

基于稀疏图的鲁棒谱聚类算法*

乔晓明, 潘晓英

(西安邮电大学 计算机学院, 西安 710121)

摘要: 为提高谱聚类算法的鲁棒性, 基于稀疏编码在图的构造中提出一种改进 L_1 稀疏表示图模型。将每个样本表示为数据集中其他样本的稀疏线性组合, 稀疏图的构造变为一个优化问题。所构造的稀疏图对数据噪声有很好的鲁棒性, 同时能够反映数据局部线性结构; 采用稀疏矩阵表示, 该方法能够大大降低存储量和计算量, 因而对于处理较大规模问题有着较好的可伸缩性。人工数据和实际数据上的谱聚类实验验证了该算法的性能。

关键词: 谱聚类; 稀疏表示; 图拉普拉斯; L_1 正则化; 内点法

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2018)06-1672-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2018.06.016

Robust spectral clustering based on sparse graph

Qiao Xiaoming, Pan Xiaoying

(School of Computer Science & Technology, Xi'an University of Posts & Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: To obtain robust spectral clustering, this paper proposed an improved L_1 sparse representation graph model based on sparse coding. The method represented the construction of the sparse graph as an optimization problem, in which each data sample was a linear combination of the remaining samples. The sparse graph was robust to the data noise and could capture the locally linear structure of the data. By the sparse matrix representations, the method reduced the memory and computation amounts, and could be scalable to massive problem accordingly. The experiments in several datasets show the advantages of the proposed algorithm.

Key words: spectral clustering; sparse representation; graph Laplacian; L_1 regularization; interior point method

0 引言

聚类分析在机器学习、探索性数据分析、计算机视觉和语音处理中有大量应用, 常用来发现数据中隐含的分组规律或模式^[1]。其目的是把数据集分为若干不同的类簇, 在同一个类簇内的数据是相似的, 不同类簇的数据是不相似的。属于同一类簇的任意两个数据点间的距离小于不同类簇的任意两个数据点之间的距离^[2]。聚类过程无先验知识可用, 是一个无监督分类, 只能借助于数据的内在统计规律。

常见的聚类方法有层次聚类、K-均值聚类等。谱聚类由于较传统聚类算法的一些优势, 近年来得到广泛关注^[3,4]。其建立在谱图理论基础上, 将每个数据点作为图的一个节点, 根据数据点之间的相似性度量定义图中边是否相连接。在构造适当的图基础上, 将原来的聚类问题转换为图论中的子图最优划分问题。谱聚类首先根据样本数据集定义图的邻接矩阵, 并计算矩阵的特征值和特征向量, 然后选择适当的特征向量进行聚类。在这个过程中, 不同的邻接矩阵的构造、处理以及特征向量的计算构成了不同的谱聚类算法, 常见的有最小割(minimum cut)^[5]、规范割(normalized cut)^[6]、比例割(ratio cut)^[7]、最小最大割(min-max cut)^[8]等。

谱聚类的基础是构造信息图, 用该图表示数据之间的相似性关系^[5-9]。目前图的构造方法主要有 K 最近邻和 ϵ 球方

法, 基于这些方法构造的图谱聚类都是基于欧氏距离的一种子图硬划分。如此构造的图主要缺点有^[10]: a) 该图对数据噪声比较敏感, 即该图不具有鲁棒性, 当出现错误数据或者噪声时, 图的结构很容易改变; b) 如此构造的图不具有稀疏性, 流形学习中的研究^[4]表明一个稀疏图刻画了数据之间的局部关系, 对于流形数据的分类问题, 这种局部关系是十分有用的; c) 数据之间的相似性关系不具有自适应性。数据的分布在特征空间的不同区域变化可能比较大, 这样对每一个数据可能有不同的邻域结构。而 K 最近邻和 ϵ 球方法都是用一个固定的全局参数确定一个图的邻域结构, 因而不能够自适应构造不同邻域结构的图。为克服图构造中的这些缺点, Cheng 等人^[10]把图的构造问题表示为一个 L_1 范数优化问题, 每一个数据表示为其余数据的线性组合加一个噪声项, 其优化的目标为最小化重构系数和噪声。该方法不使用通常的欧氏距离, 而是利用了数据之间的稀疏表示关系信息确定图的边的连接关系和权重, 所构造的图具有稀疏性、鲁棒性和数据自适应性, 在一定程度上较好地克服了前述几个缺点。

