3.4 电位的微分方程

静电场可以用电位表示，可推导出电位方程。

在线性、均匀、各向同性的简单媒质中，有：

$$\left.\begin{array}{l}\nabla \bullet \vec{D} = \rho_v \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E}\end{array}\right\} \Rightarrow \nabla \bullet \vec{E} = \rho_v / \varepsilon$$

又：$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}$$

电位函数的*Possion*方程

如果求解区域中无自由电荷存在，则：

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

电位函数的*Laplace*方程

在静电场边值问题求解中的应用：

可利用高斯定理求解静电场问题，但要求电场分布具有一定的对称性，应用范围有限。

可利用电场和电位的积分表示式，适合于已知电荷分布,求在无界空间中场分布，这类比较简单的静电场问题(分布型问题/场源问题)

$$\phi = \int_v \frac{\rho dV'}{4\pi\varepsilon R}$$

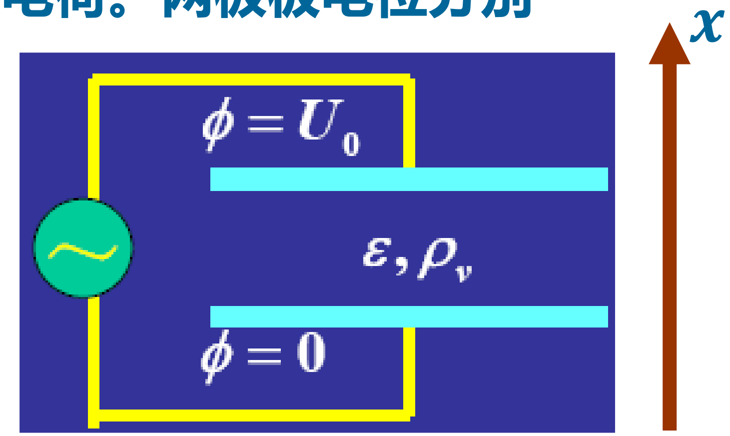
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v'} \frac{\rho_v dV'}{R^3}\vec{R}$$

若在有限空间内，在给定边界条件下求解区域内的场，称为：**边值问题**，这类问题可通过电位方程求解。

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \\ \text{边界条件} \end{cases}$$

(除一维问题可直接积分求解外，其他需用其他方法求解)

例1：设平板电容器极板平面的尺寸远大于它们之间的距离D，两极板间介质的介电常数为ε，且均匀分布有体密度为ρ_v的体电荷。两极板电位分别为$\phi=0$，$\phi=U_0$，求极板间的电位分布。



分析：利用电位方程求解电位

极板间均匀分布有体电荷，其间电位应满足泊松方程，且极板间的等位面应是与极板平面平行，故电位ϕ仅与变量x有关。

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{d^2\phi}{dx^2}=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{d\phi}{dx}=-\frac{\rho_v}{\varepsilon}x+C_1\quad\Rightarrow\phi=-\frac{\rho_v}{2\varepsilon}x^2+C_1x+C_2$$

边界条件为：

$$\begin{cases}\phi(x=0)=C_2=0\\ \phi(x=D)=-\dfrac{\rho_v}{2\varepsilon}D^2+C_1D+C_2=U_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=0\\ C_1=\dfrac{U_0}{D}+\dfrac{\rho_v}{2\varepsilon}\end{cases}$$

$$\therefore\phi=-\frac{\rho_v}{2\varepsilon}x^2+\left(\frac{U_0}{D}+\frac{\rho_vD}{2\varepsilon}\right)x$$

例2：导体球的电位为U_0(无穷远处电位为0),球半径为a,求球内外的电位及电场强度。

解：

球外空间（$r > a$）

电位应满足laplace方程，边界条件为$\phi(r = a) = U_0$, $\phi(r = \infty) = 0$,

电位及其电场均具有球对称性，即电位分布只与r有关 $\phi = \phi(\vec{r})$

$$\therefore \nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = C_1 \qquad \frac{d\phi}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \phi = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

带入边界条件：

$$\phi = -\frac{C_1}{r} + C_2 = \frac{aU_0}{r}$$

球内空间（$r <= a$）

带电导体应是一个等位体，故球内区域电位处处为U_0，

$$\therefore \phi = \begin{cases} \dfrac{aU_0}{r} & (r > a) \\ U_0 & (r \le a) \end{cases}$$

$$\therefore \vec{E} = -\nabla\phi = \vec{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

$$= -\vec{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} = \begin{cases} \vec{e}_r \dfrac{aU_0}{r^2} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

