

# 离散多智能体切换系统的二阶分组一致性研究<sup>\*</sup>

徐云剑<sup>1,2</sup>, 彭世国<sup>1</sup>, 郭艾寅<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广州 510006; 2. 湖南涉外经济学院 信息科学与工程学院, 长沙 410205)

**摘要:** 针对随机切换拓扑条件下离散多智能体系统的二阶分组一致性问题进行了研究,设计了一种新颖的分组一致性协议。该协议不依赖于保守的假设条件,能全面反映系统中智能体在分组内与分组间的相互影响。基于矩阵理论和新协议,得到了在马尔可夫切换拓扑条件下,系统达到分组一致的充分条件。在证明过程的结尾部分,使用线性不等式(LMI)工具给出了获取协议中控制参数的算法。最后,通过数字仿真实例证明了理论结果的有效性。

**关键词:** 分组一致; 多智能体系统; 马尔可夫切换; 协调控制

**中图分类号:** TP301    **文献标志码:** A    **文章编号:** 1001-3695(2018)06-1720-04

**doi:**10.3969/j.issn.1001-3695.2018.06.026

## Second-order group consensus of discrete-time multi-agent systems with stochastic switching topologies

Xu Yunjian<sup>1,2</sup>, Peng Shiguo<sup>1</sup>, Guo Aiyin<sup>2</sup>

(1. School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. School of Information Science & Engineering, Hunan International Economics University, Changsha 410205, China)

**Abstract:** This paper investigated the group consensus problems of second-order discrete-time multi-agent networks with fixed topology and stochastic switching topologies. Instead of relying on other conservative assumptions presented by the majority of the relevant existing research works, this paper presented a novel group consensus protocol which could exactly reflect the interactive influence among the agents of the multi-agent networks. It obtained the sufficient conditions of the group consensus by matrix theory and new protocol with Markov-switching topologies. Finally, it presented the LMI approach to the design of the group consensus protocol. Numerical simulations illustrate the results.

**Key words:** group consensus; multi-agent system; Markov-switching topology; cooperative control

## 0 引言

多智能体系统的一致性问题是复杂动力学系统中具有重要的意义,协同控制的一个基础条件就是多智能体系统达到一致。一致性就是指在一个多智能体系统中,随着时间的推移,通过相互间的信息交换所有智能体的状态趋于同一个值。一致性协议则是指智能体间信息交换的规则。

近年来,多智能体系统一致性问题的研究取得了大量有意义的成果。这些成果主要包括异构多智能体系统的一致性研究<sup>[1]</sup>、牵制控制的一致性研究<sup>[2]</sup>、有限时间一致性研究<sup>[3]</sup>,以及带有随机切换拓扑的一致性研究<sup>[4]</sup>等,文献[1]使用频域理论研究了带有未知通信时滞的异质多智能体系统高阶一致性问题。在文献[2]中,通过控制相邻节点的输入信息,提出了一种新的牵制控制协议,并分别研究了连续和离散系统中的一致性问题。文献[3]考虑了有限时间一致性问题,并提出了一种针对非线性系统的分布式一致性协议,该协议能够在有限的时间内使系统达到一致。文献[5]对随机系统的一致性问题进行了分析。针对多智能体系统,马尔可夫模型作为一种随机模型被用来描述系统拓扑的随机切换。在文献[4]中研究了带马尔可夫切换的多智能体系统一致性问题。

多智能体系统分组一致性问题是最最近出现的一个研究热点。在一个多智能体网络中,当有多个任务由该网络分布式协同完成时,会出现多个不同的一致性结果,这就是分组一致性现象。近期有大量多智能体分组一致性研究成果出现。Yu等人<sup>[6]</sup>研究了在强连通和平衡图条件下的分组一致性问题。随后在文献[7],他们将结果拓展到了无向图系统中,并得到了保证系统达到平均分组一致的条件。Yu等人<sup>[8]</sup>进一步研究了带有切换拓扑和通信时滞的系统分组一致性问题,并使用双树型结构方法得到了保证分组一致的条件。Yi等人<sup>[9]</sup>讨论了有向拓扑条件下线性耦合系统的簇一致性问题,并揭示了簇的数量与拉普拉斯矩阵之间的关系,即簇的数量等于拉普拉斯矩阵零特征值的重根数。Tan等人<sup>[10]</sup>讨论了在固定拓扑和切换拓扑条件下的分组一致性问题,并分析得到了保证系统分组一致的充分必要条件及充分条件。文献[11]中Ji等人考虑了带有两种不同时滞类型的分组一致性问题,使用频域分析和奈奎斯特定理得到了去保守的分组一致性条件。Feng等人<sup>[12]</sup>分别讨论了静态和时变二阶多智能体系统的分组一致性问题。为了降低控制成本,牵引控制策略被引入了系统的控制协议中。文献[13]研究了无向拓扑下的平均分组一致性问题,提出了一种新颖的混合协议,得到了保证系统收敛的一致性条件。文

