

基于多策略排序变异的多目标差分进化算法*

艾兵, 董明刚[†], 敬超

(桂林理工大学 信息科学与工程学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 针对多目标差分进化算法求解多目标优化问题时收敛慢和均匀性欠佳等不足, 提出了一种基于多策略排序变异的多目标差分进化算法。该算法利用基于排序变异算子来快速接近真实的 Pareto 最优解, 同时引入多策略差分进化算子以保持种群的多样性; 通过自适应策略动态调整控制参数以提高算法的鲁棒性, 并且从理论证明的角度分析了所提算法的收敛性。仿真实验结果表明, 该算法相对于近期相关文献中的改进算法具有更好的收敛性与多样性, 从而表明了所提算法的有效性。

关键词: 多目标优化; 多策略差分进化; 排序变异算子; 自适应参数调整

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2018)07-1950-05

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2018.07.006

Multi-objective differential evolution algorithm with multi-strategy and ranking-based mutation

Ai Bing, Dong Minggang[†], Jing Chao

(School of Information Science & Engineering, Guilin University of Technology, Guilin Guangxi 541004, China)

Abstract: Focused on slow convergence and poor uniformity of multi-objective differential evolution algorithm in solving multi-objective optimization problems, this paper put forward a multi-objective differential evolution algorithm with multi-strategy and ranking-based mutation. This algorithm took full advantage of ranking-based mutation operator to approximate the true Pareto optimal solutions quickly, and introduced the multi-strategy differential evolution operator to maintain the diversity of population. It adjusted the control parameters dynamically through the adaptive parameter adjustment to enhance the robustness. This paper analyzed the convergence of the proposed algorithm from the point of view of theoretical proof. Simulation results indicate that, compared with some recently proposed improved algorithms, the proposed algorithm has better convergence and diversity, which demonstrates the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: multi-objective optimization; multi-strategy differential evolution; ranking-based mutation operator; adaptive parameter adjustment

0 引言

大多数工程和科学研究领域中的问题都可以归结为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOP)^[1], 各目标彼此冲突会导致通常不存在一个最优解满足所有的优化目标。多目标进化算法(multiobjective evolutionary algorithm, MOEA)已经发展成为求解 MOP 的主流方法之一^[2]。其中, 多目标差分进化算法因其简单有效等优点, 已成为近几年多目标优化领域研究的热点之一^[3,4]。

Venske 等人^[5]将基于分解的多目标进化算法与自适应的差分策略相结合, 提出了一种自适应的多目标差分进化算法。Rakshit 等人^[6]给出了一种新策略来延长传统多目标差分算法的选择步骤, 以此在噪声因素存在的情况下有效地获得 Pareto 最优解。Wang 等人^[7]提出了一种新的改进多目标差分进化算法来处理约束优化问题。Singh 等人^[8]提出了一种新的复发式多目标差分进化算法来解决非线性且多目标的约束性无功管理问题。Kotinis^[9]将参数模糊自适应方法和 K 中心点聚类策略这两者与多目标差分进化算法结合, 从而提高算法性能。

尽管近几年在多目标差分进化算法方面已取得不少重要进展, 但如何提高算法的收敛速度和解的多样性, 仍是多目标差分进化算法研究所面临的重要挑战。考虑到在多目标优化中, 保持种群中良好信息的传递和交流与提高群体的收敛性一

样重要, Chen 等人^[10]提出了一种基于排序变异算子的多目标差分进化(MODE-RMO)算法, 该算法将基于排序变异算子融入 MOEA 中有利于开拓种群中的个体信息和提高算法快速收敛到真实 Pareto 前沿的性能; 但该算法缺乏更为有效的机制推动其进一步搜寻到更宽广的区域。文献[11, 12]的研究结果表明多策略差分进化融入多目标优化算法中可有效提高算法的多样性和分布性等性能。基于此, 为了能更快地寻找到 MOP 中的真实 Pareto 最优解, 同时使得所求解在 Pareto 前沿上分布更加宽广和均匀, 本文提出了一种基于多策略排序变异的多目标差分进化算法(multi-objective differential evolution algorithm with multi-strategy and ranking-based mutation, MODE-MSRM)。MODE-MSRM 利用 MODE-RMO 算法的快速接近真实最优解的优势以及多策略差分进化能增强搜索多样性的特点, 将其相结合并实现两者之间的互补性, 进而整体上提高算法的性能。将 MODE-MSRM 与近期三种改进的多目标优化算法对 ZDT 以及 DTLZ 测试函数进行数值实验仿真, 结果表明该算法无论在 Pareto 最优解集的逼近性还是均匀性方面均优于相关文献中的多目标优化算法, 从而验证本文所提出的算法比较适合 MOP 的求解。

1 多目标优化问题的描述

不失一般性, 以最小化多目标问题为研究对象, 一个具有

收稿日期: 2017-03-14; **修回日期:** 2017-04-27 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(61563012, 61203109); 广西自然科学基金资助项目(2014GXNSFAA118371, 2015GXNSFBA139260); 广西研究生教育创新计划资助项目(YCSZ2015165)

