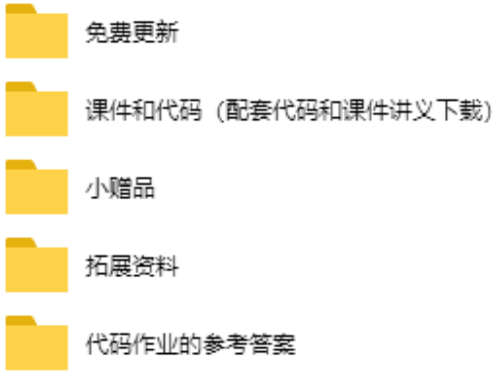
温馨提示

（1）视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。

包括**讲义、代码、优秀的作业、我视频中推荐的资料**等。



（2）关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**“软件”**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**“数据”**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**“画图”**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

（3）**购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**“买”**这个字即可进入店铺进行购买。

（4）视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

数学建模学习交流

第八讲:图论最短路径问题

本讲将简要介绍图论中的基本概念，并主要讲解图论中的最短路径问题。根据图的不同，我们将学习两种不同的算法：迪杰斯特拉Dijkstra算法和Bellman-Ford（贝尔曼-福特）算法。

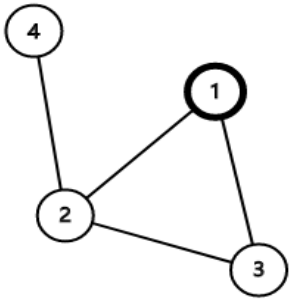
图的基本概念

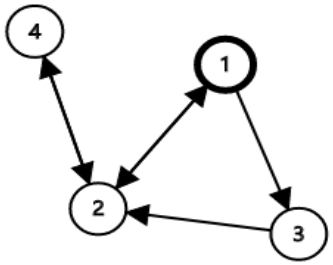
图论中的图（Graph）是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。

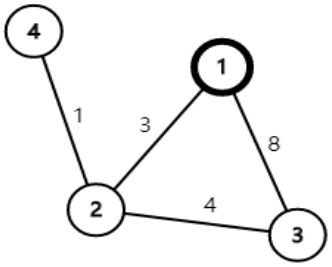
一个图可以用数学语言描述为G(V(G),E(G))。V(vertex)指的是图的顶点集，E(edge)指的是图的边集。

根据边是否有方向，可将图分为有向图和无向图。

另外，有些图的边上还可能有权值，这样的图称为有权图。

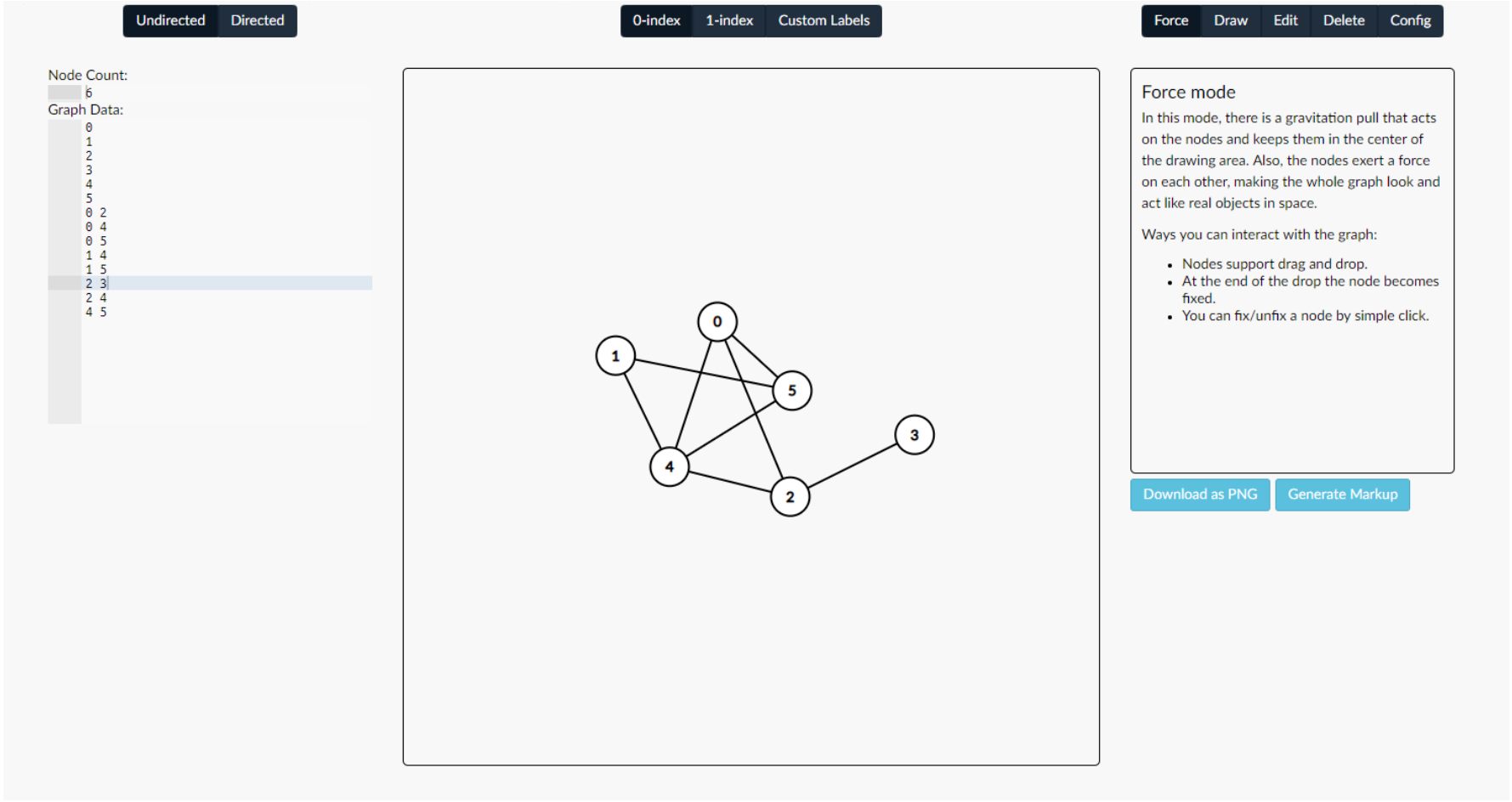






在线做图

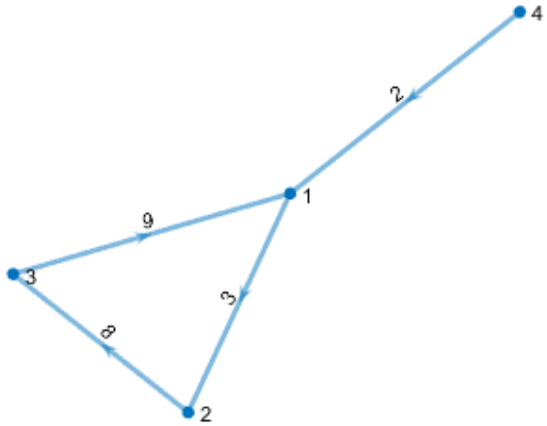
https://csacademy.com/app/graph_editor/



Matlab帮我们作图

% 函数graph(s,t)：可在 s 和 t 中的对应节点之间创建边，并生成一个图
G1 = graph(s1, t1);
plot(G1)

% 函数graph(s,t,w)：可在 s 和 t 中的对应节点之间以w的权重创建边，并生成一个图
G2 = graph(s2, t2);
plot(G2, 'linewidth', 2) % 设置线的宽度
% 下面的命令是在画图后不显示坐标
set(gca, 'XTick', [], 'YTick', []);

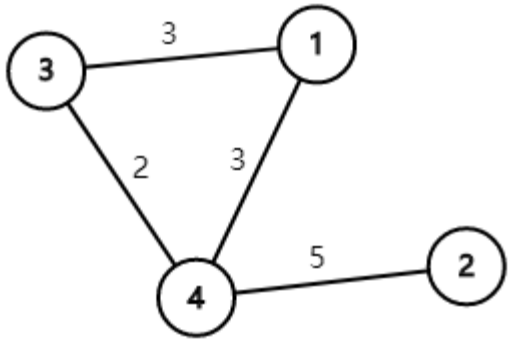


上面都是无向图
要做出有向图，只需要将graph改为digraph就行了。

注：（1）Matlab做出来的图不是很漂亮，要是节点比较少，还是推荐大家使用在线作图。**（2）该函数在2015b之后的版本才支持，如果运行出错请下载新版本Matlab。**

低版本Matlab报错提示: 未定义与 'double' 类型的输入参数相对应的函数 'graph'。

无向图的权重邻接矩阵



带权重的四个节点的无向图

$$D = \begin{bmatrix} 0 & Inf & 3 & 3 \\ Inf & 0 & Inf & 5 \\ 3 & Inf & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

无向图对应的权重邻接矩阵

	1	2	3	4
1	0	Inf	3	3
2	Inf	0	Inf	5
3	3	Inf	0	2
4	3	5	2	0

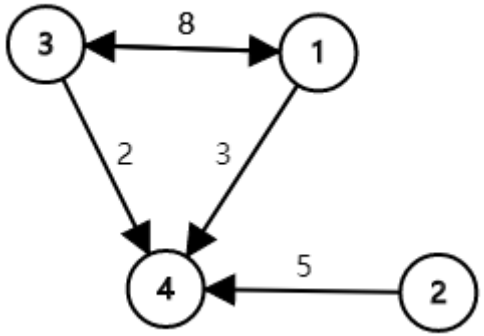
结论：

（1）无向图对应的权重邻接矩阵D是一个对称矩阵；

（2）其主对角线上元素为0.

（3）D_{ij}表示第i个节点到第j个节点的权重。

有向图的权重邻接矩阵



带权重的四个节点的有向图

$$D = \begin{bmatrix} 0 & Inf & 8 & 3 \\ Inf & 0 & Inf & 5 \\ 8 & Inf & 0 & 2 \\ Inf & Inf & Inf & 0 \end{bmatrix}$$

有向图对应的权重邻接矩阵

	1	2	3	4
1	0	Inf	8	3
2	Inf	0	Inf	5
3	8	Inf	0	2
4	Inf	Inf	Inf	0

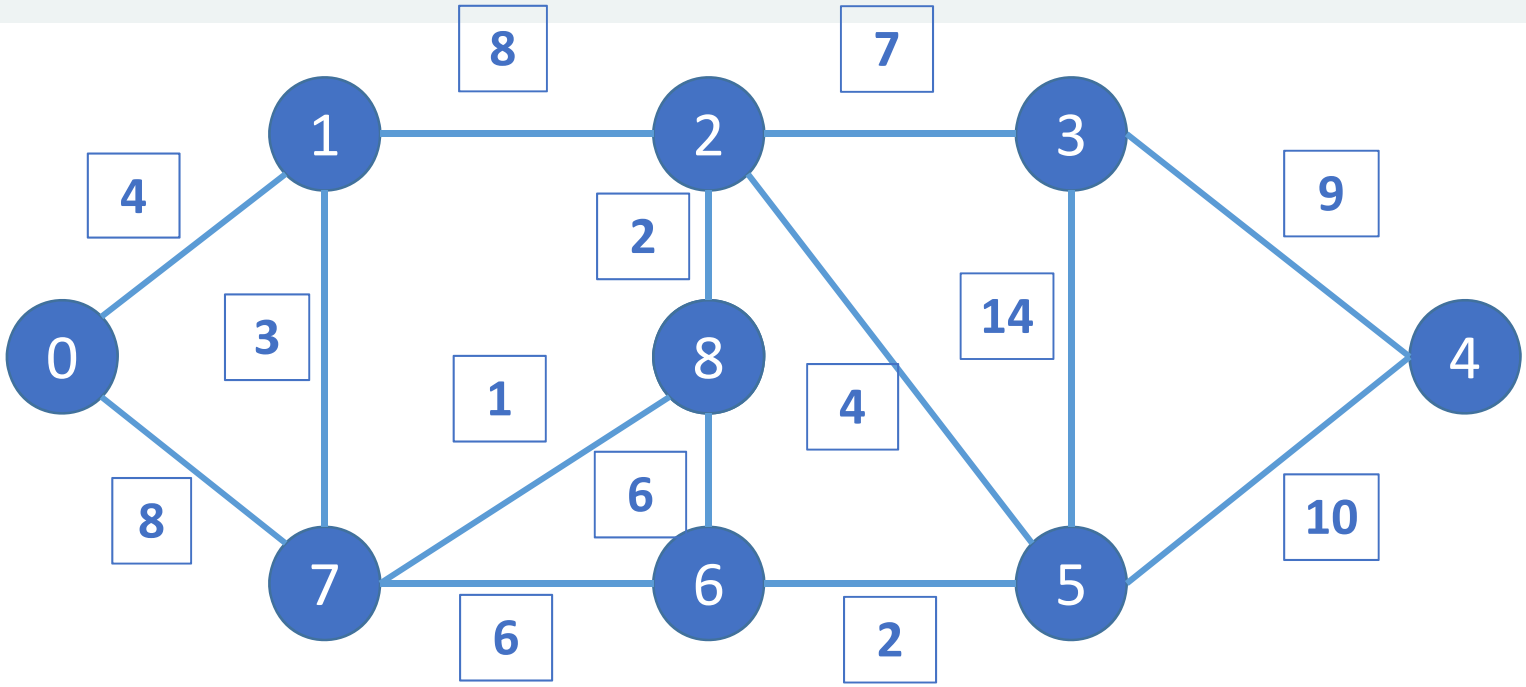
结论：

（1）有向图对应的权重邻接矩阵D是一般不再是对称矩阵；

（2）其主对角线上元素为0.

