6.4 时谐电磁场

Maxwell方程组和边界条件的复数形式

➢时谐电磁场：电磁场中矢量的每个坐标分量及标量函数都随时间以相同的频率作简谐规律变化的时变电磁场，也称正弦电磁场。

➢为什么要研究时谐电磁场?

1、易于激励，在工程上应用广泛。

2、在线性媒质中，麦氏方程组是线性偏微分方程组（线性时不变系统），当场源随时间按一定频率作正弦变化时，将使场量产生相同频率的正弦变化。

3、对于随时间任意变化的源函数，可由傅立叶分析得到源函数的各频率分量,将各频率分量源所产生的场叠加起来得到总场。

一、场量和场源的复数形式

➢对任何简谐变化的场矢量可用复矢量表示

以电场强度为例，考虑直角坐标系电场强度的三个分量可用余弦函数表示

用复数的实部表示

$$E_x(x,y,z,t)=E_{xm}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_x(x,y,z)]$$

$$E_y(x,y,z,t)=E_{ym}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_y(x,y,z)]$$

$$E_z(x,y,z,t)=E_{zm}(x,y,z)\cos[\omega t+\varphi_z(x,y,z)]$$

$$E_x=\mathrm{Re}\left[E_{xm}e^{j(\omega t+\varphi_x)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{E}_{xm}e^{j\omega t}\right]$$

$$E_y=\mathrm{Re}\left[E_{ym}e^{j(\omega t+\varphi_y)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{E}_{ym}e^{j\omega t}\right]$$

$$E_z=\mathrm{Re}\left[E_{zm}e^{j(\omega t+\varphi_z)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{E}_{zm}e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{e}_xE_x+\vec{e}_yE_y+\vec{e}_zE_z$$

$$=\mathrm{Re}\left[\left(\vec{e}_x\dot{E}_{xm}+\vec{e}_y\dot{E}_{ym}+\vec{e}_z\dot{E}_{zm}\right)e^{jwt}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}e^{jwt}\right]$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\dot{E}_{xm}&=E_{xm}e^{j\varphi_x}\\ \dot{E}_{ym}&=E_{ym}e^{j\varphi_y}\\ \dot{E}_{zm}&=E_{zm}e^{j\varphi_z}\end{aligned}\right\}$$

称为

时谐电场的复振幅

$$\boxed{\text{复矢量}\,\dot{\vec{E}}(\vec{r})=\vec{e}_x\dot{E}_{xm}+\vec{e}_y\dot{E}_{ym}+\vec{e}_z\dot{E}_{zm}}$$

➢对任何简谐变化的标量，如电荷分布、电位可用复标量表示

$$\rho=\rho_m\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left[\rho_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\rho}e^{j\omega t}\right]$$

$$\boxed{\text{复标量}\ \dot{\rho}(\vec{r})=\rho_m e^{j\varphi}}$$

➢场量对时间微积分的复数表示

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\left[\boxed{\dot{\vec{E}}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\boxed{j\omega\dot{\vec{E}}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]$$

$$\int\vec{E}dt=\int\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]dt=\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})\int e^{j\omega t}dt\right]=\mathrm{Re}\left[\boxed{\frac{1}{j\omega}\dot{\vec{E}}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]$$

若 $\vec{E}\leftrightarrow\dot{\vec{E}}(\vec{r})$ 则

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\leftrightarrow j\omega\dot{\vec{E}}(\vec{r})$$

$$\int\vec{E}dt\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}\dot{\vec{E}}(\vec{r})$$

➢场量对空间求导的复数表示

$$\nabla\bullet\vec{E}=\nabla\bullet\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\boxed{\nabla\bullet\dot{\vec{E}}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]$$

$$\nabla\times\vec{E}=\nabla\times\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\boxed{\nabla\times\dot{\vec{E}}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]$$

$$\nabla\phi=\nabla\mathrm{Re}\left[\dot{\phi}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\boxed{\nabla\dot{\phi}(\vec{r})}e^{j\omega t}\right]$$

$$\vec{E}\leftrightarrow\dot{\vec{E}}(\vec{r})$$
$$\nabla\bullet\vec{E}\leftrightarrow\nabla\bullet\dot{\vec{E}}(\vec{r})$$
$$\nabla\times\vec{E}\leftrightarrow\nabla\times\dot{\vec{E}}(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r},t)\leftrightarrow\dot{\phi}(\vec{r})$$
$$\nabla\phi(\vec{r},t)\leftrightarrow\nabla\dot{\phi}(\vec{r})$$

