华北理工大学

NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

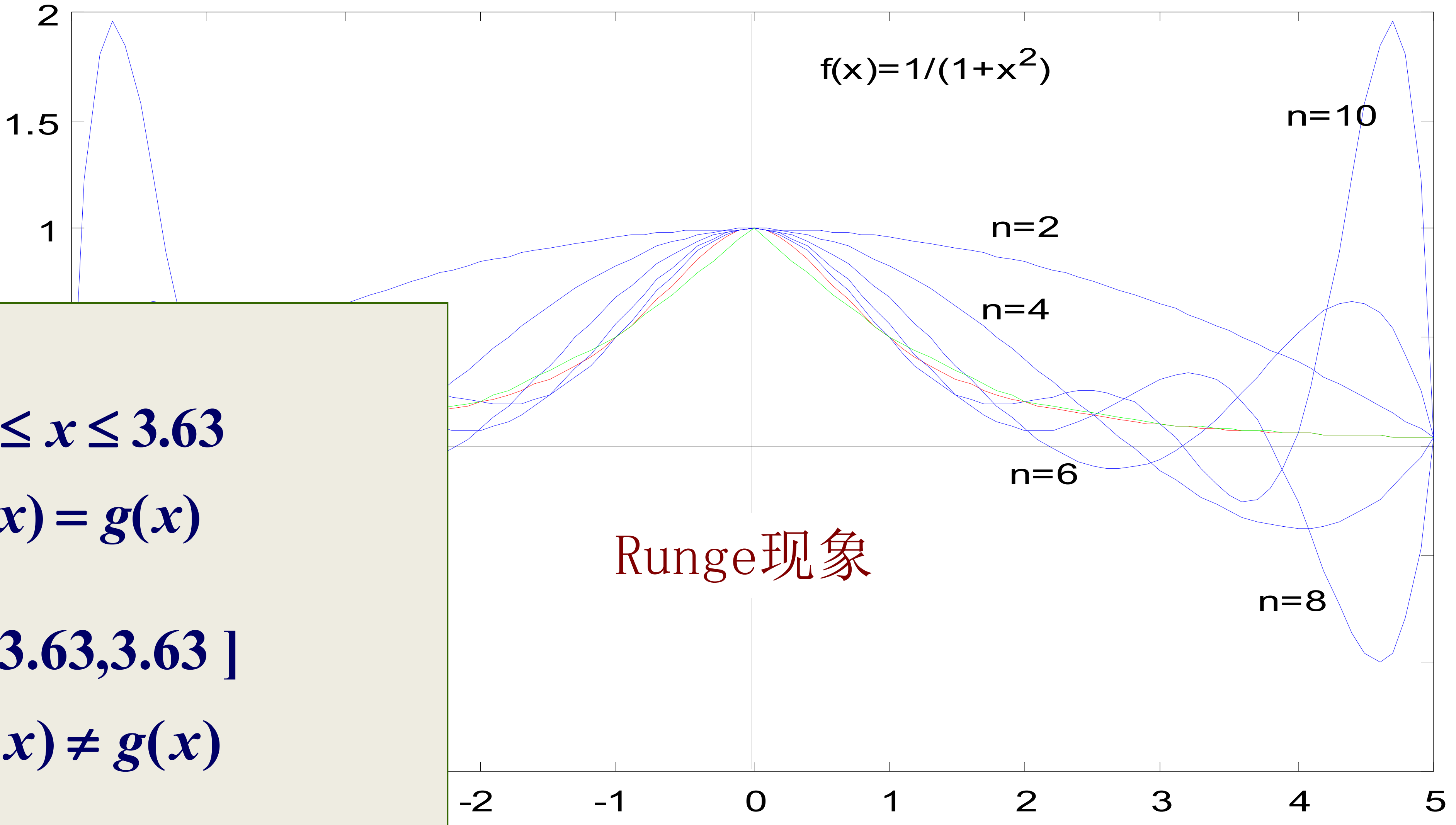
Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