图 1(a) 和 (b) 是一个具有 10 个节点的完全图和稀疏图。很多图构造算法如高斯核图等, 构造的信息图中任意两个节点间的边权都大于零, 如图 1(a) 所示。基于 L_1 方法构造的信息图边权较少, 该图在较大尺度上反映了问题的全局结构。

L_1 图构造计算量很高, YaleB 数据集上 2 414 个样本实验在 PC 上图的构造过程用了 337 s, 远高于经典方法, 其原因之

收稿日期: 2017-01-17; **修回日期:** 2017-03-08 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61105064, 61634004); 陕西省教育厅专项科研计划项目(14JK1667, 2013JK1131)

作者简介: 乔晓明(1976-), 男, 陕西宝鸡人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为数据挖掘等(xmqiao@xupt.edu.cn); 潘晓英(1981-), 女, 浙江丽水人, 副教授, 博士, 主要研究方向为智能计算及数据挖掘。

一是该模型中优化问题的维数较高。为了改进 L_1 图的构造,本文提出一个新模型,降低了优化问题的维数。同时为了能够将该模型应用于较大规模数据集问题,采用修改的内点法求解该问题,在 USPS 和 YaleB 数据集上进行谱聚类实验,并与几个经典方法进行了比较,验证了本文方法的有效性。

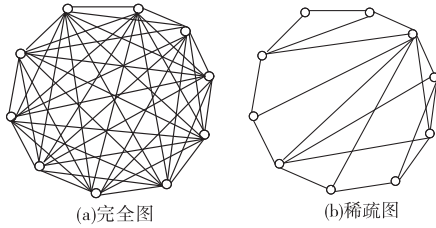


图1 10个节点的完全图和稀疏图

1 L_1 图的构造

对一般的聚类问题,数据样本集为 $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$, $x_i \in \mathbb{R}^m$,其中 N 为样本个数, m 为特征维数。在谱聚类中,以数据样本为图的节点,以数据样本之间的相似性度量为边权构造一个带权无向图(weighted undirected graph),把聚类问题转换为一个子图划分问题。各种谱聚类方法^[5-8]的区别主要在图的构造和子图划分上,在这个过程中图的构造质量对后续子图划分从而对聚类分析的结果起着至关重要的作用。在稀疏编码^[11-13]的研究中为了获得稀疏表示形式,以表示系数的 L_1 范数为优化目标,得到的模型具有稀疏性和鲁棒性。

1.1 鲁棒稀疏表示

给定一个欠定线性系统:

$$x = Aw \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^m$ 是观测向量; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$); $w \in \mathbb{R}^n$ 是未知重构系数,稀疏编码的目标是从观测 x 恢复 w ,使得 w 具有最稀疏的结构。该问题的稀疏解可表示为如下优化问题的解:

$$\begin{aligned} \min_w & \|w\|_0 \\ \text{s. t.} & x = Aw \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $\|w\|_0$ 为 w 的 L_0 范数,即重构系数 w 的非零分量的个数。

式(2)是 NP 难问题,即使求解近似解都是困难的。然而如果该问题的解具有稀疏性,其稀疏解可由如下的凸 L_1 最优优化问题得到^[11]:

$$\begin{aligned} \min_w & \|w\|_1 \\ \text{s. t.} & x = Aw \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $\|w\|_1 = \sum_{i=1}^n |w_i|$,即 w 的 L_1 范数。

在式(3)中由于 x 是观测得到的,往往存在噪声干扰,所以考虑如下 L_1 正则化最小二乘问题:

$$\min \|Aw - x\|_2^2 + \lambda \|w\|_1 \quad (4)$$

其中: $\lambda > 0$ 是正则化参数。这是一个典型的 L_1 正则化最小二乘问题,在机器学习领域已被广泛研究,如基追踪去噪^[14]、不完全测量信号恢复^[15,16]、特征选择的 LASSO 问题^[17]以及弹性网^[18]。

在带权图的构造中,一般情况下权重具有非负性质,因而在式(4)加上非负约束,得到非负约束 L_1 正则化最小二乘问题:

$$\begin{aligned} \min & \|Aw - x\|_2^2 + \lambda \sum_{i=1}^n w_i \\ \text{s. t.} & w_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)通常产生一个稀疏解,即其解只有小部分分量非