二、Maxwell方程组的复数形式

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[j\omega \dot{\vec{E}}(\vec{r})\, e^{j\omega t} \right] \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r})\, e^{j\omega t} \right]$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_C + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \left[\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{H}}\, e^{jwt} \right) \right] = \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{J}}\, e^{jwt} \right) + \mathrm{Re}\left(jw\, \dot{\vec{D}}\, e^{jwt} \right) \\ \nabla \times \left[\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{E}}\, e^{jwt} \right) \right] = \mathrm{Re}\left(-jw\, \dot{\vec{B}}\, e^{jwt} \right) \\ \nabla \cdot \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{B}}\, e^{jwt} \right) = 0 \\ \nabla \cdot \mathrm{Re}\left(\dot{\vec{D}}\, e^{jwt} \right) = \mathrm{Re}\left(\dot{\rho}\, e^{jwt} \right) \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\left[\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] = \mathrm{Re}[-j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} = -j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t}$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) = -j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r})$$

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + jw\, \dot{\vec{D}} \\ \nabla \times \dot{\vec{E}} = -jw\, \dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho} \end{cases}$$

➢类似及可得Maxwell方程组积分形式的复数形式

$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} \\ \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho dv \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \oint_C \dot{\vec{H}} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\dot{\vec{J}} + j\omega \dot{\vec{D}} \right) \bullet d\vec{S} \\ \oint_C \dot{\vec{E}} \bullet d\vec{l} = -j\omega \int_S \dot{\vec{B}} \bullet d\vec{S} \\ \int_S \dot{\vec{B}} \bullet d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \dot{\vec{D}} \bullet d\vec{S} = \int_V \dot{\rho} dv \end{cases}}$$

➢电流连续性方程

$$\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\nabla \bullet \dot{\vec{J}} = -j\omega\dot{\rho}} \quad \boxed{\oint_S \dot{\vec{J}} \bullet d\vec{S} = -j\omega \int_V \dot{\rho} dv}$$

➢线性各向同性媒质中的本构关系

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\boxed{\dot{\vec{D}} = \varepsilon \dot{\vec{E}} \quad \dot{\vec{B}} = \mu \dot{\vec{H}} \quad \dot{\vec{J}} = \gamma \dot{\vec{E}}}$$

三、时谐场的边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J} \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{e}_n \times (\dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_1) = \dot{\vec{J}} \\ \vec{e}_n \times (\dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{B}}_2 - \dot{\vec{B}}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{D}}_2 - \dot{\vec{D}}_1) = \dot{\rho} \end{cases}}$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \nabla_s \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{J}}_2 - \dot{\vec{J}}_1) + \nabla_s \cdot \dot{\vec{J}}_s = -jw\dot{\rho}_s}$$

注意：为表达简单，常省略复量上的点，即以后用不带点的符号表示复量，而时间函数均含有自变量*t*，不会产生混淆。

四、瞬时值形式与复数形式的相互转换

设场量的复数形式为：$\boxed{\vec{E}(\vec{r})}$ 省略复量上的点

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}$$

设场量的实数形式为：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{e}_x E_{xm}\cos(\omega t + \phi_x) + \vec{e}_y E_{ym}\cos(\omega t + \phi_y) + \vec{e}_z E_{zm}\cos(\omega t + \phi_z)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\times e^{j\omega t}} (\vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}) e^{j\omega t} \xrightarrow{\text{取 实 部}}$$

$$\mathrm{Re}[(\vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}) e^{j\omega t}] = \vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}\, e^{j\omega t}\right]}$$

例6-4-1 真空中时谐场的电场瞬时值为：

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 0.3\sin\left(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z\right)+\vec{e}_x 0.4\cos\left(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{3}\right)\quad (V/m)$$

求：1）电场强度复矢量；2）磁场强度复矢量及其瞬时值

解：1）将各分量的时间函数用余弦函数表示

$$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 0.3\cos\left(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{2}\right)+\vec{e}_x 0.4\cos\left(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\vec{e}_x 0.3\,\mathrm{Re}\left[e^{j(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{2})}\right]+\vec{e}_x 0.4\,\mathrm{Re}\left[e^{j(10^8\pi t-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{3})}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left[\boxed{\vec{e}_x 0.3e^{j(-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{2})}+\vec{e}_x 0.4e^{j(-\frac{\pi}{3}z-\frac{\pi}{3})}}\right]e^{j10^8\pi t}\right\}$$

电场强度的复矢量

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[\vec{e}_x 0.3 e^{j(-\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{2})} + \vec{e}_x 0.4 e^{j(-\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{3})} \right]$$

$$= \vec{e}_x 0.2 \left[1 - j(1.5 + \sqrt{3}) \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

