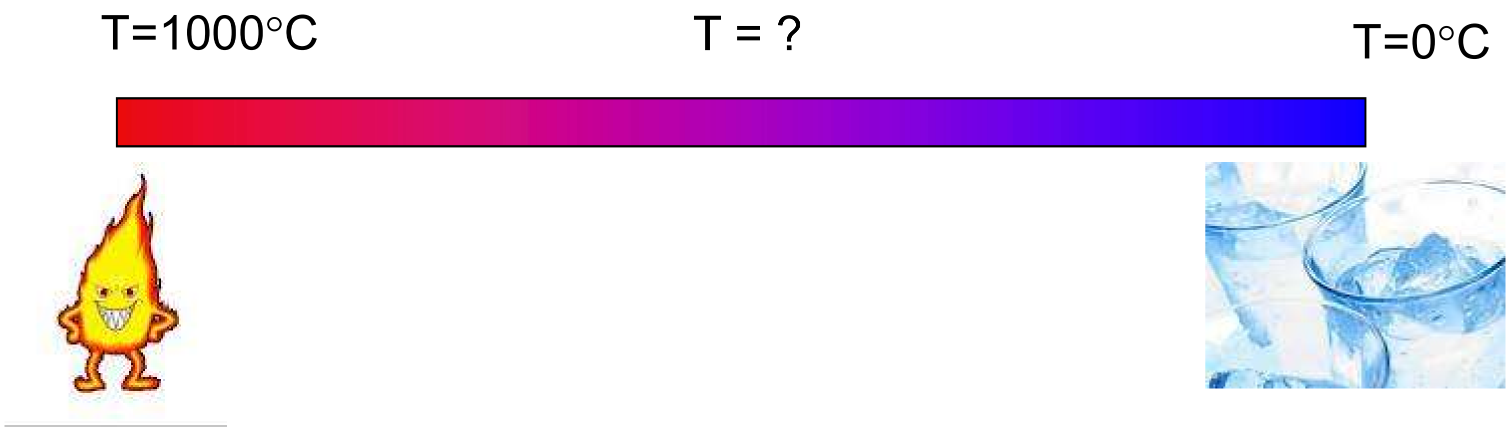
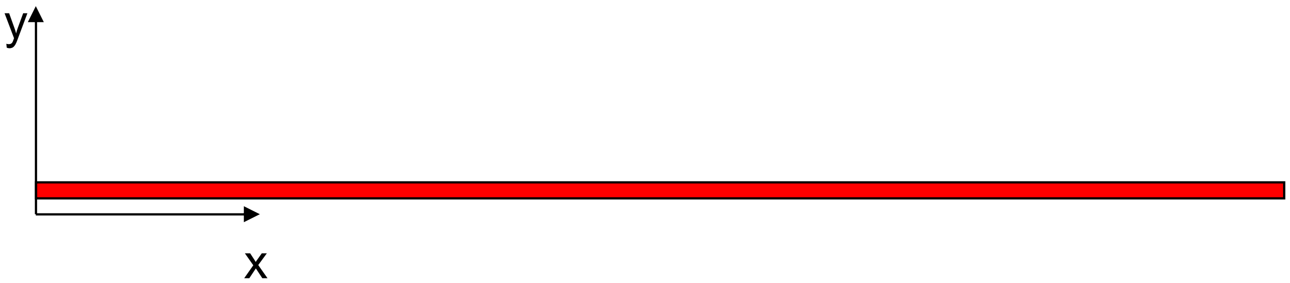
# 第三章  线性方程组的数值解法