（3）D_{ij}表示第i个节点到第j个节点的权重。

迪杰斯特拉算法



图中有0-8共九个地点，地点之间若用直线连接则表明两地可直接到达，直线旁的数值表示两地的距离。

问题：起点为0，终点为4，怎么走路程最短。

（假设出行方式相同，例如都为步行）

玩一个APP

算法动画图解（安卓有破解版 苹果需要购买）

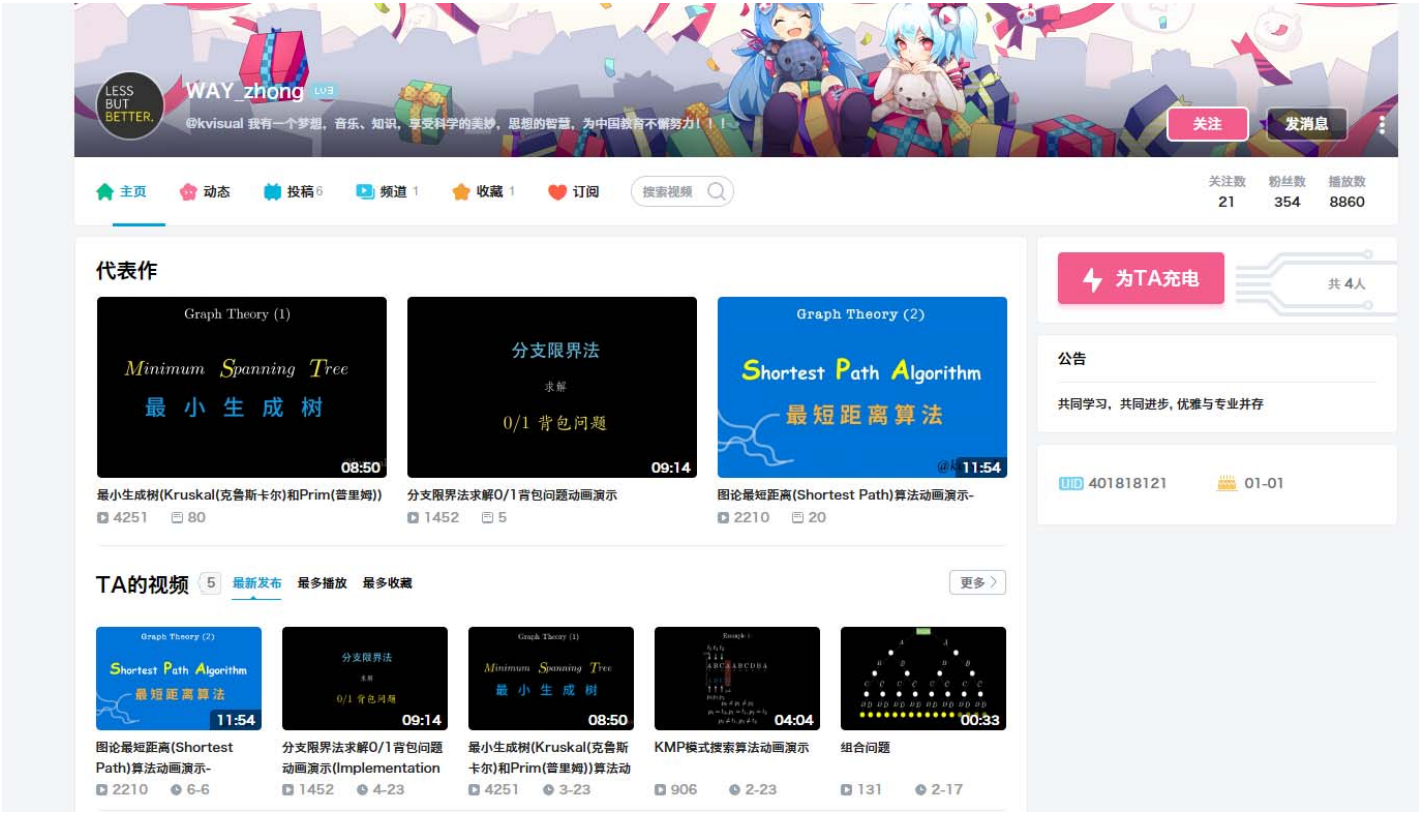
看视频演示

在线观看:

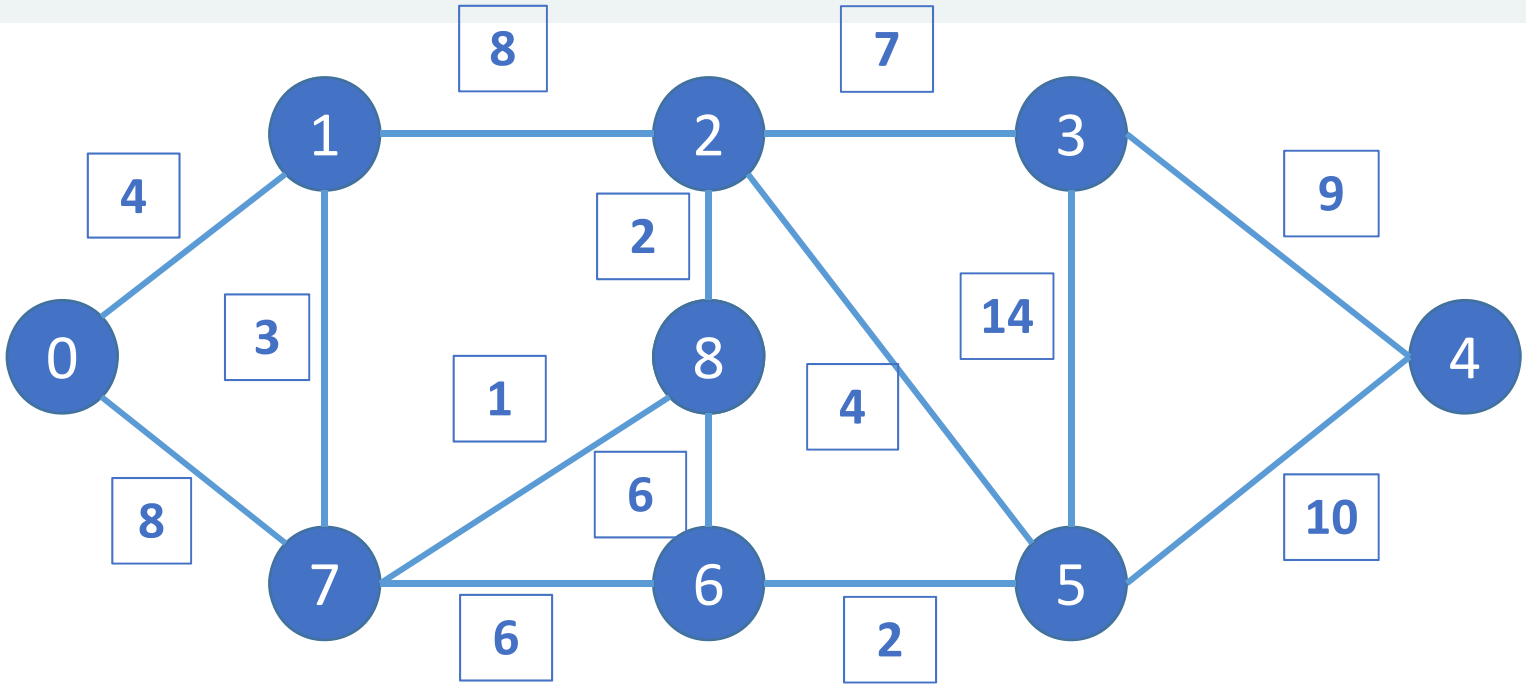
https://www.bilibili.com/video/av54668527

本地观看:

本节拓展资料

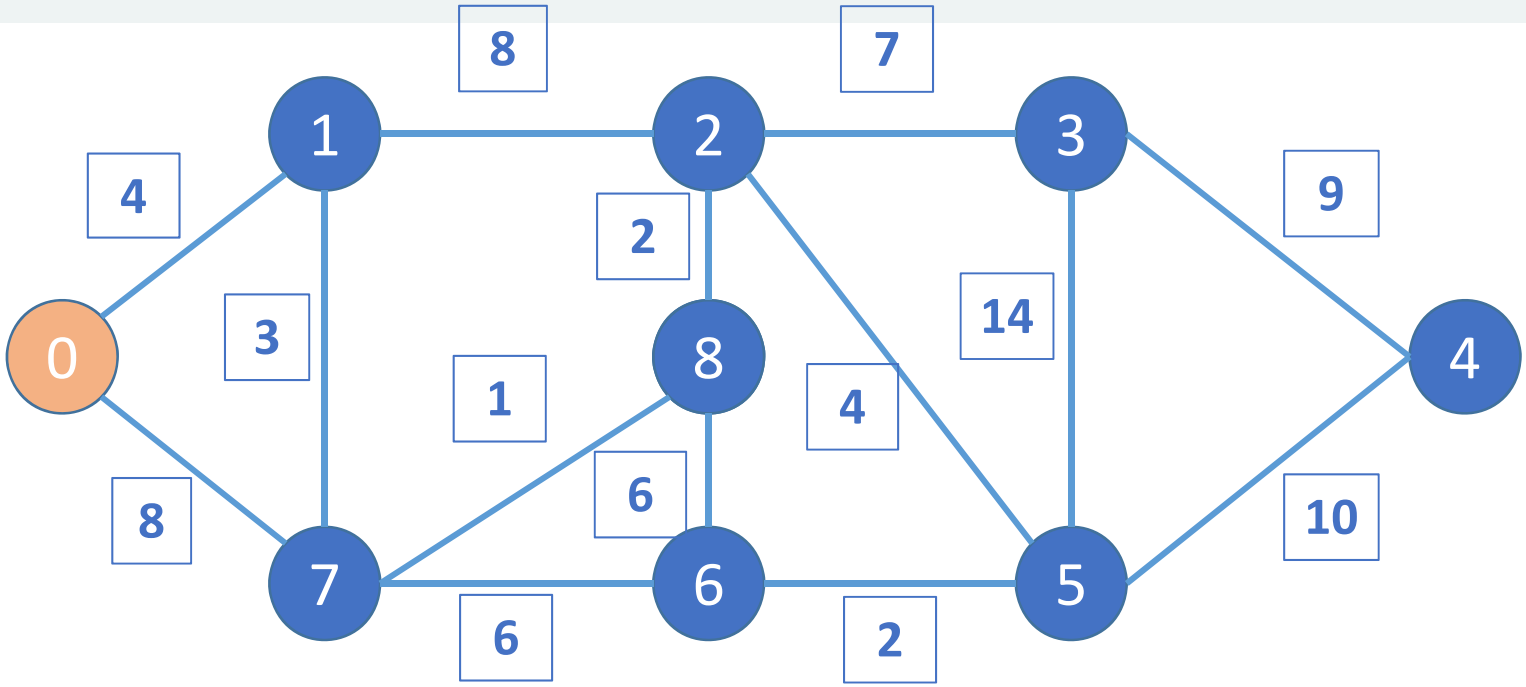


步骤演示



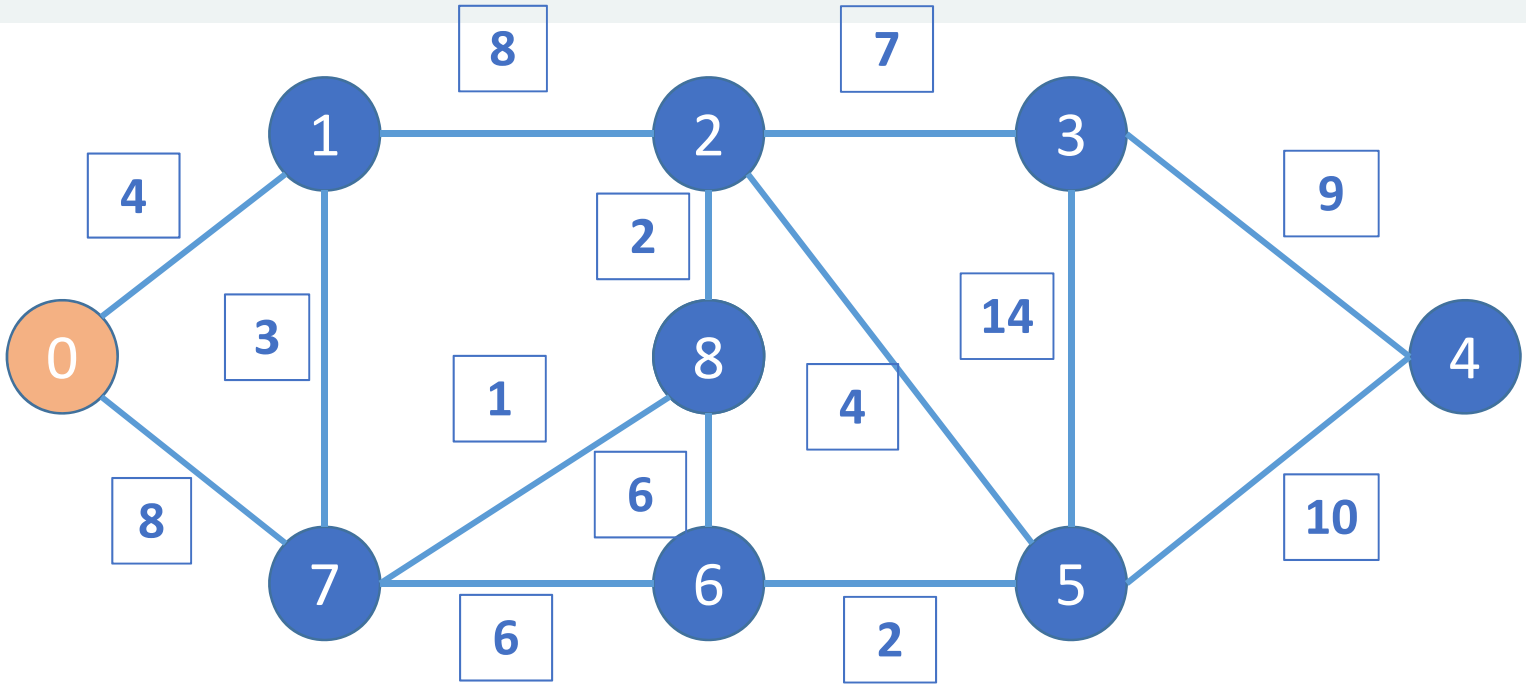
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Distance	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Parent	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

