

第七章 平面电磁波

➤ **电磁波**：脱离场源后在空间传播的波动的电磁场。

➤ **平面（电磁）波**：等相位面为平面的时谐场。

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x 3 \cos(3t - 5z + \pi) \quad 3t - 5z + \pi = C \quad z = C1$$

➤ **等相位面**：在同一时刻，相位相同的点所构成的面。

根据其空间等相位面的形状可分为平面电磁波、柱面电磁波和球面电磁波等。

➤ **均匀平面（电磁）波**：等相位面为平面，且等相位面上场强的大小和方向处处相等的电磁波。

➤ 实际存在的波型，在远离波源的一小部分波阵面，仍可近似看作均匀平面波。

➤ 是Maxwell方程组最简单的解，可简化对波传播特性的分析。

➤ 实际存在的电磁波均可分解成许多均匀平面波的迭加。



理想介质中的均匀平面波

导电媒质中的均匀平面波

沿任意方向传播的均匀平面波

电磁波的极化

相速、群速与色散

均匀平面波对平面分界面的斜入射

均匀平面波对平面分界面的垂直入射

7.1 理想介质中的均匀平面波

一、理想介质中均匀平面波的电场与磁场

➤ 首先研究一种最简单、最普遍的情况

在充满无界的、线性、各向同性、均匀、理想介质的无源区域中

即： μ 、 ε 为常数， $\gamma=0$ ，且 $\vec{J}=0$ ， $\rho=0$

时谐电磁场的场强是满足波动方程（即齐次亥姆霍兹方程）和两个散度方程的解

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

称 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 为波数

1、电场 \vec{E} 的解 $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$

➤ 设均匀平面波的等相位面为 $z = \text{常数}$ 的平面

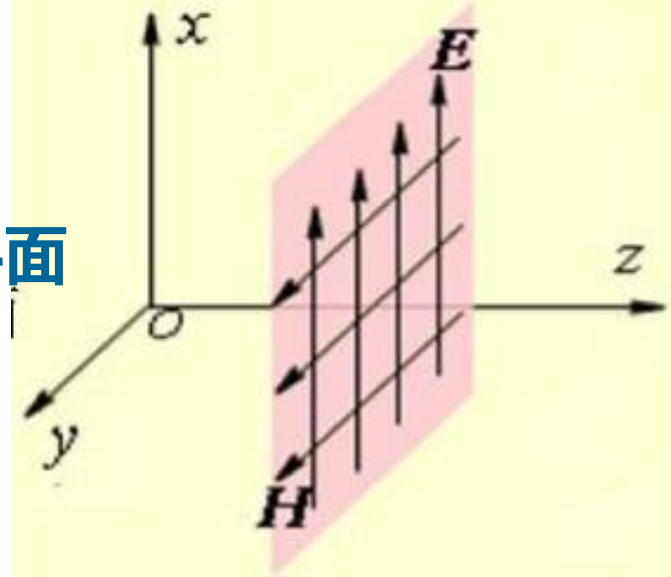
$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{又} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \Rightarrow E_z = 0$$

类似由 $\nabla \cdot \vec{H} = 0 \Rightarrow H_z = 0$

➤ 可见，电场和磁场都垂直于 z 轴，且大小只与坐标 z 有关。



讨论的是时谐场， \vec{E} 的每个分量都是余弦量，且随空间位置变化。因此 E_z 不能为非零常数。

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{d^2}{dz^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$



$$\begin{cases} \nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \\ \nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0 \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k^2 E_y = 0 \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$\text{由 } \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0 \Rightarrow$$

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}$$

通解的复数形式

待定常数 A_1 和 A_2 一般为复数，令 $A_1 = |A_1| e^{j\varphi_1}$, $A_2 = |A_2| e^{j\varphi_2}$

通解的瞬时值形式

$$E_x(z, t) = \text{Re} [E_x(z) e^{j\omega t}]$$

$$= |A_1| \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + |A_2| \cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

通解的物理意义

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}$$

首先仅考虑第一项，

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} = E_{x0} e^{-jkz}, \quad E_{x0} = |E_{x0}| e^{j\phi_x}$$

E_{x0} 复振幅， $|E_{x0}|$ 振幅值， ϕ_x 为初始相位。

瞬时值形式：

$$E_x = |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

$\omega t - kz + \phi_x$ 称为相位角

ωt 称为时间相位， kz 成为空间相位， ϕ_x 初始相位

对于任一时刻 t

令 $\omega t - kz + \phi_x = \text{常数} \Rightarrow kz = \text{常数} \Rightarrow z = \text{常数}$

