§ 2.5 电磁场边界条件的一般形式

在两种不同媒质的分界面上场量所满足的关系称为边界条件。

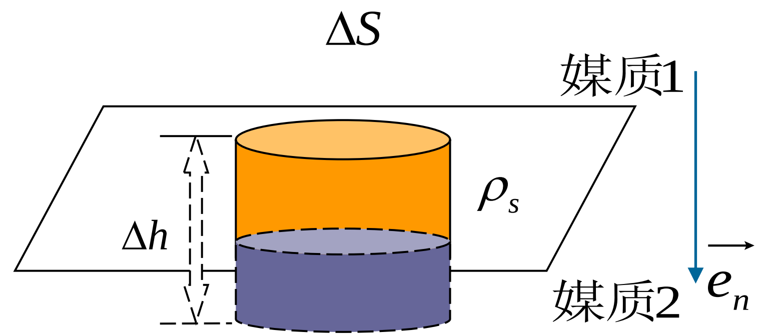
边界处应利用积分形式的 Maxwell 方程分析；边界条件是场方程在边界上的特殊形式。

设界面的法线方向是由媒质 1 指向媒质2，用 $\vec{e}_n$ 表示

将分界面处的场量分解成垂直于界面的法向分量和平行于界面的切向分量；如：

$$\vec{E} = \vec{e}_n E_n + \vec{e}_t E_t$$

一、场矢量的边界条件



1、电场法向分量的边界条件

应用 Maxwell 方程中高斯定理

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_V dV$$

设分界面上带有密度为 ρ_s 的自由电荷

在分界面上取一个小的柱形闭合面，上下底面△ S与分界面平行，并跨在分界面两侧，柱高△ $h\to 0$, △ S足够小可认为 △ S上的$\vec{D}$及ρ_s均匀，

$$\int_V \rho_V dV = \rho_s \Delta s + \int_V \rho_v dV = \rho_s \Delta s$$

$$\oint_s \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{上}} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{下}} \vec{D}\cdot d\vec{s} + \int_{\text{面}} \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

$$\approx \int_{\text{上}} \vec{D}_1\cdot d\vec{s} + \int_{\text{下}} \vec{D}_2\cdot d\vec{s} = \int_{\text{上}} \vec{D}_1\cdot(-\vec{e}_n)ds + \int_{\text{下}} \vec{D}_2\cdot(\vec{e}_n)ds$$

$$\approx -D_{1n}\Delta s + D_{2n}\Delta s = (D_{2n} - D_{1n})\Delta s$$

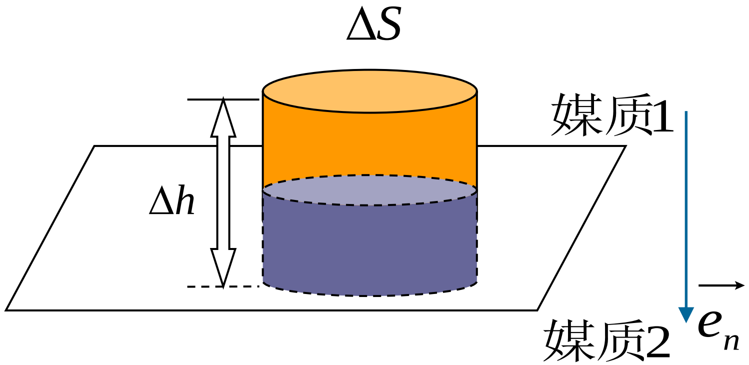
$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \\ \text{或}\vec{e}_n\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \end{array}}$$

$\vec{D}$的法向分量的边界条件表示：若在两种媒质的分界面上有面自由电荷的分布，电位移的法向分量不连续，其差值等于面自由电荷密度；

$\rho_s =$ 0时： $D_{2n} = D_{1n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow E_{1n} \neq E_{2n}$

2、磁场法向分量的边界条件

应用磁场高斯定理的积分形式



$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0$$

$$\therefore \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_{上}\vec{B}\cdot d\vec{s}+\int_{下}\vec{B}\cdot d\vec{s}+\int_{侧面}\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\approx \int_{上}\vec{B}\cdot d\vec{s}+\int_{下}\vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$\approx B_{1n}\Delta S+B_{2n}\Delta S$$