Runge 现象解析

插值多项式**次数越高误差越小**吗

不同次数的拉格朗日插值多项式的比较图



仅当 $-3.63 \le x \le 3.63$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) = g(x)$

当 $x \notin [-3.63, 3.63]$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) \ne g(x)$

Lagrange 插值多项式的构造


```
x0=0;  x1=1.5;  x2=5.1;
y0=-1;  y1=4.25;  y2=35.21;
m[0]=(x-x1)(x-x2)/((x0-x1)(x0-x2));
m[1]=(x-x0)(x-x2)/((x1-x0)(x1-x2));
m[2]=(x-x0)(x-x1)/((x2-x0)(x2-x1));
L[x_,n_]:=y0*m[0]+y1*m[1]+y2*m[2]
L[x,n]
Simplify[%]//N
```

Out[7]= 0.130719 5.1 x 1.5 x 0.787037 5.1 x x 1.91776 1.5 x x

Out[8]= 1. 2. x 1. x^2

Lagrange 插值多项式的构造


```
x[0]=1;x[1]=10;x[2]=11;x[3]=15;x[4]=16;
w[x]=Product[x-x[i],{i,0,4}];
l0x=w[x]/(D[w[x],x]/.x->x[0])/(x-x[0]);
l1x=w[x]/(D[w[x],x]/.x->x[1])/(x-x[1]);
l2x=w[x]/(D[w[x],x]/.x->x[2])/(x-x[2]);
l3x=w[x]/(D[w[x],x]/.x->x[3])/(x-x[3]);
l4x=w[x]/(D[w[x],x]/.x->x[4])/(x-x[4]);

y0=1;y1=2;y2=3;y3=4;y4=5;
L[x_,n_]:=y0*l0x+y1*l1x+y2*l2x+y3*l3x+y4*l4x;
L[x,n]
Expand[%]
```

Out[60]= $11.0317 \quad 12.3791\, x \quad 2.52537\, x^2 \quad 0.182487\, x^3 \quad 0.0044709\, x^4$

