数学建模

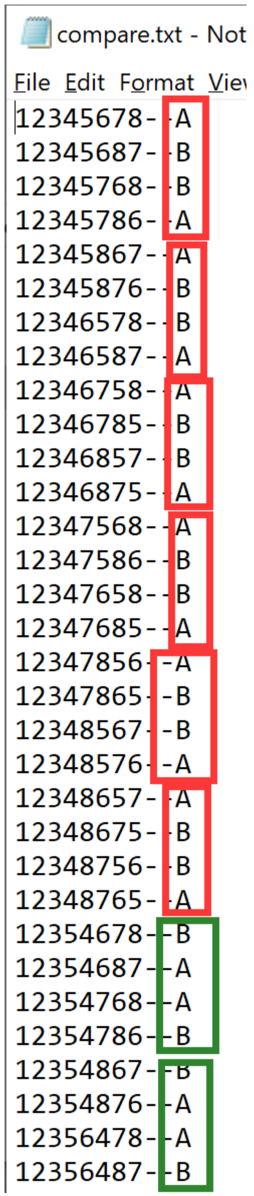
上节课实验环节

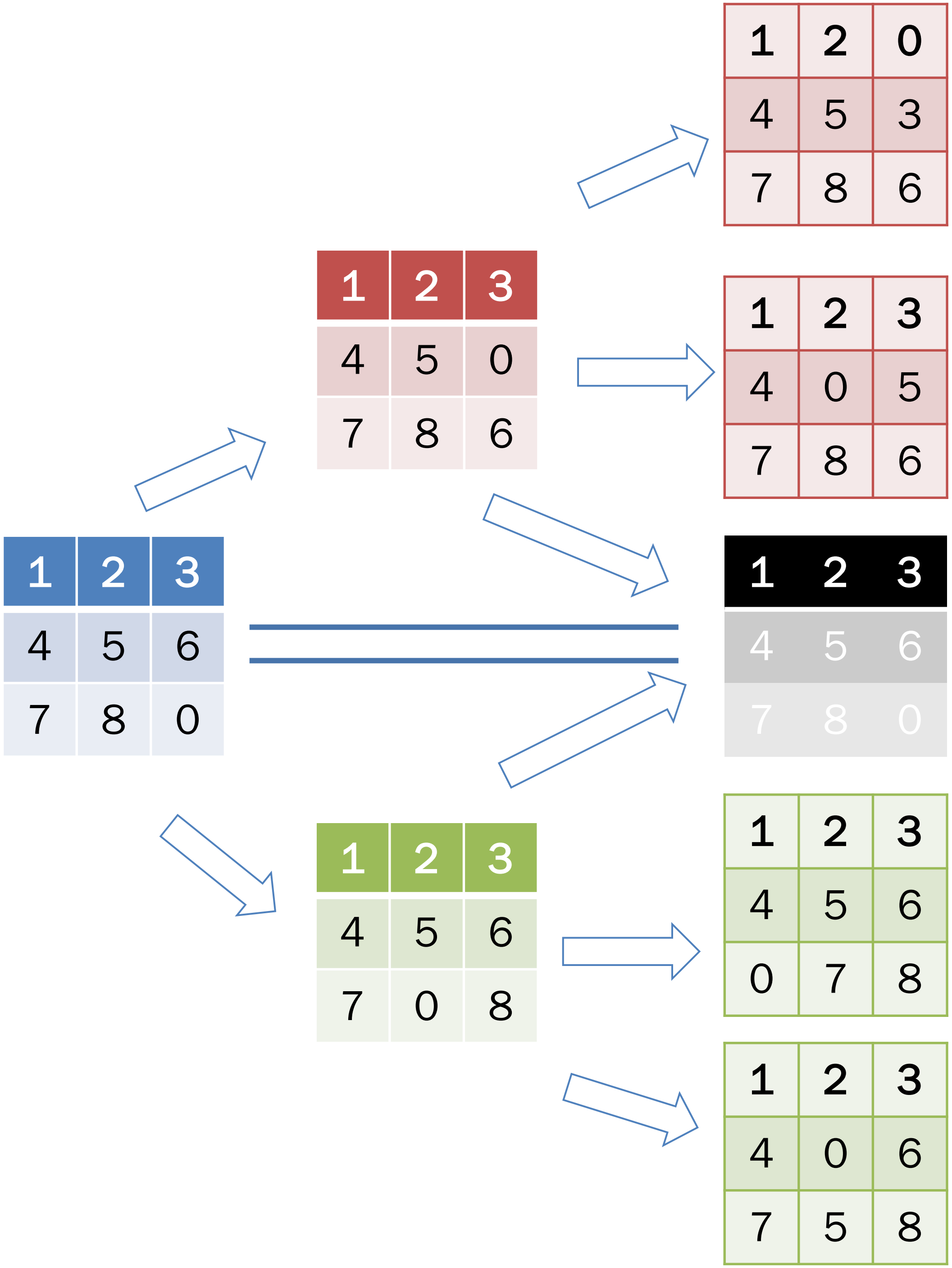
- **用遍历法编程求“3x3数字华容道”中，某一种排列（空档在右下角），通过合法移动，最多能变换成多少种不同排列（保持空档在右下角）。**

错序对数奇偶性判断的问题

- 错序对数的奇偶性仅仅是必要条件，充分性并没有严格证明。

- 可以通过遍历，启发充分性的证明思路


compare.txt - Not
File Edit Format View
12345678--A
12345687--B
12345768--B
12345786--A
12345867--A
12345876--B
12346578--B
12346587--A
12346758--A
12346785--B
12346857--B
12346875--A
12347568--A
12347586--B
12347658--B
12347685--A
12347856--A
12347865--B
12348567--B
12348576--A
12348657--A
12348675--B
12348756--B
12348765--A
12354678--B
12354687--A
12354768--A
12354786--B
12354867--B
12354876--A
12356478--A
12356487--B



Algorithm:

```
While children is not empty:
   for every c in children:
      children_of_c = move(c)
      for cc in children_of_c:
          if cc in exist family:
               continue
          else
               add cc to family
               add cc to grandchildren
        end for
   end for
   children = grandchildren
   grandchildren = empty list
End while
```

效率问题

Profiler

File Edit Debug Window Help

Start Profiling Run this code:

Profile Summary

Generated 02-Apr-2020 00:18:04 using performance time.

Function Name	Calls	Total Time	Self Time*	Total Time Plot (dark band = self time)
digital_huarong_road	1	23.703 s	22.781 s	
hash_key	564481	0.589 s	0.589 s	
find_zero	181440	0.333 s	0.333 s	

Self time is the time spent in a function excluding the time spent in its child functions. Self time also includes overhead resulting from the process of profiling.

Profiler

File Edit Debug Window Help

Start Profiling Run this code:

Profile Summary

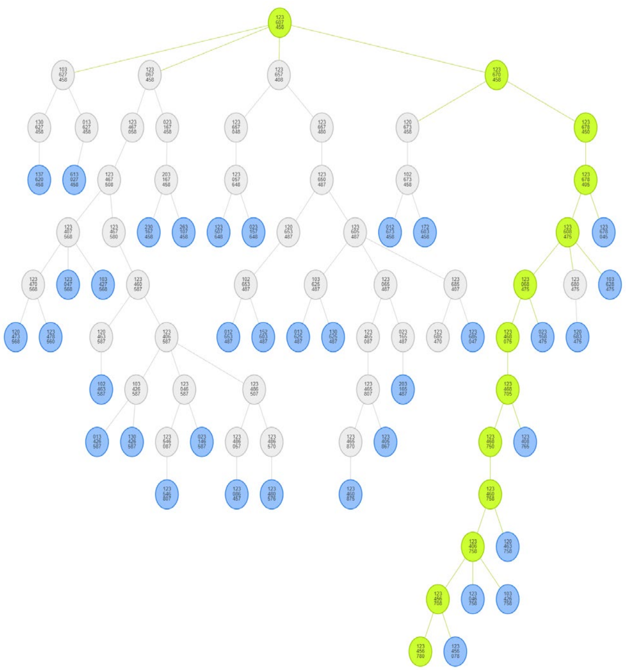
Generated 02-Apr-2020 00:26:44 using performance time.