步骤演示



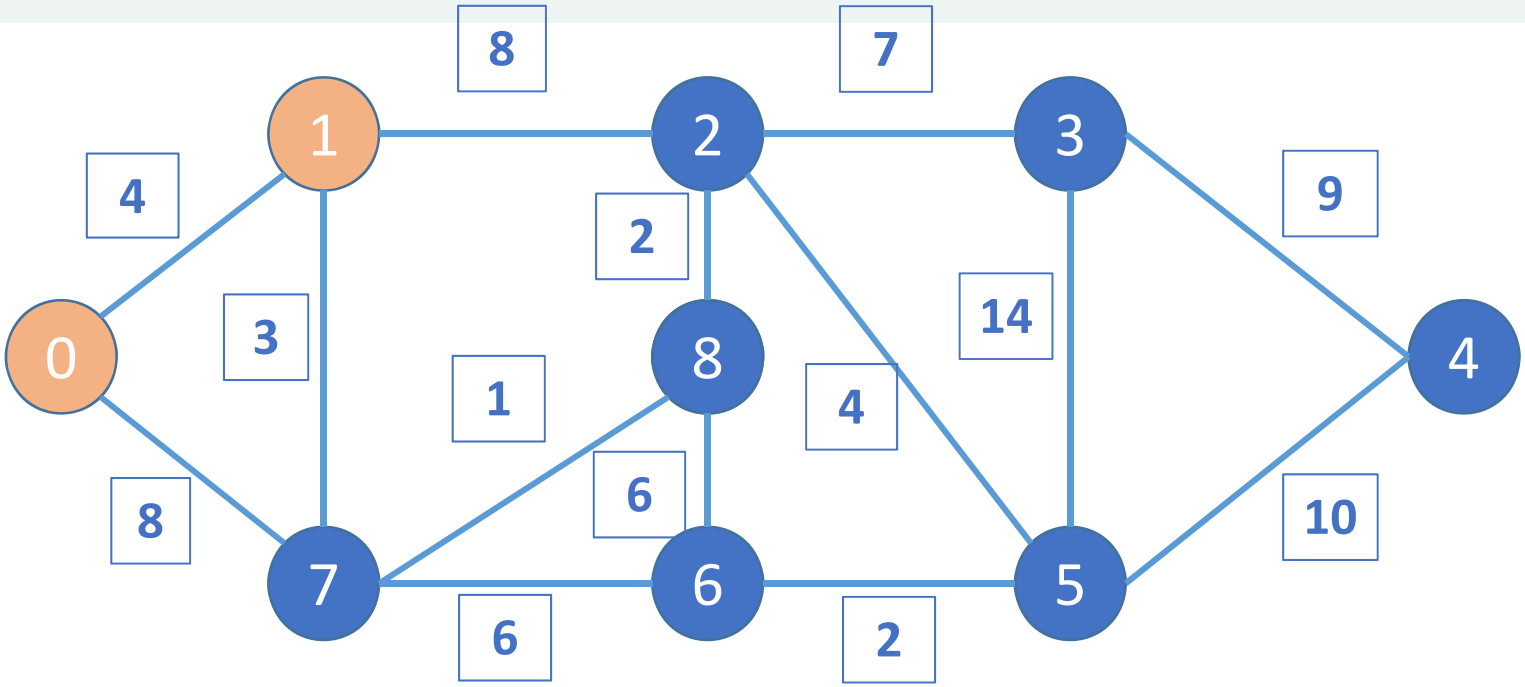
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Distance	0	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Parent	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

步骤演示



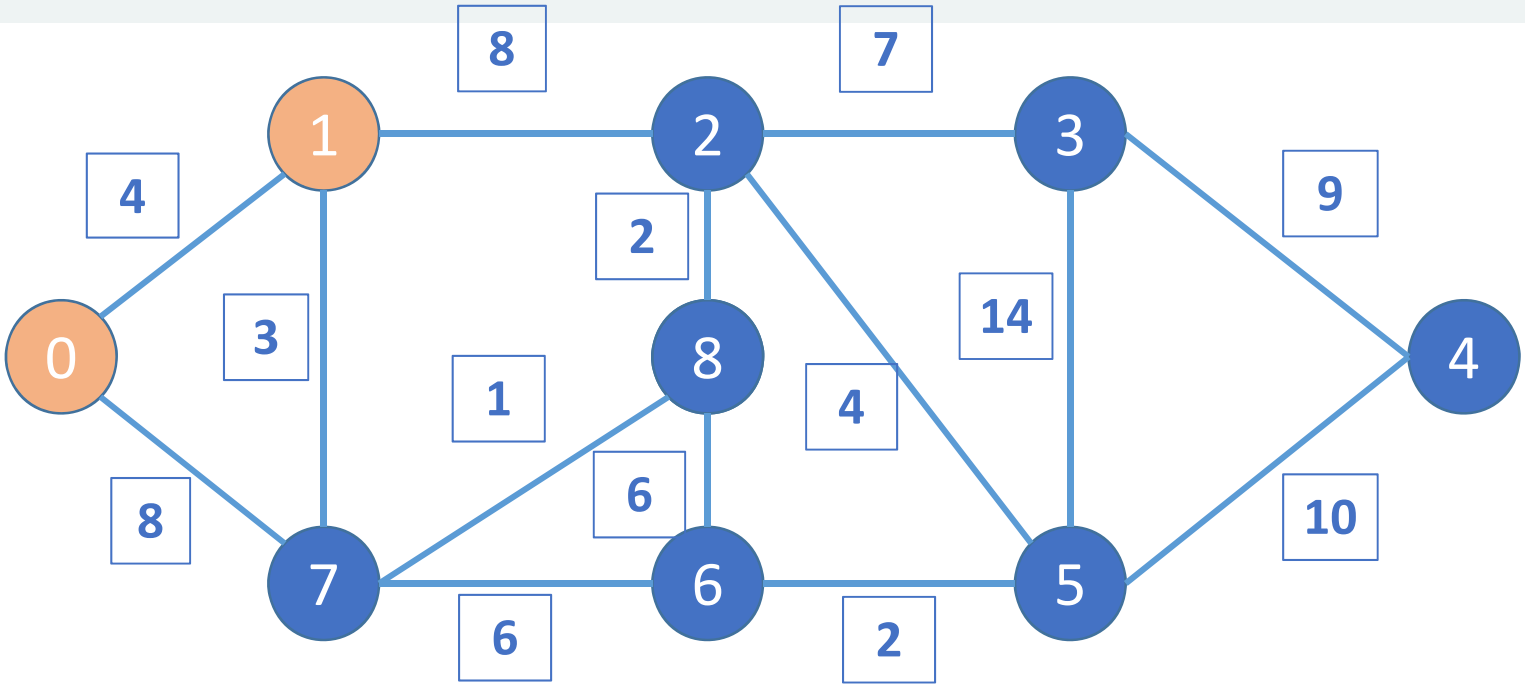
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Distance	0	4	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	8	Inf
Parent	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1

步骤演示



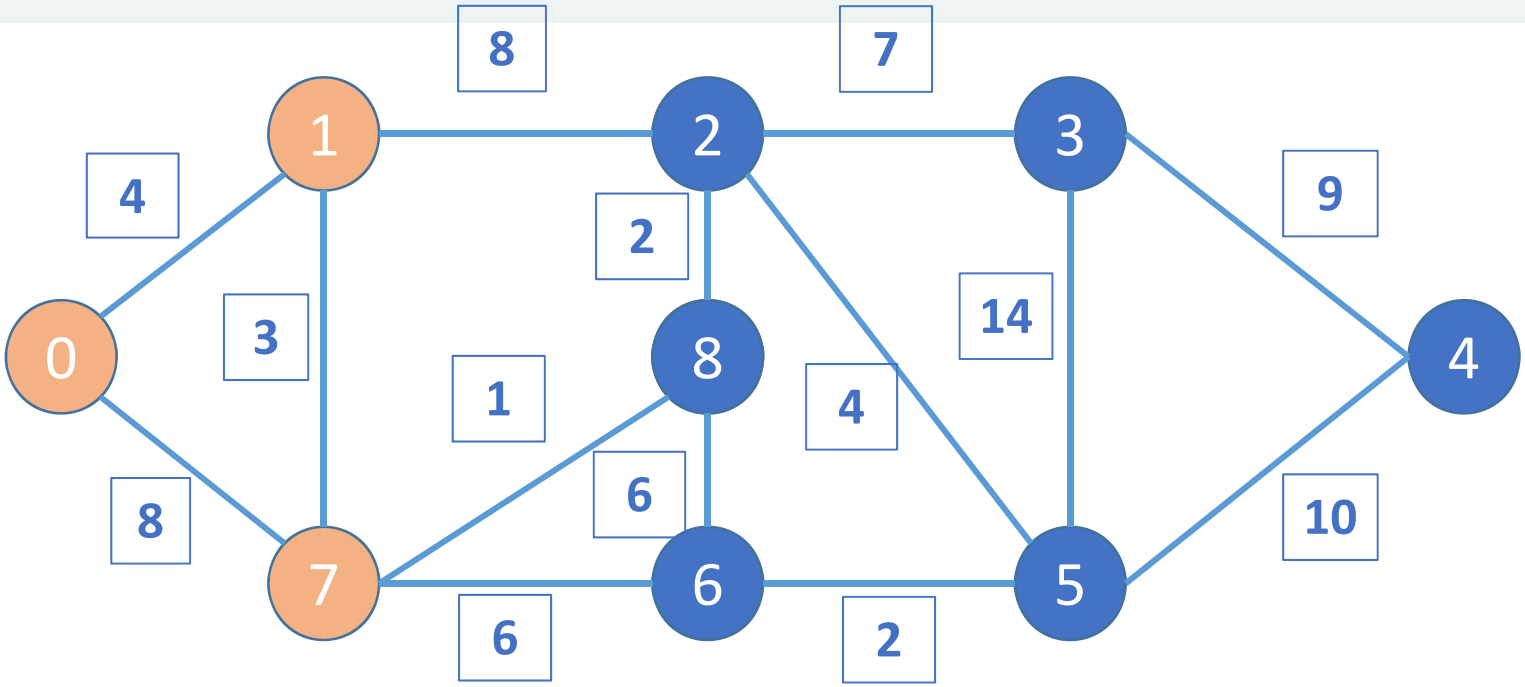
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Distance	0	4	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	8	Inf
Parent	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1

步骤演示



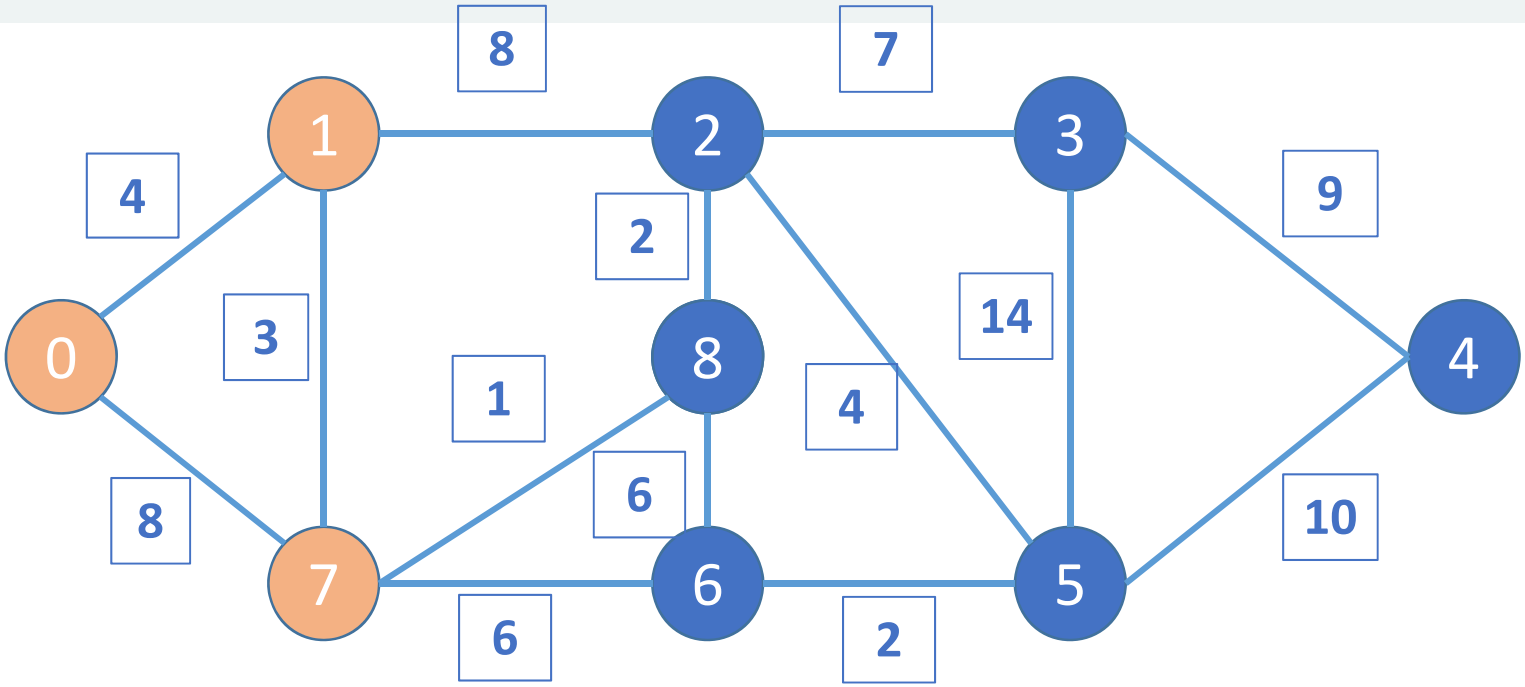
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Distance	0	4	12	Inf	Inf	Inf	Inf	7	Inf
Parent	0	0	1	-1	-1	-1	-1	1	-1

