

求解区间图上的罗马控制数的动态规划算法^{*}

杨洪, 张修军, 吴璞, 李宏
(成都大学信息科学与工程学院, 成都 610106)

摘要: 针对区间图的最小罗马控制函数和罗马控制数求解的困难性, 提出了一种动态规划算法。从区间图的顶点排序开始, 结合区间图的某些性质, 采用逐步搜索的方法, 不断扩大搜索的顶点集合范围, 最终求出最优的罗马控制集和罗马控制数。为保证算法的正确性和科学性, 对算法进行了严格的数学推理和证明。最后还给出了一个典型的区间图求解过程的演示示例, 增强了算法的可读性和可操作性。结果表明该算法不仅运算速度快, 而且简单易行。

关键词: 区间图; 罗马控制函数; 罗马控制数; 权重; 动态规划算法

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2018)07-1986-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2018.07.014

Dynamic programming algorithm to solve Roman domination number for interval graph

Yang Hong, Zhang XiuJun, Wu Pu, Li Hong

(School of Information Science & Engineering, Chengdu University, Chengdu 610106, China)

Abstract: This paper proposed a dynamic programming algorithm to find a minimum Roman dominating function and Roman domination number for an interval graph. It designed a step by step search algorithm to solve this problem. Starting with a vertex ordering of an interval graph, combining with some properties of interval graphs, it successfully found the optimum Roman dominating function and Roman domination number. It presented a mathematical proof to ensure the correctness of the algorithm. Finally it took an example to illustrate the procedure of the described algorithm. The results show that the algorithm is fast and effective.

Key words: interval graph; Roman dominating function; Roman domination number; weight; dynamic programming algorithm

自1999年Stewart^[1]在美国科学杂志上发表的一篇题为《Defend the Roman empire》的文章, 图的罗马控制集就逐渐成为图论的热点问题之一^[1~9], 求解图的最小罗马控制集和罗马控制数对于弦图来说都是NP难的^[6,7]。假设有若干实数区间得到一个无向图 G , 图 G 就是以这些区间为顶点集的图, 任意两个区间有边相连当且仅当它们在数轴上相交, 这些区间叫做这个图 G 的区间表示, 图 G 也叫做区间图。区间图是一种特殊的弦图, 是图论中的一个重要分支, 其在组合优化^[4]以及生物工程^[5]中被广泛应用。但是求解区间图的最小罗马控制集和罗马控制数存在多项式时间算法^[2,3,10~12]。图 $G=(V, E)$ 的一个顶点排序 $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ 叫做一个区间排序。如果对所有的 $i < j < k$, 若 $v_i v_k$ 有边相连, 则 $v_j v_k$ 就有边相连。1987年, Raychaudhuri证明了 $G=(V, E)$ 是一个区间图当且仅当 G 有一个顶点集 V 的区间序列 $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ ^[13,14]。如果图 $G=(V, E)$ 有一个区间排序 $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, 可设这些顶点对应的区间为 $I_i = [l_i, r_i]: 1 \leq i \leq n$, 且满足 $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$ 。

Cockayne等人^[2]在2004年提出七个开放的图论问题, 其中之一就包括区间图的罗马控制数是否具有多项式时间算法。Liedloff等人^[3]在2008年提出了一种求解区间图的罗马控制数的线性时间算法, 但是该算法计算过程过于复杂, 不易理解。本文基于区间排序的方式, 提出一种新的求解区间图的罗马控制数的动态规划算法, 其简便易行。

1 区间图的罗马控制数的线性时间算法

本文讨论的图为无向连通图 $G=(V, E)$, 其中: V 是顶点集; E 是边集。下面给出有关的基本概念。

定义1 给定一个图 $G=(V, E)$, 如果图 G 的一个函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 满足下列条件: 对于任意着0的顶点 v , 存在一个着2的顶点与 v 相邻, 则称 f 为罗马控制函数。罗马控制函数 f 的权定义为 $w(f) = \sum_{x \in V} f(x)$ 。图 G 的罗马控制数 $\gamma_R(G)$ 是最小权的罗马控制函数的权值, 即 $\gamma_R(G) = \min \{w(f) | f \text{ 是图 } G \text{ 的罗马控制函数}\}$ 。