等相位面为垂直于传播方向(+z)的 $z = \text{常数}$ 的平面，与假设一致。

$$E_x = |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

$$E_x(z) = E_{x0} e^{-jkz}, \quad E_{x0} = |E_{x0}| e^{j\varphi_x}$$

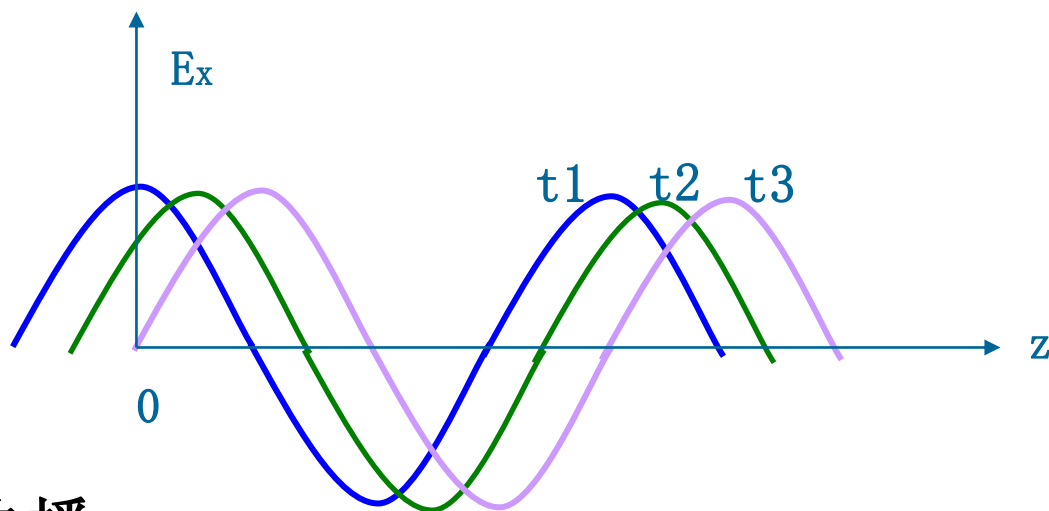
对于不同时刻 t

如 $\omega t + \varphi_x = 0, \pi/4, \pi/2$ 时

$$E_x(t_1) = E_{x0} \cos(-kz)$$

$$E_x(t_2) = E_{x0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - kz\right)$$

$$E_x(t_3) = E_{x0} \cos\left(\frac{\pi}{2} - kz\right)$$



随着 $t \uparrow$, 波形向正方向传播

行波：行波因子 e^{-jkz} 表示沿 $+z$ 方向传播的行波。

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}$$

同理，行波因子 e^{jkz} 表示沿 $-z$ 方向传播的行波。

通解的物理意义：

表示沿 $+z, -z$ 方向传播的均匀平面波的合成波

由于是无界空间，仅存在沿一个方向传播的波，只取第一项。

$$E_x(z) = E_{x0} e^{-jkz} = |E_{x0}| e^{j\varphi_x} e^{-jkz}$$

同理有：

$$E_y(z) = E_{y0} e^{-jkz} = |E_{y0}| e^{j\varphi_y} e^{-jkz}$$



复矢量全解： $\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y = \vec{e}_x E_{x0} e^{-jkz} + \vec{e}_y E_{y0} e^{-jkz}$

$$= (\vec{e}_x E_{x0} + \vec{e}_y E_{y0}) e^{-jkz} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-jkz}$$

Z=0处电场复矢量

复常矢量

瞬时值解： $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$
 $+ \vec{e}_y |E_{y0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$

类似求得，磁场强度的解具有相同的形式：

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y = (\vec{e}_x H_{x0} + \vec{e}_y H_{y0}) e^{-jkz} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-jkz}$$

但待定系数 E_{y0} , E_{x0} , H_{x0} , H_{y0} 之间并不是彼此独立自

2、磁场 \vec{H} 与电场 \vec{E} 的关系

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad \vec{E}(z) = \vec{e}_x E_{x0} e^{-jkz} + \vec{e}_y E_{y0} e^{-jkz}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \vec{e}_x \left(-\frac{k}{\omega\mu} E_{y0} \right) e^{-jkz} + \vec{e}_y \left(\frac{k}{\omega\mu} E_{x0} \right) e^{-jkz}$$

$$= \vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y$$

$$= (\vec{e}_x H_{x0} + \vec{e}_y H_{y0}) e^{-jkz} = \dot{\vec{H}}_0 e^{-jkz}$$

$$\text{令 } \eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\Rightarrow H_{x0} = -\frac{k}{\omega\mu} E_{y0} = -\frac{E_{y0}}{\eta}$$

$$H_x = -\frac{E_y}{\eta}$$

$$\Rightarrow H_{y0} = \frac{k}{\omega\mu} E_{x0} = \frac{E_{x0}}{\eta}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} \text{ 或 } \vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$$