步骤演示



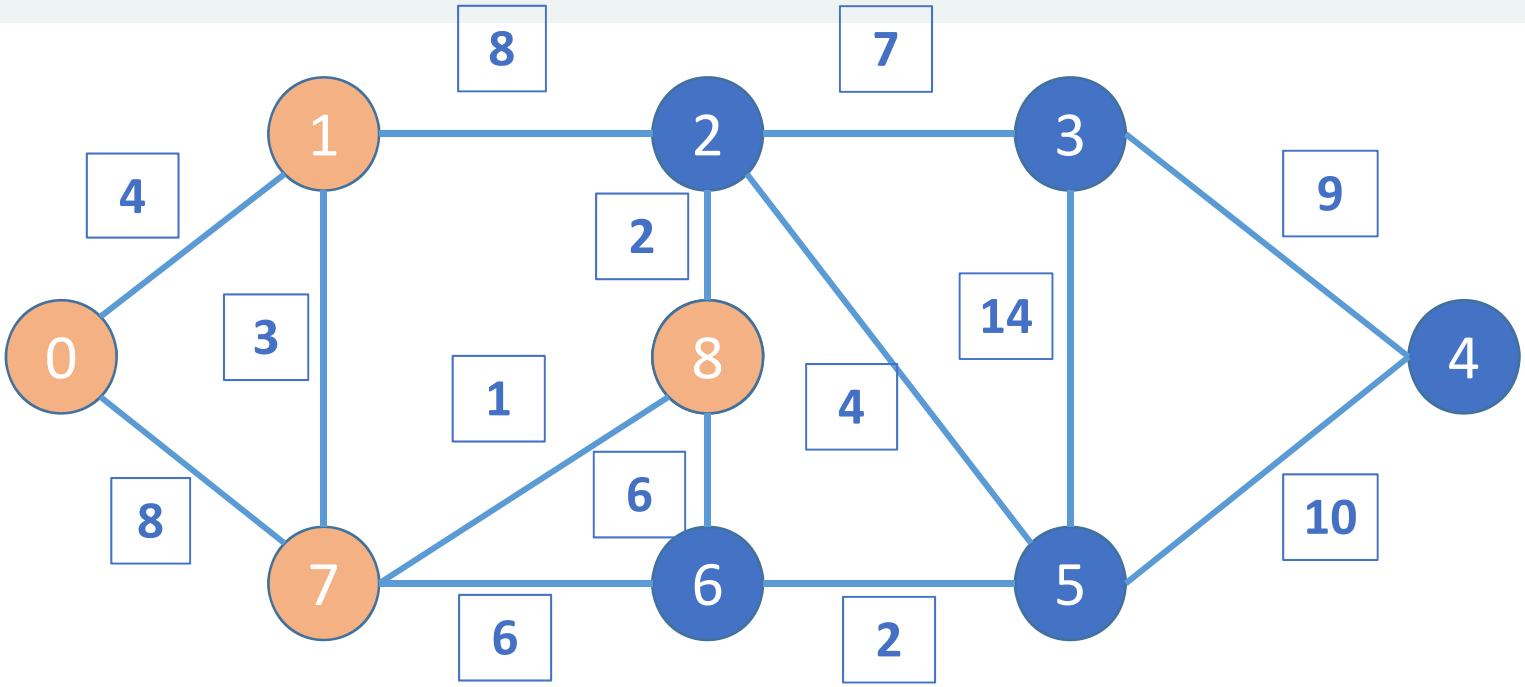
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	1	0
Distance	0	4	12	Inf	Inf	Inf	Inf	7	Inf
Parent	0	0	1	-1	-1	-1	-1	1	-1

步骤演示



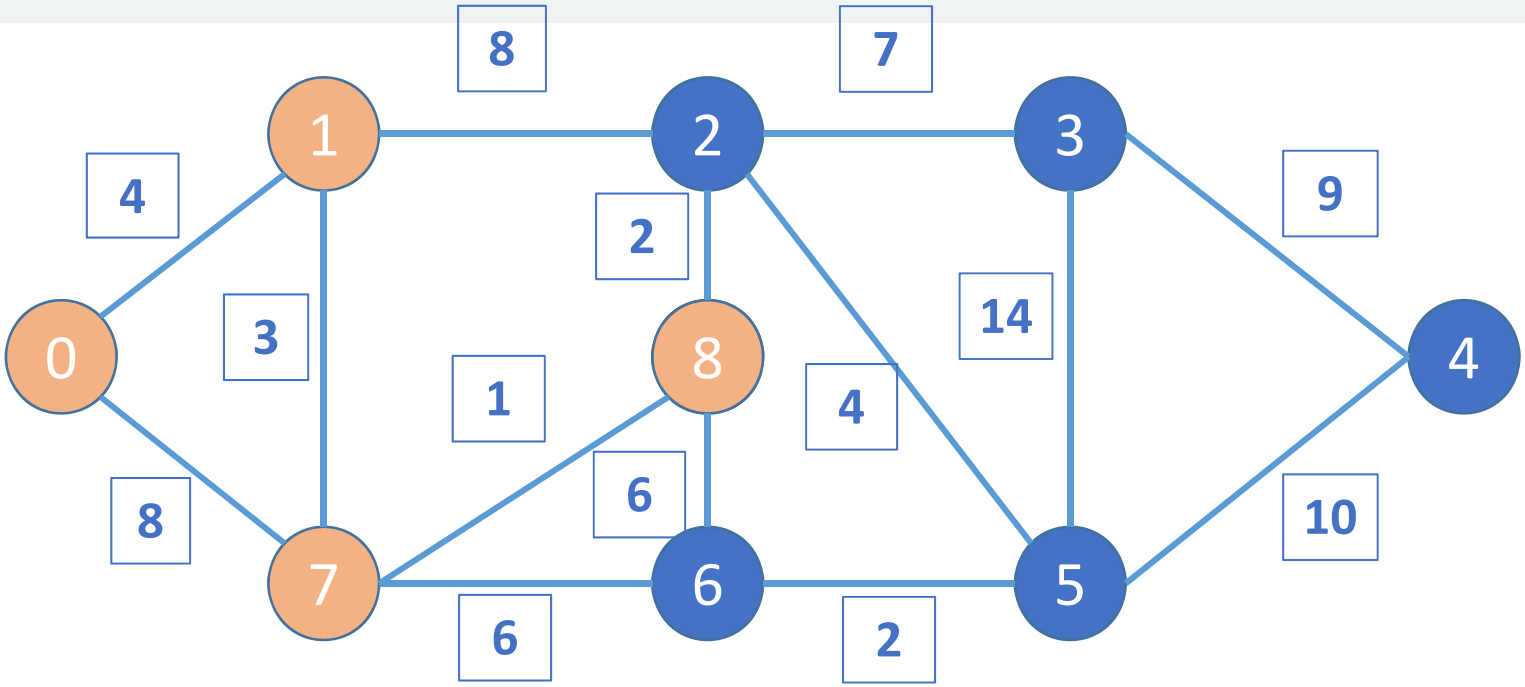
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	1	0
Distance	0	4	12	Inf	Inf	Inf	13	7	8
Parent	0	0	1	-1	-1	-1	7	1	7

步骤演示



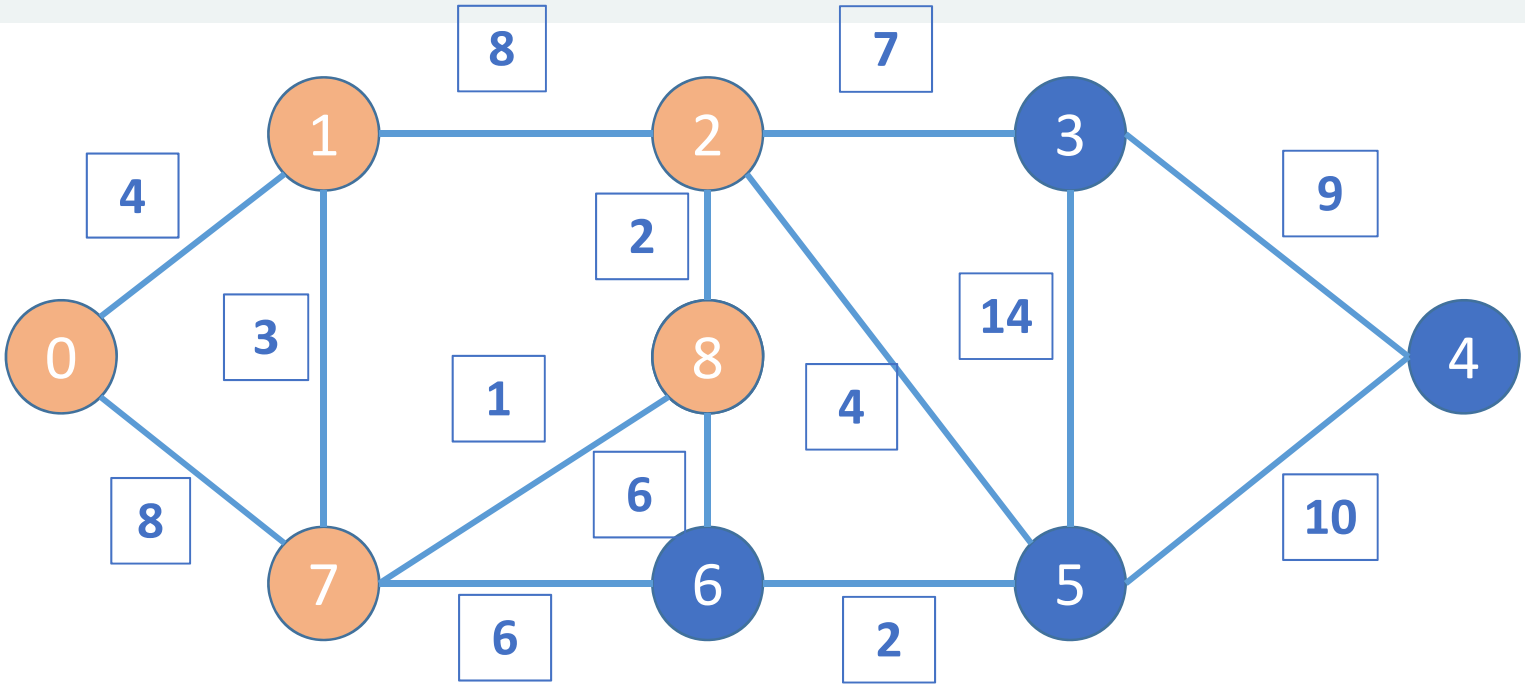
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	1	1
Distance	0	4	12	Inf	Inf	Inf	13	7	8
Parent	0	0	1	-1	-1	-1	7	1	7

步骤演示



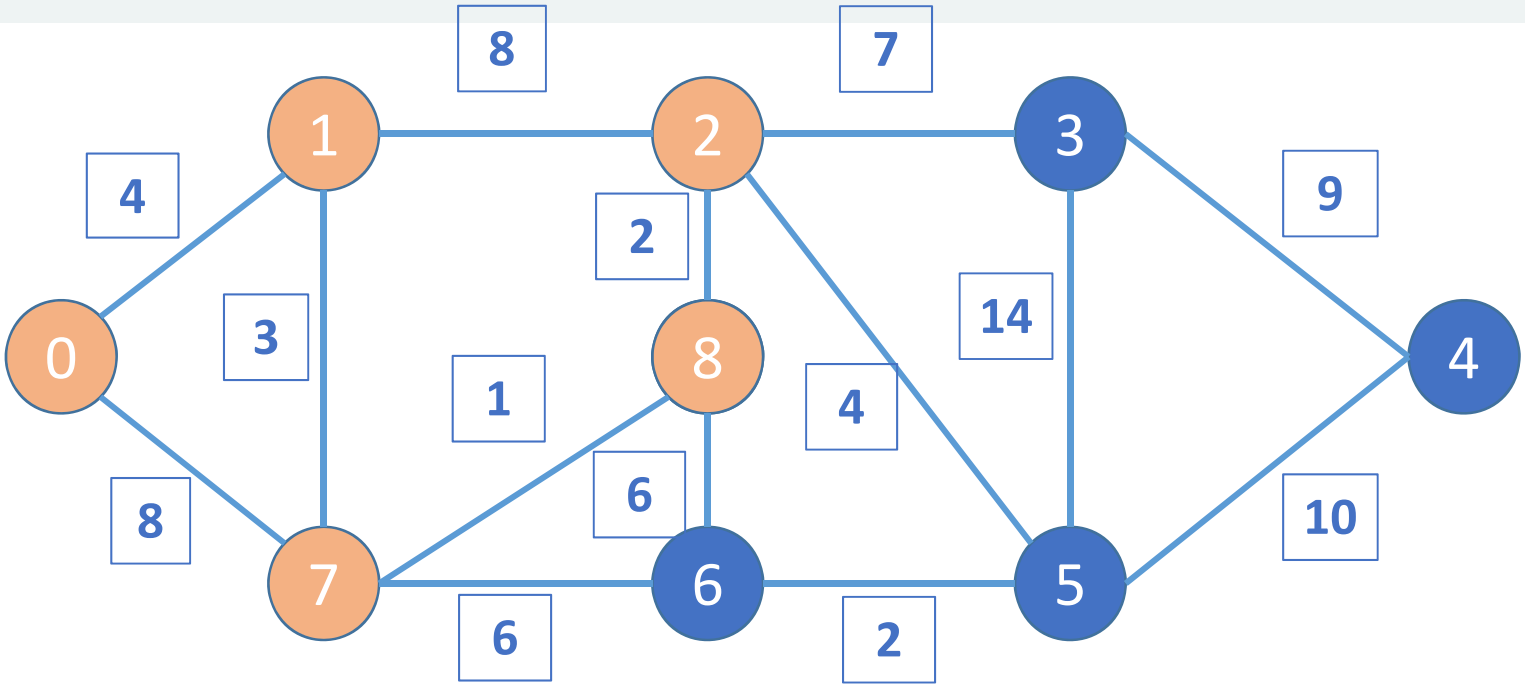
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	0	0	0	0	0	1	1
Distance	0	4	10	Inf	Inf	Inf	13	7	8
Parent	0	0	8	-1	-1	-1	7	1	7