## （1） 直接法

# 1. 线性代数方程组

- 例1



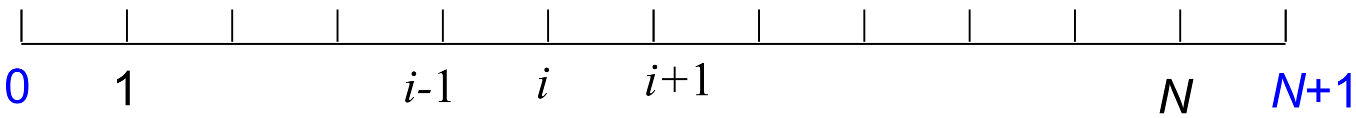



数学模型：傅里叶定律

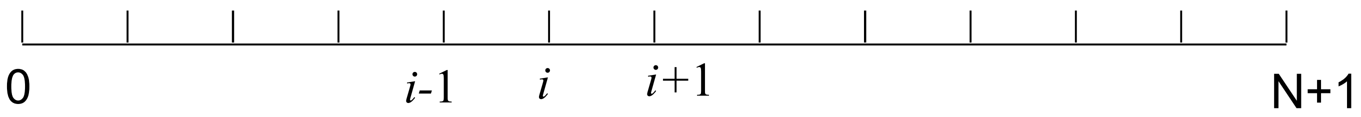
$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \qquad \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0$$

*k*为常数

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \qquad T(x=0) = 1000 \qquad T(x=1) = 0$$




$$\left.\frac{d^2 T}{dx^2}\right|_{x=i\Delta x} \Rightarrow \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad i=1, 2, \ldots, N$$




$$\left.\frac{d^2T}{dx^2}\right|_{x=i\Delta x} \Rightarrow \frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{\Delta x^2} \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0 \longrightarrow T_{i-1}-2T_i+T_{i+1}=0 \qquad \text{i=1, 2, …, N}$$

$$
\begin{aligned}
-2T_1+T_2 &= -T_0\\
T_1-2T_2+T_3 &= 0\\
T_2-2T_3+T_4 &= 0\\
&\cdots\\
T_{i-1}-2T_i+T_{i+1} &= 0\\
&\cdots\\
T_{N-2}-2T_{N-1}+T_N &= 0\\
T_{N-1}-2T_N &= -T_{N+1}
\end{aligned}
$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
-2 & 1 & & & & & & \\
1 & -2 & 1 & & & & & \\
 & 1 & -2 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & 1 & -2 & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & 1 & -2 & 1 \\
 & & & & & & 1 & -2
\end{bmatrix}}_{\text{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix}
T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_i \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N
\end{bmatrix}}_{\text{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
-T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -T_{N+1}
\end{bmatrix}}_{\text{b}}
$$

$n$ 阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

A为非奇异矩阵，这时方程有唯一解

Ax=b

直接法

迭代法

利用一系列递推公式计算有限步能直接得到方程组的精确解（不考虑舍入误差）

用一极限过程去逼近精确解的方法，按一定法则逐步求出近似解

# 2. 解线性方程组的直接方法

## 2.1 Cramer方法

如果线性方程组的系数行列式不为零，即 $\det(A) \neq 0,$ 则该方程组有唯一解。由克莱姆(Cramer)法则，其解为

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这种方法需要计算 $n+1$ 个 $n$ 阶行列式并作 $n$ 次除法，而每个 $n$ 阶行列式计算需作 $(n-1)\times n!$ 次乘法，计算量十分惊人。如 $n = 30,$ 需 $2.38\times10^{35}$ 次乘法。可见其在理论上是绝对正确，但在 $n$ 较大时，在实际计算中确实不可行的。

# 2.2 Gauss 消去法

n 阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

转化为等价的（同解）的三角形方程组。

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = g_1 \\ \qquad\quad b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = g_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad b_{nn}x_n = g_n \end{cases}$$

# Gauss 消去法计算过程

统一记号： $a_{ij} \to a_{ij}^{(1)}$ ， $b_i \to b_i^{(1)}$

原方程 $A^{(1)}X = b^{(1)}$ : $A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}], b^{(1)} = (b_1^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)})^T$

若 $a_{11}^{(1)} \neq 0$：

(第二行) − (第一行) $\times a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \to$ (新第二行)

