1.3.1 、<u>误差的基本概念</u>

(1) 误差与误差限

x 是精确值，x^* 是它的一个近似值，称

$$e = x - x^*$$

是近似值 x^* 的绝对误差。简称误差。

误差是有量纲的，可正可负。

误差是无法计算的，但可以估计出它的一个上界。即

$$\left|x - x^*\right| \square \varepsilon \quad ,$$

称 ε 是近似值 x^* 的误差限，即 $x^* - \varepsilon \square x \square x^* + \varepsilon$ 。

(2) 相对误差与相对误差限

称 $\frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x}$ 为近似值 x^* 的相对误差，记作 e_r 。

相对误差是个相对数，是无量纲的，也可正可负。

相对误差的估计 $\left|e_r\right| \square \varepsilon_r$，称 ε_r 为相对误差限，即

$$\frac{\left|x^* - x\right|}{|x|} \square \frac{\varepsilon}{|x|} = \varepsilon_r \text{ 。}$$

实际中，x 是未知的，可用 x^* 来代替 $e_r = \frac{e}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$ 。

当 ε_r 较小时，因两者的差为：

$$\left|\frac{\varepsilon}{|x|} - \frac{\varepsilon}{|x^*|}\right| = \frac{\varepsilon\left(\left|x^*\right| - |x|\right)}{\left|xx^*\right|} \square \frac{\varepsilon^2}{\left|xx^*\right|} = \left(\frac{\varepsilon}{\left|x^*\right|}\right)^2 \Big/ \left|\frac{x^*}{x}\right| = O(\varepsilon_r^2)$$

是 ε_r 的高阶无穷小，可忽略不计。

(3) 有效数字

定义：如果近似值 x^* 的误差限是 $\frac{1}{2}\times10^{-n}$ （某一数位的半个单位），

则称 x^* 准确到小数点后 n 位，并从第一个非零的数字到这一位的所有数字均为有效数字。

如： π=3.1415926535

3.14 有三位有效数字，误差限 ε=0.005;

3.1416 有五位有效数字，误差限为 0.00005。

如： $x^* = 0.003400 \square \frac{1}{2}\times10^{-5}$

近似值准确到小数点后五位，有三位有效数字。

(4) 有效数字与误差限的关系：

x^* 有 n 位有效数字，标准形式为 $x^* = \square\ a_1 \square a_2 \cdots a_n \times 10^m$ ，

则有 $|x - x^*| \square \frac{1}{2}\times10^{m-n+1}$ 。

有效位数越多，（绝对）误差限越小。

a) 有效数字与相对误差限的关系：

定理 1：

$x^* = \square\ a_{1\square}a_2 \cdots a_n \square 10^m$ ，若 x^* 有 n 位有效数字，

则其相对误差限为

$$\varepsilon_r \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)};$$

反之，若 x^* 的相对误差限为

$$\varepsilon_r \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)};$$

则 x^* 至少具有n位有效数字。

证：因 $a_1 \times 10^m \le \left|x^*\right| \le (a_1+1) \times 10^m$ ，故当 x^* 有 n位有效数字时，

$$\varepsilon_r = \frac{\left|x - x^*\right|}{\left|x^*\right|} \le \frac{0.5 \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} \quad 。$$

反之，由

$$\left|x - x^*\right| = \left|x^*\right| \varepsilon_r \le (a_1+1) \times 10^m \times \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1} = 0.5 \times 10^{m-n+1}$$

因此， x^* 至少具有n位有效数字。 证毕

定理说明，有效位数越多相对误差限越小。

实例

例 1 设 x^* = π=3.1415926…

近似值 x=3.14 = 0.314×101，即 m=1，它的绝对误差是 − 0.001 592 6⋯，

有$\left|x-x^*\right|=0.001\,592\,6\cdots\leq 0.5\times 10^{1-3}$

即 l=3，故 x=3.14 有 3位有效数字。 x=3.14 准确到小数点后第2位。

又近似值 x=3.1416，它的绝对误差是 0.0000074⋯，有

$$\left|x-x^*\right|=0.0000074\cdots\leq 0.5\times 10^{1-5}$$

即 m=1,l = 5， x=3.1416 有 5位有效数字。

而近似值 x=3.1415，它的绝对误差是 0.0000926⋯，有

$$\left|x-x^*\right|=0.0000926\cdots\leq 0.5\times 10^{1-4}$$

即 m=1,l = 4， x=3.1415 有 4位有效数字。

这就是说某数有 s位数，若末位数字是四舍五入得到的，那么该数有 s位有效数字；

例 2 指出下列各数具有几位有效数字，及其绝对误差限和相对误差限：

2.000 4 − 0.002 00 9 000 9 000.00

解 因为 x1=2.000 4 = 0.200 04×101， 它的绝对误差限 0.000 05=0.5×10 1—5，即 m=1,l=5，故 x=2.000 4有 5位有效数字 . a1=2，相对误差限$\varepsilon_r=\dfrac{1}{2\times \boldsymbol{a}_1}\times 10^{1-5}=0.000\,025$

x2= − 0.002 00，绝对误差限 0.000 005，因为 m= − 2， l=3， x2= − 0.002 00 有 3位有效数字 . a1=2，相对误差限 r= $\dfrac{1}{2\times 2}\times 10^{1-3}$ =0.002 5

x3=9 000，绝对误差限为 0.5×100，因为 m=4, l=4, x3=9 000 有 4位有效数字， a=9，相对误差限 r = $\dfrac{1}{2\times 9}10^{1-4}$ = 0.000 056 x4=9 000.00，绝对误差限 0.005，因为 m=4， l=6， x4=9 000.00 有 6位有效数字，相对误差限为 r=εr = $\frac{1}{2\times 9}10^{1-6}$ = 0.000 000 56

由 x3 与 x4 可以看到小数点之后的 0，不是可有可无的，它是有实际意义的。

例 3 ln2=0.69314718…，精确到 10 – 3的近似值是多少?

解 精确到 10 – 3 = 0.001，即绝对误差限是 = 0.0005，故至少要保留小数点后三位才可以。 ln2=0.693

§1.3.2 数值算法

例 ：求解微分方程 ：

$$\begin{cases} y' = 2x + 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

其解: $y = x^2 + 3x$

将其变成数值问题，即将其“离散化”

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n, x_i = x_{i-1} + h$$

$$y(x_1), y(x_2), \cdots, y(x_n)$$

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

“离散化”是将非数值问题的数学模型化为数值问题的主要方法，这也是计算方法的任务之一。

[计算方法的主要任务]

1. 将计算机上不能执行的运算化为在计算机上可执行的运算;

2. 针对所求解的数值问题，研究在计算机上可执行的且有效的计算公式;

3. 因为可能采用了近似等价运算 ，故要进行误差分析，即数值问题的性态及数值 方法的稳定性。