$$\approx (B_{1n}-B_{2n})\Delta S$$

$\Rightarrow$

$$B_{1n}=B_{2n}$$

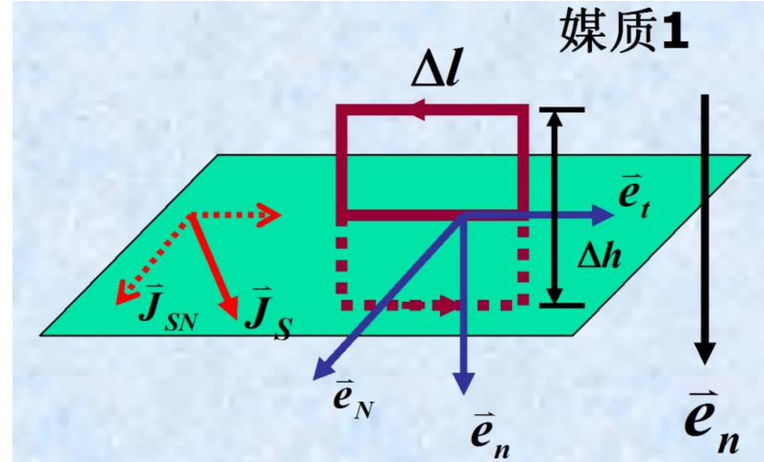
$$或\vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$$

边界面两侧上磁感应强度的法向分量总是连续的；

但磁场强度的法向分量是不连续

$$\boldsymbol{B}_{1n}=\boldsymbol{B}_{2n} \quad\Rightarrow\quad \mu_1\boldsymbol{H}_{1n}=\mu_2\boldsymbol{H}_{2n} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{H}_{1n}\neq\boldsymbol{H}_{2n}$$

3 、磁场切向分量的边界条件



应用 Maxwell 第一方程积分形式：

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}$$

设界面上有传导电流分布，线密度为 $\vec{J}_s$

在分界面上某处取一个垂直于界面的小闭合矩形平面路径C，它的上下两边长为△l，分别在分界面两侧，矩形另两边长△$h \to 0$，△l 足够小可认为△l 上的 $\vec{B}$ 及通过小矩形的面电流密度 $\vec{J}_s$ 均匀，

$$\text{右侧} \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \vec{e}_N dl = \color{red}{\vec{J}_s \cdot \vec{e}_N \Delta l}$$

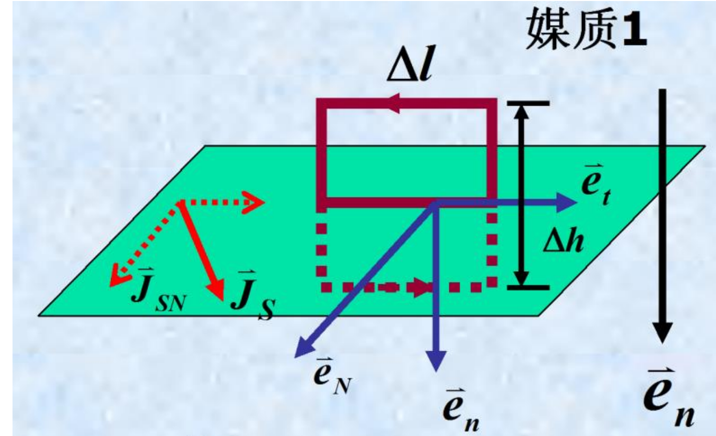
面积S由环路C构成，面元矢量方向 $\vec{e}_N = \vec{e}_n \times \vec{e}_t$

$$\Delta h \to 0, \text{即} \Delta S \to 0, \text{而} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{为有限值}, \therefore \lim_{\Delta S \to 0} \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

矩形回路所包围的电流应为界面上的面电流，

$$\lim_{\Delta S \to 0} \int_{\Delta S} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \vec{e}_N \Delta l = J_{sN} \Delta l$$

右侧： $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\int_{\Delta S}\vec{J}\cdot d\vec{S}=\int_{\Delta l}\vec{J}_s\cdot\vec{e}_N\Delta l=J_{sN}\Delta l$



左侧： $\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\oint_{\Delta l}\vec{H}_1\cdot(-\vec{e}_t)dl+\oint_{\Delta l}\vec{H}_2\cdot(\vec{e}_t)dl$

$=\vec{H}_1\cdot(-\vec{e}_t)\Delta l+\vec{H}_2\cdot(\vec{e}_t)\Delta l=(H_{2t}-H_{1t})\Delta l$

$$\boldsymbol{H}_{2t}-\boldsymbol{H}_{1t}=\boldsymbol{J}_{SN}$$

或$(\vec{\boldsymbol{H}}_2-\vec{\boldsymbol{H}}_1)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{J}_{SN}$