Function Name	Calls	Total Time	Self Time*	Total Time Plot (dark band = self time)
digital_huarong_road	1	49.850 s	23.909 s	
hash_key	564481	25.525 s	10.759 s	
str2num	564481	14.766 s	5.898 s	
str2num>protected_conversion	564481	8.869 s	8.869 s	
find_zero	181440	0.416 s	0.416 s	

Self time is the time spent in a function excluding the time spent in its child functions. Self time also includes overhead resulting from the process of profiling.

遍历不适用更高阶运算

- 内存
- 运算时间
- 16!/9! = 57M
- 效率改善：
  - 用hash代替集合存在判断
  - 参考A*算法，有序搜索
    - https://deniz.co/8-puzzle-solver/



微分方程模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程.
- 分析对象特征的变化规律.
- 预报对象特征的未来性态.
- 研究控制对象特征的手段.

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数.
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设.
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程.

微分方程模型

- 传染病模型
- 人口预测和控制
- 经济增长模型
- Matlab微分方程工具包

传染病模型

传染病模型

- 1. 问题背景
- 2. 四种模型
- 3. 思考与讨论

1. 传染病模型

背景与问题

传染病的极大危害(艾滋病、SARS、Covid-19…)

- 描述传染病的传播过程.
- 分析受感染人数的变化规律.
- 预报传染病高潮到来的时刻.
- 预防传染病蔓延的手段.

基本方法

不是从医学角度分析各种传染病的特殊机理,而是按照传播过程的一般规律建立数学模型.

模型1

已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

· 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt}=\lambda i, \quad i(0)=i_0$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t)=i_0 e^{\lambda t}}$$

$$\Rightarrow t\to\infty \Rightarrow i\to\infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加 ➡ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2 (SI)

区分已感染者(病人，已感染者，Infective)

未感染者(健康人，易感染者，Susceptible)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$.

2）每个病人每天有效接触人数为λ，且使接触的健康人致病.

SI 模型

λ ~ 日接触率

建模

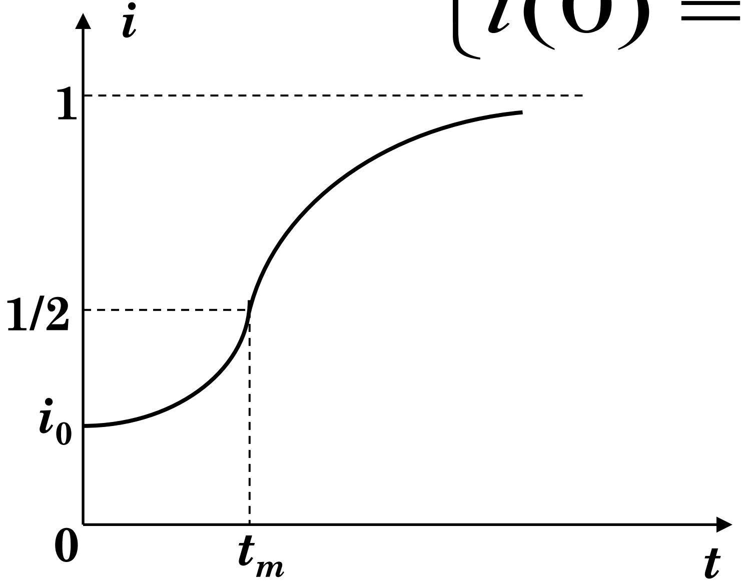
$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logistic 模型}$$



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

$$t \to \infty \Rightarrow i \to 1 \quad ?$$

病人可以治愈！

模型3 (SIS模型)

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染.

SIS 模型

增加假设 3）病人每天治愈的比例为μ

μ ~日治愈率

建模 $N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i=-\lambda i[i-(1-\dfrac{1}{\sigma})] \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$\sigma=\lambda/\mu$

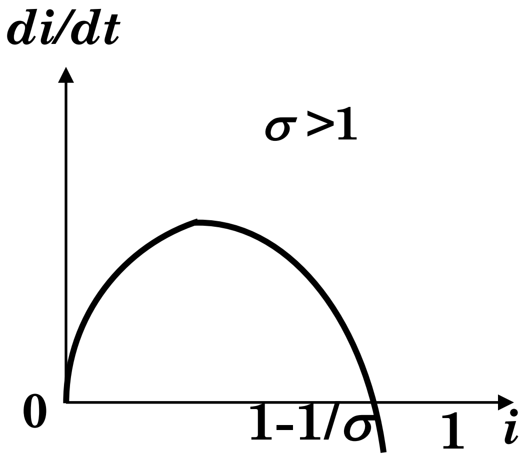
λ ~ 日接触率

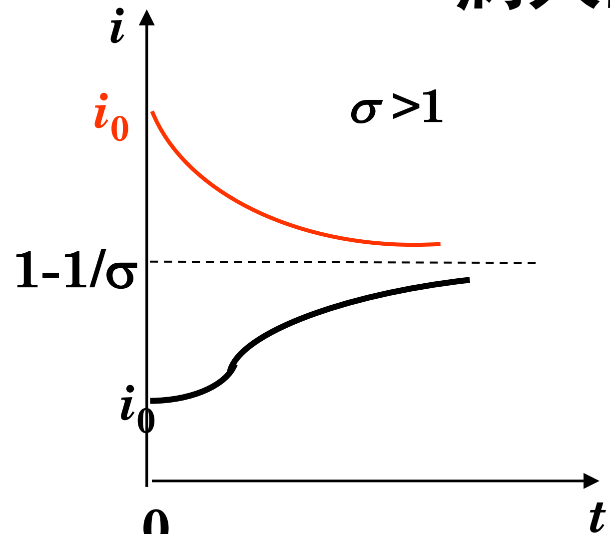
$1/\mu$ ~感染期

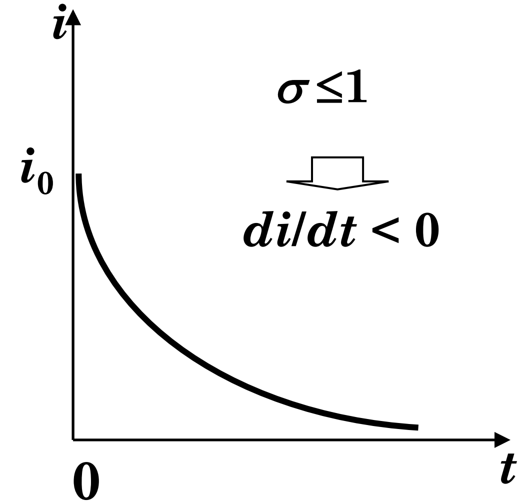
σ ~ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**.

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$

接触数σ (感染期内每个病人的有效接触人数)







$$i(\infty) = \begin{cases} 1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \le 1 \end{cases}$$

$\sigma > 1$, $i_0 < 1-1/\sigma$

⇨ $i(t)$按S形曲线增长

$\sigma \le 1$ ⇨ $i(t)$单调下降

感染期内有效接触使健康者感染的人数不超过原有的病人数

接触数σ=1 ~ 阈值

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者（Removed）.

SIR模型

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$.

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ, 接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程.

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\begin{cases}\dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i\\[2mm] \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si\\[2mm] i(0)=i_0,\ s(0)=s_0\end{cases}$$