设 f 是 G 的罗马控制函数, 令 $V_i = \{x \in V | f(x) = i\}, i = 0, 1, 2$, 则一个函数 f 与 (V_1, V_2) 一一对应, 因此本文也可用 (V_1, V_2) 表示 G 的一种函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 。

定义2 称图 $G=(V, E)$ 是一个区间图, 如果存在实数轴上的若干区间集合 $F = \{I_v | v \in V\}$, 使得 $I_u \cap I_v \neq \emptyset$ 当且仅当 $(u, v) \in E$ 。集合 F 也叫做图 G 的区间表示。

设 l_v 和 r_v 分别表示区间 I_v 的左、右端点处的实数值。

设图 $G=(V, E)$ 是一个带有区间 $I_i = [l_i, r_i]: 1 \leq i \leq n$ 的区间图, 其中 $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n$, 且顶点集具有按照区间右端点增大的区间排序, 记做 $[v_1, v_2, \dots, v_n]$, 因为顶点与它的序号是一一对应的。为了简单起见, 后面本文用顶点的序号表示顶点。例如, 顶点集 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 可以简记为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 。

定理1^[3,13,14] 设 $G=(V, E)$ 是一个区间图, 当且仅当 G 有一个 V 的区间序列 $[1, 2, \dots, n]$ 满足: 如果 $i < j < k$ 且 $(i, k) \in E$, 则有 $(j, k) \in E$ 。

下面引进几个记号。

设 $v \in V$ 是图 G 的一个顶点, $N[v] = \{u \in V(G) | (u, v) \in E(G)\} \cup \{v\}$ 表示顶点 v 的闭邻域。 $N(v) = \{u \in V(G) | (u, v) \in E(G)\}$ 表示顶点 v 的开邻域。

设区间图 $G=(V, E)$ 是具有按照区间右端点增大的区间

收稿日期: 2017-03-09; 修回日期: 2017-04-17 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61309015); 成都市科技局软科学项目(2015-RK00-00202-ZF)

作者简介: 杨洪(1972-), 男, 四川都江堰人, 讲师, 博士, 主要研究方向为应用数学、算法(yanghong01@edu.edu.cn); 张修军(1973-), 男, 副教授, 硕士, 主要研究方向为图论、算法、计算智能; 吴璞(1997-), 男, 本科, 主要研究方向为图论、算法; 李宏(1976-), 女, 讲师, 硕士, 主要研究方向为微分方程。

排序 $[1, 2, \dots, n]$ 。下面介绍罗马控制函数的动态规划算法。如下的算法中,第 i 步将得到 $\{1, 2, \dots, i\}$ 的最小权罗马控制着色方案,其顶点集 V_0^i, V_1^i, V_2^i 分别表示着0、1、2的顶点集。假设初始顶点集 V_0^0, V_1^0, V_2^0 都是空集, G_i 表示由顶点集 $\{1, 2, \dots, i\}$ 导出的子图。为了简便,记做 $A = V_1, B = V_2, Z = V_0$,分别表示 G 的最小权的罗马控制函数的中着1、2、0颜色的顶点集。 $A_i = V_1^i, B_i = V_2^i, Z_i = V_0^i$ 分别表示 G_i 的最小权的罗马控制函数的中着1、2、0颜色的顶点集。

设 $\text{low}(i) = \min\{N[i]\}, \max \text{low}(i) = \max\{\text{low}(j) : \text{low}(i) \leq j \leq i, L_i = \{\max \text{low}(i), \max \text{low}(i) + 1, \dots, i\}, M_i = \{j : j > i, j \in N(i)\}$ 。对任意顶点集簇 $X, \min\{X\} = \sum_{x \in X} f(x)$ 表示 X 的最小权重,则 G_i 的权重 $w\{v_1, v_2, \dots, v_i\} = |A_i| + 2|B_i|$ 。如果 $X = \emptyset$,规定 X 的最小权重是无穷大。

