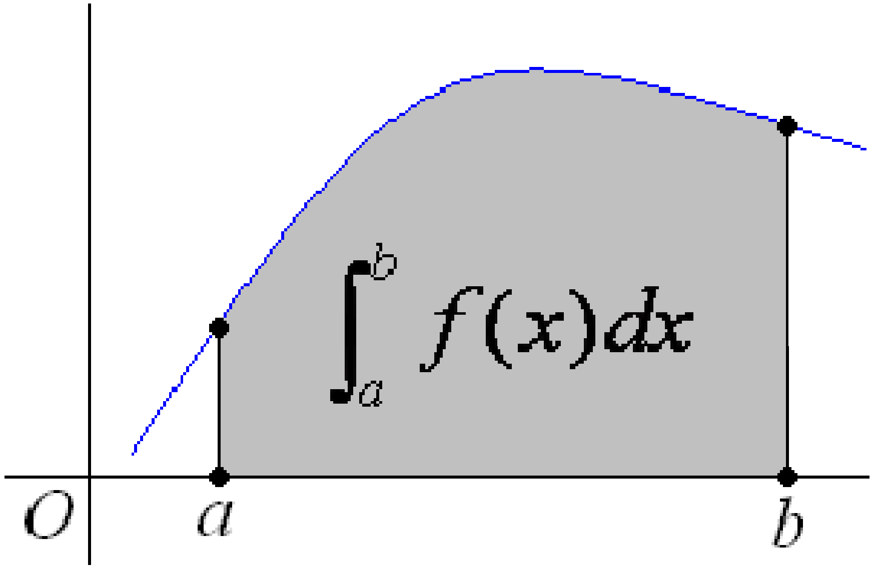
第5章　数值积分

求函数$f(x)$在区间［a，b］上的定积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx$$



定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k$$

Newton-Leibniz公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

近似计算公式

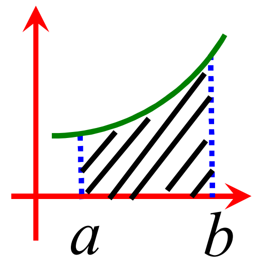
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k$$

数值积分的必要性：

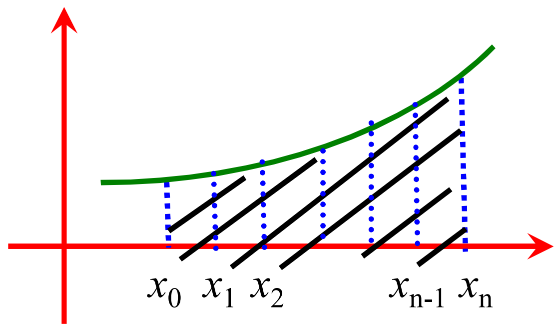
- $f(x)$的原函数不能用初等函数表示
- $f(x)$及其原函数的表达式很复杂
- $f(x)$是以表格形式给出

两类数值积分

单个公式 $I \approx ?$



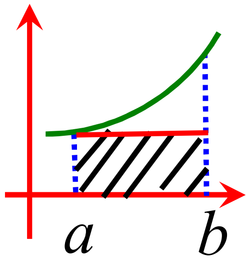
复化公式$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_i \approx ?$



