第五章　离散时间随机信号

（Discrete-Time Random Signal）

主要内容:

§ **5.1** 引言

§ **5.2** 随机变量的描述

§ **5.3** 离散随机过程

§ **5.4** 时间平均

§ **5.5** 相关序列和协方差序列的性质

§ **5.6** 功率谱

§ **5.7** 离散随机信号通过线性非移变系统

§5.1 引言（Introduction）

离散时间信号可分成两大类：

离散时间确定信号和离散时间随机信号。

§5.2 随机变量的描述 (The Discription of Random Variables)

5.2.1 概率分布函数

单个随机变量x的概率分布函数定义为：它的取值不超过某个特定值X的概率，即：

$$P_x(X) \underline{\underline{\Delta}} [x \le X] \text{ 的概率}$$

如果**x**是连续随机变量，**x**的概率密度函数定义为：

$$P_x(X)=\int_{-\infty}^{\infty} p_x(X)dX \text{ 或 } \quad p_x(X)\triangleq\frac{\partial P_x(X)}{\partial X}$$

如果**x**是离散随机变量，**x**的概率质量函数定义为：

$$p_x(X)=[x=X] \text{ 的概率}$$

概率质量函数与概率分布函数的关系为：

$$P_x(X)=\sum_{x\le X} p_x(X)$$

5.2.2 均值

随机变量x的均值(数学期望)定义为：

$$m_x\triangleq E[x]\triangleq\int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx \quad \text{或} \quad m_x\triangleq E[x]\triangleq\sum_{x\in X} xp_x(x)$$

式中，X是x的离散值域，$p_x(x)$是概率质量函数。

m_x表示随机变量x的统计平均或集合平均，简称均值。

5.2.3 均值的性质

1、$E[x+y]=E[x]+E[y]$

2、$E[ax]=aE[x]$

3、对于线性独立的两随机变量**x**和**y**有：$E[xy]=E[x]E[y]$

5.2.4 方差

随机变量**x**的方差定义为：

$$\sigma_x^2 \triangleq E[(x-E[x])^2] \triangleq E[(x-m_x)^2] \qquad \sigma_x^2 = E[x^2]-m_x^2$$

其中 $E[x^2] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x)dx$ 或 $E[x^2] \triangleq \sum_{x\in X} x^2 p_2(x)$ 称为随机变量**x**的均方值。

§ 5.3离散随机过程(The Discrete Random Process)

5.3.1 离散随机过程

由无限多个随机变量构成的一个时间序列 $\{x_n\}(-\infty < n < \infty)$

5.3.2 联合概率分布函数

设x_n和x_m是离散随机过程 $\{x_n\}(-\infty < n < \infty)$ 中在两个不同时刻**n**和**m**上的随机变量，定义联合概率分布函数如下：

$$P_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = [x_n \le X_n \text{同时} x_m \le X_m] \text{ 的概率}$$

如果 x_n和 x_m是离散随机变量，(x_n, x_m)的联合质量分布函数定义为：

$$p_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = [x_n = X_n \text{同时} x_m = X_m] \text{ 的概率}$$

如果一个随机过程在不同时刻的随机变量互不影响，则称诸随机变量是统计独立的。此时有：

$$P_{x_n,x_m}(X_n,n,X_m,m)=P_{x_n}(X_n,n)P_{x_m}(X_m,m)$$

5.3.3 随机过程的数字特征(均值、方差和均方值)

对于狭义平稳随机过程，其数字特征与时间**n**无关，即对于所有的**n**，有：

$$m_{x_n}=\int_{-\infty}^{\infty}xp_{x_n}(x,n)dx=m_x$$

$$E[x_n^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p_{x_n}(x,n)dx=E[x^2]$$

$$\sigma_{x_n}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_{x_x})^2p_{x_n}(x,n)dx=\sigma^2$$

以上公式均是与时间无关的常量。

5.3.4 自相关序列

随机过程 $\{x_n\}$的自相关序列定义为：

$$R_{xx}(n,m) \triangleq E[x_n x_m^*] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{x_n,x_m}(X,n,X,m)dX_n dX_m$$

