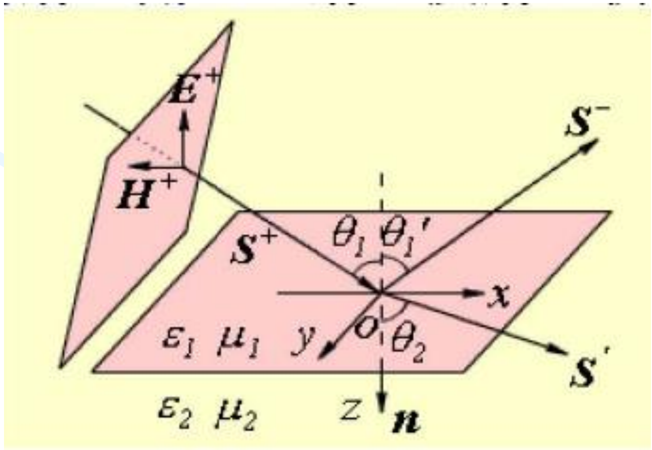
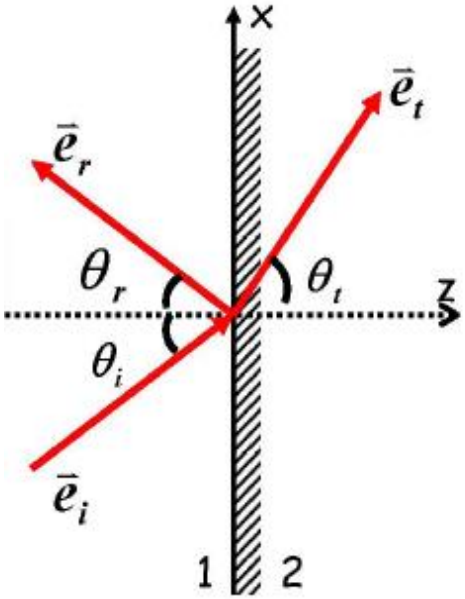
7.6 均匀平面电磁波的斜入射

- 讨论均匀平面波以任意角度入射到两种不同媒质分界平面上的情况，即均匀平面波的斜入射，分界面上会形成反射波和折射波（透射波）
- 假定不同媒质的分界面是无限大的平面，界面两侧媒质都是均匀的、线性的、各向同性的。
- 几个概念
  - 入射面：波的入射线与介质分界面的法线所构成的平面。
  - 入射（反射、折射）角：入射（反射、折射）线与法线的夹角。



1、理想介质表面的斜入射

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}, \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{r0} e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}, \quad \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}}$$



1）反射和折射定律

设入射波、反射波和透射波的波矢量分别为：

$$\vec{k}_i = k_i \vec{e}_i$$

$$\vec{k}_r = k_r \vec{e}_r \quad \because k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad \therefore \vec{k}_r = k_i\, \vec{e}_r$$

$\vec{k}_s$与x, y, z轴的夹角分别为α_s、β_s、γ_s

$$\vec{k}_t = k_t \vec{e}_t$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_{i0} e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \vec{E}_{r0} e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}$$

$$= \vec{E}_{i0} e^{-j(k_{ix}x + k_{iy}y + k_{iz}z)} + \vec{E}_{r0} e^{-j(k_{rx}x + k_{ry}y + k_{rz}z)}$$

$$\vec{k} = k_{ix}\vec{e}_x + k_{iy}\vec{e}_y + k_{iz}\vec{e}_z$$

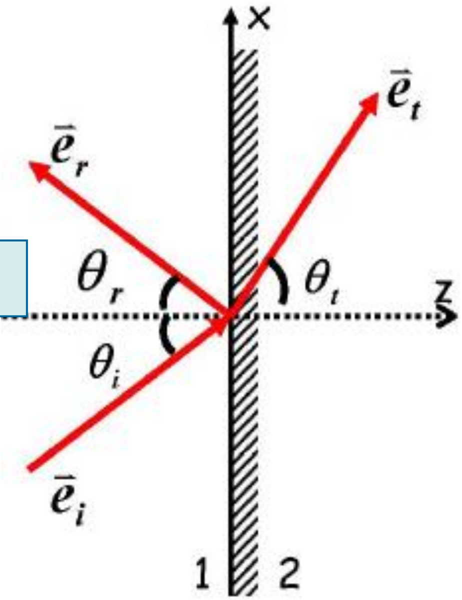
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}} = \vec{E}_{t0} e^{-j(k_{tx}x + k_{ty}y + k_{tz}z)}$$

由入射波和边界条件可确定反射波和折射波的传播方向

取z=0的平面为分界平面，xoz平面为入射面，入射波与y轴的夹角$\beta_i=\dfrac{\pi}{2}$

分界面两侧电场强度的切向分量应连续，即 $\vec{E}_1^t\big|_{z=0}=\vec{E}_2^t\big|_{z=0}$



$$\Rightarrow \vec{E}_{i0}^t e^{-j(k_{ix}x+k_{iy}y)}+\vec{E}_{r0}^t e^{-j(k_{rx}x+k_{ry}y)}=\vec{E}_{t0}^t e^{-j(k_{tx}x+k_{ty}y)}$$

对分界面上任意点均成立： 切向分量 透射波

相位因子相等$\Rightarrow k_{ix}x+k_{iy}y=k_{rx}x+k_{ry}y=k_{tx}x+k_{ty}y$

$$\boxed{\Rightarrow\begin{cases}k_{ix}=k_{rx}=k_{tx}\\ k_{iy}=k_{ry}=k_{ty}\end{cases}}$$

