

## 6.4 时谐电磁场

### Maxwell方程组和边界条件的复数形式

➤ **时谐电磁场**：电磁场中矢量的每个坐标分量及标量函数都随时间以相同的频率作简谐规律变化的时变电磁场，也称**正弦电磁场**。

➤ **为什么要研究时谐电磁场？**

1、易于激励，在工程上应用广泛。

2、在线性媒质中，麦氏方程组是线性偏微分方程组（线性时不变系统），当场源随时间按一定频率作正弦变化时，将使场量产生相同频率的正弦变化。

3、对于随时间任意变化的源函数，可由傅立叶分析得到源函数的各频率分量，将各频率分量源所产生的场叠加起来得到总场。

# 一、场量和场源的复数形式

➤ 对任何简谐变化的场矢量可用复矢量表示

以电场强度为例，考虑直角坐标系电场强度的三个分量可用余弦函数表示

用复数的实部表示

$$E_x(x, y, z, t) = E_{xm}(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi_x(x, y, z)]$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_{ym}(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi_y(x, y, z)]$$

$$E_z(x, y, z, t) = E_{zm}(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi_z(x, y, z)]$$

$$E_x = \operatorname{Re} \left[ E_{xm} e^{j(\omega t + \varphi_x)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{E}_{xm} e^{j\omega t} \right]$$

$$E_y = \operatorname{Re} \left[ E_{ym} e^{j(\omega t + \varphi_y)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{E}_{ym} e^{j\omega t} \right]$$

$$E_z = \operatorname{Re} \left[ E_{zm} e^{j(\omega t + \varphi_z)} \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{E}_{zm} e^{j\omega t} \right]$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z \\ &= \operatorname{Re} \left[ \left( \vec{e}_x \dot{E}_{xm} + \vec{e}_y \dot{E}_{ym} + \vec{e}_z \dot{E}_{zm} \right) e^{j\omega t} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right] \end{aligned}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= E_{xm} e^{j\varphi_x} \\ \dot{E}_{ym} &= E_{ym} e^{j\varphi_y} \\ \dot{E}_{zm} &= E_{zm} e^{j\varphi_z} \end{aligned} \right\}$$

称为

时谐电场的复振幅

$$\text{复矢量 } \dot{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{e}_x \dot{E}_{xm} + \vec{e}_y \dot{E}_{ym} + \vec{e}_z \dot{E}_{zm}$$

➤ 对任何简谐变化的标量，如电荷分布、电位可用复标量表示

$$\rho = \rho_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\rho_m e^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\dot{\rho} e^{j\omega t}]$$

$$\text{复标量 } \dot{\rho}(\vec{r}) = \rho_m e^{j\varphi}$$

➤ 场量对时间微积分的复数表示

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Re}[j\omega \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$

$$\int \vec{E} dt = \int \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re}\left[\dot{\vec{E}}(\vec{r}) \int e^{j\omega t} dt\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{j\omega} \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t}\right]$$

$$\begin{aligned} \text{若 } \vec{E} \leftrightarrow \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \quad \text{则} \quad & \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \\ & \int \vec{E} dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

## ► 场量对空间求导的复数表示

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\nabla \cdot \dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \operatorname{Re}[\dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$\nabla \phi = \nabla \operatorname{Re}[\dot{\phi}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\nabla \dot{\phi}(\vec{r})e^{j\omega t}]$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &\leftrightarrow \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{E} &\leftrightarrow \nabla \cdot \dot{\vec{E}}(\vec{r}) \\ \nabla \times \vec{E} &\leftrightarrow \nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &\leftrightarrow \dot{\phi}(\vec{r}) \\ \nabla \phi(\vec{r}, t) &\leftrightarrow \nabla \dot{\phi}(\vec{r})\end{aligned}$$

## 二、Maxwell方程组的复数形式

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{Re} \left[ j\omega \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{Re} \left[ j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \left[ \text{Re} \left( \dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right) \right] = \text{Re} \left( \dot{\vec{J}} e^{j\omega t} \right) + \text{Re} \left( j\omega \dot{\vec{D}} e^{j\omega t} \right) \\ \nabla \times \left[ \text{Re} \left( \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right) \right] = \text{Re} \left( -j\omega \dot{\vec{B}} e^{j\omega t} \right) \\ \nabla \cdot \text{Re} \left( \dot{\vec{B}} e^{j\omega t} \right) = 0 \\ \nabla \cdot \text{Re} \left( \dot{\vec{D}} e^{j\omega t} \right) = \text{Re} \left( \dot{\rho} e^{j\omega t} \right) \end{array} \right.$$

$$\text{Re} \left[ \nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[ -j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right]$$