单个公式

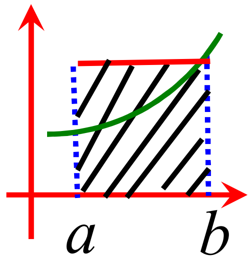
1. 矩形公式

x	a
f	$f(a)$



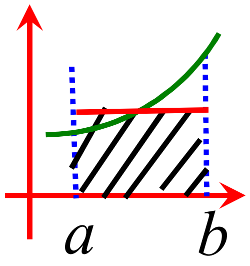
$$I \approx (b-a)f(a)$$

x	b
f	$f(b)$



$$I \approx (b-a)f(b)$$

x	$(b+a)/2$
f	$f((b+a)/2)$

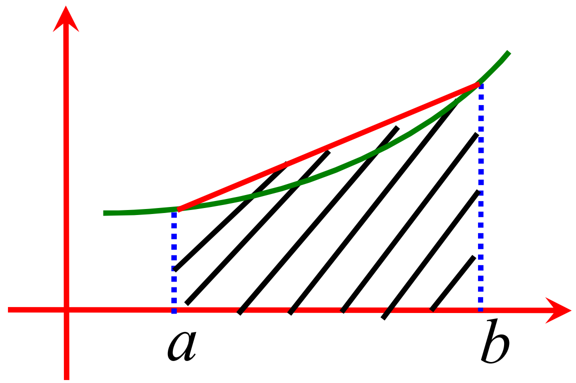


$$I \approx (b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

单个公式

2. 梯形公式

x	a	b
f	$f(a)$	$f(b)$

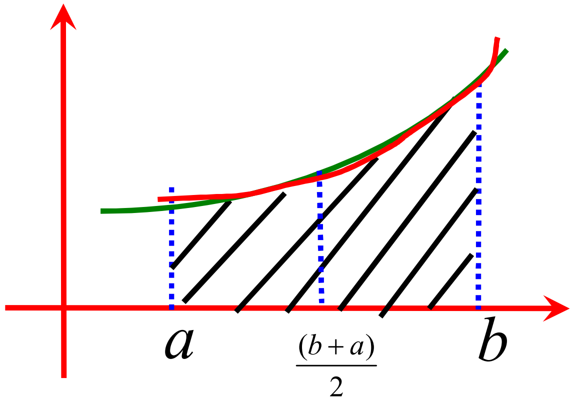


$$I \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

单个公式

3. Simpson公式

x	a	$(b+a)/2$	b
f	$f(a)$	$f((b+a)/2)$	$f(b)$



$$I \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

机械求积公式

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f	f_0	f_1	$\cdots$	f_n

$$I_n \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f_k$$

对节点x_k处的值进行加权平均

x_k -- 积分节点; A_k -- 求积系数

A_k 仅与节点值及区间［a, b］有关，而与被积函数 $f(x)$无关

$$R_n(f) = I(f) - I_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

代数精度

- 如果求积公式对于任何次数不高于m的多项式都精确成立，而对某个$m+1$次多项式不能精确成立，则称求积公式具有m次代数精度。

当 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\dots\ x^m$ 时

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$ 精确成立

$$\int_a^b x^{m+1}dx\neq\sum_{k=0}^{n}A_k x_k^{m+1}$$

几个常用的求积公式的代数精度

1.梯形公式的代数精度

当$f(x)=x$时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$T[f]=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(a+b)=\int_a^b f(x)dx$$

当$f(x)=x^2$时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$T[f]=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)\neq\int_a^b f(x)dx$$

2. Simpson–公式的代数精度

当$f(x) = x$时

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$S[f] = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{b+a}{2}) + f(b))$$

$$= \frac{b-a}{6}(a + 4\frac{a+b}{2} + b) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

所以$\int_a^b f(x)dx = S[f]$成立

当$f(x)=x^2$时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^2+4(\frac{a+b}{2})^2+b^2)$$

$$=\frac{b-a}{6}(2a^2+4ab+2b^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

即$\int_a^b f(x)dx=S[f]$精确成立

当$f(x)=x^3$时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

$$S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^3+4(\frac{a+b}{2})^3+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}(a^3+\frac{1}{2}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+b^3)$$

$$=\frac{b-a}{6}\frac{3}{2}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$$

即$\int_a^b f(x)dx=S[f]$精确成立

构造n阶代数精度的待定系数法

$$f(x)=1: \quad \int_a^b dx=(b-a)=A_0+A_1+\ldots+A_n$$

$$x: \quad \int_a^b x dx=\frac{b^2-a^2}{2}=A_0x_0+A_1x_1+\ldots+A_nx_n$$

$$x^2: \quad \int_a^b x^2 dx=\frac{b^3-a^3}{3}=A_0x_0^2+A_1x_1^2+\ldots+A_nx_n^2$$