$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} \text{ 或 } \vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$$

在无界理想介质中的均匀平面波：

- 电场和磁场相互垂直，而且都与传播方向垂直
- 电场、磁场、传播方向符合右手螺旋关系
- 这种电场、磁场均垂直于传播方向的波称为横电磁波 (TEM, Transverse Electro-Magnetic)

二、在无界理想介质中的均匀平面波的传播特性

为使讨论简单，假定平面波沿+z轴方向传播，电场强度方向为x轴方向，磁场强度方向为y轴方向。

则复数形式：

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_0 e^{-jkz}, \quad E_0 = |E_0| e^{j\varphi}$$

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_y H_0 e^{-jkz} = \vec{e}_y \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}, \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

在无界理想介质中， $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为实数

瞬时值形式： $\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$

$$\vec{H}(z, t) = \vec{e}_y |H_0| \cos(\omega t - kz + \varphi) = \vec{e}_y \frac{|E_0|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

电磁波的场量表达式包含了有关波特性的信息。

1、描述均匀平面波传播特性的参量

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

1) 波的周期 T 和频率 f

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

周期 T : 时间相位 ωt 变化 2π 所经历的时间, 单位: 秒 (s)

频率 f : 每秒内相位变化 2π 的次数, 单位: 赫兹 (Hz)

2) 相位常数 β 、波长 λ 、波数 k

相位常数 单位长度上, 空间相位 kz 的变化

$$\left(\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right) \quad \beta = k$$

波长 空间相位 kz 变化 2π 所经过的距离

$$(\text{m}) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

波数 2π 距离内包含的波长数目

$$\left(\frac{\text{rad}}{\text{m}}\right) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{波矢量 } \vec{k} = \vec{e}_k k$$

3) 相速度 V_p

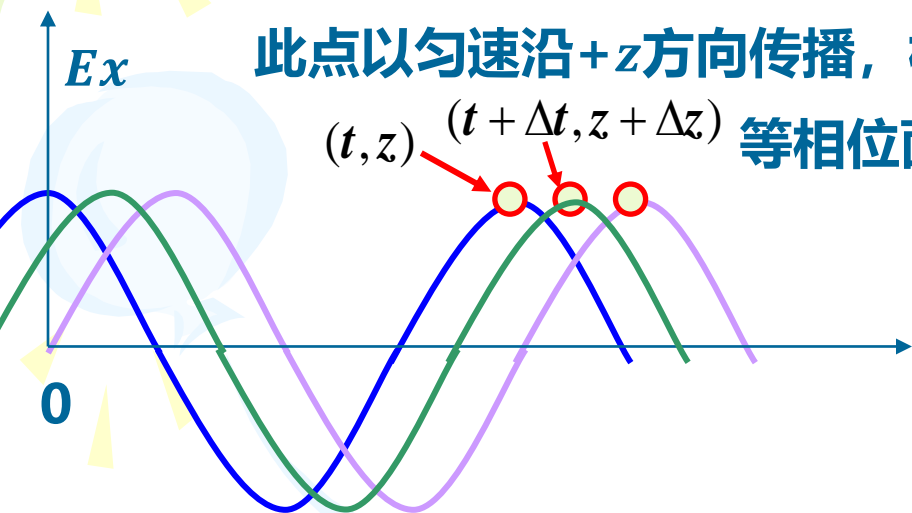
相速度 V_p : 正弦波等相位面传播的速度, 简称相速, 单位: m/s

取固定于波形上的某一点, 该点相位为一常数, 而时空坐标为 (z, t)

在数学上该点对应于等相位面方程:

$$\omega t - kz + \varphi = \text{常数}$$

这是一个沿 $+z$ 方向匀速前进的正弦波



此点以匀速沿 $+z$ 方向传播, 相位不变, 但时空坐标变化

等相位面的传播速度称为相速。由下式决定

$$\omega dt - k dz = 0 \Rightarrow V_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$$\therefore V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega}{2\pi / \lambda} = \lambda f$$

相速与频率无关, 这一现象称为无色散现象, 理想介质为非色散媒质。

相速与媒质特性有关

- 真空中: $V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \approx 3 \times 10^8 (m/s)$

