§ 1.2　预备知识—向量范数

R^n 空间的向量范数 $\|\cdot\|$ 对任意 $x, y \in R^n$，满足下列条件：

(1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$　(正定性)

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ 对任意 $\alpha \in C$　(齐次性)

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$　(三角不等式)

在向量空间$R^n(C^n)$中,设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

常用的向量 x 的范数有

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2} \qquad \text{--------(1)}$$

x的2－范数或欧氏范数

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \qquad \text{--------(2)}$$

x的1－范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \qquad \text{--------(3)}$$

x的∞－范数或最大范数

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} \qquad \text{--------(4)}$$

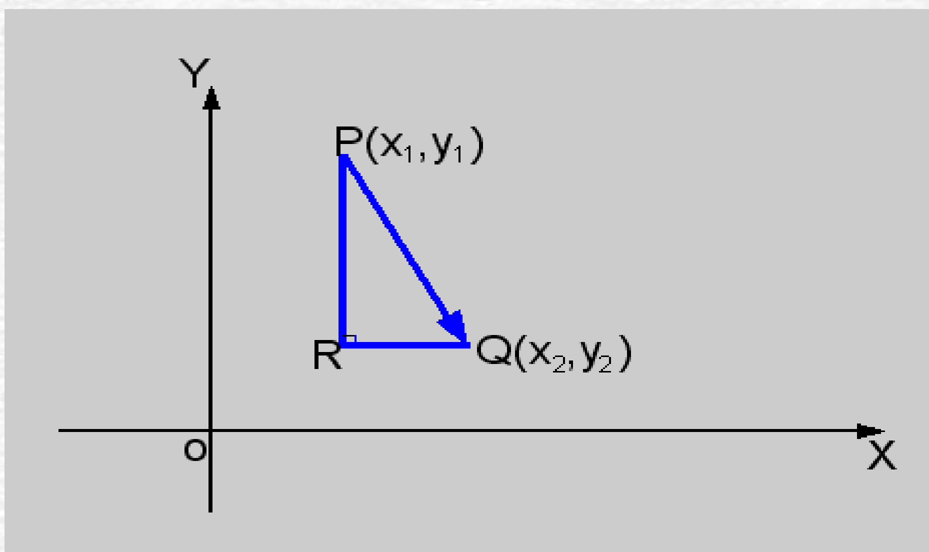
x的p－范数, $p \ge 1$

下述范数的几何意义是：

$$\|x\|_{\infty} = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

$$\|x\|_1 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$



例 3 求下列向量的各种常用范数

$$x=(1,4,3,-1)^T$$

例 3 求下列向量的各种常用范数

$$x=(1,4,3,-1)^T$$

解：

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_4| \quad =9$$

$$\|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_4|^2)^{1/2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le 4}|x_i| \quad =4$$

显然,本例中 $c_1\|x\|_\infty\le\|x\|_1\le c_2\|x\|_\infty$,即

1*4≤9≤9/4*4=9

范数等价的定义：

设$\|\cdot\|_A$ 和$\|\cdot\|_B$ 是 R 上任意两种范数，若存在

常数 C_1、$C_2 > 0$ 使得

$$C_1 \|x\|_B \le \|x\|_A \le C_2 \|x\|_B$$

则称 $\|x\|_B$ 和 $\|x\|_A$ 等价。

定理 1 R^n 上一切范数都等价。

显然 $\|x\|_1$和$\|x\|_2$ 是 $\|x\|_p$在$p=1$和$p=2$时的特例

并且由于

$$\max_{1\le i\le n}|x_i| \le \left(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p\right)^{1/p} \le \left(n\max_{1\le i\le n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$= n^{1/p}\max_{1\le i\le n}|x_i| \to \max_{1\le i\le n}|x_i| \quad (p\to\infty)$$

$\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ $(p\to\infty$时$)$, **所以** $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ 也是$\|x\|_p$的特例

且 $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$

注意： 一般有向量的等价关系

$$\boldsymbol{c}_1\|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_q \le \boldsymbol{c}_2\|\boldsymbol{x}\|_p \quad (\mathrm{p}\ne \mathrm{q},\mathrm{p},\mathrm{q}=1,2,\infty;\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2\in \boldsymbol{R}^+)$$

定理 2

对 R^n 任意一种向量范数 $\|\cdot\|$ 而言，向量序列 $\{x^k\}$ 收敛于向量 x^* 的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\|x^k - x^*\| = 0$$

§ 1.2 预备知识—矩阵范数（续）

定义 设‖•‖是以 n 阶方阵为变量的实值函数，且满足条件：

(1) 非负性： $\|A\|\geq 0$，且 $\|A\|=0$ 当且仅当 $A=0$

(2) 齐次性： $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|,\ \alpha\in R$

(3) 三角不等式：$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$

(4) 相容性： $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

则称‖A‖为矩阵 A 的范数.

定义：设‖•‖是一种向量范数

$$\|A\| = \sup_{x\in R^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in R^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

称之为由向量范数派生的矩阵算子范数.