$\cdots$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \ldots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/(n+1\_ \end{bmatrix}$$

- 多项式插值

插值函数类是多种多样的，一般根据问题的特征与研究的要求来选择。最常用到的是代多项式函数插值，多项式函数形式简单，便于计算。

插值函数是 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n \longrightarrow$ 待定系数

由插值条件得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

系数矩阵 (Vandermonde--范德蒙德 行列式)

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} \left(x_j - x_i \right)$$

插值方法

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad (a<\xi<b)$$

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)}\cdot\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)}dx$$

$$R_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \qquad (a<\xi<b)$$

Newton Cotes积分公式(等距节点)

$[a,b]$区间等分n等分，取$h=\dfrac{b-a}{n}, x_j = a+kh$

$(j=0,1,2\ldots,n)$

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)dx$$

$$= (b-a)\sum_{j=0}^{n} C_j^{(n)} f_j + R[f]$$

Cotes系数

$$C_j^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_j(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}dx$$

$$x = a + th$$

$$C_j^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}dx = \frac{1}{nh}\int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{t-i}{j-i}hdt$$

$$= \frac{1}{n}\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{j-i}\int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (t-i)dt$$

$$= \frac{(-1)^{n-j}}{nj!(n-j)!}\int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} (t-i)dt$$

当$n=1$时，仅有两个节点：

$$C_0^{(1)}=\frac{(-1)^{1-0}}{1\times 0!\times(1-0)!}\int_0^1(t-1)dt=\frac{-1}{1}\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)}=\frac{(-1)^{1-1}}{1\times 1!\times(1-1)!}\int_0^1(t-0)dt=\frac{1}{1}\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

当 $n=2$时

$$C_0^{(2)} = \frac{(-1)^{2-0}}{2\times 0!\times(2-0)!}\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 [(t-2)^2+(t-2)]\,dt$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{3}(t-2)^3+\frac{1}{2}(t-2)^2]\Big|_0^2 = \frac{1}{6}$$

同理可得 $C_1^{(2)} = \frac{4}{6}$， $C_2^{(2)} = \frac{1}{6}$

- 以此类推得Cotes系数表:

n	$C_k^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}\{1,1\}$
2	$\frac{1}{6}\{1,4,1\}$
3	$\frac{1}{8}\{1,3,3,1\}$
4	$\frac{1}{90}\{7,32,12,32,7\}$
5	$\frac{1}{288}\{19,75,50,50,75,19\}$
6	$\frac{1}{840}\{41,216,27,272,27,216,41\}$
7	$\frac{1}{17280}\{751,3577,1323,2989,2989,1323,3577,751\}$
8	$\frac{1}{28350}\{989,5888,-928,10496,-4540,10496,-928,5888,989\}$

常用的几个积分公式

- 梯形公式(n=1)

因为$C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2}$,则$\int_a^b f(x)dx = T[f] + R_T[f]$。

且 $$T[f] = (b-a)[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)]$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

$$R_T[f] = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

- Simpson公式(n=2)

因为$C_0^{(2)}=\frac{1}{6}, C_1^{(2)}=\frac{4}{6}, C_2^{(2)}=\frac{1}{6}$

所以$\int_a^b f(x)dx = S[f]+R_S[f]$

且 $S[f]=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

$$R_S[f]=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)\quad \xi\in(a,b)$$

- Newton公式(n=3)

因为$C_0^{(3)} = \frac{1}{8}, C_1^{(3)} = \frac{3}{8}, C_2^{(3)} = \frac{3}{8}$，$C_3^{(3)} = \frac{1}{8}$

