第4章　插值方法(2)

1. Lagrange插值方法回顾

$$L_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \ldots + f(x_n)l_n(x)$$

x	$x_0,$	$x_1,$	$\cdots,$	$x_{j-1},$	$x_j,$	$x_{j+1},$	$\cdots,$	x_n
y	$0,$	$0,$	$\cdots,$	$0,$	$1,$	$0,$	$\cdots,$	0

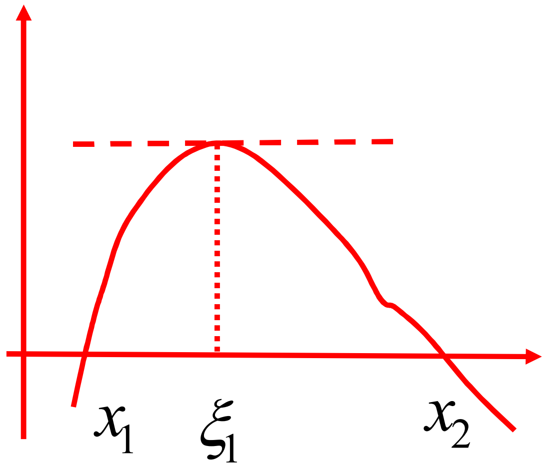
$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

误差估计

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

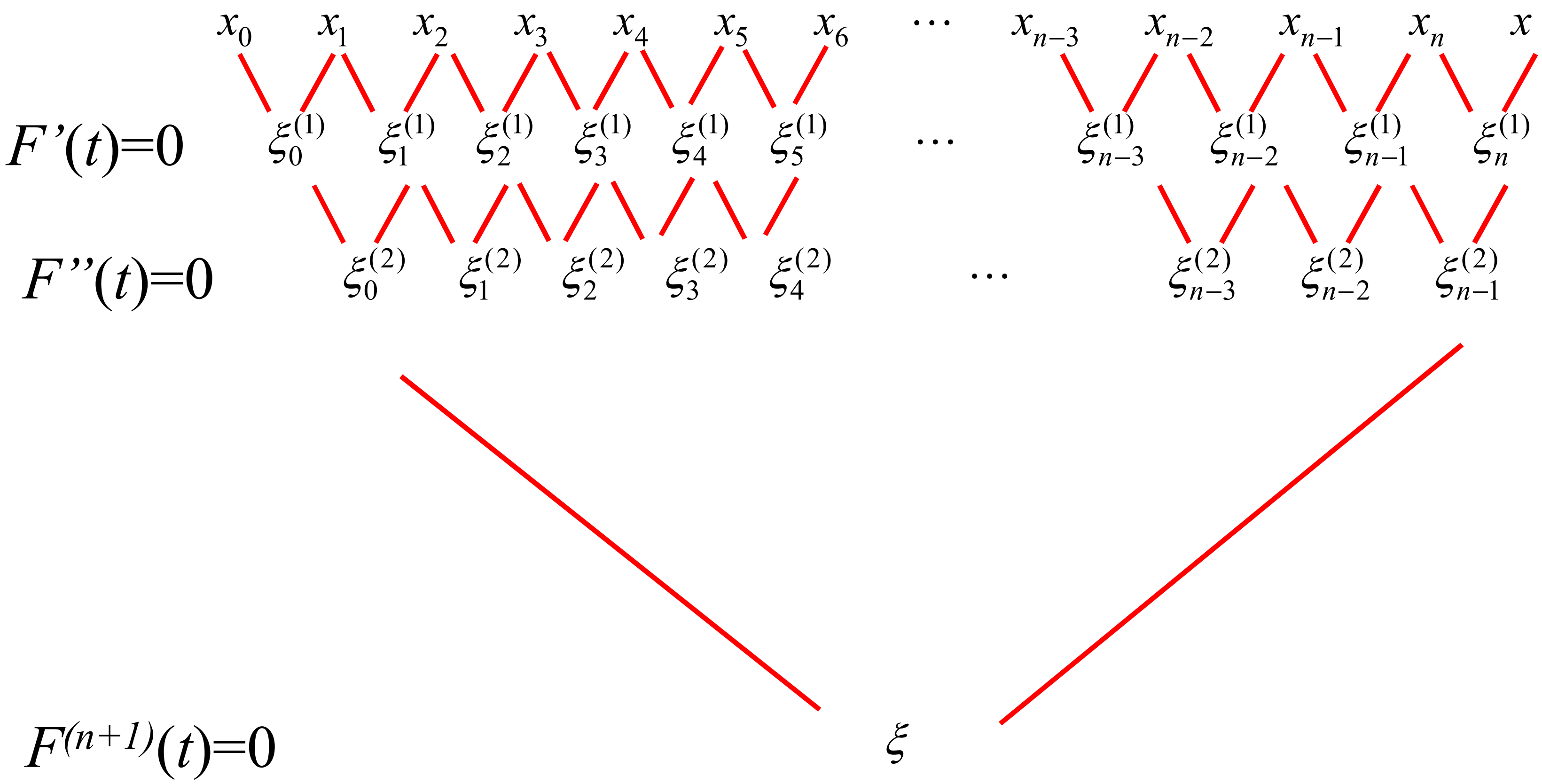
罗尔定理

$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (x_1 < x_2) \Longrightarrow f'(\xi_1) = 0 \quad (x_1 < \xi_1 < x_2)$



$$F(t) = f(t) - L_n(t) - k(x)\omega(t)$$

$t = x_0, x_1, \ldots x_n, x$ $\qquad$ $F(t)=0$



余项的一些有趣的应用

