3.9　恒定电场的基本方程和边界条件

恒定电场：在有恒定电流的导电媒质中存在的电场

如导电媒质的内部，$\vec{J}=\gamma\vec{E}$，$\vec{E}\neq 0$，不同于静电场。

本节主要讨论导体（导电媒质）中恒定电场的基本性质、边界条件及其应用。

一、恒定电场基本方程

1、恒定电场基本量

$\vec{E}, \vec{J}$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} = \rho_v \end{cases}$$

对于恒定电流

$$\nabla \bullet \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

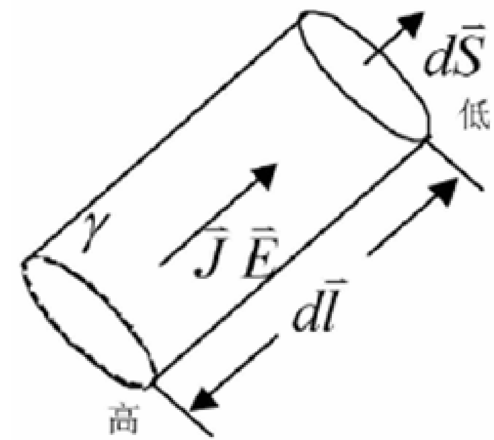
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{J} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{J} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \bullet \vec{B} = 0 \end{cases}$$

恒定电场基本方程　　　　恒定磁场基本方程

2、恒定电场的本构关系

体积元：



导电媒质导电率γ，体积元内存在 $\vec{E}$， $\vec{J}$

由欧姆定律：

$$I=\frac{U}{R} \qquad \Rightarrow \vec{J}\cdot d\vec{S}=\frac{\vec{E}\cdot d\vec{l}}{\left(\dfrac{dl}{\gamma dS}\right)} \qquad \Rightarrow \vec{J}\cdot d\vec{S}=\gamma\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}=\gamma\vec{E}}$$

导电媒质中恒定电场的本构关系

欧姆定律的微分形式

讨论：

1）导电媒质的导电率γ反映物质传导特性，而介电常数ε反映了物质的极化特性，

$$\vec{J}=\gamma\vec{E}\Rightarrow\vec{E}=\frac{\vec{J}}{\gamma}$$

在理想导体（$\gamma=\infty$）内，恒定电场$\vec{E}=0$

一般的**金属**导体$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\gamma\neq\infty$，可以存在恒定电场。

非金属导体内，$\varepsilon\neq\varepsilon_0$，$\gamma\neq\infty$，可以存在恒定电场，导体内有电场存在，便有极化现象出现。

2）在导电媒质内，恒定电场 $\vec{E}$，$\vec{J}$的方向相同。

3、恒定电场的基本性质

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \bullet \vec{J} = 0 \end{cases}$$

1）恒定电流的电流连续性方程

$$\nabla \bullet \vec{J} = 0 \quad \oint_s \vec{J} \bullet d\vec{S} = 0$$

（1）恒定电流场是无源场，电流线$\vec{J}$是闭合曲线，恒定电流回路必定是闭合回路。

（2）如果导体中存在恒定电场，而导体是均匀的（γ为常数）

$$\because \oint_s \vec{J} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\oint_s \left(\gamma \vec{E}\right) \bullet d\vec{S} = \gamma \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{S} \Rightarrow \oint_s \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0 \Rightarrow \nabla \bullet \vec{E} = 0$$