注意到集合 $\{1, 2, \dots, \text{low}(i) - 1\}$ 中对应的顶点和点 i 都不相邻,而集合 $\{\text{low}(i), \text{low}(i) + 1, \dots, i\}$ 中的顶点和点 i 都相邻。 L_i 的顶点构成 G_i 的最大团。设 j 是满足 $\text{low}(i) \leq j \leq i$ 和 $\max \text{low}(i) = \text{low}(j)$ 的顶点,则 $\text{low}(i) \leq \text{low}(j) \leq j \leq i$ 。易知 $N[j]$ 是 $L_i \cup M_i$ 的子集,在 G_i 中, j 只与 L_i 中的顶点相邻。

定理2 设 $G = (V, E)$ 是一个区间图,设函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 是一个能控制 $\{1, 2, \dots, i\}$ 且权最小的罗马控制函数,若 $i \notin V_1$ 且 $(L_i \cup M_i) \cap V_2 = \emptyset, i = 1, 2, \dots, n$,则至少存在一个点 m ,且 $\text{low}(i) \leq m < \max \text{low}(i)$,使得 $m \in V_2$ 。

证明 因为 $i \notin V_1, (L_i \cup M_i) \cap V_2 = \emptyset$,所以 $f(i) = 0$,顶点 i 需要被控制,存在 $m \in N[i], f(m) = 2$,又 $(L_i \cup M_i) \cap V_2 = \emptyset$,于是 $m \in N[i] \setminus (L_i \cup M_i)$,从而 $\text{low}(i) \leq m < \max \text{low}(i)$ 。

定理3 设 $G = (V, E)$ 是一个区间图,设 $V^i = \{1, 2, \dots, i\} \subseteq V$,函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 是一个能控制 $\{1, 2, \dots, i\}$ 且权最小的罗马控制函数, $C_i = \{m | \text{low}(i) \leq m < \max \text{low}(i), f(m) = 2\}$, $k' = \max C_i$,且 $(L_i \cup M_i) \cap V_2 = \emptyset, i = 1, 2, \dots, n$ 。对任意的 k'' ($k' < k'' \leq i$),若 $f(k'') = 0$,则 k' 与 k'' 一定相邻;若 $f(k'') = 1$,则 k' 与 k'' 一定不相邻。

证明 下面的证明是在导出子图 $G[V^i \cup M_i]$ 范围中考虑。

对任意的 k'' ($k' < k'' \leq i$),当 $f(k'') = 0$ 时,首先证明不存在 k_1 ,满足 $k_1 > k'$ 且 $f(k_1) = 2$,使得 k' 与 k'' 相连。若不然,因 $\{t | k' < t \leq i\} \cap V_2 = \{t | k' < t < \max \text{low}(i)\} \cup \{t | \max \text{low}(i) \leq t \leq i\} \cap V_2 = \emptyset$,则 $k_1 \notin \{t | k' < t \leq i\}$,有 $k_1 > i$ 。又 k_1 与 i 相连,故 $k_1 \in M_i$,而 $M_i \cap V_2 = \emptyset$,产生矛盾。因 $f(k'') = 0$,则存在 k_2 ,使得 $k_2 \in N[k'']$,且 $f(k_2) = 2$ 。由上面结论不存在 k_1 ,使得 $k_1 > k', k_1$ 与 k'' 相连,且 $f(k_1) = 2$ 。所以 $k_2 \leq k'$,又 $k' < k''$,由定理1, k' 与 k'' 必然有边相连。若 $f(k'') = 1$,显然 k' 与 k'' 一定不相邻。