2）已知电场强度复矢量，利用Maxwell第二方程求磁场强度复矢量。

$$\because \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}$$

$$\therefore \vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu_0} = \vec{e}_y \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[1 - j\left(1.5 + \sqrt{3}\right) \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z} (A/m)$$

求$\vec{H}$复矢量对应的瞬时时间形式表示

先化成指数形式表示

$$\because \dot{\vec{H}} = \vec{e}_y \frac{1}{600\pi}\left[1 - j\left(1.5 + \sqrt{3}\right)\right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi}\left[(1 - j\sqrt{3}) - j1.5\right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi}\left[2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 1.5e^{-j\frac{\pi}{2}}\right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$\therefore \vec{H} = \mathrm{Re}\left[\dot{\vec{H}} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left\{\left[\vec{e}_y \frac{1}{600\pi}\left[2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 1.5e^{-j\frac{\pi}{2}}\right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}\right] e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{300\pi}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}z\right) + 0.75\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}z\right)\right]$$

6.5 时谐场中的亥姆霍兹方程

1、场强复矢量的亥姆霍兹方程

简单、无源媒质中

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\gamma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\gamma \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu\gamma \vec{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - j\omega\mu\gamma \vec{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{H} = 0 \end{cases}}$$

复数形式的波动方程，即（齐次）亥姆霍兹方程

(1）对于非导电的理想介质（γ=0)

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{H} = 0 \end{cases}} \xrightarrow{\text{令} k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon} \boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{称} k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \text{ 为波数}}$$

（1）对于理想介质（γ=0）

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}$$

$$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

（2）对于γ≠∞，0的导电媒质

$$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}-j\omega\mu\gamma\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}-j\omega\mu\gamma\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu(\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega})\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu(\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega})\vec{H}=0\end{cases}$$

导电媒质的复介电常数

令$\varepsilon_c=\varepsilon-j\dfrac{\gamma}{\omega}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon_c\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon_c\vec{H}=0\end{cases}$$

引入ε_c后，导电媒质中的场方程与理想介质中的场方程的形式完全相同。

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\vec{D}\qquad\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}$$

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}\qquad\nabla\times\vec{H}=\gamma\vec{E}+j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega(\varepsilon-j\frac{\gamma}{\omega})\vec{E}$$

将导电媒质等效地看作一种介质，将传导电流和位移电流用一个等效的位移电流代替，相应的等效介电常数为ε_c。

令$K^2=\omega^2\mu\varepsilon_c$

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+K^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+K^2\vec{H}=0\end{cases}$$

称$K=\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$为复波数

- **直接对矢量方程求解**
- **或将矢量方程转化为标量方程求解，再应用分离变量法。**

2、位函数及非齐次的亥姆霍兹方程

（1）位函数定义式

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \text{(洛仑兹规范)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} + j\omega\vec{A} = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\phi \end{cases}}$$

（2）达朗贝尔方程的复数形式（线性各向同性的不导电媒质，有源）

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + \omega^2\mu\varepsilon\vec{A} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2 \phi + \omega^2\mu\varepsilon\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}}$$

令$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\vec{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}}$$

也称非齐次亥姆霍兹方程

(3) 讨论

$$\boxed{\begin{cases}\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=-\mu\vec{J}\\ \nabla^2\phi+k^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}}$$

由洛仑兹条件 $\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\Rightarrow\phi=\dfrac{\nabla\cdot\vec{A}}{-j\omega\mu\varepsilon}=\dfrac{j\omega\nabla\cdot\vec{A}}{\omega^2\mu\varepsilon}=\dfrac{j\omega\nabla\cdot\vec{A}}{k^2}$

代入定义式 $\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow\vec{E}=-j\omega\left[\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{A})}{k^2}+\vec{A}\right]\\ &\text{又}\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\end{aligned}\right\}\ \text{显然，只需求}\vec{A}\text{,即可求得}\vec{E}\text{和}\vec{B}$$

6.6 复坡印廷定理和复坡印廷矢量

➢坡印廷定理及坡印廷矢量

瞬时形式的坡印廷定理：$$\boxed{-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_V (w_m + w_m)dv + \int_V pdv}$$

瞬时形式的坡印廷矢量：$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t)\times\vec{H}(t)$$