**收稿日期:** 2017-01-24; **修回日期:** 2017-03-27    **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61374081); 湖南省普通高等教育教学改革研究项目 2015(291); 湖南省教育厅科学研究项目 2014(14C0651)

**作者简介:** 徐云剑(1977-),男,湖南益阳人,博士研究生,主要研究方向为多智能体一致性、优化算法(56579265@qq.com); 彭世国(1967-),男,湖南常德人,教授,博导,主要研究方向为复杂系统随机控制理论; 郭艾寅(1981-),女,湖南益阳人,副教授,硕士,主要研究方向为网络通信质量。

献[14,15]讨论了在固定拓扑和切换拓扑下的离散系统分组一致性问题,基于一些保守假设分析得到了保证系统分组一致的收敛条件。Xie 等人<sup>[16]</sup>研究了带时滞的二阶多智能体系统分组一致性问题,使用李雅普诺夫第一方法得到了保证系统收敛的一致性条件。文献[17]讨论了在输入饱和条件下的牵引分组一致性问题,得到了保证分组一致的条件。文献[18]中,在有向固定拓扑条件下,讨论了二阶分组跟踪一致性问题。

值得注意的是,在上述分组一致性研究成果中大部分是关于一阶连续系统的,针对离散系统的分组一致性成果较少。文献[14]是关于离散系统的分组一致性成果,但它的结果是建立在入度平衡这一保守假设条件上的。入度平衡意味着一个分组中的节点与其他分组中节点的邻接权重为零,也就是说在一个复杂系统中,各个子系统间没有相互通信,显然这是一个苛刻的条件。在实际通信系统中,节点间的通信既存在于子网内,也存在于子网间。因此,有必要考虑打破这一限制条件的分组一致性问题。另外,考虑到在现实环境下的系统网络中,节点间的通信由于各种原因时通时断,此时对应于系统的拓扑是随时间变化的。在考虑系统分组一致性问题时,加入随机拓扑切换这一现实条件是十分必要的。

## 1 预备知识

本文中,  $R$  和  $C$  分别表示实数集与复数集。 $\rho(M)$ 、 $\det(\cdot)$  和  $\text{tr}(\cdot)$  表示一个矩阵的谱半径、行列式和迹。 $\text{Re}(\cdot)$  表示一个复数的实部。 $I_n$  表示  $n$  维单位矩阵,  $\|\cdot\|$  则表示一个向量的 2 范数。 $\otimes$  表示矩阵的克劳内克积。本文用加权有向图  $G = (V, E, A)$  来表示一个多智能体系统,假设图中含  $n+m$  个节点,每个节点表示一个智能体。不失一般性,本文将图  $G$  分成  $G_1$  和  $G_2$  两个子图,  $G$  中的前  $n$  个节点属于  $G_1$ , 后  $m$  个节点属于  $G_2$ 。 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+m}\}$  表示图  $G$  的节点集,  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和  $V_2 = \{v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$  分别表示属于  $G_1$  和  $G_2$  的节点集,显然有  $V_1 \cup V_2 = V$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。 $l_1 = \{1, \dots, n\}$  和  $l_2 = \{n+1, \dots, n+m\}$  被定义为  $G_1$  和  $G_2$  中节点的标号集,  $l = l_1 \cup l_2$ 。 $E \subseteq V \times V$  表示图中的有向边集。令  $N_{1i} = \{v_j \in V_1 : (v_i, v_j) \in E\}$  和  $N_{2i} = \{v_j \in V_2 : (v_i, v_j) \in E\}$  表示节点  $v_i$  分别在  $G_1$  和  $G_2$  中的相邻节点集,则  $v_i$  在图  $G$  中的相邻节点集为  $N_i = N_{1i} \cup N_{2i}$ 。 $A = [a_{ij}] \in R^{(n+m) \times (n+m)}$  为图的加权邻接矩阵,  $A$  中的元素定义为:  $e_{ij} \in E \Leftrightarrow a_{ij} > 0$ , 即节点  $v_i$  能够收到来自节点  $v_j$  的信息,则  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij} = 0$ 。本文中定义  $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n+m)$ 。定义矩阵  $A$  的拉普拉斯矩阵为  $L = [l_{ij}] \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ ,  $l_{ii} = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ ,  $l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$ 。拉普拉斯矩阵具有行和为零的特征,即  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, n+m$ 。

## 2 问题描述

考虑一个含有  $n+m$  个智能体的系统  $G$ , 系统的二阶动态模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i[k+1] = x_i[k] + v_i[k] \\ \dot{v}_i[k+1] = v_i[k] + u_i[k] \end{cases} \quad i \in l = \{1, 2, \dots, n+m\} \quad (1)$$

