2009～2010 学年第二学期

《计算方法》课程考试试卷(A 卷) (闭卷)

院(系)_____________专业班级______________学号_____________

__姓名______________

考试日期: 2010 年 05 月 20 日　　**考试时间:** 19:00~21:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

得分	
评卷人	

一、填空（每空 2 分，共 30 分）

1． 已知 $e=2.71828\cdots$，则近似值 $x_1=2.718$ 相对 e 有 _4_ 位有效数字，近似值 $x_2=0.027182$ 相对 $\frac{e}{100}$ 有 _4_ 位有效数字。

2． 已知方程 $e^x+5x-1=0$ 的有根区间为 $0<x<0.2$，在（0, 0.2）上用迭代法解此方程，若迭代函数 $\varphi_1(x)=\frac{1-e^x}{5}$，则迭代 _收敛_，若迭代函数 $\varphi_2(x)=\ln(1-5x)$，则迭代 _发散_。

3． 设 $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$ __7__，$\|AX\|_1=$ __9__。

4. 若求解某线性方程组有迭代公式 $X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$，其中

$B=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{a}\\ \sqrt{a} & a\end{bmatrix}$,则该迭代公式收敛的充要条件是 a 满足: <u>-2<a<0</u> 。

5. 对矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 8 & 5 & -2\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 进行 LU 分解, 则单位下三角阵

L= $\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$, 上三角阵 U= $\begin{bmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{bmatrix}$ 。

6．设 $f(x)=x^3+2x^2-1$, 则以-2、-1、0、1 为插值节点的三次插值多项式

$L_3(x)=$ <u>x^3+2x^2-1</u> 。

7. 用分段线性插值函数 $S_1(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k$ 构造对数表 $y=f(x)=\log_{10}x$,

$x\in[10,100)$，则当 $x\in(x_k,x_{k+1})$ 时，误差 $R_{1,k}(x)=f(x)-S_1(x)=$

$\boldsymbol{\frac{1}{2\ln 10}\cdot\frac{-1}{\xi_k^2}(x-x_k)(x-x_{k+1}),\ \xi_k\in(x_k,x_{k+1})}$ ，要使此分段线性插值具有四位有效数字，步长 $h=\max|x_{k+1}-x_k|,(0\le k\le n-1)$ 应 $\le$ <u>0.9597</u> 。

8．数值求积公式 $\int_1^3 f(x)dx\approx\frac{1}{3}f(1)+\frac{4}{3}f(2)+\frac{1}{3}f(3)$ 的代数精度为 <u>3</u> 次，

求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx\frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$ 的代数精度为 <u>5</u> 次。

9．解常微分方程初值问题的梯形公式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f\left(x_n,y_n\right)+f\left(x_{n+1},y_{n+1}\right)\right]$具有__2__阶精度。

得分	
评卷人	

二、(10 分) 用 Newton(牛顿)迭代法求方程 $2x^3-5x-1=0$ 的根，写出迭代公式, 并求 x_0=1.5 附近的根, 要求 $\left|x_{k+1}-x_k\right|$<0.001。计算过程保留 4 位小数。

解：方程 $2x^3-5x-1=0$ 的牛顿迭代公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2x_k^3-5x_k-1}{6x_k^2-5}=\frac{4x_k^3+1}{6x_k^2-5}\qquad (6\text{ 分})$$

取初值 $x_0=1.5$，则：$x_1=\frac{4x_0^3+1}{6x_0^2-5}\approx 1.7059$　　（2 分）

$x_2\approx 1.6739,\quad x_3\approx 1.6730,\quad x_4\approx 1.6730$

因为 $\left|x_4-x_3\right|<0.001$

所以在 $x_0=1.5$ 附近的根为 1.6730.　　（2 分）

得分	
评卷人	

三、(10 分) 给定线性方程组：

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 5x_3 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

1. 写出求解此方程组的 Jacobi 迭代格式;

2. 写出求解此方程组的 Gauss –Seidel 迭代格式;

3. 说明以上迭代格式的收敛性。

解：方程组 Jacobi 迭代格式为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\boldsymbol{x}_2^{(k)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3^{(k)} + \frac{9}{10} \\ \boldsymbol{x}_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\boldsymbol{x}_1^{(k)} + \frac{1}{5}\boldsymbol{x}_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ \boldsymbol{x}_3^{(k+1)} = -\frac{3}{10}\boldsymbol{x}_1^{(k)} + \frac{1}{5}\boldsymbol{x}_2^{(k)} + \frac{4}{5} \end{cases} \qquad （3 分）$$

Gauss –Seidel 迭代格式为:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\boldsymbol{x}_2^{(k)} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3^{(k)} + \frac{9}{10} \\ \boldsymbol{x}_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\boldsymbol{x}_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}\boldsymbol{x}_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ \boldsymbol{x}_3^{(k+1)} = -\frac{3}{10}\boldsymbol{x}_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}\boldsymbol{x}_2^{(k+1)} + \frac{4}{5} \end{cases} \qquad （3 分）$$

由于方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -1 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$ 是严格对角占优阵，

故 Jacobi 和 Gauss –Seidel 迭代格式均收敛。　　　（4 分）

得分	
评卷人	

四、 (10 分) 用 Gauss 列选主元消去法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -2\,x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$ 。

解：方程组的矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$ （1 分）

对增广矩阵进行行初等变换为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ -2 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2+\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+\frac{1}{3}r_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & \vdots & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

（7 分）

所以 $x_3 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_1 = 1$ （2 分）

得分	
评卷人	

五、对函数 $y = f(x)$, 已知 $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 8$.

