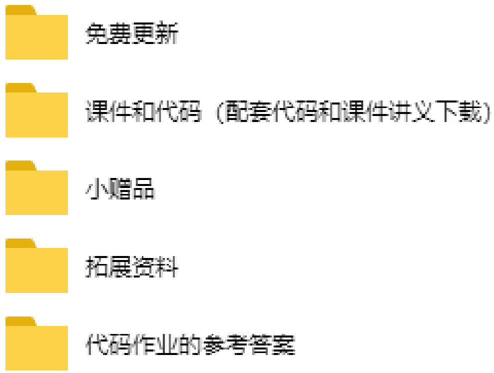
温馨提示

（1）视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。

包括**讲义、代码、优秀的作业、我视频中推荐的资料**等。



（2）关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**“软件”**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**“数据”**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**“画图”**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

（3）**购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**“买”**这个字即可进入店铺进行购买。

（4）视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

数学建模学习交流

第十二讲:预测模型

本讲首先将介绍灰色预测模型，然后将简要介绍神经网络在数据预测中的应用，在本讲的最后，我将谈谈我个人对于数据预测的一些看法。

灰色系统

白色系统	灰色系统	黑色系统
系统的信息是完全明确的。	系统的部分信息已知，部分信息未知。	系统的内部信息是未知的。

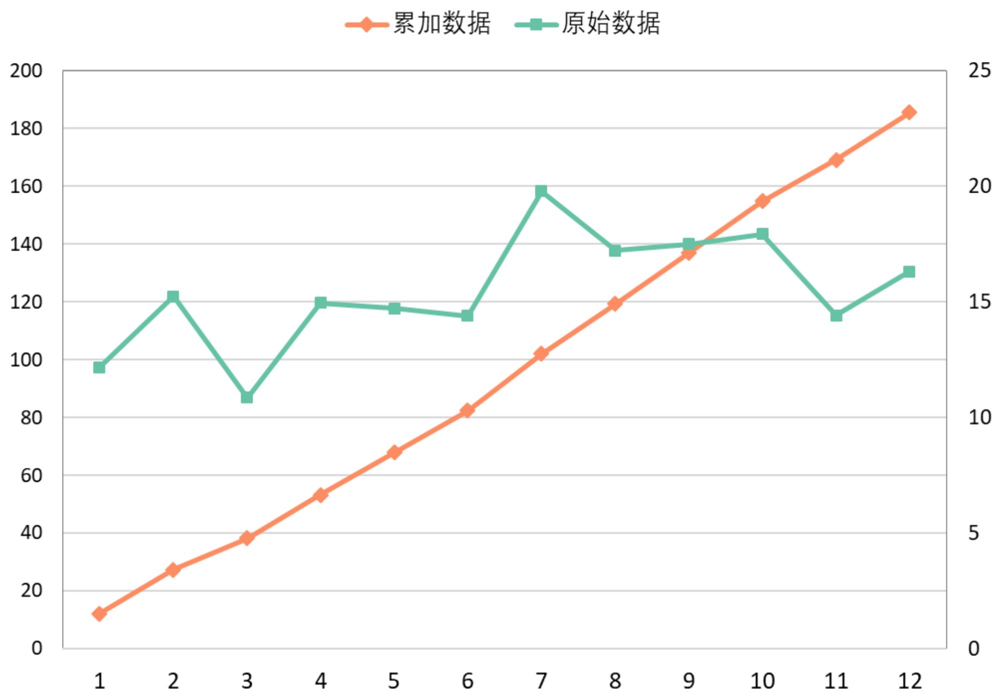
灰色预测是对既含有已知信息又含有不确定信息的系统进行预则，就是对在一定范围内变化的、与时间有关的灰色过程进行预测。

灰色预测对原始数据进行生成处理来寻找系统变动的规律，并生成有较强规律性的数据序列，然后建立相应的微分方程模型，从而预测事物未来发展趋势的状况。

GM(1,1)模型: Grey(Gray) Model

GM(1,1)是使用原始的离散非负数据列，通过一次累加生成削弱随机性的较有规律的新的离散数据列，然后通过建立微分方程模型，得到在离散点处的解经过累减生成的原始数据的近似估计值，从而预测原始数据的后续发展。

（我们在此课件中只探究GM(1,1)模型，第一个‘1’表示微分方程是一阶的，后面的‘1’表示只有一个变量）



时期	原始数据	累加数据
1	12.2	12.2
2	15.2	27.4
3	10.9	38.2
4	15.0	53.2
5	14.7	67.9
6	14.4	82.3
7	19.8	102.1
8	17.2	119.3
9	17.5	136.8
10	17.9	154.8
11	14.4	169.2
12	16.3	185.5

注：数据是用的随机数生成，仅用于例题讲解。

GM(1,1)原理介绍

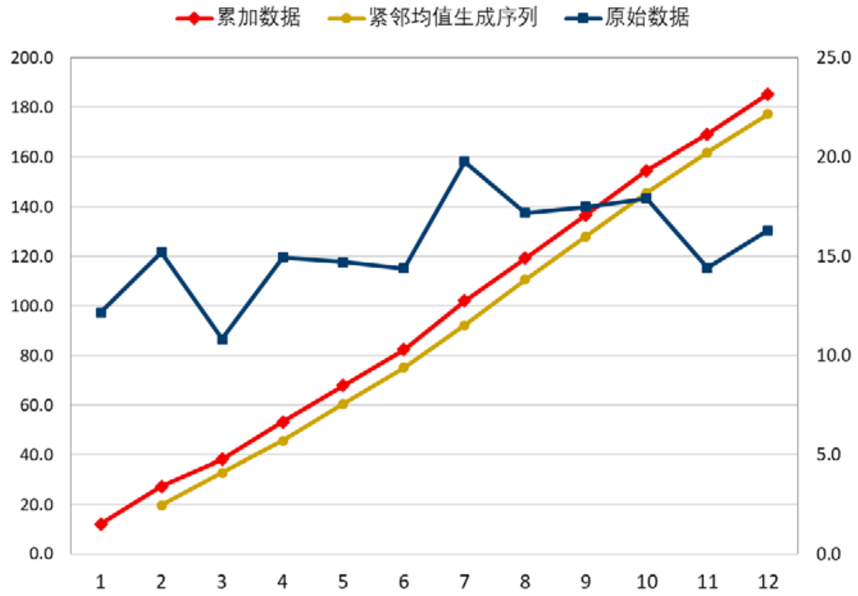
设$x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$是最初的非负数据列，我们对其进行一次累加得到新的生成数据列$x^{(1)}$（$x^{(0)}$的1-AGO序列）： Accumulating Generation Operator

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

其中， $x^{(1)}(m)=\sum_{i=1}^{m}x^{(0)}(i)\ ,m=1,2,\cdots n$

令$z^{(1)}$为数列$x^{(1)}$的紧邻均值生成数列，即$z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$，其中

$$z^{(1)}(m)=\delta x^{(1)}(m)+(1-\delta)x^{(1)}(m-1)\ ,m=2,3,\cdots n\text{且}\delta=0.5$$



时期	原始数据	累加数据	紧邻均值生成序列
1	12.2	12.2	
2	15.2	27.4	19.8
3	10.9	38.2	32.8
4	15.0	53.2	45.7
5	14.7	67.9	60.6
6	14.4	82.3	75.1
7	19.8	102.1	92.2
8	17.2	119.3	110.7
9	17.5	136.8	128.1
10	17.9	154.8	145.8
11	14.4	169.2	162.0
12	16.3	185.5	177.3

GM(1,1)原理介绍

我们称方程$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$为GM(1,1)模型的基本形式($k=2,3,\cdots n$)，其中，b表示灰作用量，$-a$表示发展系数。

下面我们引入矩阵形式：

$$\boldsymbol{u}=(a,b)^T,\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2)&1\\-z^{(1)}(3)&1\\\vdots&\vdots\\-z^{(1)}(n)&1\end{bmatrix}$$

于是，GM(1,1)模型$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$可表示为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

我们可利用最小二乘法得到参数a,b的估计值为

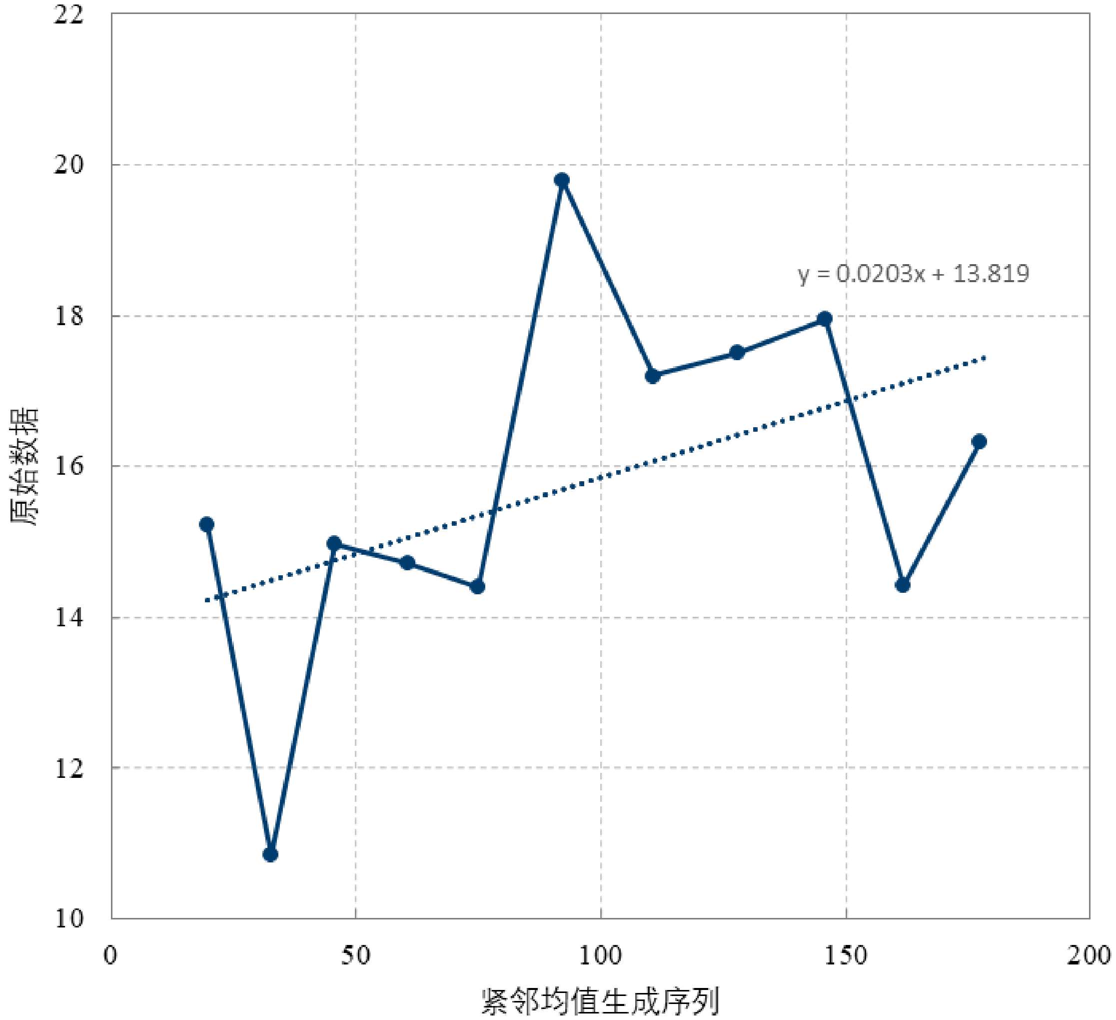
$$\hat{\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}\hat{a}\\\hat{b}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y}$$

看起来很复杂是吧，其实就是将$x^{(0)}$序列视为因变量y，$z^{(1)}$序列视为自变量x，进行回归。

$$x^{(0)}(k)=-az^{(1)}(k)+b\ \Rightarrow\ y=kx+b$$

GM(1,1)原理介绍

$$x^{(0)}(k) = -az^{(1)}(k) + b \Rightarrow y = kx + b$$



OLS原理介绍

$$y_i = kx_i + b + u_i$$

$$\hat{k}, \hat{b} = \underset{k,b}{arg\min} \hat{u}_i^2 = \underset{k,b}{arg\min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2$$

$$\text{令} L = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2 = [y_1 - kx_1 - b, y_2 - kx_2 - b, \cdots, y_n - kx_n - b] \begin{bmatrix} y_1 - kx_1 - b \\ y_2 - kx_2 - b \\ \vdots \\ y_n - kx_n - b \end{bmatrix}$$

$$\text{令矩阵} Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b \\ k \end{bmatrix}$$

$$\text{则} X\beta = \begin{bmatrix} b + kx_1 \\ b + kx_2 \\ \vdots \\ b + kx_n \end{bmatrix}, \quad Y - X\beta = \begin{bmatrix} y_1 - kx_1 - b \\ y_2 - kx_2 - b \\ \vdots \\ y_n - kx_n - b \end{bmatrix}$$

OLS原理介绍

所以有$L = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$

$$= (Y^T - \beta^T X^T)(Y - X\beta)$$

$$= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta$$

则$\widehat{\beta} = \begin{bmatrix} \widehat{b} \\ \widehat{k} \end{bmatrix} = arg \min_{\beta} (Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta)$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -X^T Y - X^T Y + 2X^T X\beta = 0 \Rightarrow X^T X\beta = X^T Y$$

所以$\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$

矩阵求导： https://blog.csdn.net/lipengcn/article/details/52815429

完全多重共线性问题再探究

$\widehat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY$, 这意味着$X^TX$必须可逆

假设我们考虑有常数项的k个自变量的多元回归模型，那么X是$n\times(k+1)$的矩阵, 则X^TX是$k+1$阶的方阵

X^TX可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r(X^TX)=k+1}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{r(X)=k+1}$ （利用同解方程组可证明$r(A)=r(A^T)=r(A^TA)=r(AA^T)$）

$\boldsymbol{r(X)=k+1}$ $\Leftrightarrow$ $n\geq k+1$, X的列向量组线性无关

$$X=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk}\end{bmatrix}_{n\times(k+1)} \xlongequal{\text{写成列向量形式}} [\boldsymbol{1},\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\cdots,\boldsymbol{x_k}],\text{其中}\boldsymbol{1}=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times1},\ \boldsymbol{x_i}=\begin{bmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\ \vdots\\x_{ni}\end{bmatrix}_{n\times1}\quad(i=1,2,\cdots k)$$

X的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ 要使得$a_0\boldsymbol{1}+a_1\boldsymbol{x_1}+a_2\boldsymbol{x_2}\cdots+a_k\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{0}_{n\times1}$，当且仅当$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_k=0$

（如果存在$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_k$不全为0使得$a_0\boldsymbol{1}+a_1\boldsymbol{x_1}+a_2\boldsymbol{x_2}\cdots+a_k\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{0}_{n\times1}$，那么$X$的列向量组线性相关）