(第三行) − (第一行) $\times a_{31}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \to$ (新第三行)

……

(第$n$行) − (第一行) $\times a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} \to$ (新第$n$行)

相当于第i个方程-第一个方程×数→新的第i方程—同解！第一方程不动！

# Gauss 消去法计算过程

上述消元过程除第一个方程不变以外,第**2 - *n*** 个方程全消去了变量 $x_1$，而系数和常数项全得到新值:

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
\qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\
\qquad \cdots\cdots \\
\qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}
\end{cases}
$$

# Gauss 消去法计算过程（续1）

得到新同解方程组： $A^{(2)}x=b^{(2)}$

其中 $$A^{(2)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},\quad b^{(2)}=\begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

这里 $a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i1}a_{1j}^{(1)}\qquad m_{i1}=a_{i1}^{(1)}\big/a_{11}^{(1)}$

# Gauss 消去法计算过程（续2）

第二步消元： 若 $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ，对除第一行第一列外的子阵作上计算：

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2} a_{2j}^{(2)} \qquad m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}$$

$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - b_2^{(2)} \cdot m_{i2} \quad i, j = 3, 4, \cdots, n$$

# Gauss 消去法计算过程（续3）

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(1)}=b_1^{(1)} \\
\qquad\qquad a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(2)}=b_2^{(2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(3)}=b_3^{(3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n3}^{(3)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(3)}=b_n^{(3)}
\end{cases}
$$

若 $a_{33}^{(3)} \neq 0$， 则此消去过程可依次进行下去。

# Gauss 消去法计算过程（续4）

第 $n-1$ 步消去过程后，得到等价三角方程组。

$$A^{(n)}x=b^{(n)}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(3)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(3)}x_n=b_3^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)} \end{cases}$$

# Gauss 消去法计算过程（续5）

系数矩阵与常数项：

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}^{(\mathrm{n})} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

计算出 $A^{(n)}$，$b^{(n)}$ 的过程称消去过程。

# 消去过程算法

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
a_{11}^{(1)} & \cdots & & & & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\
& \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
& & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\
& & 0 & a_{ij}^{(k+1)} & \cdots & & b_j^{(k+1)} \\
& & \vdots & & & & \\
& & 0 & \mathrm{k+1 \le i,j \le n} & & &
\end{array}\right)$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)}\left( a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \right)$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)}\left( a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \right) \quad k+1 \le i,j \le n$$

$$a_{ik}^{(k)} = 0 \quad \mathrm{k+1} \le \mathrm{i} \le \mathrm{n} \quad k = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}-1$$

# 回代过程算法

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1+\cdots+a_{1i}^{(1)}x_i+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)}\\
\qquad\qquad\cdots\cdots\\
\qquad a_{ii}^{(i)}x_i+\cdots+\cdots+a_{in}^{(i)}x_n=b_i^{(i)}\\
\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\\
\qquad\qquad a_{n-1n-1}^{(n-1)}x_{n-1}+a_{n-1n}^{(n-1)}x_n=b_{n-1}^{(n-1)}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n=b_n^{(n)}
\end{cases}
$$

$$x_n=b_n^{(n)}\Big/a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i=\left(b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}x_j\right)\Big/a_{ii}^{(i)}\qquad i=n-1,\ n-2,\cdots,1$$

# 例题分析

例1：用消去法解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 4x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

解：用增广矩阵表示求解过程

$$(A \mid b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(-2)\times r_1 + r_3 \rightarrow r_3,\quad r_2 + r_3 \rightarrow r_3$$

# Gauss消去法乘/除法计算量

消去第一列的 n-1 个系数要计算

n*(n-1） 个乘法。

…… 二 … $n-2$ ……… $(n\text{-}1)*(n-2)$ ………

总计 $\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{n}{3}(n^2-1)$

除法 $\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$ 回代总计算量 $\frac{n(n+1)}{2}$

总乘除法共 $\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{1}{3}n$ $(n=30,$ 为$9890)$

