2011～2012 学年第二学期

《计算方法》课程考试试卷(A 卷) (闭卷)

院(系)____________ **专业班级**____________ **学号**____________ **姓名** **评分标准**

考试日期: 2012 年 05 月 09 日　　　　　　　　**考试时间:** 08:30~11:00

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

得　分	
评卷人	

一.（共 10 分） **1.**（4 分）设 $a=\sqrt{3}$，则 a 的近似值 1.73 具有几位有效数字？并计算其绝对误差和相对误差。

2.（6 分） 设向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2 & 5 & -6 & 1\end{pmatrix}^T$，计算 $\|\boldsymbol{x}\|_1$、$\|\boldsymbol{x}\|_2$、$\|\boldsymbol{x}\|_\infty$；设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，计算 $\|\mathbf{A}\|_1$、$\|\mathbf{A}\|_\infty$ 和矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱半径 $\rho(\mathbf{A})$。

解:

1. 3 位有效数字　　　　　　(2 分)

绝对误差: 0.00205　　　　　　(1 分)

相对误差: 0.00205/1.732 = 0.00118　　　（1 分）

2. $\|\boldsymbol{x}\|_1=14$　　　　　　(各 1 分)

$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{66}=8.124$

$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=6$

$\|\mathbf{A}\|_1=8$

$\|\mathbf{A}\|_\infty=9$

$\rho(\mathbf{A})=5$

注：所有题目解答中，后面的分数是该步分数，总得分应该用累加

得　分	
评卷人	

二. (共 20 分) 方程 $3x^3 - x - 1 = 0$ 在 $x = 1.0$ 附近有一根，

1. (10 分) 构造一个收敛的简单迭代(Jacobi)公式求此根，并证明收敛性;
2. (10 分) 用 Newton 迭代法求此根。

解:

1. $\begin{cases} x_{i+1} = \sqrt[3]{\dfrac{x_i + 1}{3}}, \quad i = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 1.0 \end{cases}$ (或其它收敛式子) (6 分)

x_0 = 1.000000 (2 分)
x_1 = 0.873580
x_2 = 0.854772
x_3 = 0.851902
x_4 = 0.851463
x_5 = 0.851395
x_6 = 0.851385
x_7 = 0.851383
x_8 = 0.851383

$\varphi(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{3}}$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{9\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{9}}}$, 当 0<x<2(**或范围比这大**)时 $|\varphi'(x)| < 1$, 故迭代收敛。 (2 分)

2. $\begin{cases} x_{i+1} = x_i - \dfrac{3x_i^3 - x_i - 1}{9x_i^2 - 1}, \quad i = 0,1,2,\cdots \\ x_0 = 1.0 \end{cases}$ (8 分)

x0 = 1.000000 (2 分)

x1 = 0.875000

x2 = 0.852122

x3 = 0.851384

x4 = 0.851383

x5 = 0.851383

得 分	
评卷人	

三. (共 25 分) 设有方程组 $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$,

1. (10 分) 分别构造收敛的 Jacobi 及 Gauss-Seidel 迭代格式, 并说明收敛性;

2. (10 分) 用列选主元 Gauss 消去法求此方程组的解;

3. (5 分) 用 LU 分解法求此方程组的解。

解: **1.** 第 1 个方程和第 2 个方程交换得 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$

则对角占优，故相应的 Jacobi 和 G-S 迭代均收敛。 (2 分)

Jacobi: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 + x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)})/4 \\ x_2^{(k+1)} = (5 + 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (9 - x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})/10 \end{cases}, k = 0,1,2\cdots$ (4 分)

或 $$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 0 & -1/5 \\ -1/10 & 1/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9/10 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

G-S : $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (8 + x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)})/4 \\ x_2^{(k+1)} = (5 + 2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)})/5 \\ x_3^{(k+1)} = (9 - x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)})/10 \end{cases}, k = 0,1,2\cdots$ (4 分)

或 $$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & -1/200 & -1/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 9/5 \\ 53/50 \end{bmatrix}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

2. $$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 10 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 8 \\ 2 & -5 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 10 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & -4.5 & 0 & -9 \\ 0 & -1.75 & 10.5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & -4.5 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 10.5 & 10.5 \end{bmatrix}$$

(8 分)

回代得 x1 = 3, x2 = 2, x3 = 1 。 (2 分)

3. $$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & -2 & 8 \\ 1 & -2 & 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ & 9 & 0 \\ & & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$ (3 分)

前推: y1 = -5, y2 = 18, y3 = 10.5, 回代得: x1 = 3, x2 = 2, x3 = 1 。 (2 分)

得 分	
评卷人	

四. (15 分) **1.** (7 分) 设有函数 $y = f(x)$, 已知 $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f(2) = 5$, $f(3) = 28$, 求满足此四个插值条件的三次插值多项式, 并写出余项表达式。