相位匹配条件：说明了入射波、反射波和折射波的波矢量沿介质分界面的切向分量都相等。

令$k_i=k_r=k_1$

$\vec{k}_s$与x,y,z轴的夹角分别为α_s、β_s、γ_s

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1\cos\alpha_i=k_1\cos\alpha_r=k_2\cos\alpha_t\\ k_1\cos\beta_i=k_1\cos\beta_r=k_2\cos\beta_t\end{cases}\xrightarrow{\because\beta_i=\frac{\pi}{2}}k_1\cos\beta_r=k_1\cos\beta_i=k_2\cos\beta_t=0$$

$$\Rightarrow\beta_r=\beta_t=\frac{\pi}{2}$$

说明了反射波和折射波也位于入射面内，三个波的传播方向共面

$$\therefore\alpha_i=\frac{\pi}{2}-\theta_i,\alpha_r=\frac{\pi}{2}-\theta_r,\alpha_t=\frac{\pi}{2}-\theta_t$$

$$\because \boldsymbol{k}_1 \cos \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{k}_1 \cos \boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{k}_1 \cos \boldsymbol{\alpha}_t , \boldsymbol{\alpha}_i = \frac{\pi}{2} - \theta_i , \boldsymbol{\alpha}_r = \frac{\pi}{2} - \theta_r , \boldsymbol{\alpha}_t = \frac{\pi}{2} - \theta_t$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{k}_1 \sin \theta_i = \boldsymbol{k}_1 \sin \theta_r = \boldsymbol{k}_2 \sin \theta_t$$

Snell反射定律： $\boxed{\boldsymbol{k}_1 \sin \theta_i = \boldsymbol{k}_1 \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r}$

Snell折射定律：

$$由 k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\omega_2 \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\omega_1 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_2} = \frac{\sqrt{\mu_{r2} \varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\mu_{r1} \varepsilon_{r1}}} = \frac{\boldsymbol{n}_2}{\boldsymbol{n}_1}$$

$\boldsymbol{n}$为介质的折射率，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{c} / \boldsymbol{v} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$

对于非磁性介质，$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$， 则$\dfrac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$

归纳：

1、入射线、反射线和折射线位于同一平面内（入射面）

2、已知入射波及媒质特性，可确定反射、折射波的传播方向

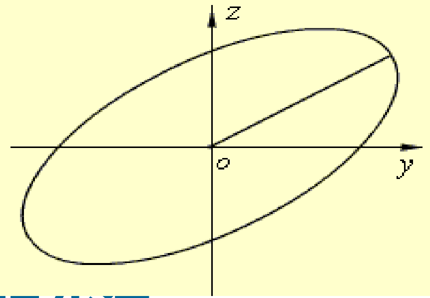
3、反射定律和折射定律适用于任何两种媒质的分界面

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}$$

2、反射系数和折射系数

$$\vec{E}_i=\vec{E}_{i0}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}},\quad \vec{E}_r=\vec{E}_{r0}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}},\quad \vec{E}_t=\vec{E}_{t0}e^{-j\vec{k}_t\cdot\vec{r}}$$



