Gauss求积公式

求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

自由变量

$2n+2$个自由度，

$2n+1$次代数精度

可以看出，待定参数$A_k, x_k\left(k=0,1,\cdots n\right)$共$2n+2$个，如果令$f\left(x\right)=1,x,x^2,\cdots,x^{2n+1}$使求积公式(5.精确成立，即$R\left[f\right]=0$，从理论上看，建立了求$A_{k,}x_k\left(k=0,1,\cdots n\right)$的$2n+2$个代数方程组

$$\sum_{k=0}^{n} A_k x_k^j = \frac{1}{j+1}(b^{j+1} - a^{j+1}) \qquad (j = 0,1,2,\dots n)$$

解得 $A_k, x_k \left(k = 0,1,\cdots n\right)$，则求积公式将有 $2n+1$ 次代数精度

例　试决定参数A_0, A_1, x_0, x_1，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

具有 3 次代数精度。

解　令$f(x)=1, x, x^2, x^3$，代入求积公式得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 & (1) \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 & (2) \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3} & (3) \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 & (4) \end{cases}$$

由式(1)及式(2)可解得

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ A_1 = \dfrac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{cases} \tag{5}$$

由式(3)及式(4)可解得

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{2x_1}{3x_0^2(x_1 - x_0)} \\ A_1 = \dfrac{-2x_0}{3x_1^2(x_1 - x_0)} \end{cases} \tag{6}$$

再由式(5)和(6)可得

$$x_0=\frac{1}{\sqrt{3}},x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}},A_0=1,A_1=1$$

于是有求积公式

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

为具有 3 次代数精度的求积公式。

例　试决定参数 $A_0, A_1, A_2, x_0, x_1, x_2$，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

具有 5 次代数精度。

解　令 $f(x)=1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$，代入求积公式得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \\ A_0 x_0^4 + A_1 x_1^4 + A_2 x_2^4 = \dfrac{2}{5} \\ A_0 x_0^5 + A_1 x_1^5 + A_2 x_2^5 = 0 \end{cases}$$

$$A_0 = A_2 = 5/9, \quad A_0 = 8/9$$

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

与下面多项式的关系

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$$

$$P_6(x)=\frac{1}{48}\left(693x^6-945x^4+315x^2-15\right)$$

……

定义 如果插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任何 $2n+1$ 次代数多项式都能精确成立，即有 $2n+1$ 次代数精度，则称积分公式为 Gauss 型求积公式，而 $x_k \left(k=0,1,\cdots,n\right)$ 称为 Gauss 点，其中 $\rho(x) \geq 0$ 为权函数。

正交多项式

定义　设 n 次多项式

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

其中，$a_n \neq 0$，如果对于区间 $[a,b]$ 上非负权函数 $\rho(x)$，多项式 $P_m(x)$ 与 $P_n(x)$ 满足

$$\langle P_m(x), P_n(x)\rangle \triangleq \int_a^b \rho(x) P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ c_n, & m = n \end{cases}$$

则称多项式系 $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ 在区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$ 正交，$P_n(x)$ 称为正交多项式。

令 $P_n^*(x)=\frac{1}{\sqrt{c_n}}P_n(x)$，则

$$(P_m^*(x),P_n^*(x))=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n\end{cases}$$

此时，称 $P_m^*(x)$ 为区间$[a,b]$上关于权函数 $\rho(x)$ 的 n 次规范化正交多项式。

令 $\widetilde{P}_n(x)=\frac{1}{a_n}P_n(x)$,则$\widetilde{P}_n(x)$ 为首项系数为 1 的 n 次正交多项式。

几个常用的正交多项式

1. Legendre 多项式

在区间$[-1,1]$上，带权$\rho(x)=1$的正交多项式系$\{P_n(x)\}(n=0,1,2,3,\cdots)$称为Legendre 多项式，它的一般形式为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

Legendre多项式的性质

性质 1　正交性

$$(P_m(x),P_n(x))=\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \dfrac{2}{2n+1} & (m=n)\end{cases}$$

性质 2　奇偶性

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$$

即 n 为奇数时，$P_n(x)$为奇函数，n 为偶数时，$P_n(x)$为偶函数。

性质 3　三项递推关系

$$\begin{cases}P_0(x)=1,\quad P_2(x)=x\\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,3,.....)\end{cases}$$

2. Cebyshëv多项式

在区间 $[-1,1]$ 上，带权 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式系

$\{T_n(x)\}(n=0,1,\ 2,\cdots)$ 称为 Cebyshëv 多项式，它的一般形式为

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

前几项具体是

$$T_0(x)=1$$

$$T_1(x)=x$$

$$T_2(x)=2x^2-1$$

$$T_3(x)=4x^3-3x$$

$$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$$

$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$$

……

性质 **1**　正交性

$$(T_m(x),T_n(x))=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi & (m=n=0)\\ \dfrac{\pi}{2} & (m=n\neq 0)\end{cases}$$

性质 **2**　三项递推关系

$$\begin{cases}T_0(x)=1,\quad T_2(x)=x\\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,3,.....)\end{cases}$$