可得到下列区间图的罗马控制数的动态规划算法(算法1):

```

1  输入一个 $n$ 个点的区间图 $G = (V, E)$ ,且顶点按区间右端点 $b$ 
   排序后记为 $1, 2, \dots, n$ 
2  求出所有的 $\text{low}(1), \text{low}(2), \dots, \text{low}(n)$ 和 $\max \text{low}(1), \max \text{low}(2), \dots, \max \text{low}(n)$ ;求出所有的 $L_1, L_2, \dots, L_n$ 和 $M_1, M_2, \dots, M_n$ 
3  赋初值 $(A_0, B_0) \leftarrow (\emptyset, \emptyset)$ 
4  for  $i = 1$  to  $n$  do
5     $w_1 = w(A_{i-1}, B_{i-1}) + 1$ 
6     $w_2 = \min\{w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + 2 : j \in L_i \cup M_i\}$ ,并记录取等号时的顶点为 $t$ 
7    if  $i > \max \text{low}(i)$  then
8      for  $j = \text{low}(i)$  to  $\max \text{low}(i)$  do
9         $D_i^j = \{m | j < m \leq i, m \text{ 与 } j \text{ 不相连}\}$ 
10     end for
11      $w_3 = \min\{w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + |D_i^j| + 2 : \text{low}(i) \leq j \leq \max \text{low}(i)\}$ ,并记录取等号时的顶点 $k$ 
12     if  $w_3 < w_1$  and  $w_3 < w_2$  then
13        $A_i = A_{\text{low}(k)-1} \cup D_i^k, B_i = B_{\text{low}(k)-1} \cup \{k\}$ 
14     end if
15   else if  $w_1 < w_2$  then
16     if 存在 $A_{i-1}$ 中的顶点 $u$ 与点 $i$ 相邻 then
17        $A_i = A_{i-1} \setminus \{u\}, B_i = B_{i-1} \cup \{u\}$ 
18     else
19        $A_i = A_{i-1} \cup \{i\}, B_i = B_{i-1}$ 
20     end if

```

```

21  else
22     $A_i = A_{\text{low}(i)-1}, B_i = B_{\text{low}(i)-1} \cup \{i\}$ 
23  end if
24  end if
25  end for
26  输出 $(A_n, B_n)$ 和 $w(A_i, B_i) = |A_n| + 2|B_n|$ 

```

容易看出,该算法中罗马控制集的时间复杂度为不超过 $O(n^2)$ 。先证明如下论断。

论断1 如果设 A_i 中的点都着1, B_i 中的点都着2, $V \setminus \{A_i \cup B_i\}$ 的点都着0,那么在下列三组集合 (A_i, B_i) 的着色方案都是 $\{1, 2, \dots, i\}$ 的罗马控制集:

- $A_i = A_{i-1} \cup \{i\}, B_i = B_{i-1}$;
- $A_i = A_{\text{low}(j)-1}, B_i = B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\}, j \in L_i \cup M_i$;
- 对任意的 j ($\text{low}(i) \leq j < \max \text{low}(i)$), $A_i = A_{\text{low}(j)-1} \cup D_i^j, B_i = B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\}, D_i^j = \{m | j < m \leq i, m \text{ 与 } j \text{ 不相连}\}$ 。

证明 a) 因 (A_{i-1}, B_{i-1}) 能控制住 $\{1, 2, \dots, i-1\}$,显然 $(A_{i-1} \cup \{i\}, B_{i-1})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, i\}$ 。

b) 因 $j \in (L_i \cup M_i) \cap B_i$,又 $(A_i, B_i \setminus \{j\})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, \text{low}(j) - 1\}$,顶点 j 能控制住 $\{\text{low}(j), \text{low}(j) + 1, \dots, j\}$ 。若 $j \in L_i$,由前面叙述知, L_i 的顶点构成 G_i 的最大团,顶点 j 能控制住 $\{j+1, \dots, i\}$,从而 $(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, i\}$;若 $j \in M_i, (A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, j\}$,因 $\{1, 2, \dots, i\}$ 是 $\{1, 2, \dots, j\}$ 的子集,当然能控制住 $\{1, 2, \dots, i\}$ 。

c) 因为 $(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, \text{low}(j) - 1\}$,对于 $\{j, j+1, \dots, i\}$ 中顶点而言, j 能控制住所有相邻的点,而不相邻的点都着1,不需要其他点来控制,故论断1成立。