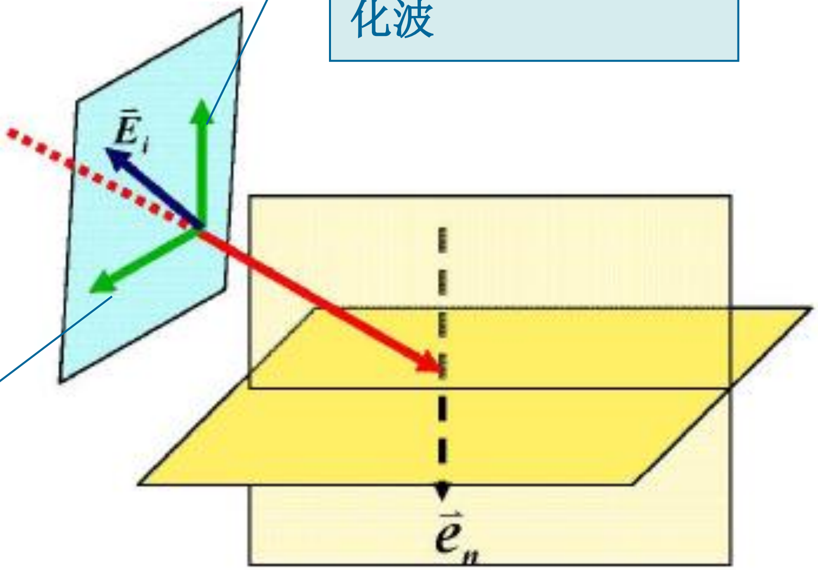
不论何种极化方式的均匀平面波都可以分解成两个正交的线极化波

取一个线极化波的$\vec{E}$与**入射面**垂直，成为垂直极化波

取一个线极化波的$\vec{E}$与**入射面**平行，成为平行极化波

等相位面与入射面的交线，即平行极化波

因此，只要分别求得这两个分量的反射波和折射波，通过叠加就可以获得$\vec{E}$任意取向的入射波的反射波和折射波。



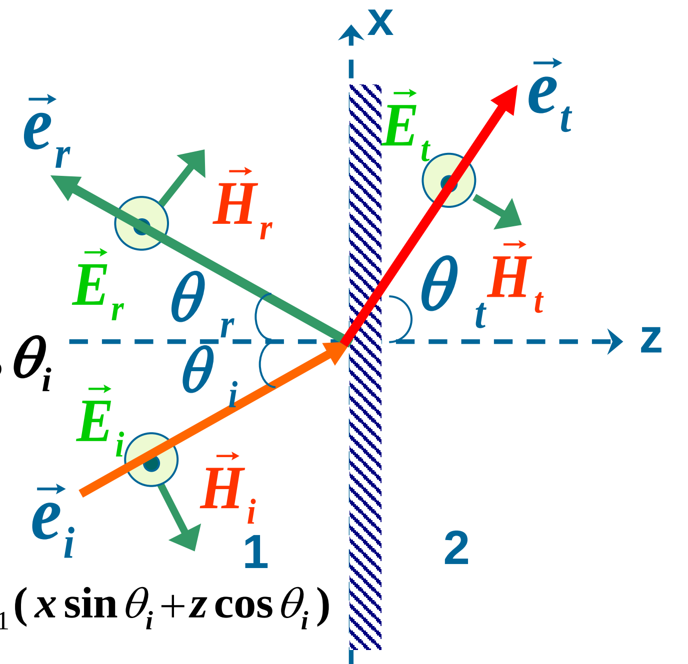
等相位面上，垂直于入射面

$$\text{反射系数}R=\frac{\vec{E}_{r0}\text{的复振幅}}{\vec{E}_{i0}\text{的复振幅}},\quad \text{折射系数}T=\frac{\vec{E}_{t0}\text{的复振幅}}{\vec{E}_{i0}\text{的复振幅}}$$

1)垂直极化波的反射系数与折射系数

取$z=0$的平面为分界平面，xoz平面为入射面

$\vec{E}$垂直于入射面



入射波的传播方向单位矢量：

$$\vec{e}_i=\vec{e}_x\cos\alpha_i+\vec{e}_y\cos\beta_i+\vec{e}_z\cos\gamma_i=\vec{e}_x\sin\theta_i+\vec{e}_z\cos\theta_i$$

入射波电磁场为：

$$\vec{E}_i=\vec{e}_y E_{i0}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}=\vec{e}_y E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{H}_i=\frac{1}{\eta_1}\vec{e}_i\times\vec{E}_i=\frac{E_{i0}}{\eta_1}\left(\vec{e}_z\sin\theta_i-\vec{e}_x\cos\theta_i\right)e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

复振幅　　场的方向单位矢量　　相位因子

由边界条件知，反射波和透射波的电场也只有y分量，也是垂直极化波。

反射波电磁场为：

$$\boxed{\theta_r=\theta_i}$$

$$\boxed{\vec{e}_r=\vec{e}_x\sin\theta_i-\vec{e}_z\cos\theta_i}$$

$$\begin{cases}\vec{E}_r=\vec{e}_y E_{r0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\\ \vec{H}_r=\left(\vec{e}_z\sin\theta_i+\vec{e}_x\cos\theta_i\right)\dfrac{E_{r0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\end{cases}$$

折射波电磁场为：

$$\boxed{\vec{e}_t=\vec{e}_x\sin\theta_t+\vec{e}_z\cos\theta_t}$$

$$\begin{cases}\vec{E}_t=\vec{e}_y E_{t0}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}\\ \vec{H}_t=\left(\vec{e}_z\sin\theta_t-\vec{e}_x\cos\theta_t\right)\dfrac{E_{t0}}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}\end{cases}$$

分界面两侧电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{H}$的切向分量应连续（理想介质的分界面上不存在传导面电流）

即：$\vec{E}_1^t\big|_{z=0}=\vec{E}_2^t\big|_{z=0}$，且$\vec{H}_1^t\big|_{z=0}=\vec{H}_2^t\big|_{z=0}$

展开式中约去相位因子 得 $\begin{cases} E_{i0}+E_{r0}=E_{t0} \\ (E_{r0}-E_{i0})\dfrac{\cos\theta_i}{\eta_1}=\dfrac{-E_{t0}}{\eta_2}\cos\theta_t \end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases} R_\perp=\dfrac{E_{r0}}{E_{i0}}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \\ T_\perp=\dfrac{E_{t0}}{E_{i0}}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t} \end{cases}$$

对于非磁性媒质

$$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{\eta_0}{n} \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2}\Rightarrow\frac{n_2}{n_1}$$

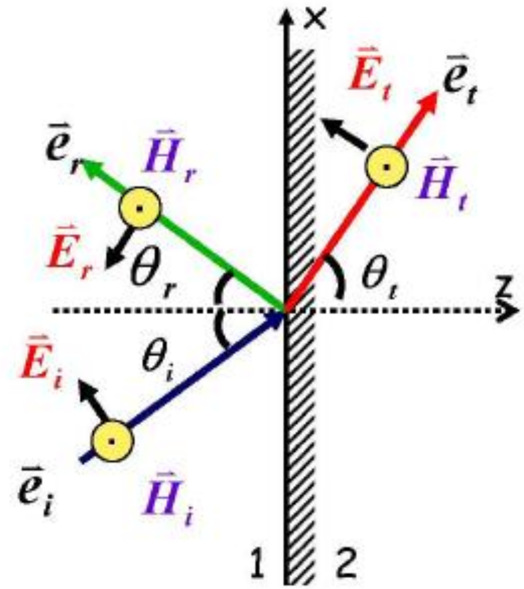
$n=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ 媒质的折射率

垂直极化的Fresnel公式

$$\begin{cases} R_\perp=\dfrac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \\ T_\perp=\dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

满足$1+R_\perp=T_\perp$

1)平行极化波的反射系数与折射系数



取$z=0$的平面为分界平面，xoz平面为入射面，$\vec{E}$平行于入射面，且与入射方向垂直，$\vec{H}$垂直于入射面

入射波的传播方向单位矢量：

$$\vec{e}_i=\vec{e}_x\cos\alpha_i+\vec{e}_y\cos\beta_i+\vec{e}_z\cos\gamma_i=\vec{e}_x\sin\theta_i+\vec{e}_z\cos\theta_i$$