为什么在第七讲介绍多元回归生成虚拟变量的时候要强调虚拟变量的个数要减去1个才能带入回归模型：

假设$\boldsymbol{x_1}$是表示是否为男性的虚拟变量（$x_{j1}=1$代表第j个样本是男性，$x_{j1}=0$则代表第j个样本是女性）

再假设$\boldsymbol{x_2}$是表示是否为女性的虚拟变量（$x_{j2}=1$代表第j个样本是女性，$x_{j1}=0$则代表第j个样本是男性）

那么，我们一定可以得到如下结论：$\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{1}$ （因为对于任意一个样本，其不是男性就是女性）

如果我们在回归时既加入了$\boldsymbol{x_1}$，又加入了$\boldsymbol{x_2}$，那么我们可取$a_0=-1$, $a_1=a_2=1$, $a_i=0(i=3,4,\cdots,k)$

此时$a_0\boldsymbol{1}+a_1\boldsymbol{x_1}+a_2\boldsymbol{x_2}\cdots+a_k\boldsymbol{x_k}=\boldsymbol{0}_{n\times1}$，那么$X$的列向量组线性相关，此时$X^TX$不可逆，即发生了完全多重共线性

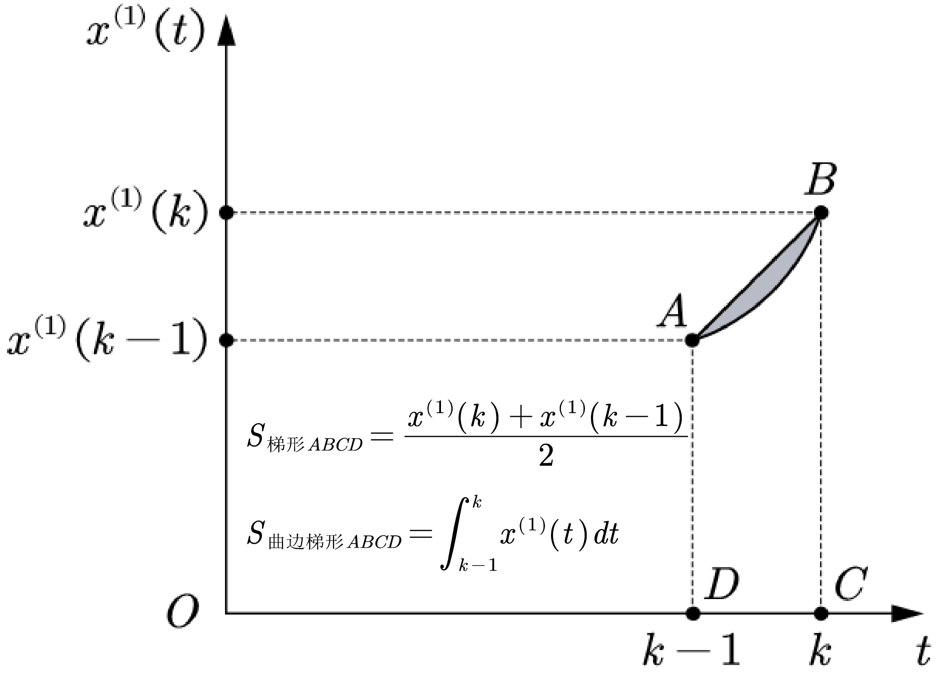
GM(1,1)原理介绍

利用OLS估计我们能得到$\hat{a}$和$\hat{b}$，即$x^{(0)}(k) = -\hat{a}z^{(1)}(k) + \hat{b} \quad (k = 2, 3, \cdots n)$

$$x^{(0)}(k) = -\hat{a}z^{(1)}(k) + \hat{b} \Rightarrow x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = -\hat{a}z^{(1)}(k) + \hat{b}$$

$$x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = \int_{k-1}^{k} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt \quad \text{(牛顿-莱布尼茨公式)}$$

$$z^{(1)}(k) = \frac{x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)}{2} \approx \int_{k-1}^{k} x^{(1)}(t)\, dt \quad \text{(定积分的几何意义)}$$



$$\int_{k-1}^{k} \frac{dx^{(1)}(t)}{dt} dt \approx -\hat{a}\int_{k-1}^{k} x^{(1)}(t)\, dt + \int_{k-1}^{k} \hat{b}\, dt$$

$$= \int_{k-1}^{k} [-\hat{a}x^{(1)}(t) + \hat{b}]\, dt$$

微分方程： $\boldsymbol{\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = -\hat{a}x^{(1)}(t) + \hat{b}}$

被称为GM(1,1)模型的白化方程；

$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$（GM(1,1)模型的基本形式）

则被称为灰色微分方程。

GM(1,1)原理介绍

为什么会有灰色微分方程$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$这个概念？

〔4.19附注〕灰色建模的宗旨是将数据列建成微分方程模型，由于数据列的离散性，由于信息时区内出现空集（即不包含信息的定时区），因此只能按近似的微分方程条件，建立近似的，不完全确定的灰微分方程模型。

参考：邓聚龙《灰色系统理论教程》第1版 华中理工大学出版社

中国控制论专家邓聚龙教授在1982年首次提出灰色系统的概念，其主要用来解决信息不完备的系统。

灰建模的初衷是对数列建立近似的微分方程模型，但是由于微分方程只适合连续可微函数，而时间序列数据非连续，更谈不上可微性，因此灰色预测建模得到的是近似微分方程，称之为灰微分方程。

白化方程：$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}=-\hat{a}x^{(1)}(t)+\hat{b}$

如果我们取初始值$\hat{x}^{(1)}(t)\big|_{t=1}=x^{(0)}(1)$，我们可以求出其对应的解为：

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(t-1)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

所以$\hat{x}^{(1)}(m+1)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}m}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\ ,m=1,2,\cdots,n-1$

一阶微分方程

一阶齐次线性微分方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的方程称为一阶齐次线性微分方程，其通解公式为：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

例如：$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2}$，则$P(x)=-\frac{1}{1+x^2}$，套用公式可得：$y=Ce^{-\int -\frac{1}{1+x^2}dx}=Ce^{\arctan x}$.

一阶非齐次线性微分方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的方程称为一阶非齐次线性微分方程，其通解公式为：

$$y=\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]e^{-\int P(x)dx}$$

例如：$y'+y\tan x=\cos x$，则$P(x)=\tan x$，$Q(x)=\cos x$，则套用公式可得：

$$y=\left[\int \cos x e^{\int \tan x dx}dx+C\right]e^{-\int \tan x dx}=\left[\int \cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+C\right]\cdot\cos x=(x+C)\cos x$$

参考：同济大学《高等数学上册》第七版315页和334页

GM(1,1)原理介绍

白化方程：$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}=-\hat{a}x^{(1)}(t)+\hat{b}$

如果我们取初始值$\hat{x}^{(1)}(t)\big|_{t=1}=x^{(0)}(1)$，我们可以求出其对应的解为:

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}(t-1)}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$$

$$\text{所以}\ \hat{x}^{(1)}(m+1)=\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}m}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\ ,m=1,2,\cdots,n-1$$

由于$x^{(1)}(m)=\sum_{i=1}^{m}x^{(0)}(i)\ ,m=1,2,\cdots n$，所以我们可以得到：

$$\hat{x}^{(0)}(m+1)=\hat{x}^{(1)}(m+1)-\hat{x}^{(1)}(m)=(1-e^{\hat{a}})\left[x^{(0)}(1)-\frac{\hat{b}}{\hat{a}}\right]e^{-\hat{a}m}\ ,m=1,2,\cdots,n-1$$

如果要对原始数据进行预测，只需要在上式取$m\geqslant n$即可。

GM$(1,1)$模型的本质是有条件的指数拟合：$f(x)=C_1e^{C_2(x-1)}$

（注意：这里的指数规律主要是针对$x^{(1)}(k)$序列而言的，原始序列是作差的结果）

准指数规律的检验

（1）数据具有准指数规律是使用灰色系统建模的理论基础。

（2）累加r次的序列为：$x^{(r)}=(x^{(r)}(1),x^{(r)}(2),\cdots,x^{(r)}(n))$，定义级比$\sigma(k)=\dfrac{x^{(r)}(k)}{x^{(r)}(k-1)}$，$k=2,3,\cdots,n.$

（3）如果$\forall k,\ \sigma(k)\in[a,b]$，且区间长度$\delta=b-a<0.5$，则称累加$r$次后的序列具有准指数规律。

（4）具体到GM$(1,1)$模型中，我们只需要判断累加一次后的序列$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$是否具有准指数规律。

（5）根据上述公式：序列$x^{(1)}$的级比$\sigma(k)=\dfrac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}=\dfrac{x^{(0)}(k)+x^{(1)}(k-1)}{x^{(1)}(k-1)}=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}+1$，

定义$\rho(k)=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$为原始序列$x^{(0)}$的光滑比，注意到$\rho(k)=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)+x^{(0)}(k-1)}$，假设$x^{(0)}$为非负序列（生活中的常见的时间序列几乎都满足非负性），那么随着k增加，最终$\rho(k)$会逐渐接近0，因此要使得具有$x^{(1)}$具有准指数规律，即$\forall k$，区间长度$\delta<0.5$，只需要只需要保证$\rho(k)\in(0,0.5)$即可，此时序列$x^{(1)}$的级比$\sigma(k)\in(1,1.5)$.

实际建模中，我们要计算出$\rho(k)\in(0,0.5)$的占比，占比越高越好

（一般前两期：$\rho(2)$和$\rho(3)$可能不符合要求，我们重点关注后面的期数）

刘思峰，谢乃明，等. 2010. 灰色系统理论及其应用[M]. 5版. 北京：科学出版社

发展系数与预测情形的探究

GM(1,1)适用情况和发展系数的大小有很大关系，教材中给了如下结论：

当$|a|>2$时，模型没有意义；当$|a|<2$时，GM(1,1)才有意义。

当a取不同值时，预测的最终效果也不相同，具体讨论如下：

当$-a<0.3$时，GM(1,1)模型适合于中期和长期数据的预测。

当$0.3<-a\leqslant 0.5$时，GM(1,1)模型适合于短期预测，中长期数据预测应谨慎使用。

当$0.5<-a\leqslant 0.8$时，GM(1,1)模型对于预测短期数据应谨慎使用。

当$0.8<-a\leqslant 1.0$时，应对GM(1,1)进行残差修正(见教材)后使用。

当$-a>1$时，不宜使用GM(1,1)模型进行预测。

所以，我们可以根据预测出的$\hat{a}$，来和上述范围比较，来确定适用情况。

表 6.5.2　预测误差

$-a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1.5	1.8
1 步误差	0.129%	0.701%	1.998%	4.317%	7.988%	13.405%	31.595%	65.117%	—	—
2 步误差	0.137%	0.768%	2.226%	4.865%	9.091%	15.392%	36.979%	78.113%	—	—
5 步误差	0.160%	0.967%	2.912%	6.529%	12.468%	21.566%	54.491%	—	—	—
10 步误差	0.855%	1.301%	4.067%	9.362%	18.330%	32.599%	88.790%	—	—	—

注：上面这个结论谨慎使用，按照书上的结果，应该是发展系数越小预测的越精确。

GM(1,1)模型的评价

使用GM(1,1)模型对未来的数据进行预测时，我们需要先检验GM(1,1)模型对原数据的拟合程度（对原始数据还原的效果）。一般有两种检验方法：

（1）残差检验

绝对残差: $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k),\ k = 2, 3, \cdots, n$

相对残差: $\varepsilon_r(k) = \dfrac{|x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)|}{x^{(0)}(k)} \times 100\%,\ k = 2, 3, \cdots, n$

平均相对残差: $\bar{\varepsilon}_r = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}|\varepsilon_r(k)|$

如果$\bar{\varepsilon}_r < 20\%$，则认为GM(1,1)对原数据的拟合达到一般要求。

如果$\bar{\varepsilon}_r < 10\%$，则认为GM(1,1)对原数据的拟合效果非常不错。

注：（1）其他的预测模型也可以用这个残差检验哦~
（2）关于这个10%和20%的标准不是绝对的，要结合预测的场景。

GM(1,1)模型的检验

（2）级比偏差检验

首先由$x^{(0)}(k-1)$和$x^{(0)}(k)$计算出原始数据的级比$\sigma(k)$：

$$\sigma(k)=\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}(k=2,3,\cdots,n)$$

再根据预测出来的发展系数$(-\hat{a})$计算出相应的级比偏差和平均级比偏差:

$$\eta(k)=\left|1-\frac{1-0.5\hat{a}}{1+0.5\hat{a}}\frac{1}{\sigma(k)}\right|(\eta\text{读}[eta]),\ \overline{\eta}=\sum_{k=2}^{n}\eta(k)/(n-1)$$

如果$\overline{\eta}<0.2$，则认为GM(1,1)对原数据的拟合达到一般要求。

如果$\overline{\eta}<0.1$，则认为GM(1,1)对原数据的拟合效果非常不错。

定理 6.2.4 GM(1,1)模型

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

可以转化为

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\frac{1-0.5a}{1+0.5a}x^{(0)}(k-1),\quad k=3,4,\cdots,n$$

检验的原理:

$\eta(k)$越小，说明$x^{(0)}(k)$和$\hat{x}^{(0)}(k)$越接近。

特别地：当$\eta(k)=0$时，可以得到：

$$\sigma(k)=\frac{1-0.5\hat{a}}{1+0.5\hat{a}}=\frac{\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k-1)}$$

刘思峰，谢乃明，等. 2010. 灰色系统理论及其应用[M]. 5版. 北京：科学出版社

GM(1,1)模型的拓展

定义 6.4.3 设原始数据数列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

(1) 用 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$建立的 GM(1,1)模型称为全数据 GM(1,1)；

(2) $\forall k_0>1$，用 $X^{(0)}=(x^{(0)}(k_0),x^{(0)}(k_0+1),\cdots,x^{(0)}(n))$建立的 GM(1,1)模型称为部分数据 GM(1,1)；

(3) 设 $x^{(0)}(n+1)$为最新信息，将 $x^{(0)}(n+1)$置入 $X^{(0)}$，称用 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n),x^{(0)}(n+1))$建立的模型为新信息 GM(1,1)；

(4) 置入最新信息 $x^{(0)}(n+1)$，去掉最老信息 $x^{(0)}(1)$，称用 $X^{(0)}=(x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n),x^{(0)}(n+1))$建立的模型为新陈代谢 GM(1,1)。

从对 $x^{(0)}(6)$的模拟精度看，新陈代谢模型高于新信息模型。从预测角度看，新陈代谢模型是最理想的模型。随着系统的发展，老数据的信息意义将逐步降低，在不断补充新信息的同时，及时地去掉老信息，建模序列更能反映系统在目前的特征。尤其是系统随着量变的积累，发生质的飞跃或突变时，与过去的系统相比，已是面目全非。去掉已根本不可能反映系统目前特征的老数据，显然是合理的。此外，不断地进行新陈代谢，还可以避免随着信息的增加，计算机内存不断扩大，建模运算量不断增大的困难。

作者找了一个灰色预测的例子，在这个例子中新陈代谢模型的预测效果很最好。

什么时候用灰色预测?

