4.4 矢量磁位的微分方程

➤在线性各向同性的介质中，

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}&=\mu\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}&=\vec{J}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \nabla\times\vec{H}=\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B}=\vec{J}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}$$

$$\because\ \nabla^2\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla\times\nabla\times\vec{A}$$

且假定 $\nabla\cdot\vec{A}=0$（库仑规范）

$$\therefore\ \nabla^2\vec{A}=-\nabla\times\nabla\times\vec{A}=-\mu\vec{J}$$

矢量磁位的泊松方程

若求解区域中 $\vec{J}=0$，则

$$\nabla^2\vec{A}=0$$

矢量磁位的*laplace*方程

➢在直角坐标系中，

$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}}$ 可分解成三个标量形式的泊松方程：

$$\boxed{\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu J_z \end{cases}}$$

∇^2算符是标量Laplace算符，

方程与静电场的电位泊松方程形式相同，

其求解方法以及所得的解与电位相同。

4.5　恒定磁场的边界条件

➢在不同磁介质的分界面两侧，恒定磁场的场量所满足的相互关系

一、恒定磁场的场矢量$\vec{B}$和$\vec{H}$满足的边界条件

1) 法向磁场的边界条件

$$\text{应用}\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \Rightarrow \quad \boxed{B_{2n}=B_{1n}\text{或}\vec{e}_n\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0}$$

2) 切向磁场的边界条件

$$\text{应用}\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{H_{2t}-H_{1t}=J_{sN}\text{或}\vec{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{J}_s}$$

若界面上无传导面电流，则界面上存在束缚电流 $\boxed{\vec{J}_s{}'=\dfrac{1}{\mu_0}(B_{2t}-B_{1t})}$

若界面上无自由电流

$$\vec{J}_s'=\vec{J}_{s1}'+\vec{J}_{s2}'=\vec{M}_1\times\vec{e}_n+\vec{M}_2\times(-\vec{e}_n)=\vec{e}_n\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)$$

$$=\vec{e}_n\times\left[\left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_0}-\vec{H}_2\right)-\left(\frac{\vec{B}_1}{\mu_0}-\vec{H}_1\right)\right]=\frac{\vec{e}_n}{\mu_0}\times(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=\frac{B_{2t}-B_{1t}}{\mu_0}$$

二、在不同磁介质分界面上的磁场方向的关系

$\vec{B}$和$\vec{H}$在两种介质分界面两侧通常要改变方向

设$\vec{B}_1$和$\vec{B}_2$与界面法线夹角分别为θ_1和θ_2

若分界面上自由电流密度$\vec{J}_s = 0$,

$$H_{2t} = H_{1t} \Rightarrow H_2 \sin\theta_2 = H_1 \sin\theta_1 \Rightarrow \frac{B_2}{\mu_2}\sin\theta_2 = \frac{B_1}{\mu_1}\sin\theta_1$$

