华北理工大学

NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

第二章 插值法

1 插值法的一般理论

2 Lagrange插值

3 Newton插值

4 分段低次插值

5 Hermite插值、样条插值

五、Hermite插值

- Hermite插值的思路
- Hermite插值原理
- Hermite插值多项式
- 一般的插值问题

插值法的基本思路

具有节点的导数值约束的插值

Hermite 插值法

- 插值问题的一般要求：

$$\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

- 插值问题的较高要求：

$$(1) \quad \varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

$$(2) \quad \varphi'(x_i) = y_i' \quad (i = 0,1,2,\ldots n)$$

保持插值曲线在节点处有切线（光滑），

使插值函数和被插函数的密和程度更好 。

Hermite 插值原理

具有节点的导数值约束的插值

Hermite 插值法

已知 $y=f(x)\in C^{(2n+2)}[a,b]$

条件：$(1)\ y_i=f(x_i)\quad (i=0,1,\cdots,n)$

$(2)\ y'_{i_k}=f'(x_{i_k})\quad (k=0,1,\cdots,m,\ m\le n,\ 0\le i_k\le n)$

结论：

可唯一确定一个次数不超过 $n+m+1$ 的多项式 $H(x)=H_{n+m+1}(x)$ 满足：

$$H(x_i)=y_i,\ H'(x_{i_k})=y'_{i_k}$$

通过所有节点

光滑通过所有节

$H(x)$ 称为 Hermite 多项式，其余项为：

$$R(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(n+m+2)}(\xi)}{(n+m+2)!}\omega_{n+1}(x)\prod_{k=0}^{m}(x-x_{i_k})$$

$\xi\in(a,b)$

证明略

Hermite 插值法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有 n+1个互异节点　$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$,
定义在$[a,b]$上函数 $f(x)$ 在节点上满足:

$$f(x_i)=y_i,\ f'(x_i)=y_i'\quad (i=0,1,2,\ldots n)$$（ $2n+2$ 个条件）

可唯一确定一个次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H_{2n+1}(x)=H(x)$ 满足：

$$H(x_j)=y_j,\qquad H'(x_j)=m_j\quad (j=0,1,\cdots,n).$$

其余项为：

$$R(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{2n+2}(x)$$

插值法的一般提法

仿照Lagrange插值的做法，首先确定多项式插值空间的维数，

注意到，条件共有2(n+1)个条件，所以最高次数为2n+1

设 $$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}\beta_i(x)y'_i$$

问题变为求函数

$$\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n},\{\beta_i(x)\}_{i=0}^{n}\in P^{2n+1}(x)$$

同样：

$$\begin{cases}\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}\\ \alpha_i'(x_j)=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\beta_i(x_j)=0\\ \beta_i'(x_j)=\delta_{ij}\end{cases}$$

	α_0	$\cdots$	α_n	β_0	$\cdots$	β_n
x_0	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0
x'_0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x'_n	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1

Hermite插值的基本思路

具有节点的导数值约束的插值

存在惟一性

$$H_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1},$$

误差可估性

$$R(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)[\omega^2(x)]}{(2n+2)!} \quad \xi \in (a,b)$$

特别地：三次 Hermite 插值余项为：

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

Hermite 插值多项式的构造

设有两组函数 $\alpha_i(x),\ \beta_i(x)$ 分别满足

（1） $\alpha_i(x), \beta_i(x)$ 都是至多 $2n+1$ 次多项式

（2） $\beta'_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}\quad \beta_i(x_j)\equiv 0\quad (i,j=0,1,\cdots,n)$

$$\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & j\neq i\\ 1, & j=i\end{cases}\quad \alpha'_i(x_j)\equiv 0\quad (i,j=0,1,\cdots,n)$$

则 Hermite 插值多项式为：

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[\alpha_i(x)y_i+\beta_i(x)y'_i\right]$$

一般公式

$\alpha_i(x)$ 主管函数值，导数值为零；

$\beta_i(x)$ 主管导数值，函数值为零。

Hermite插值多项式的构造

Hermite 插值法

设： $\alpha_i(x)=[a+b(x-x_i)]\,[l_i(x)]^2 \quad =[1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]\,[l_i(x)]^2$