- 若 $f(x)$ 本身是一个不超过 n 次多项式，则

$$f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$R_n(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L_n(x) \equiv f(x)$$

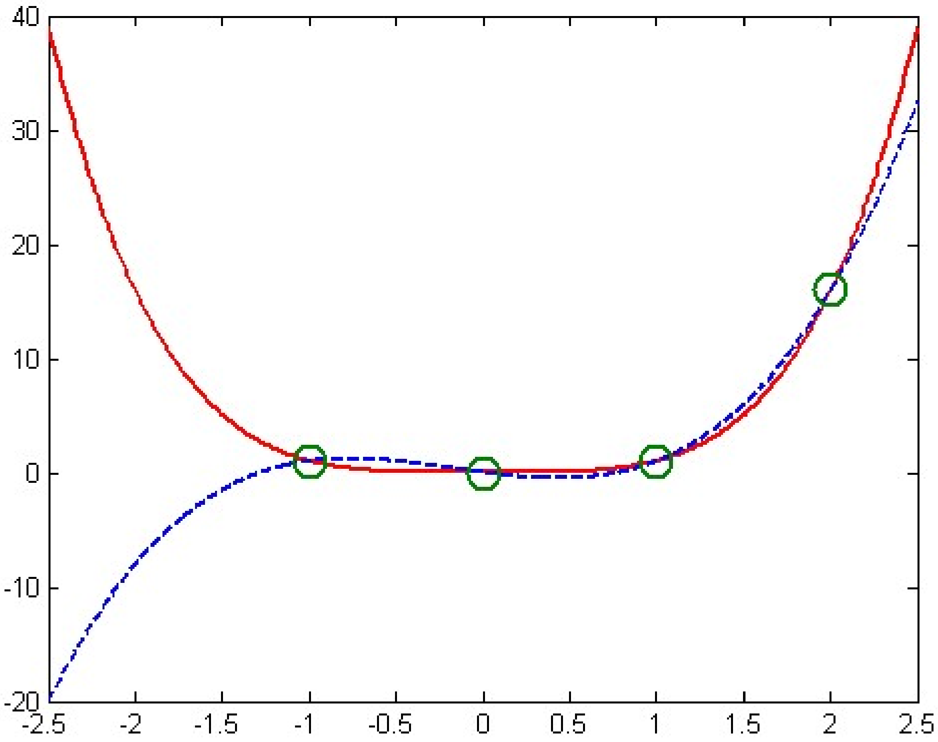
特别当 $f(x) = x^k$ 有

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1, \quad \sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k \qquad (k=0,1,2\cdots,n)$$

问题：高于 n 阶的多项式情况如何？

$$f(x) = x^4$$

求插值节点为 **-1， 0， 1， 2** 的三次多项式



- Langrange插值也有其不足：为了提高精度有时需增加结点，原来的数据不能利用，浪费资源

Newton插值法

由于Lagrange插值法的缺点，使我们想到*Tarlor*展式计算近似值：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

要想提高精度只要增加项数即可，以前的数据仍然有用，而上式就是求$f(x)$得导数：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