式中，星号*表示复共轭。

5.3.5 互相关序列

随机过程 $\{x_n\}$和 $\{y_n\}$的互相关序列定义为：

$$R_{xy}(n,m) \triangleq E[x_n y_m^*] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)dxdy$$

式中，$p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)$ 是 x_n与 y_m 的联合概率密度函数。

5.3.6 自协方差序列

随机过程 $\{x_n\}$ 的自协方差序列定义为：

$$C_{xx}(n,m) \triangleq E[(x_n - m_{x_n})(x_m - m_{x_m})^*]$$

5.3.7 互协方差序列

随机过程 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的互协方差序列定义为：

$$C_{xy}(n,m) \triangleq E[(x_n - m_{x_n})(y_m - m_{y_m})^*]$$

5.3.8 狭义平稳随机过程

两随机变量的联合概率密度函数只与它们的时间时间差有关，而与时间起点无关，自相关序列、自协方差

序列以及互相关序列和互协方差序列只是时间差的函数而与时间起点无关。

$$p_{x_n}(X_n, n) = p_{x_m}(X_m, m) = p_x(X)$$

$$p_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = p_{x_{n+k}, x_{m+k}}(X_{n+k}, n+k, X_{m+k}, m+k)$$

5.3.9　广义平稳随机过程

概率分布函数或概率密度函数是随时间变化的，联合概率密度函数也与时间起点有关，其均值是常数(与时间无关)，自相关序列只与时间差有关而与时间起点无关。简称为平稳随机过程或平稳过程。

§ 5.4 时间平均(Time-mean)

5.4.1 遍历性随机过程

一个平稳随机过程，它的一个取样序列的时间平均等于它的集合平均。

5.4.2 随机过程的时间平均

随机过程 $x(n)$的一个取样序列的所有取样值的算术平均值。用$<x(n)>$表示，即：$<x(n)> \underline{\underline{\Delta}} \lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)$

随机过程的时间取样自相关序列为：

$$<x(n)x^*(n+m)> \underline{\underline{\Delta}} \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x^*(n+m)$$

对于遍历性随机过程，有：

$$<x(n)>\triangleq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)=E[x_n]\triangleq m_x$$

$$<x(n)x^*(n+m)>\triangleq\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}x(n)x^*(n+m)=E[x_n x_{n+m}^*]=R_{xx}(m)$$

§5.5 相关序列和协方差序列的性质

(The Properties of Correlation Sequence and Covariance Sequence)

设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是两个实平稳随机过程，它们的自相关序列、自协方差序列、互相关序列、互协方差序列为：

$$R_{xx}(m)=E[x_n x_{n+m}] \qquad C_{xx}(m)=E[(x_n-m_x)(x_{n+m}-m_x)]$$

$$R_{xy}(m)=E[x_n y_{n+m}] \qquad C_{xy}(m)=E[(x_n-m_x)(y_{n+m}-m_y)]$$

性质1：

$$C_{xx}(m)=R_{xx}(m)-m_x^2$$

$$C_{xy}(m)=R_{xy}(m)-m_x m_y$$

当$m_x=0$和$m_y=0$时：$C_{xx}(m)=R_{xx}(m)$ $C_{xy}(m)=R_{xy}(m)$

证明：

$$\begin{aligned}C_{xx}(m)&=E[(x_n-m_x)(x_{n+m}-m_x)]\\&=E[x_n x_{n+m}-m_x x_n-m_x x_{n+m}+m_x m_x)]\\&=R_{xx}(m)-m_x m_x-m_x m_x+m_x m_x\\&=R_{xx}(m)-m_x^2\end{aligned}$$

性质2：$C_{xx}(0)=\sigma_x^2 \qquad R_{xx}(0)=E[x_n^2]$

证明：$\because \qquad R_{xx}(m)=E[x_n x_{n+m}]$

$\therefore \qquad R_{xx}(0)=E[x_n^2]$

性质3：$R_{xx}(m)=R_{xx}(-m) \qquad C_{xx}(m)=C_{xx}(-m)$

$R_{xy}(m)=R_{yx}(-m) \qquad C_{xy}(m)=C_{yx}(-m)$

证明：$R_{xx}(m)=E[x_n x_{n+m}] \underline{\underline{n+m=n'}} E\left[x_{n'-m}x_{n'}\right]$