零,当 λ 减小,其解非零分量更少。该问题是一个不等式约束凸二次规划,存在全局最优解。

1.2 L_1 图的构造算法

L_1 图的构造过程如下:

a) 输入:样本数据集记为数据矩阵

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_N], x_i \in \mathbb{R}^n$$

b) 计算稀疏表示。

对样本集 X 中每一个样本 x_i ,求解如下的 L_1 正则化最小二乘问题:

$$\begin{aligned} \min & \|B^i w^i - x_i\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^n w_j^i \\ \text{s. t.} & w_j^i \geq 0; j = i+1, i+2, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $B^i = [x_{i+1}, \dots, x_N]$; w^i 为第 i 个样本和其余 $N-1$ 个样本之间的权重, $w^i \in \mathbb{R}^{N-i-1}$ 。

c) 计算 L_1 图边的权重。

记图 $G = \langle V, W \rangle$, $V = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, W 为图的权重矩阵。

$$W_{ij} = \begin{cases} w_j^i & i > j \\ w_{j-1}^i & i < j \end{cases} \quad (7)$$

在计算中,为了能够适用于中大规模问题,本文使用内点算法求解式(6),对非负约束采用对数障碍函数,得到如下目标函数:

$$t \|B^i w^i - x_i\|_2^2 + t\lambda \sum_{j=i+1}^n w_j^i - \sum_{j=i+1}^n \log w_j^i \quad (8)$$

该问题的 Newton 方程为

$$(2tB^{iT}B^i + D)\Delta w = -g \quad (9)$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} 1/w_1^2 \\ \vdots \\ 1/w_n^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$g = 2tB^{iT}(B^i w^i - x_i) + \begin{bmatrix} t\lambda - 1/w_1^i \\ \vdots \\ t\lambda - 1/w_n^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

以初始点 w_0 开始按照如下迭代公式

$$w_{k+1} = w_k + \alpha_k \Delta w_k \quad (12)$$

迭代直至收敛。 α_k 是第 k 步迭代步长,采用一维搜索方法确定。

2 基于 L_1 图的谱聚类

谱聚类是一类十分重要的聚类方法,可以很好地处理流形结构如人脸图像的数据集。谱聚类使用图划分思想处理聚类问题,为了进行最优子图划分,首先构造拉普拉斯矩阵并进行特征分解,再利用特征向量将原始数据映射到低维特征子空间,最后利用经典方法进行聚类。

基于 L_1 图的谱聚类算法如下:

a) 初始化图相似性矩阵 $W' = O$, O 为零矩阵,构造图相似性矩阵

$$W' = (W + W^T)/2$$

b) 计算图 Laplacian 矩阵 $L = D^{-\frac{1}{2}} W' D^{-\frac{1}{2}}$, 其中 $D = [d_{ij}]_{N \times N}$ 是一个对角矩阵, $d_{ii} = \sum_j w_{ij}$ 。

c) 计算 L 的前 K 个特征值对应的特征向量 c_1, c_2, \dots, c_K , 按列进行排列构成特征矩阵 $C = [c_1, c_2, \dots, c_K]$ 。

d) 将矩阵 C 的每一行数据作为 \mathbb{R}^K 空间中的样本,使用 K-均值聚类算法将数据聚为 K 类。

在整个谱聚类的过程中,矩阵 W, W', D, L 和 C 都是稀疏矩阵,可以采用稀疏化技术提高计算存储效率。

3 实验结果与分析

为了验证本文模型和算法的有效性,在几个标准数据集上进行了实验。本文 L_1 图谱聚类与 Gaussian kernel 图、Laplacian eigenmap (LE) 图、PCA 降维的 K-均值聚类进行了实验比较。

3.1 数据集

本文实验在 USPS^[19]、YaleB^[20] 数据集上进行。USPS 手写数字数据集由 10 类数字 0~9 组成,共计有 9 298 个样本。在本文实验中,每个数字随机取 200 个样本,共计 2 000 个样本进行验证,每一幅图像大小为 16×16 像素,并进行归一化。YaleB 数据集为 38 人的图像样本集,每个人在不同光照条件下有大约 64 幅图像,将其裁剪为 32×32 像素,并进行归一化。

3.2 评价标准

评价聚类性能的指标为准确性 (accuracy, ACC) 和归一化互信息量 (normalized mutual information, NMI)。

记 L 为算法聚类结果, \tilde{L} 为已知样本类别, ACC 定义如下:

$$ACC = \frac{\sum_{i=1}^N \delta(\tilde{L}(i), \text{MAP}_{(L, \tilde{L})}(i))}{N} \quad (13)$$

其中: N 为样本数。

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\text{MAP}_{(L, \tilde{L})}(\cdot)$ 是将 L 和 \tilde{L} 的指标集最佳对应映射函数,该映射函数可由 Kuhn-Munkres 算法^[21]计算。

