第六章　常微分方程初值问题的数值解法

1. 微分方程

包含自变量、函数以及函数导数的方程称为微分方程，如关于函数$u(x,y,t)$的微分方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+f(x,y,t;u)$$

在微分方程中，如果自变量的个数只有一个，就称为常微分方程，如：

$$\frac{du}{dt}=f(t;u)$$

如果自变量个数两个及以上，就称为偏微分方程，如$a\neq 0,b\neq 0,D\neq 0$时

一阶常微分方程组初值问题：

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_m' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1(t;u_1,u_2,\cdots,u_m) \\ f_2(t;u_1,u_2,\cdots,u_m) \\ \vdots \\ f_m(t;u_1,u_2,\cdots,u_m) \end{bmatrix},$$

$$u_1(0)=u_{1,0},\quad \cdots,u_m(0)=u_{m,0}$$

简记为

$$\vec{u}'=f(t;\vec{u})$$
$$\vec{u}(0)=\vec{u}_0$$

高阶常微分方程

$$a_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + a_1 u' = f(t; u, u', \cdots u^{(m)})$$

可以化为一阶常微分方程组：

令： $u_1 = u' \triangleq u_0',\ u_2 = u'' = u_1',\ \cdots,\quad u_m = u^{(m)} = u_{m-1}'$

$$\begin{bmatrix} u_0' \\ u_1' \\ \vdots \\ u_{m-1}' \\ \sum_{i=0}^{m} a_i u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ f(t; u_0, u_1, \ldots, u_m) \end{bmatrix}$$

本章只考虑最简单的形式：一阶常微分方程初值问题

$$\frac{du}{dt} = f(t; u)$$

$$u(0) = u_0$$

如果$f(t;u)$在$t \in [a,b]$满足李普希兹（Lipschitz）条件，那么初值问题在区间[a,b]上具有唯一连续可微解

$$|f(t;u_1)-f(t;u_2)| \le L|u_1-u_2|$$

微分方程的数值解法，就是寻找微分方程在离散节点：$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$上的近似值$y_0, y_1, \dots, y_n$。$h_n = t_{n+1} - t_n$称为步长。特别步长是定值时，那么$t_n = t_0 + nh$

常微分方程的数值解法的基本出发点就是将连续的问题离散化，并且采用“步进式”的解法，即求解过程顺着节点排序的次序一步一步向前推进:

$$u_{n+1} = \varphi(u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$$

常用的设计方法：数值微分、数值积分、泰勒展开等。

基于数值微分的方法

$$\frac{du}{dt} = f(t;u)$$

数值微分近似

向前差商：

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_n} \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) \to \boxed{u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)}$$

显式Euler格式

向后差商：

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t_{n+1}} \approx \frac{u_{n+1}-u_n}{h}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = f(t_{n+1}, u_{n+1}) \rightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})}$$

隐式Euler格式

每一步需要非线性方程求根

如何简化求根？

（1）
$$u^{*} = u_n + hf(t_n, u_n)$$
$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u^{*})$$

（2）
$$u^{*} = u_n + hf(t_n, u_n)$$
$$u^{**} = u_n + hf(t_{n+1}, u^{*})$$

取平均：
$$\boxed{u_{n+1} = \frac{u^{*} + u^{**}}{2} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u^{*}) \right]}$$

改进Euler法，又称“预估-校正”法

基于数值积分的方法

$$\frac{du}{dt} = f(t;u)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{du}{dt}\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u)dt \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n = \underline{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,u)dt}$$

数值积分近似

左矩形积分： $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$ 显式Euler格式

右矩形积分： $u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$ 隐式Euler格式

梯形积分： $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$

预估-校正格式 $u^* = u_n + hf(t_n, u_n)$

中点矩形积分：$u_{n+1} = u_n + hf(t_n + h / 2,\ u(t_n + h / 2))$

怎么预测？

$$u^* = u_n + \frac{h}{2} f(t_n,\ u_n)$$