无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

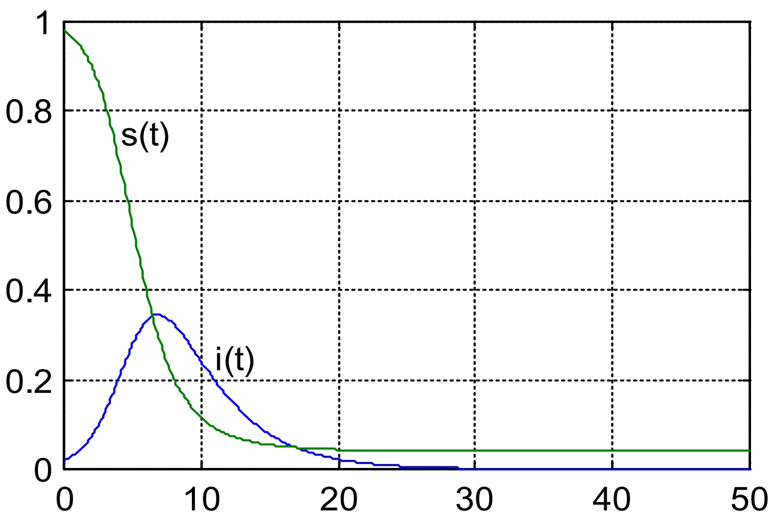
先做数值计算，再在相平面上研究解析解性质

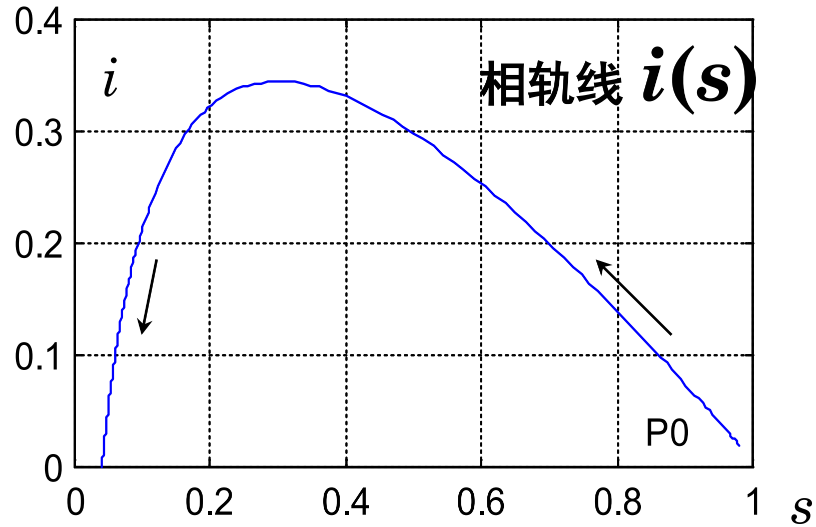
$i_0+s_0\approx 1$ **(通常$r(0)=r_0$很小)**

SIR模型的数值解

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i, \, i(0) = i_0 \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si, \ \ s(0) = s_0 \end{cases}$$

设λ=1, μ=0.3, i_0=0.02, s_0=0.98, 用MATLAB计算作图$i(t)$, $s(t)$及$i(s)$





$i(t)$从初值增长到最大；$t\to\infty$, $i\to 0$.

$s(t)$单调减；$t\to\infty$, $s\to 0.04$.

SIR模型的相轨线分析

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

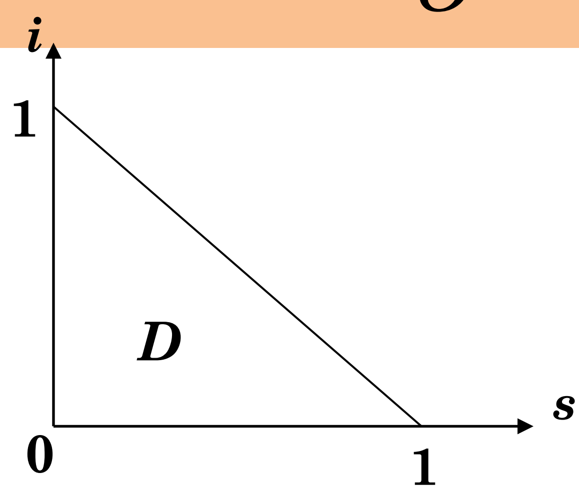
$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i)\,|\, s \geq 0,\ i \geq 0,\ s + i \leq 1\}$$



在D内作相轨线$i(s)$

的图形，进行分析

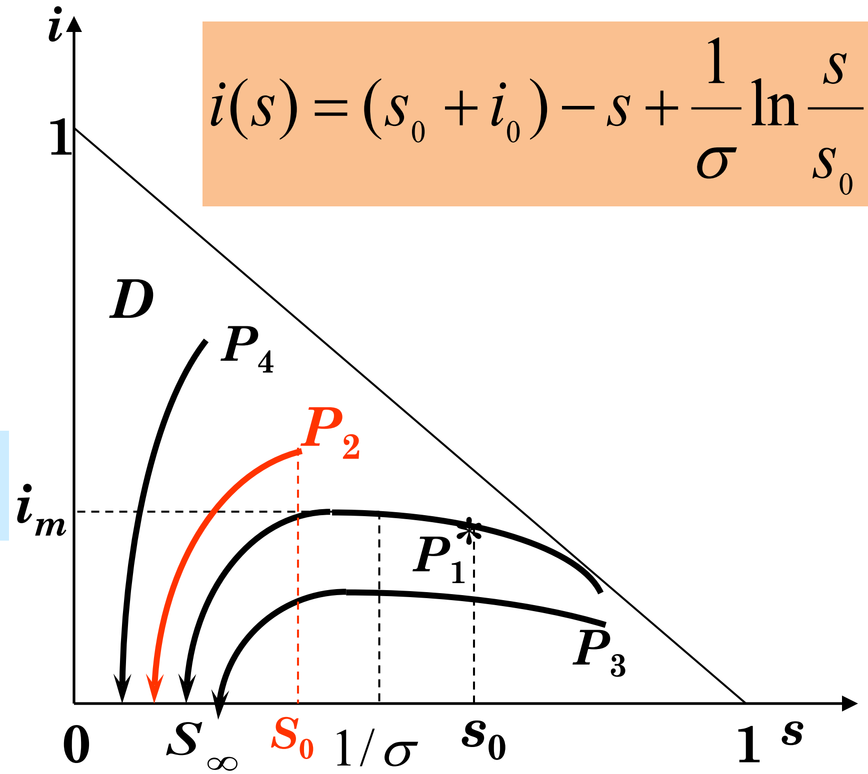
相轨线 $i(s)$及其分析

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s = 1/\sigma,\ i = i_m \quad t \to \infty,\ i \to 0$$

s_∞满足 $s_0 + i_0 - s_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0} = 0$

P_1: $s_0 > 1/\sigma \to$ $i(t)$先升后降至0 ⇨ **传染病蔓延**

P_2: $s_0 < 1/\sigma \to$ $i(t)$单调降至0 ⇨ **传染病不蔓延**

$1/\sigma$~阈值

预防传染病蔓延的手段

SIR模型

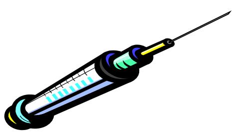
传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- **提高阈值 $1/\sigma$** ⇨ **降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$** ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ (日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平↑+隔离举措

μ (日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平↑

- **降低 s_0** ⇨ **提高 r_0** ⇨ 群体免疫



$$s_0+i_0+r_0=1$$

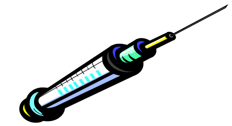
σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0 ⇨

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

预防传染病蔓延的手段



· 降低日接触率 λ · 提高日治愈率 μ · 提高移出比例 r_0

以最终未感染比例 s_∞ 和病人比例最大值 i_m 为度量指标.

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_∞
1	0.3	0.3	0.98	0.02	0.0398	0.3449
0.6	0.3	0.5	0.98	0.02	0.1965	0.1635
0.5	0.5	1.0	0.98	0.02	0.8122	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.98	0.02	0.9172	0.0200
1	0.3	0.3	0.70	0.02	0.0840	0.1685
0.6	0.3	0.5	0.70	0.02	0.3056	0.0518
0.5	0.5	1.0	0.70	0.02	0.6528	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.70	0.02	0.6755	0.0200

$\lambda\downarrow, \mu\uparrow \Rightarrow s_\infty\uparrow, i_m\downarrow$ $\quad$ $s_0\downarrow(r_0\uparrow) \Rightarrow s_\infty\uparrow, i_m\downarrow$

被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

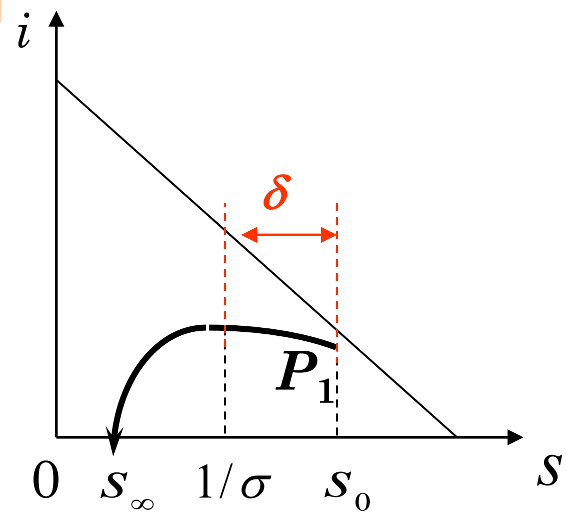
$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \approx 0$$