2. (8 分) 设

x	100	121	169
$f(x)$	10	11	13

,

利用抛物(二次)插值公式求 $x = 144$ 时 $f(x)$ 的近似值。

解:

1. 设 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, 则 $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

由插值条件有: $\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 28 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 2 \end{cases}$

得 $p(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$ (5 分)

或 令 $p(x) = (x-1)^2(ax+b)$, 由后二个插值条件有 $\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 12x + 4b = 28 \end{cases}$, 得 $a = 2$, b=1

得 $p(x) = (x-1)^2(2x+1)$

余项表达式: $\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)(x-3)$ (2 分)

2. $f(144)\approx\dfrac{(144-121)(144-169)}{(100-121)(100-169)}\times 10+\dfrac{(144-100)(144-169)}{(121-100)(121-169)}\times 11+\dfrac{(144-100)(144-121)}{(169-100)(169-121)}\times 13$

(6 分)

$=\dfrac{23\times(-25)}{(-21)(-69)}\times 10+\dfrac{44\times(-25)}{21\times(-48)}\times 11+\dfrac{44\times 23}{69\times 48}\times 13=$ 12.0079 (2 分)

得 分	
评卷人	

五. (15 分) **1.** (7 分) 确定下列公式中的待定系数, 使其代数精度尽量高, 并指出代数精度次数:

$\int_0^3 f(x)dx\approx A_0 f(0)+A_1 f(1)+A_2 f(2)$ 。

2. (8 分) 设 $I=\int_0^1\dfrac{1}{x+1}dx$, 用复化梯型公式计算 I 的近似值, 其中积分区间等分数 n 取 5。

解:

1. 由代数精度法，有 $\begin{cases}A_0+A_1+A_2=3\\ A_1+A_2\cdot 2=\dfrac{9}{2}\\ A_1+A_2\cdot 4=9\end{cases}$ 得 $A_0=\dfrac{3}{4}$; $A_1=0$; $A_2=\dfrac{9}{4}$; (6 分)

解得 $\int_0^3 f(x)dx\approx\dfrac{3}{4}f(0)+0\cdot f(1)+\dfrac{9}{4}f(2)$, 公式至少有 2 次代数精度。

因 $\int_0^3 x^3 dx = \frac{81}{4} \neq \frac{3}{4}\cdot 0 + 0\cdot f(1) + \frac{9}{4}\cdot 2^3$, 故公式的代数精度次数为 2。 (1 分)

2. $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx \approx \frac{1}{10}(1 + 2(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.8}) + \frac{1}{2})$ (6 分)

$= 0.695635$ (2 分)

得 分	
评卷人	

六. (15 分) **1.** (7 分) 用改进 Euler 公式(法)求解下列常微分方程:

$$\begin{cases} y' = y - 2x, \quad 0 \le x \le 0.4 \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$$ ， 取步长 $h = 0.2$ 。

2. (8 分) 确定公式 $y_{i+1} = y_i + h(A\, y'_{i+1} + B\, y'_i + C\, y'_{i-1})$

中的待定系数 A、B、C, 使公式具有 3 阶精度, 并给出局部截断误差首项。

解:

1. $y_0 = 0$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{i+1} = y_i + 0.2(y_i - 2*0.2i) = 1.2y_i - 0.08i \\ y_{i+1} = y_i + 0.1(y_i - 2*0.2i + \tilde{y} - 2*0.2(i+1)), \end{cases} \qquad i = 0,1 \qquad (5\text{分})$$

$$= 1.1y_i + 0.1\tilde{y} - 0.08i - 0.04;$$

$$= 1.22y_i - 0.088i - 0.04, \qquad i = 0, 1$$

计算得 $y_1 = 1.18$，$y_2 = 1.3116$ (2 分)

2. $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i) + \cdots$

$y_{i+1} = y(x_i) + h[Ay'(x_{i+1}) + By'(x_i) + Cy'(x_{i-1})]$ (局部性假设)

$$\begin{aligned} = y(x_i) + h\,[\; & A(y'(x_i) + hy''(x_i) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_i) + \cdots) \\ & + By'(x_i) \\ & + C(y'(x_i) - hy''(x_i) + \frac{h^2}{2!}y'''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_i) + \cdots)\,] \end{aligned}$$

$$= y(x_i) + h(A+B+C)y'(x_i) + h^2(A-C)y''(x_i) + h^3\frac{1}{2!}(A+C)y'''(x_i) + h^4\frac{1}{3!}(A-C)y^{(4)}(x_i) + \cdots$$

令 $\begin{cases} A+B+C=1 \\ A-C=\frac{1}{2} \\ A+C=\frac{1}{3} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} A=\frac{5}{12} \\ B=\frac{2}{3} \\ C=-\frac{1}{12} \end{cases}$， (6 分)

则 $y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_i) + \cdots$ (2 分)