说明：在任一点处，净电荷密度为0，即导体内部虽然有恒定电流 $\vec{J} = \rho \vec{v}, \vec{v}$ 是电子的速度，但没有净电荷。

电荷只能分布在导体的表面上，导体内部的恒定电场正是表面上的电荷产生的。

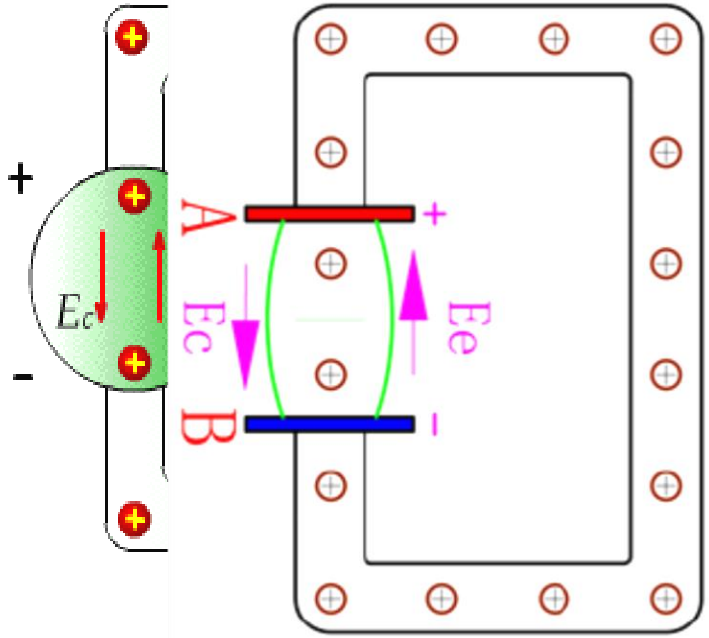
2）恒定电场的旋度

$$\nabla\times\vec{E}=0 \quad \oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S}=0$$

电导率为常数的均匀导体中，恒定电流产生的恒定电场电位函数

Laplace方程

$$\nabla\times\vec{E}=0 \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{E}=-\nabla\phi \\ \nabla\bullet\vec{E}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \nabla^2\phi=0$$



恒定电流对应的恒定电场也是库仑电场。

如果在导体回路中接入一恒定直流电源，则在电源两极上及连接两极的导体表面形成净电荷分布（导体中净电荷为0）。

这些净电荷在导体内产生电场，导体内部的电荷定向运动形成电流。

由于电源内部存在一种使正电荷由负极向正极运动的作用力，不断地补充了电极上的电荷，形成了稳定分布的电极电荷，从而保持导体回路中电场和电流的恒定。

3）恒定电场怎样与其源联系？

将电源内部搬运单位电荷的非静电力视为一等效的电场强度 $\vec{E'}$，也称局外场，只存在于电源内部，方向是由负极指向正极。

将单位正电荷从负极搬运到正极时，非静电力所做的功称为电源的**电动势**。

$$\varepsilon = \int_B^A \vec{E}' \bullet d\vec{l}$$

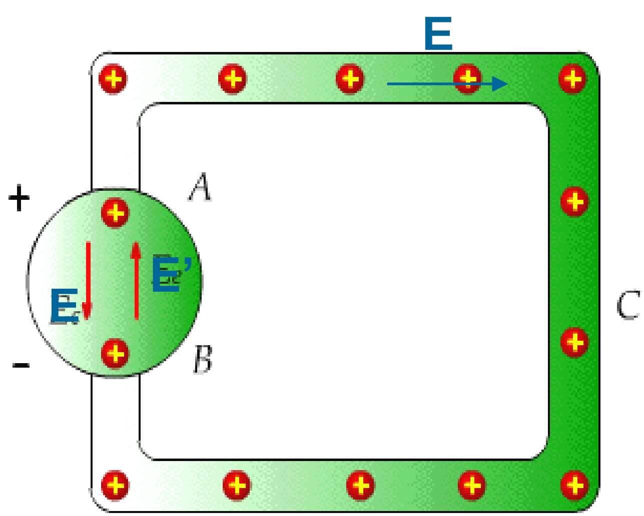
静电力不仅存在于电源外部，还存在于电源内部，在电源内部与 $\vec{E'}$ 方向相反。

为了使电荷q沿导体回路运动一周，静电力和非静电力所作的功为：

$$A = \int_{in} \vec{F}_{in} \bullet d\vec{l} + \int_{off} \vec{F}_{off} \bullet d\vec{l} = q\int_{in} (\vec{E} + \vec{E}') \bullet d\vec{l} + q\int_{off} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$= q\int_{in} \vec{E}' \bullet d\vec{l} + q\oint \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$= q\oint_C \vec{E}' \bullet d\vec{l} = q\varepsilon$$