$x << s_0$

$$x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \approx 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$



$s_0 - 1/\sigma = \delta$

$$x \approx 2\delta$$

δ 小, $s_0\sigma \approx 1$

提高阈值$1/\sigma$ ⇒ 降低被传染人数比例 x

关于R0 Basic reproduction number

$\sigma\,(=\lambda/\mu)$

Disease	Transmission	R_0	HIT[a]
Measles	Aerosol	12–18[29][7]	92–94%
Chickenpox (varicella)	Aerosol	10–12[30]	90–92%
Mumps	Respiratory droplets	10–12[31]	90–92%
Rubella	Respiratory droplets	6–7[b]	83–86%
Polio	Fecal–oral route	5–7[b]	80–86%
Pertussis	Respiratory droplets	5.5[36]	82%
COVID-19 (Delta variant)	Respiratory droplets and aerosol	5.1[37]	80%
Smallpox	Respiratory droplets	3.5–6.0[38]	71–83%
COVID-19 (Alpha variant)	Respiratory droplets and aerosol	4–5[39][*medical citation needed*]	75–80%
HIV/AIDS	Body fluids	2–5[40]	50–80%
COVID-19 (ancestral strain)	Respiratory droplets and aerosol[41]	2.9 (2.4–3.4)[42]	65% (58–71%)
SARS	Respiratory droplets	2–4[43]	50–75%
Diphtheria	Saliva	2.6 (1.7–4.3)[44]	62% (41–77%)
Common cold	Respiratory droplets	2–3[45][*medical citation needed*]	50–67%
Influenza (1918 pandemic strain)	Respiratory droplets	2[46]	50%
Ebola (2014 outbreak)	Body fluids	1.8 (1.4–1.8)[47]	44% (31–44%)
Influenza (2009 pandemic strain)	Respiratory droplets	1.6 (1.3–2.0)[2]	37% (25–51%)
Influenza (seasonal strains)	Respiratory droplets	1.3 (1.2–1.4)[48]	23% (17–29%)
Andes hantavirus	Respiratory droplets and body fluids	1.2 (0.8–1.6)[49]	16% (0–36%)[c]
Nipah virus	Body fluids	0.5[50]	0%[c]
MERS	Respiratory droplets	0.5 (0.3–0.8)[51]	0%[c]

Values of R_0 and herd immunity thresholds (HITs) for variants of SARS-CoV-2

Disease	Transmission	R_0	HIT[a]
COVID-19 (Omicron variant)	Respiratory droplets and aerosol	9.5[62]	89%
COVID-19 (Delta variant)	Respiratory droplets and aerosol	5.1[63]	80%
COVID-19 (Alpha variant)	Respiratory droplets and aerosol	4–5[64][*medical citation needed*]	75–80%
COVID-19 (ancestral strain)	Respiratory droplets and aerosol[50]	2.9 (2.4–3.4)[51]	65% (58–71%)

模型验证

- 上世纪初在印度孟买发生的一次瘟疫中几乎所有病人都死亡了。死亡相当于移出传染系统,有关部门记录了每天移出者的人数
- 即有了dr/dt实际数据
- Kermack等人用这组数据对SIR模型作了验证：

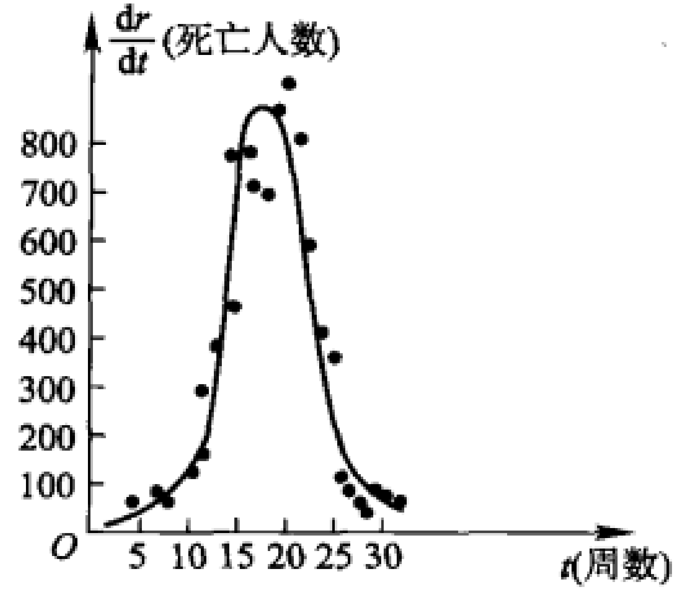
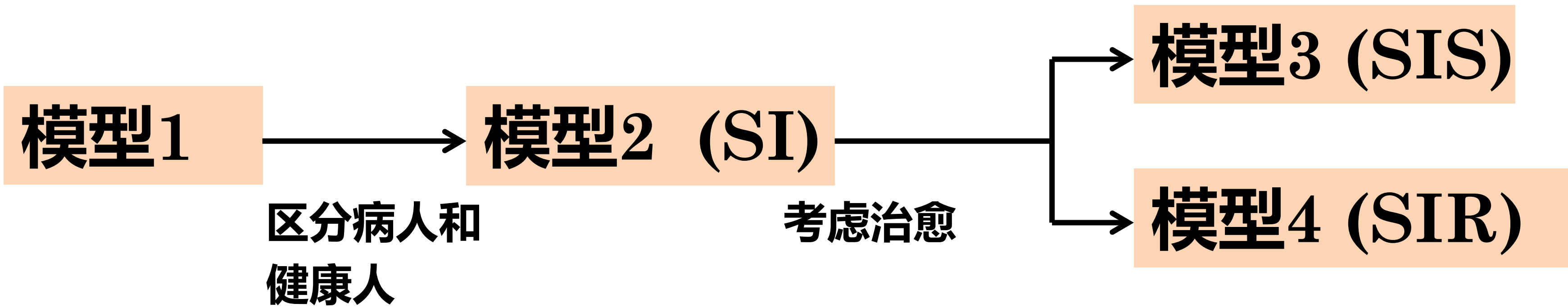


图 10 SIR 模型的理论曲线
与实际数据

传染病模型



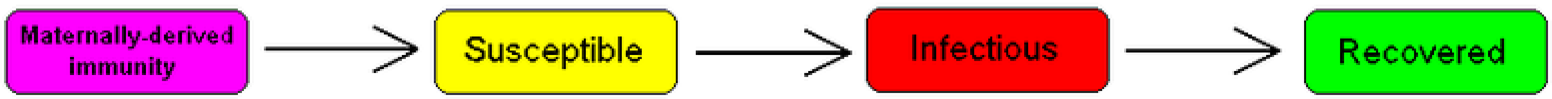
模型3, 4: 描述传播过程, 分析变化规律,

预报高潮时刻, 预防蔓延手段.

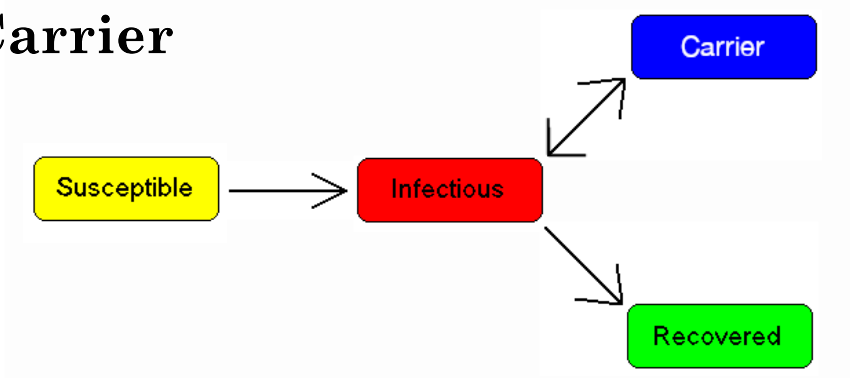
模型4: 数值计算与理论分析相结合.