# 高斯主元素消去法

在高斯法消元过程中可能出现$a_{kk}^{(k)}=0$的情况，这时消去法将无法进行；即使主元素$a_{kk}^{(k)}\neq 0$但很小，用其作除数，也会导致其他元素数量级的严重增长和舍入误差的扩散。

为避免此种情况的发生，可通过交换方程的次序，选取绝对值大的元素作主元。基于这种想法导出了主元素法。

$m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ 时避免 $m_{\mathrm{ik}}$ 很小，从而只要取

$$a_{kk}^{(k)}=\max\{a_{ij}^{(k)}\text{, i,j}=\text{k, k}+1\text{ , }\cdots\text{ , n}\}$$

称主元素*Gauss*消去法；

或 $$a_{kk}^{(k)}=\max\{a_{ik}^{(k)}\text{, i}=\text{k, k}+1\text{ , }\cdots\text{ , n}\}$$

称列主元*Gauss*消去法。

# 例题分析

例3：方程组$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \end{bmatrix}$

四位有效数字精确解为$x^* = (-0.4904, -0.05104, 0.3675)^T$

解：（1）高斯消去法

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{22}=-2000]{m_{21}=-1000}$$

$$\begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 4001 & 6006 & 2003 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=1.997} \begin{bmatrix} 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \\ 0 & 2004 & 3005 & 1002 \\ 0 & 0 & 5.000 & 2.000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = (-0.400, -0.09989, 0.4000)^T$$

# 例题分析（续）

(2）交换行，避免绝对值小的主元作除数。（列主元素法）

$$(A|b)=\begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ -1.000 & 3.712 & 4.623 & 2.000 \\ 0.001 & 2.000 & 3.000 & 1.000 \end{bmatrix} \xrightarrow[m_{22}=-0.0005]{m_{21}=0.5000}$$

$$\begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.712 & 1.801 & 0.500 \\ 0 & 2.001 & 3.003 & 1.002 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{32}=0.6300}$$

$$\begin{bmatrix} -2.000 & 1.072 & 5.643 & 3.000 \\ 0 & 3.712 & 1.801 & 0.500 \\ 0 & 0 & 1.868 & 0.687 \end{bmatrix}$$

$$x=(-0.4900,-0.05113,0.3678)^T$$

# 2.3 LU 分解方法

## Gauss消去法的矩阵表示

每一步消去过程相当于左乘初等变换矩阵$L_k$

记： $A^{(2)} = L_1 A^{(1)}$ ， $b^{(2)} = L_1 b^{(1)}$

其中

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21} & 1 & & & \\ -m_{31} & 0 & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{i1} = a_{i1}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$$
$$i = 2,3,\cdots,n$$

# Gauss 消去法的矩阵表示

记： $A^{(3)} = L_2 A^{(2)}$ ， $b^{(3)} = L_2 b^{(2)}$

$$
L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -m_{32} & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
m_{i2} = a_{i2}^{(2)} / a_{22}^{(2)}
$$

$$
i = 3, 4, \cdots, n
$$

$A^{(3)} = L_2 L_1 A^{(1)}$ ， $b^{(3)} = L_2 L_1 b^{(1)}$

# Gauss 消去法计算过程

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ 0 & \cdots & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & & -m_{ni} & & & 1 \end{pmatrix} \qquad L_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & 1 & & \\ 0 & & & m_{i+1,i} & 1 & \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & m_{ni} & & 1 \end{pmatrix}$$

i列　　　　　　　　　　i列

$$A^{(n)} = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 A^{(1)}$$

$$b^{(n)} = L_{n-1} L_{n-2} \cdots L_1 b^{(1)}$$

# LU形式

$$A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = LA^{(n)} = LU$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & m_{22} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & m_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

# 例题分析

例2：对于例1，由增广矩阵表示消元过程有

$$(A\,|\,b)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 2 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 0 & -4 & -1 & -11\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 4 & -1 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$$