作者简介: 艾兵(1990-), 男, 安徽合肥人, 硕士研究生, 主要研究方向为智能计算; 董明刚(1977-), 男(通信作者), 湖北安陆人, 教授, 博士, 主要研究方向为智能计算及其应用(d2015mg@qq.com); 敬超(1983-), 男, 河南长葛人, 讲师, 博士, 主要研究方向为云数据中心能耗管理。

m 个决策变量、 M 个优化目标的多目标优化问题的数学描述如下:

$$\min_{x \in R} F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)]^T \quad (1)$$

$$\text{s. t. } g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

$$h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (3)$$

$$R = \{x | g(x) \leq 0, h_j(x) = 0\} \quad (4)$$

其中: $F(x)$ 为优化目标向量; $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ 为决策变量矢量; R 为可行域; $g_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 分别表示不等式和等式约束; p 和 q 分别为不等式和等式约束个数。根据式(1)~(4)可知, 多目标优化问题就是从满足约束条件式(2)和(3)的所有可行解中, 确定使得所有优化目标获得最优解的特定集合。

2 改进的多目标差分进化算法

2.1 基于多策略排序变异的 DE 算子

DE 算法存在多种进化模式, 其差别主要体现在差分算子变异公式的不同。下面根据文献[13]给出常见的六种进化模式, 具体描述如式(5)~(10)所示。

DE/rand/1:

$$v_{i,G} = x_{r_1,G} + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) \quad (5)$$

DE/rand/2:

$$v_{i,G} = x_{r_1,G} + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) + F(x_{r_4,G} - x_{r_5,G}) \quad (6)$$

DE/best/1:

$$v_{i,G} = x_{\text{best},G} + F(x_{r_1,G} - x_{r_2,G}) \quad (7)$$

DE/best/2:

$$v_{i,G} = x_{\text{best},G} + F(x_{r_1,G} - x_{r_2,G}) + F(x_{r_3,G} - x_{r_4,G}) \quad (8)$$

DE/current-to-best/1:

$$v_{i,G} = x_{i,G} + F(x_{\text{best},G} - x_{i,G}) + F(x_{r_1,G} - x_{r_2,G}) \quad (9)$$

DE/rand-to-best/1:

$$v_{i,G} = x_{r_1,G} + F(x_{\text{best},G} - x_{r_1,G}) + F(x_{r_2,G} - x_{r_3,G}) \quad (10)$$

其中: $r_k \in \{1, 2, \dots, NP\}$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) 互不相同且 $r_k \neq i$ (i 为当前个体索引); F 为缩放因子; G 为进化代数; NP 为种群规模大小; $x_{\text{best},G}$ 为第 G 代的最优个体; $v_{i,G}$ 为每个目标矢量 $x_{i,G}$ 实施变异操作后所对应的变异矢量; $x_{r_1,G}$ 为基向量; $(x_{k,G} - x_{k+1,G})$ 为随机差分向量。

DE/rand/1 和 DE/rand/2 具有较高的算法勘探性; DE/best/1、DE/best/2、DE/current-to-best/1 和 DE/rand-to-best/1 由于引入当前最优个体使其更具有开采性, 其中 DE/rand-to-best/1 还同时具有较强的勘探性^[13]; 而 DE/rand/1 和 DE/best/1 较 DE/rand/2 和 DE/best/2 具有更加简洁的结构。因此, 本文利用 DE/rand/1、DE/best/1 和 DE/rand-to-best/1 这三种进化模式来实现个体变异。

由于上述进化模式既存在结构和进化方式的共同特征, 又具有性能差异的特点, 这种共性与差异使得它们可以协作进化。通过上述三种模式的协同进化作用可产生新一代群体。具体定义如下:

$$v_{i,G} = \begin{cases} \text{DE/rand/1} & \text{rand}_j(0,1) \leq CR \text{ 或 } j = j_{\text{rand}} \text{ 且 } M = 1 \\ \text{DE/best/1} & \text{rand}_j(0,1) \leq CR \text{ 或 } j = j_{\text{rand}} \text{ 且 } M = 2 \\ \text{DE/rand-to-best/1} & \text{rand}_j(0,1) \leq CR \text{ 或 } j = j_{\text{rand}} \text{ 且 } M = 3 \end{cases} \quad (11)$$

其中: M 为 $(i \bmod 3) + 1$, \bmod 为取余操作。

一般 DE 算法的变异操作过程中, 用来被变异的基矢量和差分矢量均是从当前进化种群中随机选择的, 这虽然有利于算法进行全局搜索, 但是不利于算法收敛速率的提高。鉴于此, 考虑到较好的种群个体拥有优良信息, 而且常被选择用于繁殖产生后代个体, 本文采用基于排序变异算子来平衡算法的勘探和开采性并加快收敛速率。通过 NSGA-II^[14] 中的 Pareto 非支配排序和聚集距离所得到的偏序关系对种群进行排序, 因此在已排序的种群中第 i 个个体的排序次序为 $(NP - i + 1)$ 。记第 i 个个体的选择概率为 p_i , 具体表达如式(12)所示。

$$p_i = 0.5(1.0 - \cos(\frac{(NP - i + 1)\pi}{NP})) \quad i = 1, 2, \dots, NP \quad (12)$$