特点 1 $\quad l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1\cdots n$

特点 2 $\quad \alpha_i'(x)=b\,l_i^2(x)+2[a+b(x-x_i)]l_i(x)l_i'(x)$

$\alpha_i(x)$在$x_j(j\neq i)$处的函数值与导数值均为0

特点 3 $\quad \alpha_i(x)=[a+b(x-x_i)]\,[l_i(x)]^2$ 次数 $=2n+1$

把 $\alpha_i(x_i)=1,\ \ \alpha'_i(x_i)=0 \quad (i=0,1,\cdots,n)$ 代入得

$$\alpha_i'(x_i)=b\,l_i^2(x_i)+2[a+b(x-x_i)]l_i(x_i)l_i'(x_i)$$

$$=b+2al_i'(x_i)=0$$

$$\alpha_i(x_i)=a\,l_i^2(x_i)=a=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1; \\ b=-2l'_i(x_i) \end{cases}$$

Hermite插值多项式的构造

Hermite 插值法

$$\alpha_i(x) = [1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)]\,[l_i(x)]^2$$

同理可得

$$\beta_i(x) = (x - x_i)\,[l_i(x)]^2 \qquad (i = 0,1,\cdots,n)$$

$$\therefore H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\alpha_i(x) y_i + \beta_i(x) y'_i\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \left[1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)\right] l_i^2(x) y_i + (x - x_i) l_i^2(x) y_i' \right\}$$

Hermite插值多项式的构造

Hermite 插值法

特别：n=1时

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,\quad \beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2,$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$H_3(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)y'_0+\beta_1(x)y'_1$$

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\quad \xi\in(a,b)$$

例题分析

Hermite 插值法

例 2.6　求过0,1两点构造一个三次插值多项式,满足条件

$f(0)=1,\ f'(0)=1/2,\ f(1)=2,\ f'(1)=1/2$

提示　设 $H_3(x)=\alpha_0(x)y_0+\alpha_1(x)y_1+\beta_0(x)y'_0+\beta_1(x)y'_1$

$$\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2x)(x-1)^2 \qquad \beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=x(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(3-2x)x^2 \qquad \beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(x-1)$$

$$H_3(x)=(1+2x)(x-1)^2+2(3-2x)x^2+0.5(x-1)^2x+0.5(x-1)x^2$$
$$=-x^3+1.5x^2+0.5x+1$$

Hermite插值多项式的程序设计

Hermite 插值法

```
Clear[x,y,k,h,H]
x[0]=0;x[1]=1;
y[0]=1;y[1]=2;
y'[0]=0.5;y'[1]=0.5;
w[x_,1_]:=Product[(x-x[k]),{k,0,1}];
l[x_,k_]:=w[x,1]/((x-x[k])(D[w[x,1],x]/.x->x[k]))
Dl[x_,k_]:=D[l[x,k],x]/.x->x[k]
h[x_,k_]:=(1-2(x-x[k])(Dl[x,k]/.x->x[k]))(l[x,k]^2);
H[x_,k_]:=(x-x[k])(l[x,k]^2);
Table[h[x,k],{k,0,1}];
Table[H[x,k],{k,0,1}];
HH[x_,n_]:=Sum[y[k]*h[x,k]+y'[k]H[x,k],{k,0,n}];
HH[x,1]
Expand[%]
```

$$H_3(x) = (1+2x)(x-1)^2 + 2(3-2x)x^2 + 0.5(x-1)^2 x + 0.5(x-1)x^2$$

$$= -x^3 + 1.5x^2 + 0.5x + 1$$

例题分析

例 2.7 已知数据表：

x	0	1
y	y_0	y_1
y'	y'_0	

求过0,1两点构造一个插值多项式 p(x),满足条件

$$p(0)=y_0,\ p(1)=y_1,\ p'(0)=y'_0,$$

提示 它有三个条件,故p(x)可设为二次多项式

$$p(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y'_0\,\beta_0(x),$$

这里 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x)$ 都是二次多项式.