$=E\left[x_{n'}x_{n'-m}\right]=R_{xx}(-m)$

$R_{xy}(m)=E[x_n y_{n+m}] \underline{\underline{n'=n+m}} E\left[x_{n'-m}y_{n'}\right]$

$=E\left[y_{n'}x_{n'-m}\right]=R_{yx}(-m)$

性质4： $|R_{xy}(m)| \le (R_{xx}(0)R_{yy}(0))^{1/2}$ $|C_{xy}(m)| \le (C_{xx}(0)C_{yy}(0))^{1/2}$

特列： $|R_{xx}(m)| \le R_{xx}(0)$ $|C_{xx}(m)| \le C_{xx}(0)$

证明：

因为$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都是实随机过程，所以下列不等式成立：

$$E\left[\left(\frac{x_n}{\sqrt{E[x_n^2]}} \pm \frac{y_{n+m}}{\sqrt{E[y_{n+m}^2]}}\right)^2\right] \ge 0$$

将上式左端展开，得：

$$E\left[\left(\frac{x_n}{\sqrt{E[x_n^2]}} \pm \frac{y_{n+m}}{\sqrt{E[y_{n+m}^2]}}\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{x_n}{\sqrt{R_{xx}(0)}} \pm \frac{y_{n+m}}{\sqrt{R_{yy}(0)}}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{x_n^2}{R_{xx}(0)} + \frac{y_{n+m}^2}{R_{yy}(0)} \pm 2\frac{x_n y_{n+m}}{\sqrt{R_{xx}(0)}\cdot\sqrt{R_{yy}(0)}}\right]$$

$$= \frac{E[x_n^2]}{R_{xx}(0)} + \frac{E[y_{n+m}^2]}{R_{yy}(0)} \pm 2\frac{E[x_n y_{n+m}]}{\sqrt{R_{xx}(0)}\cdot\sqrt{R_{yy}(0)}}$$

$$= \frac{R_{xx}(0)}{R_{xx}(0)} + \frac{R_{yy}(0)}{R_{yy}(0)} \pm 2\frac{R_{xy}(m)}{\sqrt{R_{xx}(0)}\cdot\sqrt{R_{yy}(0)}}$$

$$= 2 \pm 2\frac{R_{xy}(m)}{\sqrt{R_{xx}(0)\cdot R_{yy}(0)}} \geq 0$$

所以：$|R_{xy}(m)| \leq \sqrt{R_{xx}(0)\cdot R_{yy}(0)}$

令 $x_n = y_n$ ，上式可以简化成：$|R_{xx}(m)| \leq R_{xx}(0)$

性质**5**：若 $y_n = x_{n-n_0}$，则有：

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m) \qquad C_{yy}(m) = C_{xx}(m)$$