3.5　静电场的边界条件

在不同媒质的分界面两侧，静电场的场量所满足的相互关系称为静电场的边界条件。

一、静电场的场矢量$\vec{E}$和$\vec{D}$所满足的边界条件

1、法向电场的边界条件

应用 $\oint_s \vec{D} \bullet d\vec{S} = q = \int_V \rho_V dv$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \\ & \vec{e}_n \bullet (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \end{aligned}}$$

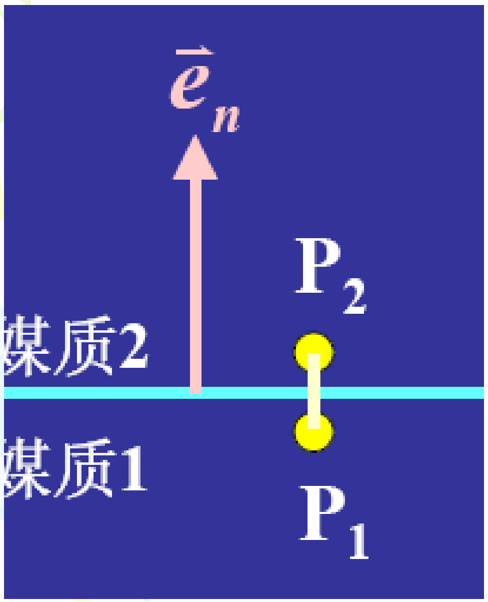
2、切向电场的边界条件

应用

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ & \vec{e}_n \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \end{aligned}}$$

二、静电场的电位ϕ所满足的边界条件



1、界面两侧，电位连续 $\boxed{\phi_1 = \phi_2}$

2、界面两侧，电位的法向导数不连续 $\boxed{\frac{\partial \phi_1}{\partial \boldsymbol{n}} \neq \frac{\partial \phi 2}{\partial \boldsymbol{n}}}$

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \qquad \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

$$\because \vec{E} = -\nabla \phi \qquad \therefore \vec{D} = -\varepsilon \nabla \phi$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \boldsymbol{n}} - \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \boldsymbol{n}} = \rho_s$$

$$D_n = \vec{D} \bullet \vec{e}_n = \varepsilon \left(\underline{-\nabla \varphi) \bullet \vec{e}_n} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

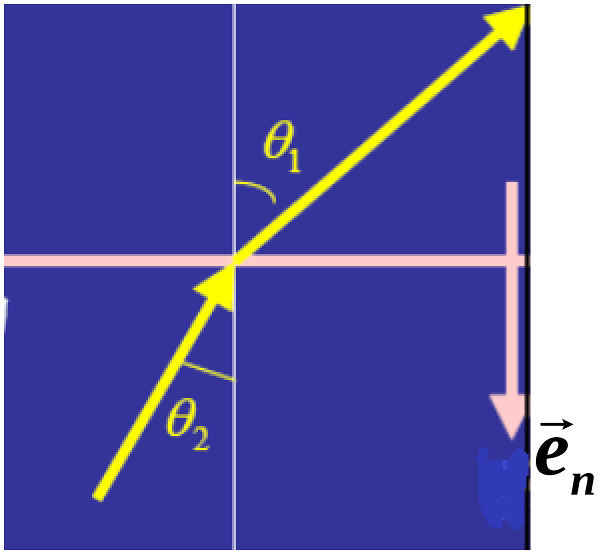
三、两种常见情况

1、两种不同电介质分界面上的边界条件

两种电介质分界面上不存在自由面电荷，即 $\rho_s = 0$

1)电位的边界条件

$$\begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \boldsymbol{n}} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \boldsymbol{n}} = \rho_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \phi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial \boldsymbol{n}} - \varepsilon_2 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \end{cases}$$



2)电场矢量的边界条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{2n} - \boldsymbol{D}_{1n} = \rho_s \\ \boldsymbol{E}_{2t} - \boldsymbol{E}_{1t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{D}_{2n} = \boldsymbol{D}_{1n} \\ \boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t} \end{cases}$$

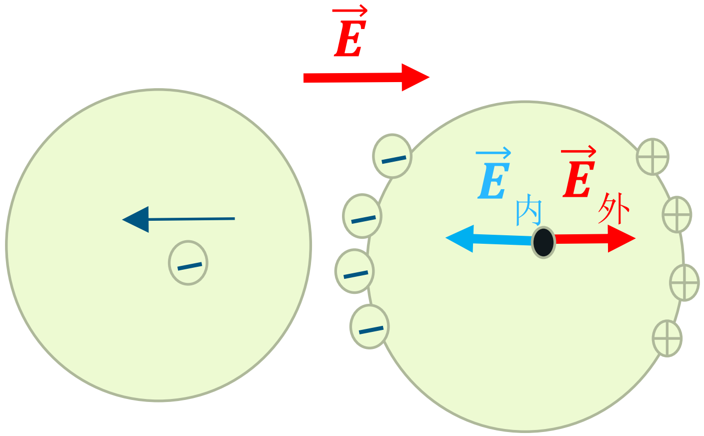
$\vec{D}$ 和 $\vec{E}$ 在两种不同电介质分界面两侧通常要改变方向.