例题分析

一般插值问题

提示 $p(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+y'_0\beta_0(x)$

要求条件

$\alpha_0(0)=1,$
$\alpha_0(1)=0,$
$\alpha'_0(0)=0,$
$\alpha_1(0)=0,$
$\alpha_1(1)=1,$
$\alpha'_1(0)=0,$
$\beta_0(0)=0,$
$\beta_0(1)=0,$
$\beta'_0(0)=1$

由条件可设 $\alpha_0(x)=(ax+b)(x-1)$

$$\begin{cases}\alpha_0(0)=1,\\ \alpha_0'(0)=0,\end{cases}\Rightarrow b=a=-1$$

$$\alpha_0(x)=(-x-1)(x-1)=1-x^2$$

同理可得 $\alpha_1(x)=x^2,\beta_0(x)=x(1-x)$

所以 $p(x)=y_0(1-x^2)+y_1x^2+y_0'(1-x)x$

所以余项为：$R(x)=\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(1-x)x^2$

给定函数表：

x_i	x_0	$<$	x_1	$<$	$\cdots$	$<$	x_n
y_i	y_0		y_1		$\cdots$		y_n
y_i'	y_0'		y_1'		$\cdots$		y_n'

将节点两两分段，在每一小段上作三次Hermite插值，得到**分段三次Hermite插值函数** H (x) ,它满足：

$$(1)H(x_i)=y_i, H'(x_i)=y_i' \ (i=0,1,\cdots,n)$$

(2)在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上，$H(x)$是三次多项式。

Hermite 插值法

参照n=1时的结构

请课下完成

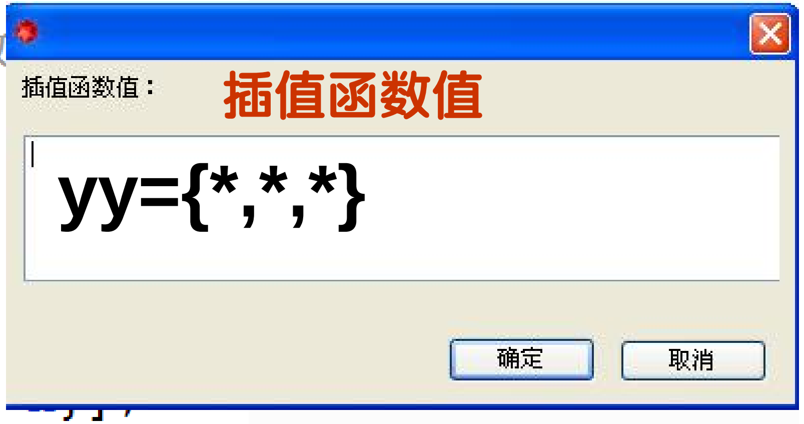
$$H(x)=\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i+\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}$$

$$+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y'_i+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y'_{i+1}$$

Hermite 插值的通用程序设计

基于Mathematica9.0

```
Clear[x, y, n, w, xx, yy, l, q, h, H, w, Her]
xx = Input["插值点坐标列: "] (*坐标序列*)
yy = Input["插值点函数值序列: "] (*函数值序列*)
dy = Input["插值点导数值序列,如果相应的位置没有导数要求, 用
(*导数序列*)
n = Length[xx];
w[x_] := Product[(x - xx[[i]]), {i, 1, n}];
q[i_, x_] := Simplify[w[x] / (x - xx[[i]])];
l[i_, x_] := Simplify[q[i, x]] /
    (Simplify[q[i, x]] /. x → xx[[i]]); (*Lagrange基函数
h[i_, x_] := (1 - 2 (x - xx[[i]]) (D[l[i, x], x] /. x → xx
    (l[i, x])^2; (*Hermite 插值函数值的基函数*)
H[i_, x_] := (x - xx[[i]]) (l[i, x])^2;
(*Hermite 插值导数值的基函数*)
Her[x_] := Sum[h[i, x] yy[[i]] + H[i, x] dy[[i]], {i, 1,
(*Hermite插值多项式*)
```