其中:  $x_i[k] \in R^n$ ,  $v_i[k] \in R^n$  分别表示第  $i$  个智能体的位置和速度状态向量,  $u_i[k] \in R^n$  表示系统的控制输入。不失一般性,本文中令  $n=1$ 。针对系统式(1)的分组一致性问题, Yu 等

人<sup>[7]</sup>设计了如下控制协议:

$$u_i[k] = \begin{cases} \sum_{v_j \in N_{1i}} a_{ij}(x_j[k] - x_i[k]) + \sum_{v_j \in N_{2i}} a_{ij}x_j[k] & \forall i \in l_1 \\ \sum_{v_j \in N_{1i}} a_{ij}x_j[k] + \sum_{v_j \in N_{2i}} a_{ij}(x_j[k] - x_i[k]) & \forall i \in l_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A1) \quad & \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} = 0 \quad i \in l_1 \\ A2) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} = 0 \quad i \in l_2 \end{aligned}$$

文献[7]中, 将系统的  $n+m$  个节点分成两组, 前  $n$  个节点属于组 1, 后  $m$  个节点属于组 2。 $l_1 = \{1, \dots, n\}$  和  $l_2 = \{n+1, \dots, n+m\}$  分别表示两个分组的节点标号。协议式(2)有两个假设前提条件 A1) 和 A2), A1) 和 A2) 意味着入度平衡, 即要求两个分组间没有信息交换。随后 Tan 等人<sup>[10]</sup>也讨论了分组一致性问题, 他们使用了 A3) 和 A4) 这一组假设条件, A3) 和 A4) 不再要求分组间没有通信, 但要求同一分组中所有节点收到的来自其他分组的影响值相等, 即

$$\begin{aligned} A3) \quad & \sum_{j=n+1}^{n+m} a_{ij} = \sigma \quad i \in l_1 \\ A4) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} = \eta \quad i \in l_2 \end{aligned}$$

显然, A3) 和 A4) 仍然是一种较严格的限制。对一个实际多智能体系统而言, 信息交流不仅存在于分组内部, 同时也存在于分组之间, 分组间无信息交流或等值信息交流都是不切实际的。基于以上分析, 本文提出了一个新颖的控制协议

$$u_i[k] = \alpha \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij}(x_j[k] - x_i[k]) + \sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}x_{\delta_j} \right) + \beta \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij}(v_j[k] - v_i[k]) + \sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}v_{\delta_j} \right) \quad i, j \in l \quad (3)$$

其中:  $\alpha$  和  $\beta$  是控制参数;  $l_{ij}$  是系统拉普拉斯矩阵的第  $i$  行第  $j$  列元素;  $\delta_j = q$  表示第  $j$  个智能体属于第  $q$  个分组 (不失一般性, 定义  $q=2$ );  $x_{\delta_j}$  和  $v_{\delta_j}$  (简单起见, 本文省略了  $[k]$ ) 表示第  $j$  个智能体所属分组的一致性状态目标值;  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}x_{\delta_j}$  和  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}v_{\delta_j}$  表示第  $i$  个智能体受到的来自所有分组的综合影响。显而易见, 不同的节点  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}x_{\delta_j}$  和  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}v_{\delta_j}$  的值是不同的, 即一个分组内的节点所受影响不要求是等值的, 这去除了 A3) 和 A4) 的约束。同时,  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}x_{\delta_j}$  和  $\sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}v_{\delta_j}$  的值也不要求等于零, 这解除了 A1) 和 A2) 的约束。因此, 协议式(3)更具有现实意义。

将控制协议式(3)代入式(1)后的系统模型如下:

$$\begin{cases} x_i[k+1] = x_i[k] + v_i[k] \\ v_i[k+1] = v_i[k] - \alpha \sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}(x_j[k] - x_{\delta_j}) - \beta \sum_{j=1}^{n+m} l_{ij}(v_j[k] - v_{\delta_j}) \end{cases} \quad i, j \in l \quad (4)$$

定义 1 如果对于任何初始状态值  $x_i[0]$  和  $v_i[0]$ , 有

a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i[k] - x_j[k]\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_i[k] - v_j[k]\| = 0$ , if  $\delta_i = \delta_j; \forall i, j = 1, 2, \dots, n+m, \forall \delta_i, \delta_j = 1, 2, \dots, s$ 。

b)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i[k] - x_j[k]\| \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_i[k] - v_j[k]\| \neq 0$ , if  $\delta_i \neq \delta_j; \forall i, j = 1, 2, \dots, n+m, \forall \delta_i, \delta_j = 1, 2, \dots, s$ 。