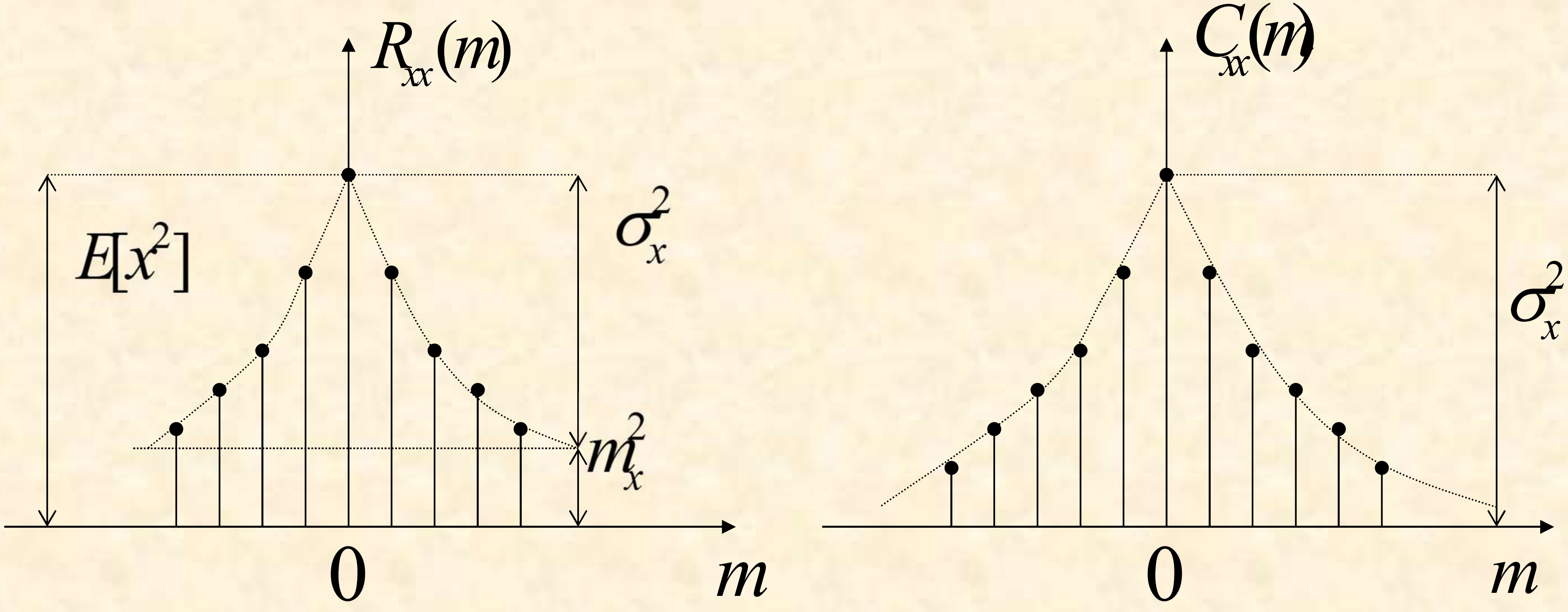
证明：$$R_{yy}(m) = E[y_n y_{n+m}]$$
$$= E[x_{n-n_0} x_{n+m-n_0}] = R_{xx}(m)$$

性质**6**：在随机过程中，两随机过程的时间间隔越大，它们的相关性越小。

$$\lim_{m\to\infty} C_{xx}(m) = 0 \qquad \lim_{m\to\infty} C_{xy}(m) = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} R_{xx}(m) = m_x^2 \qquad \lim_{m\to\infty} R_{xy}(m) = m_x m_y$$

自相关序列、自协方差序列与均值、均方值、方差的关系：



例5.5.1 已知随机信号 $x(n)=\cos(\omega_0 n+\varphi)$,其中，角频率 ω_0 是常数，初相是φ 在区间$(0,2\pi)$ 均匀分布的随机变量。求$x(n)$的均值和自相关序列，并判别 $x(n)$是否广义平稳随机过程。

解：$x(n)$ 的均值为：

$$\begin{aligned}E\left[x(n)\right] &= \int_0^{2\pi} x(n)\cdot p_{\varphi}(\varphi)d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 n+\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(\omega_0 n)\cos(\varphi)+\sin(\omega_0 n)\sin(\varphi)\right]d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\cos(\omega_0 n)\sin(\varphi)\Big|_0^{2\pi}-\sin(\omega_0 n)\cos(\varphi)\Big|_0^{2\pi}\right]=0\end{aligned}$$

其中：$p_{\varphi}(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi},0\le\omega\le 2\pi \\ 0,others\end{cases}$

$x(n)$ 的自相关序列为：

$$R_{xx}(n,n+m)=E\left[x(n)x(n+m)\right]=\int_0^{2\pi}x(n)x(n+m)\cdot p_\varphi(\varphi)d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 n+\varphi)\cos[\omega_0(n+m)+\varphi]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left[\cos(\omega_0 m)+\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+\varphi)\right]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\omega_0 m)$$