Newdon插值的通用程序设计

程序设计

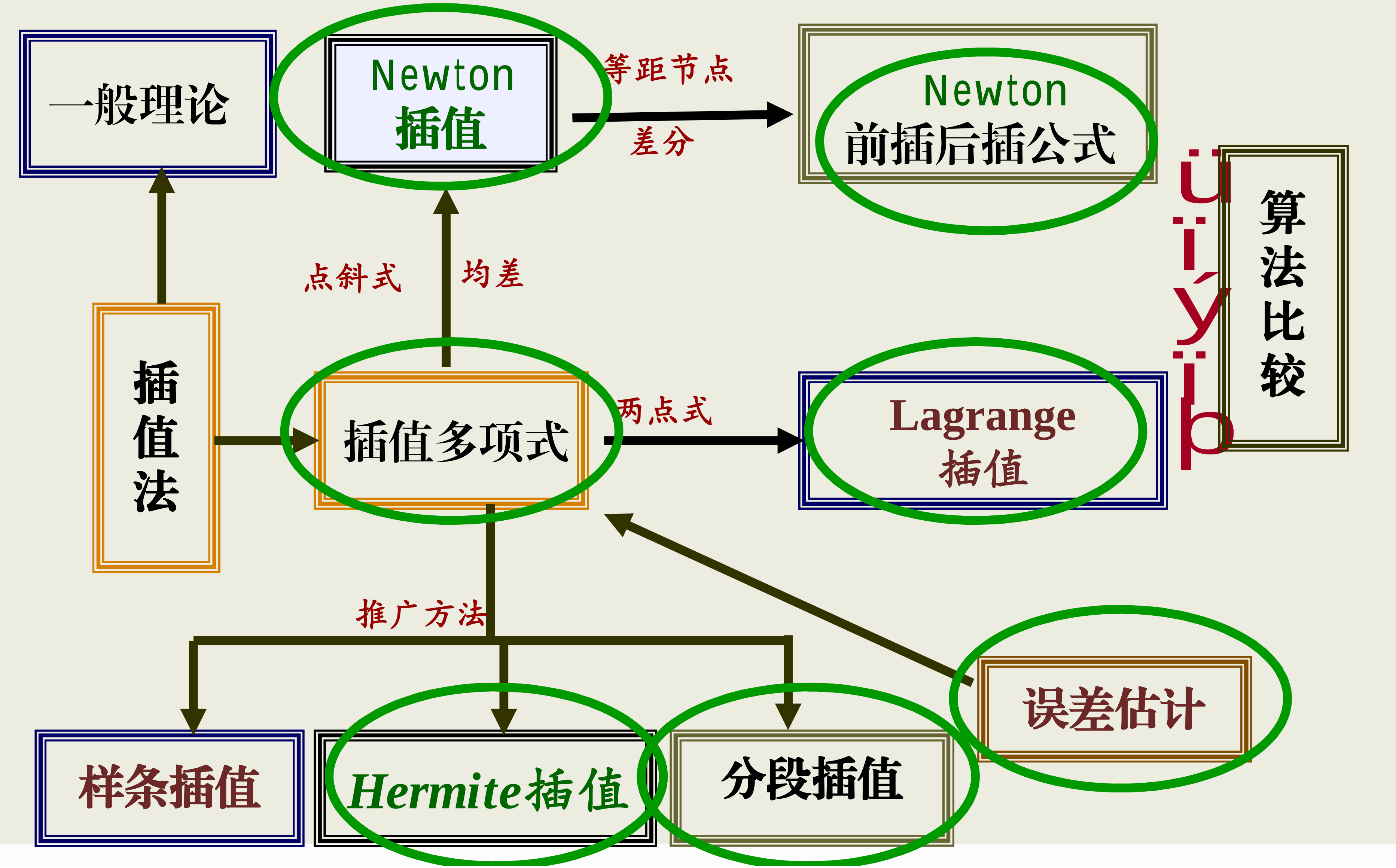
基于Mathematica9.0

```
For[i = 1, i ≤ n,
 Print["第", i, "个Lagrange插值基函数    l", i, "(x)=", l
 i++
]
For[i = 1, i ≤ n,
 Print["第", i, "个Hermite插值基函数    h", i, "(x)=", h[i, x]];
 i++
]
For[i = 1, i ≤ n,
 Print["第", i, "个Hermite插值导数基函数    H", i, "(x)=", H[i, x]];
 i++
]
Print["Hermite插值多项式为: H(x)=", Her[x]];
Print["Hermite插值多项式化简后为: H(x)=", Expand[Simplify[Her[x]]]];
```

内容小结

插值法

知识结构图



学习计算方法的建议

思考 1　问题的由来

思考2　问题的实质

思考 3　新概念的诞生

思考4　新概念的初识

问题的引入

提法的抽象

准确理解概念

特性（独有的性质）

学习建议

思考 5　新算法研究　算法原理

思考6　算法的警示　警示：A！ B！ C！

思考 7　算法的应用　能解决的专业问题

思考8　算法的进一步研究　联想与展望

華北理工大學

2018.7