由$m_{ik}=a_{ik}^{(k)}\big/a_{kk}^{(k)} \qquad (i=k+1,\cdots,n)$

$\Rightarrow \quad m_{21}=0, m_{31}=2, m_{32}=-1,$故有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=LU.$$

$$A^{(n)} = L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A^{(1)}$$

$$A = A^{(1)} = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} A^{(n)} = L A^{(n)} = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{U} = A^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{b}^{(n)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

# LU 分解

设**A**为**n**阶方阵，若**A**的顺序主子式$\boldsymbol{A_i}$均不为零，则矩阵存在唯一的**LU(Doolittle** 杜利特尔）分解。

由 $Gauss$ 消去法加上列主元（或全主元）有 $LU$ 分解：

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & & u_{2n} \\ & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

# 直接计算 A 的 LU 分解(例)

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{44} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\
l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\
l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\
l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44}
\end{pmatrix}
$$

# 直接计算 A 的 LU 分解(例)（续）

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12}+u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} & l_{21}u_{14}+u_{24} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33} & l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+u_{34} \\ l_{41}u_{11} & l_{41}u_{12}+l_{42}u_{22} & l_{41}u_{13}+l_{42}u_{23}+l_{43}u_{33} & l_{41}u_{14}+l_{42}u_{24}+l_{43}u_{34}+u_{44} \end{pmatrix}$$

$u$1 行 $u_{11}=a_{11}, u_{12}=a_{12}, u_{13}=a_{13}, u_{14}=a_{14}$； $u_{1j}=a_{1j}$

$l$ 1 列 $l_{21}=a_{21}/u_{11}, l_{31}=a_{31}/u_{11}, l_{41}=a_{41}/u_{11}$；$l_{i1}=a_{i1}/u_{11}$

u2 行 $u_{22}=a_{22}-u_{12}$， $u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13}$， $u_{24}=a_{24}-l_{21}u_{14}$；

$u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j}$， $j=2, \cdots, n$

$l$ 2 列 $l_{32}=(a_{32}-l_{31}u_{12})/u_{22}$， $l_{42}=(a_{42}-l_{41}u_{12})/u_{22}$；

$l_{i2}=(a_{i2}-l_{i1}u_{12})/u_{22}$ $i=3, \cdots, n.$

# 一般计算公式

$$u_{1j} = a_{1j} \ , \ j = 1, \cdots, n$$

$$l_{i1} = a_{i1}/u_{11} \ , \ i = 2, \cdots, n$$

对 $k = 2, 3, \cdots, n$ 计算

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj} \qquad j = k, \cdots, n$$

$$l_{ik} = (a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk})/u_{kk} \qquad i = k+1, \cdots, n$$

计算量与 Gauss 消去法同.

# LU 分解求解线性方程组

$$AX = b \quad \to \quad \mathrm{LY} = \mathrm{b}, \quad \mathrm{UX} = \mathrm{Y}$$

$$LY = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ & \cdots & \cdots & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

$$\mathrm{UX} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & & u_{1\mathrm{n}} \\ & u_{22} & \cdots & & u_{2\mathrm{n}} \\ & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & u_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

# LU 分解求解线性方程组（续1）

1, 解 Y： $y_1 = b_1$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

2, 解 x： $x_n = y_n / u_{nn}$

$$x_i = \left( y_i - \sum_{j=n}^{i+1} u_{\mathrm{ij}} x_j \right) \Big/ u_{\mathrm{ii}},$$

$\mathrm{i} = \mathrm{n} - 1,\ \cdots,\ 1$

# LU 分解求解线性方程组（续2）

例：用LU分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

解：用分解计算公式得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = LU.$$

求解 $Ly = (14, 18, 20)^T \Rightarrow \; y = (14, -10, -72)^T,$

$$Ux = (14, -10, -72)^T \Rightarrow \quad x = (1, 2, 3)^T.$$