两个随机变量 X 和 Y 的互信息量 (MI) 定义如下:

$$MI(X, Y) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log \left(\frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right) \quad (15)$$

其中: $p(x)$ 、 $p(y)$ 分别为 X 和 Y 的边缘概率密度函数; $p(x, y)$ 为联合概率密度函数。将 MI 归一化得到 NMI 为

$$NMI(X, Y) = \frac{MI(X, Y)}{\max(H(X), H(Y))} \quad (16)$$

其中: $H(X)$ 为随机变量 X 的熵,即

$$H(X) = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x) \quad (17)$$

归一化后的 NMI 取值为 $[0, 1]$ 。

3.3 结果与分析

所有数据都进行了预处理,即数据进行归一化处理。本文算法中的参数 λ 使用交叉验证确定,首先在 $[10^{-5} \ 10^{-4} \ 10^{-3} \ 10^{-2} \ 10^{-1} \ 1 \ 10]$ 中选择最优参数,然后在该范围再进行进一步搜索。

在 USPS 数据集上选取三类数字 1, 2, 3 应用本文算法和 Laplacian 图 (Laplacian 特征映射)^[4] 以及 PCA + K-均值进行了比较。为了在二维空间可视化,在谱聚类算法得到的特征向量个数 $K=2$, 将其投影到平面,其结果如图 2 所示。

图 2(a) 和 (b) 显示了 L_1 图聚类与 LE 图谱聚类投影到二维的情形,从图中观察到 L_1 图和 LE 图相对于 PCA 投影有着更好的聚集性,而 L_1 图同类数据的聚类性要比 LE 图更好,数据聚类更加集中,从而有着更好的可分离性。在图 2(d) 中显示了 PCA 投影到二维的情形,可看出投影后的数据聚类比较散乱,部分数据重叠在一起,这种情况使用 K-均值聚类准确率较低,图 2(c) 反映了这一现象。

在 USPS 数据集上分别选择 2 类、4 类、6 类、8 类和 10 类数字,比较了本文算法与 LE 图、PCA-K-means、Gaussian-kernel 聚类的准确率和 NMI,其结果分别如图 3(a) 和图 4(a) 所示。在 YaleB 数据集上随机选择 10、20、30、38 个人的数据进行比