1. (8 分) 试求过这 3 点的 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$, 并写出余项表达式;

2. (7 分) 如果还已知 $x = 1$ 上的导数值 $f'(1) = 3$, 求插值多项式。

解：1. 二次插值多项式

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} f(0) + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} f(1) + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} f(2)$$

$$= -2x(x-2) + 4x(x-1) = 2x^2$$ （4 分）

余项：$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!} x(x-1)(x-2)$$

$$= \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} x(x-1)(x-2), \xi \in (0, 2)$$

（3 分）

2.设三次插值多项式 $L_3(x)$ 满足条件

$$L_3(0)=0, L_3(1)=2, L_3(2)=8, L_3{}'(1)=3$$

则 $L_3(x)=2x^2+ax(x-1)(x-2)$

由 $L_3{}'(1)=3$ 得： $a=1$

$$L_3(x)=2x^2+x(x-1)(x-2)=x^3-x^2+2x$$

（7 分）

得分	
评卷人	

六、 **1**．(4 分) 确定下列求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指出所构造公式的代数精度次数:

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \left[A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f(3)\right]$$ 。

2．(6 分) 用复化(合)梯形公式计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ 的近似值，取步长 $h = 0.2$。

解：1. 设其代数精度至少为 3 次，取 $f(x)$分别为 $1,x,x^2$ 令等式精确成

立得：$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 3 \\ A_1 + 3A_2 = \frac{9}{2} \\ A_1 + 9A_2 = 9 \end{cases}$ 解得：$A_0 = 0, A_1 = \frac{9}{4}, A_2 = \frac{3}{4}$

对于代入求积公式，等式不成立，故代数精度为 3 次。 （4 分）

2．$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(0.2) + 2f(0.4) + 2f(0.6) + 2f(0.8) + f(1)\right]$$

$$= 0.1\left[1 + 2\times\frac{5}{6} + 2\times\frac{1}{1.4} + 2\times\frac{1}{1.6} + 2\times\frac{1}{1.8} + 0.5\right] = 0.6956$$

（6 分）

得分	
评卷人	

七、 **1.** (10 分) 用改进 Euler(欧拉)法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = x + 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ ，取步长 $h = 0.1$, 计算到 $y(0.2)$。

2. (5 分) 确定解 $y' = f(x, y)$ 的公式 1

$y_{i+1} = y_i + h(A y_i' + B y_{i+1}' + C h y_i'')$

中的待定系数 A、B、C, 使公式具有 3 阶精度。

解：1. 由改进 Euler 法得：

$$\begin{cases} \overline{y}_{k+1} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}\left[f\left(x_{k+1}, \overline{y}_{k+1}\right) + f\left(x_k, y_k\right)\right] \end{cases}$$ （4 分）

$$\overline{y}(0.1) = y(0) + 0.1 \times [0 + 2y(0)] = 1.2$$

$$y(0.1) = y(0) + 0.05 \times [0.1 + 2\overline{y}(0.1) + 0 + 2y(0)] = 1.225$$ （3 分）

$$\overline{y}(0.2) = y(0.1) + 0.1 \times [0.1 + 2y(0.1)] = 1.485$$

$$y(0.2) = y(0.1) + 0.05 \times [0.2 + 2\overline{y}(0.2) + 0.1 + 2y(0.1)] = 1.511$$ （3 分）

2. 假定 $y_i = y(x_i),\ y'_{i+1} = y'(x_{i+1})$

$$\because y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

（1 分）

$$
\begin{aligned}
\therefore y\left(x_{i+1}\right)-y_{i+1}= & y\left(x_i\right)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_i)+O(h^5) \\
& -h\left[Ay'(x_i)+B(y'(x_i)+hy''(x_i)+\frac{h^2}{2}y'''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}(x_i)+O(h^4))\right] \\
& -Ch^2y''(x_i)-y(x_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= h(1-A-B)y'(x_i)+h^2(\frac{1}{2}-B-C)y''(x_i)+h^3(\frac{1}{6}-\frac{B}{2})y'''(x_i) \\
&\quad +h^4(\frac{1}{4!}-\frac{B}{3!})y^{(4)}(x_i)+O(h^5)
\end{aligned}
$$

（ 2

分）

欲使公式具有 3 阶精度，则:

$$
\begin{cases}
1-A-B=0 \\
\frac{1}{2}-B-C=0 \\
\frac{1}{6}-\frac{B}{2}=0
\end{cases}
\qquad \therefore
\begin{cases}
A=\frac{2}{3} \\
B=\frac{1}{3} \\
C=\frac{1}{6}
\end{cases}
$$

此时 $y\left(x_{i+1}\right)-y_{i+1}=-\frac{1}{72}h^4y^{(4)}(x_i)+O(h^5)=O(h^4)$

故此公式具有 3 阶精度。 （2 分）