

$$Ax=b$$

直接法

迭代法

Gauss-消去法
LU分解法

Gauss 消去法

上述消元过程除第一个方程不变以外, 第2—第 n 个方程全消去了变量 x_1 , 而系数和常数项全得到新值:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)} x_n = b_2^{(2)} \\ a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)} x_n = b_3^{(2)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n2}^{(2)} x_2 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n = b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

Gauss 消去法

第 $n-1$ 步消去过程后, 得到等价三角方程组。

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

回代过程

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(1)}x_1 + \cdots + a_{1i}^{(1)}x_i + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{ii}^{(i)}x_i + \cdots + \cdots + a_{in}^{(i)}x_n = b_i^{(i)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1n}^{(n-1)}x_n = b_{n-1}^{(n-1)} \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

$$x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right) / a_{ii}^{(i)} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

LU 分解

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & & u_{2n} \\ & & \ddots & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\
l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} & l_{21}u_{14} + u_{24} \\
l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & l_{31}u_{14} + l_{32}u_{24} + u_{34} \\
l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12} + l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + u_{44}
\end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13}, \quad u_{14} = a_{14}$$

$$l_{21} = a_{21}/u_{11}, \quad l_{31} = a_{31}/u_{11}, \quad l_{41} = a_{41}/u_{11}$$

$$u_{22} = a_{22} - u_{12}, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}, \quad u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14}$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22}, \quad l_{42} = (a_{42} - l_{41}u_{12})/u_{22}$$

1. 对称正定矩阵的Cholesky分解

- 对称正定矩阵：
(1) $A = A^T$
(2) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad (\mathbf{x} \neq 0)$

$$(2') \quad A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

A的各阶顺序主子式均大于零

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0 \quad x^T = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} x^T A x &= (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \\ &= (4x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3) + (-x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3) + (x_3x_1 - 2x_3x_2 + 3x_3^2) \\ &= 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 \\ &= 2x_1^2 + (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \\ &= \begin{cases} > 0, & x_3 \neq 0 \\ x_1^2 + (x_1^2 + x_2^2) + (x_1 - x_2)^2 > 0 & x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



由法国炮兵军官André-Louis Cholesky (1875–1918) 所提出，当初是为了解决测地计算问题。

第一次世界大战结束前的几个月，Cholesky在一次战斗中牺牲。

该方法在其死后由后任军官发表

Cholesky分解

$$A = LU_1$$

$$A^T = (LU_1)^T = U_1^T L^T$$

$$A = A^T \longrightarrow A = U_1^T L^T$$

下三角矩阵

$$U_1^T = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$U_1^T = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ u_{12} / u_{11} & 1 & & \\ u_{13} / u_{11} & u_{23} / u_{22} & 1 & \\ u_{14} / u_{11} & u_{24} / u_{22} & u_{34} / u_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & u_{33} & \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$U^T$$

$$D$$

$$U_1^T = U^T D \Rightarrow U_1 = D U$$

$$U_1 = DU$$

$$A = LU_1 = LDU$$

$$A^T = (LDU)^T = U^T D L^T \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad L = U^T$$

$$\Rightarrow A = L D L^T$$

$$D > 0 \quad \longrightarrow \quad D = (\sqrt{D})^2$$

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \sqrt{d_3} & \\ & & & \sqrt{d_4} \end{pmatrix}$$

$$A = \tilde{L} \tilde{L}^T \quad \tilde{L} = L \sqrt{D}$$

Cholesky分解的求法

设 A 对称正定, 则 $A = LL^T$

$$\text{令 } L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

如何求 l_{ij} ? 以 $n = 3$ 为例。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ & l_{22} & l_{23} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}$$

Cholesky分解的求法

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$k = 1$ 时：由 $a_{11} = l_{11}^2$ ，得 $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ ；

由 $a_{21} = l_{21}l_{11}$ ，得 $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$ ；同理得 $l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$ 。

$k = 2$ 时：由 $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$ ，得 $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$ ；

由 $a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22}$ ，得 $l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}}$ 。

$k = 3$ 时：由 $a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2$ ，得 $l_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{i=1}^2 l_{3i}^2}$

推广到 n 阶矩阵,有

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{jj} = (a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}} \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}) / l_{jj} \end{array} \right. \quad j=1, 2, \dots, n; \quad i=j+1, \dots, n$$

用Cholesky分解法解线性方程组

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases} \quad \text{其中 } A = LL^T$$

