華北理工大學
NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

第二章

插值法

第二章 插值法

二、拉格朗日插值法

- Lagrange插值法的基函数
- Lagrange插值多项式的构造
- Lagrange插值的误差估计
- Lagrange插值多项式的震荡
- Lagrange插值的程序设计

拉格朗日插值误差估计

若在 $[a,b]$ 上用 $L_n(x)$近似 $f(x)$, 则其截断误差

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

关于插值余项估计有以 下定理。

定理 2

设$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，

$L_n(x)$是满足条件 $L_n(x_j) = y_j$的插值多项式，

则对任何 $x \in [a,b]$，插值余项为

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \qquad \xi \in (a,b),}$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

拉格朗日插值多项式余项

拉格朗日插值余项

拉格朗日插值

似曾相识?

拉格朗日插值多项式余项

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\qquad \xi\in(a,b),$$

与泰勒公式的拉格朗日余项比较

$$R_n(x)=f(x)-\mathrm{P}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\qquad \xi\in(a,b),$$

拉格朗日插值余项

误差估计　因为 $\xi \in (a,b)$，ξ 通常不能给出

设　$M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$　　$N_{n+1} = |\omega_{n+1}(x)| = |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|$

则　$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}M_{n+1}N_{n+1}$$

特别地:

$n = 1$时，$R_1(x) = \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)\omega_2(x) = \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)$，　$\xi \in [x_0, x_1]$

$n = 2$时，$R_2(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)\omega_3(x) = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$，

$\xi \in [x_0, x_2]$

例2.2 已知 $f(x)=\sqrt{x}$ 的三个节点为 $x_1=144, x_2=169, x_3=225$

试估计用Lagrange 线性和二次插值求 $f(175)$ 近似值的截断误差。

解析

设 $R_1(x)$为 $Lagrange$ 线性插值的余项

$R_2(x)$为二次 $Lagrange$ 插值的余项

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \qquad f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$M_2=\max_{169\le x\le 225}|f''(x)|=|f''(169)|\le 1.14\times 10^{-4}$$

$$M_3=\max_{144\le x\le 225}|f'''(x)|=|f'''(144)|\le 1.51\times 10^{-6}$$

例题分析

拉格朗日插值

$$N_2 = |\omega_2(x)| = |(175-169)(175-225)| = 300$$

$$N_3 = |\omega_3(x)| = |(175-144)(175-169)(175-225)| = 9300$$

$$|R_1(x)| \le \frac{1}{2!} M_2 N_2 \le \frac{1}{2} \times 1.14 \times 10^{-4} \times 300 \le 1.71 \times 10^{-2}$$

$$|R_2(x)| \le \frac{1}{3!} M_3 N_3 \le \frac{1}{6} \times 1.51 \times 10^{-6} \times 9300 \le 2.35 \times 10^{-3}$$

说明计算 $\sqrt{175}$

$$|R_2(x)| < |R_1(x)|$$

例2.3

已给 $\sin 0.32=0.314567$，$\sin 0.34=0.333487$，$\sin 0.36=0.3522787$，用线性插值及 抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 的值，并估计截断误差。

解析

由题意取

$$x_0=0.32, y_0=0.314567, x_1=0.34$$

$$y_1=0.333487, x_2=0.36, y_2=0.352274.$$

用线性插值计算，取 $x_0=0.32$ 及 $x_1=0.34$,

得 $$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(0.3367-x_0)$$

$$=0.314567+\frac{0.01892}{0.02}\times 0.0167 \quad =0.330365$$

例题分析

其截断误差为: $|R_1(x)| \le \frac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|, \quad f''(x) = -\sin x$

$$M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |\sin x| = \sin x_1 \le 0.3335,$$

于是

$$|R_1(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_1(0.3367)| \le \frac{1}{2} * 0.3335 * 0.0167 * 0.0033 \le 0.92 * 10^{-6}$$

用抛物插值计算 $\sin 0.3367$ 时，由公式（2.5）得

$$\sin 0.3367 \approx y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= L_2(0.3367) = 0.330374$$

例题分析

$$\sin 0.3367 \approx y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= L_2(0.3367) = 0.330374$$

结果与正弦函数表完全一样。说明二次插值精度已相当高了。

其截断误差为

$$|R_3(x)| \le \frac{M_3}{6} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