第二章 插值法

1. 插值法的一般理论
2. Lagrange插值
3. Newton插值
4. 分段低次插值
5. Hermite插值、样条插值

四、分段线性插值

- 分段插值的一般理论
- 分段插值多项式的构造
- 分段插值的余项
- 简单的分段高次插值多项式

分段低次插值的思路

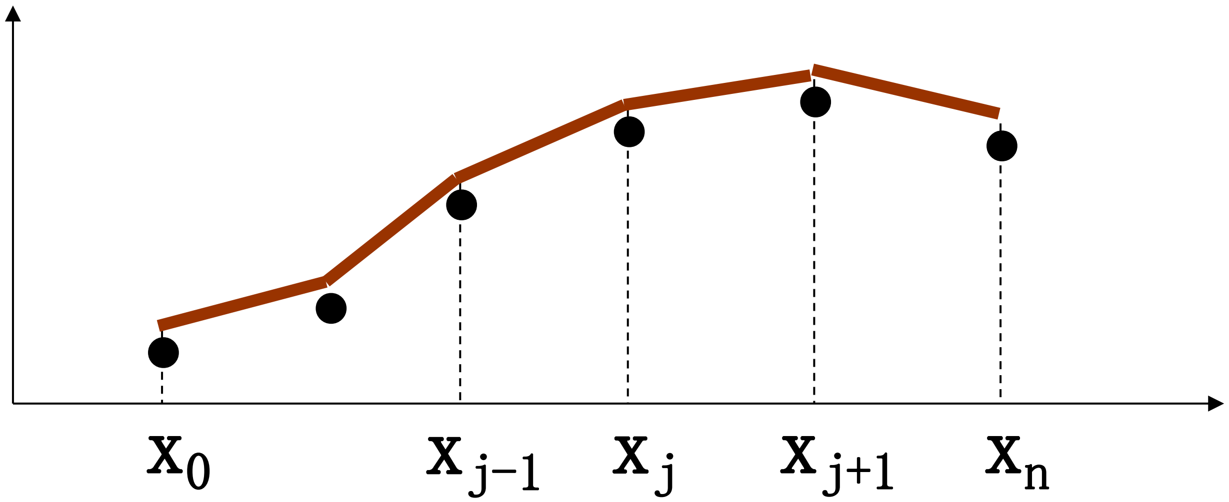
分段线性插值

问题 1　插值多项式次数高精度未必显著提高

问题 1　插值多项式次数越高摄入误差可能显著增大

如何提高插值精度呢

采用分段低次插值是一种办法



分段低次插值的概念

已知节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值为 $y_0, y_1 \cdots y_n$

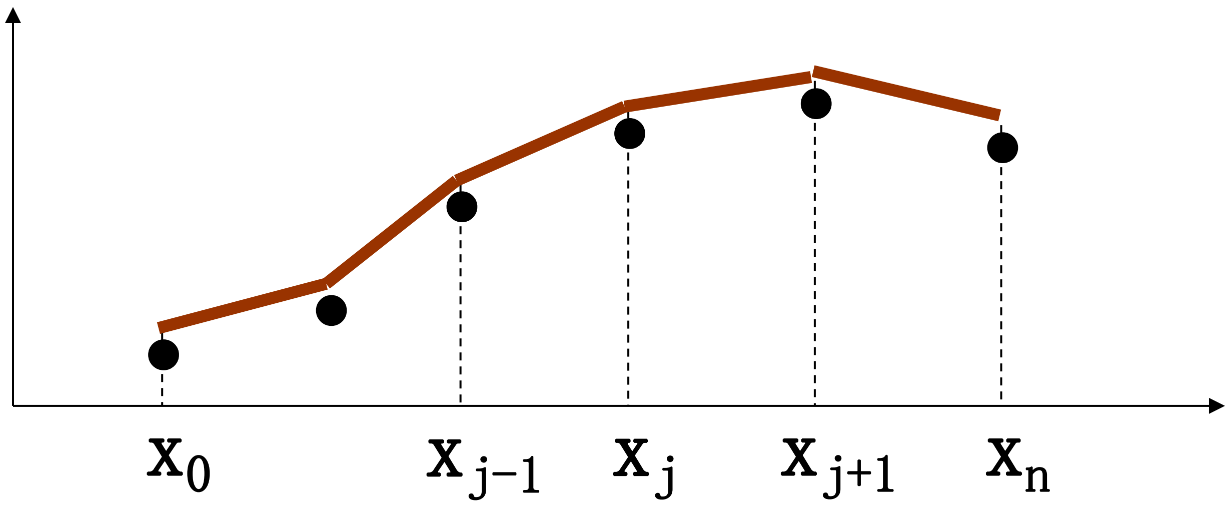
构造插值函数$\varphi(x)$使其满足：

(1) $\varphi(x) \in C^0[a,b]$

(2) $\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$

(3) $\varphi(x)$是线性函数，$\forall [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 0,1,2,\ldots,n)$,

则称φ(x)是f(x)在[a ,b]上的分段线性插值多项式。



分段二次插值

选取跟节点 x 最近的三个节点 x_{i-1},x_i, x_{i+1} 进行二次插值。

即在每一个区间$[x_{i-1}, x_{i+1}]$上，取：

$$f(x) \approx L_2(x) = \sum_{k=i-1}^{i+1} [y_k \prod_{\substack{j=i-1 \\ j \neq k}}^{i+1} \frac{(x_i - x_j)}{(x_k - x_i)}]$$

这种分段的低次插值称为分段二次插值，在几何上就是用分段抛物线代替 $y = f(x)$，故分段二次插值又称为分段抛物插值。

多项式的构造

计算量与 n 无关，n 越大误差越小.