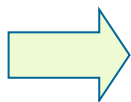
$$\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} = -j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t}$$

$$\nabla \times \dot{\vec{E}}(\vec{r}) = -j\omega \dot{\vec{B}}(\vec{r})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}} + j\omega \dot{\vec{D}} \\ \nabla \times \dot{\vec{E}} = -j\omega \dot{\vec{B}} \\ \nabla \cdot \dot{\vec{B}} = 0 \\ \nabla \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho} \end{array} \right.$$

## ➤ 类似及可得Maxwell方程组积分形式的复数形式

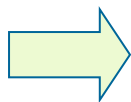
$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dv \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \dot{\vec{H}} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \dot{\vec{J}} + j\omega \vec{D} \right) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \dot{\vec{E}} \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S} \\ \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{S} = \int_V \dot{\rho} dv \end{array} \right.$$

## ➤ 电流连续性方程

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \dot{\vec{J}} = -j\omega \dot{\rho}$$

$$\oint_S \dot{\vec{J}} \cdot d\vec{S} = -j\omega \int_V \dot{\rho} dv$$

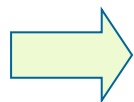
## ➤ 线性各向同性媒质中的本构关系

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

$$\dot{\vec{D}} = \epsilon \dot{\vec{E}} \quad \dot{\vec{B}} = \mu \dot{\vec{H}} \quad \dot{\vec{J}} = \gamma \dot{\vec{E}}$$

### 三、时谐场的边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J} \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{e}_n \times (\dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{H}}_1) = \dot{\vec{J}} \\ \vec{e}_n \times (\dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{B}}_2 - \dot{\vec{B}}_1) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{D}}_2 - \dot{\vec{D}}_1) = \dot{\rho} \end{cases}$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \nabla_s \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$



$$\vec{e}_n \cdot (\dot{\vec{J}}_2 - \dot{\vec{J}}_1) + \nabla_s \cdot \dot{\vec{J}}_s = -j\omega \dot{\rho}_s$$

**注意：**为表达简单，常省略复量上的点，即以后用不带点的符号表示复量，而时间函数均含有自变量 $t$ ，不会产生混淆。

## 四、瞬时值形式与复数形式的相互转换

设场量的复数形式为： $\vec{E}(\vec{r})$  省略复量上的点

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}$$

设场量的实数形式为：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x E_{xm} \cos(\omega t + \phi_x) + \vec{e}_y E_{ym} \cos(\omega t + \phi_y) + \vec{e}_z E_{zm} \cos(\omega t + \phi_z)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{\times e^{j\omega t}} (\vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}) e^{j\omega t} \xrightarrow{\text{取实部}}$$

$$\text{Re}[(\vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j\phi_y} + \vec{e}_z E_{zm} e^{j\phi_z}) e^{j\omega t}] = \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[ \dot{\vec{E}} e^{j\omega t} \right]$$



### 例6-4-1 真空中时谐场的电场瞬时值为：

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 0.3 \sin\left(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z\right) + \vec{e}_x 0.4 \cos\left(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{3}\right) \quad (V/m)$$

求：1) 电场强度复矢量；2) 磁场强度复矢量及其瞬时值

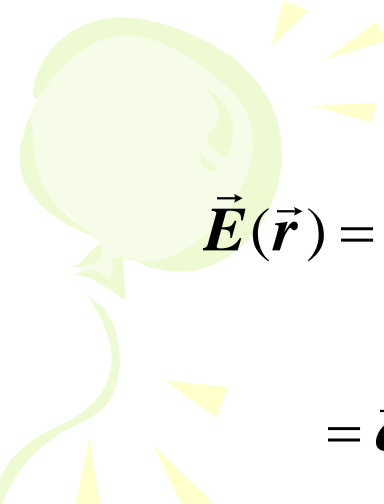
解：1) 将各分量的时间函数用余弦函数表示

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 0.3 \cos\left(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{2}\right) + \vec{e}_x 0.4 \cos\left(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \vec{e}_x 0.3 \operatorname{Re}\left[e^{j(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{2})}\right] + \vec{e}_x 0.4 \operatorname{Re}\left[e^{j(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{3})}\right]$$

$$= \operatorname{Re}\left\{ \left[ \vec{e}_x 0.3 e^{j(-\frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{2})} + \vec{e}_x 0.4 e^{j(-\frac{\pi}{3} z - \frac{\pi}{3})} \right] e^{j10^8 \pi t} \right\}$$


电场强度的  
复矢量


$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \left[ \vec{e}_x 0.3 e^{j(-\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{2})} + \vec{e}_x 0.4 e^{j(-\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{3})} \right] \\ &= \vec{e}_x 0.2 \left[ 1 - j(1.5 + \sqrt{3}) \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}\end{aligned}$$

**2) 已知电场强度复矢量，利用Maxwell第二方程求磁场强度复矢量。**

$$\because \nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}$$

$$\therefore \vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu_0} = \vec{e}_y \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[ 1 - j(1.5 + \sqrt{3}) \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z} (A/m)$$


