华北理工大学

NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

国家精品课程

数值计算方法

第二章

插值法

主讲教师：龚佃选

http://210.31.198.78/eol/jpk/course/welcome.jsp?courseId=1220

第二章 插值法

- 插值法的一般理论
- Lagrange插值
- Newton插值
- 分段低次插值、Hermite插值
- 样条插值

样条插值

样条插值

- 样条函数概念
- 样条插值的构造
- 三弯矩算法
- 三转角算法
- 误差估计

一般插值的不足

插值函数在子区间的端点(衔接处)不光滑,从而导数不连续。

而一些实际问题,不但要求一阶导数连续,而且要求二阶导数连续。所以一般插值往往不能满足实际需要

“样条”的来源：

所谓“样条”(Spline)是工程绘图中的一种工具，它是有弹性的细长木条，绘图时，用细木条连接相近的几个结点，然后再进行拼接，连接全部结点，使之成为一条光滑曲线，且在结点处具有连续的曲率。样条函数就是对这样的曲线进行数学模拟得到的。

特殊性：

除了要求给出各个结点处的函数值外，只需提供两个边界点处导数信息，便可满足对光滑性的不同要求。

样条函数的概念

设$S(x)$是区间[a,b]上的函数,在区间$[a,b]$上给定一组基点:

$a=x_0<x_1<x_2<$žžž$<x_n=b$

若S(x)满足条件

（1）S(x)在每个子区间$[x_i, x_{i+1}]$(i=0,1,2,žžž,n-1)上是次数不超过m的多项式;

（2）S(x)在区间[a , b]上有m-1阶连续导数;

则称S(x)是定义在[a,b]上的m次样条函数。x_0，x_1，x_2，žžž称为样条结点,其中x_1,žžž,x_{n-1}称为内结点，x_0 , x_n称为边界结点。当m=3时,便成为最常用的三次样条函数

三次样条插值

设$y = f(x)$在点 x_0，x_1，x_2, žžž x_n的值为y_0，y_1，y_2, žžžy_n，若函数S(x)满足下列条件

（1）S(x_i)=f(x_i) =y_i， i=0,1,2,žžž,n

（2）在每个子区间[x_i, x_{i+1}](i=0,1,2,žžž,n-1)上S(x)是三次多项式

（3）S(x)在[a,b]上二阶连续可微。

则称S(x)为函数f(x)的三次样条插值函数

观察与思考？

3次样条插值函数$s(x)$ 是否存在?
是否唯一?如何计算?误差估计?

构造方法

$S(x)$除了满足基本插值条件 $s(x_i)=f_i$ 外还应具有如下形式：

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x), & x\in[x_0,x_1], \\ S_1(x), & x\in[x_1,x_2], \\ & \vdots \\ S_{n-1}(x), & x\in[x_{n-1},x_n]; \end{cases} \qquad S_i(x)\in C^3([x_i,x_{i+1}]).$$

并且满足条件：

$$\begin{cases} S_{i-1}(x_i)=S_i(x_i), \\ S'_{i-1}(x_i)=S'_i(x_i), \\ S''_{i-1}(x_i)=S''_i(x_i), \end{cases}$$

分析

$$S(x)=S_j(x)=a_j+b_jx+c_jx^2+d_jx^3,\quad x\in[x_j,x_{j+1}],(j=0,1,\cdots,n-1)$$

4n个待定系数：$\{a_j\},\{b_j\},\{c_j\},\{d_j\},\quad j=0,1,\cdots,n-1$

$S(x)$共须4n个独立条件确定．

可利用条件

①内部条件：
$$\begin{cases}S_{j-1}(x_j)=S_j(x_j)\\ S'_{j-1}(x_j)=S'_j(x_j)\\ S''_{j-1}(x_j)=S''_j(x_j)\end{cases}\quad j=1,\cdots,n-1$$

给出了3(n-1) 个条件

② $S(x_j)=f(x_j),(j=0,1,\cdots,n)$ 提供了$n+1$个独立条件;

共有4n-2个条件，要唯一确定$s(x)$，还必须附加2个条件!

附加2个条件（即边界条件），有多种给法

常用三种边界条件

(a) $S''(x_0)=f''(x_0)=M_0, S''(x_n)=f''(x_n)=M_n,$

（简支边界，导致三弯矩关系式，M 关系式），

特别地$M_0=M_n=0,$ （自然边界，三次自然样条）；

(b) $S'(x_0)=f'(x_0)=m_0, S'(x_n)=f'(x_n)=m_n,$

（固支边界，导致三转角关系式，m关系式）.

(*c*)第3种边界条件（周期边界条件）：$y=f(x)$为周期函数，

要求 $S(x)$ 亦是周期函数，周期为 $b-a$，即取

$$S^{(k)}(x_0)=S^{(k)}(x_n),(k=0,1,2).$$

此时称 $S(x)$ 为周期样条函数。

结论：由以上给定的任一种边界条件加上插值条件和连接条件，就能得出4n个方程，可以惟一确定4*n*个系数。从而得到三次样条插值函数S(*x*)在各个子区间$[x_i, x_{i+1}]$上的表达式$S(x_i)$(*i*=1,2,⋯,)。

问题：当*n*较大时，计算工作量很大，不便于实际应用。

方法

1. 确定插值函数 $S(x)$ 在节点处的一阶导数，记为 $S'(x_j)=m_j,$

$$j=0,1,\cdots,n,$$

该方法即为3次样条插值函数的一阶导数表示。

2. 确定插值函数 $S(x)$ 在节点处的二阶导数，记为 $S''(x_j)=M_j,$

$$j=0,1,\cdots,n,$$

该方法即为3次样条插值函数的二阶导数表示。

華北理工大學

2018.7