入射波电磁场为：

$$\vec{H}_i=\vec{e}_y\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{E}_i=\eta_1\vec{H}_i\times\vec{e}_i=\left(\vec{e}_x\cos\theta_i-\vec{e}_z\sin\theta_i\right)E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}$$

由边界条件知，反射波和透射波的磁场也只有y分量，也是平行极化波。

反射波电磁场为：

$$\boxed{\theta_r=\theta_i}$$

$$\boxed{\vec{e}_r=\vec{e}_x\sin\theta_i-\vec{e}_z\cos\theta_i}$$

$$\begin{cases}\vec{H}_r=\vec{e}_y\dfrac{E_{r0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\\ \vec{E}_r=\left(-\vec{e}_x\cos\theta_i-\vec{e}_z\sin\theta_i\right)E_{r0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}\end{cases}$$

折射波电磁场为：

$$\boxed{\vec{e}_t=\vec{e}_x\sin\theta_t+\vec{e}_z\cos\theta_t}$$

$$\begin{cases}\vec{H}_t=\vec{e}_y\dfrac{E_{t0}}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}\\ \vec{E}_t=\left(\vec{e}_x\cos\theta_t-\vec{e}_z\sin\theta_t\right)E_{t0}e^{-jk_2(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)}\end{cases}$$

应用分界面两侧边界条件

即 $\vec{E}_1^t\big|_{z=0} = \vec{E}_2^t\big|_{z=0}$，且 $\vec{H}_1^t\big|_{z=0} = \vec{H}_2^t\big|_{z=0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{i0}\cos\theta_i - E_{r0}\cos\theta_i = E_{t0}\cos\theta_t \\ \dfrac{1}{\eta_1}(E_{r0}+E_{i0}) = \dfrac{1}{\eta_1}E_{t0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{//} = \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = \dfrac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \\ T_{//} = \dfrac{E_{t0}}{E_{i0}} = \dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

平行极化的Fresnel公式

满足 $1 + R_{//} = \dfrac{\eta_1}{\eta_2}T_{//}$

对于非磁性媒质

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{\eta_0}{n} \Rightarrow \frac{\eta_1}{\eta_2} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{//} = \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = \dfrac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \\ T_{//} = \dfrac{E_{t0}}{E_{i0}} = \dfrac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} \end{cases}$$

例题：一均匀平面波由空气向理想介质($\mu_0, 3\varepsilon_0$)表面($z=0$)斜入射时，若

$$\vec{H}_i=\left(\sqrt{3}\vec{e}_x-\vec{e}_y+\vec{e}_z\right)\sin\left(\omega t+2x-2\sqrt{3}z\right)\quad(\mu A/m),$$ **求反射波电场。**

分析： $\vec{H}_i \Rightarrow \vec{E}_i=\eta_1\vec{H}_i\times\vec{e}_i$，确定入射角$\theta_i \Rightarrow \theta_r, \theta_t$

将$\vec{E}_i=\vec{E}_{i//}+\vec{E}_{i\perp}$，分别求$R_{//}, R_{\perp} \Rightarrow \vec{E}_{r//}, \vec{E}_{r\perp} \Rightarrow \vec{E}_r$

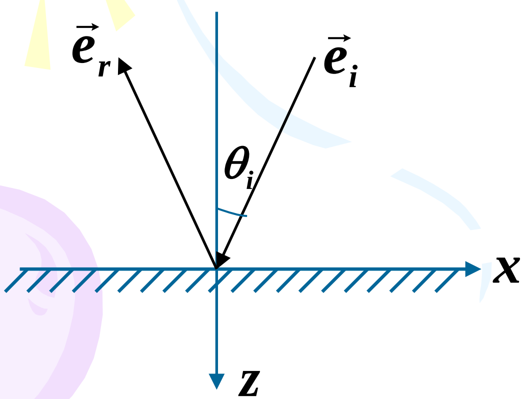
解：

$$\because \vec{H}_i=\left(\sqrt{3}\vec{e}_x-\vec{e}_y+\vec{e}_z\right)\cos\left(\omega t+2x-2\sqrt{3}z-\frac{\pi}{2}\right)$$ 比较 $\vec{H}_i=\vec{H}_{i0}\cos\left(\omega t-\vec{k}_i\cdot\vec{r}+\phi\right)$

$$\Rightarrow \vec{k}_i\cdot\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z=-2x+2\sqrt{3}z \Rightarrow \vec{k}_i=-2\vec{e}_x+2\sqrt{3}\vec{e}_z \Rightarrow \vec{e}_i=-\frac{1}{2}\vec{e}_x+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_i=\eta_1\vec{H}_i\times\vec{e}_i=\eta_0\sin(\omega t+2x-2\sqrt{3}z)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-2\vec{e}_y-\frac{1}{2}\vec{e}_z\right)$$

$$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$



确定反射波和透射波的方向

$\because$ 分界面为$z=0$，故法向方向应为 $\vec{e}_z$ 方向，

而入射角即入射线与法向方向的夹角。

$$\therefore \cos\theta_i=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_i=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta_i=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta_r=\theta_i=\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \sin\theta_t=\sin\theta_i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}},\quad \sin\theta_t=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

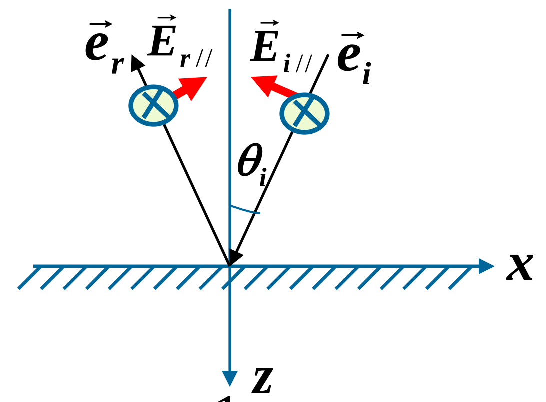
$\because \vec{k}_i=-2\vec{e}_x+2\sqrt{3}\vec{e}_z$，且入射波与反射波关于z轴对称$\Rightarrow \vec{k}_r=-2\vec{e}_x-2\sqrt{3}\vec{e}_z$