$\boldsymbol{J}_{SN}$是界面上面电流密度$\vec{J}_s$在$\vec{\boldsymbol{e}}_N$方向上的投影

$$\because(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot\vec{e}_t=(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot(\vec{e}_N\times\vec{e}_n)$$

$$\because\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$=\vec{\boldsymbol{e}}_N\cdot\left[\vec{\boldsymbol{e}}_n\times(\vec{\boldsymbol{H}}_2-\vec{\boldsymbol{H}}_1)\right]$$

$$=\left[\vec{\boldsymbol{e}}_n\times(\vec{\boldsymbol{H}}_2-\vec{\boldsymbol{H}}_1)\right]\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_N$$

又$(\vec{\boldsymbol{H}}_2-\vec{\boldsymbol{H}}_1)\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{J}_{SN}=\vec{\boldsymbol{J}}_s\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_N$

$$\Rightarrow\boxed{\vec{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_s}$$

磁场切向分量的边界条件表示：在两种媒质的分界面上有传导电流的面分布时，磁场强度的切向分量不连续，其差值等于J_S；

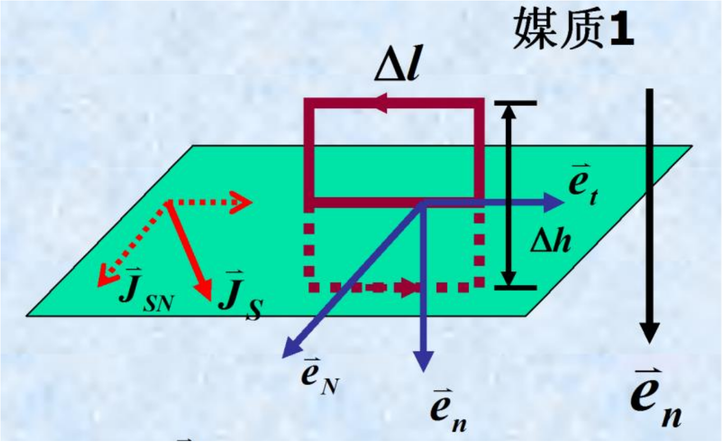
若分界面上 $\vec{J}_S=0$，则$\vec{H}$的切向分量是连续的；但$\vec{B}$的切向分量是不连续

$$\boxed{H_{1t}=H_{2t}\Rightarrow B_{1t}/\mu_1=B_{2t}/\mu_2\Rightarrow B_{1t}\neq B_{2t}}$$

4、电场切向分量的边界条件

应用 Maxwell 第二方程积分形式： $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

采用如前的矩形回路，矩形上$\Delta h \to 0$， Δl足够小，可认为Δl上的$\vec{E}$均匀，



同理可推出，

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$\text{或}\ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{e}_t = 0$$

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

边界面两侧上电场强度$\vec{E}$的切向分量总是连续的；

但电位移$\vec{D}$的切向分量是不连续

$$E_{2t} = E_{1t} \Rightarrow D_{2t}/\varepsilon_1 = D_{1t}/\varepsilon_2 \Rightarrow D_{2t} \neq D_{1t}$$

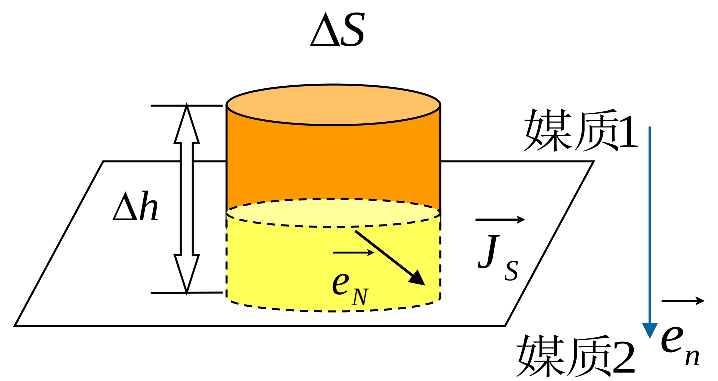
$$\begin{cases} \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{H}_{2t} - \boldsymbol{H}_{1t} = \boldsymbol{J}_{SN} \\ \boldsymbol{E}_{2t} - \boldsymbol{E}_{1t} = 0 \\ \boldsymbol{B}_{2n} - \boldsymbol{B}_{1n} = 0 \\ \boldsymbol{D}_{2n} - \boldsymbol{D}_{1n} = \rho \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}_n \times (\vec{\boldsymbol{H}}_2 - \vec{\boldsymbol{H}}_1) = \vec{\boldsymbol{J}} \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n \times (\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \vec{\boldsymbol{E}}_1) = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\vec{\boldsymbol{B}}_2 - \vec{\boldsymbol{B}}_1) = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \rho \end{cases}}$$