## 求 $\vec{H}$ 复矢量对应的瞬时时间形式表示

### 先化成指数形式表示

$$\because \dot{\vec{H}} = \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[ 1 - j(1.5 + \sqrt{3}) \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[ (1 - j\sqrt{3}) - j1.5 \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$= \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[ 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 1.5e^{-j\frac{\pi}{2}} \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z}$$

$$\therefore \vec{H} = \mathbf{Re} \left[ \dot{\vec{H}} e^{j\omega t} \right] = \mathbf{Re} \left\{ \left[ \vec{e}_y \frac{1}{600\pi} \left[ 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + 1.5e^{-j\frac{\pi}{2}} \right] e^{-j\frac{\pi}{3}z} \right] e^{j\omega t} \right\}$$

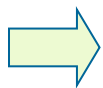
$$= \vec{e}_y \frac{1}{300\pi} \left[ \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}z \right) + 0.75 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}z \right) \right]$$

## 6.5 时谐场中的亥姆霍兹方程

### 1、场强复矢量的亥姆霍兹方程

简单、无源媒质中

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\gamma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$



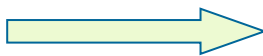
$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu\gamma \vec{E} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - j\omega\mu\gamma \vec{H} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{H} = 0 \end{cases}$$

复数形式的波动方程，即  
(齐次) 亥姆霍兹方程

#### (1) 对于非导电的理想介质 ( $\gamma=0$ )

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{H} = 0 \end{cases}$$

令  $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$



$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

称  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  为波数

## (1) 对于理想介质 ( $\gamma=0$ )

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

## (2) 对于 $\gamma \neq 0$ , 0的导电媒质

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - j\omega\mu\gamma\vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - j\omega\mu\gamma\vec{H} + \omega^2\mu\epsilon\vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2\mu(\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega})\vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2\mu(\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega})\vec{H} = 0 \end{cases}$$

导电媒质的复介电常数

$$\text{令 } \epsilon_c = \epsilon - j\frac{\gamma}{\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon_c\vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2\mu\epsilon_c\vec{H} = 0 \end{cases}$$

引入 $\epsilon_c$ 后, 导电媒质中的场方程与理想介质中的场方程的形式完全相同。

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega\vec{D} & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + j\omega\vec{D} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} & \nabla \times \vec{H} &= \gamma\vec{E} + j\omega\epsilon\vec{E} \\ & & \nabla \times \vec{H} &= j\omega(\epsilon - j\frac{\gamma}{\omega})\vec{E} \end{aligned}$$

将导电媒质等效地看作一种介质, 将传导电流和位移电流用一个等效的位移电流代替, 相应的等效介电常数为 $\epsilon_c$ 。

$$\text{令 } K^2 = \omega^2\mu\epsilon_c$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + K^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + K^2 \vec{H} = 0 \end{cases}$$

称 $K = \omega\sqrt{\mu\epsilon_c}$ 为复波数

- 直接对矢量方程求解
- 或将矢量方程转化为标量方程求解, 再应用分离变量法。

## 2、位函数及非齐次的亥姆霍兹方程

### (1) 位函数定义式

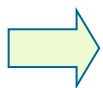
$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ (洛伦兹规范)} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} + j\omega \vec{A} = -\nabla \phi \\ \nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\phi \end{cases}$$

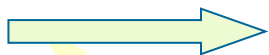
### (2) 达朗贝尔方程的复数形式 (线性各向同性的不导电媒质, 有源)

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu\epsilon \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu\epsilon \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

$$\text{令 } k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$$



$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$

也称非齐次亥姆霍兹方程

### (3) 讨论

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \end{cases}$$

由洛伦兹条件  $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \phi = \frac{\nabla \cdot \vec{A}}{-j\omega\mu\varepsilon} = \frac{j\omega \nabla \cdot \vec{A}}{\omega^2 \mu\varepsilon} = \frac{j\omega \nabla \cdot \vec{A}}{k^2}$

代入定义式  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$

$$\Rightarrow \vec{E} = -j\omega \left[ \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})}{k^2} + \vec{A} \right]$$

$$\text{又 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

显然，只需求~~A~~，即可求得~~E~~和~~B~~

## 6.6 复坡印廷定理和复坡印廷矢量

### ➤坡印廷定理及坡印廷矢量

瞬时形式的坡印廷定理：

$$-\oint_S \vec{S} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V (w_m + w_e) dv + \int_V p dv$$

瞬时形式的坡印廷矢量： $\vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)$

➤一般， $\vec{S}$ 的大小和流向都是随时间变化的，为了能对能流的大小有一个更明确的判断，往往需要知道其时间平均值。

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}(t) \times \vec{H}(t)] dt$$