随机信号 $x(n)$ 的均值为常数，自相关序列只与时间差有关，所以 $x(n)$ 为广义平稳随机过程。

§ 5.6 功率谱(Power Spectrum)

5.6.1 平稳随机过程的功率谱

协方差序列的**Z**变换称为平稳随机过程的功率谱。即：

$$S_{xx}(z) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{xx}(m) z^{-m}$$

对于零均值随机信号$\{x_n\}$，则有：

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(m) z^{-m}$$

对于一个实平稳随机过程，$R_{xx}(m)$的**Fourier**变换总是存在的，即：

$$S_{xx}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xx}(m) e^{-j\omega m}$$

上式的逆变换为：

$$R_{xx}(m)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c S_{xx}(z)z^{m-1}dz \text{ 和 } R_{xx}(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{xx}(e^{j\omega})e^{jm\omega}d\omega$$

由上式可得到：$R_{xx}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{xx}(e^{j\omega})d\omega$

即：$E[x_n^2]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{xx}(e^{j\omega})d\omega$

功率谱在一个周期内的平均值就是随机过程的平均功率。

5.6.2 功率谱的性质

1.实平稳随机过程的功率谱是非负的，即：$S_{xx}(e^{j\omega})\geq 0$

2.实平稳随机过程的功率谱是实函数，即：$S_{xx}(e^{j\omega})=S_{xx}^{*}(e^{j\omega})$

式中，*号表示复共轭。

证明： $S_{xx}^*(e^{j\omega}) = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{-j\omega m}\right]^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R^*(m)e^{j\omega m}$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{j\omega m} \underline{\underline{l=-m}} \sum_{l=\infty}^{-\infty} R(-l)e^{-j\omega l}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R(l)e^{-j\omega l} = S_{xx}(e^{j\omega})$$

3. 实平稳随机过程的功率谱是ω的偶函数，

即： $S_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{-j\omega})$

证明： $S_{xx}(e^{-j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m)e^{j\omega m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(-m)e^{j\omega m}$

$$\underline{\underline{l=-m}} \sum_{l=\infty}^{-\infty} R(l)e^{-j\omega l}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R(l)e^{-j\omega l} = S_{xx}(e^{j\omega})$$

5.6.3 平稳随机过程的互功率谱

两个平稳随机过程 $\{x_n\}$和 $\{y_n\}$ 的互功率谱定义为：

$$S_{xy}(z)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_{xy}(m)z^{m}$$

或者

$$S_{xy}(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_{xy}(m)e^{-j\omega m}$$

由以上可得出：

$$S_{xy}(e^{j\omega})=S_{yx}^{*}(e^{-j\omega})$$

例5.6.1 相位为平稳随机的正弦序列仍然是一个平稳随机过程，它的自相关序列为：$R_{xx}(m)=\dfrac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m)$，式中，$A$ 是正弦序列的振幅，ω_0 是正弦序列的角频率。求该正弦序列的功率谱。

解：该正弦序列的功率谱为：

$$
\begin{aligned}
S_{xx}(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m)e^{-j\omega m} \\
&= \frac{A^2}{2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 m}+e^{-j\omega_0 m}}{2}\cdot e^{-j\omega m} \\
&= \frac{A^2}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[e^{j(\omega_0-\omega)m}+e^{-j(\omega_0+\omega)m}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}A^2\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]
\end{aligned}
$$

例5.6.2 设平稳随机的自相关序列为：$R_{xx}(m)=a^{|m|}, |a|<1$，求该随机过程的功率谱。

解：随机过程的功率谱为：

$$S_{xx}(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}R_{xx}(m)e^{-j\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a^{|m|}e^{-j\omega m}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{0}a^{|m|}e^{-j\omega m}+\sum_{m=0}^{+\infty}a^{|m|}e^{-j\omega m}-1$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}a^{m}e^{j\omega m}+\sum_{m=0}^{+\infty}a^{m}e^{-j\omega m}-1$$

$$=\frac{1}{1-ae^{j\omega}}+\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}-1=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