确定反射波的复振幅

$$\vec{E}_i=\eta_0\sin(\omega t+2x-2\sqrt{3}z)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-2\vec{e}_y-\frac{1}{2}\vec{e}_z\right)$$

$\because \vec{k}_i=-2\vec{e}_x+2\sqrt{3}\vec{e}_z$，入射面为xoz平面

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}_{i//}=\vec{e}_xE_x+\vec{e}_zE_z=\eta_0\sin(\omega t+2x-2\sqrt{3}z)\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\dfrac{1}{2}\vec{e}_z\right)\Leftrightarrow\boxed{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\dfrac{1}{2}\vec{e}_z\right)}\boxed{E_{i0//}}\boxed{e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}}\\ \vec{E}_{i\perp}=\vec{e}_yE_y=\eta_0\sin(\omega t+2x-2\sqrt{3}z)\left(-2\vec{e}_y\right)\Leftrightarrow\vec{e}_y\boxed{E_{i0\perp}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}}\end{cases}$$



$$\vec{H}_i=\frac{1}{\eta_1}\vec{k}_i\times\vec{E}_i$$

可求得：

$$\begin{cases}R_{//}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}\approx0.22\\ R_{\perp}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}\approx-0.31\end{cases}$$

又 $\begin{cases}E_{i0//}=\eta_0\\ E_{i0\perp}=-2\eta_0\end{cases}$

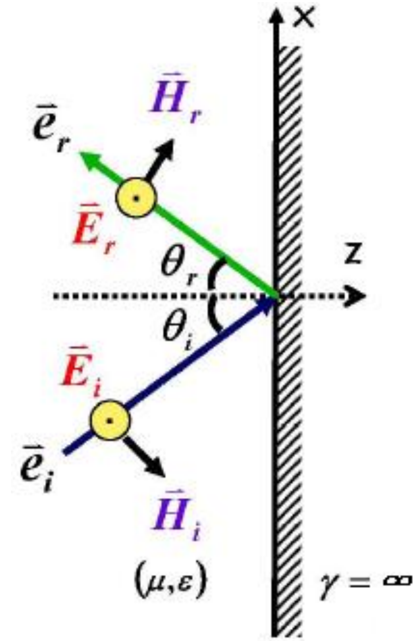
$$\vec{k}_r=-2\vec{e}_x-2\sqrt{3}\vec{e}_z$$

$$\therefore\vec{E}_r=\vec{E}_{r\perp}+\vec{E}_{r//}=\vec{e}_yR_{\perp}\underline{E_{i0\perp}}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\frac{1}{2}\vec{e}_z\right)R_{//}E_{i0//}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}$$

$$\Leftrightarrow\vec{e}_y(-0.31)\underline{(-2\eta_0)\sin\left(\omega t+\vec{k}_r\cdot\vec{r}\right)}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\frac{1}{2}\vec{e}_z\right)\eta_0(0.22)\sin\left(\omega t+\vec{k}_r\cdot\vec{r}\right)$$

$$=\left[0.62\vec{e}_y+0.22\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x-\frac{1}{2}\vec{e}_z\right)\right]\eta_0\sin\left(\omega t+2x+2\sqrt{3}z\right)\quad(\mu V/m)$$

二、理想导体表面的斜入射



将媒质2看成理想导体$\gamma_2=\infty$，则 $\eta_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon-j\dfrac{\gamma}{w}}}=0$

$\Rightarrow\begin{cases}R_\perp=-1\\T_\perp=0\end{cases}\quad\begin{cases}R_{//}=1\\T_{//}=0\end{cases}$　　全反射，无透射波，由电场边界条件推出

1、垂直极化波

设$z<0$处为理想介质（μ,ε,波数k）， 且$\theta_\mathrm{i}=\theta_\mathrm{r}=\theta$

$$\vec{E}_i=\vec{e}_yE_{i0}e^{-j\vec{k}_i\cdot\vec{r}}=\vec{e}_yE_{i0}e^{-jk(x\sin\theta+z\cos\theta)}=\vec{e}_yE_{i0}e^{-j(k_xx+k_zz)}$$

$$\vec{E}_r=\vec{e}_yE_{r0}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}=\vec{e}_y(-E_{i0})e^{-jk(x\sin\theta-z\cos\theta)}=\vec{e}_y(-E_{i0})e^{-j(k_xx-k_zz)}$$

合成电磁场：

$$\vec{E}=\vec{E}_i+\vec{E}_r=\vec{e}_yE_{i0}e^{-jk_xx}\left[e^{-jk_zz}-e^{jk_zz}\right]=\vec{e}_yE_{i0}e^{-jk_xx}\left[-2j\sin(k_zz)\right]$$

$$\vec{H}=\vec{H}_i+\vec{H}_r=\frac{1}{\eta}\vec{e}_i\times\vec{E}_i+\frac{1}{\eta}\vec{e}_r\times\vec{E}_r=-\frac{2E_{i0}}{\eta}e^{-jk_xx}\left[\vec{e}_x\cos\theta\cos(k_zz)+j\vec{e}_z\sin\theta\sin(k_zz)\right]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{e}_y E_{i0} e^{-jk_x x}\left[e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}\right] = \vec{e}_y E_{i0} \boxed{e^{-jk_x x}}\left[-2j\sin(k_z z)\right]$$

$$\vec{H} = -\frac{2E_{i0}}{\eta}\boxed{e^{-jk_x x}}\left[\vec{e}_x \cos\theta\cos(k_z z) + j\vec{e}_z \sin\theta\sin(k_z z)\right]$$