较,结果如图 3(b) 和图 4(b) 所示。所有算法中的参数都取 10 重交叉验证 (10 fold cross validation) 中的最好参数。

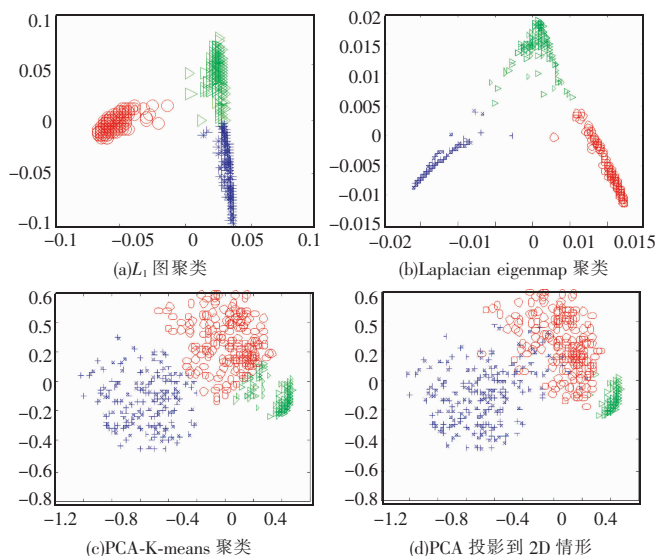


图2 三种方法聚类结果二维可视化

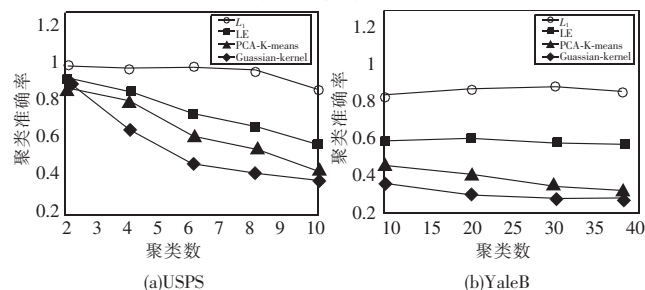


图3 在 USPS 和 YaleB 的聚类准确率

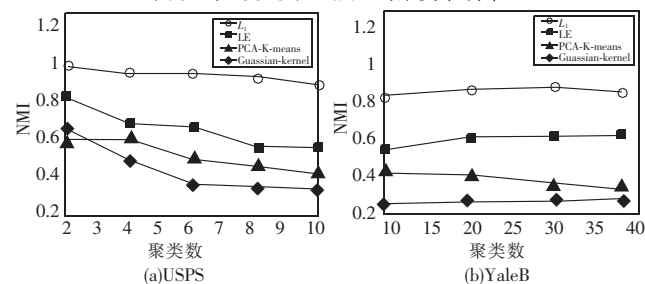


图4 在 USPS 和 YaleB 的聚类 NMI

从 USPS 和 YaleB 数据集上的实验结果看到,对于两种聚类性能度量基于 L_1 图的谱聚类均优于其他三种方法。基于 L_1 图和基于 Laplacian 特征映射的方法属于同一类方法,其区别在于构造图的方式不同,但是 L_1 方法大大优于 LE 方法,几种方法中 PCA 降维聚类次之,而 Gaussian kernel 图最差。各种方法在 YaleB 数据集上表现均有所降低,部分原因在于该数据集上人脸受光照和姿势的变化较大,因而识别的难度较大,但基于 L_1 图聚类仍是几种方法中表现最好的。

为了验证基于 L_1 图聚类的鲁棒性,在 YaleB 数据集上将 L_1 图和 PCA 分别加上不同强度的高斯噪声,并进行图像重构。在两幅图像上噪声强度为 0.05 和 0.1 的重构结果分别如图 5 和 6 所示,每个图中第一列为原图,第二列为加噪声后的图像,第三列为 L_1 重构结果,第四列为 PCA 重构结果。该实验中 L_1 算法只有可调参数 λ ,该参数取交叉验证最好值。PCA 取前若干主成分进行重构,取较少如两个主成分时,其重构误差较大。对于高斯噪声污染较大的图像样本,取主成分较多如 100 个时,相对于无噪样本其重构误差很大。图 5、6 的 PCA 实验中取前 10 个主成分,对加噪样本是 PCA 重构误差最小的。比较

L_1 重构和 PCA 重构结果, L_1 图比 PCA 重构误差更小。

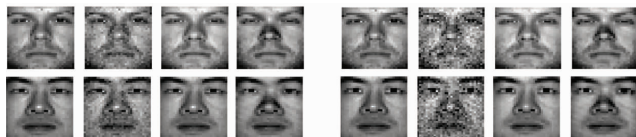


图5 高斯噪声(强度 0.05)
重构结果

图6 高斯噪声(强度 0.1)
重构结果

4 结束语

基于稀疏编码在谱聚类图的构造中提出一种改进 L_1 稀疏表示图模型。将待测样本表示为样本集中其他样本的稀疏线性组合,优化该表示的平方误差,同时对表示系数进行 L_1 正则化。该模型构造的边权对数据噪声有很好的鲁棒性,同时能够反映数据局部线性结构。在两个标准图像数据库上对算法进行了谱聚类实验,并与几种经典聚类算法进行了比较。实验结果表明该算法具有更好的聚类性能,对噪声数据具有较好的鲁棒性。所提出模型有一个正则化参数 λ ,该参数的选择对稀疏表示较为关键,如何选择仍有待进一步研究。此外,图的构造需要求解若干优化问题,因而相对一些经典算法如 PCA 耗时较长,对大规模问题如何加速算法是一个重要问题。

参考文献:

- [1] Xu Rui, Wunsch D. Survey of clustering algorithms[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2005, 16(3): 645-678.
- [2] 孙吉贵, 刘杰, 赵连宇. 聚类算法研究[J]. *软件学报*, 2008, 19(1): 48-61.
- [3] 蔡晓妍, 戴冠中, 杨黎斌. 谱聚类算法综述[J]. *计算机科学*, 2008, 35(7): 14-18.
- [4] Belkin M, Niyogi P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation[J]. *Neural Computation*, 2003, 15(6): 1373-1396.
- [5] Wu Zhenyu, Leahy R. An optimal graph theoretic approach to data clustering: theory and its application to image segmentation[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, 15(11): 1101-1113.
- [6] Shi Jianbo, Malik J. Normalized cuts and image segmentation[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000, 22(8): 888-905.
- [7] Hagen L, Kahng A B. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering[J]. *IEEE Trans on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 1992, 11(9): 1074-1085.
- [8] Ding C, He Xiaofeng, Zha Hongyuan, et al. Spectral min-max cut for graph partitioning and data clustering[R]. Berkeley: Lawrence Berkeley National Laboratory, 2001.
- [9] Zhuang Liansheng, Gao Shenghua, Tang Jinhui, et al. Constructing a nonnegative low-rank and sparse graph with data-adaptive features[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2014, 24(11): 3717-3728.
- [10] Cheng Bin, Yang Jianchao, Yan Shuicheng, et al. Learning with L_1 -graph for image analysis[J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 2009, 19(4): 858-866.
- [11] Donoho D L. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal L_1 -norm solution is also the sparsest solution[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(6): 797-829.
- [12] Meinshausen N, Bühlmann P. High-dimensional graphs and variable selection with the Lasso[J]. *Annals of Statistics*, 2006, 34(3): 1436-1462.
- [13] Wright J, Yang A Y, Arvind G, et al. Robust face recognition via sparse representation[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, 2009, 31(2): 210-227.
- [14] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129-159.
- [15] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Trans on Inform Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [16] Candès E J, Romberg J K, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.
- [17] Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the Lasso[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2011, 73(3): 273-282.
- [18] Zou Hui, Hastie T. Regularization and variable selection via the elastic net[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2005, 67(2): 301-320.
- [19] Hull J. A database for handwritten text recognition research[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994, 16(5): 550-554.
- [20] Lee K C, Ho J, Kriegman D J. Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting[J]. *IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005, 27(5): 684-698.
- [21] Chen S S, Saunders M A, Donoho D L. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(1): 129-159.
- [17] Bao Jie, Zheng Yu, Mokbel M F, et al. Location-based and preference-aware recommendation using sparse geo-social networking data[C]//Proc of the 20th International Conference on Advances in Geographic Information Systems. New York: ACM Press, 2012: 199-208.
- [18] Gao Huiji, Tang Jiliang, Liu Huan. gSCorr: modeling geo-social correlations for new check-ins on location-based social networks[C]//Proc of the 21st ACM International Conference on Information and Knowledge Management. New York: ACM Press, 2012: 1582-1586.
- [19] Kurashima T, Iwata T, Hoshida T, et al. Geo topic model: joint modeling of user's activity area and interests for local recommendation[C]//Proc of the 6th ACM International Conference on Web Search and Data Mining. New York: ACM Press, 2013: 375-384.
- [20] Wang Hao, Terrovitis M, Mamoulis N. Location recommendation in location-based social networks using user check-in data[C]//Proc of the 21st ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems. New York: ACM Press, 2013: 374-383.
- [21] Zhang Jiadong, Chow C Y. iGSLR: personalized geo-social location recommendation: a kernel density estimation approach[C]//Proc of the 21st ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems. New York: ACM Press, 2013: 334-343.
- [22] Yin Hongzhi, Cui Bin, Sun Yizhou, et al. Pollari K. LCARS: a spatial item recommender system[J]. *ACM Trans on Information Systems*, 2014, 32(3): Article No. 11.

(上接第 1640 页)

- [11] Zheng Yantao, Zha Zhengjun, Chua T S. Mining travel patterns from geotagged photos[J]. *ACM Trans on Intelligent Systems & Technology*, 2012, 3(3): 338-343.
- [12] Cheng Anjun, Chen Yanying, Huang Yenta, et al. Personalized travel re-recommendation by mining people attributes from community-contributed photos[C]//Proc of the 19th ACM International Conference on Multimedia. New York: ACM Press, 2011: 83-92.
- [13] Cheng Chen, Yang Haiqin, Lyu M R, et al. Where you like to go next: successive point-of-interest recommendation[C]//Proc of the 23rd International Joint Conference on Artificial Intelligence. Palo Alto, CA: AAAI Press, 2013.
- [14] Zhang Jiadong, Chow C Y, Li Yanhua. LORE: exploiting sequential influence for location recommendations[C]//Proc of the 2nd ACM SIGSPATIAL International Conference on Advances in Geographic Information Systems. New York: ACM Press, 2014: 103-112.
- [15] Chen Zaiben, Shen Hengtao, Zhou Xiaofang. Discovering popular routes from trajectories[C]//Proc of IEEE International Conference on Data Engineering. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2011: 900-911.
- [16] Kurashima T, Iwata T, Irie G, et al. Travel route recommendation using geotags in photo sharing sites[C]//Proc of the 19th ACM International Conference on Information and Knowledge Management. New York: ACM Press, 2010: 579-588.