- Cholesky分解法缺点及优点
- 优点：可以减少存储单元。
- 缺点：存在开方运算

改进的cholesky分解 $A=LDL^T$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_{nn} \end{bmatrix}$$

由 $A = L(DL^T)$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} & \dots & d_1 l_{n1} \\ & d_2 & d_2 l_{32} & \dots & d_2 l_{n2} \\ & & d_3 & \dots & d_3 l_{n3} \\ & \dots & \dots & \ddots & \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ & d_2 & d_2 l_{32} \\ & & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & d_1 l_{21} & d_1 l_{31} \\ d_1 l_{21} & d_1 l_{21}^2 + d_2 & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} \\ d_1 l_{31} & d_1 l_{21} l_{31} + d_2 l_{32} & d_1 l_{31}^2 + d_2 l_{32}^2 + d_3 \end{bmatrix}$$

逐行相乘，并注意到 $i > j$ 有

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} + l_{ij} d_j \quad (j=1,2,\dots,i-1)$$

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2 d_k + d_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

由此可得

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2 d_k \quad i=1,2,\dots,n \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk}) / d_j \quad (j=1,2,\dots,i-1) \end{array} \right.$$

为减少计算量,可令 $c_{ij} = l_{ij}d_j$, 则 $l_{ij} = \frac{c_{ij}}{d_j}$

所以可将上述公式改写成

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik}l_{jk} \\ l_{ij} = \frac{c_{ij}}{d_j} \\ d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}l_{ik} \end{array} \right. \quad (i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, i-1)$$

用 *Cholesky* 分解法解线性方程组

$$A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

即等价于求
$$\begin{cases} L \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ L^T \boldsymbol{x} = D^{-1} \boldsymbol{y} \end{cases}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \frac{1}{d_2} & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

故
$$D^{-1} \boldsymbol{y} = \left(\frac{y_1}{d_1}, \frac{y_2}{d_2}, \dots, \frac{y_n}{d_n} \right)^T$$

例题

例 试用改进的*Choleskey*分解

算法解方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -0.25 & 1 & \\ 0.25 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1.75 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

由 $Ly=b$ 得

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.25 & 1 & & \\ 0.25 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得 $y_1 = 5, y_2 = -1.75, y_3 = 3$

即 $y = (5, -\frac{7}{4}, 3)^T$

而 $D^{-1} \mathbf{y} = (\frac{5}{4}, -1, 3)^T$, 由 $L^T \mathbf{x} = D^{-1} \mathbf{y}$

得
$$\begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

得 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$

所以方程的解: $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$

2. 三对角矩阵的追赶法

设三对角矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 对一切 $|i - j| > 1$ 有 $a_{ij} = 0$,
即

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

LU 分解:

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ p_2 & 1 & & & \\ & p_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & c_1 \\ q_2 & c_2 \\ & \ddots & \ddots \\ & & q_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & q_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & c_1 \\ p_2 q_1 & p_2 c_1 + q_2 & c_2 \\ & p_3 q_2 & p_3 c_2 + q_3 & c_3 \\ & & & c_{n-1} \\ & & p_n q_{n-1} & p_n c_{n-1} + q_n \end{bmatrix} \quad \begin{cases} q_1 = a_1 \\ p_i = \frac{b_i}{q_{i-1}} \\ q_i = a_i - p_i c_{i-1} \end{cases}$$

则求 $Ax=f$ 等价于求 $\begin{cases} Ly=f \\ Ux=y \end{cases}$

其中 $f=(b_1, f_2, \dots, f_n)^T$, 故有

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ p_2 & 1 & & & \\ & p_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & p_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - p_i y_{i-1} \end{cases} (i=2, \dots, n)$

再由

$$\begin{bmatrix} q_1 & c_1 & & & \\ & q_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & q_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{q_n} \\ x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{q_i} \quad (i = n-1, \dots, 1) \end{cases}$$

以上称为解三对角方程组的追赶法。

$$Ax=b$$



直接法

迭代法

简单的重复

迭代法

直接法：适用于阶数不高的线性方程组。

实际应用中，常会遇到一类阶数很高，非零元素很少的所谓高阶稀疏方程组。对这类方程组用迭代法求解，可以充分利用稀疏矩阵的特性减少计算工作量，节省存贮量。

迭代法所要解决的几个主要问题是：

(1) 构造一种迭代格式，把所给方程组

$$Ax = b \rightarrow x = Bx + d$$

迭代公式

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T \in R^n$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + d$$