所以$\int_a^b f(x)dx = N[f] + R_N[f]$

且$N[f] = \frac{b-a}{8}(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b))$

其中$h = \frac{b-a}{3}$。

- Cotes公式(n=4)

因为$C_0^{(4)} = \frac{7}{90}, C_1^{(4)} = \frac{32}{90}, C_2^{(4)} = \frac{12}{90}$，$C_3^{(4)} = \frac{32}{90}, C_4^{(4)} = \frac{7}{90}$

所以$\int_a^b f(x)dx = C[f] + R_C[f]$

且 $C[f] = \frac{b-a}{90}(7f(a) + 32f(a+h) + 12f(a+2h)$

$$+32f(a+2h) + 7f(b))$$

其中$h = \frac{b-a}{4}$。

例

计算$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ 。

解：由$Newton$-$Leibniz$公式得

$$I=\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln 2=0.69314718$$

由梯形公式 $I=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{1})=0.\underline{7}5;$

由$Simpson$公式$I=\frac{1}{6}(\frac{1}{1}+4\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2})=0.\underline{69}44;$

由$Newton$公式$I=\frac{1}{8}(1+3\frac{1}{\frac{4}{3}}+3\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{2})=0.\underline{693}75$

由$Cotes$公式得$I=0.\underline{6931}75$

Newton-Cotes公式截断误差及代数精度

$Newton-Cotes$公式的截断误差为

$$R_n[f]=\begin{cases}\dfrac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n (t-\frac{n}{2})(t-1)(t-2)\ldots(t-n)dt & (n\text{为偶数}) \\ \dfrac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^n (t-1)(t-2)\ldots(t-n)dt & (n\text{为奇即数})\end{cases}$$

其中，$h=\dfrac{b-a}{n},\eta\in[a,b]$

令$n=4$得$Cotes$求积公式的截断误差

$$R_C[f]=-\frac{(b-a)^7}{483840}f^{(6)}(\eta)\quad \eta\in[a,b]$$

定理：当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式具有 $n+1$ 次代数精度。

证明　只需证明当 $f\left(x\right)=x^{n+1}$ 时，余式 $R\left[f\right]=0$ 。

注意到此时 $f^{n+1}\left(\xi\right)=\left(n+1\right)!$ 则

$$R[f]=\int_a^b \omega(x)dx=h^{n+2}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-n)dt$$

因为n为偶数，所以令$n=2m,u=t-m$

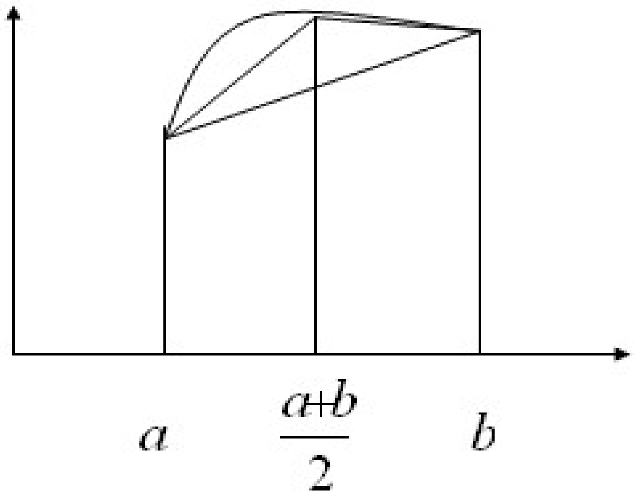
则　$R[f]=h^{2m+2}\int_{-m}^m u(u^2-1)\ldots(u^2-m^2)du=0$