- 非铁磁性媒质: $V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} < c$

波动方程

求解

均匀平面波解

$$E_x(z) = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{+jkz}$$

物理意义

特性参数

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

时间特性：周期，频率

空间特性：波长，波数，相位常数

传播方向

行波

TEM波

相速度

假设 均匀平面波

4) 波阻抗 η

$$\vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$$

电场和磁场的复振幅之比，称为平面波的波阻抗，也称媒质的本征阻抗，具有阻抗的量纲，单位： Ω

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{k}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

真空中：

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \approx 377(\Omega)$$

理想媒质中， η 是实数：

$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_0 e^{-jkz}, \quad E_0 = |E_0| e^{j\varphi}$$

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_y H_0 e^{-jkz} = \vec{e}_y \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}, \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta}$$

可见 \vec{E} 和 \vec{H} 在时间上是同相的，且复振幅之比为 $1/\eta$ 。

5) 能流密度、能量密度、能速

• 能流密度 \vec{S}_{av}

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{e}_x |E_0| \cos(\omega t - kz + \varphi) \times \vec{e}_y \frac{|E_0|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt = \vec{e}_z \frac{|E_0|^2}{2\eta}$$

• 理想介质中均匀平面波的平均坡印廷矢量为与空间坐标无关的常矢量。说明电磁波沿传播方向无损耗的传播，电磁波无衰减，是等振幅波。

• 能量密度 w_{av}

$$w_e(t) = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon |E_0|^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \quad \because \quad H_0 = \frac{E_0}{\eta} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$w_m(t) = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu |H_0|^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi) = \frac{1}{2} \varepsilon |E_0|^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

$$\Rightarrow w_m(z, t) = w_e(z, t)$$

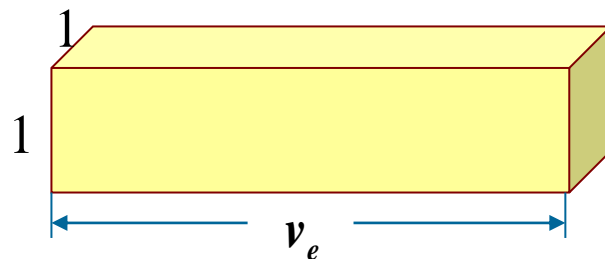
任意时刻，任何地方，理想介质中均匀平面波的电场能量密度等于磁场能量密度

时间平均值为: $w_{eav} = \frac{1}{4} \varepsilon |E_0|^2, \quad w_{mav} = \frac{1}{4} \mu |H_0|^2 = \frac{1}{4} \varepsilon |E_0|^2$

$$\Rightarrow w_{av} = w_{eav} + w_{mav} = \frac{1}{2} \varepsilon |E_0|^2$$

• 能速

$$v_e = \frac{|S_{av}|}{w_{av}}$$



平均能量传播的速度，设能速大小为 v_e

则体积 v_e 内储存的平均能量为 $w_{av} * v_e$ 必会在单位时间内穿过右边的横截面（单位面积），即单位时间穿过单位面积的平均能量为 $w_{av} * v_e$

$$\therefore |S_{av}| = w_{av} \cdot v_e$$

$$\therefore v_e = \frac{|S_{av}|}{w_{av}} = \frac{|E_0|^2 / 2\eta}{\varepsilon |E_0|^2 / 2} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = V_p$$

• 理想介质中均匀平面波的能速等于相速

2、基本传播特性

假定平面波沿+z轴方向传播，电场强度方向为x轴方向，磁场强度方向为y轴方向。

- 在传播方向上没有电场和磁场分量，是一种TEM波
- 电场强度、磁场强度和波的传播方向三者互相垂直，符合右手螺旋关系
- 电场强度和磁场强度在空间上垂直，在时间上是同相的

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E} \text{ 或 } \vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$$

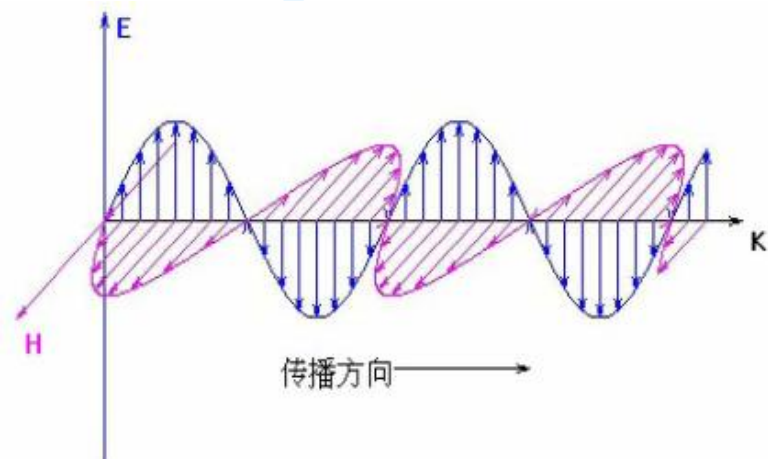
$$\vec{E}(z) = \vec{e}_x E_0 e^{-jkz} \quad \vec{H}(z) = \vec{e}_y H_0 e^{-jkz}$$