由此引入插商的概念。

差商及其性质

由导数的概念引入：

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_1,x_0]$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f[x_2,x_1]$$

一般地，一阶差商：

$$\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=f[x_i,x_j]$$

二阶差商是一阶差商的差商

$$\frac{f[x_0,\ x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=f[x_0,x_1,x_2]$$

一般地，二阶差商：

$$\frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}=f[x_i,x_j,x_k]$$

n阶差商为：

$$\frac{f[x_0,x_1,\ldots x_{n-1}]-f[x_1,x_2,\ldots,x_n]}{x_0-x_n}=f[x_0,x_1,x_2,\ldots x_{n-1},x_n]$$

性质1 n阶差商$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$可以表示为

函数值$f(x_j)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$的线性组合，即

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\omega_n'(x_j)}$$

其中$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots.(x - x_n)$

$$\omega_n'(x_j) = (x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right]$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_2}\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - f(x_1)\left(\frac{1}{x_0 - x_1} - \frac{1}{x_1 - x_2}\right) + \frac{f(x_2)}{x_1 - x_2}\right]$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

差 商 的 性 质

性质 2 差商与节点排列顺序无关，即

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

其中，$i_0, i_1, \cdots, i_n$ 是 0，1，…，n 的任意一种排列

性质 3 若 $f(x)$ 是 x 的 m 次多项式，则 $f[x, x_0]$ 是 x 的 m-1 次多项式；$f[x, x_0, x_1]$ 是 x 的 m-2 次多项式

由差商定义

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f[x,x_0]$$

$$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] \qquad (1)$$

$$\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}=f[x,x_0,x_1]$$

$$\Rightarrow f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \qquad (2)$$

(2)式代入（1）式得：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1] \quad (3)$$

为了提高精度，增加节点x_2，则

$$\frac{f[x,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2}=f[x,x_0,x_1,x_2]$$

得 $f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2] \qquad (4)$

(4)式代入（3）式得:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x, x_0, x_1, x_2]$$

一般的，在节点$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$上有

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
&+ \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots x_n] \\
&+ (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n)f[x, x_0, x_1, \dots x_n] \\
= N_n(x) &+ R_n(x)
\end{aligned}
$$

其中$N_n(x)$、$R_n(x)$分别为$f(x)$在节点$\{x_i\}_0^n$上的Newton插值公式和余项。

可以验证：

$$N_n(x_0)=f(x_0)$$

$$N_n(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f[x_0,x_1]$$

$$=f(x_0)+(x_1-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f(x_1)$$

$$N_n(x_2)=f(x_0)+(x_2-x_0)\{f[x_0,x_1]+(x_2-x_1)f[x_0,x_1,x_2]\}$$

$$=f(x_0)+(x_2-x_0)\{f[x_0,x_1]+(x_2-x_1)\frac{f[x_2,x_0]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}\}$$

$$=f(x_0)+(x_2-x_0)f[x_2,x_0]$$

$$=f(x_0)+(x_2-x_0)\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=f(x_2)$$

类似地可以证明$N_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$

由插值的唯一性知：$N(x) \equiv L_n(x)$,因此他们的余式也相等

即：$\omega(x) f[x, x_0, x_1, \ldots x_n] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1)!}\omega(x)$

故有差商与导数的关系

$$f[x, x_0, x_1, \ldots x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1)!}$$

其中，ξ介于$x, x_0, x_1, \ldots x_n$的最大值与最小值之间。

Newton插值计算

差商表-1

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	n 阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1},x_n]$	$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$$

$$f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\frac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}}$$

差商表-2

x_k	$f(x_k)$	一阶插商	二阶插商	三阶插商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_0,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_0,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
…	…	…	……	………
x_n	$f(x_n)$	$f[x_0,x_n]$	$f[x_0,x_1,x_n]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_n]$

$$f[x_0,x_1,x_n]=\frac{f[x_0,x_n]-f[x_0,x_1]}{x_n-x_1}\qquad f[x_0,x_1,x_2,x_n]=\frac{f[x_0,x_1,x_n]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_n-x_2}$$

$$
\begin{aligned}
N_4(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
&= f(x_0) + (x - x_0)(f[x_0, x_1] + (x - x_1)(f[x_0, x_1, x_2] \\
&\quad + (x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3])) \qquad \textbf{(4.2.3)}
\end{aligned}
$$