➤下面讨论与时谐场平均功率及平均功率流密度相关的复坡印廷定理及坡印廷矢量。



# 一、时谐实矢量乘积的时间平均值

(1)两个随时间作时谐变化的实矢量的叉积的时间平均值等于其相应的复矢量共轭叉积实部的一半。

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\vec{A}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] dt = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})]$$

$$\because \text{Re}[\vec{A}(\vec{r})] = \frac{1}{2} [\vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}^*(\vec{r})]$$

$$\therefore \vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{A}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t}]$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\vec{A}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{A}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t}] \times \frac{1}{2} [\vec{B}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \vec{B}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t}]$$

$$= \frac{1}{4} [\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) + \vec{A}^*(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})] + \frac{1}{4} [\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) e^{j2\omega t} + \vec{A}^*(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r}) e^{-j2\omega t}]$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})] + \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) e^{j2\omega t}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{A}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] dt = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}^*(\vec{r})]$$

式中右端第一项与时间无关，第二项是角频率为  $2\omega$  的简谐矢量。周期为  $T/2$ 。

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] dt = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$$

(2)类似可推得，两个随时间作时谐变化的实矢量的点积的时间平均值等于其相应的复矢量共轭点积实部的一半。

$$\frac{1}{T} \int_0^T [\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)] dt = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{B}^*(\vec{r})]$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T w_m dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \right] = \frac{1}{4} \mu \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T w_e dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}) \right] = \frac{1}{4} \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{E}^*(\vec{r}) \end{aligned}$$

## 二、复坡印廷定理、复坡印廷矢量、平均坡印廷矢量

$$\because \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{H}^* \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}^*)$$

$$= \vec{H}^* \cdot (-j\omega \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\vec{J}^* - j\omega \vec{D}^*)$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{E} \cdot \vec{J}^* + j\omega(\vec{B} \cdot \vec{H}^* - \vec{E} \cdot \vec{D}^*)$$

复数Poynting定理的微分形式

两端同乘以1/2，得：

$$-\nabla \cdot \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* + 2j\omega \left( \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right)$$

对体积V积分，得：

$$-\oint_s \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} = \int_v \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* \right) dv + 2j\omega \int_v \left( \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right) dv$$

复数Poynting定理的积分形式

## 物理含义:

热损耗功率密度的时间平均值

$$-\oint_s \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} = \int_v \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* \right) dv + 2j\omega \int_v \left( \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right) dv$$

$$p_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T p(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{J}^*(\vec{r})) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^*$$

➤ 右端的实部，即第一项表示体积 $V$ 内实际热损耗功率的平均值

磁场能量密度的时间平均值

$$\begin{aligned} w_{mav}(\vec{r}) &= \frac{1}{T} \int_0^T w_m dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{H}^*(\vec{r}) \right] = \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* = \frac{1}{4} \mu \vec{H} \cdot \vec{H}^* \end{aligned}$$

电场能量密度的时间平均值

$$\begin{aligned} w_{eav}(\vec{r}) &= \frac{1}{T} \int_0^T w_e dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{D}^*(\vec{r}) \right] = \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* = \frac{1}{4} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* \end{aligned}$$

➤ 右端的虚部，即第二项表示体积 $V$ 内磁场储能与电场储能的时间平均值之差的 $2\omega$ 倍。

$$-\oint_S \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{s} = \int_V \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{J}^* \right) dv + 2j\omega \int_V \left( \frac{1}{4} \vec{B} \cdot \vec{H}^* - \frac{1}{4} \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right) dv$$

➤左端应表示通过闭合面 $S$ 进入体积 $V$ 内的复功率。

➤其中，进入闭合面 $S$ 所围体积 $V$ 内的有功功率，等于体积 $V$ 内损耗的平均功率（焦耳热损耗）。而进入闭合面 $S$ 所围体积 $V$ 内的无功功率，等于体积 $V$ 内储存的磁场能量时间平均值与电场能量时间平均值差值的 $2\omega$ 倍。

$$\text{令 } \vec{S}_c = \frac{1}{2} (\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*)$$

复数坡印廷矢量

表示穿过单位面积的复功率，代表复功率密度

$$\vec{S}_{av} = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^* \right]$$

平均坡印廷矢量

表示穿过单位面积瞬时功率的时间平均值，是平均功率流密度或有功功率流密度，即

$$\vec{S}_{av} = \text{Re}[\vec{S}_c] = \text{Re} \left[ \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^* \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)] dt$$

## 6.8 时变场中的唯一性定理

在区域 $V$ 中，如果 $t = 0$ 时，电场强度和磁场强度的值处处已知，并且在 $t \geq 0$ 时，边界面上电场强度的切向分量或磁场强度的切向分量也是已知，那么在所有 $t > 0$ 时，区域 $V$ 中的电磁场就唯一确定的。