复化求积公式

- 将区间[a,b]适当分割成若干个字区间，对每个子区间使用求积公式，构成所谓的复化求积公式，这是提高积分精度的一个常用的方法。

定步长复化求积公式

1.复化梯形求积公式



$$T(h)=\frac{a-b}{2}(f(a)+f(b))$$

$$T(\frac{h}{2})=\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(a)+f(\frac{a+b}{2}))$$

$$=\frac{\frac{a-b}{2}}{2}(f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

$$=\frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

- 一般地将[a,b]区间n等分，则

$$h = \frac{a-b}{n}, x_j = a + jh \quad (j = 0,1,2,\ldots n)$$

对每个子区间$[x_{j-1}, x_j] \quad (j = 1,2,\ldots n)$

使用T公式有

$$S_j = \frac{h}{2}(f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

- 所以 $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} S_j + R_T[f,h]$$

而 $$\sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(f(x_{j-1}) + f(x_j)\right)$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

$$+ f(x_{n-1}) + f(b) + f(b) - f(b))$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) - f(b) + 2\sum_{j=1}^{n} f(a + jh)\right) = T_n(h)$$

$$R_T[f,h] = -\frac{h^3}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j) \qquad \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

若$f(x)$是$[a,b]$区间上的二阶连续函数

则必存在一点$\xi \in$（a,b）使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\xi_j)$$

故$R_T[f,h] = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$

2.复化Simpson公式

在每个子区间$[x_{j-1}, x_j]$ $j = 1,2,\dots n$上有

$$S_j = \frac{h}{6}(f(x_{j-1}) + 4f(x_{j-\frac{1}{2}}) + f(x_j))$$

则$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} S_j + R_S[f, h]$

$$而\ \sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{n}(f(x_{j-1}) + 4f(x_{j-\frac{1}{2}}) + f(x_j))$$

$$= \frac{h}{6}(f_0 + 4f_{\frac{1}{2}} + f_1$$

$$+ f_1 + 4f_{\frac{3}{2}} + f_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots .$$

$$+ f_{n-1} + 4f_{n-\frac{1}{2}} + f_n + f_n - f_n$$

$$= \frac{h}{6}(f(a) - f(b) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j))$$

$$= \frac{h}{3}(\frac{f(a) - f(b)}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=1}^{n} f(x_j))$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a) - f(b)}{2} + 2\sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h) + \sum_{j=1}^{n} f(a + jh)\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(\frac{f(a) - f(b)}{2} + \left(\sum_{j=1}^{n} f(a + jh) + 2f(a + (j - \frac{1}{2})h)\right)\right)$$

$$= S_n(h)$$

$$R_S[f, h] = -\frac{h^5}{2880}\sum_{j=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i) \qquad \xi_i \in (x_{j-1}, x_j)$$

$$= -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in (a, b)$$

例题

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$$

如果用复化梯形公式和用复化Simpson公式计算,要使得截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$

试问划分数n至少取多少？

解：由截断误差有

$$R_T[f,h] = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) = -\frac{\frac{\pi}{2}-0}{12}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\right)^2 (\sin''\xi)$$

即 $\left|R_T[f,h]\right| = \left|\frac{\pi}{24}\frac{\pi}{2n}\sin\xi\right| \le \left|\frac{\pi^2}{48n}\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解得 $\quad n > 254$

由

$$R_S[f,h] = -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2880}(h)^4(\sin^{(4)}\xi)$$

即$|R_S[f,h]| = \left|\frac{\pi}{2880\times 2} h^4 \sin\xi\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解得　$h < 0.31$, 故$n > \dfrac{\frac{\pi}{2}}{0.31} \approx 5.1$, 取$n = 6$。

变步长求积公式

定步长复化求积公式的一个明显缺点是：事先很难估计分划数 n 使结果达到预期精度。由于适当加密分点，精度会有所改善，为此采用自动加密分点的方法，并利用事后估计来控制加密次数，以判断是否达到预期精度，从而停止计算。