例题

等距节点Newton插值公式

- 在实际应用中，常是等距节点情况，即

$$x_i = a + ih \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$$

这里h>0为常数，称为步长，这时Newton插值公式就可以简化，为此我们引入差分概念。

定义： 设函数$f(x)$在等距节点$x_i = a + ih$ (i=0,1,2,⋯，n)上值为 $f_i = f(x_i)$，则

(1)称$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$($i$=0,1,2,⋯，$n$)为函数 $f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的一阶向前差分（简称差分）；又称$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$ (k=1,2,⋯,n;i=0,1,⋯,n-k)为函数 $f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的 k 阶向前差分，这里约定$\{x_i\}_0^n$;

(2) 称$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ (i=n,n-1,⋯,1)为函数 $f(x)$在点$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$上的后差分；又称$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$ (k=1,2,⋯,n; i=n-k+1,⋯,2,1)为函数$f(x)$在点$\{x_i\}_0^n$上的 k 阶向后差分，同样约定$\nabla^0 f_i = f_i$。

等距节点Newton插值公式

- 插商与差分的关系

（1）用前插表示N(x)

在等距节点条件下有：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}\Delta f_0$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]) - f[x_0, x_1])}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\frac{1}{h}\Delta f_1 - \frac{1}{h}\Delta f_0}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

一般有

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0$$

若令$x = x_0 + th$,则$Newton$插值公式和余式具有形式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$

$$= f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n) f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + h)$$

（2）用后插表示N(x)

如果将节点$x_0, x_1, \ldots, x_n$倒排序为：$x_n, x_{n-1}, \ldots x_0$,

则$Newton$插值公式为：

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = & f(x_n) + (x - x_n) f[x_n, x_{n-1}] \\
& + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \ldots \\
& + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) f[x_n, x_{n-1}, \ldots x_1, x_0]
\end{aligned}
$$

同样有：

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{h}\nabla f_n$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]}{x_n - x_{n-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{h}\nabla f_n - \frac{1}{h}\nabla f_{n-1}}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\nabla^2 f_n$$

一般有

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f_n$$

若令$x = x_n + sh$(一般取$s < 0$)则

$$N_n(x) = N_n(x_n + sh) = f_n + \frac{s}{1!}\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n$$

$$+ \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} s(s+1)\ldots(s+n) f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_n - nh, x_n)$$

例题

例：设函数 $y=f(x)$在各节点的取值如下表所示，试计算各阶差分值。

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1	0.818 731	0.670 320	0.548 812	0.449329	0.367 879

解：列差分表如下

x	**f(x)**	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	**1**					
0.2	**0.818 731**	**-0.181 269**				
0.4	**0.670 320**	**-0.148 411**	**0.032 585**			
0.6	**0.548 812**	**-0.121 508**	**0.026 903**	**-0.005 955**		
0.8	**0.449 329**	**-0.099 483**	**0.022 025**	**-0.004 878**	**0.001 077**	
1.0	**0.367 879**	**-0.018 033**	**0.018 033**	**-0.003 992**	**0.000886**	**-0.000 191**

Hermite插值法

- 节点处的函数值相等--连续性
- 导数值也相等--光滑性

Hermite 插值: $2n+1$ 次多项式 $H_{2n+1}(x)$ 满足

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), H_{2n+1}^{'} = f^{'}(x_i)$$

则称 $H_{2n+1}(x)$ 为 $f(x)$ 关于节点 $\{x_i\}_0^n$ 的 Hermite 插值多项式。

Hermite插值多项式

- 构造$H(x)$

已知x_i，$y_i = f(x_i), f_i' = f'(x_i) \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$

希望$H(x)$满足

$$H(x_i) = f(x_i), H'(x_i) = f'(x_i) = f_i' \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

令

$$H(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j(x) y_j + \sum_{j=0}^{n} \beta_j(x) f_j'$$