二、恒定电场的边界条件

在两种不同电导率导体界面的两侧，恒定电场的场量所满足的关系成为恒定电场的边界条件

1、场矢量

$$\oint_s \vec{J}\bullet d\vec{S}=0\Rightarrow \vec{e}_n\bullet\left(\vec{J}_1-\vec{J}_2\right)=0,\ J_{1n}=J_{2n}$$

$$\oint_s \vec{E}\bullet d\vec{l}=0\Rightarrow \vec{e}_n\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}_2\right)=0,\ E_{1t}=E_{2t}$$

2、电位函数

$$J_{1n}=J_{2n}\xrightarrow{\vec{J}=\gamma\vec{E}}\gamma_1 E_{1n}=\gamma_2 E_{2n}\xrightarrow[E_n=-\nabla\phi\bullet\vec{e}_n=-\frac{\partial\phi}{\partial n}]{\vec{E}=-\nabla\phi}\boxed{\gamma_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\gamma_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n}}$$

$$\text{库仑电场}\longrightarrow\boxed{\phi_1=\phi_2}$$

3、讨论

$$J_{1n} = J_{2n} \qquad E_{1t} = E_{2t}$$

- 电场发生突变 $J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}$
- 分界面上有自由面电荷分布

$$\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$= \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{\gamma_2} - \varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{\gamma_1}$$

$$J_{1n} = J_{2n} = J_n$$

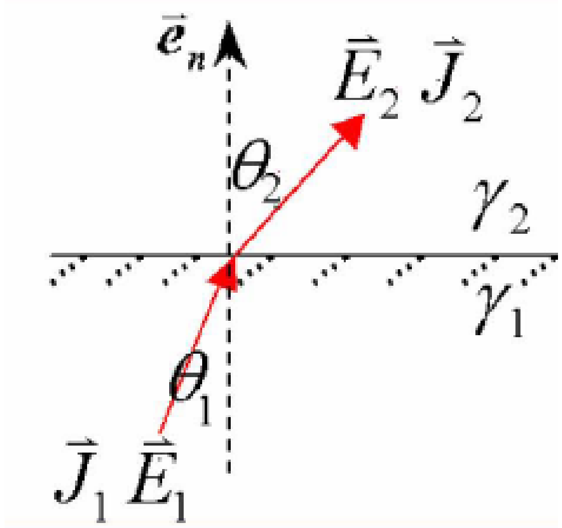
$$= J_n \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \right)$$

一般金属导体 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0, \gamma_1 \neq \gamma_2$ 分界面上必有自由面电荷分布

这是在接通电源后，在恒定电流建立的瞬间在边界上所积累的电荷，并很快达到恒定值。

- 金属导体分界面上不存在极化面电荷分布

➢分界面两侧电场强度方向的关系

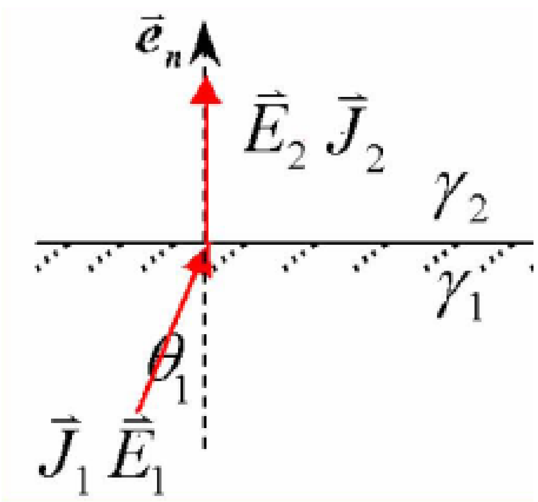


$$\gamma_1 \boldsymbol{E}_{1n} = \gamma_2 \boldsymbol{E}_{2n} \quad \Rightarrow \gamma_1 \boldsymbol{E}_1 \cos\theta_1 = \gamma_2 \boldsymbol{E}_2 \cos\theta_2$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_1}{\tan\theta_1} = \frac{\gamma_2}{\tan\theta_2} \Rightarrow \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$$