则认为多智能体系统式(4)达到了分组一致。

令  $x_{\delta_i} = x_n, v_{\delta_i} = v_n, i = 1, 2, \dots, n, x_{\delta_i} = x_{n+m}, v_{\delta_i} = v_{n+m}, i = n+1, \dots, n+m, \phi_i = x_i - x_{\delta_i}, \varphi_i = v_i - v_{\delta_i}, i = 1, \dots, n-1, n+1, \dots, n+m-1$ 。从定义 1 可知, 系统式(4)达到分组一致等价于  $\|\phi_i\| \rightarrow 0, \|\varphi_i\| \rightarrow 0$ 。此时, 本文可以将系统式(4)的分组一致性问题转换为一个误差系统式(5)的稳定性问题。

$$Z[k+1] = HZ[k] \quad (5)$$

其中:  $Z[k] = (X^T[k], Y^T[k])^T, X[k] = (\phi_1^T[k], \dots, \phi_{n-1}^T[k], \phi_{n+1}^T[k], \dots, \phi_{n+m-1}^T[k])^T, Y[k] = (\varphi_1^T[k], \dots, \varphi_{n-1}^T[k], \varphi_{n+1}^T[k], \dots, \varphi_{n+m-1}^T[k])^T$ 。

$[k], \dots, \varphi_{n+m-1}^T[k])^T, H = \begin{bmatrix} I_{n+m-2} & I_{n+m-2} \\ -\alpha \tilde{L} & I_{n+m-2} - \beta \tilde{L} \end{bmatrix}$  本文把  $H$  称

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} l_{11} - l_{n1} & \cdots & l_{1(n-1)} - l_{n(n-1)} & l_{1(n+1)} - l_{n(n+1)} & \cdots & l_{1(n+m-1)} - l_{n(n+m-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{(n-1)1} - l_{n1} & \cdots & l_{(n-1)(n-1)} - l_{n(n-1)} & l_{(n-1)(n+1)} - l_{n(n+1)} & \cdots & l_{(n-1)(n+m-1)} - l_{n(n+m-1)} \\ l_{(n+1)1} - l_{(n+m)1} & \cdots & l_{(n+1)(n-1)} - l_{(n+m)(n-1)} & l_{(n+1)(n+1)} - l_{(n+m)(n+1)} & \cdots & l_{(n+1)(n+m-1)} - l_{(n+m)(n+m-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{(n+m-1)1} - l_{(n+m)1} & \cdots & l_{(n+m-1)(n-1)} - l_{(n+m)(n-1)} & l_{(n+m-1)(n+1)} - l_{(n+m)(n+1)} & \cdots & l_{(n+m-1)(n+m-1)} - l_{(n+m)(n+m-1)} \end{bmatrix}$$

称  $\tilde{L}$  为简化拉普拉斯矩阵。下面, 本文将通过式(5)讨论在随机切换拓扑下的多智能体系统分组一致性问题。

### 3 分组一致性分析

本章将讨论随机切换拓扑条件下的分组一致性问题。为了后续讨论, 先引入一些引理、定义与假设。

假设1 矩阵  $\sum_{i=1}^r \tau_i \tilde{L}_i$  的所有特征值具有正实部。

引理1<sup>[19]</sup>  $\mu_i$  表示矩阵  $A$  的特征值, 令  $A$  所有特征值的实部小于零, 即  $\operatorname{Re}(\mu_i) < 0$ 。如果  $\eta > \max_i \sqrt{\frac{2}{|\mu_i| \cos(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{-\operatorname{Re}(\mu_i)}{|\operatorname{Im}(\mu_i)|})}}$  成立, 那么矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ A & \eta A \end{bmatrix}$  的所有特征值具有负实部。

引理2 如果矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的所有特征值具有负实部, 那么矩阵  $A \otimes I_n + I_n \otimes A$  的所有特征值也具有负实部。

证明 该引理可直接由约当标准型推出, 此处省略证明过程。

引理3 在马尔可夫切换拓扑条件下, 当且仅当  $\rho(K) < 1$  时, 代入控制协议式(3)的多智能体系统式(1)达到渐进均方分组一致, 这里  $K = (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \operatorname{diag}(H_i \otimes H_i)$ 。

假设拓扑集  $\tilde{g} = \{g_1, \dots, g_r\}$  是由有限遍历马尔可夫链驱动切换的,  $\Pi = [\pi_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times r}$  是相应的概率转移矩阵。令  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r)^T$  表示马尔可夫链的一个平稳分布, 并有  $\Pi^T \tau = \tau$ 。 $\omega(\cdot): Z^+ \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$  表示由马尔可夫链驱动的切换过程。将  $\tilde{g}$  中的任意一个拓扑  $g_i$  相应的拉普拉斯矩阵定义为  $L_i, \tilde{L}_i$  和  $H_i$  分别为其相应的简化拉普拉斯矩阵和误差系统矩阵。由于拓扑是随时间变换的, 此时系统式(5)中的误差系统矩阵  $H$  也随之变化。此时的系统模型描述如下

$$Z[k+1] = H_{\omega[k]} Z[k] \quad (6)$$

定义2 在随机切换拓扑条件下, 如果对于任意的初始分布和初始状态, 有  $\|\phi_i\| \rightarrow 0, \|\varphi_i\| \rightarrow 0$  在均方意义下成立, 那么说系统式(6)达到均方分组一致。