（1） $\alpha_j(x_i)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

（2） $\alpha_j^{'}(x_i)=0 \qquad i=0,1,2,\ldots n$

（3） $\beta_j(x_i)=0 \qquad i=0,1,2,\ldots n$

（4） $\beta_j^{'}(x_i)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

如何求$\begin{cases}\alpha_j(x)=?\\ \beta_j(x)=?\end{cases}$

$$\alpha_j(x):\quad 0=\alpha_j(x_0)=\alpha_j(x_1)=\ldots=\alpha_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha_j(x_n)$$

$$\alpha'_j(x):\quad 0=\alpha'_j(x_0)=\alpha'_j(x_1)=\ldots=\alpha'_j(x_{j-1})$$

$$=\alpha'_j(x_{j+1})=\ldots=\alpha'_j(x_n)$$

而$\alpha_j(x_j)=1,\alpha'_j(x_j)=0$

则$x_0, x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$是$\alpha_j(x)$的二重零点。

所以令

$$\alpha_j(x) = C(x)\frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2\ldots(x-x_{j-1})^2(x-x_{j+1})^2\ldots(x-x_n)^2}{(x_j-x_0)^2(x_j-x_1)^2\ldots(x_j-x_{j-1})^2(x_j-x_{j+1})^2\ldots(x_j-x_n)^2}$$

$$= C(x)l_j^2(x)$$

由于$H(x)$是$2n+1$次多项式，故$C(x)$为一次多是项式。

令 $C(x) = Ax + B$ 即 $\alpha_j(x) = (Ax+B)l_j^2(x)$

由$\alpha_j(x_j)=1, \alpha_j'(x_j)=0$得：

$$1=(Ax_j+B)l_j^2(x_j)=Ax_j+B$$

$$0=\alpha_j'(x_j)=Al_j^2(x_j)+(Ax_j+B)(2l_j(x_j)l_j'(x_j))$$

即 $A+2(Ax_j+B)l_j'(x_j)=0$

由 $\begin{cases} Ax_j+B=1 \\ A+2(Ax_j+B)l_j'(x_j)=0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} A=-2l_j'(x_j) \\ B=1+2x_jl_j'(x_j) \end{cases}$

故得：

$$\alpha_j(x) = (-2l_j'(x_j)x + 1 + 2x_j l_j'(x_j))l_j^2(x\ )$$

$$= (1 + 2(x_j - x)l_j'(x_j))l_j^2(x\ )$$

同理可得$\beta_j(x) = (x - x_j)l_j^2(x\ )$

由

$$\beta_j(x_0)=\beta_j(x_1)=...=\beta_j(x_{j-1})=\beta_j(x_{j+1})=...=\beta_j(x_{j+1})=0$$

$$\beta_j^{'}(x_0)=\beta_j^{'}(x_1)=...=\beta_j^{'}(x_{j-1})=\beta_j^{'}(x_{j+1})=...=\beta_j^{'}(x_{j+1})=0$$

$$\beta_j(x_j)=0,\beta_j^{'}(x_j)=1$$

知道　$x_0,x_1,...x_{j-1},x_{j+1},...x_n$是$\beta_j(x)$的二重零点,所以设

$$\beta_j(x)=(Cx+D)l_j^2(x)$$

$$\begin{cases} \beta_j(x_j) = Cx_j + D = 0 \\ \beta_j'(x_j) = Cl_j^2(x_j) + 2(Cx_j + D)l_j(x_j)l_j'(x_j) = 1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} C = 1 \\ D = -x_j \end{cases}$$

所以 $\beta_j(x) = (x + x_j)l_j^2(x)$

Hermite插值余项

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\omega^2(x)$$

其中，$\xi \in (a,b)$，$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

特例（n=1)

对于区间$[x_{j\text{-}1}, x_j]$上求二点三次 $Hermite$

插值多项式 $H_3(x)$满足条件：

$$H_3(x_{j-1}) = f(x_{j-1}) = y_{j-1}, \quad H_3(x_j) = f(x_j) = y_j$$

$$H_3'(x_{j-1}) = f_{j-1}', \quad H_3'(x_j) = f_j'$$

则$: H_3(x) = \alpha_{j-1}(x)y_{j-1} + \alpha_j(x)y_j + \beta_{j-1}(x)f_{j-1}' + \beta_j(x)f_j'$

$$= ((1 + 2\frac{x - x_{j-1}}{h_j})y_{j-1} + (x - x_{j-1})f_{j-1}')(\frac{x - x_j}{h_j})^2$$

$$+ ((1 - 2\frac{x - x_j}{h_j})y_{j-1} + (x - x_j)f_j')(\frac{x - x_{j-1}}{h_j})^2$$

$$
\begin{aligned}
R_3(x) &= f(x) - H_3(x) \\
&= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_{j-1})^2 (x - x_j)^2
\end{aligned}
$$