步骤演示



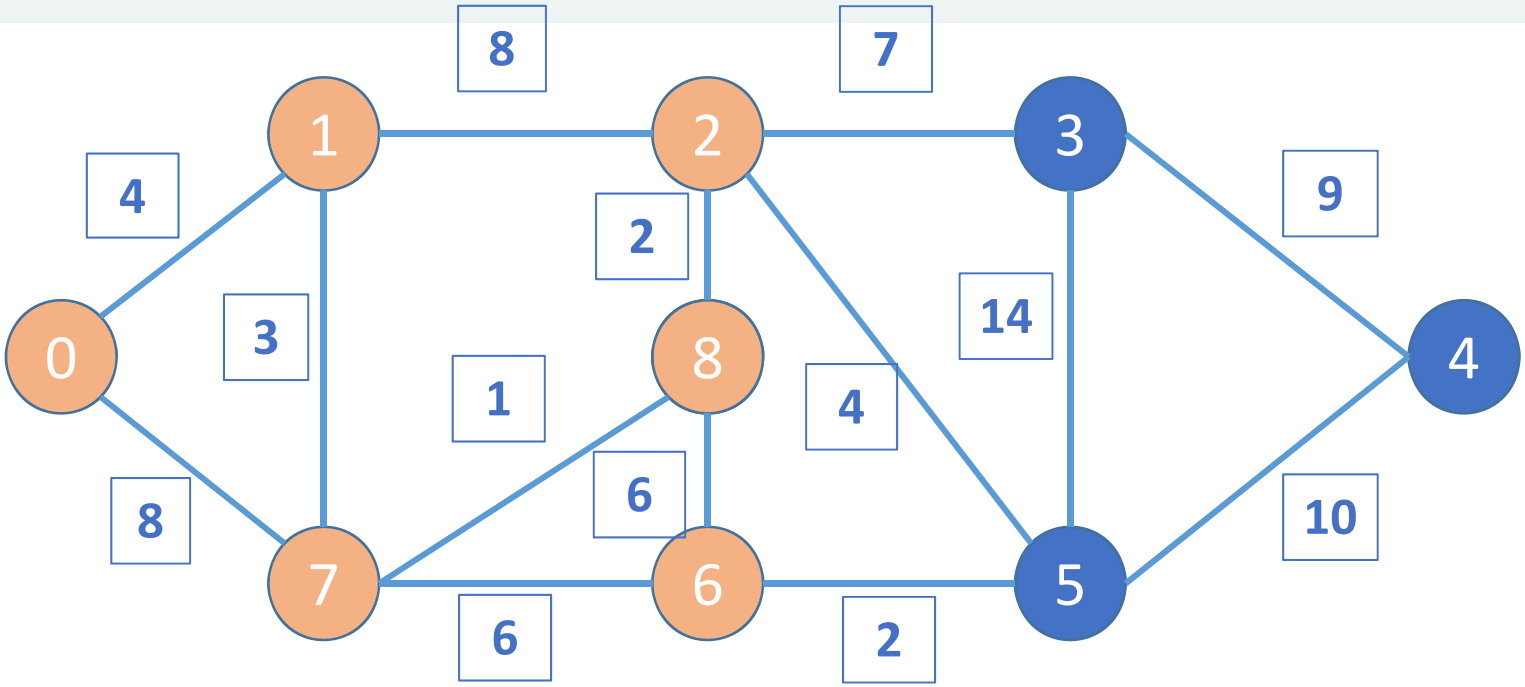
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	0	0	1	1
Distance	0	4	10	Inf	Inf	Inf	13	7	8
Parent	0	0	8	-1	-1	-1	7	1	7

步骤演示



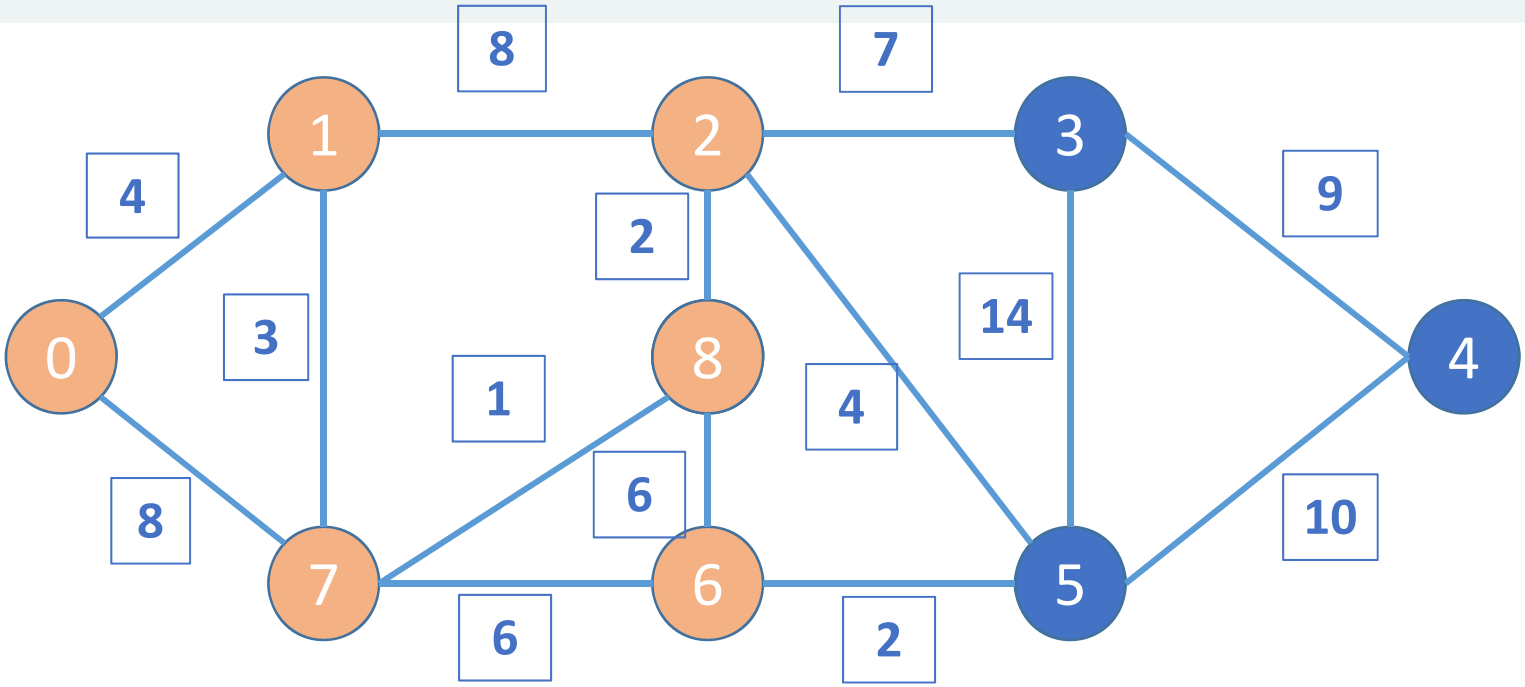
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	0	0	1	1
Distance	0	4	10	17	Inf	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	-1	2	7	1	7

步骤演示



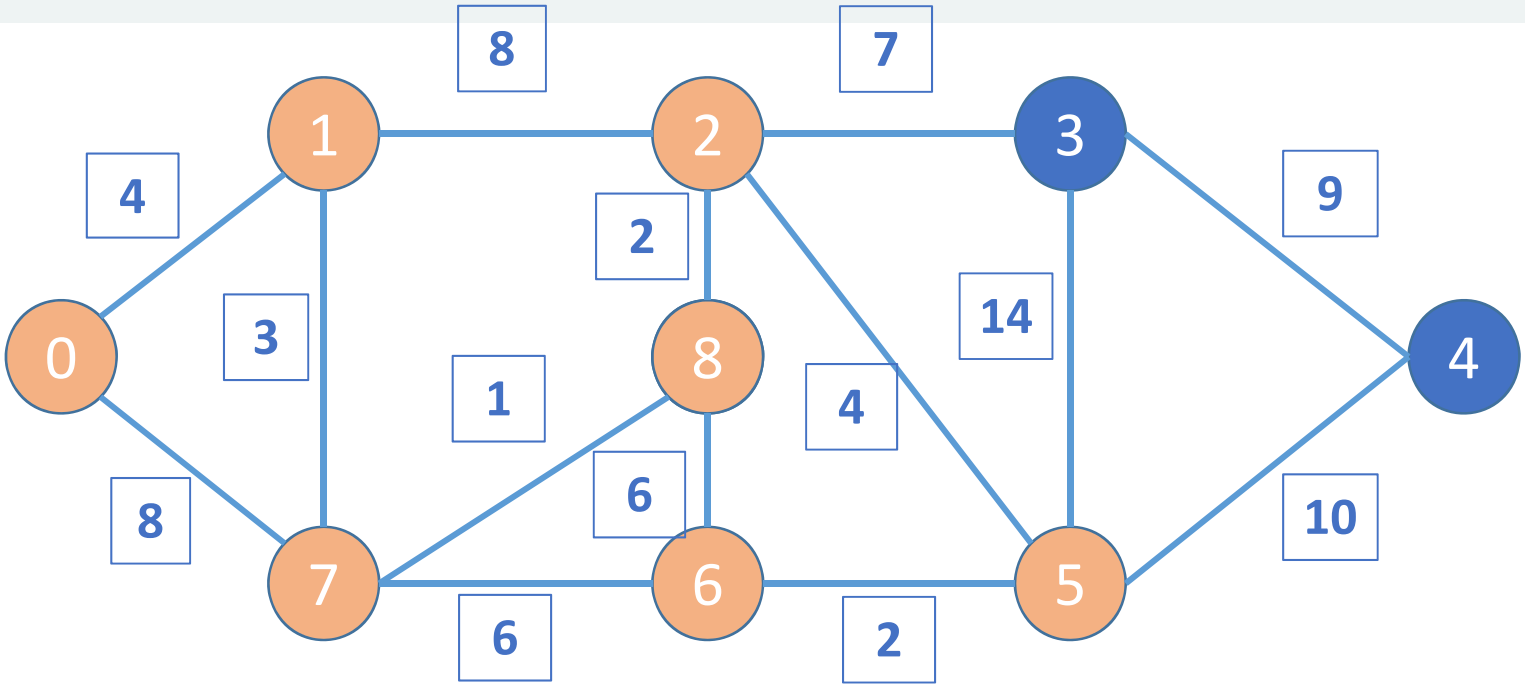
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	0	1	1	1
Distance	0	4	10	17	Inf	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	-1	2	7	1	7

步骤演示



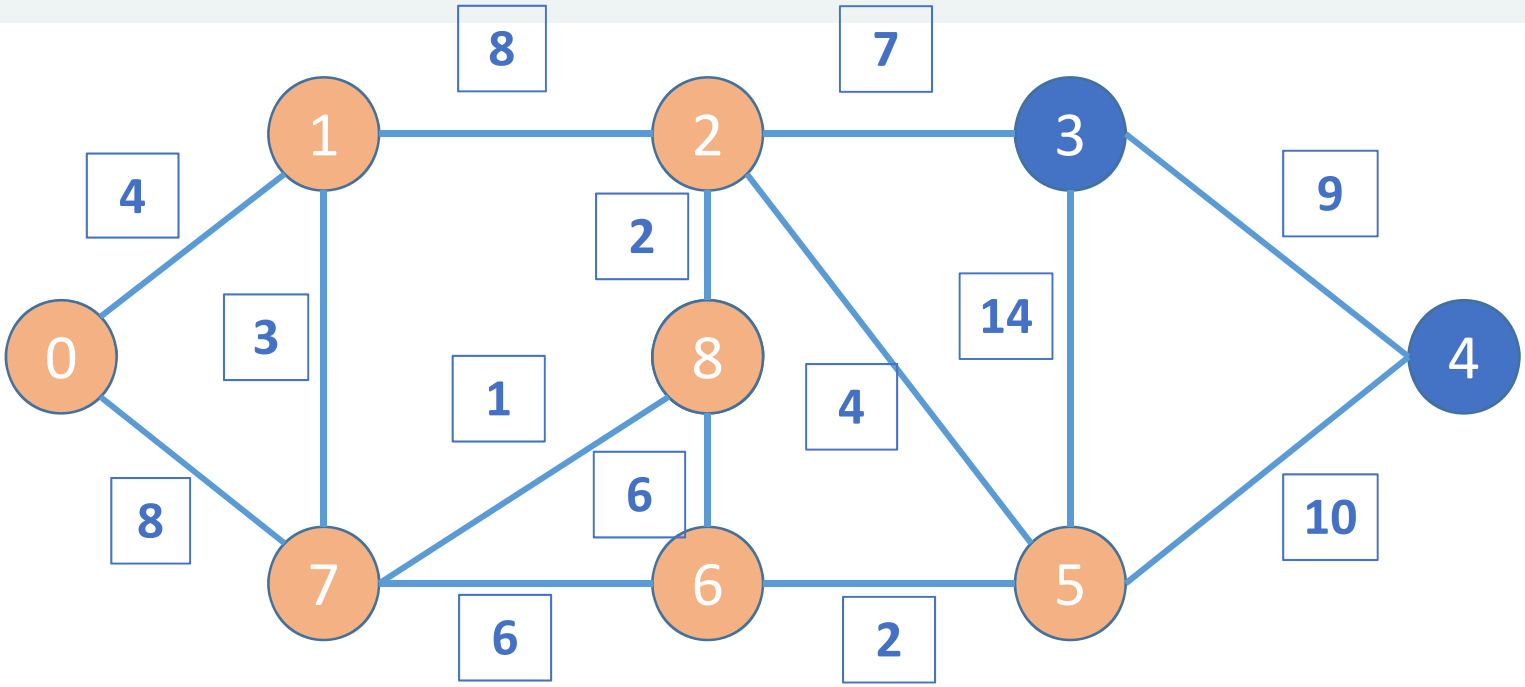
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	0	1	1	1
Distance	0	4	10	17	Inf	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	-1	2	7	1	7