3) 分界面上，极化电荷(束缚面电荷)的面密度为：

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\rho'_s = \vec{P}_1 \bullet \vec{e}_n - \vec{P}_2 \bullet \vec{e}_n = P_{1n} - P_{2n} = \varepsilon_0 \left(E_{2n} - E_{1n} \right)$$

2、导体与电介质分界面上的边界条件



静电场中导体处于静电平衡状态。

1) 静电场中导体的基本性质：

导体内不存在任何**净电荷**，所有电荷分布在导体表面上(其分布规律与导体表面形状及外部电场有关，导体表面曲率越大的地方，电荷的面密度越大)。

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho_v$$

导体内电场强度处处为0（是外部电场与二次电场的叠加）。

导体表面的电场强度垂直于导体表面，导体表面是等位面，整个导体是等位体。

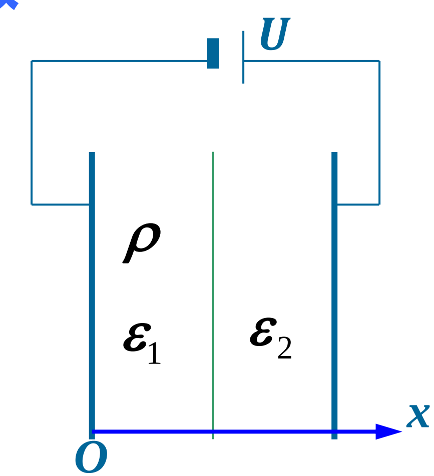
导体是媒质1，介质是媒质2

2) 电场矢量的边界条件

$$\begin{cases} E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \end{cases} \quad \because \text{导体内} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 = 0 \\ \vec{D}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{2t} = 0 \\ D_{2n} = \rho_s \end{cases}$$

例3：平板电容器的极板间距离为d，电容器内有厚度各为$d/2$的两种介质，其介电常数分别为ε1和ε2，在介电常数为ε1的介质中还有密度为ρ的自由电荷均匀分布。两极板间加电压为U。忽略边缘效应，求电容器内的电位及电场强度。

解：建立直角坐标系，若忽略边缘效应，则电位仅是x的函数



$$0 \le x \le \frac{d}{2} \quad \nabla^2\phi_1 = \frac{d^2\phi_1}{dx^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_1}$$

$$\frac{d}{2} \le x \le d \quad \nabla^2\phi_2 = \frac{d^2\phi_2}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_1}x^2 + C_1 x + C_2 \\ \phi_2 = C_3 x + C_4 \end{cases}$$

若取x=0为0电位参考点，则边界条件为：

$$\phi_1\big|_{x=0} = 0$$

$$\phi_2\big|_{x=d} = U$$

$$\phi_1\big|_{x=d/2} = \phi_2\big|_{x=d/2}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \rho_s$$

又界面上法向方向为 $\vec{e}_x$，

又分界面上的边界条件为：

$$\varepsilon_1\frac{d\phi_1}{dx}\bigg|_{x=d/2} = \varepsilon_2\frac{d\phi_2}{dx}\bigg|_{x=d/2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U + \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right) + \dfrac{\rho d}{4\varepsilon_1} \\ C_2 = 0 \\ C_3 = \dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U - \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right) \\ C_4 = \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}U + \dfrac{\rho d^2}{4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_1}x^2 + \left[\dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U + \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right) + \dfrac{\rho d}{4\varepsilon_1}\right]x & 0 \le x \le \dfrac{d}{2} \\ \phi_2 = \left[\dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U - \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right)\right]x + \dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}U + \dfrac{\rho d^2}{4(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} & \dfrac{d}{2} \le x \le d \end{cases}$$

又 $\because \vec{E} = -\nabla\phi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{e}_x\left[\dfrac{\rho}{\varepsilon_1}x - \dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U + \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right) + \dfrac{\rho d}{4\varepsilon_1}\right] & 0 < x < \dfrac{d}{2} \\ \vec{E}_1 = -\vec{e}_x\left[\dfrac{2\varepsilon_2}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\left(U - \dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_2}\right)\right] & \dfrac{d}{2} < x < d \end{cases}$$