其中，$h_j = (x_j - x_{j-1}), \xi \in (x_{j-1} - x_j)$

例题

设 $f(x)=\sin x$ ，试用 $f(0)=0,$

$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}, f'(0)=1$， $f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 确定二点三次

Hermite 插值多项式 $H_3(x)$ 并计算 $H_3(\frac{\pi}{12})$ 的值。

解：方法一　由二点三次 Hermite 插值公式得：

$$H_3(x)=[[1+2\frac{x-0}{\frac{\pi}{6}}]\times 0+(x-0)\times 1][\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}]^2$$

$$+[[1-2\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}]\times\frac{1}{2}+(x-\frac{\pi}{6})\times\frac{\sqrt{3}}{2}][\frac{x-0}{\frac{\pi}{6}}]^2$$

$$=x\left(\frac{6}{\pi}x-1\right)^2+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{\pi}x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]\frac{36}{\pi^2}x^2$$

所以有

$$H_3\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{48}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{96}\pi=0.258768616$$

与真值$\sin\frac{\pi}{12}=0.258819045$相比已有三位有小数字。

方法二：直接用待定系数法求$H_3(x)$。

由 $f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，可有 $y=L_1(x)=\frac{3}{\pi}x$，于是可设

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x+x(x-\frac{\pi}{6})(Ax+B)$$

由 $H'_3(0)=f'(0)=1$ 和 $H'_3(\frac{\pi}{6})=f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得

$$\begin{cases} \frac{3}{\pi}+(-\frac{\pi}{6})B=1 \\ (\frac{3}{\pi}+\frac{\pi}{6})(A\frac{\pi}{6}+B)=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

由此可解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{36}{\pi^2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{6}{\pi}\right)=-0.15988694 \\ B=\dfrac{6}{\pi}\left(\dfrac{3}{\pi}-1\right)=-0.08607801 \end{cases}$$

将 A、B 代入式 $H_3(x)$ 得

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x-x\left(x-\frac{\pi}{6}\right)(0.15988694x+0.08607801)$$

由此可解得

$$\begin{cases} A=\dfrac{36}{\pi^2}(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{6}{\pi})=-0.15988694 \\ B=\dfrac{6}{\pi}(\dfrac{3}{\pi}-1)=-0.08607801 \end{cases}$$

将 A、B 代入式 $H_3(x)$ 得

$$H_3(x)=\frac{3}{\pi}x-x(x-\frac{\pi}{6})(0.15988694x+0.08607801)$$

分段低次插值法

- 高次插值中的问题

　　一般地说，适当提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度，但决不可由此得出结论，认为插值多项式的次数越高越好。例如，对于函数 $f(x)=1/(1+25x^2)\ (-1\le x\le 1)$，作Lagrange插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k = x_i}\right)$$

当 $n=10$ 时，$f(x)$ 与 $L_{10}(x)$ 偏差很大。出现这种现象得原因

(1) 据Lagrange插值余项估计式(4.11)，当插值节点加密，n 增大时，有时 $f^{(n+1)}(x)$ 迅猛，$M_{n+1}=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 可能非常大；特别当插值节点比较分散、插值区间较大时，$\left|\omega_{n+1}(x)\right|$ 也较大。

(2) 当 n 增大时，Lagrange插值多项式次数增大，计算量的增幅也是巨大的，这就加大了计算过程中的舍入误差。

分段线性插值

- 已知*f*(x)在节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上的函数值y_i $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1,2,\cdots,n)$ 上作线性插值函数

$$L_{1i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i \quad (x_{i-1} \le x \le x_i; i = 1,2,\cdots,n)$$

从几何上讲，分段线性插值就是用一条过 $n+1$ 个点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 的折线来近似表示*f*(x)。

显然，分段线性插值函数随区间长 h 的无限缩小而无限接近于*f*(x)。其插值余项为

分段二次插值

- 对于插值节点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 在小区间 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 内作二次插值

$$L_{2i}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} y_i$$

$$+ \frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})} y_{i+1}$$

$$(x_{i-1} \le x \le x_{i+1}; i = 1,2,\cdots,n-1)$$

其插值余项为

$$|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!} |(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})| \le \frac{M_3}{6} \Delta$$