首先我们讨论变步长梯形求积公式。

变步长梯形求积公式

设区间$[a,b]$划分为 n 等分，即步长$h=\dfrac{b-a}{n}$，

计算$T_n(h)$：然后将区间$[a,b]$分点加密一倍，即步长

缩小一半为$\dfrac{h}{2}$，再计算出$T_{2n}(\dfrac{h}{2})$。如果

$$\left|T_{2n}(\frac{h}{2})-T_n(h)\right|\le\varepsilon$$

则取 S=$T_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$作为定积分的近似值。已知$T_n(h)$，如何计算$T_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$且计算量小？

$$x_{j-1} \qquad\qquad x_{j-\frac{1}{2}} \qquad\qquad x_j$$

因为 $$S_j = \frac{\frac{h}{2}}{2}\left(f_{j-1} + 2f_{j-\frac{1}{2}} + f_j\right)$$

所以 $$T_{2n} = \sum_{j=1}^{n} S_j = \frac{h}{4}\{\sum_{j=1}^{n}(f_{j-1} + f_j) + 2\sum_{j=1}^{n} f_{j-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}(f_{j-1} + f_j) + h\sum_{j=1}^{n} f_{j-\frac{1}{2}}\}$$

$$= \frac{1}{2}(T_n(h) + H_n(h))$$

其中 $$H_n(h) = h\sum_{j=1}^{n} f(a + (j - \frac{1}{2})h)$$

变步长Simpson求积公式

由复化$Simpson$公式

$$S_n(h)=\frac{h}{3}\left(\frac{f(a)-f(b)}{2}+\left(\sum_{j=1}^{n}f(a+jh)+2f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right)\right.$$

$$=\frac{1}{3}\left\{h\left[\frac{f(a)-f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n}f(a+jh)\right]+2h\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(T_n(h)+2H_n(h))$$

所以$S_{2n}(\frac{h}{2})=\frac{1}{3}(T_{2n}(\frac{h}{2})+2H_{2n}(\frac{h}{2}))$

程序实现的基本思想：

$$T_n(h) \Rightarrow H_n(h) \Rightarrow S_n(h)$$

$$\Rightarrow T_{2n}(\frac{h}{2}) \Rightarrow H_{2n}(\frac{h}{2}) \Rightarrow S_{2n}(\frac{h}{2})$$

当 $\left|S_{2n}(\frac{h}{2}) - S_n(h)\right| < \varepsilon$时，取 $S_{2n}(\frac{h}{2})$为定积分的近似值，否则 将分点加密一倍，重复上述过程。

复化 *Simpson* 公式与复化梯形公式有如下关系

$$S_n(h) = \frac{4T_{2n}(\frac{h}{2}) - T_n(h)}{4-1}$$

同理也可以推出复化 *Cotes* 公式

$$C_n(h) = \frac{4^2 S_{2n}(\frac{h}{2}) - S_n(h)}{4^2-1}$$

例题

计算　$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

(1)用$Simpson$公式；

(2)用$n=5$的复化$Simpson$计算，并估计误差；

(3)用变步长$Simpson$公式计算，使其误差小于10^{-5}。

（1） $$I=\frac{1}{6}(f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1))$$

$$=\frac{1}{6}(1+4\frac{1}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2})=\frac{25}{36}\approx 0.69444$$

(2) $\because h=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{5}=0.2$

则节点 $x_i=0+ih \qquad (i=0,1,2,3,4,5)$

所以有：

$$
\begin{aligned}
I = S_5(h) &= \frac{1}{6}\frac{1}{5}\Big[\Big(\frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1}\Big) + 2\times\Big(\frac{1}{1+0.2} \\
&\quad + \frac{1}{1+0.4} + \frac{1}{1+0.6} + \frac{1}{1+0.8} + \frac{1}{1+1}\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{30}\Big(\frac{1}{2} + 2\times\Big(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{2}\Big)\Big) \\
&\approx 0.69315
\end{aligned}
$$

因为 $$\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{24}{\left|1+x\right|^5} \le 24 \qquad x \in [0,1]$$

所以 $$R_S[f,h] \le \frac{h^4}{2880} \times 24 = \frac{(0.2)^4}{120}$$

$$= 1.3333 \times 10^{-5}$$