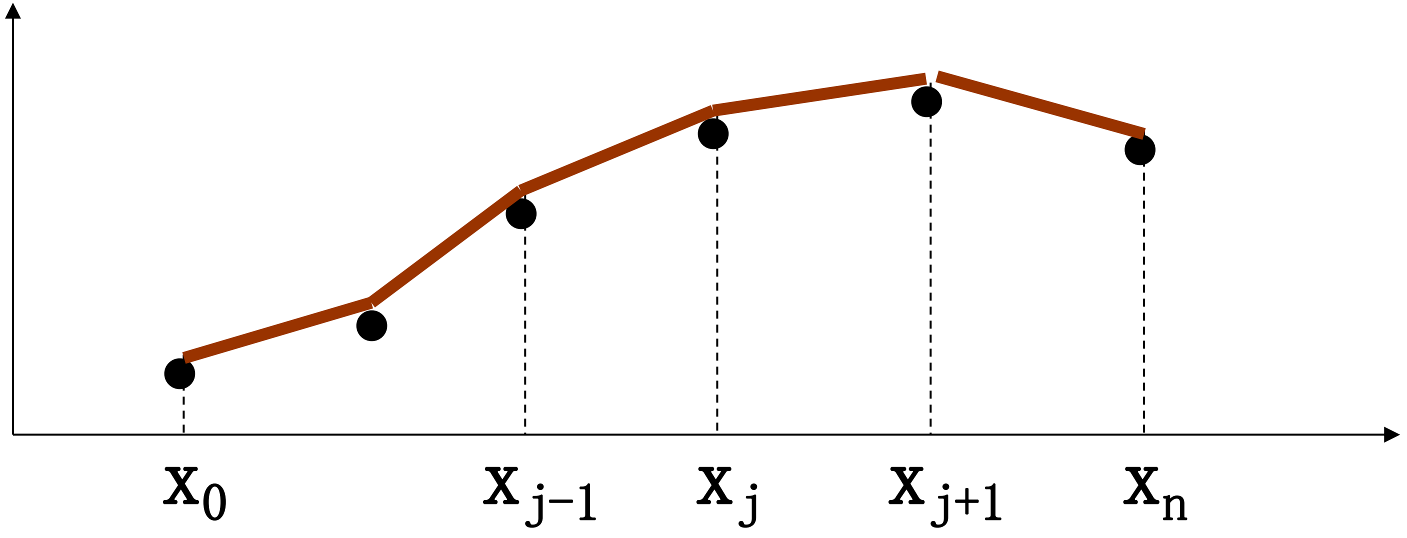
分段线性插值

基函数

$$l_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}, & x_0\le x\le x_1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$l_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\le x\le x_n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



一般表达式

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k\, l_k(x)$$

例 2.5 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ $-1\le x\le 1$

((1)) 将[-1,1] 10 等份，用分段线性插值近似计 $f(-0.96)$。

(2) 将[-1 ,1] n 等份，用分段线性插值近似计算,

问如何选择步长 h 可使近似计算误差 $R<10^{-4}$?