步骤演示



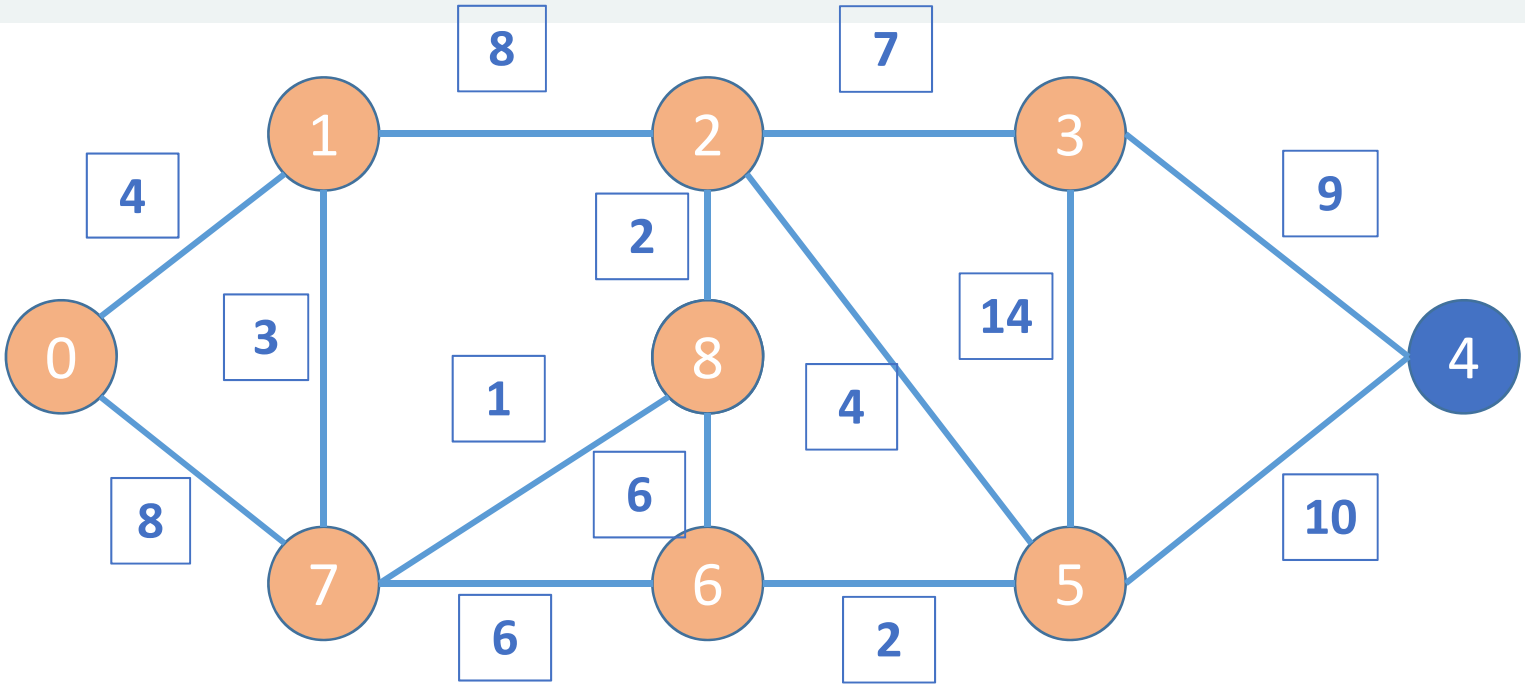
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	Inf	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	-1	2	7	1	7

步骤演示



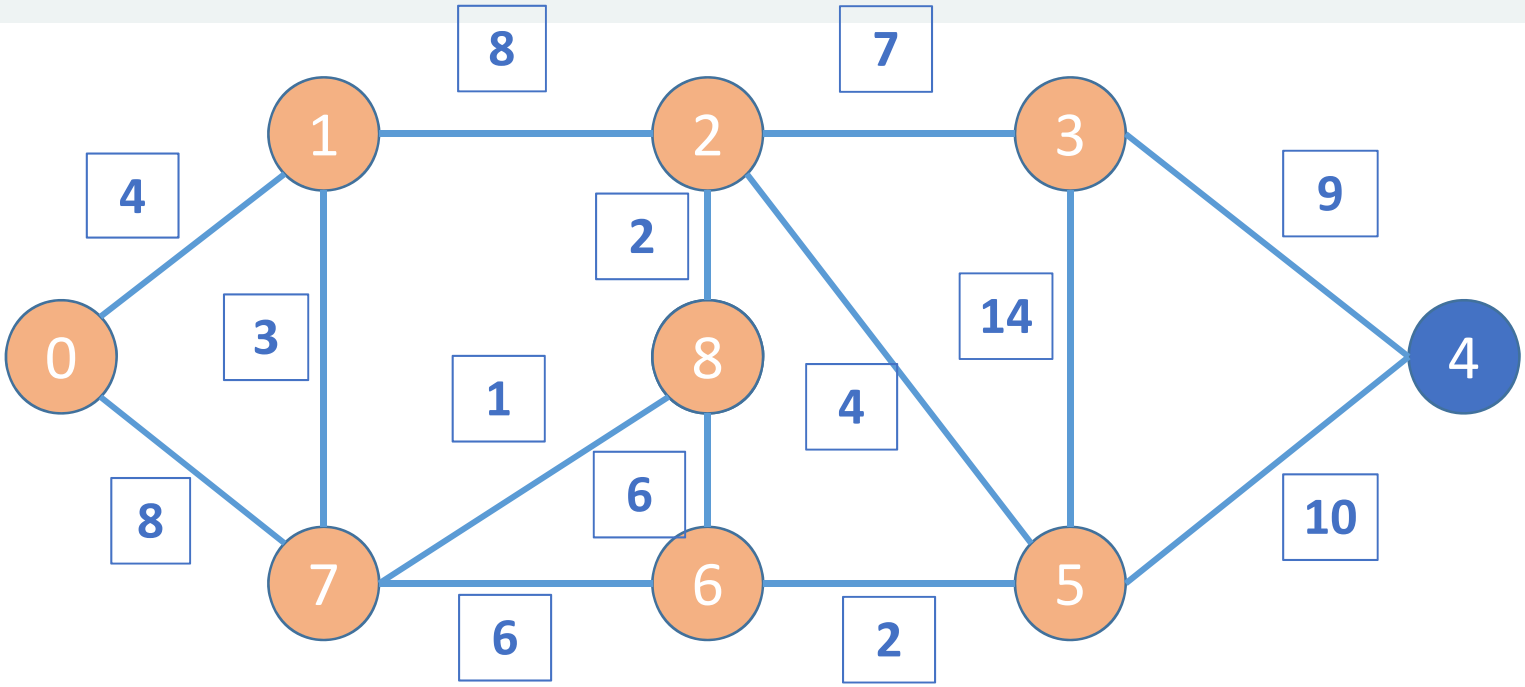
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	0	0	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

步骤演示



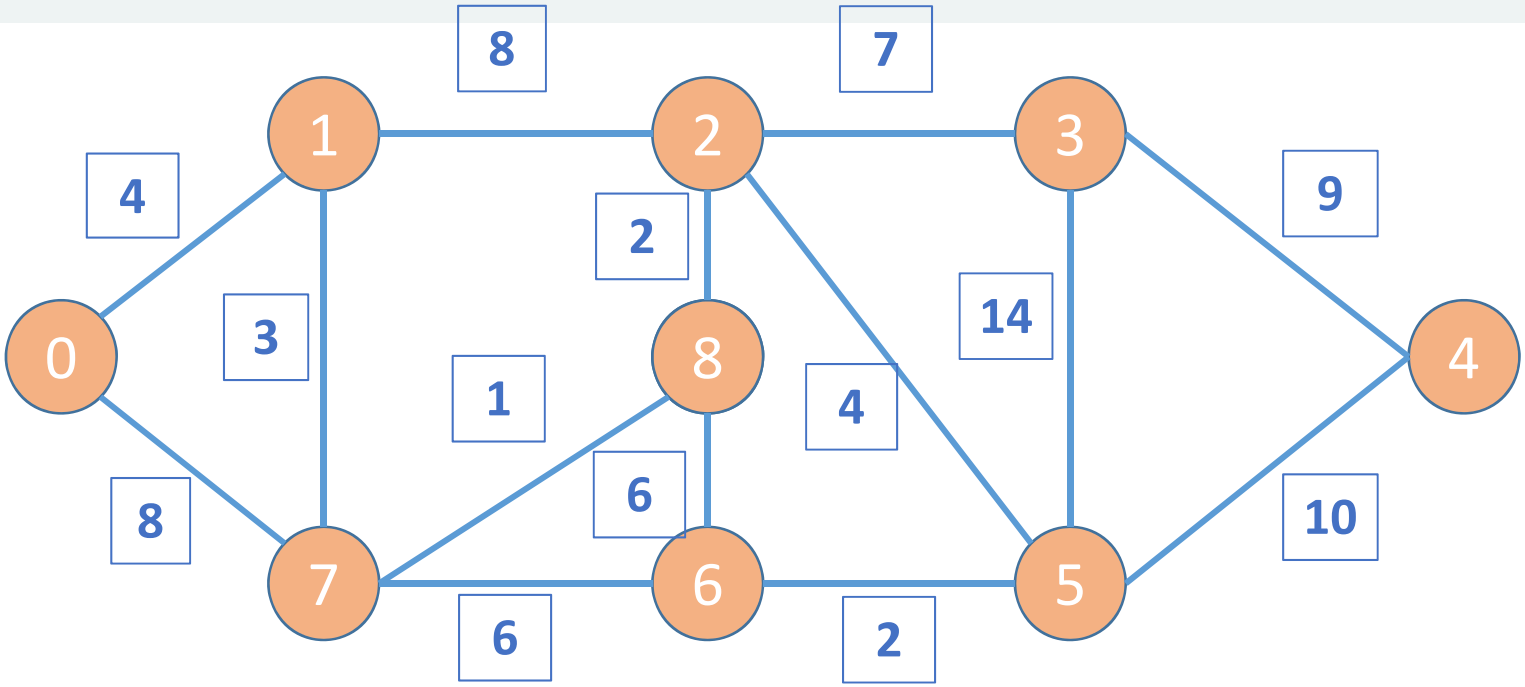
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

步骤演示



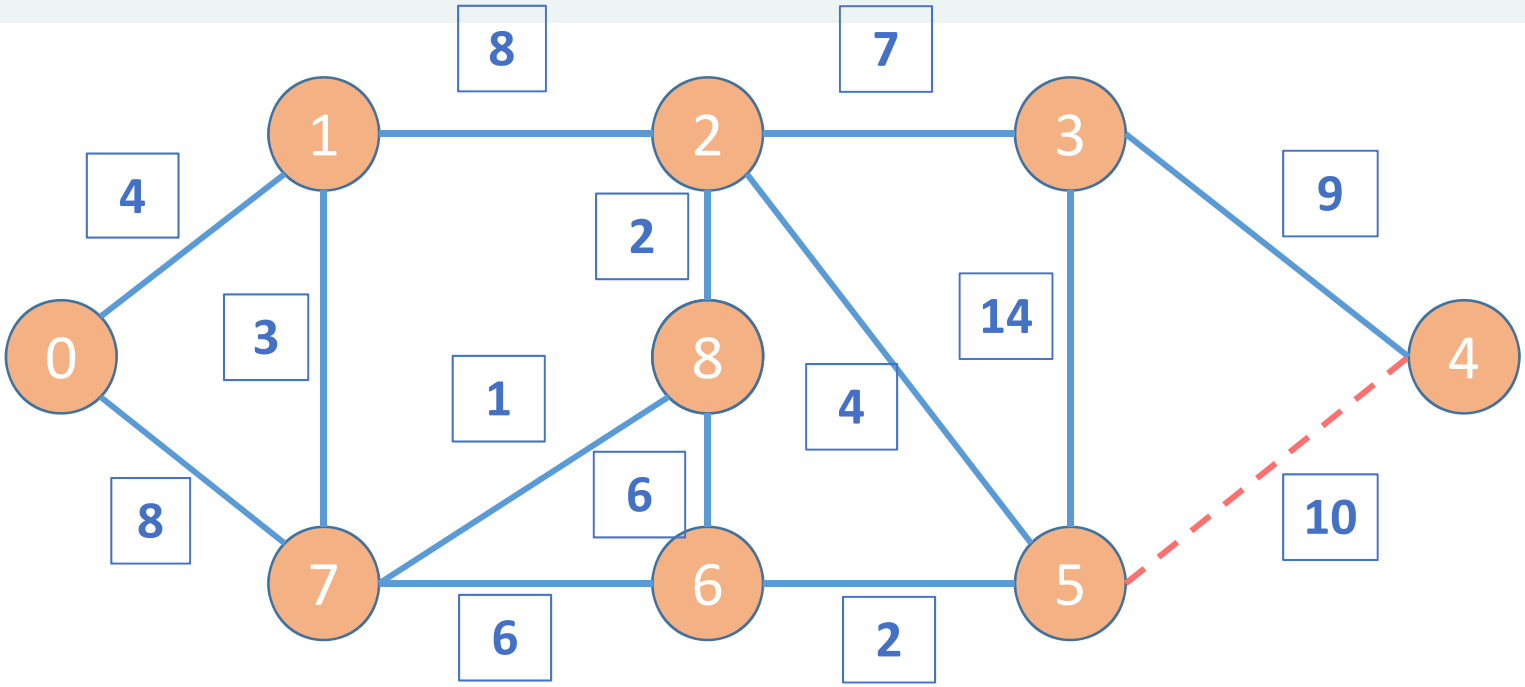
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	0	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