性质 **3**　$T_n(x)$在$(-1,1)$内有 n 个互异零点

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (n=1,2,3,...)$$

性质 **4**　奇偶性

$$T_n(-x)=(-1)^n T_n(x)$$

即 n 为奇数时，$T_n(x)$为奇函数，n 为偶数时，$T_n(x)$为偶函数。

3. Hermite多项式

在区间（-∞，+∞）上带权 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式系 $\{H_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$ 称为 Hermite 多项式，它的一般形式为

$$\begin{cases} H_0(x)=1 \\ H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

前几项具体是

$$H_0(x)=1$$

$$H_1(x)=2x$$

$$H_2(x)=4x^2-2$$

$$H_3(x)=8x^3-12x$$

$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$

$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120$$

Hermite 多项式三项递推关系是

$$\begin{cases} H_0(x)=1, \quad H_2(x)=2x \\ H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,3,.....) \end{cases}$$

Hermite 多项式正交关系是

$$(H_m(x),H_n(x))=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx=\begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ 2^n n!\sqrt{n} & (m=n) \end{cases}$$

Gauss-Legendre求积公式

对区间为$[-1,1]$上带权$\rho(x)=1$ 的 n 次多项式$P_n(x)$的零点

$x_k(k=1,\cdots,n)$为节点，所建立的Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R[f]$$

称为Gauss-Legendre公式。

其中，系数

$$A_k = \frac{2(1-x_k^2)}{[(1+n)P_{n+1}(x_k)]^2}$$

余式

$$R[f] = \frac{2^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3} f^{(2n+2)}(\xi) \quad \xi \in [-1,1]$$

具体前 2 个 Gauss-Legendre 求积公式是：

(1) 两点公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$

其代数精度为 3；

(2) 三点公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{15}}{5}) + \frac{1}{15750} f^{(6)}(\xi)$$

具有 5 次代数精度。

对于任意区间$[a,b]$上的 Gauss-Legendre 求积公式，可

令 $x=\frac{(a+b)}{2}+\frac{(b-a)}{2}t$，则 $t\in[-1,1]$，于是

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt$$

$$\approx\frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{n} A_k f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)$$

例　试用 Gauss-Legendre 求积公式，计算定积分

$$I=\int_a^b \frac{1}{x}dx$$

解　令 $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t$，则

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{t+3}dt$$

（1）　n+1=3 时

$$I \approx I_3=\frac{5}{9}\left(\frac{1}{0.7745966692+3}+\frac{1}{-0.7745966692+3}\right)+\frac{8}{9}\frac{1}{0+3}$$
$$=0.693121693$$

（2）　n+1=5 时，可得 $I \approx I_5=0.69314757$。

与真值 I=ln(2)=0.69314718 相比，Gauss-Legendre 求积公式有较高精度。

与复化梯形公式，复化 Simpson 公式类似，我们也可以构造复化 Gauss-Legendre 求积公式。如果将区间$\left[a,b\right]$分成 n 等分，则 $h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+kh \quad k=\left(0,1,2,\cdots,n\right)$对每个子区间$[x_k,x_{k+1}]$用 2 点 Gauss-Legendre 求积公式有

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}-\frac{x_{k+1}-x_k}{2\sqrt{3}})+f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}+\frac{x_{k+1}-x_k}{2\sqrt{3}})$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1/2}-\frac{h}{2\sqrt{3}})+f(x_{k+1/2}+\frac{h}{2\sqrt{3}})]$$

类似做法，如果将区间 $[a,b]$ 分成 2 等分，$h=\dfrac{b-a}{2n}$，$x_k=a+kh$，$(k=0,1,2,\cdots,n)$，对每个子区间 $[x_k,x_{k+1}]$ 用 3 点 Gauss-Legendre 求积公式有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\{5[f(x_{2k+1}-\sqrt{\frac{3}{5}}h)+f(x_{2k+1}+\sqrt{\frac{3}{5}}h)]+8f(x_{2k+1})\}$$

Gauss-Chebyshëv 求积公式

在区间 $[-1,1]$ 上，以 $n+1$ 次 Chebyshëv 多项式 $T_{n+1}(x)$ 的零点

$x_k(k=0,1,\cdots,\ n)$ 为节点，权函数 $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)+R[f]$$

称为 Gauss- Chebyshëv 求积公式。

其中，$A_k=\dfrac{\pi}{n+1}\quad(k=0,1,2,\ldots,n)$

余式：$R[f]=\dfrac{\pi}{2^{2n+1}(2n+1)!}f^{(2n+2)}(\xi)\quad \xi\in[-1,1]$

于是有 Gauss- Chebyshëv 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)+R[f]$$

二点 Gauss- Chebyshëv 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}[f(-\frac{1}{\sqrt{2}})+f(\frac{1}{\sqrt{2}})]$$

三点 Gauss- Chebyshëv 求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{\pi}{3}[f(-\frac{\sqrt{3}}{2})+f(0)+f(\frac{\sqrt{3}}{2})]$$