A. 当媒质一为良导体，媒质2为不良导体时：



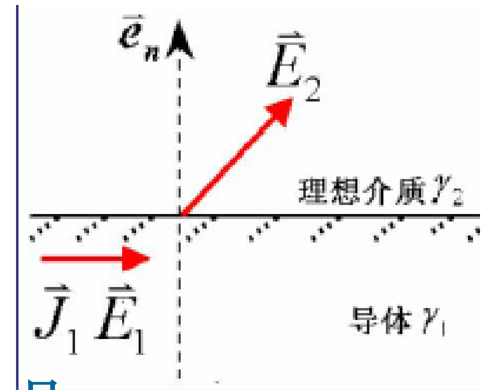
由 $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = \dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}$ 可知：$\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} >> 1$ 时，只要 $\theta_1 \neq \dfrac{\pi}{2}$，则 $\theta_2 \to 0$

即恒定电流在穿过良导体与不良导体的界面时，

电流线（或电力线）近似与良导体的表面垂直，良导体表面近似为等位面，与静电场的分布相似。

B. 当媒质1为良导体（$\gamma_1 \neq 0$），媒质2为理想介质（$\gamma_2 = 0$）时：

导体一侧电流线（或电力线）与分界面平行



$$\because \vec{J}_2 = \gamma_2 \vec{E}_2 = 0, \ \text{且} \ J_{1n} = J_{2n}$$

$$\Rightarrow J_{1n} = 0 \ \ \text{且} \ \ E_{1n} = J_{1n} / \gamma_1 = 0$$

理想介质一侧，无电流，但$\vec{E}$既有切向分量又有法向分量，且

$$E_{2t} = E_{1t} = E_1 = \frac{J_1}{\gamma_1} \quad \text{又} \quad \rho_s = D_{2n} - D_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n} \Rightarrow E_{2n} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_2}$$

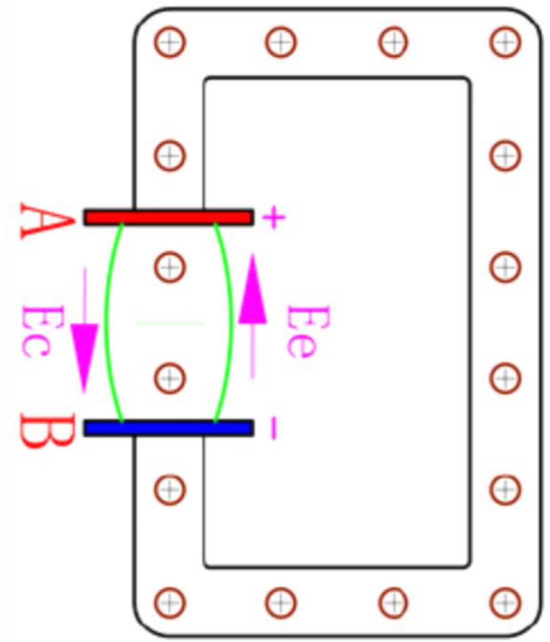
电场不垂直于导体表面，即导体表面不是等位面。

导体也不是等位体

$$\because \gamma_1 \neq \infty \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{J}_1}{\gamma_1} \neq 0$$

沿电流方向有电压差。

三、静电场和恒定电场性质比较



- 相同点：
  - 场性质相同，均为保守场
  - 场均不随时间改变
  - 场不能存在于理想导体内部
- 不同点：
  - **源**：静电场的源为静止电荷，恒定电场的源为区域外稳定的电荷分布。
  - **场特性**：静电场为有源无旋场，恒定电场为无源无旋场。
  - **平衡状态**：静电场对应静态平衡，恒定电场对应动态平衡。

3.11　焦尔定律

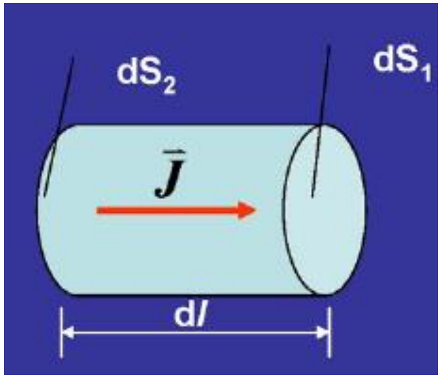
- **导体中有电流时，必伴随功率损耗**

金属导体内部的电流是由自由电子在电场力的作用下定向运动而形成的。

自由电子在运动过程中不断与金属晶格点阵上的质子碰撞,把自身的能量传递给质子,使晶格点阵的热运动加剧,导体温度上升。

电流的热效应, 由电能转换来的热能称为焦耳热。

➢假设在导体中沿电流元方向取一圆柱形体积元，dt时间内将电荷dq移动了dl距离，电场力所作功为



$$dW = Fdl = dq \bullet E \bullet dl$$

体积元内消耗的功率为：

$$dP = \frac{dW}{dt} = \frac{dq \bullet E \bullet dl}{dt} = \frac{dq}{dt} \bullet E \bullet dl = dI \bullet E \bullet dl \qquad dI = JdS$$