不难发现, 系统式(6)是一个马尔可夫跳变线性系统。随机切换条件下系统式(4)达到均方分组一致等价于系统式(6)达到均方稳定。将通过系统式(6)的稳定性分析, 得到带随机切换的系统式(4)的分组一致性结果。

定理1 在拓扑切换由遍历马尔可夫过程驱动的条件下, 如果假设1成立, 那么代入协议式(3)的多智能体系统式(1)能够达到渐进均方分组一致。

证明 令  $\alpha = \varepsilon^2, \beta = \varepsilon\eta$ 。  $K = (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \operatorname{diag}(H_i \otimes H_i)$  类似于矩阵  $\tilde{K} = (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \operatorname{diag}((I_{2(n+m-2)} + \varepsilon K_i) \otimes (I_{2(n+m-2)} + \varepsilon K_i))$ 。此处  $K_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{n+m-2} \\ -\tilde{L}_i & -\eta \tilde{L}_i \end{bmatrix}$ 。接下来, 将  $\tilde{K}$  分解成如下形式:

为误差系统矩阵。

$$\begin{aligned} K &= \Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)} + \varepsilon (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \times \\ &\quad \operatorname{diag}(K_i \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_i) + \\ &\quad \varepsilon^2 (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \operatorname{diag}(K_i \otimes K_i) \end{aligned} \quad (7)$$

其中: 后两项是  $\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}$  的干扰项, 且干扰项依赖于  $\varepsilon$ 。如果  $\varepsilon$  足够小, 最后一个干扰项  $\varepsilon^2 (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}) \operatorname{diag}$  与前一干扰项相比可以被忽略。因此, 主要分析矩阵  $\hat{K} = \Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)} + \varepsilon (\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)})$ 。经过简单分析可知, 矩阵  $\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)} \times \operatorname{diag}(K_i \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_i)$  相应于特征向量  $\tau \otimes c$  有  $4(n+m-2)^2$  个为1的特征值, 这里  $c$  是  $4(n+m-2)^2$  维任意向量。如果选择的  $\varepsilon$  足够小, 那么  $\hat{K}$  的特征向量将任意接近  $\tau \otimes c$ 。令  $\tau \otimes c + \varepsilon \theta, \theta = [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_r^T]^T$  表示矩阵  $\hat{K}$  相应于特征值  $1 + \varepsilon \mu$  的特征向量。  $\hat{K}$  右乘  $\tau \otimes c + \varepsilon \theta$  后得到

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \pi_j (I_{4(n+m-2)} + \varepsilon (K_i \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_i)) \times \\ (\tau_j c + \varepsilon \theta_j) = (1 + \varepsilon \mu) (\tau_i c + \varepsilon \theta_i) \end{aligned} \quad (8)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, r$ 。式(8)的两边左乘  $c^H$ , 然后对  $i = 1, \dots, r$  的  $r$  个等式求和得

$$\begin{aligned} c^H (\sum_{j=1}^r (\pi_{j1} + \pi_{j2} + \dots + \pi_{jr}) (I_{4(n+m-2)} + \varepsilon (K_i \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_i)) \times (\tau_j c + \varepsilon \theta_j)) &= c^H ((1 + \varepsilon \mu) (c + \varepsilon \sum_{j=1}^r \theta_j)) \\ c^H (\sum_{j=1}^r (I_{4(n+m-2)} + \varepsilon (K_i \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_i)) \times (\tau_j c + \varepsilon \theta_j)) &= c^H ((1 + \varepsilon \mu) (c + \varepsilon \sum_{j=1}^r \theta_j)) \\ c^H (\sum_{j=1}^r \tau_j K_j \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes \sum_{j=1}^r \tau_j K_j) c + \\ \varepsilon c^H \sum_{j=1}^r (K_j \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes K_j) \theta_j &= \mu c^H c + \varepsilon \mu \sum_{j=1}^r c^H \theta_j \end{aligned}$$

从上式中可以看出, 当  $\varepsilon$  足够小时  $\mu$  依赖于  $\sum_{j=1}^r \tau_j K_j \otimes$

$$I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes \sum_{j=1}^r \tau_j K_j。$$