下面是我自己的看法，使用哪种模型进行预测是仁者见仁智者见智的事情：

（1）数据是以年份度量的非负数据（如果是月份或者季度数据一定要用我们上一讲学过的时间序列模型）；

（2）数据能经过准指数规律的检验（除了前两期外，后面至少90%的期数的光滑比要低于0.5）；

（3）数据的期数较短且和其他数据之间的关联性不强（小于等于10，也不能太短了，比如只有3期数据），要是数据期数较长，一般用传统的时间序列模型比较合适。

灰色预测的例题

对长江水质污染的预测

2005年国赛A题中给出长江在过去10年中废水排放总量，如果不采取保护措施，请对今后10年的长江水质污染的发展趋势做出预测。

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
排污总量	174	179	183	189	207	234	220.5	256	270	285

预测的题目的一些小套路

（1）看到数据后先画时间序列图并简单的分析下趋势（例如：我们上一讲学过的时间序列分解）；

（2）将数据分为训练组和试验组，尝试使用不同的模型对训练组进行建模，并利用试验组的数据判断哪种模型的预测效果最好（比如我们可以使用SSE这个指标来挑选模型，常见的模型有指数平滑、ARIMA、灰色预测、神经网络等）。

（3）选择上一步骤中得到的预测误差最小的那个模型，并利用全部数据来重新建模，并对未来的数据进行预测。

（4）画出预测后的数据和原来数据的时序图，看看预测的未来趋势是否合理。

GM(1,1)模型代码讲解

1. 画出原始数据的时间序列图，并判断原始数据中是否有负数或期数是否低于4期，如果是的话则报错，否则执行下一步；

2. 对一次累加后的数据进行准指数规律检验，返回两个指标：

    指标1：光滑比小于0.5的数据占比（一般要大于60%）

    指标2：除去前两个时期外，光滑比小于0.5的数据占比（一般大于90%）

  并让用户决定数据是否满足准指数规律，满足则输入1，不满足则输入0

3. 如果上一步用户输入0，则程序停止；如果输入1，则继续下面的步骤。

4. 让用户输入需要预测的后续期数，并判断原始数据的期数：

  4.1 数据期数为4：

    分别计算出传统的GM(1,1)模型、新信息GM(1,1)模型和新陈代谢GM(1,1)模型对于未来期数的预测结果，为了保证结果的稳健性，对三个结果求平均值作为预测值。

  4.2 数据期数为5,6或7：

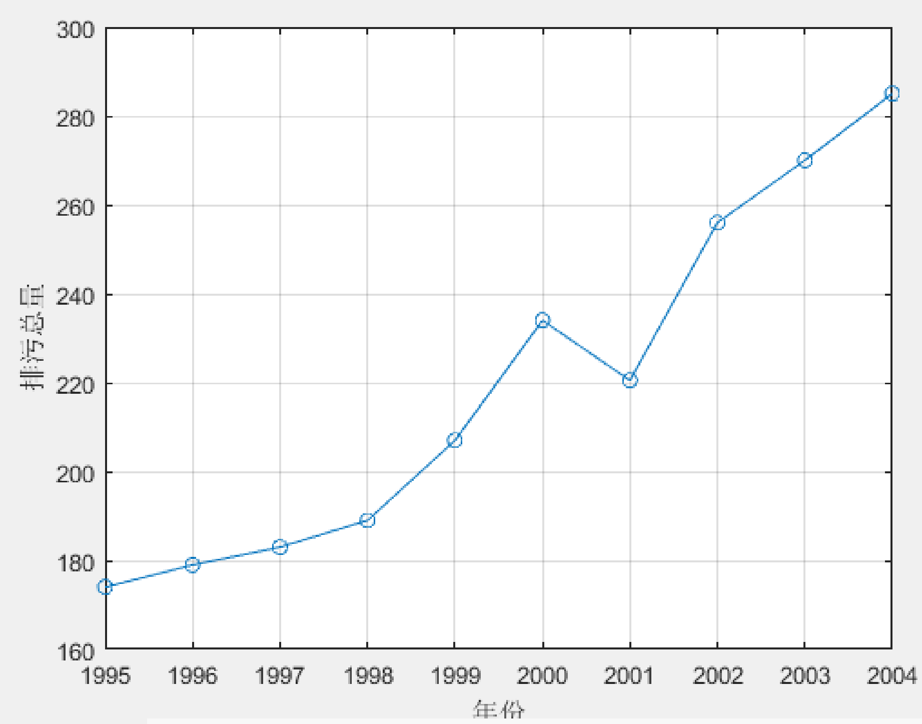
    取最后两期为试验组，前面的n-2期为训练组；用训练组的数据分别训练三种GM模型，并将训练出来的模型分别用于预测试验组的两期数据；利用试验组两期的真实数据和预测出来的两期数据，可分别计算出三个模型的SSE；选择SSE最小的模型作为我们建模的模型。

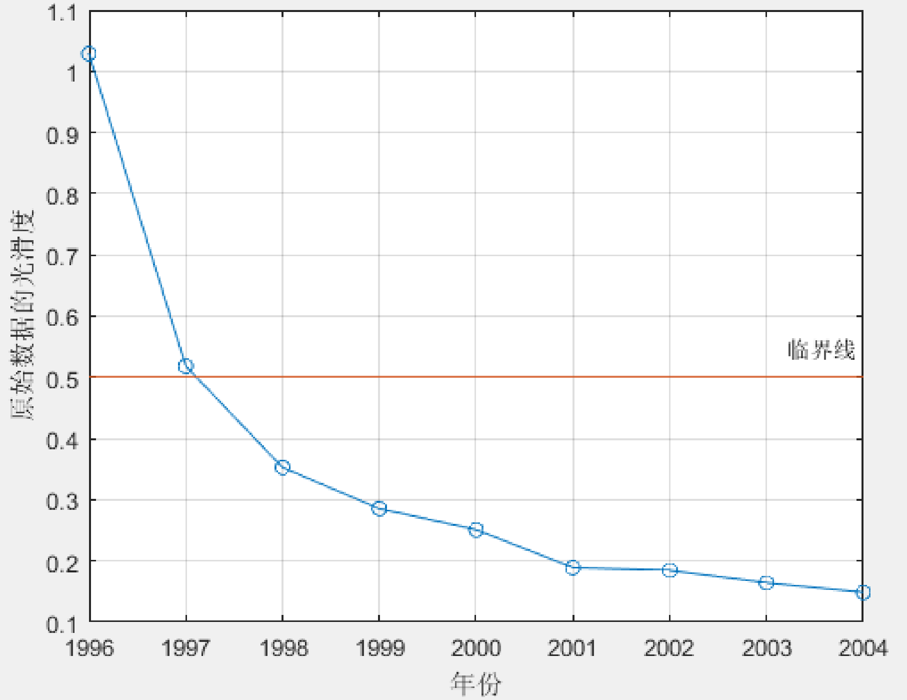
  4.3 数据期数大于7：

    取最后三期为试验组，其他的过程和4.2类似。

5. 输出并绘制图形显示预测结果，并进行残差检验和级比偏差检验。

灰色预测运行结果





原始数据的长度为10

准指数规律检验

指标1：光滑比小于0.5的数据占比为77.7778%

指标2：除去前两个时期外，光滑比小于0.5的数据占比为100%

参考标准：指标1一般要大于60%，指标2要大于90%，你认为本例数据可以通过检验吗？

你认为可以通过准指数规律的检验吗？可以通过请输入1，不能请输入0：1

灰色预测运行结果

```
-------------------------------------------------------------
因为原数据的期数大于4，所以我们可以将数据组分为训练组和试验组
训练数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5]
试验数据是:
[256 270 285]
-------------------------------------------------------------
```

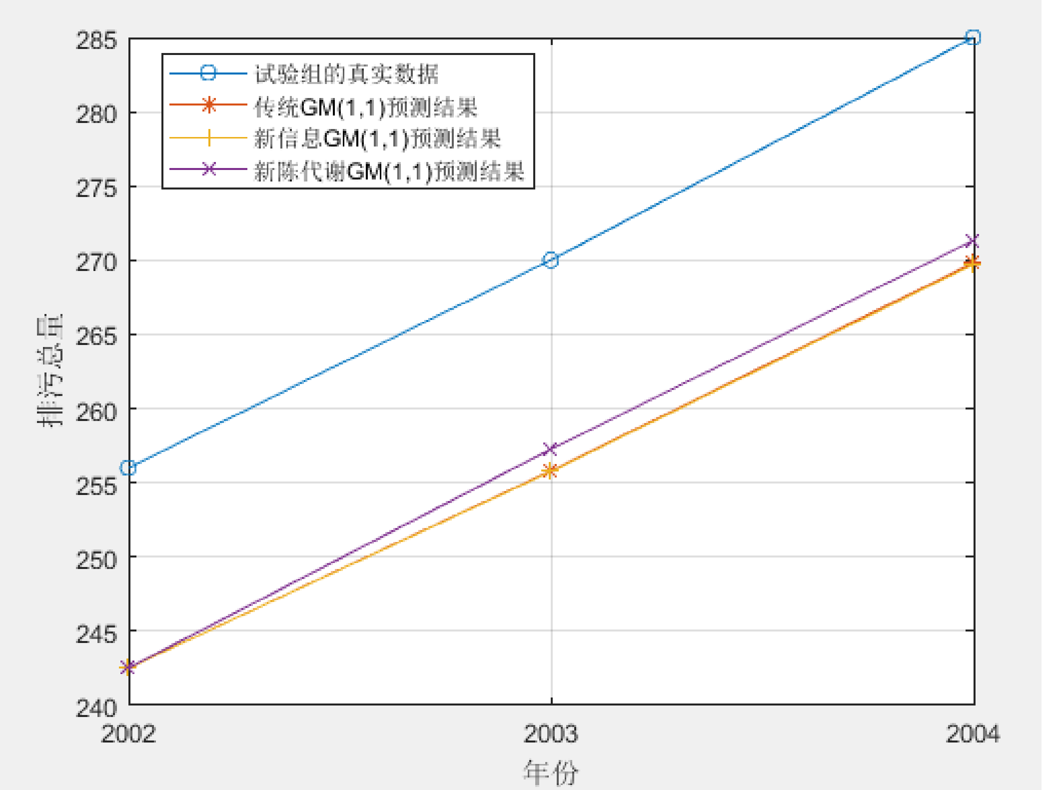
```
***下面是进行新信息的GM(1,1)模型预测的详细过程***
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.053355，灰作用量是162.1358
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5 242.509856680773]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.053316，灰作用量是162.1589
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5 242.509856680773 255.749834975262]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.053284，灰作用量是162.1806
***************分割线***************
```

灰色预测运行结果

```
***下面是传统的GM(1,1)模型预测的详细过程***
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.053355，灰作用量是162.1358
```

```
***下面是进行新陈代谢的GM(1,1)模型预测的详细过程***
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.053355，灰作用量是162.1358
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[179 183 189 207 234 220.5 242.50985668077З]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.055735，灰作用量是169.0787
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[183 189 207 234 220.5 242.509856680773 257.26402744888]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.054739，灰作用量是180.0538
***************分割线***************
```

灰色预测运行结果



\---

传统GM(1,1)对于试验组预测的误差平方和为614.0612
新信息GM(1,1)对于试验组预测的误差平方和为618.9622
新陈代谢GM(1,1)对于试验组预测的误差平方和为531.1548
'因为新陈代谢GM(1,1)模型的误差平方和最小，所以我们应该选择其进行预测'

灰色预测运行结果

```
'因为新陈代谢GM(1,1)模型的误差平方和最小，所以我们应该选择其进行预测'

----------------------------------------------------------------
请输入你要往后面预测的期数： 2
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5 256 270 285]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.062398，灰作用量是156.6162
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[174 179 183 189 207 234 220.5 256 270 285]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.062398，灰作用量是156.6162
***************分割线***************
现在进行GM(1,1)预测的原始数据是:
[179 183 189 207 234 220.5 256 270 285 303.012231932034]
最小二乘法拟合得到的发展系数为0.064197，灰作用量是164.7232
***************分割线***************
```

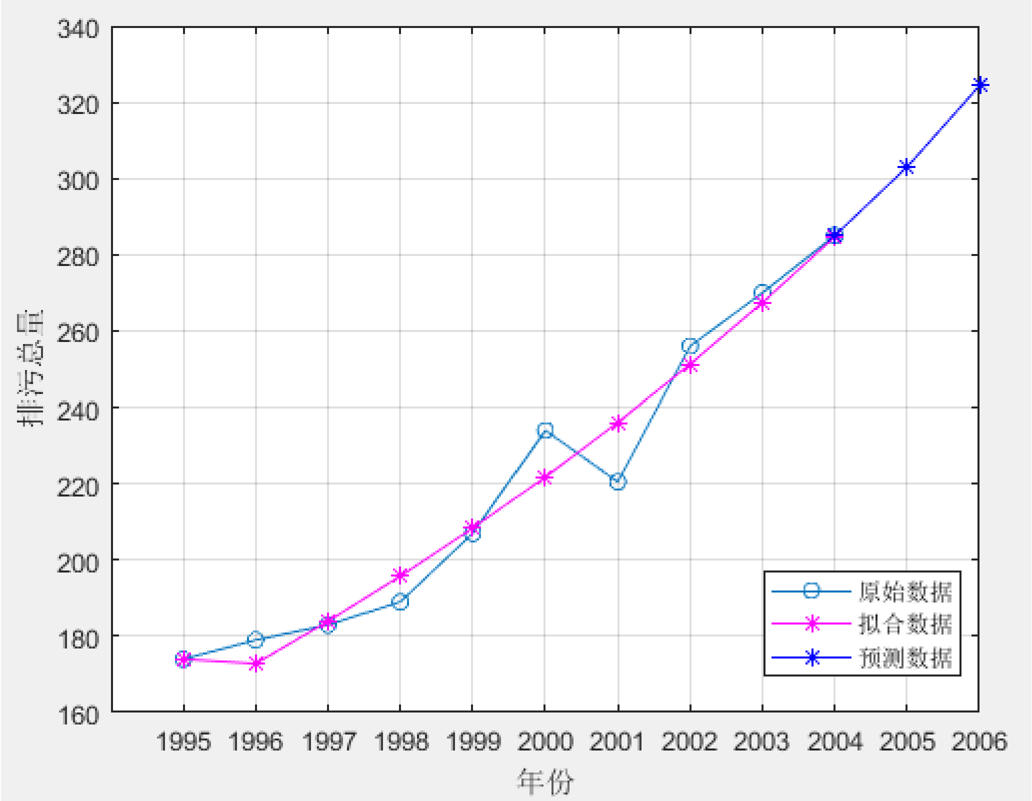
使用传统GM模型
目的是得到其他返回值
(x0_hat 相对残差 eta)