若差分矢量 $(x_{k,G} - x_{k+1,G})$ 中的 $x_{k,G}$ 与 $x_{k+1,G}$ 均根据各自的选择概率 p_k 和 p_{k+1} 进行选择, 即 DE/rand/1 和 DE/rand-to-best/1 中的 $x_{r_1,G}$ 、 $x_{r_2,G}$ 和 $x_{r_3,G}$ 以及 DE/best/1 中的 $x_{r_1,G}$ 、 $x_{r_2,G}$ 都采用图 1 中的基于排序变异算子进行选择, 将会造成算法早熟收敛^[10], 从而降低了算法的性能。因此在多策略 DE 算子中, 针对 DE/rand/1 和 DE/rand-to-best/1 这两种进化模式采用如图 1 所示的基于排序变异算子的操作, 而 DE/best/1 则采用如图 2 所示的基于排序变异算子的操作, 从而得到基于多策略排序变异的 DE 算子。

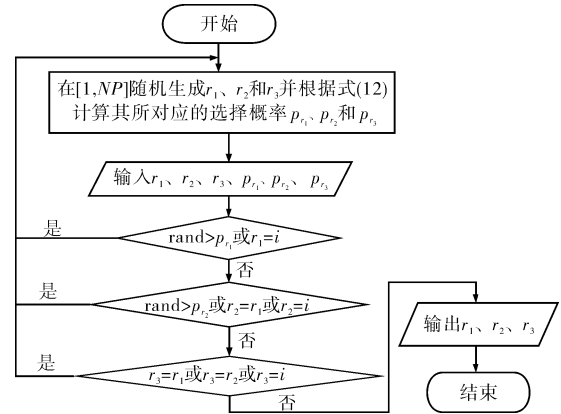


图1 基于排序变异算子的操作1

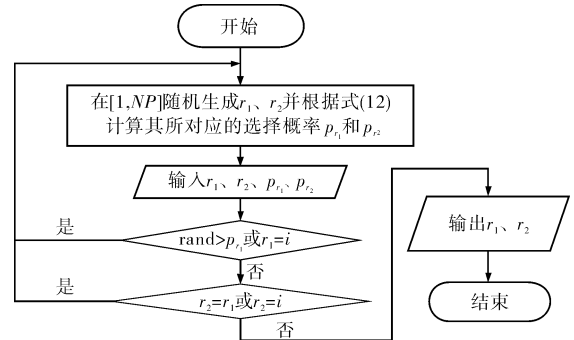


图2 基于排序变异算子的操作2

由图 1 和 2 可知在当前种群中, 最好的个体将获得最高的排序, 即其有较大的概率被选择作为基向量或差分向量, 这显然有利于将种群中的良好信息传播给后代。

2.2 基于占优关系的最优个体的选择策略

在第 G 代, DE/best/1 和 DE/rand-to-best/1 这两种差分变异策略中均含有最优个体 $x_{\text{best},G}$ 。然而不同于单目标优化, 在 MOP 中是由多个目标函数对应的多个 $x_{\text{best},G}$ 所构成的最优个体集合, 因此, 如何从集合中选择最优个体显得至关重要。首先分别找出 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 \dots 、 $f_M(x)$ 最小时所对应的最优个体, 记为 $x_{\text{best},G}^1, x_{\text{best},G}^2, \dots, x_{\text{best},G}^M \in U(x_{\text{best},G})$ (M 为目标函数个数); 然后把 $U(x_{\text{best},G})$ 中的每个元素分别作为差分变异策略中的最优个体进行差分变异, 从而得到所对应的变异个体, 记为 $v_{i,G}^1, v_{i,G}^2, \dots, v_{i,G}^M \in U(v_{i,G})$, 对 $U(v_{i,G})$ 的每个元素进行占优关系^[1] 计算; 最后将非支配个体作为最终的多目标差分进化算法中的差分变异个体。

2.3 控制参数自适应

由于变异操作的高效性很大程度上依赖于 F 的合理选择, CR 是保证种群多样性和分布性的有效参数。若对 F 和 CR 采用固定的参数或随进化次数线性变化等策略, 则不能充分利用种群个体之间的信息, 进而无法较好地适应多目标优化的需求。所以, 采用控制参数自适应策略来增强算法的鲁棒性, 从而进一步提高算法的整体性能。

为了促使算法的持续进化,需保证 F 和 CR 的差异性。在每一代的进化过程中,为每一个目标矢量 $x_{i,G}$ 产生一个缩放因子 $F_{i,G}$ 和交叉率 $CR_{i,G}$ 。根据文献[15]可知正态分布和柯西分布能保证种群的多样性,因此,分别将正态分布和柯西分布引入变异操作中,即对 F 作以 uF 为均值、0.1 为方差的正态分布的随机值和以 uCR 为位置参数、0.1 为尺度参数的柯西分布,其中 uF 和 uCR 的初始值均设置为 0.5。基于在每一代进化过程中,父代个体与子代个体均有优劣之分思想,将产生较优子代个体所采用的 F 和 CR 保存至 S_F 和 S_{CR} 中,将 S_F 和 S_{CR} 所包含的信息运用于 uF 和 uCR 的更新中,具体可见式(13)和(14),当 $F_{i,G}$ 和 $CR_{i,G}$ 超出(0.3,0.7)则将它们进行重新设置。

$$uF(G+1) = \alpha_F u F(G) + (1 - \alpha_F) \left(\sum_{F_i \in S_F} F_i^2 \right) / \left(\sum_{F_i \in S_F} F_i \right) \quad (13)$$

$$uCR(G+1) = \alpha_{CR} u CR(G) + (1 - \alpha_{CR}) \left(\sum_{CR_i \in S_{CR}} CR_i^2 \right) / \left(\sum_{CR_i \in S_{CR}} CR_i \right) \quad (14)$$

