}$$

求解得 $w(x)=1+x-\dfrac{1}{\pi^2}\sin\pi x$.

注：也可选辅助函数 $w(x,t)=1+x$ 将边界条件齐次化。

练习九

1. $\lambda_n=n^2, n=0,1,2,\cdots, X_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta.$
2. 注意到此方程为欧拉方程。求解特征值问题得到：

   $$\lambda_n=(n\pi)^2, y_n(x)=\sin(n\pi\ln x), n=1,2,\cdots,$$

   然后直接验证 $y_n$ 带权 $\dfrac{1}{x}$ 正交。

注：此方程可以改写成

$$\left(xy'(x)\right)'+\lambda\frac{1}{x}y(x)=0.$$

根据 2.6 节结论(2)可知特征函数系是带权 $\dfrac{1}{x}$ 正交的。

练习十

1. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{k}{a})\phi(x+at)+\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{k}{a})\phi(x-at).$
2. $u(x,t)=\sin x\cos at+x^2t+\dfrac{1}{3}a^2t^3.$
3. $u(x,t)=x+\dfrac{1}{a}\sin x\sin at+\dfrac{1}{2}xt^2+\dfrac{a}{6}t^3.$

练习十一

1. $u(x,t)=\psi(\frac{at-x}{2a})-\psi(\frac{x+at}{2a})+\phi(\frac{x+at}{a}).$

提示：利用通解公式$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at).$

2. $u(x,y,z,t)=yz+xzt.$

3. $u(x,y,t)=x^2(x+y)+a^2t^2(3x+y).$

练习十二

1. $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\xi e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$ 或 $u(x,t)=\cos xe^{-a^2t}$

提示：对 $x$ 作傅里叶变换得 $U(\lambda,t)=F(\cos x)e^{-\lambda^2a^2t}$， 作傅里叶逆变换即得

$$u(x,t)=\cos x*\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

利用公式$F(\cos x)=\frac{1}{2}\left[\delta(\lambda+1)+\delta(\lambda-1)\right]$可得

$$u(x,t)=F^{-1}(\frac{1}{2}(\delta(\lambda+1)+\delta(\lambda-1))e^{-\lambda^2a^2t})=\cos xe^{-a^2t}.$$

2. $u(x,t)=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-y^2}dy.$ 、

提示：对$t$作拉普拉斯变换，求解常微分方程得$L(u(x,t))=\frac{u_0}{s}e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$。

3. $u(x,t)=\begin{cases}A\sin\omega(t-\frac{x}{a}), & t>\frac{x}{a},\\ 0, & t<\frac{x}{a}.\end{cases}$

提示：对$t$作拉普拉斯变换，求解常微分方程得到$L(u(x,t))=L(A\sin\omega(t))e^{-\frac{sx}{a}}$。

练习十三

1. $u(x,t)=\cos 3\pi at\cos 3\pi x$ .

提示：对$t$作拉普拉斯变换得到常微分方程$s^2U(x,s)-s\cos 3x=a^2U_{xx}(x,\mathrm{s})$，其通解为

$U(x,s)=c_1(s)\mathrm{e}^{\frac{sx}{a}}+c_2(s)\mathrm{e}^{-\frac{sx}{a}}+\frac{s}{s^2+9a^2\pi^2}\cos 3\pi x$。利用边界条件得$c_1=c_2=0$。

2. $u(x,t)=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi t^3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{\frac{3(x-\xi)^2}{4t^3}}d\xi.$

提示：对 $x$ 作傅里叶变换，求解常微分方程得 $F(u(x,t))=F(\phi(x))e^{\frac{-t^3\lambda^2}{3}}$.

3. $u(x,t)=\frac{e^{kt}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$

提示：对$x$作傅里叶变换。

练习十四

1. 提示：在球的边界 $\Gamma_R$ 上 $1+\sin xy^2z^3\geq 0$，且显然 $u$ 不是常数。
2. 提示：$u$ 显然不是常数，利用极值原理。
3. 提示：在任意球体上应用第二格林公式，取 $v$ 为常数 1，得到 $\Delta u$ 在任意球上积分为 0，利用 $\Delta u$ 的连续性即得 $u$ 调和.
4. 提示： 假设此问题有两个解 $u_1,u_2$，令 $u=u_1-u_2$，只需证明 $u$ 恒为 0 即可。容易验证 $u$ 满足相应的齐次方程及齐次边界条件。在第二格林公式中取 $v=u$，利用边界条件将边界积分项中的 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 换成 $-ku$，利用假设 $k>0$ 易得 $u$ 在边界上恒为 0，在利用极值原理即得 $u$ 恒为零。
5. 类似第 3 题。

练习十五

1. 见课件。
2. $u(x_0,y_0)=-\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{f(x)\mathrm{y}_0}{(x-x_0)^2+{y_0}^2}\mathrm{dx}.$
3. $u(r,\theta)=Ar\cos\theta=\dfrac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{(1-r^2)\cos\phi}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}d\phi.$
4. $u(r,\theta)=\dfrac{Ar\cos\theta}{a}+\dfrac{Br\sin\theta}{a}.$

练习十六

1. 利用递推公式。
2. $u(r,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_m e^{-k\left(\mu_m^{(0)}\right)^2 t}J_0(\mu_m^{(0)}r)$，其中 $A_m=\dfrac{2u_0}{\mu_m^{(0)}J_1(\mu_m^{(0)})}$。
3. $u(x,t)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2A}{a^2\left(\mu_m^{(0)}\right)^3J_1(\mu_m^{(0)})}\left[1-\cos\left(a\mu_m^{(0)}t\right)\right]J_0(\mu_m^{(0)}r)$。

提示：齐次方程对应的特征值问题为 $r^2R''+rR'+\lambda r^2R=0,R(1)=0,|R(0)|<\infty$，求解得到

特征值$\lambda_m=(\mu_m^{(0)})^2$及特征函数$R_m(r)=J_0(\mu_m^{(0)}r)$，即$r^2R_m^{''}+rR_m^{'}+\lambda_m r^2R_m=0$。

令$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)R_m(r)$， $A=\sum_{m=1}^{\infty}A_mR_m(r)$，代入方程得

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}u_m^{''}(t)R_m(r)&=a^2\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)[R_m^{''}(r)+\frac{1}{r}R_m^{'}(\mathrm{r})]+\sum_{m=1}^{\infty}A_mR_m(r)\\
&=-a^2\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)(\mu_m^{(0)})^2R_m(r)+\sum_{m=1}^{\infty}A_mR_m(r),
\end{aligned}
$$

因此$u_m(t)$满足常微分方程$u_m^{''}(t)+a^2\left(\mu_m^{(0)}\right)^2u_m(t)=A_m$，由初值得$u_m(0)=0,u_m^{'}(0)=0$，

用拉普拉斯变换或者参数变易法求解得到$u_m(t)$。