其中 $M_3 = \max\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f'''(x)| = \cos x_0 < 0.828$

$$|R_2(0.3367)| = |\sin 0.3367 - L_2(0.3367)| \le \frac{1}{6}(0.828)(0.0167)(0.033)(0.0233) < 0.178 \times 10^{-6}$$

拉格朗日插值问题

课后练习

设函数 $f(x)=e^{-x}$，已知下列数据点：

$$\begin{cases} x_0=0.10 \\ y_0=0.904837 \end{cases}, \begin{cases} x_1=0.15 \\ y_1=0.860708 \end{cases}, \begin{cases} x_2=0.25 \\ y_2=0.778801 \end{cases}, \begin{cases} x_3=0.30 \\ y_3=0.740801 \end{cases},$$

利用插值公式计算函数在 $x=0.20$ 处的近似值。

参考解答

根据拉格朗日插值公式 $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

有

$$L_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

拉格朗日插值问题

课后练习

参考解答

$$L_3(0.20) = 0.904837\frac{(0.20-0.15)(0.20-0.25)(0.20-0.30)}{(0.10-0.15)(0.10-0.25)(0.10-0.30)}$$

$$+0.860708\frac{(0.20-0.10)(0.20-0.25)(0.20-0.30)}{(0.15-0.10)(0.15-0.25)(0.15-0.30)}$$

$$+0.778801\frac{(0.20-0.10)(0.20-0.15)(0.20-0.30)}{(0.25-0.10)(0.25-0.15)(0.25-0.30)}$$

$$+0.740801\frac{(0.20-0.10)(0.20-0.15)(0.20-0.25)}{(0.30-0.10)(0.30-0.15)(0.30-0.25)}$$

$$\therefore \quad f(0.20) = L_3(0.20) \approx 0.818730$$

课后练习

参考解答 插值多项式余项为 $R_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\prod_{j=0}^{3}(x-x_j),\quad \xi\in[0.10,0.30]$

$$\therefore\quad R_3(0.20)=\frac{e^{-\xi}}{24}(0.20-0.10)(0.20-0.15)(0.20-0.25)(0.20-0.30)$$

$$\approx 0.000001\,e^{-\xi}<10^{-6}$$

$\because$ 插值多项式计算值 $f(0.20)\approx 0.818730$

实际更精确的值为 $f(0.20)\approx 0.8187308$

$\therefore$ 与上面讨论的余项表明6位的精度是相符的。

拉格朗日插值问题

课后练习

将[0,π/2] n等分，用g(x)=cos(x)产生n+1个节点，

作$L_n(x)$（取 n=1,2,10)， 计算cos(π/6), 估计误差。

参考解答

六位有效精确值：cos(π/6)=0.866025

取 n=1，两点插值， $(x_0,y_0)=(0,1)$, $(x_1,y_1)=(\pi/2,0)$,

$$L_1(x)=y_0l_1(x)+y_1l_2(x)=1-\frac{2x}{\pi} \qquad L_1(\frac{\pi}{6})=0.66667$$

取 $n=2$ 三点插值

$$(x_0,y_0)=(0,1),\quad (x_1,y_1)=(\pi/4, 0.7071),\quad (x_2,y_2)=(\pi/2, 0)$$

拉格朗日插值问题

六位有效精确值：**cos(π/6)=0.866025**

$$L_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

$$= \frac{8(x-\pi/4)(x-\pi/2)}{\pi^2} - 0.7071\frac{16x(x-\pi/2)}{\pi^2}$$

$L_2(\pi/6)=0.8508$

参考解答

$$|R_n(x)| : M_{n+1} = 1,\ h = \pi/_{2n},\ x_j < x < x_{j+1},$$

$$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| < h^2/_4 \times 2h3h\cdots nh$$

$$|R_n(x)| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{h^2}{4}2h3h\cdots nh = \frac{\pi^{n+1}}{4(n+1)(2n)^{n+1}}$$