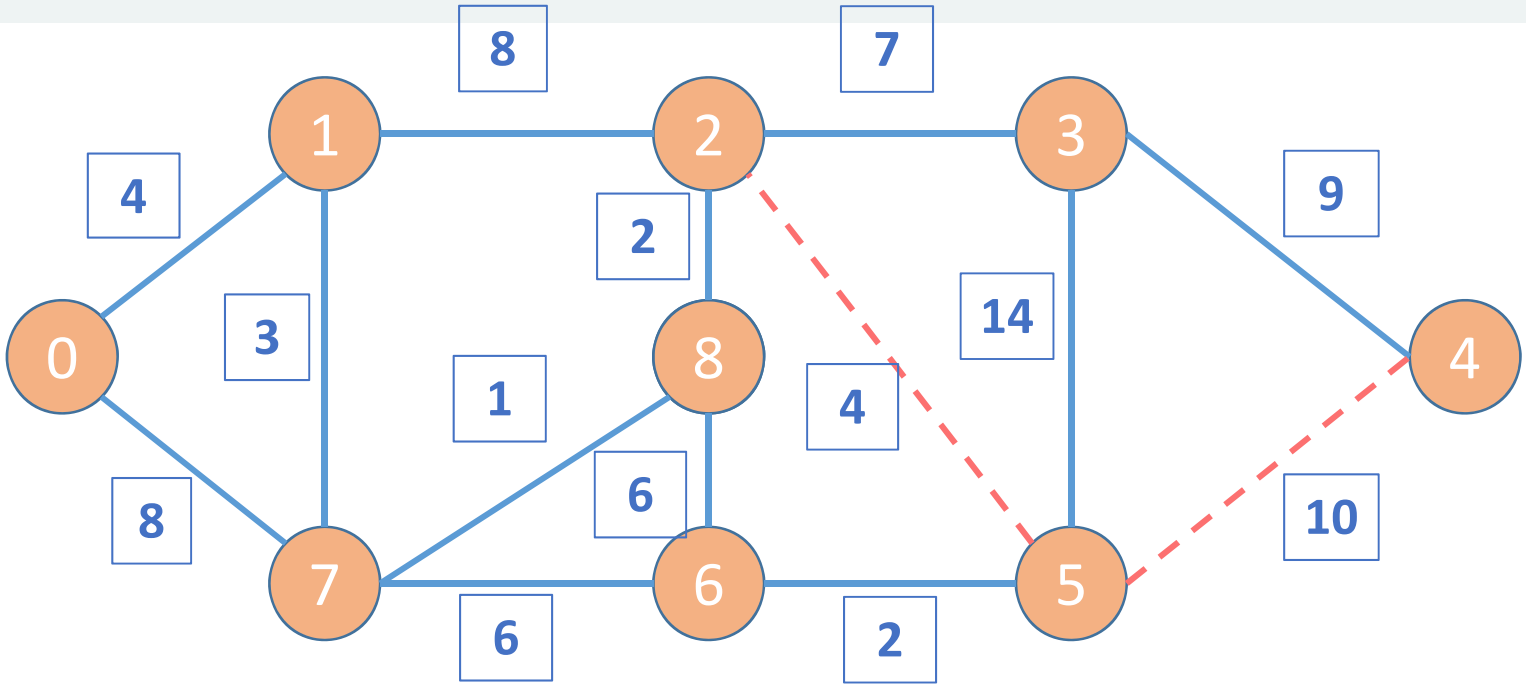
步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5

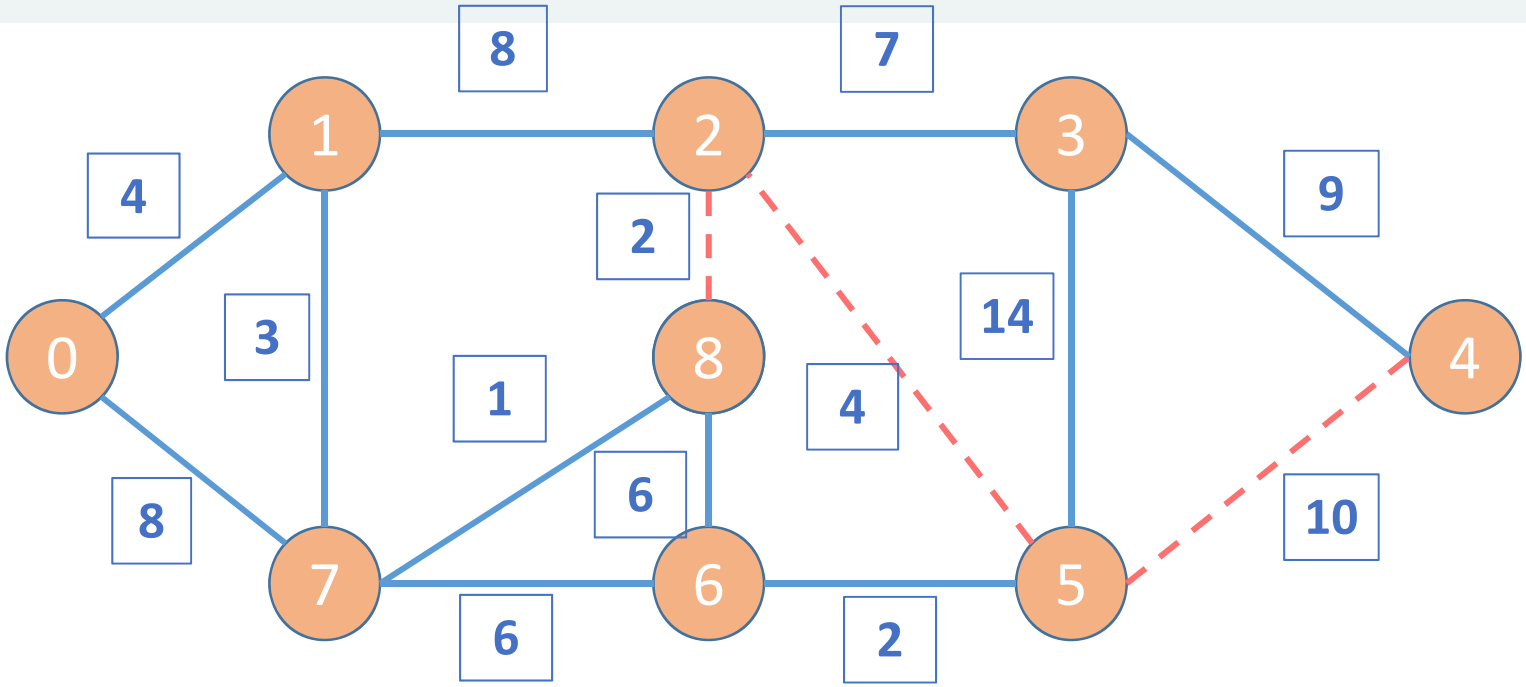
步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5 ← 2

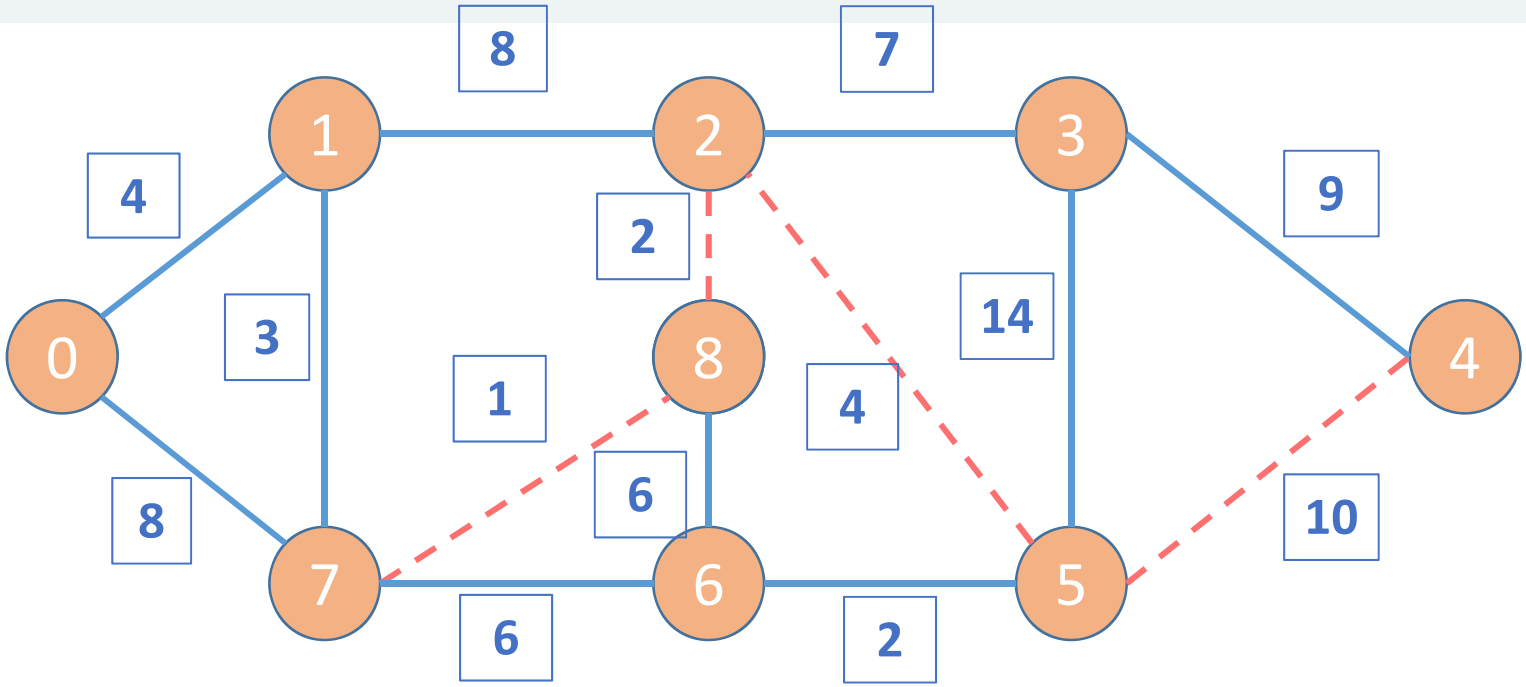
步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5 ← 2 ← 8

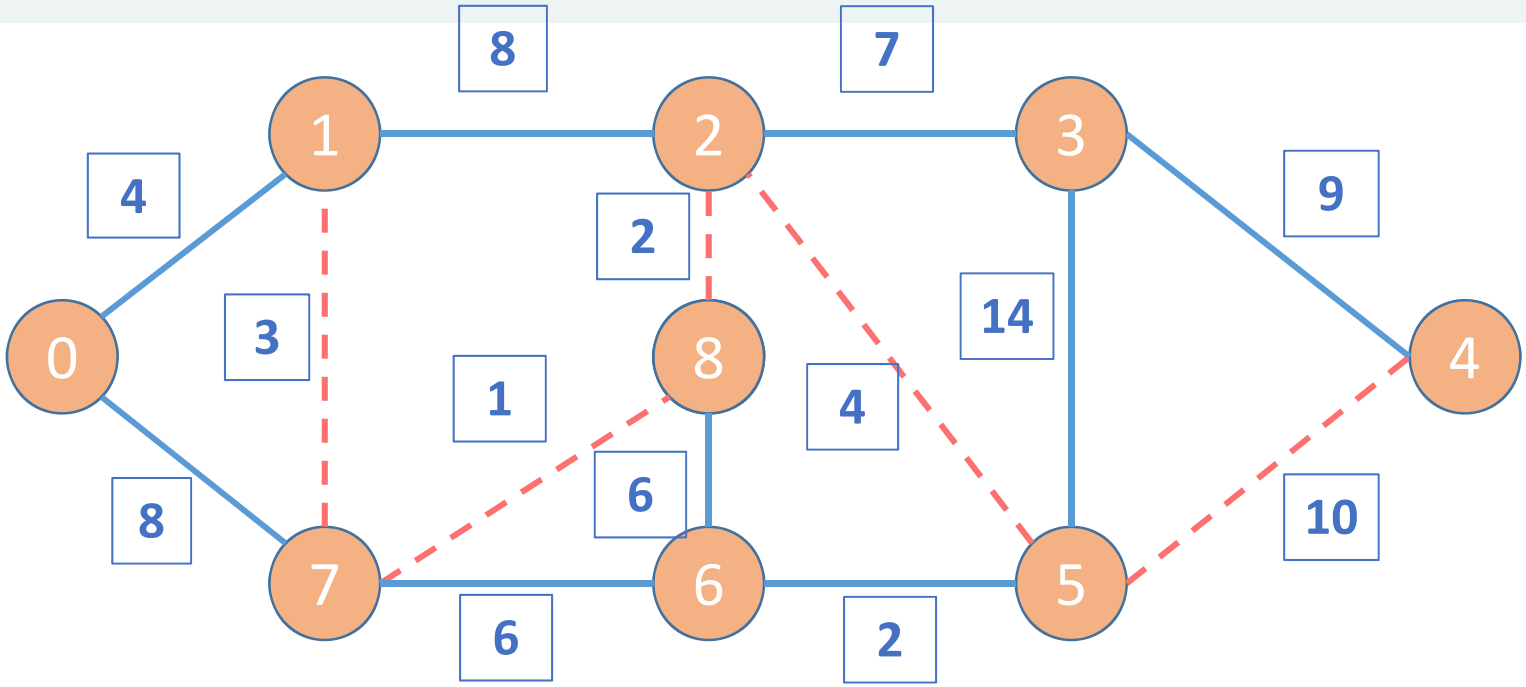
步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5 ← 2 ← 8 ← 7