使用新陈代谢GM模型
（更新刚刚传统模型的预测结果）

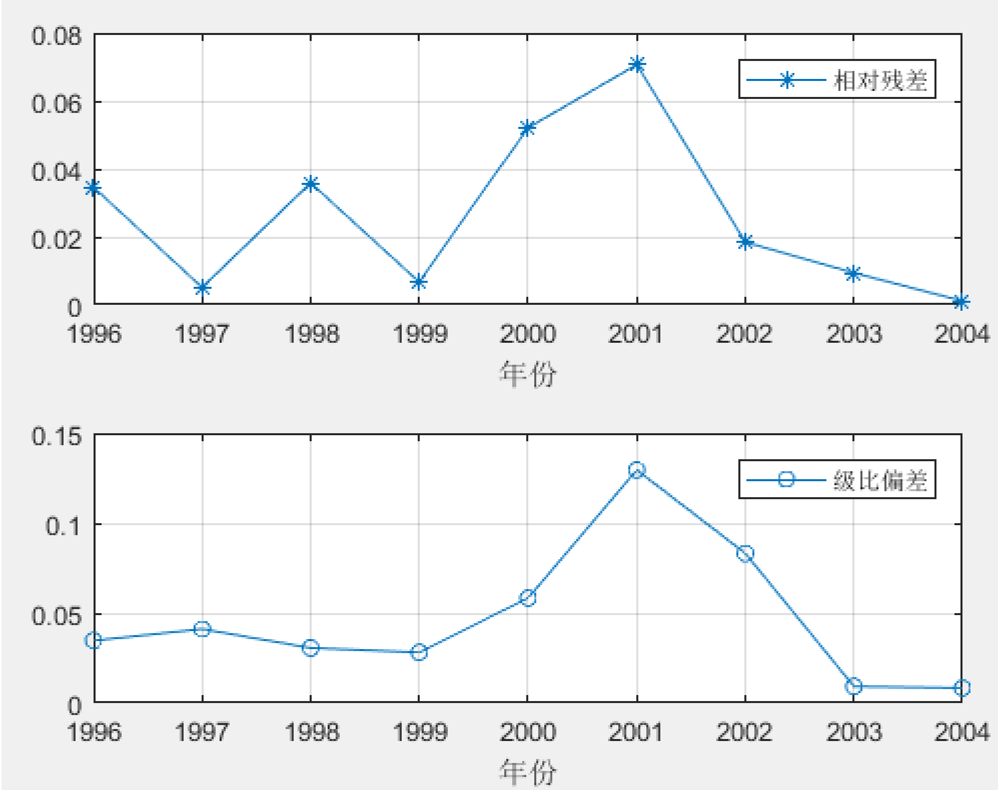
数学建模学习交流

灰色预测运行结果

对原始数据的拟合结果:
1995 : 174
1996 : 172.809
1997 : 183.9355
1998 : 195.7785
1999 : 208.3839
2000 : 221.801
2001 : 236.082
2002 : 251.2825
2003 : 267.4616
2004 : 284.6825
往后预测2期的得到的结果:
2005 : 303.0122
2006 : 324.3254

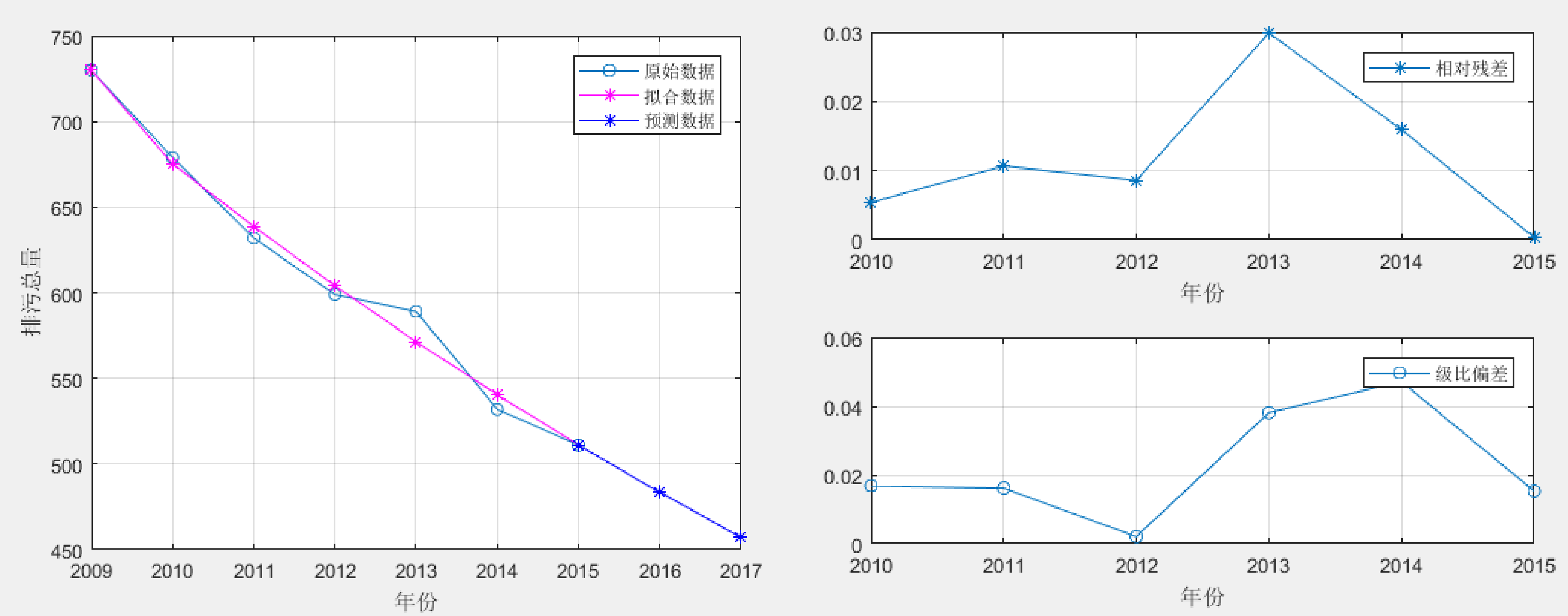


灰色预测运行结果



****下面将输出对原数据拟合的评价结果***
平均相对残差为0.025999
残差检验的结果表明：该模型对原数据的拟合程度非常不错
平均级比偏差为0.047041
级比偏差检验的结果表明：该模型对原数据的拟合程度非常不错

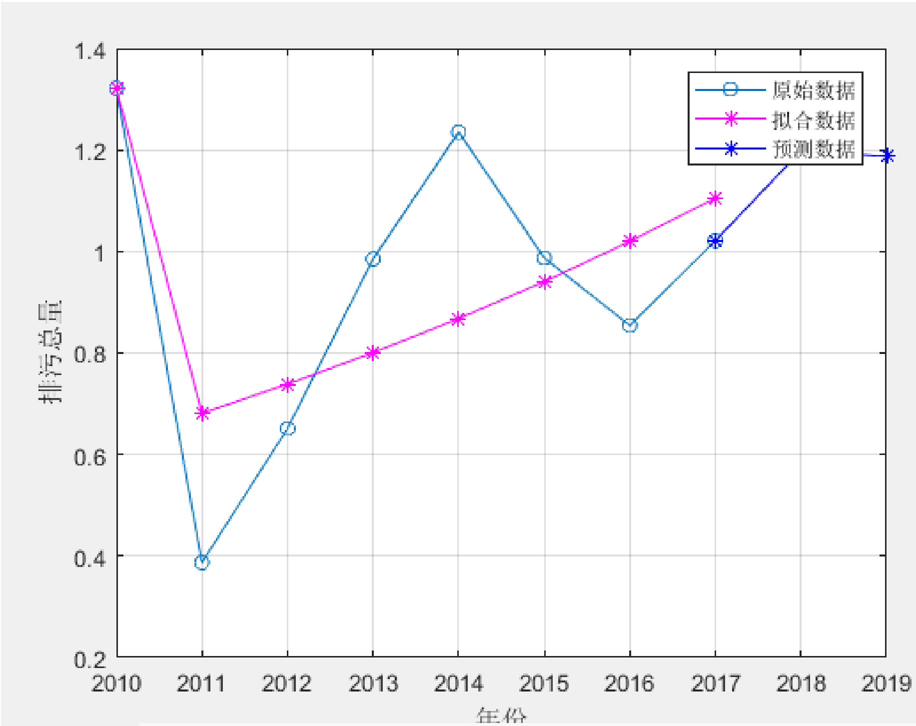
更换新的数据集1

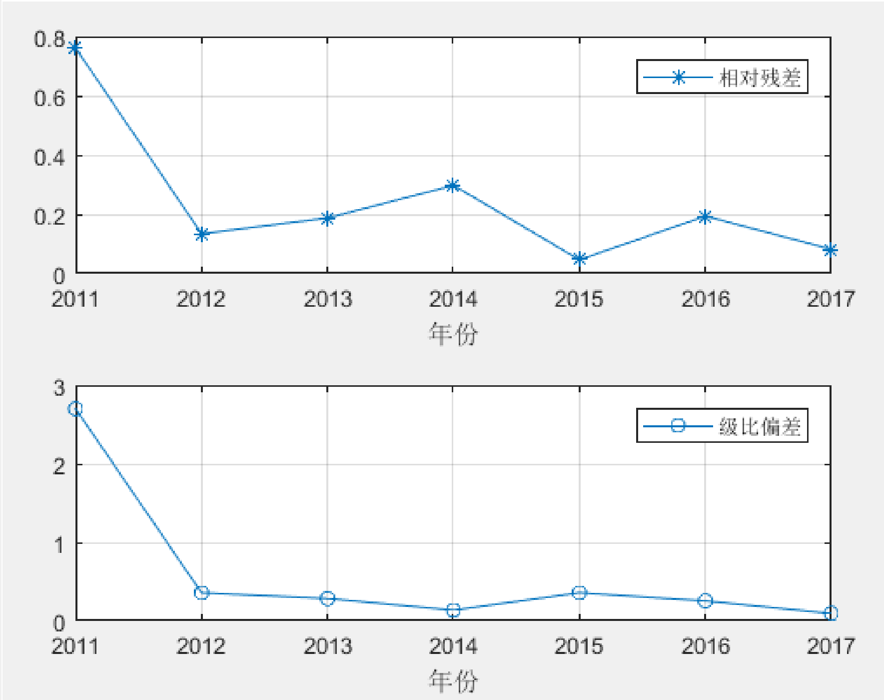


准指数规律检验
指标1：光滑比小于0.5的数据占比为83.3333%
指标2：除去前两个时期外，光滑比小于0.5的数据占比为100%
参考标准：指标1一般要大于60%, 指标2要大于90%，你认为本例数据可以通过检验吗?
你认为可以通过准指数规律的检验吗？可以通过请输入1，不能请输入0：1

更换新的数据集2

准指数规律检验失效了，拟合的效果很差





准指数规律检验

指标1：光滑比小于0.5的数据占比为100%

指标2：除去前两个时期外，光滑比小于0.5的数据占比为100%

参考标准：指标1一般要大于60%，指标2要大于90%，你认为本例数据可以通过检验吗？

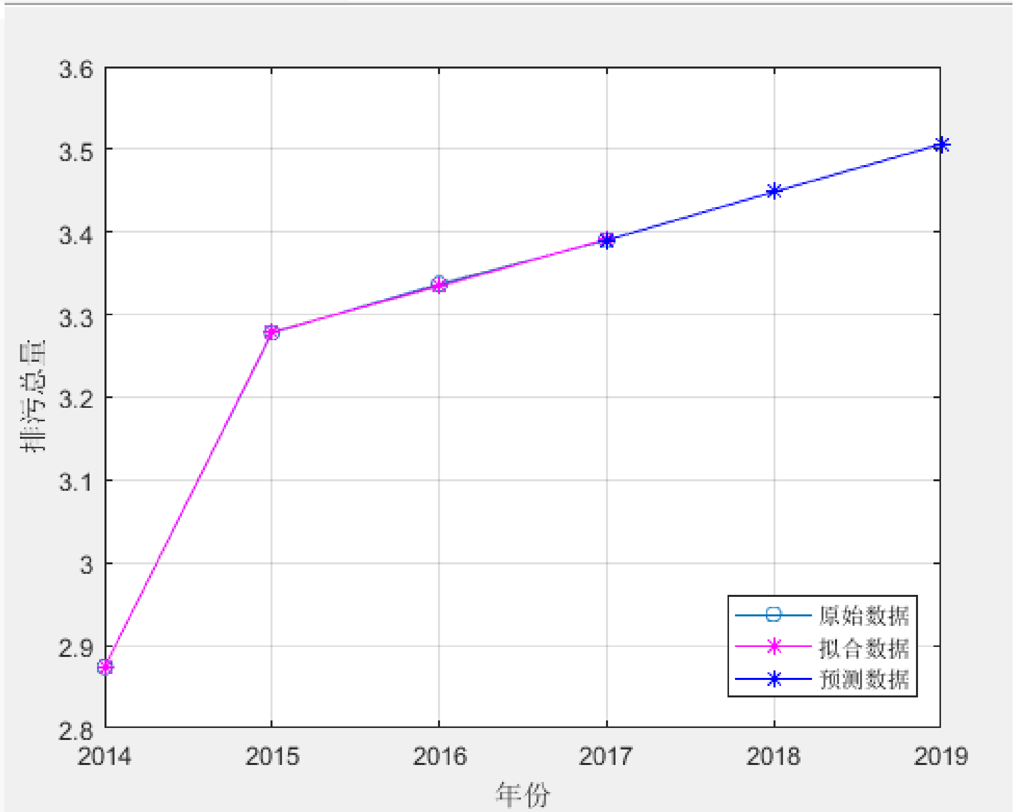
你认为可以通过准指数规律的检验吗？可以通过请输入1，不能请输入0：1

平均相对残差为0.24327，平均级比偏差为0.59674

更换新的数据集3

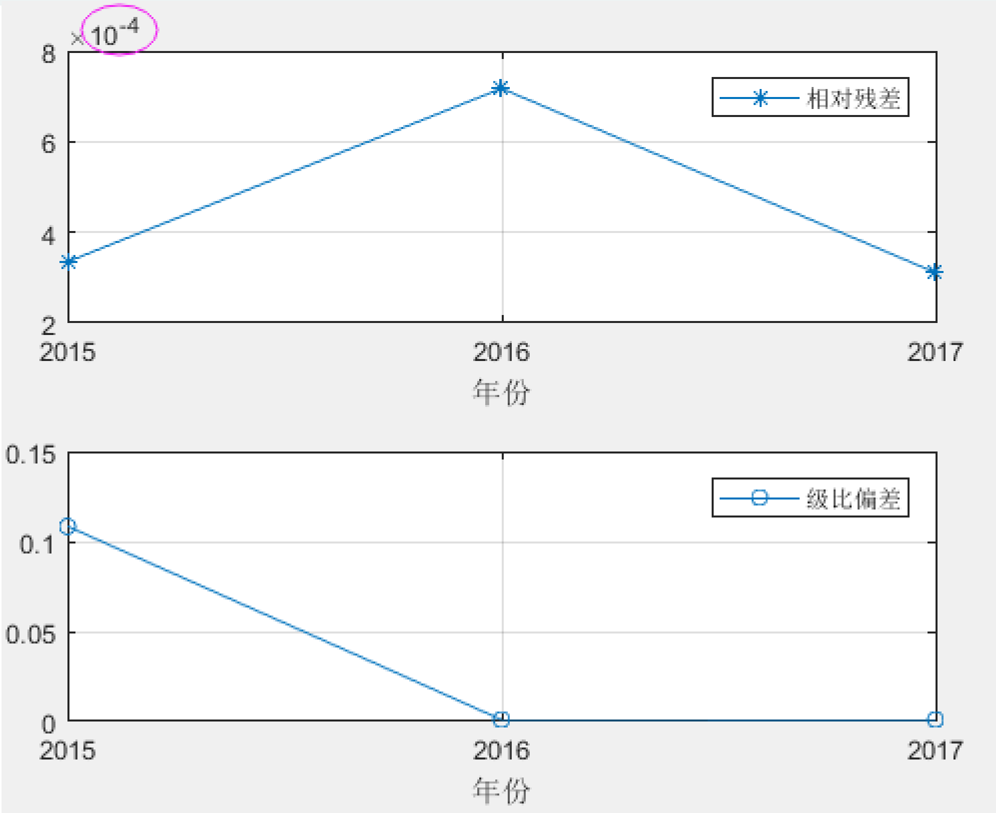
因为数据只有4期，因此我们直接将三种方法的结果求平均即可~
请输入你要往后面预测的期数： 2