其中: α_F 和 α_{CR} 均是(0,1)的常数。

经过上述适应更新规则, F 和 CR 在没有增加算法时间复杂度的情况下,这种根据优化过程自适应地进行调整并寻找到合适的控制参数值的策略符合群体进化的一般规律,从而提高了算法的全局收敛性。

2.4 越界处理策略

大多数算法中对实验矢量 $u_{i,j,G}$ 的越界处理方法为重新初始化的方法,即如果 $u_{i,j,G}$ 中的某一个变量超越所设定的界限,则利用在边界范围内的均匀分布值来代替。但此策略造成算法的收敛性降低,本文为了提高算法的性能,即采用文献[5]所示中的越界处理策略,采用如式(15)的修补算子对该变量进行修正。

$$u'_{i,j,G} = \begin{cases} \min\{ubound_j, 2lbound_j - u_{i,j,G}\} & \text{while } u_{i,j,G} < lbound_j \\ \max\{lbound_j, 2ubound_j - u_{i,j,G}\} & \text{while } u_{i,j,G} > ubound_j \end{cases} \quad (15)$$

其中: $u'_{i,j,G}$ 为经过修复后第 G 代所产生的第 i 个新个体的第 j 维的向量; $ubound_j$ 和 $lbound_j$ 分别表示上、下界。

2.5 算法的基本流程

综上所述,本文提出了一种基于多策略排序变异的多目标差分进化算法,其详细的算法流程可表示如下:

输入:具有 M 个目标的待优化问题 MOP;具有 m 个决策变量的搜索空间 S^m ;初始化参数:选定种群规模 NP ,最大进化代数 G_{\max} 。

输出:近似的 Pareto 最优解集。

a) 种群初始化。通过随机初始化方法产生种群 $P = \{x_1, x_2, \dots, x_{NP}\}$ 。

b) 计算每个个体 $x_{i,G}$ 的适应度值,求出当前种群中最优适应度值。

c) 根据第 2.2 节产生缩放因子 $F_{i,G}$ 和交叉率 $CR_{i,G}$ 。

d) 按照图 1、2 中的基于多策略排序变异的 DE 算子以及占优关系进行差分变异操作,得到 $x_{i,j,G}$ 所对应的变异个体 $v_{i,j,G}$ 。

e) 根据式(16)在父代个体 $x_{i,j,G}$ 与变异个体 $v_{i,j,G}$ 之间执行交叉操作,生成实验矢量 $u_{i,j,G}$,并根据式(15)对其中变量进行越界校正处理以防止 $u_{i,j,G}$ 中的某个变量超出所设定的边界范围。

$$u_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G} & \text{rand}_j(0,1) \leq CR_{i,G} \text{ 或 } j = j_{\text{rand}} \\ x_{i,j,G} & \text{其他} \end{cases} \quad (16)$$

其中: $\text{rand}_j(0,1)$ 表示第 j 维的在(0,1)内均匀分布的随机数; $CR \in (0,1)$ 为交叉概率; j_{rand} 为 1 ~ m 的随机整数。

f) 采用 Pareto 非支配排序和拥挤距离的机制选择下一代个体,即通过交叉操作后采用精英保留机制选择子代个体,即若由式(16)中的交叉产生个体 $u_{i,G}$ 占优种群中个体 $x_{i,G}$,则选择 $u_{i,G}$ 作为子代个体;若 $x_{i,G}$ 占优 $u_{i,G}$,则选择 $x_{i,G}$ 作为子代个体;若两者互不占优,考虑到维持外部档案的多样性,则选择 $u_{i,G}$ 作为子代个体。另外,由于上述竞争方式可能导致非支配解个体数目大于种群规模大小 NP ,此时需要利用 NSGA-II 的 Pareto 非支配排序和拥挤距离对种群进行剪切。

g) 终止条件判断。通过预设一个最大进化迭代次数来使算法终止运行,若满足终止条件,令 $G = G + 1$ 并返回至步骤 b);否则,输出所求解问题的 Pareto 最优解集并结束运行。