由假设1和引理1可知, 存在一个常数  $\eta > 0$ , 可以使矩阵  $\sum_{j=1}^r \tau_j K_j$  的所有特征值具有负实部。又由引理2可知, 矩阵  $\sum_{j=1}^r \tau_j K_j \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes \sum_{j=1}^r \tau_j K_j$  的所有特征值也具有负实部。因此可以找到矩阵  $\sum_{j=1}^r \tau_j K_j \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes \sum_{j=1}^r \tau_j K_j$  的  $4(n+m-2)^2$  个线性独立的特征向量  $c_i$ , 使  $c^H (\sum_{j=1}^r \tau_j K_j \otimes I_{2(n+m-2)} + I_{2(n+m-2)} \otimes \sum_{j=1}^r \tau_j K_j) c$  具有负实部, 由此可得  $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ 。

通过以上的分析可知, 矩阵  $\Pi^T \otimes I_{4(n+m-2)}$  的  $4(n+m-2)^2$  个为1的特征值被一些数值很小, 且实部为负的量干扰。因此,  $\hat{K}$  的所有特征值都位于单位圆之内, 系统式(6)是稳定的。也就是说, 在假设1满足的条件下, 总是存在一组控制参数  $\alpha$  和  $\beta$  能够使  $\rho(K) < 1$ , 由引理3可知系统达到渐进均方分组一致, 证毕。

接下来设计获取控制参数  $\alpha$  和  $\beta$  的算法。令  $U = \begin{bmatrix} I_{n+m-2} & I_{n+m-2} \\ 0 & I_{n+m-2} \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} \alpha I_{n+m-2} & 0 \\ 0 & \beta I_{n+m-2} \end{bmatrix}, V_i =$

形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{L}_i & -\tilde{L}_i \end{bmatrix}, H_i = U + V_i W, \text{ 此时将系统式(6)改写成如下}$$

$$Z[k+1] = (U + V_{\omega[k]} W) Z[k] \quad (9)$$

系统式(9)的稳定性问题等价于如下不等式集的求解问题

$$\begin{bmatrix} P_i & * \\ (U + V_{\omega[k]} W) & Q_i \end{bmatrix} > 0_{2(n+m-2) \times 2(n+m-2)} \quad i=1, \dots, r \quad (10)$$

式(10)需满足  $\sum_{j=1}^r \pi_{ij} P_j = Q_i^{-1} (i=1, \dots, r)$ 。

下面给出获取控制参数  $\alpha, \beta$  的具体算法。

a) 令  $k=0$ , 寻找满足式(10)的一个可行点  $W^0, P_i^0, Q_i^0 (i=1, \dots, r)$ 。如果不存在这样的点, 退出程序。

b) 寻找使式(10)和  $\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \pi_{ij} P_j & * \\ I_{2(n+m-2)} & Q_i \end{bmatrix} > 0_{2(n+m-2) \times 2(n+m-2)}$

$(i=1, \dots, r)$  成立的  $W^{k+1}, P_i^{k+1}, Q_i^{k+1} (i=1, \dots, r), t_k = \min tr (\sum_{i=1}^r [\sum_{j=1}^r \pi_{ij} P_j^k Q_i + Q_i^k \sum_{j=1}^r \pi_{ij} P_j])$ 。

c) 如果  $t_k = 2r(n+m-2)$ , 退出程序, 此时可行的控制参数  $\alpha$  和  $\beta$  就是矩阵  $W^{k+1}$  的对角元素值; 否则,  $k=k+1$  程序转向执行 b)。

#### 4 仿真实例

本章通过数字仿真实例证明理论结果的有效性。为方便讨论, 假设系统中有通信的节点间权重为 1, 即  $a_{ij} = 1, \text{ if } (i, j) \in E$ 。考虑一个包含五个相同智能体的系统式(4), 假设系统的切换拓扑集为  $g = \{g_1, g_2\}$ , 拓扑集由马尔可夫过程驱动切换。拓扑集如图 1、2 所示。与拓扑  $g_i$  相应的邻接矩阵  $A_i$  和简化拉普拉斯矩阵  $\tilde{L}_i (i=1, 2)$  如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Pi = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.65 \\ 0.72 & 0.28 \end{bmatrix}$  为转移概率矩阵。解  $\Pi^T \tau = \tau$  可得

$\tau = (0.5255, 0.4745)^T$ 。  $\sum_{j=1}^2 \tau_j \tilde{L}_j$  的特征值为 0.5255, 2.3015, 1.173。显然, 所有特征值具有正实部。由算法可得控制参数  $\alpha = 0.2011, \beta = 0.8026$ 。  $g_1$  和  $g_2$  如图 1、2 所示。

