§ 2.4 麦克斯韦方程组

一、 Maxwell 方程组的基本形式

1864 年， Maxwell 高度概括和完整总结了宏观电磁现象基本规律，并给出了严格的数学表达式，即

积分形式

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \\
\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \\
\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV = \sum q
\end{cases}
$$

微分形式

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
\nabla\cdot\vec{D} = \rho_v
\end{cases}
$$

依次称为 Maxwell 方程的第一、二、三、四方程。

二、 Maxwell 方程组的物理意义

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

方程 1 是安培环路定律的推广， Maxwell 引入了位移电流。它表明电流和时变的电场（即位移电流）都是可以激发磁场的，是磁场的漩涡源；

方程 2 是法拉第电磁感应定律的推广。 Maxwell 提出了感应电场 / 漩涡电场假说，感应电动势不过是漩涡电场的环量(与导体回路无关)。它表明时变的磁场将激发电场，是感应电场的漩涡源；

方程 3 是磁通连续性原理。说明磁场是管形场，无通量源，不存在“磁荷”

方程 4 是高斯定理，说明电场可以由电荷产生，电荷是电场的通量源

描述了电磁场和它的场源之间的全部关系：方程 1 和方程 2 表示了电场和磁场的漩涡性质，方程 3 和方程 4 表示电场和磁场各自的通量性质；

方程 1 和 2 反映了电场和磁场的关系。即变化的电场可以激发磁场，而变化的磁场也可以激发电场；电、磁场可以相互激发，从而在空间形成电磁波；

矢量线的特点：电力线可以是闭合且与磁力线相交链的，也可以是始于正电荷止于负电荷；磁感应线一定是闭合且与电流线或电力线相交链，与电流方向成右手螺旋关系

3、 Maxwell 方程组的独立方程和非独立方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Maxwell 方程中四个方程并不完全是独立的。只有两个旋度方程是独立的，而散度方程可由旋度方程和电流连续性方程导出。即独立方程为：

由旋度方程和电流连续性方程可导出散度方程

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\cdot(\nabla\times\vec{E})=\nabla\cdot(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})=-\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{B})}{\partial t}=0\Rightarrow\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=\nabla\cdot(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\\&=\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{D})}{\partial t}=0\\&\because\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{D})}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{D}=\rho_v$$

独立方程和非独立方程也不是绝对的

如由 Maxwell 方程 1 和 4 可导出电流连续性方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{D})}{\partial t}=0\\&\because\nabla\cdot\vec{D}=\rho_v\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

4、 Maxwell 方程组的辅助方程

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

无论选择哪三个方程作为独立方程，这三个独立方程中包含 5 个矢量 $\vec{E}$ 、 $\vec{D}$ 、 $\vec{B}$ 、 $\vec{H}$ 和 $\vec{J}$ 以及一个标量，共有 16 个标量函数。三个独立方程对应有 7 个标量方程。

还需要 9 个标量方程。这就是表述场矢量与媒质特性关系的方程，称为媒质的本构关系。

在线性、各向同性媒质中，有

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J}_c = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

媒质的本构关系即 Maxwel 方程组的辅助方程。

5、 Maxwell 方程组的限定形式与非限定形式

用矢量 $\vec{E}$、 $\vec{D}$、 $\vec{B}$、 $\vec{H}$ 四个场量的 Maxwell 方程称为非限定形式的 Maxwell 方程组,它是适合于任何媒质的。所谓“**非限定**”是指在媒质没有确定之前，即使已知场源分布，这四个场量仍无法确定。

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v
\end{cases}
$$

任何电磁场都存在于一定的媒质（包括真空）中，媒质（线性、各向同性）的本构关系：

$$
\begin{cases}
\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\
\vec{B} = \mu \vec{H} \\
\vec{J}_c = \sigma \vec{E}
\end{cases}
$$

将场量 $\vec{D}$、 $\vec{B}$、$\vec{J}$用矢量 $\vec{E}$、 $\vec{H}$表示后，Maxwell 方程组就只含有矢量 $\vec{E}$、 $\vec{H}$两个未知量，称为**限定形式**的 Maxwell 方程组 .

$$
\begin{cases}
\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{外} + \sigma \vec{E} + \dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \vec{E}) \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{H}) \\
\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \\
\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho_v
\end{cases}
$$