常用的矩阵范数

$$(1)\quad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{--------(5)}$$

A的每列绝对值之和的最大值，称A的列范数

$$(2)\quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{--------(6)}$$

A的每行绝对值之和的最大值，称A的行范数

$$(3)\quad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \qquad \text{--------(7)}$$

称A的2－范数

其中$\lambda_{max}(A^T A)$为$A^T A$的特征值的绝对值的最 大值

$$(4)\quad \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} \qquad \text{--------(8)}$$

— 向量$\|\cdot\|_2$的推广 Frobenius

例 5　求矩阵 A 的各种常用范数

$$
\begin{array}{cc}
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 2 \end{array} \\
\begin{array}{ccc} \quad\quad 2 & 5 & 2 \end{array} &
\end{array}
$$

解：

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le j\le n}\{2,5,2\} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le i\le n}\{3,4,2\} = 4$$

由于 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

例 5 求矩阵 A 的各种常用范数

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

解（续） 由于 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

因此先求 A^TA 的特征值

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&9&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\det(\lambda I-A^TA)=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-9&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

例 5 求矩阵 A 的各种常用范数

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

解（续） 由于 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$

因此先求A^TA的特征值

特征方程为 $\det(\lambda I-A^TA)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-9 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$

可得A^TA的特征值为

$$\lambda_1=9.1428,\lambda_2=2.9211,\lambda_3=0.9361$$

$$\lambda_{\max}(A^TA)=9.1428 \qquad \|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=3.0237$$

$$\|A\|_1 = 5 \qquad \|A\|_\infty = 4 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 3.0237$$

$$\|A\|_F = \sqrt{2+9+2} = 3.6056$$

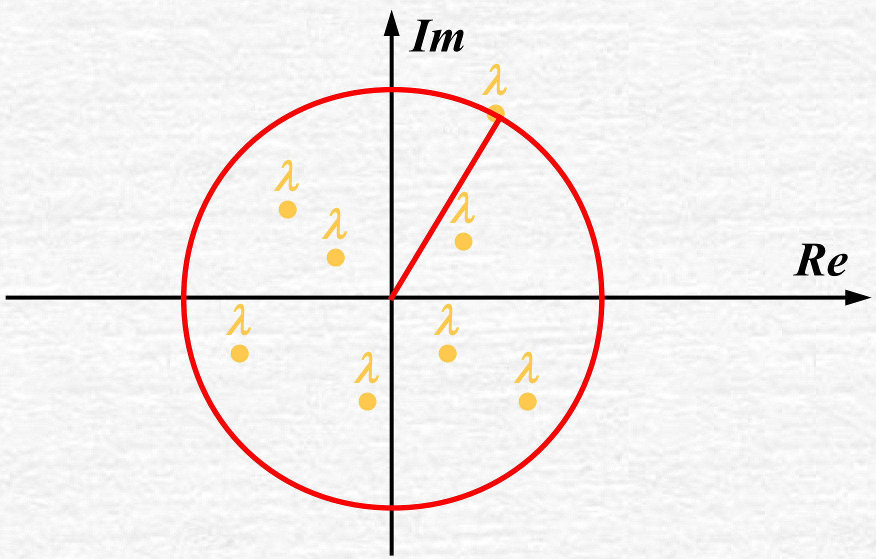
$\|A\|_1$ $\|A\|_\infty$	$\|A\|_2$	$\|A\|_F$
容易计算	计算较复杂	较少使用
使用最广泛	**对矩阵元素的变化比较敏感**	
	性质较好	
	使用最广泛	

定义 2.4 设$A\in R^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,称

$$\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\} \qquad \text{--------(9)}$$

为矩阵A的谱半径

显然 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=\sqrt{\rho(A^TA)}$



定理 3 设 A 为 n 阶方阵，则对任意算子范数 $\|\cdot\|$ 有

$$\rho(A)\le\|A\|$$

证明： 由算子范数的相容性，得到 $\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\|$

将任意一个特征根 λ 所对应的特征向量 u 代入

$$|\lambda|\cdot\|u\|=\|\lambda u\|=\|Au\|\le\|A\|\cdot\|u\|$$

即 $|\lambda|\le\|A\|$. 故 $\rho(A)\le\|A\|$.

即矩阵A的谱半径不超过矩阵的任何一种算子范数

定理 4

若 A 对称，则有 $\|A\|_2=\rho(A)$

证明：

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}=\sqrt{\lambda_{\max}(A^2)}$$

若λ 是 A 的一个特征根，则λ^2 必是 A^2 的特征根。

$\Rightarrow$ $\lambda_{\max}(A^2)=\lambda^2(A)$ 对某个 A 的特征根λ 成立

又对称矩阵的特征根为实数，即 $\lambda^2(A)$ 为非负实数，

故得证。 ∎

定理． 设$\|\cdot\|$是$R^{n\times n}$上的一种算子范数, $A\in R^{n\times n}$,

若A满足$\|A\|<1$,则$I+A$非奇异,且

$$\|(I+A)^{-1}\|<\frac{1}{1-\|A\|}$$

证明：

略

返回