n	1	2	3	4
$\|R_n(x)\|$	0.3	0.04	4.7×10^{-3}	4.7×10^{-4}

插值多项式**次数越高误差越小**吗？

$$n\uparrow \Rightarrow L_n(x)? \Rightarrow |R_n(x)|\downarrow ?$$

例2. 4 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in [-5,5]$

将$[-5,5]$ n等份取 $n+1$个节点 $x_i = -5 + ih, h = \dfrac{10}{n}, i = 0,1,\cdots,n$

试就 $n = 2,4,6,8,10$作$f(x)$的n次$Lagrange$ 插值多项式

$$y_i = f(x_i) = \frac{1}{1+x_i^2}$$

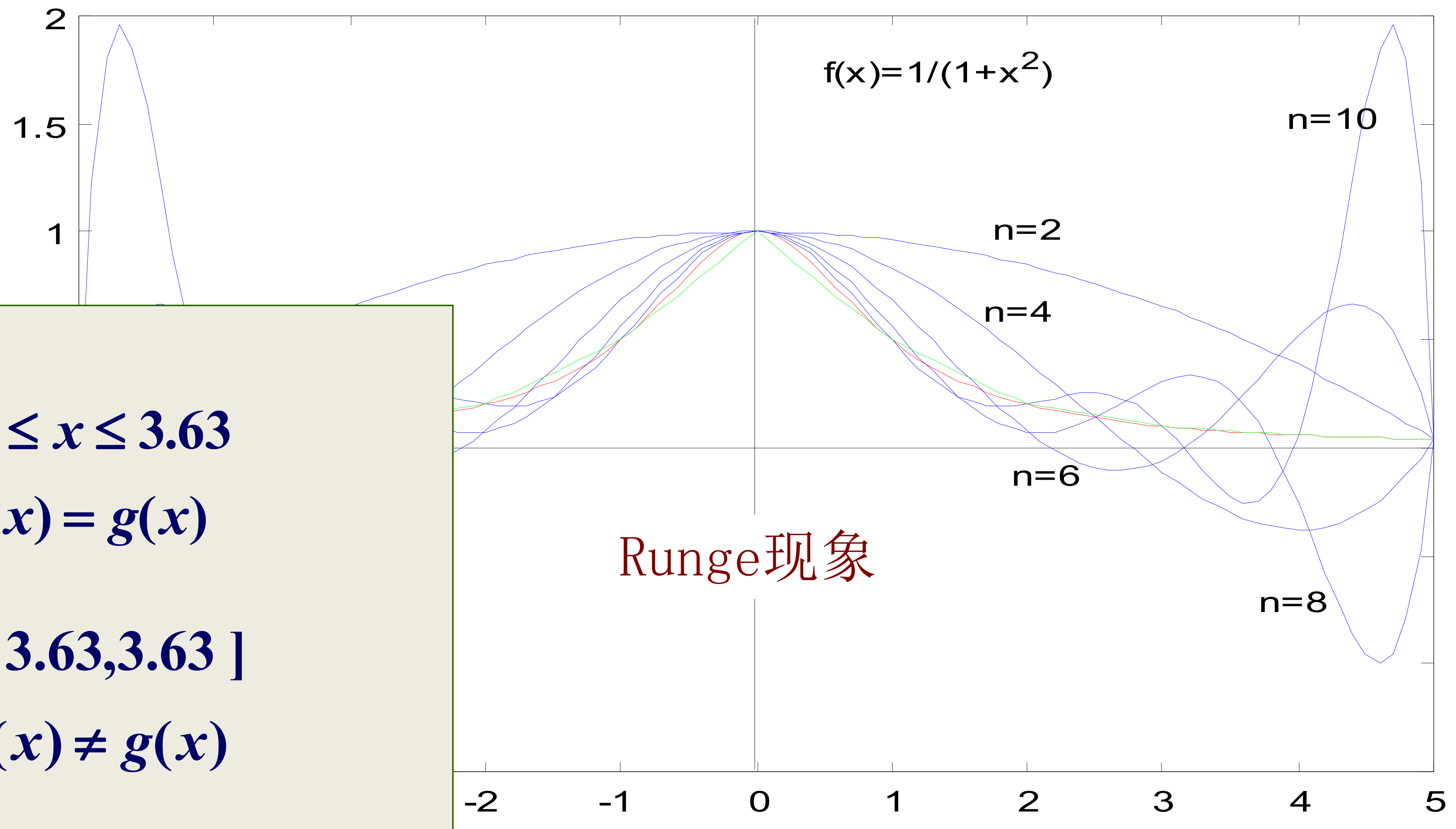
作 n次 $Lagrange$ 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\left[\frac{1}{1+x_j^2}\cdot\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}\right] \qquad n = 2,4,6,8,10$$

Runge 现象解析

插值多项式**次数越高误差越小**吗

不同次数的拉格朗日插值多项式的比较图



仅当 $-3.63 \le x \le 3.63$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) = g(x)$

当 $x \notin [-3.63, 3.63]$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x) \ne g(x)$

華北理工大學

2018.7