功率密度：$p = \frac{dP}{dV} = \frac{dI \bullet E \bullet dl}{dS \bullet dl} = \frac{dI \bullet E}{dS} = J \bullet E = \gamma E^2 = \frac{J^2}{\gamma} \left(W/m^2\right)$

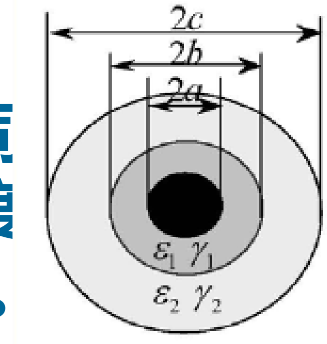
$\Rightarrow p = \vec{J} \bullet \vec{E}$ ------导电媒质焦耳功率损耗密度

$$\Rightarrow P = \int_V (JE) dV$$

对于一段长为l,横截面积为S的导线，

$\Rightarrow P = \int_V (JE) dV = \int_l E dl \int_s J dS = UI = I^2 R$ -----焦耳定律积分形式

例1：同轴线填充两种介质，结构如图所示。两种介质介电常数分别为ε_1和ε_2，导电率分别为γ_1, γ_2，设同轴线内外导体电压为 U_0，求（1）导体间的电场强度电位、电流密度矢量。（2）分界面上自由电荷分布。



解：　设单位长度内从内导体流向外导体的电流为I

由 $$\int_S \vec{J} \bullet d\vec{S} = I \quad \Rightarrow \vec{J} = \frac{I}{S}\vec{e}_r$$

$$= \frac{I}{2\pi r \cdot 1}\vec{e}_r \quad (a < r < c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1 = \dfrac{\vec{J}}{\gamma_1} = \dfrac{I}{2\pi r \gamma_1}\vec{e}_R & (a < r < b) \\ \vec{E}_2 = \dfrac{\vec{J}}{\gamma_2} = \dfrac{I}{2\pi r \gamma_2}\vec{e}_R & (b < r < c) \end{cases}$$

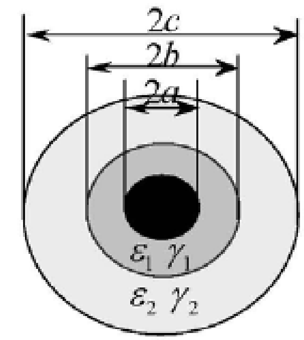
$$U = \int_a^b \vec{E}_1 \bullet d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}_2 \bullet d\vec{r}$$

$$= \frac{I}{2\pi\gamma_1}(\ln b - \ln a) + \frac{I}{2\pi\gamma_2}(\ln c - \ln b)$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2 U_0}{\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{\gamma_1\gamma_2 U_0}{[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]r} \quad (a < r < c)$$

（2）分界面上自由电荷分布。



可利用边界条件 $\rho_s = D_{2n} - D_{1n} = \vec{e}_n \bullet \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)$

在 $\rho = a$ 的面上：　　内导体是媒质1，

$$\rho_{s1} = \vec{e}_n \bullet \vec{D}_2 = \vec{e}_\rho \bullet \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_1 \gamma_1 U_0}{\left[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)\right]a}$$

在 $\rho = b$ 的面上：

$$\rho_{s2} = \vec{e}_n \bullet \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \vec{e}_\rho \bullet \left(\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1\right) = \frac{\left(\varepsilon_2 \gamma_2 - \varepsilon_1 \gamma_1\right) U_0}{\left[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)\right]b}$$

在 $\rho = c$ 的面上：　　外导体是媒质2，

$$\rho_{s3} = \vec{e}_n \bullet \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \vec{e}_\rho \bullet \left(0 - \varepsilon_2 \vec{E}_2\right) = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 U_0}{\left[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)\right]c}$$