$$B_{2n} = B_{1n} \Rightarrow B_2\cos\theta_2 = B_1\cos\theta_1$$

$$\left.\right\} \frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

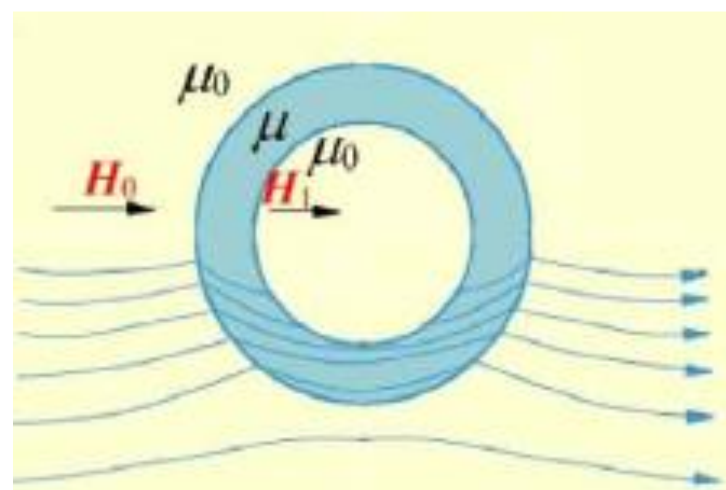
μ较大的介质中，磁感应线与界面法线之间的夹角也越大，

顺磁质和抗磁质, $\mu = \mu_0$，这两类介质的分界面上，磁场方向改变很小。

在铁磁质（μ_1）和非铁磁质（μ_2）分界面上，

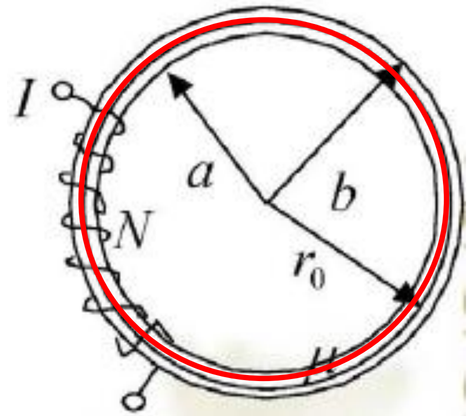
$\mu_1 >> \mu_2$，$tg\theta_1 >> tg\theta_2$，

只要铁磁质内$\theta_1 \neq \pi/2$，则$\theta_2 \approx 0$。



例4-3-2 铁心磁环尺寸和截面积如图，已知铁心磁导率$\mu >> \mu 0$,磁环上绕有N匝线圈，通有电流I, 求：1）磁环中的 $\vec{B}, \vec{H}, \Psi$ ，2）若在铁心上开一小切口，计算磁环中的 $\vec{B}, \vec{H}, \Psi$

解：(1)采用圆柱坐标系，在磁环内取半径为ρ的圆作为积分路径，由安培环路定律

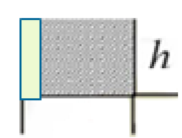


$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow H_\varphi 2\pi\rho = \sum I = NI \Rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

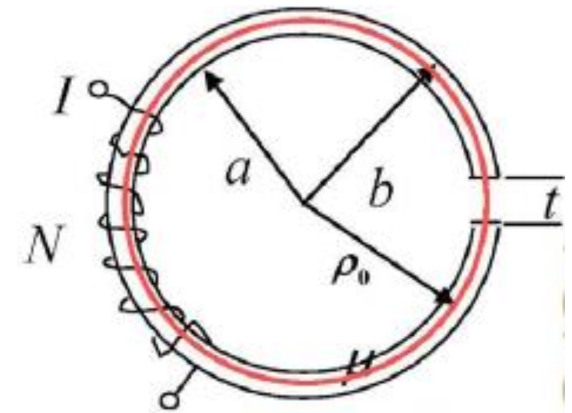
$$\Rightarrow \vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{NI}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu NI}{2\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\rho=a}^{b} \left(\vec{e}_\varphi \frac{\mu NI}{2\pi\rho} \right) \cdot \left(\vec{e}_\varphi h d\rho \right) = \frac{\mu NIh}{2\pi} \ln\frac{b}{a}$$



(2)开切口后

在切口处，磁场垂直于边界面，$\vec{B}=\vec{e}_\varphi B_n$，由边界条件知在边界面上$\vec{B}$连续，$\vec{H}$不连续。



$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow H_{\varphi 1}(2\pi\rho - t) + H_{\varphi 2} t = \sum I = NI$$

$$\Rightarrow \frac{B_{\varphi 1}}{\mu}(2\pi\rho - t) + \frac{B_{\varphi 2}}{\mu_0} t = \sum I = NI$$

$$\Rightarrow B_{\varphi 1} = B_{\varphi 2} = B = \frac{NI\mu}{(2\pi\rho - t) + \mu_r t}$$

由于铁心很细，可近似认为磁力线均匀分布在截面上

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{NI\mu}{(2\pi\rho - t) + \mu_r t} \approx \vec{e}_\varphi \frac{NI\mu}{(2\pi\rho_0 - t) + \mu_r t}$$

$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \begin{cases} \vec{e}_\varphi \dfrac{NI}{(2\pi\rho_0 - t) + \mu_r t} & \text{铁芯} \\ \vec{e}_\varphi \dfrac{NI\mu}{\mu_0(2\pi\rho_0 - t) + \mu t} & \text{空气隙} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \frac{NI\mu}{(2\pi\rho_0 - t) + \mu_r t} h(b-a)$$