衍生模型

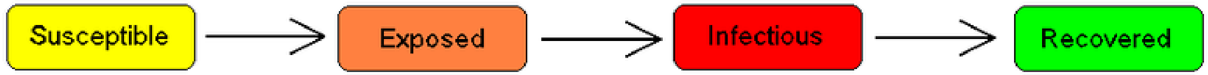
- MSIR



- Carrier



- SEIR
  - 使用较广泛



扩展思考

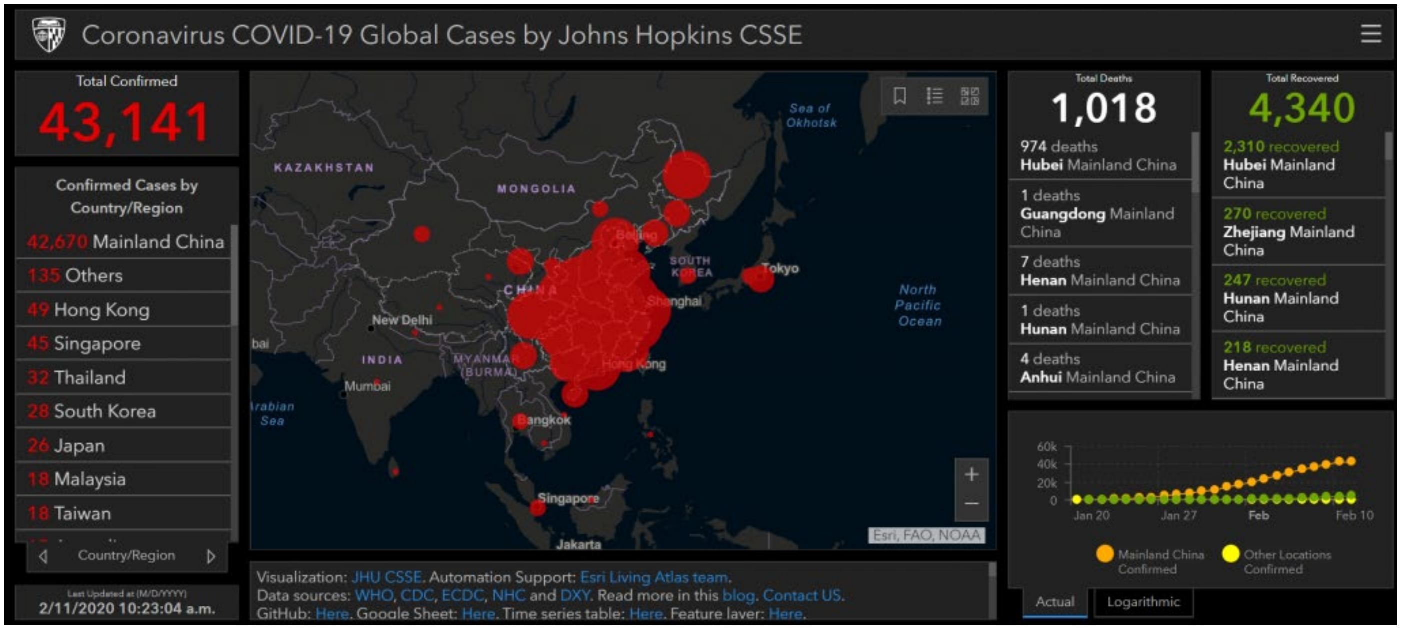
- 1. 模型验证
  - 无法统计的数据
  - 无法观测的数据
- 2. 空间动力学建模
  - 人员移动性建模
  - 交通流量引入
- 3. 防控手段
  - 病患隔离
  - 全员隔离（减少移动性）
- 4. 差异性的传染特性
  - 地域差异
    - 居住密度、医疗水平、交通水平、措施差异
  - 人口年龄分布差异
- 5. 衍生影响
  - 经济
  - 社会活动

更多因素的建模

- 参考例：SARS传播建模（课本P180-P187）
  - 参数时变的SIR模型
  - 引入不可控带菌者和疑似已感染者的模型
  - 引入隔离模型
- 精彩可视化分享
  - Simulating an Epidemic
  - https://prajwalsouza.github.io/Experiments/Epidemic-Simulation.html

关于Covid-19的开放数据

- **Johns Hopkins CSSE**
- https://systems.jhu.edu/research/public-health/ncov/



- **原始数据**
  - https://github.com/CSSEGISandData/COVID-19

人口预测与控制

人口预测与控制

- 1. 背景
- 2. 指数增长模型
- 3. 阻滞增长模型
- 4. 模型的参数估计、检验和预报
- 5. 考虑年龄结构和生育模式的人口模型

1. 问题背景

背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995	2000
人口(亿)	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.0	13.0

研究人口变化规律　　**建立人口数学模型**

做出较准确的预报　　**制定科学合理的发展策略**

2. 指数模型

今年人口 x_0, 年增长率 r

k年后人口 $x_k = x_0(1+r)^k$

指数增长模型——马尔萨斯1798年提出

基本假设：人口(相对)增长率 r 是常数

$x(t)$ ~时刻t的人口

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{x(t)} = r\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

与常用公式的一致

$$x(t) = x_0(e^r)^t \approx x_0(1+r)^t$$

随着时间增加，人口按指数规律无限增长.

指数增长模型的应用及局限性

- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合.
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代.
- 可用于短期人口增长预测.
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律.
- 不能预测较长期的人口增长过程.

19世纪后人口数据 → 人口增长率r不是常数(逐渐下降)

3. 阻滞增长模型——Logistic模型

人口增长到一定数量后，增长率下降的原因：

资源、环境等因素对人口增长的阻滞作用，

且阻滞作用随人口数量增加而变大 $\Rightarrow$ r**是**x**的减函数**

假设 $r(x) = r - sx \quad (r, s > 0)$ r**~固有增长率(**x**很小时)**

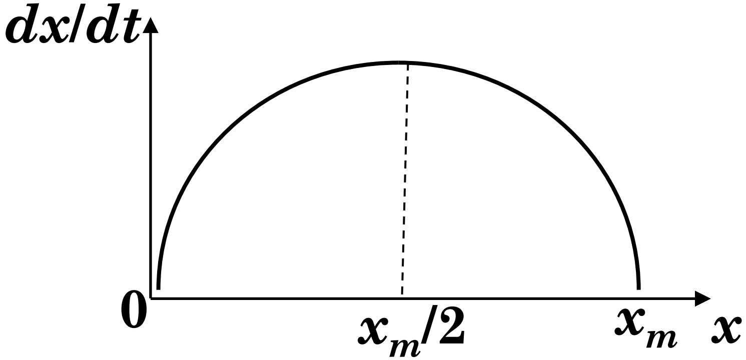
x_m**~人口容量（资源、环境能容纳的最大数量）**

$$\Rightarrow r(x_m) = 0 \Rightarrow s = \frac{r}{x_m} \qquad \boxed{r(x) = r(1 - \frac{x}{x_m})}$$

阻滞增长模型(Logistic模型)

$$r(x) = r(1 - \frac{x}{x_m})$$

指数增长模型 $\frac{dx}{dt} = rx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = r(x)x = rx(1 - \frac{x}{x_m})$



$$x(t) = \frac{x_m}{1 + (\frac{x_m}{x_0} - 1)e^{-rt}}$$

Logistic 模型的应用

- 种群数量模型 (鱼塘中的鱼群, 森林中的树木).
- 经济领域中的增长规律(耐用消费品的售量).

4. 模型的参数估计、检验和预报

参数估计 用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, x_m .