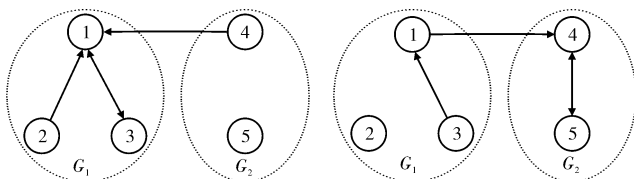


图 1  $g_1$

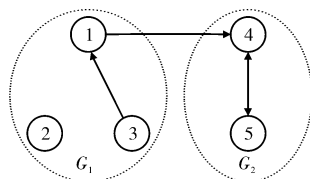


图 2  $g_2$

随机获取初始状态。马尔可夫切换条件下的系统状态轨迹如图 3 所示。从图 3 的仿真结果可看出, 系统的位置与速度状态值达到了渐进均方分组一致。接下来, 改变拓扑结构, 如图 4、5 所示。

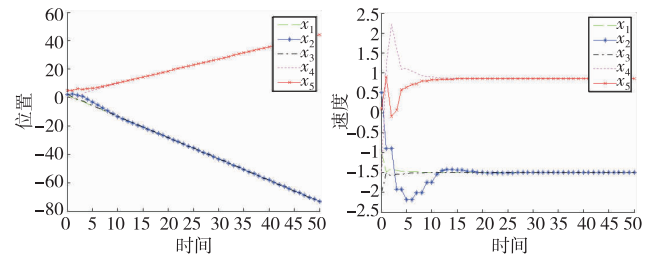


图 3 马尔可夫切换条件下的系统状态轨迹

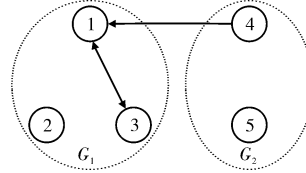


图 4  $g_3$

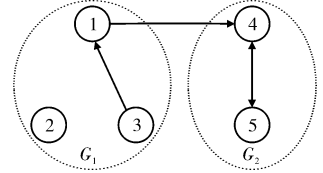


图 5  $g_4$

拓扑相应的  $A_i$  和  $\tilde{L}_i (i=1, 2)$  如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{L}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{L}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

计算可知 0 是矩阵  $\sum_{j=1}^2 \tau_j \tilde{L}_j$  的一个特征值。因此, 假设 1 没有得到满足。此时的系统状态轨迹如图 6 所示。从图中不难看出系统没有达到渐进均方分组一致。此例印证了定理 1 的有效性。

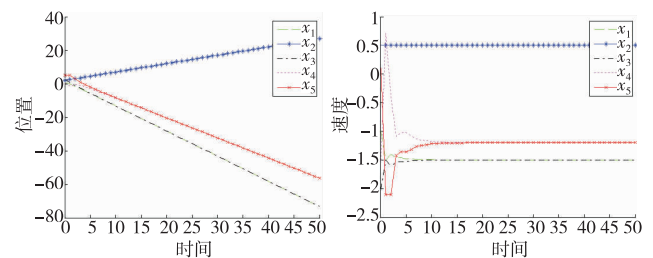


图 6 马尔可夫切换条件下的状态轨迹

#### 5 结束语

本文研究了离散二阶多智能体系统的分组一致性问题。为了去除分组间没有通信的保守假设, 提出了新的分组一致性协议。使用马尔可夫链驱动的随机切换拓扑来模拟现实环境中随机出现的信号中断情况, 得到了保证系统均方分组一致的条件, 该条件与拓扑集的简化拉普拉斯矩阵的特征值密切相关, 并在证明过程中给出了获得可行性控制参数的算法。在最后部分, 通过正反两个仿真实例证明了定理 1 的有效性。

#### 参考文献:

- [1] Tian Yuping, Zhang Ya. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1205-1212.
- [2] Liu Shuai, Xie Lihua, Zhang Huanshui. Containment control of multi-agent systems by exploiting the control inputs of neighbors[J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2014, 24(17): 2803-2818.
- [3] Cao Yongcan, Ren Wei. Finite-time consensus for second-order systems with unknown inherent nonlinear dynamics under an undirected switching graph[C]//Proc of American Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2012: 26-31.

法,多目标优化方法在有效性、高效性、准确性方面均有明显提升。在神经网络建模过程中,由于网络初始化参数设置的随机性,造成训练及收敛时间稍长,在接下来的研究中将会对其进行改进优化。