合成的电磁波具有下列性质：

1、在x方向上

- 合成的电磁波是沿x方向的行波，

$$V_{px} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sin\theta} > v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$ 称为理想介质中的光速

- 合成的电磁波为TE波（横电波）或H波（磁波）
- 为平面波，等相位面为$x = const$，但为非均匀平面波，因等相位面上振幅值随z变化。

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_{i0} e^{-jk_x x}\left[-2j\sin(k_z z)\right]$$

$$\vec{H} = -\frac{2E_{i0}}{\eta} e^{-jk_x x}\left[\vec{e}_x \cos\theta\cos(k_z z) + j\vec{e}_z \sin\theta\sin(k_z z)\right]$$

2、能速

$$\because \vec{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right] = \mathrm{Re}\left[-\vec{e}_z j\frac{|E_{i0}|^2}{\eta}\cos\theta\sin(2k_z z) + \vec{e}_x\frac{2E_{i0}}{\eta}\sin\theta\sin^2(k_z z)\right]$$

$$= \vec{e}_x\frac{2E_{i0}}{\eta}\sin\theta\sin^2(k_z z)$$

$$\Rightarrow v_e = \frac{S_{av}}{w_{av}} = \vec{e}_x\frac{2E_{i0}\sin\theta\sin^2(k_z z)/\eta}{\varepsilon|E|^2/2} = \vec{e}_x\frac{2E_{i0}\sin\theta\sin^2(k_z z)/\eta}{\varepsilon\left[2E_{i0}\sin(k_z z)\right]^2/2} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v\sin\theta \le v$$

$V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sin\theta}$ $\quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 称为理想介质中的光速

$$v_e \cdot v_p = v^2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{e}_y E_{i0} e^{-jk_x x}\left[-2j\sin(k_z z)\right]$$

$$\vec{H} = -\frac{2E_{i0}}{\eta} e^{-jk_x x}\left[\vec{e}_x \cos\theta \cos(k_z z) + j\vec{e}_z \sin\theta \sin(k_z z)\right]$$

3、在z方向上

- **合成的电磁波是纯驻波** E_y与H_x在相同时刻上相位相差90°，所以$\vec{S}_{av,z} = 0$

$$E_y = -2E_{i0}\sin(k_z z)\cos(\underline{\omega t - k_x x + \frac{\pi}{2}}) \qquad H_x = -\frac{2E_{i0}}{\eta}\cos\theta\cos(k_z z)\cos(\underline{\omega t - k_x x})$$

- **波节点（场量振幅为0）和波腹点（场量振幅为最大值）**

$$E_y = 0 \Rightarrow k_z z = n\pi \Rightarrow k\cos\theta z = n\pi (n = 0,1,2\cdots)$$

$$\boxed{z = \frac{-n\pi}{k\cos\theta} = \frac{-\lambda n}{2\cos\theta}(n = 0,1,2\cdots)}$$

E_y, H_z的波节点

H_x的波腹点

$$H_x = 0 \Rightarrow k_z z = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k\cos\theta z = n\pi + \frac{\pi}{2}(n = 0,1,2\cdots)$$

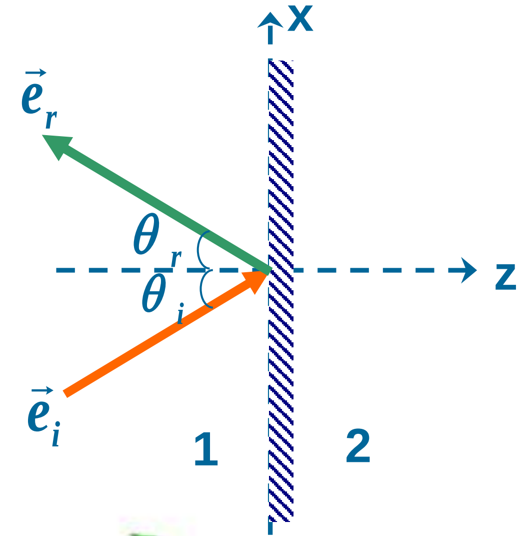
$$\boxed{z = \frac{-(2n+1)\pi}{2k\cos\theta} = -(2n+1)\frac{\lambda}{4\cos\theta}(n = 0,1,2\cdots)}$$

H_x的波节点

E_y, H_z的波腹点

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{e}_y E_{i0} e^{-jk_x x}\left[-2j\sin(k_z z)\right]$$

$$\vec{H} = -\frac{2E_{i0}}{\eta} e^{-jk_x x}\left[\vec{e}_x \cos\theta\cos(k_z z) + j\vec{e}_z \sin\theta\sin(k_z z)\right]$$



应用：

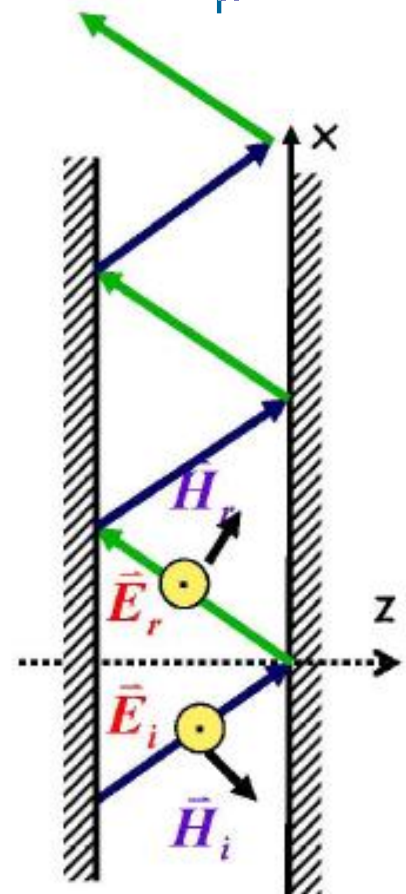
在$z = \dfrac{-n\pi}{k\cos\theta} = \dfrac{-\lambda n}{2\cos\theta}(n = 0,1,2\cdots)$处，