对原始数据的拟合结果:
2014 ： 2.874
2015 ： 3.2791
2016 ： 3.3346
2017 ： 3.3911
传统GM(1,1)往后预测2期的得到的结果:
2018 ： 3.4485
2019 ： 3.5068
新信息GM(1,1)往后预测2期的得到的结果:
2018 ： 3.4485
2019 ： 3.5067
新陈代谢GM(1,1)往后预测2期的得到的结果:
2018 ： 3.4485
2019 ： 3.5048
三种方法求平均得到的往后预测2期的得到的结果:
2018 ： 3.4485
2019 ： 3.5061



数学建模学习交流

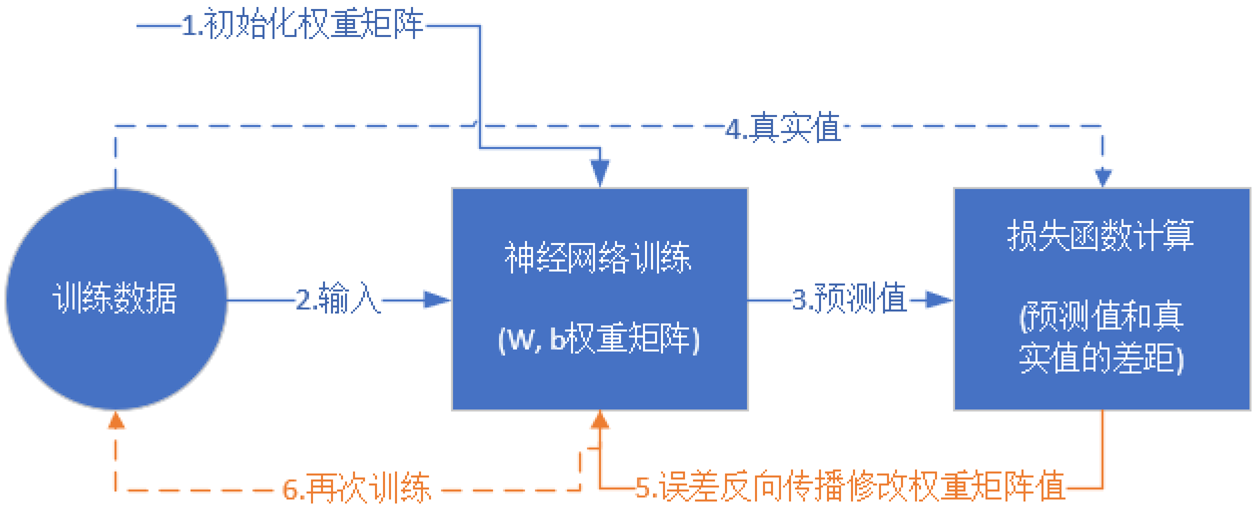
更换新的数据集3



****下面将输出对原数据拟合的评价结果***
平均相对残差为0.00045446
残差检验的结果表明：该模型对原数据的拟合程度非常不错
平均级比偏差为0.036828
级比偏差检验的结果表明：该模型对原数据的拟合程度非常不错

BP神经网络预测——万金油

原理的视频介绍（只看前20分钟，后面的讲的不怎么好，可跳过）
https://www.bilibili.com/video/av53675526/



神经网络原理的简单介绍：https://blog.csdn.net/weixin_40432828/article/details/82192709
神经网络的应用：https://blog.csdn.net/houshaolin/article/details/74240017

神经网络的介绍


电脑 › 资料书籍 (D:) › 数学建模书籍 › 商店 › 研究生数学建模竞赛商品 › 研赛：按30个模型整理的论文（赠送历年赛题） › 优秀论文 › 神经网络

名称	修改日期	类型	大小
PM2.5 扩散预测模型及相关问题研究.pdf	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	3,476 KB
变循环发动机部件法建模及优化.pdf	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	1,689 KB
变循环发动机部件法模型的求解及优化.p...	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	770 KB
城市交通管理中的出租车规划.pdf	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	484 KB
城镇登记失业率的研究与预测.pdf	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	646 KB
城镇登记失业率与主要经济指标的模型.p...	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	698 KB
城镇就业人数影响因素分析.pdf	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	761 KB
对恐怖袭击事件记录数据的量化分析.pdf	2019/08/14 9:56	Foxit PhantomP...	2,564 KB
房地产行业的数学模型 (2).pdf	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	2,300 KB
房地产行业的数学模型.pdf	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	1,869 KB
功率放大器非线性特性及预失真建模.pdf	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	1,960 KB
基于多目标规划和智能优化算法的粮食最...	2019/08/14 9:56	Foxit PhantomP...	3,959 KB
基于多种智能化算法和营养健康的中国果...	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	1,343 KB
基于粒化思想的多层次目标规划模型的研...	2019/08/14 9:56	Foxit PhantomP...	4,270 KB
基于神经网络MIV值分析的肿瘤信息基因...	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	1,164 KB
基于提高高速公路路面质量改进方案的探...	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	718 KB
交通网络的通行时间预测与最优路径决策...	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	497 KB
枪弹头痕迹自动比对方法的研究.pdf	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	1,209 KB
确定肿瘤的重要基因信息.pdf	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	678 KB
人体营养健康角度的中国果蔬发展问题研...	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	1,036 KB
人体营养健康角度的中国果蔬发展战略研...	2019/08/14 9:54	Foxit PhantomP...	1,729 KB
神经元的形态分类和识别 .pdf	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	1,087 KB
神经元形态分类与识别的数学建模.pdf	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	1,528 KB
食品卫生安全保障体系的数学模型研究（...	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	1,117 KB
水面舰艇编队防空和信息化战争评估模型...	2019/08/14 9:56	Foxit PhantomP...	2,206 KB
唐家山堰塞湖泄洪问题的研究.pdf	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	1,902 KB
我国城镇登记失业率的数学建模.pdf	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	1,335 KB
我国城镇就业人数的数学模型 .pdf	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	1,688 KB
我国就业人数的主要影响因素分析及前景...	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	814 KB
我国就业人数或城镇登记失业率的数学建...	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	740 KB
无人机在抢险救灾中的优化运用.pdf	2019/08/14 9:56	Foxit PhantomP...	3,667 KB
学生面试问题.pdf	2019/08/14 9:48	Foxit PhantomP...	428 KB
研究生数学建模论文.pdf	2019/08/14 9:49	Foxit PhantomP...	548 KB
有杆抽油系统的数学建模及诊断.pdf	2019/08/14 9:53	Foxit PhantomP...	3,503 KB
肿瘤基因图谱信息提取和分类方法研究.p...	2019/08/14 9:51	Foxit PhantomP...	519 KB

左图是华为杯研究生数学建模竞赛的论文，大家根据自己实际建模的需求，在里面找一篇很类似的文章，然后使用这篇论文中的模型介绍（为了安全，最好是自己修改点，不要原封不动的搬到自己论文中）。

为什么要这样?

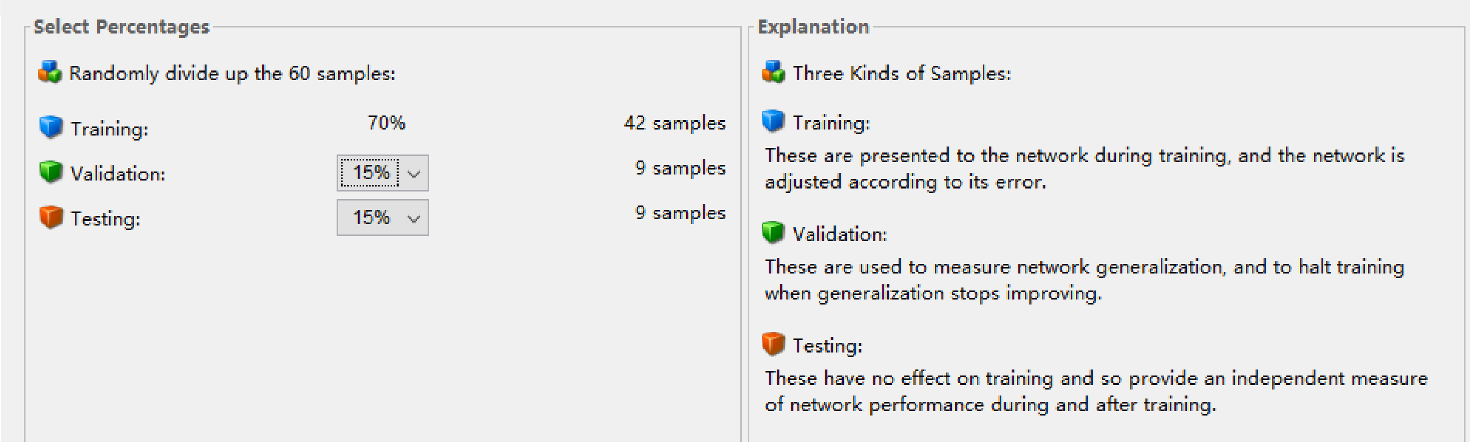
很简单，避免查重，这样比你在网上复制安全多了，也比你复制本科数模比赛中优秀论文的模型介绍安全多了。

当然，其他的一些建模的模型也可以使用这种方法来避免查重。

虽然我不推荐大家这样做，但我还是希望大家能得奖的，这算得上是一种投机取巧的方法了吧。

链接：https://pan.baidu.com/s/1hu7x_LC65Ez382725sqU4g （提取码：dwla）
备用下载链接：https://pan.baidu.com/s/1tHOA9rIMNYgFqHfIqCMwlQ

机器学习中的训练集，验证集和测试集



训练集（Training set） —— 用于模型拟合的数据样本。
验证集（Validation set） —— 是模型训练过程中单独留出的样本集，它可以用于调整模型的超参数和用于对模型的能力进行初步评估。在神经网络中，我们用验证数据集去寻找最优的网络深度，或者决定反向传播算法的停止点或者在神经网络中选择隐藏层神经元的数量；
测试集（Testing set） —— 用来评估模最终模型的泛化能力。但不能作为调参、选择特征等算法相关的选择的依据。

一个形象的比喻：
训练集-----------学生的课本；学生根据课本里的内容来掌握知识。
验证集------------作业，通过作业可以知道不同学生学习情况、进步的速度快慢。
测试集-----------考试，考的题是平常都没有见过，考察学生举一反三的能力。
https://blog.csdn.net/liushiqi0826/article/details/86514585

例题1：辛烷值的预测

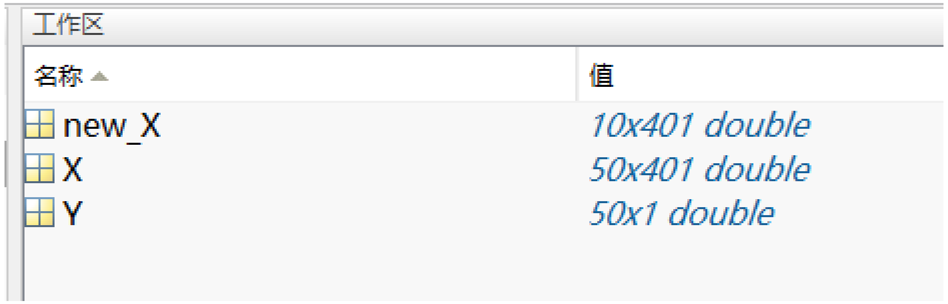
【改编】辛烷值是汽油最重要的品质指标，传统的实验室检测方法存在样品用量大，测试周期长和费用高等问题，不适用于生产控制，特别是在线测试。近年发展起来的近红外光谱分析方法（NIR），作为一种快速分析方法，已广泛应用于农业、制药、生物化工、石油产品等领域。其优越性是无损检测、低成本、无污染，能在线分析，更适合于生产和控制的需要。

实验采集得到50组汽油样品（辛烷值已通过其他方法测量），并利用傅里叶近红外变换光谱仪对其进行扫描，扫描范围900~1700nm，扫描间隔为2nm，即每个样品的光谱曲线共含401个波长点，每个波长点对应一个吸光度。

（1）请利用这50组样品的数据，建立这401个吸光度和辛烷值之间的模型。

（2）现给你10组新的样本，这10组样本均已经过近红外变换光谱仪扫描，请预测这10组新样本的辛烷值。

数据的导入



X： 50个样本的吸光度数据
Y： 50个样本的辛烷值数据
new_X： 10个要预测样本的吸光度数据

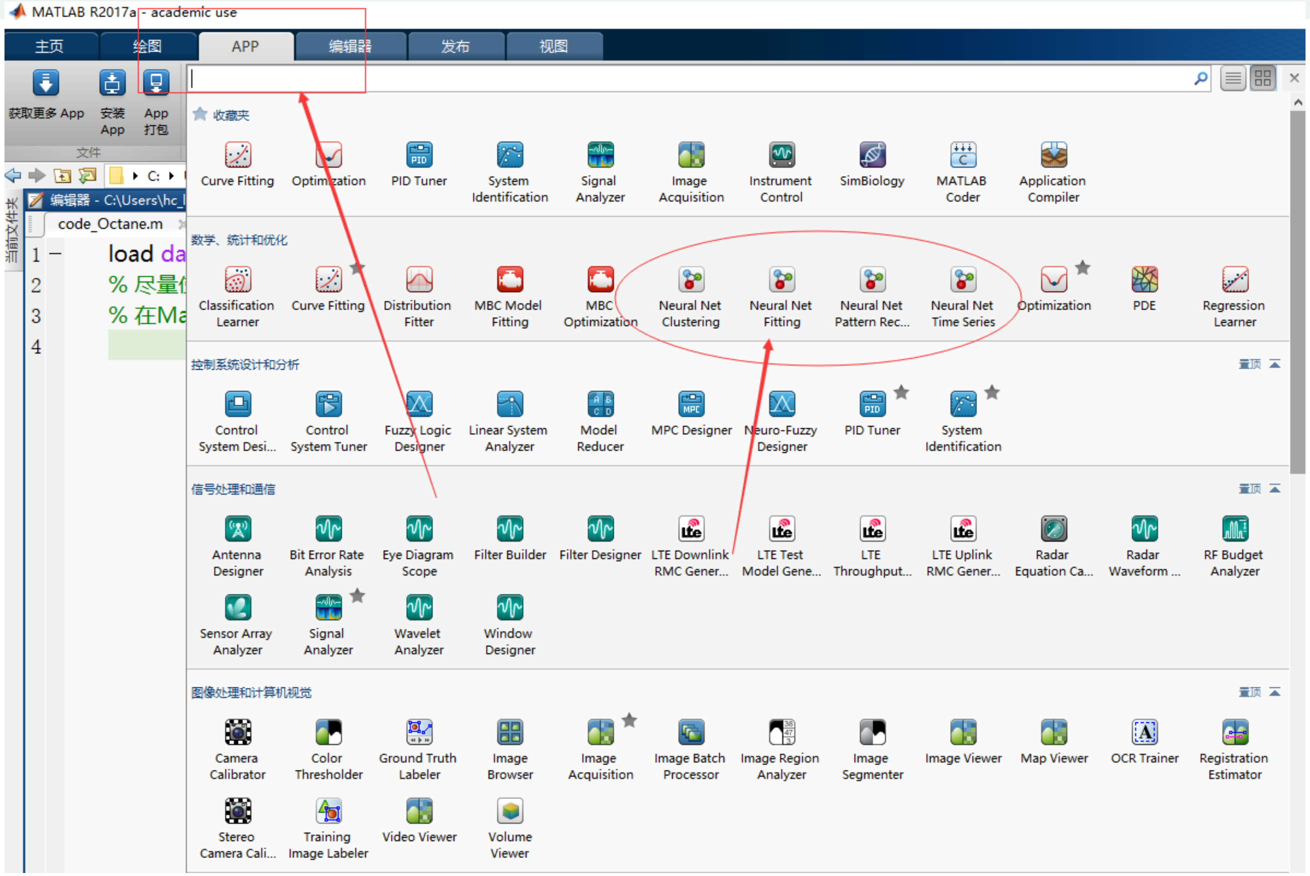
Excel操作小技巧:
选择某个单元格的数据，同时按住键盘上的Ctrl和Shift两个键不松手，然后按键盘上方向键“→”，就可以选择这个单元格所在的一行；然后再按键盘上的方向键“↓”，就可以再选取这一行所在的一整列。

