2008—2009学年第二学期

《计算方法》课程考试试卷(A)

(闭卷)

院(系)________专业班级________学号________姓名________

考试日期：2009年7月3日　　　　考试时间：8：30—11：00

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	总分
得分												

解答内容不得超过装订线

得分	
评卷人	

一、填空题（第1、2小题各4分，其它每小题各3分，共20分）

1. 设$x = [-2 \quad 1 \quad 5]^T$ (T表示转置), 则$\|x\|_1 =$ __8__, $\|x\|_2 =$ __$\sqrt{30}$__。

2. 设$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $cond(A)_\infty$=__12__,

3. 已知欧拉常数$e = 2.71828...$, 现获得其近似值$x = 2.72$, 则x具有__3__位有效数字。

4. 迭代公式$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{x_k}$ 在根$x^* = \sqrt{2}$附近具有__2__阶收敛速度。

5. 三个节点的Gauss型求积公式具有__5__次代数精度。

6. 要使迭代格式$x_{k+1} = x_k + \alpha(x_k^2 - 3)$ 对根$x^* = \sqrt{3}$ 具有局部收敛性，则α的取值范围是__$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$__。

得分	
评卷人	

二、（8分）用牛顿迭代法求方程$x^3+x-3=0$在$x_0=1$附近的根，请写出迭代公式并计算前三次迭代结果x_1, x_2, x_3。**(保留4位小数)**

解：应用 **Newton** 迭代至该方程得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$=x_k-\frac{x_k^3+x_k-3}{3x_k^2+1}$$

由 $x_0=1$ 可得

$$x_1=\frac{5}{4}=1.25$$

$$x_2=\frac{17}{14}\approx 1.2142$$

$$x_3\approx 1.2134$$

得分	
评卷人	

三、（8分）对线性方程组

$$\begin{cases} x_1+0.8x_2=1, \\ 2x_1+5x_2-x_3=-1, \\ 3x_1-x_2-5x_3=-6, \end{cases}$$

写出其Jacobi迭代格式，并讨论其收敛性。

解：**Jacobi** 迭代格式为：

$$x_1^{(k+1)}=-0.8x_2^{(k+1)}+1$$

$$x_1^{(k+1)}=-0.4x_1^{(k+1)}+0.2x_3^{(k)}-0.2$$

$$x_3^{(k+1)}=0.6x_1^{(k)}-0.2x_2^{(k)}+1.2$$

因此，迭代矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 \\ -0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

由$\|B\|_\infty=0.8<1$可知$\rho(B)\le\|B\|_\infty<1$，从而迭代格式收敛。

得分	
评卷人	

四、（8分）对线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$$

写出其Gauss-Seidel迭代格式，并分析其收敛性。

解：

G-S 迭代格式为 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} + 0.2 \\ x_2^{(k+1)} = -1.5x_1^{(k+1)} + 1 \end{cases}$

它等价于 $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.2x_2^{(k)} + 0.2 \\ x_2^{(k+1)} = +0.3x_2^{(k+1)} + 0.7 \end{cases}$

从而知迭代矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$

因此 B 的特征值为 0，0.3 $\rho(B) = 0.3 < 1$

故 G-S 迭代收敛。

得分	
评卷人	

五、（8分）求作函数$f(x) = x^3 + x$关于节点$x_0 = 0, x_1 = 1,$ $x_2 = 2$的二次插值多项式$L(x)$, 并计算$L(0.5)$。

解：

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 0 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 10$$

因此

$$L_2(0.5) = 0.5 \times (-1.5) \times (-2) + 0.5 \times (-0.5) \times 5$$
$$= 1.5 - 1.25 = 0.25$$

得分	
评卷人	

六、（8分）已知函数表

x	0.1	0.2	0.4
$f(x)$	0.2	0.5	1.0

试构造出差商表，并求出其二次牛顿插值多项式。

解：

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
0.1	0.2		
0.2	0.5	3	
0.4	1.0	2.5	-5/3

因此牛顿插值多项式为

$$N(x)=0.2+3(x-0.1)+\frac{-5}{3}(x-0.1)(x-0.2)$$

得分	
评卷人	

七、（8分）构造如下形式的求积公式

$$\int_0^5 f(x)dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(5)$$

使其代数精度尽量高，并指出其代数精度。

解：由 A_0, A_1, x_0 为自由参数，故可假定至少具有 2 次代数精度。

取 $f(x)=1, x, x^2$ 得

$$\begin{cases} A_0+A_1=\int_0^5 dx=5 \\ A_0x_0+5A_1=\int_0^5 x\,dx=12.5 \\ A_0x_0^2+25A_1=\int_0^5 x^2dx=\frac{125}{3} \end{cases}$$

解之得 $A_0=\frac{15}{4}, x_0=\frac{5}{3}, A_1=\frac{5}{4}$ 故求积公式为

$$\int_0^5 f(x)dx \approx \frac{15}{4}f\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{4}f(5)$$

由于当 $f(x)=x^3$ 时，求积公式不是精确成立，故其只有 2 次代数精度。

得分	
评卷人	

八、（8分）取步长$h = 0.25$, 用复合梯形公式计算

$$\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx.$$

解：由 h=0.25，得

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{2x-1}dx &\approx \frac{h}{2}[f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+f(2)]\\ &= \frac{1}{8}[1+\frac{2}{1.5}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2.5}+\frac{1}{3}]\\ &= \frac{67}{120}\end{aligned}$$

得分	
评卷人	

九、（8分）用显式欧拉（Euler）方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'(t) = -3y(t)+t, & t \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

取步长$h = 0.1$计算出$y(0.4)$的近似值y_4.

解：应用 Euler 方法至该方程得

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(-3y_n + t_n)\\ &= (1-3h)y_n + ht_n\end{aligned}$$

由 h=0.1，$t_n = nh$ 得

$$y_{n+1} = 0.7y_n + n\times 10^{-2}$$

由 $y_0 = 1$, 得

$$y_1 = 0.7$$

$$y_2 = 0.7^2 + 0.01 = 0.5$$

$$y_3 = 0.35 + 0.02 = 0.37$$

$$y_4 = 0.259 + 0.03 = 0.289$$

得分	
评卷人	

十、（8分） 设下面线性多步法的阶为2：

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \beta_2 h f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \beta_0 h f(t_n, y_n)$$

确定其中的系数β_2, β_0.

解：由方法为 2 阶知 $c_0 = c_1 = c_2 = 0$

考虑到$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0$，得

$$c_0 = -1 + 1 = 0$$

$$c_1 = [\alpha_1 + 2\alpha_2] - [\beta_0 + \beta_1 + \beta_2] = 1 - (\beta_0 + \beta_2) = 0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}[\alpha_1 + 4\alpha_2] - [\beta_0 + 2\beta_2] = \frac{3}{2} - 2\beta_2 = 0$$

因此

$$\beta_2 = \frac{3}{4}, \beta_0 = \frac{1}{4}$$

所求方程为

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{3}{4} h f_{n+2} + \frac{1}{4} h f_n$$

得分	
评卷人	

十一、（8分） 用高斯消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

解:

消元:

$$[A\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

回代:

$$15x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$-x_2 - 5x_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$