3 算法性能分析

3.1 算法的时间复杂度分析

设 M 是待优化问题的目标函数的个数, T_{\max} 是最大进化迭代代数, NP 是种群规模, D 是待优化问题的维数,非被占优排序的时间复杂度为 $O(M \times NP^2)$,计算拥挤距离的时间复杂度为 $O(M \times (2NP) \log(2NP))$,进行基于变异排序的时间复杂度为 $O(M \times NP)$ 。在执行多策略差分进化算子在每次迭代过程中仅有一步被予以执行,并不增加额外的计算量,故其与一般 DE 算法具有相同的时间复杂度,即为 $O(D \times M \times NP)$ 。因此,本文所提算法的总体时间复杂度为 $O(T_{\max} \times M \times NP^2 + T_{\max} \times M \times (2NP) \log(2NP) + T_{\max} \times D \times M \times NP)$,也就是 $O(T_{\max} \times M \times NP^2)$,与 MODE-RMO 和 NSGA-II 这两种算法具有相同的时间复杂度。

3.2 支配关系证明和算法收敛性分析

针对第 2.2 节中如何从所有的 $x_{\text{best},G}$ 中选择最优个体作为最终变异策略的最优个体引入定理 1。

定理 1 对于变异个体 $v_{i,G}^1, v_{i,G}^2, \dots, v_{i,G}^M$, 如果 $v_{i,G}^1 > v_{i,G}^2, v_{i,G}^2 > v_{i,G}^3, \dots, v_{i,G}^{M-1} > v_{i,G}^M$ 则 $v_{i,G}^1 > v_{i,G}^3 > \dots > v_{i,G}^M$, 其中 $M(M \geq 2)$ 为目标函数个数。

证明 因为 $v_{i,G}^1 > v_{i,G}^2, v_{i,G}^2 > v_{i,G}^3, \dots, v_{i,G}^{M-1} > v_{i,G}^M$, 根据文献[1]中的多目标优化问题中的占优关系定义可知,由于本文是研究最小化问题,所以目标函数为

$$f_j(v_{i,G}^1) \leq f_j(v_{i,G}^2) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (17)$$

$$\text{而且} \quad f_j(v_{i,G}^1) < f_j(v_{i,G}^2) \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (18)$$

又因为 $v_{i,G}^2 > v_{i,G}^3$, 所以得到

$$f_j(v_{i,G}^2) \leq f_j(v_{i,G}^3) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (19)$$

$$\text{而且} \quad f_j(v_{i,G}^2) < f_j(v_{i,G}^3) \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (20)$$

对于 $U(v_{i,G})$ 中的剩余个体重复上述过程,可得

$$f_j(v_{i,G}^3) \leq f_j(v_{i,G}^4) \leq f_j(v_{i,G}^5), \dots, f_j(v_{i,G}^{M-1}) \leq f_j(v_{i,G}^M) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (21)$$

$$\text{而且} \quad f_j(v_{i,G}^3) < f_j(v_{i,G}^4) < f_j(v_{i,G}^5), \dots, f_j(v_{i,G}^{M-1}) < f_j(v_{i,G}^M) \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (22)$$

成立。由式(11)(13)和(15)可知

$$f_j(v_{i,G}^1) \leq f_j(v_{i,G}^2) \leq f_j(v_{i,G}^3), \dots, f_j(v_{i,G}^{M-1}) \leq f_j(v_{i,G}^M) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (23)$$

由式(12)(14)和(16)可知

$$f_j(v_{i,G}^1) < f_j(v_{i,G}^2) < f_j(v_{i,G}^3), \dots, f_j(v_{i,G}^{M-1}) < f_j(v_{i,G}^M) \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, M\} \quad (24)$$

最后由式(23)和(24)以及占优关系定义可得 $v_{i,G}^1 > v_{i,G}^2 > v_{i,G}^3 > \dots > v_{i,G}^M$, 上述定理得证。

定理 2 MODE-MSRM 算法如果满足以下两个条件:a)理论最优边界的 BOX 计数维数不大于目标数减 1;b)算法每次迭代产生的最优解集合是单调的。则 MODE-MSRM 能以概率 1 收敛到理论最优解集合。

证明 针对第一个条件,本文所提算法显然满足。针对第二个条件,每次迭代产生的最优解集合是单调的,即 $P_{\text{known}}(G+1) \supseteq P_{\text{known}}(G)$, $P_{\text{known}}(G+1)$ 中不存在受 $P_{\text{known}}(G)$ 所支配的向量,但在 $P_{\text{known}}(G)$ 中可能存在受 $P_{\text{known}}(G+1)$ 所支配的向量。由于多目标进化算法的收敛过程是通过 P_{known} 不断逼近 P_{true} 实现的,而由文献[15]可知多策略差分进化算子具有 DE 所有特性且具有多样性和多模式协作进化的作用,文献[16]证明了其具有渐进收敛性的特征。所以基于多策略排序变异的 DE 算子在一定程度上能促进算法的收敛性。根据文献[17]可知,若 $\forall x \in PA, \neg \exists y \in PB$, 使 $y > x$, 则可定义进化种群的关系为 $PA \supseteq PB$ 。假设在某一代数 G , 使得 $P_{\text{known}}(G+1) < P_{\text{known}}(G)$, 因此若 $\forall y \in P_{\text{known}}(G), x \in P_{\text{known}}(G+1)$, 使 $y > x$ 。