在工作区新建好上述三个变量后，我们将Excel的数据分别粘贴到变量中，然后在Matlab的工作区内按快捷键“Ctrl+S”(或者鼠标右键点击保存也可以)，就可以将数据文件保存在本地。

下次使用时，只需要将数据加载到Matlab即可。 data_Octane.mat

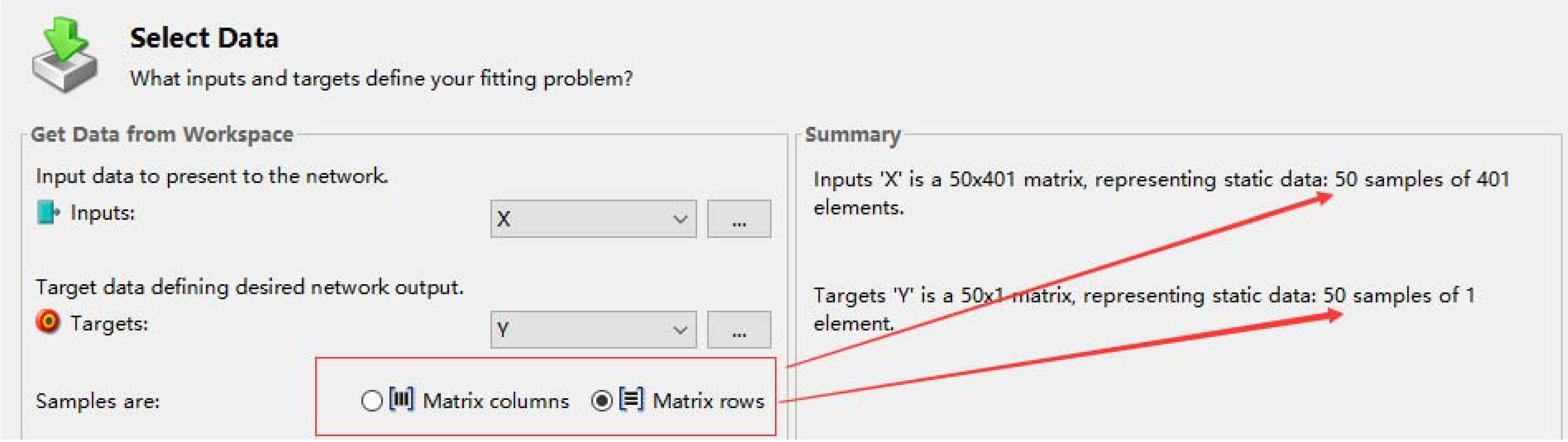
加载数据使用load命令，代码、文件以及当前Matlab的工作路径需要在同一个文件夹。

使用神经网络进行预测

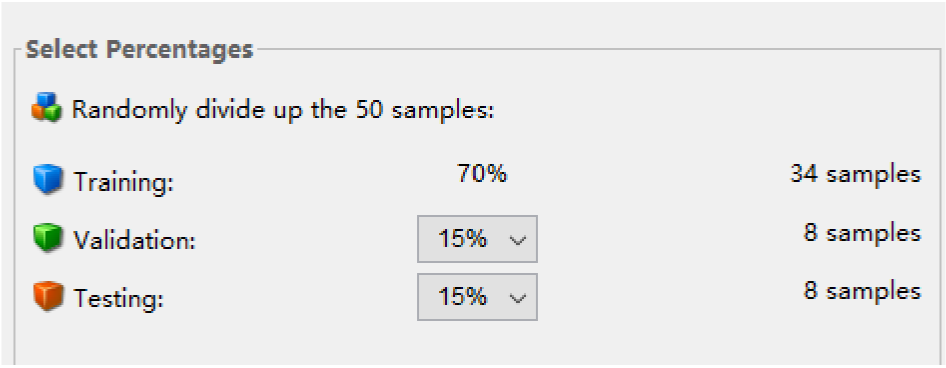


注意：老版本的Matlab的神经网络拟合工具箱可能不在这个位置，如果没有的话，大家自己百度下。另外，如果你没有找到这个工具箱的话，说明你当时安装的时候可能压根没有安装这个包，大家可以重新安装个完整版的。（下载地址：微信公众号软件安装管家）

关键的步骤



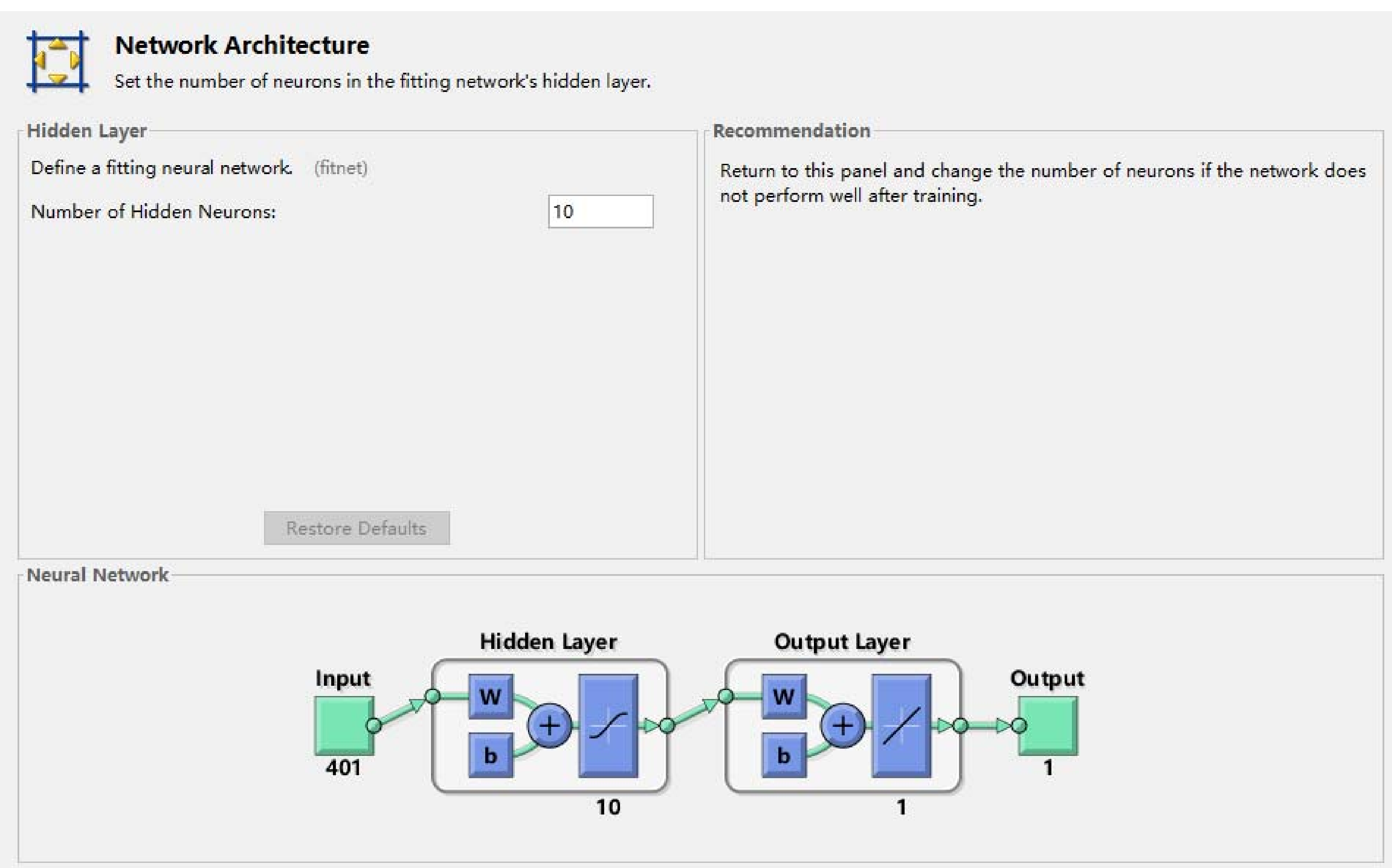
这个位置一定要根据你的样本放在行上还是列上来选择。



训练集、验证集、测试集的比例一般选择默认的即可。（Matlab会后台自动帮我们安装这个比例来**随机**抽取样本，因此每次运行的结果可能都不相同）

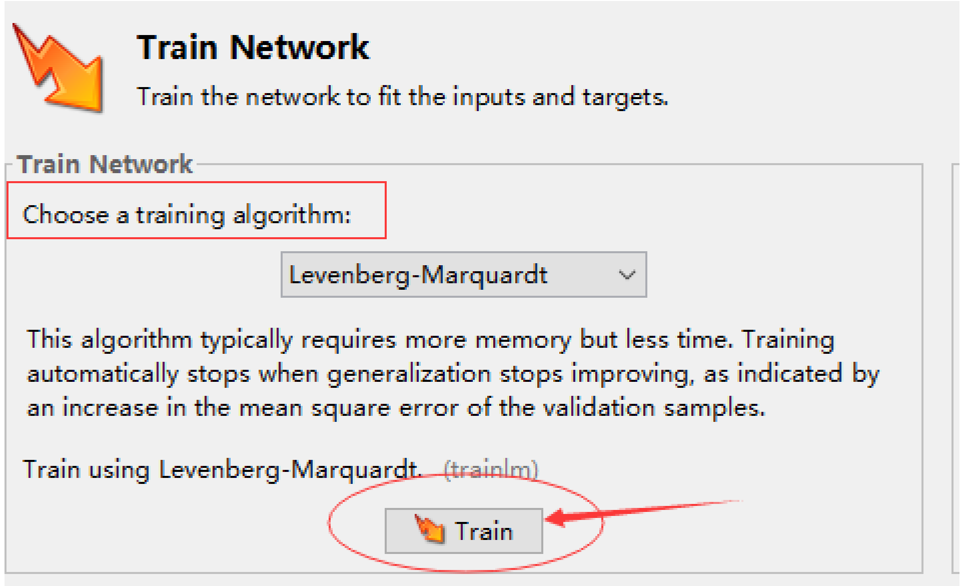
数学建模学习交流

关键的步骤



隐层神经元的个数，这个参数可以根据拟合的结果再次进行调整。

关键的步骤



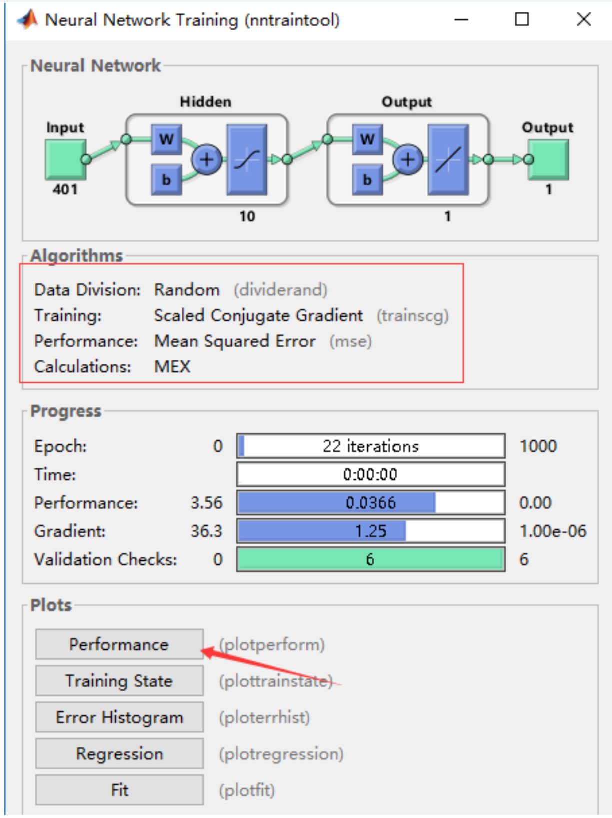
训练算法的选取，一般是选择默认即可，选择完成后点击<train>按钮后，Matlab就会帮我们训练出一个神经网络模型。

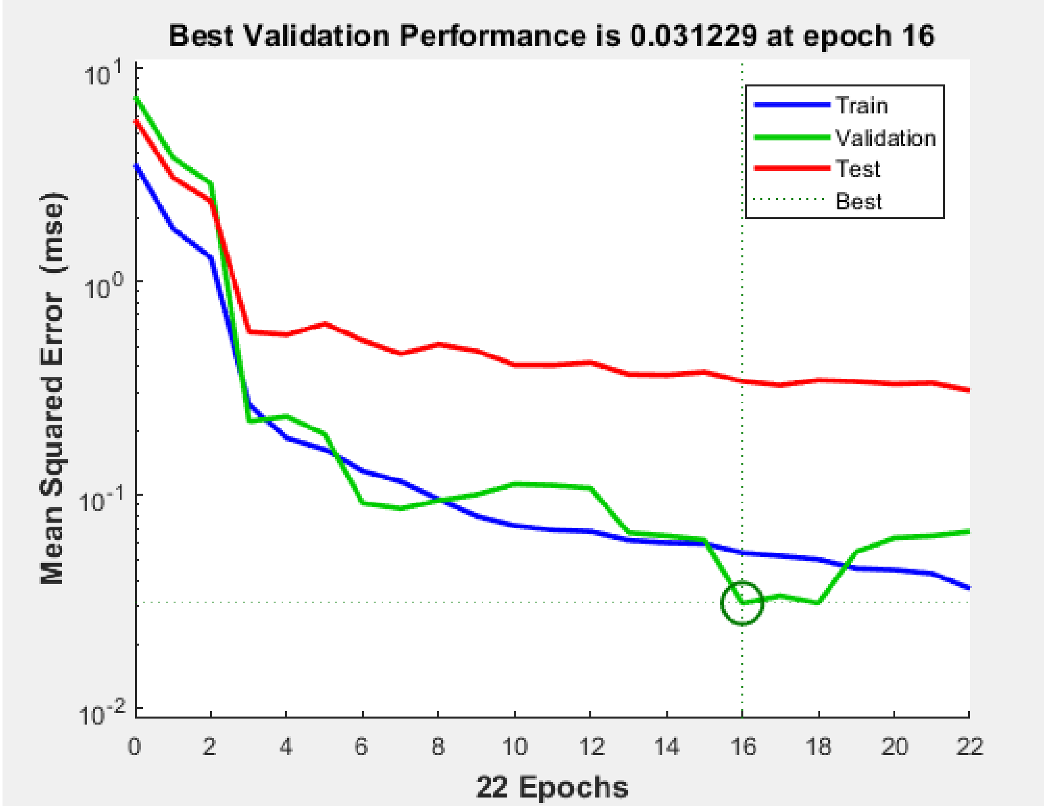
莱文贝格－马夸特方法（Levenberg–Marquardt algorithm）能提供数非线性最小化（局部最小）的数值解。此算法能借由执行时修改参数达到结合高斯-牛顿算法以及梯度下降法的优点，并对两者之不足作改善（比如高斯-牛顿算法之反矩阵不存在或是初始值离局部极小值太远）