➢一般，$\vec{S}$的大小和流向都是随时间变化的，为了能对能流的大小有一个更明确的判断，往往需要知道其时间平均值。

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)\right]dt$$

➢下面讨论与时谐场平均功率及平均功率流密度相关的复坡印廷定理及坡印廷矢量。

一、时谐实矢量乘积的时间平均值

(1)两个随时间作时谐变化的实矢量的叉积的时间平均值等于其相应的复矢量共轭叉积实部的一半。

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left[\vec{A}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]dt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r})\right]$$

$$\because \mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{A}(\vec{r})+\vec{A}^*(\vec{r})\right]$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{A}(\vec{r})e^{j\omega t}+\vec{A}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right]$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{1}{2}\left[\vec{A}(\vec{r})e^{j\omega t}+\vec{A}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right]\times\frac{1}{2}\left[\vec{B}(\vec{r})e^{j\omega t}+\vec{B}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r})+\vec{A}^*(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\right]+\frac{1}{4}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})e^{j2\omega t}+\vec{A}^*(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r})e^{-j2\omega t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r})\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})e^{j2\omega t}\right]$$

式中右端第一项与时间无关，第二项是角频率为2ω的简谐矢量。周期为$T/2$。

$$\Rightarrow\frac{1}{T}\int_0^T\left[\vec{A}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right]dt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}^*(\vec{r})\right]$$

$$\boxed{\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]dt=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})\right]}$$

(2)类似可推得，两个随时间作时谐变化的实矢量的点积的时间平均值等于其相应的复矢量共轭点积实部的一半。

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{B}(\vec{r},t)\right]dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{B}^*(\vec{r})\right]}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T w_m dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})\right] = \frac{1}{4}\mu\vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T w_e dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})\right] = \frac{1}{4}\varepsilon\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{E}^*(\vec{r})$$

二、复坡印廷定理、复坡印廷矢量、平均坡印廷矢量

$$\because \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\vec{H}^*\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}^*)$$

$$=\vec{H}^*\cdot(-j\omega\vec{B})-\vec{E}\cdot(\vec{J}^*-j\omega\vec{D}^*)$$

$$\Rightarrow -\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\vec{E}\cdot\vec{J}^*+j\omega(\vec{B}\cdot\vec{H}^*-\vec{E}\cdot\vec{D}^*)$$

两端同乘以1/2，得：

$$\boxed{-\nabla\cdot\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}^*+2j\omega(\frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}^*-\frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{D}^*)}$$

复数Poynting定理的微分形式

对体积V积分，得：

$$\boxed{-\oint_S\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{s}=\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}^*\right)dv+2j\omega\int_V\left(\frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}^*-\frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)dv}$$

复数Poynting定理的积分形式

物理含义：

$$-\oint_S \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{s} = \int_V \left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}^*\right)dv + 2j\omega\int_V \left(\frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}^* - \frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)dv$$

热损耗功率密度的时间平均值

$$p_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T p(\vec{r},t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{J}(\vec{r},t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{J}^*(\vec{r})) = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}^*$$

➢**右端的实部，即第一项表示体积V内实际热损耗功率的平均值**

磁场能量密度的时间平均值

$$w_{mav}(\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T w_m dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{H}(\vec{r},t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{H}^*(\vec{r})\right] = \frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}^* = \frac{1}{4}\mu\vec{H}\cdot\vec{H}^*$$

电场能量密度的时间平均值

$$w_{eav}(\vec{r}) = \frac{1}{T}\int_0^T w_e dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{D}(\vec{r},t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}^*(\vec{r})\right] = \frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{D}^* = \frac{1}{4}\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}^*$$

➢**右端的虚部，即第二项表示体积V内磁场储能与电场储能的时间平均值之差的2ω倍。**

$$-\oint_S \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)\cdot d\vec{s} = \int_V \left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{J}^*\right)dv + 2j\omega\int_V \left(\frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}^* - \frac{1}{4}\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)dv$$

➢左端应表示通过闭合面S进入体积V内的复功率。

➢其中，进入闭合面S所围体积V内的有功功率，等于体积V内损耗的平均功率（焦耳热损耗）。而进入闭合面S所围体积V内的无功功率，等于体积V内储存的磁场能量时间平均值与电场能量时间平均值差值的2ω倍。

$$令\vec{S}_c = \frac{1}{2}(\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*)$$

复数坡印廷矢量

表示穿过单位面积的复功率，代表复功率密度

$$\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*\right]$$

平均坡印廷矢量

表示穿过单位面积瞬时功率的时间平均值，是平均功率流密度或有功功率流密度，即

$$\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}\left[\vec{S}_c\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\right]dt$$

6.8 时变场中的唯一性定理

在区域V中，如果$t=0$时，电场强度和磁场强度的值处处已知，并且在$t>=0$时，边界面上电场强度的切向分量**或**磁场强度的切向分量也是已知，那么在所有$t>0$时，区域V中的电磁场就唯一确定的。