6、 几种特殊情形的Maxwell 方程组形式

(1） 静态场：当所有的源量和场量都不随时间变化

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{J}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial\boldsymbol{t}}\\ \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial\boldsymbol{t}}\\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0\\ \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho\end{cases}\quad\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}=0}\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$$

此时，电场与磁场已不存在相互耦合，各场矢量都只是空间位置的函数

方程 1 和 3 称为恒定磁场基本方程，表示恒定磁场由其旋涡源，即不随时间变化的恒定电流所产生，且恒定磁场是无源场。

方程 2 和 4 称为静电场基本方程，表示静电场由其通量源，即静电荷所产生，且静电场是无旋场；

(2) 准静态场/似稳场

(a) 磁准静态场：当 $\vec{J} >> \vec{J}_d$ 时，可以忽略位移电流的作用；

(b) 电准静态场：时变场中，如果电荷产生的库仑电场远大于感应电场，则可忽略$\partial B/\partial t$ 项的作用，只考虑电荷所产生的库仑电场。

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \xrightarrow{\vec{J} >> \vec{J}_d = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}} \begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \vec{J} \\ \nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \vec{J} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{忽略}\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}} \begin{cases} \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla\times\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho \end{cases}$$

可分别近似按恒定磁场或静电场的方法计算，求解比较简单、容易，在一定条件下可满足工程计算的精度

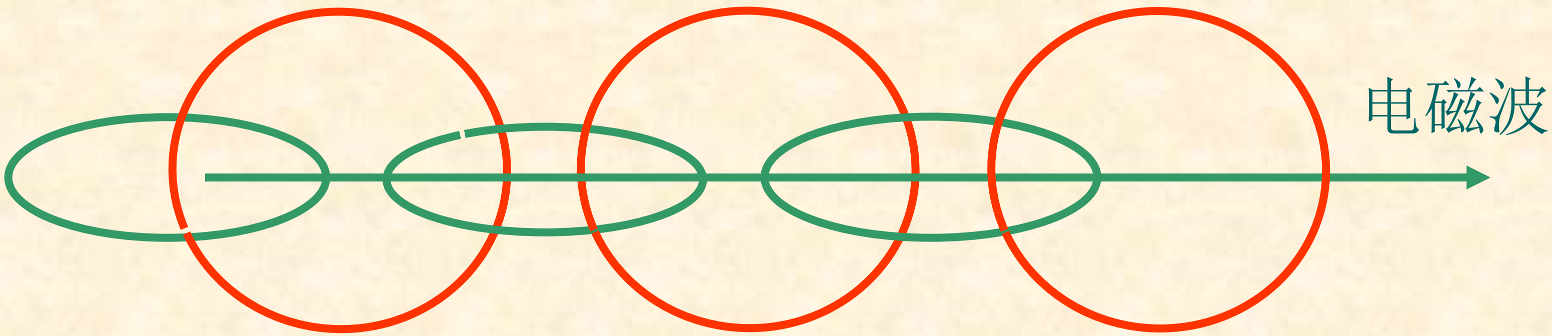
(3) 无源场

在无源的空间(理想介质)区域中，

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{外}+\sigma\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\nabla\cdot\vec{B}=0\\
\nabla\cdot\vec{D}=\rho
\end{cases}
\xrightarrow{\rho=0,\vec{J}=0}
\begin{cases}
\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\
\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\nabla\cdot\vec{B}=0\\
\nabla\cdot\vec{D}=0
\end{cases}
$$

Maxwell 方程中的初始源是电流和电荷，一旦场源电荷和电流在空间激发起时变的电磁场，即使场源电荷和电流不再继续存在，时变的电场和磁场也可以相互激发，形成可以脱离场源而在空间中传播的电磁波。

Maxwell建立了宏观电磁场现象的统一理论，奠定了无线电技术理论基础。在时变电磁场中，变化的磁场激发旋涡电场；而变化的电场同样可以激发涡旋磁场。电场与磁场之间的相互激发可以脱离电荷和电流而发生。电场与磁场的相互联系，相互激发，时间上周而复始，空间上交链重复。这一过程预示着波动是电磁场的基本运动形态。



这一预言在Maxwell去世后（1879年）近10年的时间内，由德国科学家Hertz通过实验证实。从而证明了Maxwell的假设和推广的正确性。