当 $y \in P_{\text{known}}(G) \cup P_{\text{known}}(G+1)$, 根据 NSGA-II 算法中的 Pareto 非占优排序和聚集距离所得的偏序关系, 即若边界集序 $y_{\text{rank}} < x_{\text{rank}}$ 或 $y_{\text{rank}} = x_{\text{rank}}$ 且 $\text{Cdis}[y] > \text{Cdis}[x]$ 。根据上述偏序关系所建立的偏序集可知在 $P_{\text{known}}(G+1)$ 不存在相互支配的解, 即当 $y \in P_{\text{known}}(G) \cup P_{\text{known}}(G+1)$, $x \in P_{\text{known}}(G+1)$, 使 $y > x$ 不成立; 如果 $y \in P_{\text{known}}(G)$ 且 $y \notin P_{\text{known}}(G+1)$, 由 $y \notin P_{\text{known}}(G+1)$ 可知在 $P_{\text{known}}(G+1)$ 中存在支配 y 的向量, 这里可以设存在支配 y 的向量 z , 也就是说当在 $P_{\text{known}}(G+1)$ 中 $z > x$, 则淘汰 y 。按照定理 1 可知占优关系之间存在传递性, 则 $P_{\text{known}}(G+1)$ 中 z 和 x 的关系为 $z > x$, 但这与偏序集中不存在相互占优的解相矛盾, 故 $z > x$ 不成立。因此, 不存在某一代数 G , 使 $P_{\text{known}}(G+1) < P_{\text{known}}(G)$ 。因此, MODE-MSRM 满足第二个条件。

可以将 MODE-MSRM 算法的执行过程看做一个马尔可夫收敛过程, 根据文献[17]可知, 如果一个进化算法满足上述两个条件, 则其执行状态完全满足马尔可夫收敛定理, 那么有 $\text{Prob}(\lim_{G \rightarrow \infty} \{P_{\text{true}} = P_{\text{known}}(G)\}) = 1$ 。

综上所述, MODE-MSRM 算法能以概率 1 收敛到理论最优解集合。

3.3 算法的特点

a) 在基于排序变异和占优关系的多策略差分进化算子中, 较好的父代个体将被选择, 有利于良好信息的传递且三种差分策略的协同进化保证算法多样性, 从而整体上提高了算法的求解性能;

b) 通过上述算法时间复杂度的分析可知, 本文所提出的算法相对于文献[10]中的算法只增加了较小的计算量, 并未引起算法复杂度的大幅度提升;

c) 本文所提出的算法结构较为简单, 比较容易实施, 而且保持了算法的简洁性能。

4 实例仿真与分析

4.1 测试函数及参数设置

为了验证本文所提出算法的有效性, 选取 ZDT 中的 ZDT1~4、ZDT6 等五个测试函数和 DTLZ 中的 DTLZ1~DTLZ6 等六个测试函数进行数值实验, 各函数的具体形式可参见文献[10]。其中, ZDT1~ZDT3 的问题决策数为 30, ZDT4 的决策数为 10; DTLZ1 的决策数目为 7, DTLZ2~DTLZ5 问题决策数为 12。将 MODE-MSRM 与 MODE-RMO 算法^[10]、基于熵密度评估和自适应变异的多目标粒子群优化(MOQPSO-AE)算法^[18]以及基于量子行为特性的粒子群优化和拥挤距离排序的多目标量子粒

子群优化(MOQPSO-CD)算法^[19]相比较。为了公平比较, 上述所有算法在每个测试上的初始种群规模大小均设置为 $NP = 100$, 所有算法的最大迭代次数为 $T_{\text{max}} = 200$ (其中 DTLZ3 较难优化, 设其迭代次数为 500)。

针对本算法, $\alpha_F = 0.5$, $\alpha_{GR} = 0.5$ 。针对 MODE-RMO、MOQPSO-AE 和 MODE-RMO 三种算法的参数可以分别参考文献[10, 18, 19]。

4.2 算法性能度量指标

根据多目标优化的研究目的, 即快速找到逼近真实 Pareto 前沿且在其上分布均匀的解集, 本文将在算法所获解集的逼近性和分布性上进行评估, 即以世代距离(generational distance, GD)^[20]及间隔指标(spacing, SP)^[20]定量分析算法的性能, 两者的具体定义分别如式(25)(26)所示。其中, GD 为收敛性评价指标, 用于衡量算法所得非支配解对所求解问题的真实最优解的逼近程度, 其值越小说明算法收敛性越好; 而 SP 为解集的分布性评价指标, 其值越小说明最优解集分布越均匀。

GD 的定义如下:

$$GD = (\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2})/n \quad (25)$$

其中: n 是解集中解的个数; d_i 是每个解距离真实前沿的最小欧氏距离。

SP 的定义如下:

$$SP = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (\bar{d} - d_i)^2)/(n-1)}$$

$$d_i = \min_j (\sum_{k=1}^m |f_k^i - f_k^j|) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

其中: \bar{d} 是所有 d_i 的平均值; m 是问题的目标维数; f_k^i 和 f_k^j 分别为第 i 和 j 个解的第 k 维目标值。

4.3 实验结果与分析

仿真实验的测试均在硬件配置为 Pentium CPU 2.60 GHz、内存大小 2 GB 且操作系统为 Windows 7 的台式计算机上运行, 程序采用 MATLAB 7.0 编写。为了减少多目标优化算法中的随机因素对算法性能分析的影响, 本文中所比较的算法对每个测试函数独立运行 20 次结果取其平均值。表 1 给出了三种算法求解所获得的性能度量指标的统计结果。