4.6 电感

一、电感的定义

在线性各向同性媒质中，μ为标量，且不随外加磁场（或电流）变化

穿过任意回路的磁通量与电流回路中电流强度成正比。

电流回路在场点处产生磁场 $\vec{B} = \oint \frac{\mu}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \propto I$

穿过任意回路的磁通量 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \propto I$

$\Phi \propto I$

➢磁链ψ:

当C为单匝导线绕成时，为穿过该回路的磁通ϕ 。

当回路由N匝导线绕成时，则总磁通是各匝磁通之和，称为磁链ψ ，若N匝线圈密集，则$\psi = N\phi$为穿过该回路的**磁链**。

➢自感L： 若磁场是由回路本身的电流产生，则回路的磁链ψ称为自感磁链，$\psi \propto I$，自感磁链与电流的比值称为自感系数(简称自感L)，即:

$$\boxed{L = \frac{\Psi}{I} \text{(单位：亨}H\text{)}}$$

➢线圈的自感取决于线圈本身的几何形状、尺寸、匝数以及介质的性质，而与线圈中的电流无关。

➢互感M：若有两个相隔不远的导线回路C_1和C_2，电流分别为I_1和I_2，

•一个线圈中电流产生的且与另一个线圈相交链的磁链称为互感磁链。

•若C_1中电流I_1产生的磁场与回路2相交链的磁链记为ψ_{21}，则回路1对回路2的互感系数（简称互感）为：

$$\boxed{M_{21}=\frac{\Psi_{21}}{I_1}\text{(单位：亨}H\text{)}}$$

•同理，若C_2中电流I_2产生的磁场与回路1相交链的磁链记为ψ_{12}，则回路2对回路1的互感系数（简称互感）为：

$$\boxed{M_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}\text{(单位：亨}H\text{)}}$$

•互感仅与两线圈的几何形状、尺寸、匝数、相对位置以及周围介质的性质（μ），而与线圈中的电流无关。

4.7　恒定磁场的能量及能量密度

恒定磁场由恒定电流产生，因此恒定磁场的能量就是恒定电流具有的能量。

一、载流回路系统的能量

★ 电流回路系统的能量是建立电流过程中由电源供给的。

★ 当电流从零增加时，回路感应电动势将阻止电流的增加，假想一个电源，它能提供外加电压克服感应电动势而作功，使回路能量增加。

★ 若所有回路固定，且忽略焦耳损耗，则电源作功将全部变为电流回路系统的磁场能量，这时回路上的外加电压和回路中的感应电动势大小相等方向相反。

★ 假设：媒质为线性；

磁场建立无限缓慢（不考虑辐射）

系统能量仅与系统的最终状态有关，与能量建立过程无关。

回路j中的感应电动势为

$$\varepsilon_j = -\frac{\partial \Psi_j}{\partial t}$$

外加电压

$$u_j = -\varepsilon_j = \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}$$

若 t 时刻，回路电流为i_j，则：

dt时间内与回路j相连的电源所作的功

$$dW_j = u_j i_j dt = \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} i_j dt = i_j d\Psi_j$$

若系统包含N个回路，增加的磁场能量为

$$\boxed{dW_m} = \sum_{j=1}^{N} dW_j = \sum_{j=1}^{N} i_j d\Psi_j$$

而回路j的磁链为

$$\boxed{\Psi_j = \sum_{k=1}^{N} M_{jk} i_k}$$

$$dW_m = \sum_{j=1}^{N} dW_j = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} i_j d(\boxed{M_{jk}}\, i_k)$$

$$\begin{cases} k \neq j & \text{互感系数} \\ k = j, M_{jj} = L_j & \text{自感系数} \end{cases}$$

$$dW_m = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} i_j M_{jk} di_k$$

$$dW_m = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} i_j M_{jk} di_k$$

假设所有回路中的电流同时从零开始以百分比α同比例增加，即 $i_j = \alpha(t) I_j$

则 $di_k = I_k d\alpha$，于是

$$dW_m = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} (\alpha I_j) M_{jk} (I_k d\alpha) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} I_j M_{jk} I_k \alpha d\alpha$$

充电过程完成后，系统的总磁场能量

$$W_m = \int dW_m = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_j I_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_j I_k$$

例

单回路 $N = 1: M_{11} = L_1, W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$