从算法1可得到:

(a) $w(A_{i-1} \cup \{i\}, B_{i-1}) = w(A_{i-1}, B_{i-1}) + 1 = w_1$;

(b) $w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\}) = w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + 2, j \in L_i \cup M_i$,其最小值记为 w_2 ,取最小值的顶点为 t ;

(c) $w(A_{\text{low}(j)-1} \cup D_i^j, B_{\text{low}(j)-1} \cup \{j\}) = w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + |D_i^j| + 2, \text{low}(i) \leq j < \max \text{low}(i)$,其最小值记为 w_3 ,取最小值的顶点为 k 。

定理4 设 $G = (V, E)$ 是一个区间图,且 $|V| = n$,设 (A_i, B_i) 是由算法1中的着色方案, $i = 1, 2, \dots, n$ 。设 $V^i = \{1, 2, \dots, i\} \subseteq V$,函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ 满足 $V_1 = A_i, V_2 = B_i, V_0 = V \setminus (A_i \cup B_i)$,则函数 f 是一个能控制 $\{1, 2, \dots, i\}$ 且权最小的罗马控制函数。

证明 由论断1,显然 $w(A_i, B_i) \leq w_1, w_2, w_3$ 成立。

下面将证明 $w(A_i, B_i) = \min\{w_1, w_2, w_3\}$,分三种情形来讨论:

情形1 当 $i \in A_i$ 时,因 $(A_i \setminus \{i\}, B_i)$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, i-1\}$,所以 $w(A_i \setminus \{i\}, B_i) \geq w(A_{i-1}, B_{i-1}) = w_1 - 1$

$w(A_i, B_i) \geq w_1$,从而 $w(A_i, B_i) = w_1$

所以 $w_1 \leq w_2, w_3$,从而 $w(A_i, B_i) = \min\{w_1, w_2, w_3\}$ 。

情形2 若 $i \notin A_i$,当 $(L_i \cup M_i) \cap B_i \neq \emptyset$ 时,

$w_2 = \min\{w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + 2 : j \in L_i \cup M_i\} = w(A_{\text{low}(t)-1}, B_{\text{low}(t)-1}) + 2$

因 $t \in (L_i \cup M_i) \cap B_i$,又 $(A_i, B_i \setminus \{t\})$ 能控制住 $\{1, 2, \dots, \text{low}(t) - 1\}$, $w(A_i, B_i \setminus \{t\}) \geq w(A_{\text{low}(t)-1}, B_{\text{low}(t)-1})$

又 $w(A_i, B_i \setminus \{t\}) = w(A_i, B_i) - 2$

所以 $w(A_i, B_i) \geq w(A_{\text{low}(t)-1}, B_{\text{low}(t)-1}) + 2 = w_2$ (1)

又 $w(A_i, B_i) \leq w_2$ (2)

由式(1)(2)知 $w(A_i, B_i) = w_2$

情形3 若 $i \notin A_i$,当 $(L_i \cup M_i) \cap B_i = \emptyset$ 时,则 $f(i) = 0$

据算法1可知

$w_3 = \min\{w(A_{\text{low}(j)-1}, B_{\text{low}(j)-1}) + |D_i^j| + 2 : \text{low}(i) \leq j < \max \text{low}(i)\} = w(A_{\text{low}(k)-1}, B_{\text{low}(k)-1}) + |D_i^k| + 2$