(2) 迭代矩阵B满足什么条件时，迭代序列收敛于 $Ax=b$ 的精确解。

(3) 讨论如何估计误差的大小以决定迭代次数

$$e^{(k)} = x^* - x^{(k)}$$

Jacobi 迭代法

Jacobi 迭代法是最简单的一种迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$a_{ii} \neq 0 \longrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Jacobi method

From Wikipedia, the free encyclopedia

In [numerical linear algebra](#), the **Jacobi method** (or **Jacobi iterative method**^[1]) is an algorithm for determining the solutions of a [diagonally dominant system of linear equations](#). Each diagonal element is solved for, and an approximate value is plugged in. The process is then iterated until it converges. This algorithm is a stripped-down version of the [Jacobi transformation method of matrix diagonalization](#). The method is named after [Carl Gustav Jacob Jacobi](#).

Carl Gustav Jacob Jacobi

From Wikipedia, the free encyclopedia

Carl Gustav Jacob Jacobi (/dʒəˈkoʊbi/^[1] German: [ˈjaːkoːbi]; 10 December 1804 – 18 February 1851) was a German [mathematician](#), who made fundamental contributions to [elliptic functions](#), [dynamics](#), [differential equations](#), and [number theory](#). His name is occasionally written as **Carolus Gustavus Iacobus Iacobi** in his [Latin](#) books, and his first name is sometimes given as Karl.

Jacobi was the first Jewish mathematician to be appointed professor at a German university.^[2]

Jacobi（1804~1851），出生于德国 Potsdam，卒于柏林。他对数学主要的贡献是在椭圆函数及椭圆积分上，并把这些理论应用在数论上而得到很好的结果。[雅可比](#)很早就展现了他的数学天份。他从欧拉及 Lagrange 的著作中学习代数及微积分，并被吸引到数论的领域。他处理代数问题的手腕只有欧拉与印度的 Ramanujan 可以相提并论。

Jacobi 少 Abel 两岁。他不知道 Abel 从1820年起就在作五次式的问题，他也去作，但是没有完满的结果。年轻的时候，Jacobi 有许多发现都跟高斯的结果重叠，但高斯并没有发表这些结果。高斯很看重雅可比，1839年 Jacobi 还去拜访了高斯。1849年45岁时，除了高斯之外，Jacobi 已经是欧洲最有名的数学家了。

复数函数（单变量）是十九世纪的一个大领域。高斯已经证明了：要解一个代数方程，我们必需要复数，而这也是充分的。是否还有其它的「数」呢？椭圆函数理论是与复变函数论互为补充的理论。椭圆函数的一个主宰性质是他的双周期性，1825年被 Abel 发现的。

Jacobi 应用椭圆函数论到整数论的问题上，他证明了 Fermat 宣称的：每个整数 $1, 2, 3, \dots$ 都可以写成整数（包含 0）的平方和，而且他还能算出共有几种方法。当 n 为奇时，有 n 的所有因子（包括 1 及 n ）之和的 8 倍个方法；当 n 为偶时，有 n 的所有奇因子之和的 24 倍个方法。

他在数学物理上也有番建树，在量子力学中他的 Hamilton-Jacobi 方程扮演了一个革命性的角色。

Carl Gustav Jacob Jacobi



Jacobi 迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

终止条件: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$

Jacobi迭代方法的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}}_L + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}}_D + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U$$

$$A = L + D + U$$

$$Ax = b \Rightarrow (L + D + U)x = b$$

$$\Rightarrow Dx = -(L + U)x + b$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$= Bx + f$$

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

Jacobi迭代矩阵

- 例：用Jacobi迭代法求解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

解：从原方程组中分别解出 $x_i (i=1,2,3)$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}(3 + 2x_2 + x_3) \\ x_2 = \frac{1}{10}(15 + 2x_1 + x_3) \\ x_3 = \frac{1}{10}(10 + x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

- 因此得迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.3 + 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 + 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} \end{cases}$$

$K=1,2,3, \dots$ 。若取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

计算所得向量列于表中

$$x^* = (1,2,3)^T$$

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^*\ _\infty$
0	0	0	0	
1	0.3000	1.5000	2.0000	1.0000
2	0.8000	1.7600	2.6600	0.3600
3	0.9180	1.9260	2.8640	0.1360
4	0.9716	1.9700	2.9540	0.0460
5	0.9894	1.9897	2.9823	0.0177
6	0.9962	1.9961	2.9938	0.0062
7	0.9986	1.9986	2.9977	0.0023
8	0.9995	1.9995	2.9992	0.0008
9	0.9998	1.9998	2.9997	0.0003