双回路 $N = 2: \begin{cases} M_{11} = L_1 \\ M_{22} = L_2 \\ M_{12} = M_{21} = M \end{cases}, W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2$

★ 磁场能量还可用矢量磁位$\vec{A}$表示

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_j I_k$$

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} I_j (M_{jk} I_k)$$

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^{N} M_{jk} i_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} I_j (\Psi_j)$$

$$\because \Psi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} I_j \left(\oint_{C_j} \vec{A}\cdot d\vec{l}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \left(\oint_{C_j} \vec{A}\cdot I_j d\vec{l}_j\right)$$

当电流是分布于体积V中，且电流密度为$\vec{J}$的体分布电流时，则用体电流元代替线电流元。

$$\boxed{I d\vec{l} \rightarrow \vec{J} dV}$$

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\left(\vec{J} dV\right)$$

得体电流的磁场能量：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{A}\cdot\vec{J}\right) dV}$$

同理可得面电流的磁场能量：

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{A}\cdot\vec{J}_s\right) dS}$$

二、磁场能量的场矢量表示　能量密度

$$\because W_m = \frac{1}{2}\int_V (\vec{A}\cdot\vec{J})dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{H})dV$$

$$\nabla\bullet(\vec{H}\times\vec{A}) = \vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{H}) - \vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{A})$$

$$= \frac{1}{2}\int_V [\nabla\bullet(\vec{H}\times\vec{A}) + \vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{A})]dV$$

将积分扩展到整个空间

$$= \frac{1}{2}\int_S (\vec{H}\times\vec{A})\bullet d\vec{S} + \frac{1}{2}\int_V (\vec{H}\bullet\vec{B})dV$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV' \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}\times\vec{e}_R}{R^2}dV'$$

$$d\vec{s} = \vec{e}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$A \propto \frac{1}{R}, H \propto \frac{1}{R^2}, ds \propto R^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_V (\vec{H}\bullet\vec{B})dV$$

$$= \frac{1}{2}\int_V (\vec{H}\bullet\vec{B})dV$$

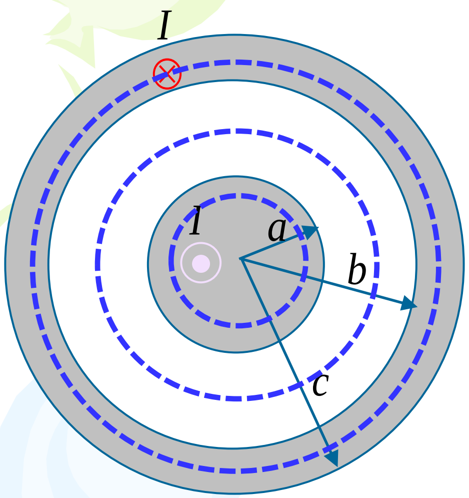
能量体密度:

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$$

对于线性、各向同性媒质，有:

$$w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$$

例 4.7.1 求如图所示无限长同轴线单位长度内的磁场能量。



$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\mu\int_V H^2 dV}$$

解：由安培环路定律：

在 $r \le a$ 的区域

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_\varphi \frac{I\pi r^2}{\pi a^2}\frac{1}{2\pi r} = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi a^2} r$$

在$a \le r \le b$ 的区域

$$\vec{H}_2 = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi r}$$

在$b \le r \le c$ 的区域由基本方程$\oint_l \vec{H}_3 \cdot d\vec{l} = \sum I$

$$2\pi r H_3 = I - \frac{I}{(c^2-b^2)}(r^2-b^2) = I\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$\vec{H}_3 = \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi r}\frac{(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)}$$

三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \int_V \frac{1}{2}\mu\vec{H}dv = \frac{1}{2}\mu_0\int_0^a H_1^2 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\int_0^a\left(\frac{I}{2\pi a}\right)^2 2\pi r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2}\mu_0\int_a^b H_2^2 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\int_a^b\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

$$W_{m3}=\frac{1}{2}\mu_0\int_b^c H_3^2 2\pi r dr$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0\int_b^c\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)^2 2\pi r dr$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{\left(c^2-b^2\right)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4\left(c^2-b^2\right)}\right]$$

总磁场能量

$$W_m=\frac{1}{2}L_0 I^2=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$

作业：5.4，5.6(1,2)，

5.12