从表 1 中的数据容易看出, MODE-MSRM 算法在 ZDT 系列测试函数上的 GD 和 SP 指标值均最小, 说明本文所提算法中的一系列策略有助于算法收敛性的提升和解集分布性的改善。在求解三目标的 DTLZ 系列函数上, 相较于 MODE-RMO、MOQPSO-AE 和 MOQPSO-CD 这三种算法, 本文算法仍具有明显的优势, 不仅能达到较好的收敛性, 还能获得良好的解集分布。

表 1 测试函数的实验统计结果

函数	MODE-MSRM		MODE-RMO		MOQPSO-AE ^[18]		MOQPSO-CD ^[19]	
	GD	SP	GD	SP	GD	SP	GD	SP
ZDT1	2.45E-04	5.34E-03	1.18E-03	6.26E-03	8.71E-04	7.26E-03	8.51E-03	6.92E-03
ZDT2	1.21E-04	3.37E-03	1.91E-03	7.40E-03	7.32E-04	4.23E-03	6.24E-04	6.80E-03
ZDT3	1.83E-04	5.41E-03	9.36E-04	7.46E-03	1.24E-03	5.87E-03	1.65E-03	9.55E-03
ZDT4	2.54E-04	5.51E-03	1.17E-02	2.29E-02	7.56E-04	6.16E-03	8.86E-02	7.47E-03
DTLZ1	1.82E-04	1.84E-02	2.39E-04	2.57E-02	9.23E-04	1.82E-02	8.23E-04	2.00E-02
DTLZ2	5.32E-04	4.47E-02	6.38E-04	4.91E-02	1.11E-02	6.03E-02	1.32E-02	7.30E-02
DTLZ3	5.29E-04	4.46E-02	6.82E-04	5.58E-02	-	-	-	-
DTLZ4	5.58E-04	5.10E-02	5.87E-04	5.38E-02	-	-	-	-
DTLZ5	7.06E-06	9.45E-03	7.06E-06	1.05E-02	-	-	-	-

Zitzler 等人^[21]指出仅采用数值评价标准不能完全反映算法性能的优劣, 为此, 本文绘制出算法获得的非劣解集, 以更直观地了解该算法的性能。图 3~11 展示了 MODE-MSRM 算法在 ZDT、DTLZ 系列测试函数上获得的 Pareto 前沿分布图(图中的 true PF 指的是所优化问题的真正 Pareto 前沿)。

从图 3~6 可以看出, 针对 ZDT 系列测试函数, 本文算法

所得到的非劣解集能较好地逼近所求解问题的真正 Pareto 前沿且分布比较均匀; 从图 7~11 可以看出, 针对 DTLZ 系列测试函数, 本文所提算法均能正确地收敛到最优面。