指数增长模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$ $y = \ln x,\ a = \ln x_0$ ⇨ $y = rt + a$

阻滞增长模型 $\dfrac{dx}{dt} = rx(1 - \dfrac{x}{x_m})$ $y = \dfrac{dx/dt}{x} \approx \dfrac{\Delta x}{x \Delta t},\ s = \dfrac{r}{x_m}$

⇨ $y = r - sx$ 由统计数据用**线性最小二乘法**作参数估计

例：美国人口数据(百万)

t	1860	1870	1880	……	1960	1970	1980	1990	2000
x	31.4	38.6	50.2	……	179.3	204.0	226.5	251.4	281.4

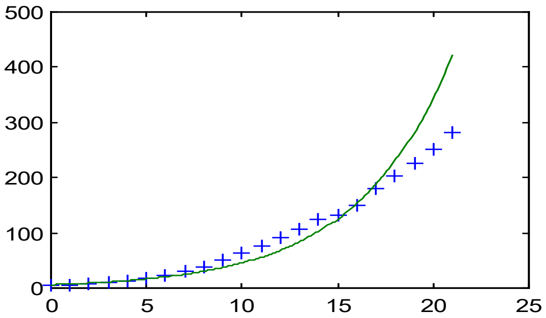
4. 模型的参数估计、检验和预报

指数增长模型 $r=0.2022/10$年，$x_0=6.0450$

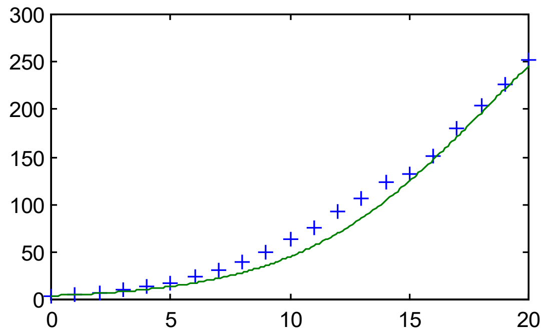
阻滞增长模型 $r=0.2557/10$年，$x_m=392.0886$

年	实际人口	计算人口(指数增长模型)	计算人口(阻滞增长模型)
1790	3.9	6.0	3.9
1800	5.3	7.4	5.0
…	…	…	…
1960	179.3	188.0	171.3
1970	204.0	230.1	196.2
1980	226.5	281.7	221.2
1990	251.4	344.8	245.3
2000		422.1	

指数增长模型



阻滞增长模型



4. 模型的参数估计、检验和预报

模型检验

- 为做模型检验在参数估计时未用2000年实际数据

用模型计算2000年美国人口

$$x(2000) = x(1990) + \Delta x = x(1990) + rx(1990)[1 - x(1990)/x_m] = \mathbf{274.5}$$

与实际数据(2000年281.4)比较

误差不到3%

模型应用

预报美国2010年的人口

加入2000年人口数据后重新估计模型参数

⇨ $r=0.2490,\ x_m=434.0$ ⇨ $x(2010)=306.0$

5. 考虑年龄结构和生育模式的人口模型

- 年龄分布对于人口预测的重要性.
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移.

人口发展方程

$F(r,t)$~人口分布函数 (年龄 <r 的人口)

$r_m(\to\infty)$~ 最高年龄　$N(t)$~人口总数

$p(r,t)$~人口密度函数

$$F(0,t)=0,\ F(r_m,t)=N(t)$$

$$p(r,t)=\frac{\partial F}{\partial r},\qquad F(r,t)=\int_0^r p(s,t)ds$$

人口发展方程

$\mu(r,t) \sim$ 死亡率

t,年龄$[r,r+dr]$人数 $-$ $t+dt$,年龄$[r+dr_1, r+dr_1+dr]$人数 $=$ $(t,t+dt)$内死亡人数

$dt = dr_1$

$$p(r,t)dr - p(r+dr_1,t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$[p(r+dr_1,t+dt)-p(r,t+dt)]+[p(r,t+dt)-p(r,t)]$$

$$=-\mu(r,t)p(r,t)dt, \qquad dt = dr_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t)$$

一阶偏微分方程

人口发展方程

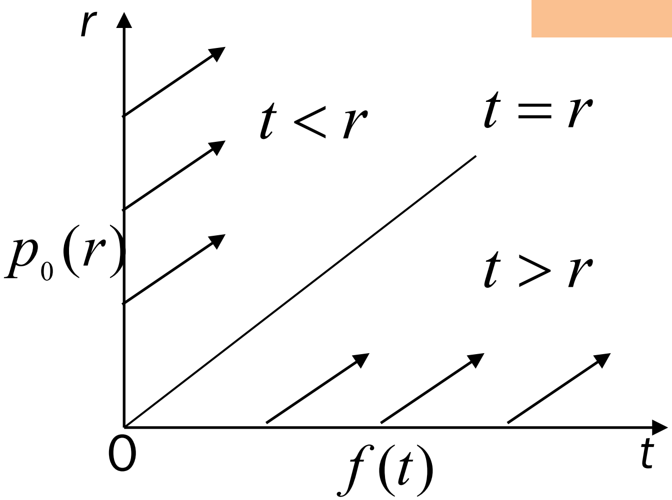
$$\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t)$$

定解条件

$$p(r,0)=p_0(r),\ r\ge 0$$ **已知函数(人口调查)**

$$p(0,t)=f(t),\ \ t\ge 0$$ **生育率(控制手段)**

$$\mu(r,t)=\mu(r)\ \Rightarrow\ p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, & 0\le t\le r\\ f(t-r)e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, & t>r\end{cases}$$



$$F(r,t)=\int_0^r p(s,t)ds$$

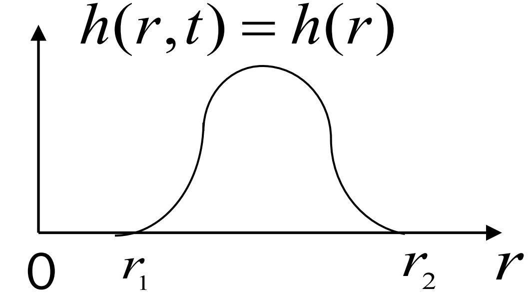
$$N(t)=\int_0^{r_m} p(s,t)ds$$

生育率 $f(t)$ 的分解

$k(r,t) \sim$ (女性)性别比函数

$b(r,t) \sim$ (女性)生育数　　$[r_1, r_2] \sim$ 育龄区间

$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$



$$b(r,t) = \beta(t)h(r,t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)dr = 1$$

h~生育模式

$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r,t)dr$$

β~总和生育率

$$f(t) = \beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$$

人口控制系统 $f(t)=\beta(t)\int_{r_1}^{r_2} h(r,t)k(r,t)p(r,t)dr$

$\beta(t)$ ~总和生育率——控制生育的多少

$h(r,t)$ ~生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r,t)=\begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^{r}\mu(s)ds}, & 0\le t\le r \\ f(t-r)e^{-\int_{0}^{r}\mu(s)ds}, & t>r \end{cases}$$

输入 $\to f(t)$

输入 $\to p_0(r)$

$$p_0(r) \downarrow$$

$$f(t) \to \frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p}{\partial t}=-\mu(r,t)p(r,t) \to p(r,t)$$

输出 $\to p(r,t)$

$$p(r,t) \to \beta(t) \to f(t)$$

反馈 $\to \beta(t)$

- 正反馈系统
- 滞后作用很大

人口指数

1）人口总数 $N(t)=\int_0^{r_m} p(r,t)dr$

2）平均年龄 $R(t)=\frac{1}{N(t)}\int_0^{r_m} rp(r,t)dr$

3）平均寿命 $S(t)=\int_t^{\infty} e^{-\int_0^{\tau-t}\mu(r,t)dr}d\tau$

t时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r,t)$ 计算的平均存活时间

4）老龄化指数 $\omega(t)=R(t)/S(t)$

控制生育率 ⇨ 控制 $N(t)$不过大

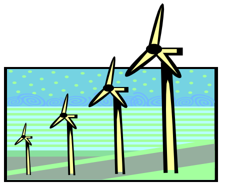
控制 $\omega(t)$不过高

经济增长模型

经济增长模型

- **1. 问题背景**
- **2. Douglas生产函数**
- **3. 资金与劳动力的最佳分配**
- **4. 劳动生产率增长的条件**

1. 问题背景



增加生产 发展经济 增加投资 增加劳动力 提高技术

- 建立产值与资金、劳动力之间的关系.
- 研究资金与劳动力的最佳分配，使投资效益最大.
- 调节资金与劳动力的增长率，使经济(生产率)增长.