#### 参考文献:

- [1] 崔逸学. 基于多目标优化的进化算法研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2001.
- [2] 关志华. 多目标进化算法研究初步[J]. 石家庄经济学院学报, 2002, 25(2): 125-128.
- [3] 耿玉磊, 张翔. 多目标优化的求解方法与发展[J]. 机电技术, 2004, 27(B10): 105-108.
- [4] 林铨云. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992.
- [5] Zadeh L. Optimality and non-scalar-valued performance criteria[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1963, 8(1): 59-60.
- [6] 胡毓达. 实用多目标最优化[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.
- [7] 张翔. 优化设计方法及编程[M]. 北京: 中国农业大学出版社, 2001.
- [8] 童晶, 赵明旺. 高效求解 Pareto 最优前沿的多目标进化算法[J]. 计算机仿真, 2009, 26(6): 216-219.
- [9] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms[J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221-248.
- [10] 周明. 遗传算法原理及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [11] 王晓鹏. 多目标优化设计中的 Pareto 遗传算法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(12): 1558-1561.
- [12] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [13] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2000, 3(4): 257-271.
- [14] Horn J, Nafpliotis N, Goldberg D E. A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization[C]// Proc of the 1st IEEE Conference on Evolutionary Computation & IEEE World Congress on Computational Intelligence. 1994: 82-87.
- [15] 张屹, 陈平, 万兴余. 基于正交设计 NSGA-II 算法的制动器多目标优化[J]. 计算机应用研究, 2016, 33(3): 720-725.
- [16] 冯翔, 杨红雨. 进港飞机调度多目标优化问题的改进 NSGA-II 算法[J]. 电子科技大学学报, 2014, 43(1): 66-70.
- [17] 蔡云骧, 周志勇, 徐小倩, 等. 一种基于精英策略非支配排序遗传算法-II 的多层吸波涂层结构设计方法[J]. 兵工学报, 2015, 36(8): 1574-1579.
- [18] Furtuna R, Curteanu S, Leon F. An elitist non-dominated sorting genetic algorithm enhanced with a neural network applied to the multi-objective optimization of a polysiloxane synthesis process[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2011, 24(5): 772-785.
- [19] 余廷芳, 王林, 彭春华. 改进 NSGA-II 算法在锅炉燃烧多目标优化中的应用[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(1): 179-182.
- [20] 公茂果, 焦李成, 杨咚咚, 等. 进化多目标优化算法研究[J]. 软件学报, 2009, 20(2): 271-289.
- [21] 张敏, 罗文坚, 王煦法, 等. 一种基于正态分布交叉的  $\epsilon$ -MOEA [J]. 软件学报, 2009, 20(2): 305-314.

(上接第 1723 页)

- [4] Zhang Ya, Tian Yuping. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology [J]. Automatica, 2009, 45(5): 1195-1201.
- [5] Syed A M. Robust stability analysis of Takagi-Sugeno uncertain stochastic fuzzy recurrent neural networks with mixed time-varying delays [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(8): 080201.
- [6] Yu Junyan, Wang Long. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs[C]// Proc of the 7th Asian Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2009: 105-110.
- [7] Yu Junyan, Wang Long. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange [J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(2): 334-348.
- [8] Yu Junyan, Wang Long. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays [J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(6): 340-348.
- [9] Yi Jingwen, Wang Yawu, Xiao Jiangwen. Reaching cluster consensus in multi-agent systems[C]//Proc of the 2nd International Conference on Intelligent Control and Information Processing. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2011: 569-573.
- [10] Tan Chong, Liu Guoping, Duan Guangren. Group consensus of networked multi-agent systems with directed topology [C]//Proc of the 18th IFAC World Congress. 2011: 8878-8883.
- [11] Ji Lianghao, Liao Xiaofeng, Liu Qun. Group consensus analysis of multi-agent systems with delays [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(22): 220202.
- [12] Feng Yuanzhen, Xu Shengyuan, Zhang Baoyang. Group consensus control for double-integrator dynamic multi-agent systems with fixed communication topology [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24(3): 532-547.
- [13] Hu Hongxiang, Yu Li, Zhang Wen'an, et al. Group consensus in multi-agent systems with hybrid protocol [J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(3): 575-597.
- [14] Zhao Huanyu, Park J H. Group consensus of discrete-time multi-agent systems with fixed and stochastic switching topologies [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(4): 1297-1307.
- [15] Wen Guoguang, Huang Jun, Wang Chunyan. Group consensus control for heterogeneous multi-agent systems with fixed and switching topologies [J]. International Journal of Control, 2016, 89(2): 259-269.
- [16] Xie Dongmei, Teng Liang. Second-order group consensus for multi-agent systems with time delays [J]. Neurocomputing, 2015, 153(4): 133-139.
- [17] Wen Guoguang, Huang Jun, Peng Zhaoxia. On pinning group consensus for heterogeneous multi-agent system with input saturation [J]. Neurocomputing, 2016, 207(9): 623-629.
- [18] Cui Qing, Xie Dongmei, Jiang Fangcui. Group consensus tracking control of second-order multi-agent systems with directed fixed topology [J]. Neurocomputing, 2016, 218(12): 286-295.
- [19] Ren Wei, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10): 1002-1033.
- [20] Costa O L V, Fragoso M D. Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1993, 179(1): 2181-2186.
- [21] Ghaoui L E, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1171-1176.