边界面上的面电荷及面电流使得场矢量产生不连续

5、电流密度的法向分量的边界条件



应用电流连续性方程： $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\cdot dV$

采用如前的柱形闭合面, $\Delta h \rightarrow 0, \Delta S$ 足够小

媒质 1 和媒质 2 均为导电媒质，传导电流密度分别为 $\vec{J}_1$ 和 $\vec{J}_2$，分界面上有自由电荷和传导面电流，面电荷分布密度为 ρ_S, 面电流密度为 $\vec{J}_S$

$\vec{e}_N$:柱体侧面与界面的交线 为C, C的外法线单位矢量为 $\vec{e}_N$

左侧： $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S上} \vec{J}_1\cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S下} \vec{J}_1\cdot d\vec{S} + \int_{侧面} \vec{J}\cdot d\vec{S} + \oint_C \vec{J}_s\cdot \vec{e}_N dl$

$$= \vec{J}_1\cdot(-\vec{e}_n\Delta S) + \vec{J}_2\cdot(\vec{e}_n\Delta S) + \oint \vec{J}_s\cdot\vec{e}_N dl$$

右侧： $-\frac{dQ}{dt} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = -\int_S \frac{\partial \rho_s}{\partial t}dS = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}\Delta S$

$$\Rightarrow \vec{J}_1\cdot(-\vec{e}_n\Delta S) + \vec{J}_2\cdot(\vec{e}_n\Delta S) + \oint_C \vec{J}_s\cdot\vec{e}_N dl = \frac{\partial \rho_s}{\partial t}\Delta S$$

$\Delta S \rightarrow 0$

$$\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \lim_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\oint_C \vec{J}_s\cdot\vec{e}_N dl}{\Delta S} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \nabla_s\cdot\vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}}$$

面电流密度 $\vec{J}_S$ 在边界面上某点处的面散度，它表示该点处单位面积上流出的表面电流。

令$\nabla\cdot\vec{J}_s = \lim_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\oint_C \vec{J}_s\cdot\vec{e}_N dl}{\Delta S}$

$$\nabla\cdot\vec{J}_v = \lim_{\Delta S\rightarrow 0}\frac{\oint_S \vec{J}_v\cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

$$\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)+\nabla_s\cdot\vec{J}_s=-\frac{\partial\rho_s}{\partial t}$$

以体电流和面电流形式在单位时间内流出边界面上单位面积的电量和等于边界面上电荷密度的时间减少率；

有面电流和时变面电荷存在时，边界面电流密度的法向分量是不连续的

$\vec{J}_s=0$时，$\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}$或$J_{2n}-J_{1n}=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}$

$\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}=0$时，$\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=-\nabla\cdot\vec{J}_s$

$\vec{J}_s=0$且$\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}=0$时，$\vec{e}_n\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=0$或$J_{2n}=J_{1n}$

若$\vec{J}_1=\vec{J}_2=0$，而$\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}=0$时，$\nabla_s\cdot\vec{J}_s=0$

若$\vec{J}_1=\vec{J}_2=0$，而$\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}\neq 0$时，$\nabla_s\cdot\vec{J}_s=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t}$

二、边值关系的特殊形式

1、两种理想介质的分界面

$\sigma_1 = 0$，$\sigma_2 = 0$，分界面上一般不存在自由电流和自由电荷，即$\vec{J}_S = 0$，$\rho_S = 0$

$$\begin{cases} H_{2t} - H_{1t} = J_{SN} \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ D_{2n} - D_{1n} = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{2t} = H_{1t} \\ E_{2t} = E_{1t} \\ B_{2n} = B_{1n} \\ D_{2n} = D_{1n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J} \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \end{cases}$$

2、理想导体和理想介质的分界面

设媒质1为理想导体$\sigma_1=\infty$，媒质2为理想介质 $\sigma_2 = 0$

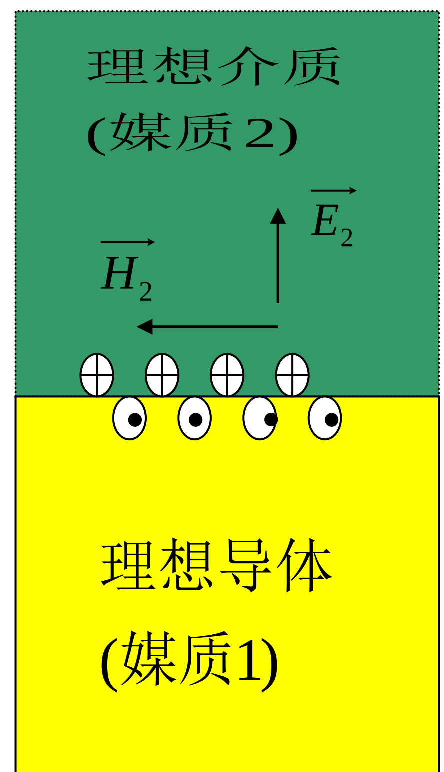
$$\vec{J}=\sigma\vec{E},\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{d\vec{B}}{dt}$$