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_y = 0$$

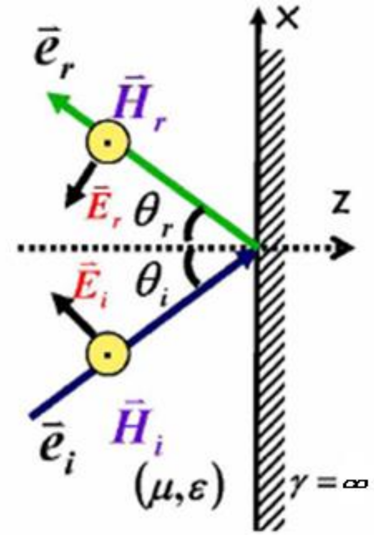
根据时变场的唯一性定理，区域边界上电场切向分量给定（或磁场切向分量给定），则区域中的场是唯一确定的，在此处放置理想导体平板，不会破坏原有的场结构。

可见电磁波可在两块理想导体限定的区域内沿导体表面传播，这两块导体可构成导行TE波的平行板波导。

这样传输的电磁波称为导行电磁波。



2、平行极化波 $R_{//}=1, T_{//}=0$



$$\vec{E}=-2E_{i0}\left[\vec{e}_x j\cos\theta\sin(k_z z)+\vec{e}_z\sin\theta\cos(k_z z)\right]e^{-jk_x x}=\vec{e}_x E_x+\vec{e}_z E_z$$

$$\vec{H}=\vec{e}_y\frac{2E_{i0}}{\eta}e^{-jk_x x}\left[e^{-jk_z z}+e^{jk_z z}\right]=\vec{e}_y\frac{2E_{i0}}{\eta}e^{-jk_x x}\left[2\cos(k_z z)\right]=\vec{e}_y E_y$$

类似分析可得，其合成波具有下列性质：

1、在x方向上，合成的电磁波是沿x方向的行波，为TM波

•为非均匀平面波，x方向上行波的速度为：

$$V_{px}=\frac{v}{\sin\theta}>v \quad v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$ 称为理想介质中的光速

$$\vec{S}_{av}=\vec{e}_x\frac{2E_{i0}}{\eta}\sin\theta\sin^2(k_z z) \qquad v_e=\frac{\vec{S}_{av}}{w_{av}}=V_p\sin\theta\le v$$

2、在z方向上，合成的电磁波是纯驻波

E_y与H_x在时间上相差90°的相位，所以$\vec{S}_{av,z}=0$

$$\boxed{z_1=\frac{-\lambda n}{2\cos\theta}(n=0,1,2\cdots)}$$ E_z, H_y的波腹点E_x的波节点

$$\boxed{z_2=-(2n+1)\frac{\lambda}{4\cos\theta}(n=0,1,2\cdots)}$$ E_x的波腹点H_y的波节点

应用：在$z1$处放置无限大理想导体板，可构成导行TM的平行导体板。

三、理想介质分界面斜入射的两种特殊情形：全反射与全折射

1、全反射 $\boxed{|R_{\perp}|=|R_{//}|=1}$

对于非磁性物质($\mu1=\mu2=\mu0$)，由$Snell$折射定律可知：$\dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\dfrac{n_2}{n_1}$

当$n_1>n_2(\varepsilon_1>\varepsilon_2)$，即平面波从光密媒质入射到光疏媒质时

$\Rightarrow\theta_i<\theta_t$，且$\theta_i\uparrow$， $\theta_t\uparrow$ 当θ_i增大到某个临界角θ_c时， 可使$\theta_t=\pi/2$

此时，折射波将贴着分界面传播。 称θ_c为临界角

$$\text{令}\theta_t=\pi/2\Rightarrow\sin\theta_c=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\frac{n_2}{n_1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\theta_c=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\arcsin\frac{n_2}{n_1}}$$

$(a)\quad\theta_i=\theta_c$时，$\Rightarrow\theta_t=\pi/2, |R_{\perp}|=|R_{//}|=1$ 　发生全反射

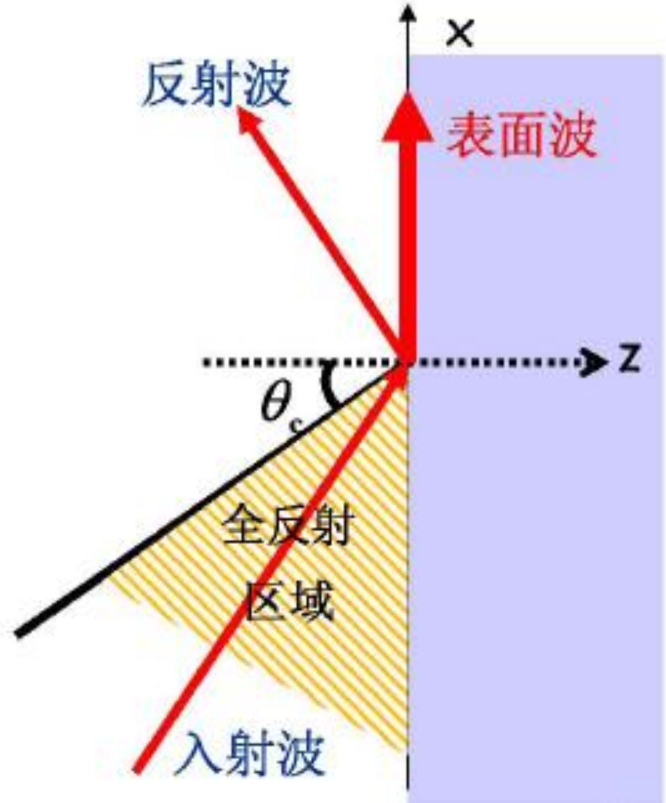
$$(b)\quad\theta_i>\theta_c\text{时},\Rightarrow\sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i>\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_c=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=1$$