综上所述, 本文所提出的算法相对于其他三种算法, 在保证收敛性的前提下具有更好的分布性, 有效地改善了算法的性能。

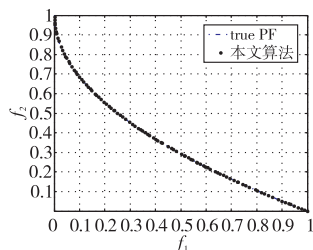


图3 ZDT1的仿真

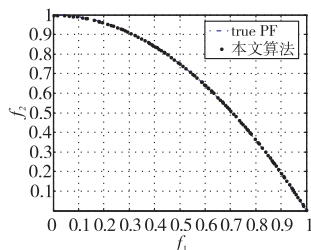


图4 ZDT2的仿真

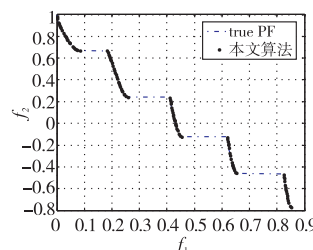


图5 ZDT3的仿真

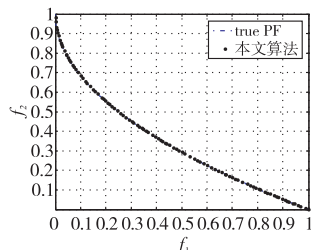


图6 ZDT4的仿真

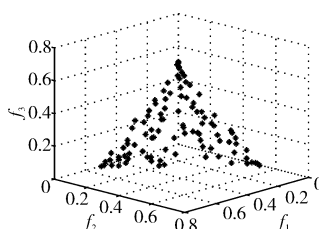


图7 DTLZ1的仿真

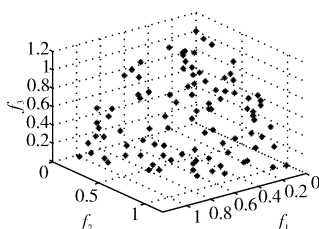


图8 DTLZ2的仿真

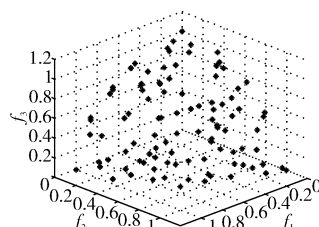


图9 DTLZ3的仿真

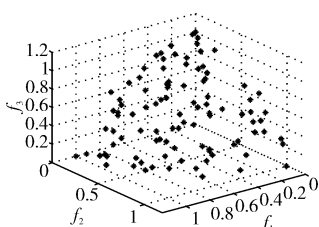


图10 DTLZ4的仿真

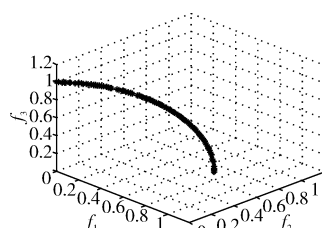


图11 DTLZ5的仿真

5 结束语

本文在研究了多目标优化问题的基础上,提出了一种基于多策略排序变异的多目标差分进化算法。将基于排序的变异算子与多进化模式协作的差分进化算法结合,增强种群的多样性,通过引进占优关系计算得到DE/best/1和DE/rand-to-best/1中的差分变异个体。在没有增加算法时间复杂度的情况下,根据历史经验不断更新来满足不同阶段的要求,以此使缩放因子和交叉概率能进行自适应调整。通过上述一系列策略,进一步提高了算法的性能。

理论分析表明针对MOP,MODE-MSRM算法能收敛到最优解集合。对基准多目标测试函数的仿真结果可知MODE-MSRM算法无论在Pareto最优解集的逼近性还是均匀性方面均优于有关文献中的多目标优化算法,从而验证了MODE-

MSRM算法在求解MOP的有效性。

参考文献:

- [1] 胡旺, Yen G G, 张鑫. 基于 Pareto 熵的多目标粒子群优化算法[J]. 软件学报, 2014, 25(5): 1025-1050.
- [2] 周爱民, 张青富, 张桂成. 一种基于混合高斯模型的多目标进化算法[J]. 软件学报, 2014, 25(5): 913-928.
- [3] 王万良, 范丽霞, 徐新黎, 等. 多目标差分进化算法求解柔性作业车间批量调度问题[J]. 计算机集成制造系统, 2013, 19(10): 2481-2492.
- [4] Gholaminezhad I, Jamali A. A multi-objective differential evolution approach based on ε -elimination uniform-diversity for mechanism design[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 2015, 52(5): 861-877.
- [5] Venske S M, Gonçalves R A, Delgado M R. ADEMO/D: multi-objective optimization by an adaptive differential evolution algorithm[J]. Neurocomputing, 2014, 127(3): 65-77.
- [6] Rakshit P, Konar A. Extending multi-objective differential evolution for optimization in presence of noise[J]. Information Sciences, 2015, 305(6): 56-76.
- [7] Wang Yong, Cai Zixing. Combining multi-objective optimization with differential evolution to solve constrained optimization problems[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2012, 16(1): 117-134.
- [8] Singh H, Srivastava L. Recurrent multi-objective differential evolution approach for reactive power management[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2016, 10(1): 192-204.
- [9] Kotinis M. Improving a multi-objective differential evolution optimizer using fuzzy adaptation and K-medoids clustering[J]. Soft Computing, 2014, 18(4): 757-771.
- [10] Chen Xu, Du Wenli, Qian Feng. Multi-objective differential evolution with ranking-based mutation operator and its application in chemical process optimization[J]. Chemometrics & Intelligent Laboratory Systems, 2014, 136(8): 85-96.
- [11] 朱大林, 詹腾, 张屹, 等. 多策略差分进化的元胞多目标粒子群算法[J]. 电子学报, 2014, 42(9): 1831-1838.
- [12] 王亚辉, 吴金妹, 贾晨辉. 基于动态种群多策略差分进化模型的多目标进化算法[J]. 电子学报, 2016, 44(6): 1472-1480.
- [13] Wang Jiahai, Liao Jianjun, Zhou Ying, et al. Differential evolution enhanced with multi-objective sorting-based mutation operators[J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2014, 44(12): 2792-2805.
- [14] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [15] Cui Laizhong, Li Genghui, Lin Qiuzhen, et al. Adaptive differential evolution algorithm with novel mutation strategies in multiple sub-populations[J]. Computers & Operations Research, 2015, 67(3): 155-173.
- [16] 贺毅朝, 王熙照, 刘坤起, 等. 差分进化的收敛性分析与算法改进[J]. 软件学报, 2010, 21(5): 875-885.
- [17] 谢承旺, 丁立新. 多目标进化算法中多样性策略的研究[J]. 计算机科学, 2010, 37(2): 175-179.
- [18] Zou Hailin. An adaptive mutated multi-objective particle swarm optimization with an entropy-based density assessment scheme[J]. Journal of Information & Computational Science, 2013, 10(4): 1065-1074.
- [19] 施展, 陈庆伟. 基于 QPSO 和拥挤距离排序的多目标量子粒子群优化算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 540-547.
- [20] Coello C A C, Pulido G T, Lechuga M S. Handling multiple objectives with particle swarm optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2004, 8(3): 256-279.
- [21] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multi-objective optimizers: an analysis and review[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.