2. 道格拉斯(Douglas)生产函数

产值 $Q(t)$ $\Leftarrow$ 资金 $K(t)$　　劳动力 $L(t)$

技术 $f(t)=f_0$ (常数)

$$\boxed{Q(t)=f_0F(K(t),L(t))}$$

F为待定函数

产值Q, 资金K, 劳动力L, 技术f_0

Douglas生产函数

静态模型 $Q(K,L)=f_0F(K,L)$

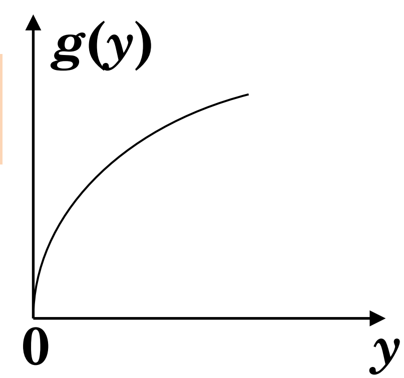
每个劳动力的产值 $z=\dfrac{Q}{L}$ **每个劳动力的投资** $y=\dfrac{K}{L}$

模型假设 **z 随着 y 的增加而增长，但增长速度递减**

$$z=Q/L=f_0g(y) \qquad g(y)=y^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

$$\Rightarrow Q=f_0L(K/L)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$ **Douglas生产函数**



$$\frac{\partial Q}{\partial K},\frac{\partial Q}{\partial L}>0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2},\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}<0$$

解释含义？

Douglas生产函数

$$Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$\frac{\partial Q}{\partial K}=Q_K$ ~单位资金创造的产值

$\frac{\partial Q}{\partial L}=Q_L$ ~单位劳动力创造的产值

$$\Downarrow$$

$$\frac{KQ_K}{Q}=\alpha,\quad \frac{LQ_L}{Q}=1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$KQ_K+LQ_L=Q$$

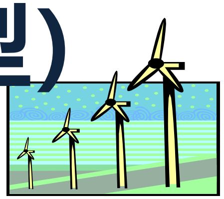
α~ 资金在产值中的份额

1-α~劳动力在产值中的份额

更一般的道格拉斯(Douglas)生产函数

$$Q(K,L)=f_0K^{\alpha}L^{\beta},\quad 0<\alpha,\beta<1,\quad f_0>0$$

2. 资金与劳动力的最佳分配（静态模型）



资金来自贷款，利率 r　　　劳动力付工资 w

资金和劳动力创造的效益　$S = Q - rK - wL$

求资金与劳动力的分配比例K/L(每个劳动力占有的资金)，使效益S最大.

$$\frac{\partial S}{\partial K} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w}$$

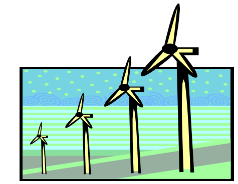
$$\frac{KQ_K}{Q} = \alpha,\quad \frac{LQ_L}{Q} = 1-\alpha \Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{L}{K}\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{w}{r}}$$

$w\uparrow,\ r\downarrow,\ \alpha\uparrow$

$\Rightarrow K/L\uparrow$

3. 经济(生产率)增长的条件 (动态模型)



要使 $Q(t)$ 或 $Z(t)=Q(t)/L(t)$ 增长，$K(t)$, $L(t)$应满足的条件

模型假设

- 投资增长率与产值成正比 (用一定比例扩大再生产) $\Rightarrow \dfrac{dK}{dt}=\lambda Q,\ \lambda>0$
- 劳动力相对增长率为常数 $\Rightarrow \dfrac{dL}{dt}=\mu L \Rightarrow L(t)=L_0 e^{\mu t}$

$$Q=f_0 L g(y) \quad g(y)=y^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt}=\lambda f_0 L y^{\alpha}$$

$$y=\frac{K}{L},\ K=Ly \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt}=L\frac{dy}{dt}+\mu L y$$

经济增长的条件

$$\frac{dK}{dt} = \lambda f_0 L y^{\alpha}$$

$$\frac{dK}{dt} = L\frac{dy}{dt} + \mu L y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + \mu y = f_0 \lambda y^{\alpha}}$$

Bernoulli方程

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{f_0\lambda}{\mu} + (y_0^{1-\alpha} - \frac{f_0\lambda}{\mu})e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$y_0 = K_0 / L_0, Q_0 = f_0 K_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha}, \dot{K}_0 = \lambda Q_0 \quad \Rightarrow \quad y_0^{1-\alpha} = f_0 \lambda \frac{K_0}{\dot{K}_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \left\{ \frac{f_0\lambda}{\mu}[1 - (1 - \mu\frac{K_0}{\dot{K}_0})e^{-(1-\alpha)\mu t}] \right\}^{1/(1-\alpha)}}$$

经济增长的条件

产值$Q(t)$增长 $\Leftrightarrow$ $dQ/dt > 0$

$$Q = f_0 L g(y),\ g(y) = y^{\alpha}$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_0 L g'(y)\frac{dy}{dt} + f_0 g(y)\frac{dL}{dt} = f_0 L y^{2\alpha-1}[f_0\alpha\lambda + \mu(1-\alpha)y^{1-\alpha}]$$

$$y(t) = \left\{\frac{f_0\lambda}{\mu}[1-(1-\mu\frac{K_0}{\dot{K}_0})e^{-(1-\alpha)\mu t}]\right\}^{1/(1-\alpha)}$$

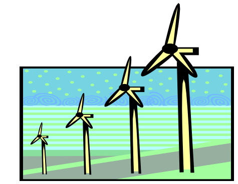
$$\frac{dQ}{dt} > 0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}\right)e^{-(1-\alpha)\mu t} < \frac{1}{1-\alpha}$$

$\mu > 0 \Rightarrow dQ/dt > 0$

$\mu \sim$ 劳动力相对增长率

$$\mu < 0 \Rightarrow \text{当} t < \frac{1}{(1-\alpha)\mu}\ln(1-\alpha)(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}),\ dQ/dt > 0$$

经济增长的条件



每个劳动力的产值 $Z(t)=Q(t)/L(t)$增长 $\Longleftrightarrow$ **$dZ/dt>0$**

$$Z(t)=\frac{f_0 L y^{\alpha}}{L}=f_0\, y^{\alpha}=f_0\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{dZ}{dt}=f_0 \alpha y^{\alpha-1}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt}>0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}>0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}\right)e^{-(1-\alpha)\mu t}>0$$

$\mu<0 \Rightarrow dZ/dt>0$ $\quad$ $\mu>0 \Rightarrow$ 当 $\dfrac{\mu}{\dot{K}_0/K_0}<1,\ dZ/dt>0$

$\Downarrow$

劳动力增长率小于初始投资增长率

Matlab微分方程工具

微分方程的解析解

求微分方程（组）的解析解命令:

dsolve(‘方程1’, ‘方程2’,…‘方程n’, ‘初始条件’，‘自变量’)

在表达微分方程时，用字母D表示求微分，D2、D3等表示求高阶微分.任何D后所跟的字母为因变量，自变量可以指定或由系统规则选定为确省.

记号:

例如，微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2}=0$，应表达为：D2y=0

例1：求$\frac{du}{dt}=1+u^2$的通解：

dsolve('Du=1+u^2','t')

结 果：tan(C1 + t)

Matlab future:

syms u(t)
dsolve(diff(u)==1+u^2)

例 2 求微分方程的特解.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 29y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 15 \end{cases}$$

解 输入命令:

```
y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15','x')
```

结 果 为 : y $=3e^{-2x}\sin(5x)$

Matlab future:

```
syms y(t)
Dy = diff(y);
D2y = diff(y,2);
y=dsolve(D2y+4*Dy+29*y==0,y(0)==0,Dy(0)==15)
```

例 3 求微分方程组的通解.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y + 3z \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 5y + 3z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$