贝叶斯正则化方法（Bayesian-regularization）：
https://blog.csdn.net/sinat_38835380/article/details/86927943

量化共轭梯度法（Scaled Conjugate Gradient ）：
《模式识别与智能计算——MATLAB技术实现》

结果分析

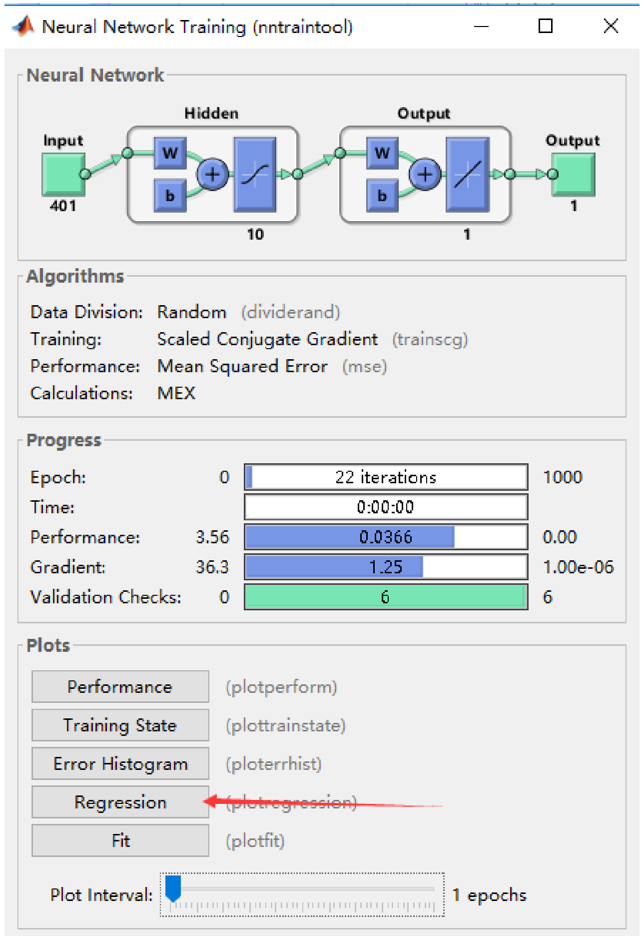


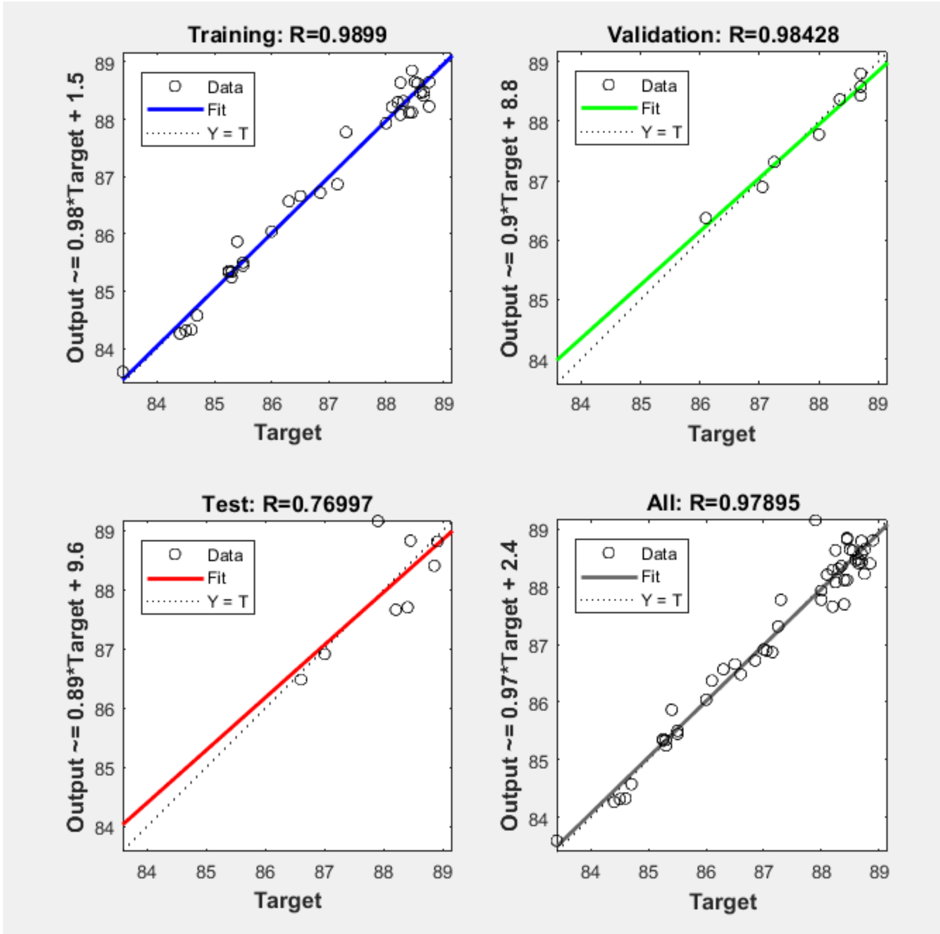


epoch：1个epoch等于使用训练集中的全部样本训练一次，每训练一次，神经网络中的参数经过调整。 MSE: Mean Squared Error 均方误差 MSE = SSE/n

一般来说，经过更多的训练阶段后，误差会减小，但随着网络开始过度拟合训练数据，验证数据集的误差可能会开始增加。在默认设置中，在验证数据集的MSE连续增加六次后，训练停止，最佳模型对应于的最小的MSE。

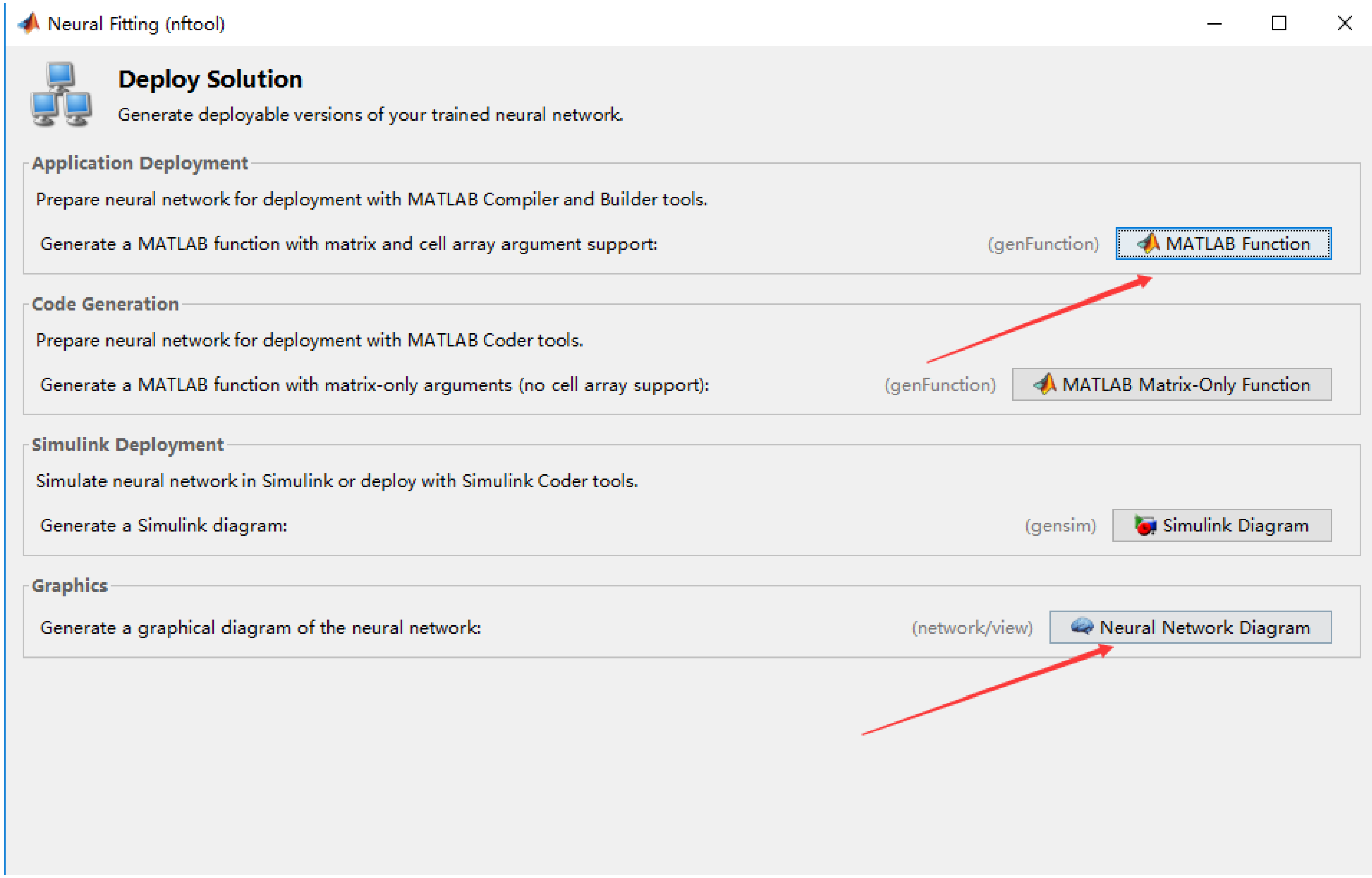
结果分析





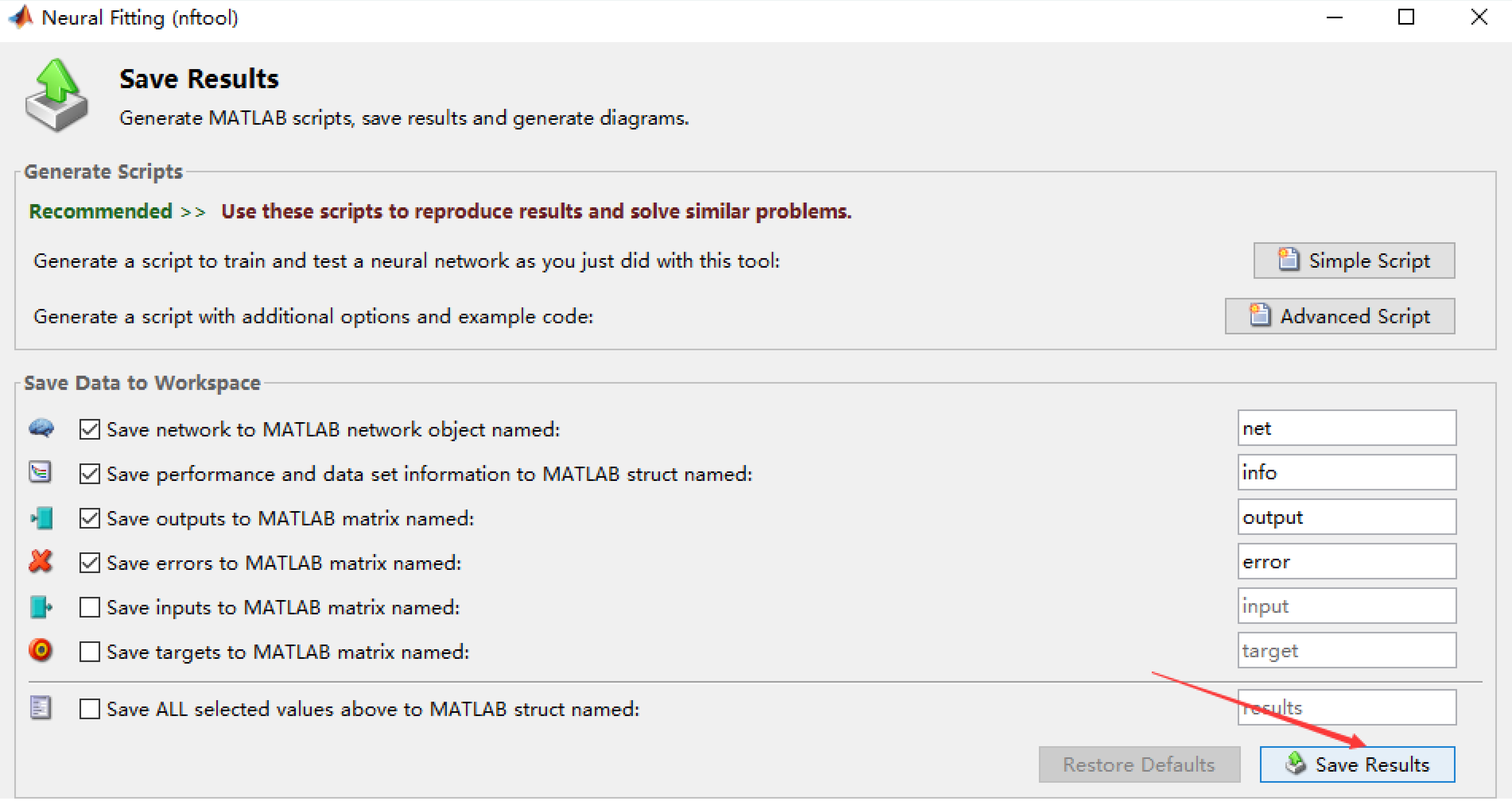
将拟合值对真实值回归，拟合优度越高，说明拟合的的效果越好。

保存结果



可以保存神经网络函数的代码，以及神经网络图。

保存结果



保存好训练出来的神经网络模型和结果

保存结果并对进行预测

名称		值
error	残差	1x50 double
info		1x1 struct
net	神经网络模型	1x1 network
new_X		10x401 double
output	拟合值	1x50 double
X		50x401 double
Y		50x1 double