解析 (1) 插值节点为 $x_i=-1+\dfrac{i}{5},\ (i=0,1,\dots,10),\ h=\dfrac{1}{5}$

因为 -0.96∈[-1,-0.8], 取此区间为线性插值区间，其上的插值函数为

$$\varphi(x)=f(-1)\frac{x+0.8}{-0.2}+f(-0.8)\frac{x+1}{0.2}$$

$$=-0.1923\,(x+0.8)+0.2941\,(x+1)\qquad -1\le x\le -0.8$$

所以 $f(-0.96)=\varphi(-0.96)=0.04253.$

解析

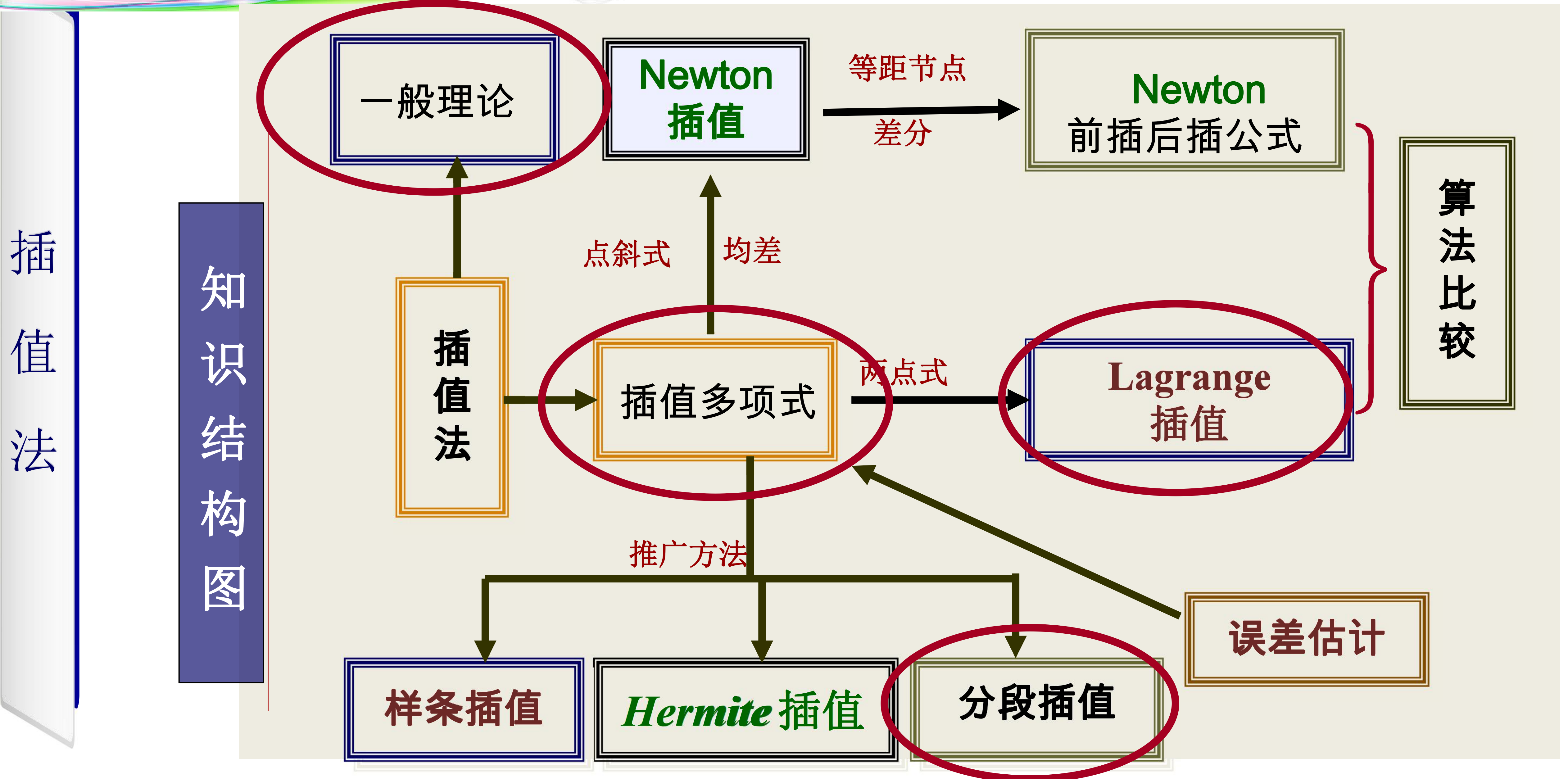
(2) 插值节点为 $x_i = -1 + ih,\ (i = 0,1,\dots,n),\ h = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{2}{n}$

由分段线性插值的余项估计： $|f(x) - \varphi(x)| = |R(x)| \le M h^2/8$

$$\because \quad f'(x) = \frac{-50x}{(1+25x^2)^2} \qquad |f''(x)| = 50\left|\frac{75x^2-1}{(1+25x^2)^3}\right| \le 1$$

$$M = \max_{-1\le x\le 1}|f''(x)| \quad \therefore |R(x)| \le 0.125h^2 \le 10^{-4} \Rightarrow \quad \therefore h < 0.028$$

内容小结



插值法
知识结构图
一般理论
Newton
插值
等距节点
差分
Newton
前插后插公式
算法比较
点斜式
均差
插值法
插值多项式
两点式
Lagrange
插值
推广方法
误差估计
样条插值
Hermite插值
分段插值

華北理工大學

2018.7