理想导体内部不存在电场，也不存在时变磁场。

即在时变条件下，理想导体内部不存在电磁场。 $\boxed{\vec{E}_1=\vec{D}_1=\vec{H}_1=\vec{B}_1=0}$

$$\begin{cases} H_{2t}-H_{1t}=J_{SN} \\ E_{2t}-E_{1t}=0 \\ B_{2n}-B_{1n}=0 \\ D_{2n}-D_{1n}=\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_{2t}=J_{SN} \\ E_{2t}=0 \\ B_{2n}=0 \\ D_{2n}=\rho \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J} \\ \vec{e}_n\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \\ \vec{e}_n\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \\ \vec{e}_n\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_n\times\vec{H}_2=\vec{J} \\ \vec{e}_n\times\vec{E}_2=0 \\ \vec{e}_n\cdot\vec{B}_2=0 \\ \vec{e}_n\cdot\vec{D}_2=\rho \end{cases}$$



例：空气中两块大平行导电板之间的电场和磁场分别为：

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{e}_x E\cos(\omega t - \beta z) \\ \vec{H} = \vec{e}_y \dfrac{E}{\eta_0}\cos(\omega t - \beta z) \end{cases}$$

求：两导体内表面 ($x = 0$ 及 $x = a$) 上的ρ_S和$\vec{J}_S$。

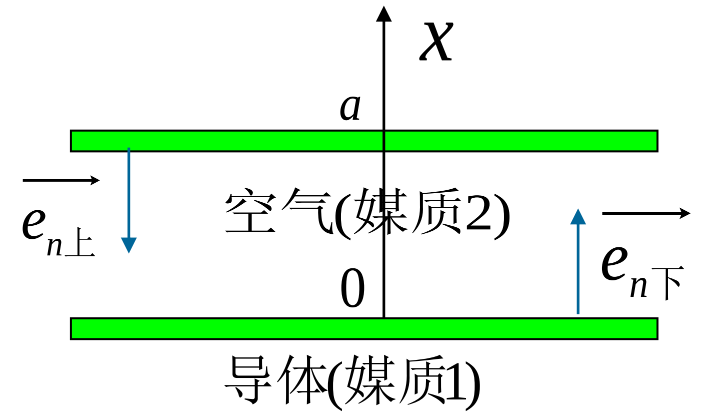
解：平行导电板可看作理想导体，空气可看作理想介质，

1) 利用$\rho_s = \vec{e}_n \cdot \vec{D}_2$

$$\rho_{s上} = \vec{e}_n \cdot \vec{D}_2 = (-\vec{e}_x)\cdot \vec{D}_{空气} = (-\vec{e}_x)\cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$= (-\vec{e}_x)\cdot \varepsilon_0 E\cos(wt - \beta z)\vec{e}_x = -\varepsilon_0 E\cos(wt - \beta z)$$

$$\rho_{s下} = \vec{e}_{n下} \cdot \vec{D}_{空气} = (\vec{e}_x)\cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 E\cos(wt - \beta z)$$



2) 利用$\vec{J}_s = \vec{e}_n \times \vec{H}_2$

$$\vec{J}_{s上} = \vec{e}_n \times \vec{H}_{2空气} = (-\vec{e}_x)\times \vec{e}_y \frac{E}{\eta_0}\cos(wt - \beta z)$$

$$= -\vec{e}_z \frac{E}{\eta_0}\cos(wt - \beta z)$$

$$\vec{J}_{s下} = \vec{e}_n \times \vec{H}_{2空气} = (\vec{e}_x)\times \vec{e}_y \frac{E}{\eta_0}\cos(wt - \beta z) = \vec{e}_z \frac{E}{\eta_0}\cos(wt - \beta z)$$

$$\boxed{\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J} \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho \end{cases}}
\qquad
\boxed{\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{H}_2 = \vec{J} \\ \vec{e}_n \times \vec{E}_2 = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B}_2 = 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{D}_2 = \rho \end{cases}}$$