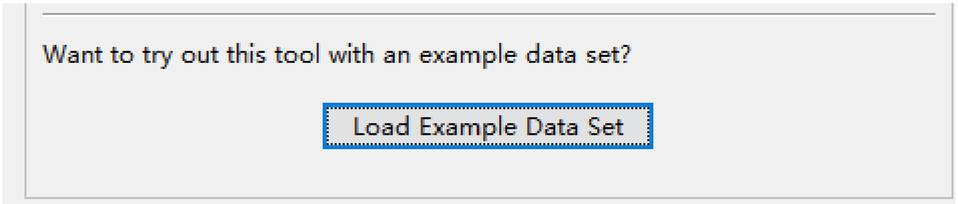
残差 + 拟合值 = 真实值

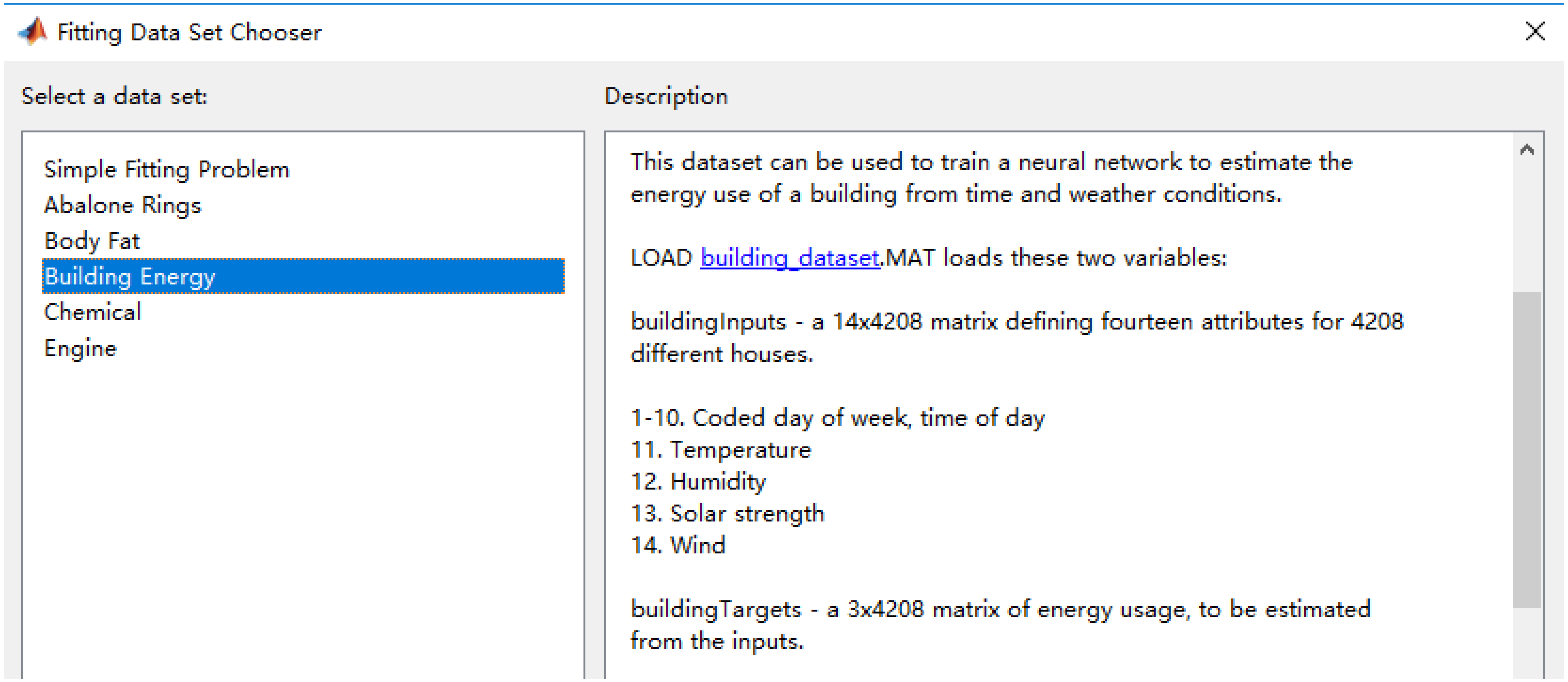
```
% 这里要注意，我们要将指标变为列向量，然后再用sim函数预测
sim(net, new_X(1,:)')

% 写一个循环，预测接下来的十个样本的辛烷值
predict_y = zeros(10,1); % 初始化predict_y
for i = 1: 10
    result = sim(net, new_X(i,:)');
    predict_y(i) = result;
end
disp('预测值为：')
disp(predict_y)
```

code_Octane.m

例题2：神经网络在多输出中的运用





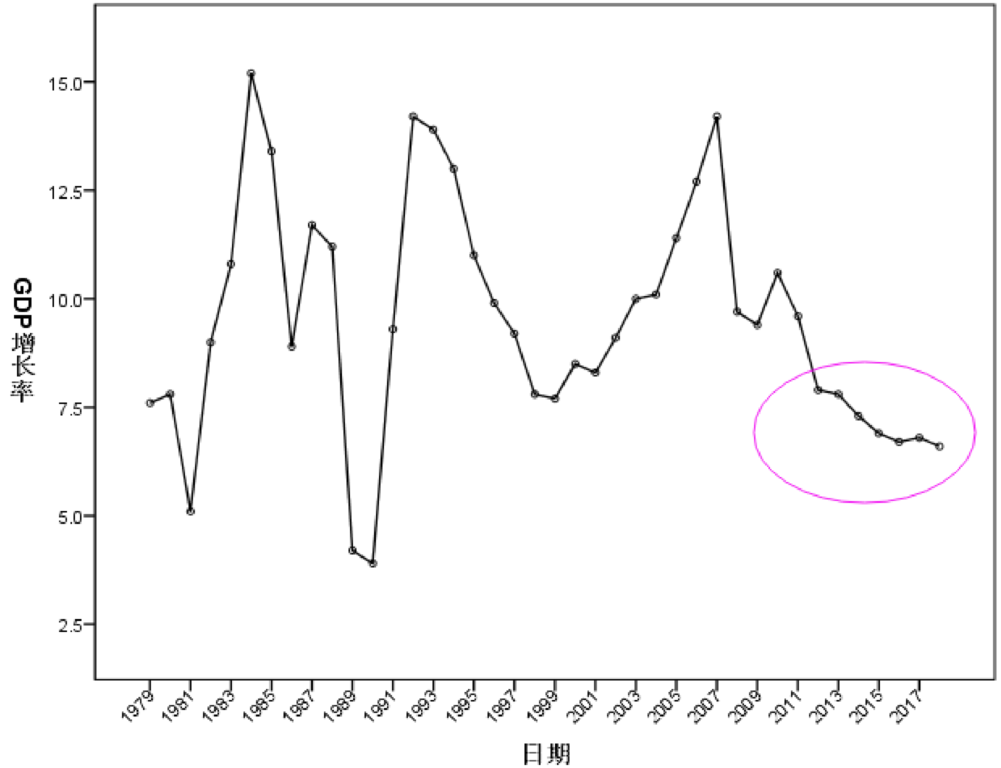
这里我们使用的是Matlab自带的测试数据集哦，如果你没有找到这个数据集，可能的原因是你的Matlab版本太低。

我对于预测模型的看法

真正的预测要结合背景，而不是直接套用模型，我们来看下面这个例子~

第十一届三中全会于1978年12月18日至22日在北京举行，此次会议标志着我国改革开放的开始。

今年是2019年，改革开放进行了40周年，它改变了中国落后的命运，使中国富起来了，也使中国走向了世界强国的行列，我们收集了过去四十周年（1979-2018）中国GDP的增长率，请根据历史数据来合理的预测未来两年我国GDP的增长率。



加入符合背景的变量

预测两要：

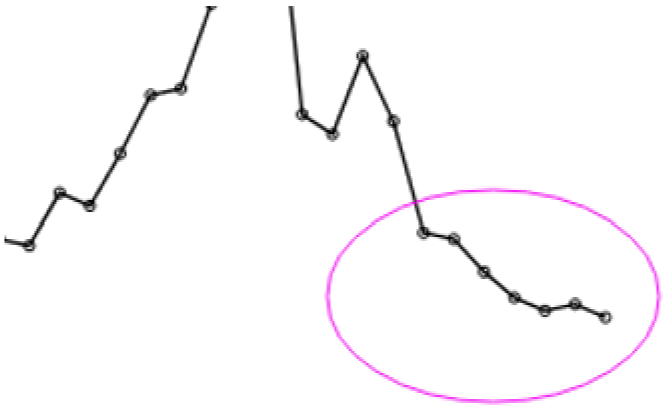
一要结合背景；

二要合理假设。

预测两不要：

不要硬套模型；

不要不做解释。



只利用最近这几年的数据进行预测。

$$r_t = r^* + ae^{-bt} + \varepsilon_t$$

r^*：稳定状态下的增长率，为固定常数（可参考发达国家的平均水平）

参数a和b控制下降的速率

ε_t是扰动项，用来表示不可预知的影响因素

接下来使用拟合就可以得到a和b了。

一篇不错的论文

首先考虑 2013 年实施单独二孩政策后，必然会对 2014 年和 2015 年的生育率造成影响，且对年龄从 15 岁到 49 岁的女性的影响程度不同，一般而言，以 32 岁为界，影响程度在 15 岁从 32 岁的依次递增，超过 32 岁之后影响逐渐依次递减，且又因为随着时间的推移，政策的影响会逐渐减弱，因此我们可以构造如下函数，用于度量单独二孩政策对生育率的影响程度。

$$\omega_1(x,t)=\begin{cases}\left\{1+\varpi_1\left(\dfrac{x-14}{32}\right)\right\}^{\frac{1}{t}} & 15\leqslant x\leqslant 32\\ \left\{1+\varpi_1\left(\dfrac{50-x}{32}\right)\right\}^{\frac{1}{t}} & 32<x\leqslant 49\end{cases}$$

其中 ϖ_1 表示单独二孩政策对生育率的平均影响因子，变量 x 表示的女性年龄大小，变量 t 表示距离单独二孩政策实行的年份的长短，由于 2016 年实行全面二孩政策，因此这里的 $t=1,2$。

同理，在 2016 年元旦全面实行二孩政策后，也会对生育率有一个影响，我们同样可以构造出一个影响函数：

$$\omega_2(x,t)=\begin{cases}\left\{1+\varpi_2\left(\dfrac{x-14}{32}\right)\right\}^{\frac{1}{t}} & 15\leqslant x\leqslant 32\\ \left\{1+\varpi_2\left(\dfrac{50-x}{32}\right)\right\}^{\frac{1}{t}} & 32<x\leqslant 49\end{cases}$$

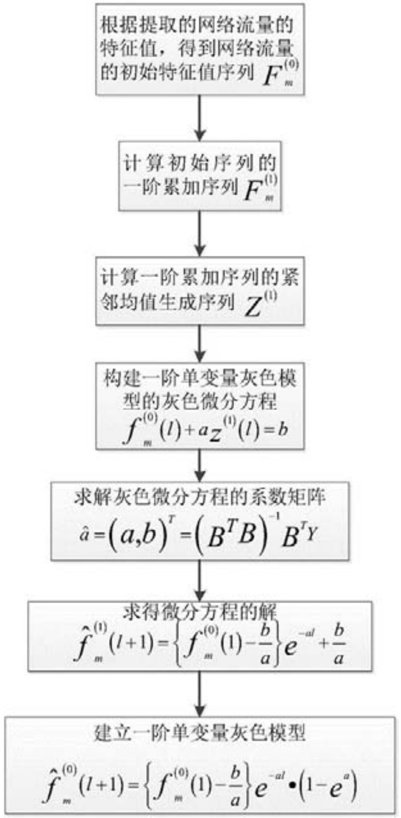
其中 ϖ_2 表示全面二孩政策对生育率的平均影响因子，变量 x 表示的女性年龄大小，变量 t 表示距离全面二孩政策实行的年份的长短。

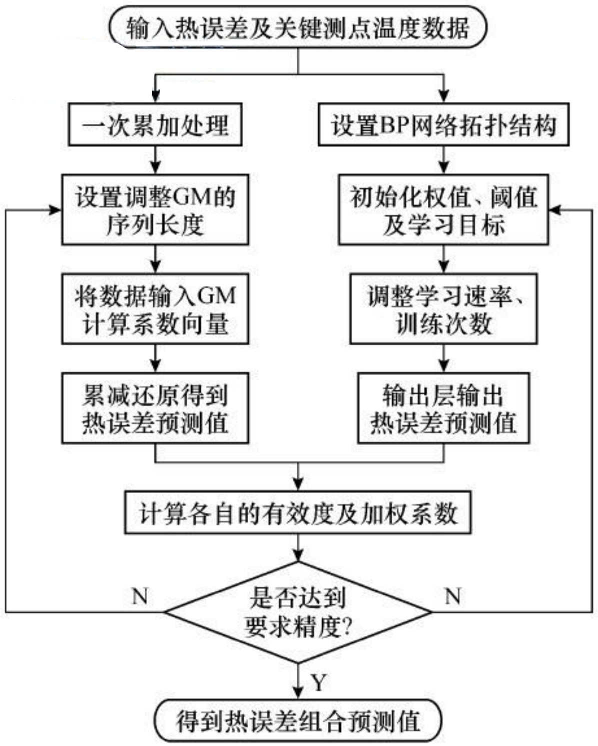
来源：百度文库 （莱斯利人口模型）
基于Leslie模型的二孩政策对中国未来10年人口的预测.pdf

本节作业1：画流程图

将本节学到的模型（灰色预测和神经网络）整理成流程图，使得国赛建模时经过简单的修改即可使用。

（流程图的作用：模型的思路生动清晰和减少查重）





左边两个图是我在网上找到的，不是很符合我们的要求，大家可以按照课件以及网上的资料来做一个精美的流程图。

本节作业2：棉花单产预测

年份	单产	种子费	化肥费	农药费	机械费	灌溉费
1990	1017	106.05	495.15	305.1	45.9	56.1
1991	1036.5	113.55	561.45	343.8	68.55	93.3
1992	792	104.55	584.85	414	73.2	104.55
1993	861	132.75	658.35	453.75	82.95	107.55
1994	901.5	174.3	904.05	625.05	114	152.1
1995	922.5	230.4	1248.75	834.45	143.85	176.4
1996	916.5	238.2	1361.55	720.75	165.15	194.25
1997	976.5	260.1	1337.4	727.65	201.9	291.75
1998	1024.5	270.6	1195.8	775.5	220.5	271.35
1999	1003.5	286.2	1171.8	610.95	195	284.55
2000	1069.5	282.9	1151.55	599.85	190.65	277.35
2001	1168.5	317.85	1105.8	553.8	211.05	290.1
2002	1228.5	319.65	1213.05	513.75	231.6	324.15
2003	1023	368.4	1274.1	567.45	239.85	331.8
2004	1144.5	466.2	1527.9	487.35	408	336.15
2005	1122	449.85	1703.25	555.15	402.3	358.8
2006	1276.5	537	1888.5	637.2	480.75	428.4
2007	1233	565.5	2009.85	715.65	562.05	456.9

假设我们不知道2005-2007这三年的单产数据，请你用过去15年的数据来预测这三年的产量。（注意：别忘了使用回归模型也能进行预测哦）