上面求得的功率谱都是实的、非负的偶函数。

§ 5.7 离散随机信号通过线性非移变系统

(The Discrete Random Signal through the Linear Shift-invariant System)

5.7.1 随机信号通过线性非移变系统

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(n-k)x(k)$$

其中离散随机信号$x(n)$是一个平稳随机过程的一个取样序列，$h(n)$为线性非移变系统的单位取样响应。

5.7.2 输出随机过程的均值

系统的输出响应$y(n)$是输出随机过程$\{y_n\}$的一个取样序列，根据遍历性假设，由$y(n)$求出$\{y_n\}$的均值为：

$$m_y = E[y(n)] = E[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)E[x(n-k)]$$

由于 $E[x(n-k)] = m_x$

故：$m_y = m_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) = m_x H(e^{j0})$

注：$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k}$

5.7.3 输出随机过程的自相关序列 $R_{yy}(n,n+m)$

$$
\begin{aligned}
R_{yy}(n,n+m) &= E[y(n)y(n+m)] \\
&= E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)x(n+m-r)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)E\left[x(n-k)x(n+m-r)\right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)R_{xx}(m-r+k)
\end{aligned}
$$

$$
R_{yy}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)R_{xx}(m-r+k)
$$

输出随机过程的均值为常数，其自相关序列只与时间差有关，所以它是一个平稳随机过程。令 $r-k=l$

上式可以写成：

$$R_{yy}(m)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}R_{xx}(m-l)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)h(l+k)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}R_{xx}(m-l)R_{hh}(l)$$

$$=R_{xx}(m)*R_{hh}(m)=R_{xx}(m)*h(m)*h(-m)$$

式中：$R_{hh}(l)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)h(l+k)=h(l)*h(-l)$

是系统单位冲激响应的自相关序列（确定信号）。

5.7.4 输出随机过程的功率谱 $S_{yy}(z)$

假设输入随机过程的均值 $m_x = 0$ ，因此输出随机过程的均值亦为零。则有：

$$S_{yy}(z) = S_{xx}(z)S_{hh}(z)$$

设 $h(n)$是实序列，则有：

$$S_{hh}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{hh}(m)z^{-m} = H(z)H(z^{-1})$$

如果 $h(n)$ 是复序列，则： $S_{yy}(z) = S_{xx}(z)H(z)H^*(1/z^*)$ ，

所以： $S_{hh}(z) = H(z)H^*(1/z^*)$

注：当 $h(n)$是复序列时，$R_{hh}(m)=h(m)*h^*(-m)$，其中$h^*(-m)$的Z变换为：

$$ZT\left[h^*(-m)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h^*(-m)z^{-m}\underline{\underline{n=-m}}\sum_{n=\infty}^{-\infty}h^*(n)z^{n}$$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)(z^*)^{n}\right]^*=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)(\frac{1}{z^*})^{-n}\right]^*=H^*(\frac{1}{z^*})$$

在 $h(n)$为实序列的情况下，有：

$$S_{yy}(z)=S_{xx}(z)H(z)H(z^{-1})$$

如果系统是稳定的，那么的收敛域包括单位圆，所以：

$$S_{yy}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

注：当$h(n)$是实序列时，$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$。

即：输出随机过程的功率谱等于输入随机过程的功率谱与系统频率特性幅度平方的乘积。

5.7.5 输入输出随机过程的互相关序列 $R_{xy}(m)$

$$R_{xy}(m) = E[x(n)y(n+m)] = E[x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n+m-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[x(n)x(n+m-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_{xx}(m-k) = R_{xx}(m) * h(m)$$

即：$R_{xy}(m) = R_{xx}(m) * h(m)$

系统冲激响应的自相关序列$R_{hh}(m)$为：

$$R_{hh}(m) = h(m) * h(-m) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(m+l)$$

所以：

$$R_{yy}(m) = R_{xx}(m) * h(m) * h(-m) = R_{xy}(m) * h(-m)$$

上式说明，输出随机过程的自相关序列，可以通过输入与输出间的互相关序列与系统冲激响应进行相关计算来得到(注意：$h(m)$与$h(-m)$进行线性卷积等效于与进行相关运算)。