$D_i^k = \{j | k < j \leq i, j \text{ 与 } k \text{ 不相连}\}$

据论断1知 $w(A_i, B_i) \leq w_3$ (3)

另一方面,由定理2,至少存在一个点 m ,且 $\text{low}(i) \leq m < \max \text{low}(i)$,使得 $m \in V_2$ 。令 $C_i = \{m | \text{low}(i) \leq m < \max \text{low}(i), k \in V_2\} \neq \emptyset$

设 $k' = \max C_i, D_i^{k'} = \{j | k' < j \leq i, j \text{ 与 } k' \text{ 不相连}\}$

那么 $(A_{\text{low}(k')-1} \cup D_i^{k'}, B_{\text{low}(k')-1} \cup \{k'\})$ 一定能控制住 $\{1, 2, \dots, \text{low}(k')-1\}$ 。

由定理3, 对任意的 $k'' (k' < k'' \leq i)$, 若 $f(k'') = 0$, 则 k' 与 k'' 一定相邻, $D_i^{k'} \subseteq A_i$ 。

$$w(A_i \setminus D_i^{k'}, B_i \cup \{k'\}) = w(A_i, B_i) - |D_i^{k'}| - 2$$

$$w(A_i, B_i) - |D_i^{k'}| - 2 \geq w(A_{\text{low}(k')-1}, B_{\text{low}(k')-1}) + |D_i^{k'}| + 2 \geq w_3$$

$$\text{即 } w(A_i, B_i) \geq w(A_{\text{low}(k')-1}, B_{\text{low}(k')-1}) + |D_i^{k'}| + 2 \geq w_3 \quad (4)$$

由式(3)(4)知 $w(A_i, B_i) = w_3$, 证毕。

2 算法示例

为了能更清晰地说明算法运行的过程, 本文举出一个九个点的区间图示例, 如图1所示。

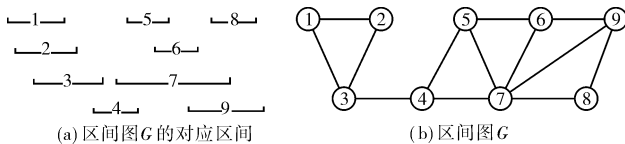


图1 九个顶点的区间图 G

示例的算法过程中运行结果及步骤如下:

$$\text{low}(1) = 1, \text{low}(2) = 1, \text{low}(3) = 1, \text{low}(4) = 3,$$

$$\text{low}(5) = 4, \text{low}(6) = 5, \text{low}(7) = 4,$$

$$\text{low}(8) = 7, \text{low}(9) = 6;$$

$$\text{max low}(1) = 1, \text{max low}(2) = 1, \text{max low}(3) = 1,$$

$$\text{max low}(4) = 3, \text{max low}(5) = 4, \text{max low}(6) = 5,$$

$$\text{max low}(7) = 5, \text{max low}(8) = 7, \text{max low}(9) = 7;$$

$$L_1 = \{1\}, M_1 = \{2, 3\}; L_2 = \{1, 2\}, M_2 = \{3\};$$

$$L_3 = \{1, 2, 3\}, M_3 = \{4\}; L_4 = \{3, 4\}, M_4 = \{5, 7\};$$

$$L_5 = \{4, 5\}, M_5 = \{6, 7\}; L_6 = \{5, 6\}, M_6 = \{7, 9\};$$

$$L_7 = \{5, 6, 7\}, M_7 = \{8, 9\}; L_8 = \{7, 8\}, M_8 = \{9\};$$

$$L_9 = \{7, 8, 9\}, M_9 = \emptyset;$$

$$A_0 = \emptyset, B_0 = \emptyset;$$

$$i = 1, w_1 = 1, w_2 = 2, A_1 = \{1\}, B_1 = \emptyset, w = 1,$$

$$i = 2, w_1 = 2, w_2 = 3, A_2 = \emptyset, B_2 = \{1\}, w = 2,$$

$$i = 3, w_1 = 3, w_2 = 2, A_3 = \emptyset, B_3 = \{3\}, w = 2,$$

$$i = 4, w_1 = 3, w_2 = 2, A_4 = \emptyset, B_4 = \{3\}, w = 2,$$

$$i = 5, w_1 = 3, w_2 = 4, A_5 = \{5\}, B_5 = \{3\}, w = 3,$$

$$i = 6, w_1 = 4, w_2 = 4, A_6 = \emptyset, B_6 = \{3, 5\}, w = 4,$$

$$i = 7, w_1 = 5, w_2 = 4, A_7 = \emptyset, B_7 = \{3, 5\}, w = 4,$$

$$i = 8, w_1 = 5, w_2 = 4, A_8 = \emptyset, B_8 = \{3, 7\}, w = 4,$$

$$i = 9, w_1 = 5, w_2 = 4, A_9 = \emptyset, B_9 = \{3, 7\}, w = 4.$$

所以, 该区间图的罗马控制函数是 $V_1 = \emptyset, V_2 = \{3, 7\}, w = 4$ 。

3 结束语

对区间图提出了一种求罗马控制集和控制数的动态规划的新算法, 采取逐步搜索的策略, 迅速而有效地解决了区间图的罗马控制染色问题, 然后进行了严格的数学推理和证明, 最后给出了示例演示。结果表明该算法不仅运算快捷, 而且简便有效。

参考文献:

- [1] Stewart I. Defend the Roman empire! [J]. *Scientific American*, 1999, 281(6): 136-138.
- [2] Cockayne E J, Dreyer P A, Hedetniemi S M, et al. Roman domination in graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2004, 278(1-3): 11-22.
- [3] Liedloff M, Kloks T, Liu Jiping, et al. Efficient algorithms for Roman domination on some classes of graphs[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2008, 156(18): 3400-3415.
- [4] Habib M, McConnell R, Paul C, et al. Lex-BFS and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition and consecutive ones testing [J]. *Theoretical Computer Science*, 2000, 234(1-2): 59-84.
- [5] Zhang Peisen, Schon E A, Fischer S G, et al. An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of DNA [J]. *Bioinformatics*, 1994, 10(3): 309-317.
- [6] Booth K S, Johnson J H. Dominating sets in chordal graphs[J]. *SIAM Journal on Computing*, 1982, 11(1): 191-199.
- [7] Farber M. Independent domination in chordal graphs[J]. *Operations Research Letters*, 1982, 1(4): 134-138.
- [8] Yang Hong. General vertex-distinguishing total coloring of complete bipartite graphs[J]. *ARS Combinatoria*, 2016, 125: 371-379.
- [9] 罗茜. 图的集控制与罗马控制[D]. 南昌: 华东交通大学, 2012.
- [10] Ramalingam G, Rangan C P. A unified approach to domination problems on interval graphs [J]. *Information Processing Letters*, 1988, 27(5): 271-274.
- [11] 皮军德, 康丽英, 许光俊. 直线簇上区间图的最小独立控制集[J]. *运筹学学报*, 2006, 10(1): 107-115.
- [12] 李鹏. 区间图相关图类若干结构与算法问题[D]. 上海: 上海交通大学, 2014.
- [13] Raychaudhuri A. On powers of interval and unit interval graphs[J]. *Congressus Numerantium*, 1987, 59: 235-242.
- [14] Chang G J. Algorithmic aspects of domination in graphs[M]//Handbook of Combinatorial Optimization. New York: Springer, 1998: 1811-1877.