振幅之比（波阻抗）为实数

$$\eta = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

- 传播过程中无能量损耗，是等振幅波
- 相速与频率无关，是无色散波。

$$v_e = V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$



例7-1-1：已知理想介质中传播的均匀平面波的磁场强度为：

$$\vec{H} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times 0.8 \cos(4\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \quad (A/m)$$

求：(1) 均匀平面波的相位常数 β 、频率 f 、波长 λ 、相速 V_p

(2) 若此媒质 $\mu = \mu_0$ ，求媒质下相对介电常数 ϵ_r 。

(3) 此平面波的电场强度复矢量 \vec{E} ； (4) 平均坡印廷矢量 S_{av}

分析：

$$H(z, t) = \vec{e}_x |H_{x0}| \cos(\omega t - kz + \phi_x) + \vec{e}_y |H_{y0}| \cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

电磁波的场量表达式包括了有关波特性的信息

$$|H_{x0}| = |H_{y0}| = 0.8, \quad \omega = 4\pi \times 10^8, \quad k = 2\pi, \quad \phi_x = \phi_y = 0$$

解： (1) $\beta = k = 2\pi (rad/m)$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1(m)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi \times 10^8}{2\pi} = 2 \times 10^8 (Hz)$$

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{4\pi \times 10^8}{2\pi} = 2 \times 10^8 (m/s)$$

(2)若此媒质 $\mu = \mu_0$, 求媒质的相对介电常数 ϵ_r ,

$$\because V_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{c}{V_p}\right)^2 = \left(\frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8}\right)^2 = 2.25$$

(3)求电场强度复矢量

$$\vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z$$

$$\because \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}} = 80\pi$$

$$\vec{H}(z,t) = (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times 0.8 \cos(4\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \Rightarrow \vec{H}(z) = (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \times 0.8 e^{-j2\pi z}$$

$$\therefore \vec{E} = \eta \vec{H} \times \vec{e}_z = 64\pi (\vec{e}_x - \vec{e}_y) e^{-j2\pi z} \quad (\text{V/m})$$

(4)求 \vec{S}_{av}

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\dot{\vec{E}} \times \dot{\vec{H}}^* \right] \approx \vec{e}_z 160.8 (\text{W/m}^2)$$

例7-1-2: $f=100\text{MHz}$ 的均匀平面波, 其电场强度只有 x 分量, 在无界理想媒质 ($\epsilon_r=4, \mu_r=1, \gamma=0$) 中沿 $+z$ 方向传播, 当 $t=0, z=1/8$ (m)时, 电场值正好等于其幅值 10^{-4} (V/m), 求 \vec{E} 和 \vec{H} 的表达式。

分析:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}(z, t) = \vec{e}_y \frac{|E_{x0}|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \phi_y)$$

需先确定相应的一些特征参量

解: 已知 $f=100\text{MHz} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 (\text{rad/s})$

$$\Rightarrow k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = \omega \frac{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}{c} = 2\pi \times 10^8 \frac{\sqrt{4}}{3 \times 10^8} = \frac{4\pi}{3} (\text{rad/s})$$

$$\text{又: } \vec{E}\left(z = \frac{1}{8}, t = 0\right) = |E_{x0}| \cos\left(-\frac{k}{8} + \phi_x\right) = |E_{x0}| = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow |E_{x0}| = 10^{-4}, \quad \phi_x = \frac{k}{8} = \frac{1}{8} \times \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} (\text{rad/s})$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(z,t) &= \vec{e}_x |E_{x0}| \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ &= \vec{e}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}) (V / m)\end{aligned}$$

$$\text{又: } \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 120\pi \sqrt{\frac{1}{4}} = 60\pi \quad (\Omega)$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{H}(z,t) &= \frac{1}{\eta} \vec{e}_z \times \vec{E}(z,t) \\ &= \vec{e}_y \frac{|E_{x0}|}{\eta} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ &= \vec{e}_y \frac{10^{-4}}{60\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3} z + \frac{\pi}{6}) (A / m)\end{aligned}$$