如果输入是一个零均值的平稳白噪声随机过程，其方差为 σ_x^2 ，自相关序列是 $R_{xx}(m)=\sigma_x^2\delta(m)$，功率谱为 $S_{xx}(z)=\sigma_x^2$ ，根据 $R_{xy}(m)=R_{xx}(m)*h(m)$ 有：

$$R_{xy}(m)=\sigma_x^2 h(m)$$

对上式进行**Z**变换得： $S_{xy}(z)=\sigma_x^2 H(z)$

如果已知系统输入和输出之间的互相关序列和互功率谱，可以由上式求出系统的冲激响应或系统函数：

$$H(z)=\frac{1}{\sigma_x^2}S_{xy}(z) \quad 或 \quad H(e^{j\omega})=\frac{1}{\sigma_x^2}S_{xy}(e^{j\omega})$$

5.7.6 输出随机过程的方差

输出随机过程的均方值为：

$$E[y^2(n)] = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c S_{yy}(z) z^{-1} dz$$

因为 $S_{yy}(z) = S_{xx}(z) H(z) H(z^{-1})$

所以 $E[y^2(n)] = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c S_{xx}(z) H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz$

式中的积分围线可选择为单位圆。

5.7.7　白噪声　$w(n)$

$$m_w = 0$$

$$R_{ww}(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$$

$$S_{ww}(z) = \sigma_w^2 \qquad S(e^{j\omega}) = \sigma_w^2$$

例5.7.1有一线性移不变系统：$H(z)=\dfrac{1}{1-0.25z^{-1}}$，当它的输入端作用一个白噪声 $w(n)$ 时，在它的输出端得到一个随机信号 $x(n)$。设白噪声的方差等于1，即 $\sigma_w^2=1$。求随机信号 $x(n)$ 的自相关序列。

解：根据输出随机过程的功率谱和输入随机过程的功率谱的关系：

$$S_{xx}(z)=S_{ww}(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$=\sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})=\frac{1}{(1-0.25z^{-1})(1-0.25z)}$$

将上式进行部分分式展开，得：

$$S_{xx}(z)=\frac{1}{(1-0.25z^{-1})(1-0.25z)}=\frac{\frac{16}{15}}{1-0.25z^{-1}}+\frac{\frac{16}{15}}{1-0.25z}$$

对上式求逆Z变换得：

$$R(m)=\frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^m u(m)+\frac{16}{15}4^m u(-m-1)=\frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|m|}$$

（收敛域：$\frac{1}{4}<|z|<4$，因为 $H(z)$ 是稳定的因果系统）

例**5.7.2.**为了产生一个功率谱为：$S_{xx}(e^{j\omega})=\dfrac{5+4\cos(2\omega)}{10+6\cos(\omega)}$的随机过程，可用一个具有单位方差$(\sigma_w^2=1)$的白噪声去激励一个线性非移变系统，求该系统的单位取样响应 $h(n)$ 。

解：将功率谱写成指数形式：

$$S_{xx}(e^{j\omega})=\frac{5+2e^{j2\omega}+2e^{-j2\omega}}{10+3e^{j\omega}+3e^{-j\omega}}$$

将上式写成**Z**变换的形式：

$$S_{xx}(z)=\frac{5+2(z^2+z^{-2})}{10+3(z+z^{-1})}=\frac{(2z^2+1)(2z^{-2}+1)}{(3z+1)(3z^{-1}+1)}$$

再将上式分解成：$S_{xx}(z)=\sigma_w^2 H(z)H(z^{-1})$ 的形式。

式中：$\sigma_w^2=1$，所以：$H(z)=\dfrac{2z^2+1}{3z+1}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1+\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot z$

为了得到一个稳定的因果系统，将系统的系统函数确定为：

$$H'(z)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

求上式的逆Z变换得到系统的单位冲激响应为：

$$h(n)=\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})^n u(n)+\frac{1}{3}(-\frac{1}{3})^{n-2}u(n-2)$$

本章结束

谢谢大家！