(上接第1985页)

4 结束语

随着无人机应用环境的日益复杂, 研究有方向约束的航迹规划问题具有重要意义。本文提出了一种在目标点周围设置引导点的改进航迹规划方法, 通过在目标点周围设置合适的引导点, 将引导点与 D* 算法相结合设计一种改进航迹规划算法。在满足接近目标的方向约束的同时, 新的规划方法结合引导点, 可以大大加快航迹规划速度, 降低航迹规划代价, 更好的满足实时性要求。同时也应该注意到, 在引导点的产生阶段, 由于需要预先获得圆拓展半径, 而半径大小的合适与否会影响生成的引导点的优劣。结合引导点的改进算法虽然可以满足方向约束, 但引导点设置不当, 也会使规划航迹代价增大, 散失最优性。尽管如此, 但对于复杂多变的实际飞行环境, 要求无人机从特定方向进入目标点时, 结合引导点的改进算法可有效缩短规划时间和规划航程。无人机飞行时间、距离缩短, 相应地减少了突发情况影响其完成任务的成功率。因此, 在实际应用中应根据具体任务要求, 合理设置引导点。

参考文献:

- [1] 周青, 张锐, 索晓杰, 等. 具有时间约束的无人机遗传算法航迹规划[J]. *航空计算技术*, 2016, 46(2): 93-96.
- [2] 张帅, 李学仁, 张鹏, 等. 基于改进 A* 算法的无人机航迹规划[J]. *飞行力学*, 2016, 34(3): 39-43.
- [3] Huphtych M, Röck S. Online path planning in dynamic environments using the curve shortening flow method[J]. *Production Engineering*, 2015, 9(5-6): 613-621.

- [4] Pehlivanoglu Y V. A new vibrational genetic algorithm enhanced with a Voronoi diagram for path planning of autonomous UAV[J]. *Aerospace Science & Technology*, 2011, 16(1): 47-55.
- [5] Szczerba R J, Galkowski P, Glicktein I S, et al. Robust algorithm for real-time route planning[J]. *IEEE Trans on Aerospace & Electronic Systems*, 2000, 36(3): 869-878.
- [6] 唐晓东, 吴静. 基于改进 A* 算法的三维航迹规划技术研究[J]. *电子技术应用*, 2015, 41(5): 163-166.
- [7] 刘新, 周成平, 俞琪, 等. 基于分层策略的三维航迹快速规划方法[J]. *宇航学报*, 2010, 31(11): 2524-2529.
- [8] 刘琼昕, 王景, 高春晓, 等. 基于引导点的无人机三维航迹规划方法[J]. *北京理工大学学报*, 2014, 34(11): 1163-1168.
- [9] 杨杰, 蔡超, 孙希霞. 一种具有端点方向约束的快速航迹规划方法[J]. *计算机工程*, 2014, 40(2): 11-15.
- [10] 魏铁涛, 王剑薇, 屈香菊. 动态环境下在线航迹规划的滚动优化方法[J]. *飞行力学*, 2012, 30(3): 218-222.
- [11] Chen Yongbo, Yu Jianqiao, Mei Yuesong, et al. Modified central force optimization (MCFO) algorithm for 3D UAV path planning[J]. *Neurocomputing*, 2016, 171(1): 878-888.
- [12] Wen Naifeng, Su Xiaohong, Ma Peijun, et al. Online UAV path planning in uncertain and hostile environments[J]. *International Journal of Machine Learning & Cybernetics*, 2015, 8(2): 1-19.
- [13] 王绪芝, 姚敏, 赵敏, 等. 基于蚁群算法的无人机航迹规划及其动态仿真[J]. *指挥控制与仿真*, 2012, 34(1): 29-32.
- [14] Saranya C, Unnikrishnan M, Ali S A, et al. Terrain based D* algorithm for path planning[J]. *IFAC-Papers OnLine*, 2016, 49(1): 178-182.
- [15] 陈侠, 刘冬. 应用 D* Lite 算法的目标移动时无人机三维航迹规划[J]. *光电与控制*, 2013, 20(7): 1-5.
- [16] Al-Mutib K, Alsulaiman M, Emaduddin M, et al. D* lite based real-time multi-agent path planning in dynamic environments[C]//Proc of the 3rd International Conference on Computational Intelligence, Modelling and Simulation. 2012: 170-174.