即$\sin\theta_t>1\Rightarrow\cos\theta_t=\pm j\sqrt{\sin^2\theta_t-1}$ 　$\Rightarrow R$是复数， 但$|R|=1$,且$T\neq0$

发生全反射，还存在沿表面传播的折射波，即表面波。

斜入射的均匀平面波发生全反射的条件：

$$\begin{cases} \varepsilon_1 > \varepsilon_2, & \text{从光密到光疏媒质} \\ \theta_i > \theta_c = \arcsin\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \arcsin\dfrac{n_2}{n_1} \end{cases}$$



当 $\theta_i > \theta_c$ 时，折射波一方面在分界面表面沿x方向传播，另一方面沿z轴方向按指数形式衰减(振幅随进入介质2的深度迅速衰减)。这种波称为分界面上的表面波。

可以证明进入介质2的平均能流密度（平均功率）为零，即没有能量进入介质2。

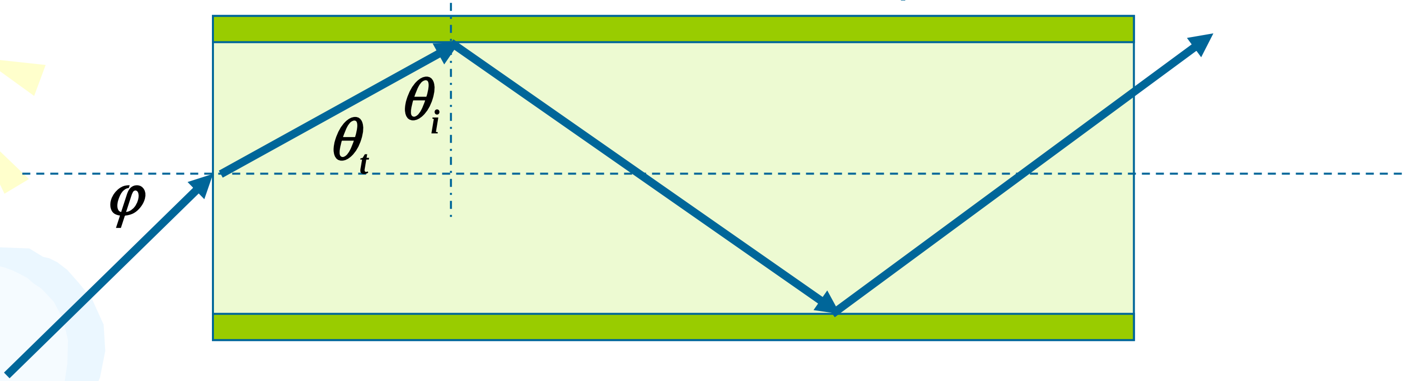
全反射是平均功率的全反射，不是场强的全反射

应用：是实现表面波传输的基础，广泛应用于介质波导和光纤技术中。

如光纤就是利用光纤纤芯和包层分界面上的全内反射效应传输光通信信号的。

假设光束从折射率为n_0的媒质斜入射进入光纤

光纤纤芯的折射率为n_1，包层的折射率为n_2, $n_1>n_2$



$$\left.\begin{aligned}&\theta_i>\theta_c=\arcsin\frac{n_2}{n_1}\\&\theta_i+\theta_t=\pi/2\\&\frac{\sin\varphi}{\sin\theta_t}=\frac{n_1}{n_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sin\varphi\le\frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\Rightarrow \boxed{\varphi\le\varphi_m=\arcsin\frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

定义：φ_m为光纤的接收角，$NA=\sin\varphi_m$为光纤的数值孔

若从空气中入射，即$n_0=1$，则$NA=\sin\varphi_m=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$

n_1和n_2相差越大，NA越大，φ_m越大，捕获能力越强。

但不同的φ，对应的θ_i不同，轴向传播速度不同，将导致信号畸变，

一般光纤n_1和n_2相近，称为弱导光纤。

$$V_{px}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}\sin\theta}$$

2、全折射 $\boxed{|R|=0}$

假设$\mu_1=\mu_2=\mu_0$

➢**对于平行极化波** $R_{//}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}$

令$R_{//}=0$ ⇨ $\boxed{\theta_i=\theta_B=\arcsin\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}=\arctan\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$ θ_B称为布儒斯特角

当$\theta_i=\theta_B$时，平行极化波无反射(全折射)，能量将全部传入媒质2

且$\theta_i=\theta_B$时，由折射定律⇒ $\theta_t=\pi/2-\theta_B$

➢**对于垂直极化波**

$\because R_{\perp}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}$ 令$R_{\perp}=0$ $\cos\theta_i=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}$ ⇨ $\varepsilon_2=\varepsilon_1$

与$\varepsilon_2\neq\varepsilon_1$矛盾

垂直极化波在两种不同的非磁性介质的界面上不会发生全折射现象

应用：极化滤波 θ_B又称为极化角