解 输入命令：

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z', ...
    'Dy=4*x-5*y+3*z','Dz=4*x-4*y+2*z', 't');
x=simple(x)        % 将x化简
y=simple(y)
z=simple(z)
```

结 果 为： $x = (c_1 - c_2 + c_3 + c_2 e^{-3t} - c_3 e^{-3t})e^{2t}$

$y = -c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} + c_2 e^{-3t} - c_3 e^{-3t} + c_1 - c_2 + c_3)e^{2t}$

$z = (-c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} + c_1 - c_2 + c_3)e^{2t}$

微分方程的数值解

（一）常微分方程数值解的定义

在生产和科研中所处理的微分方程往往很复杂且大多得不出一般解。而在实际上对初值问题，一般是要求得到解在若干个点上满足规定精确度的近似值，或者得到一个满足精确度要求的便于计算的表达式。

因此，研究常微分方程的数值解法是十分必要的。

对常微分方程：$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$，其数值解是指由初始点$x_0$开始的若干离散的$x$值处，即对$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，求出准确值$y(x_1)$，$y(x_2), \cdots, y(x_n)$的相应近似值$y_1, y_2, \cdots, y_n$。

（二）建立数值解法的一些途径

设 $x_{i+1}-x_i=h,\ i=0,1,2,\cdots n-1$，可用以下离散化方法求解微分方程：

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

1、用差商代替导数（**欧拉法**）

若步长h较小，则有

$$y'(x)\approx\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$$

故有公式：

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_0=y(x_0) \end{cases} \quad i=0,1,2,\cdots,n-1$$

此即**欧拉法**。

2、使用数值积分（改进的欧拉法）

对方程y'=f(x,y), 两边由x_i到x_{i+1}积分，并利用梯形公式，有：

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t))dt \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))]$$

故有公式：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

实际应用时，与欧拉公式结合使用：

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})] \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

对于已给的精确度ε, 当满足$\left|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}\right| < \varepsilon$时, 取 $y_{i+1} = y_{i+1}^{(k+1)}$, 然后继续下一步$y_{i+2}$的计算。

此即**改进的欧拉法**。

3、使用泰勒公式

以此方法为基础，有**龙格-库塔法**、**线性多步法**等方法。

4、数值公式的精度

当一个数值公式的截断误差可表示为O（h^{k+1}）时（k为正整数，h为步长），称它是一个**k阶公式**。

k越大，则数值公式的精度越高。

- 欧拉法是一阶公式，改进的欧拉法是二阶公式。
- 龙格-库塔法有二阶公式和四阶公式。
- 线性多步法有四阶阿达姆斯外插公式和内插公式。

（三）用Matlab软件求常微分方程的数值解

$[t, x] = solver('f', ts, x_0, options)$

自变量值

函数值

ode45
ode23
ode113
ode15s
ode23s

由待解方程写成的m-文件名

ts=[t_0，t_f]，t_0、t_f为自变量的初值和终值

函数的初值

ode23：组合的2/3阶龙格-库塔-芬尔格算法
ode45：运用组合的4/5阶龙格-库塔-芬尔格算法

用于设定误差限(缺省时设定相对误差10^{-3}, 绝对误差10^{-6}),
命令为：options=odeset（'reltol',rt,'abstol',at），
rt，at：分别为设定的相对误差和绝对误差.

不同求解器Solver的特点

求解器 Solver	ODE 类型	特点	说明
ode45	非刚性	单步算法；4、5 阶 Runge-Kutta 方程；累计截断误差达 $(\Delta x)^3$	大部分场合的首选算法
ode23	非刚性	单步算法；2、3 阶 Runge-Kutta 方程；累计截断误差达 $(\Delta x)^3$	使用于精度较低的情形
ode113	非刚性	多步法；Adams 算法；高低精度均可到 $10^{-3} \sim 10^{-6}$	计算时间比 ode45 短
ode23t	适度刚性	采用梯形算法	适度刚性情形
ode15s	刚性	多步法；Gear's 反向数值微分；精度中等	若 ode45 失效时，可尝试使用
ode23s	刚性	单步法；2 阶 Rosebrock 算法；低精度	当精度较低时，计算时间比 ode15s 短
ode23tb	刚性	梯形算法；低精度	当精度较低时，计算时间比 ode15s 短

注意事项

1、在解n个未知函数的方程组时，x_0和x均为n维向量，m-文件中的待解方程组应以x的分量形式写成.

2、使用Matlab软件求数值解时，高阶微分方程必须等价地变换成一阶微分方程组.

例 4 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 1000(1-x^2)\dfrac{dx}{dt} - x = 0 \\ x(0) = 2; x'(0) = 0 \end{cases}$

解: 令 $y_1=x$，$y_2=y_1'$

则微分方程变为一阶微分方程组：

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 1000(1-y_1^2)y_2 - y_1 \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0 \end{cases}$$

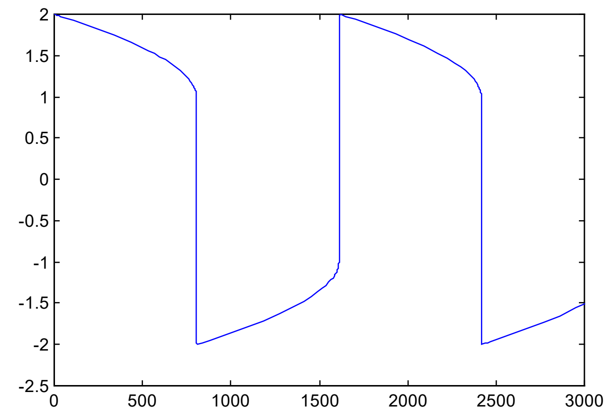
1、建立m-文件vdp1000.m如下：

```
function dy=vdp1000(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

2、取$t_0=0$，$t_f=3000$，输入命令：

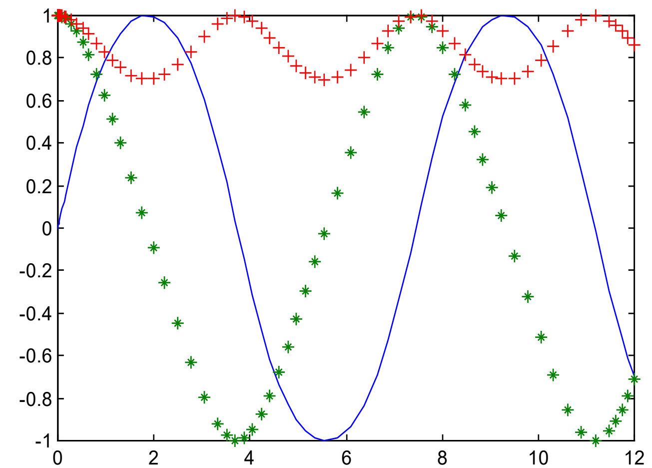
```
[T,Y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]);
plot(T,Y(:,1),'-')
```

3、结果如图



例 5　解微分方程组.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = -y_1 y_3 \\ y_3' = -0.51 y_1 y_2 \\ y_1(0)=0, y_2(0)=1, y_3(0)=1 \end{cases}$$



解　1、建立m-文件rigid.m如下：

```
function dy=rigid(t,y)
dy=zeros(3,1);
dy(1)=y(2)*y(3);
dy(2)=-y(1)*y(3);
dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
```

2、取$t_0=0$，$t_f=12$，输入命令：

```
[T,Y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
 plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3),'+')
```

3、结果如图

图中，y_1的图形为实线，y_2的图形为“*”线，y_3的图形为“+”线.

实验练习

实验练习

- 1. 用欧拉法解一阶方程组的初值问题。利用给定的步长 Δt，计算前三次逼近(x1,y1), (x2,y2), (x3,y3)。然后用步长 $\Delta t/2$ 再算一遍。制表把两次结果与给定的解析值做比较。

1.
$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + 2y$$
$$x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ \Delta t = \frac{1}{4}$$
$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{5t},\ y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{5t}$$

2.
$$\frac{dx}{dt} = x + 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y$$
$$x(0) = 5,\ y(0) = 4,\ \Delta t = \frac{1}{4}$$
$$x(t) = 5e^{-t}(\cos t + 6\sin t),\ y(t) = e^{-t}(4\cos t - 13\sin t)$$

3.
$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - y + 2e^{t}$$
$$x(0) = 0,\ y(0) = 2,\ \Delta t = \frac{1}{4}$$
$$x(t) = -e^{-2t} + 3e^{2t} - 2e^{t},\ y(t) = e^{-2t} + e^{2t}$$

- 2.假定一湖中存放有鳟鱼和鲈鱼。因为它们都吃同样的食饵，所以为生存而竞争。设B(t)和T(t)分别表示鲈鱼和鳟鱼在时刻t的数量。鲈鱼B和鳟鱼T的增长率由以下微分方程组来估计

$$\frac{dB}{dt} = B\cdot(10 - B - T),\ B(0) = 5$$
$$\frac{dT}{dt} = T\cdot(15 - B - 3\cdot T),\ T(0) = 2$$

  - 用欧拉法，取步长 $\Delta t = 0.1$，对 $0 \le t \le 7$ 估计下列曲线
  - 1. B(t) 相对于t
  - 2. T(t) 相对于t
  - 3.相平面上的解轨迹(B(t), T(t))

3. 组队讨论Final Project

End