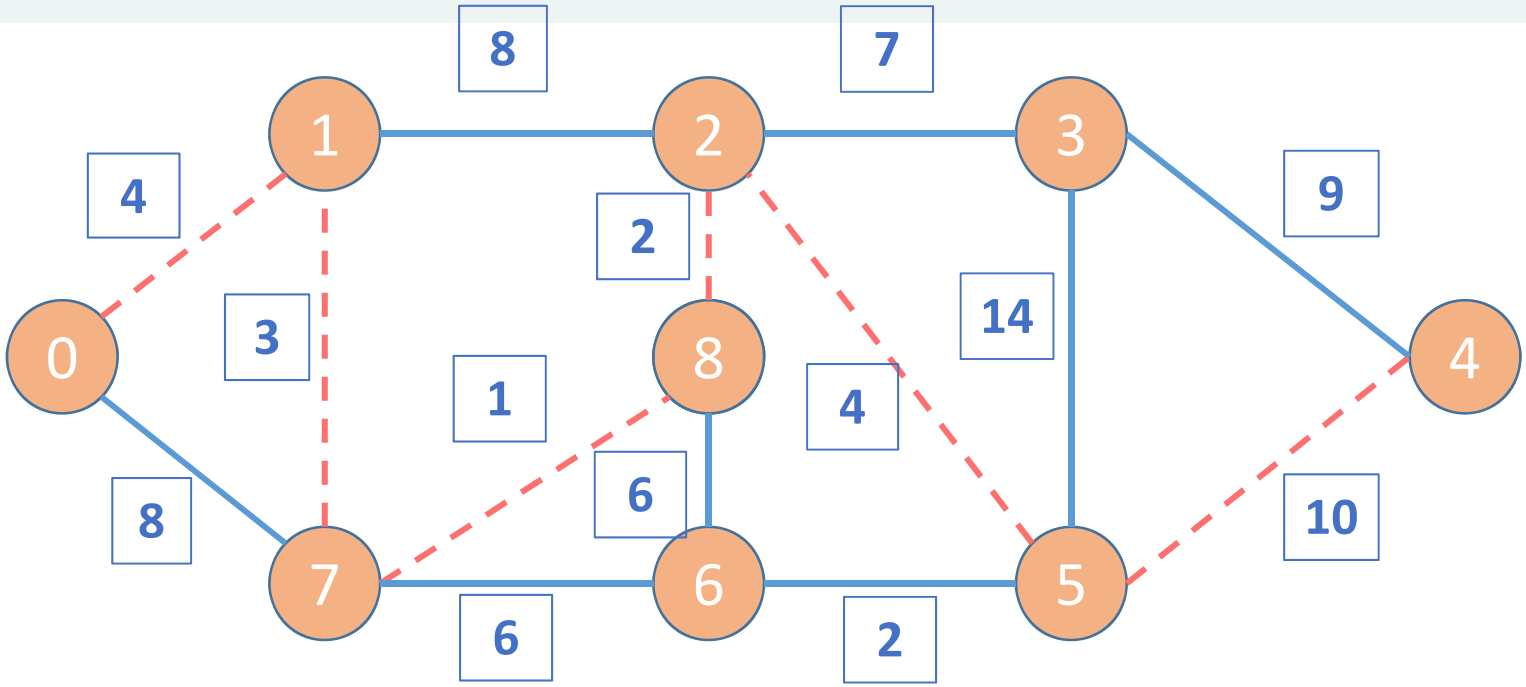
步骤演示



节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5 ← 2 ← 8 ← 7 ← 1

步骤演示



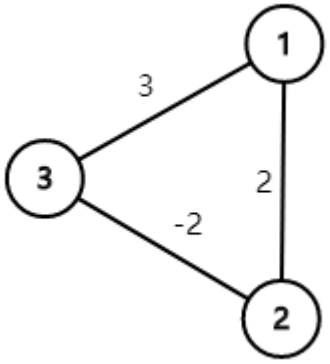
节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Visited	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Distance	0	4	10	17	24	14	13	7	8
Parent	0	0	8	2	5	2	7	1	7

4 ← 5 ← 2 ← 8 ← 7 ← 1 ← 0

迪杰斯特拉算法的一个缺点

可以用于有向图

但不能处理负权重



1是起点；2是终点

节点	1	2	3
Visited	0	0	0
Distance	Inf	Inf	Inf
Parent	-1	-1	-1

(1)

节点	1	2	3
Visited	1	0	0
Distance	0	Inf	Inf
Parent	1	-1	-1

(2)

节点	1	2	3
Visited	1	0	0
Distance	0	2	3
Parent	1	1	1

(3)

节点	1	2	3
Visited	1	1	0
Distance	0	2	3
Parent	1	1	1

(4)

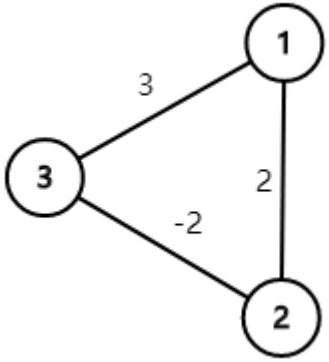
节点	1	2	3
Visited	1	1	0
Distance	0	2	0
Parent	1	1	2

(3)

节点	1	2	3
Visited	1	1	1
Distance	0	2	0
Parent	1	1	2

(6)

如何修复该缺点?



1是起点；2是终点

Bellman-Ford（贝尔曼-福特）算法

刚刚改变访问状态的节点为0号节点（A）
我们要更新与0号节点相邻的节点信息（B），注意，这里的B节点是未访问的哦
更新的规则如下:
如果（A与B的距离+ A列表中的距离）小于（B列表中的距离），那么我们就将B列表中的距离更新为较小的距离，并将B的父亲节点更新为A

事实上，贝尔曼-福特算法不再将节点区分为是否已访问的状态，因为贝尔曼-福特模型是利用循环来进行更新权重的，且每循环一次，贝尔曼福特算法都会更新所有的节点的信息。

贝尔曼-福特算法不支持含有负权回路的图。
（视频中提到的Floyd(弗洛伊德)算法也不可以）

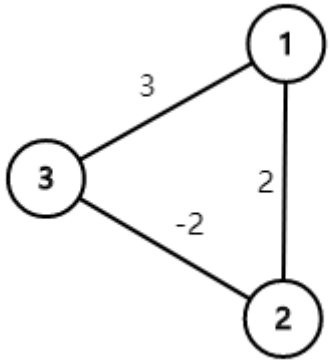
有兴趣的同学可以参考下面两份资料弄懂其实现原理:
https://blog.csdn.net/a8082649/article/details/81812000
https://www.bilibili.com/video/av43217121

什么是负权回路?

在一个图里每条边都有一个权值（有正有负)

如果存在一个环（从某个点出发又回到自己的路径），而且这个环上所有权值之和是负数，那这就是一个负权环，也叫负权回路。

存在负权回路的图是不能求两点间最短路的，因为只要在负权回路上不断兜圈子，所得的最短路长度可以任意小。



含有负权重的无向图都是负权回路。
例如左图，可以在2-3之间无限循环。

注意：
贝尔曼-福特算法实际上处理的是具有负权重的有向图。
（且该有向图也不能含有负权回路）

庆幸的是，含有负权重的图特别少见，且一旦出现负权重，也往往是在有向图中。因此大家不用担心算法求解不出来的问题。

Matlab计算最短路径

```
[P,d] = shortestpath(G,start,end [,'Method',algorithm] )
```

功能：返回图G中start节点到end节点的最短路径

输入参数：

（1）G - 输入图（graph 对象 | digraph 对象）

（2）start 起始的节点

（3）end 目标的节点

（4）[,‘Method’,algorithm]是可选的参数，表示计算最短路径的算法。一般我们不用手动设置，默认使用的是“auto”，具体可设置的参数见下一页PPT。

输出参数：

（1）P – 最短路径经过的节点

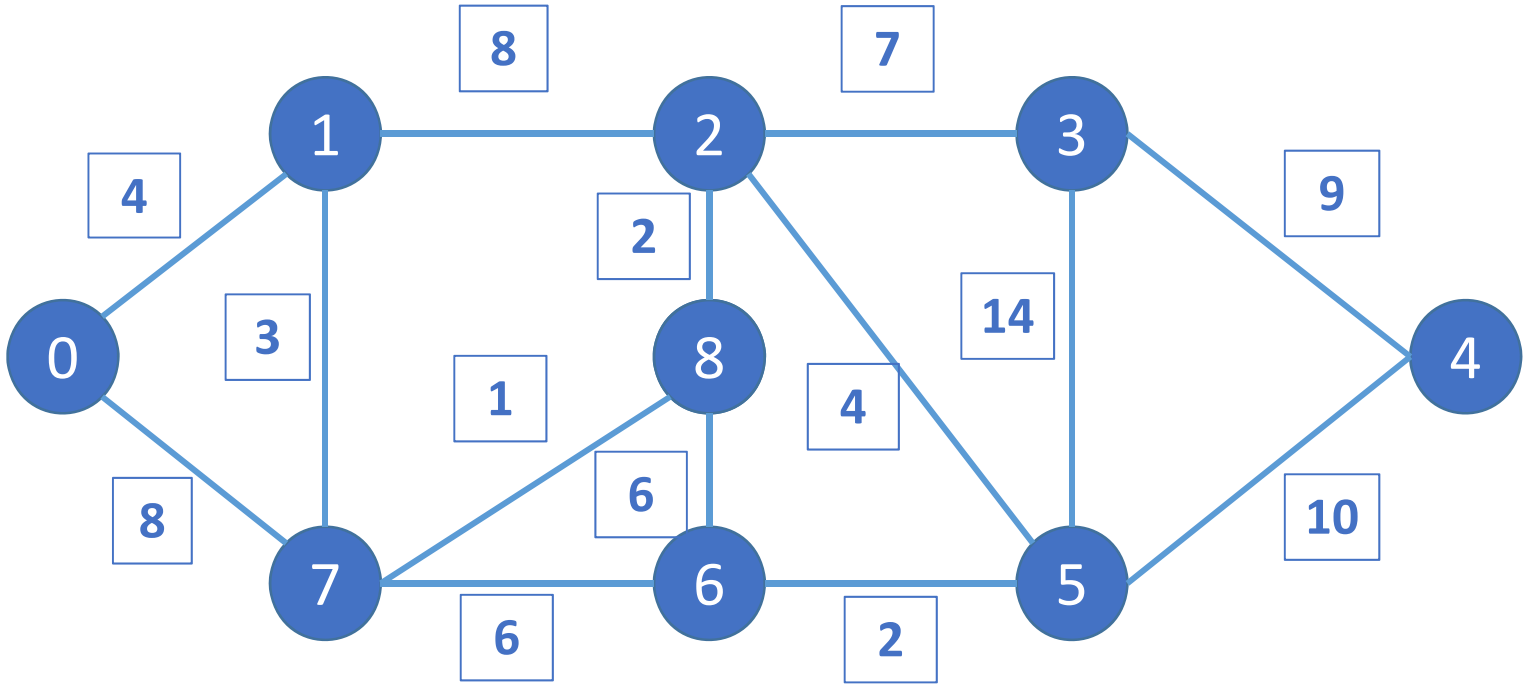
（2）d – 最短距离

注意：该函数matlab2015b之后才有哦

可选的算法

选项	说明
'auto'（默认值）	'auto' 选项会自动选择算法： •'unweighted' 用于没有边权重的 graph 和 digraph 输入。 •'positive' 用于具有边权重的所有 graph 输入，并要求权重为非负数。此选项还用于具有非负边权重的 digraph 输入。 •'mixed' 用于其边权重包含某些负值的 digraph 输入。图不能包含负循环。
'unweighted'	广度优先计算，将所有边权重都视为 1。
'positive'	Dijkstra 算法，要求所有边权重均为非负数。
'mixed'（仅适用于 digraph）	适用于有向图的 Bellman-Ford 算法，要求图没有负循环。尽管对于相同的问题，'mixed' 的速度慢于 'positive'，但 'mixed' 更为通用，因为它允许某些边权重为负数。

Matlab演示

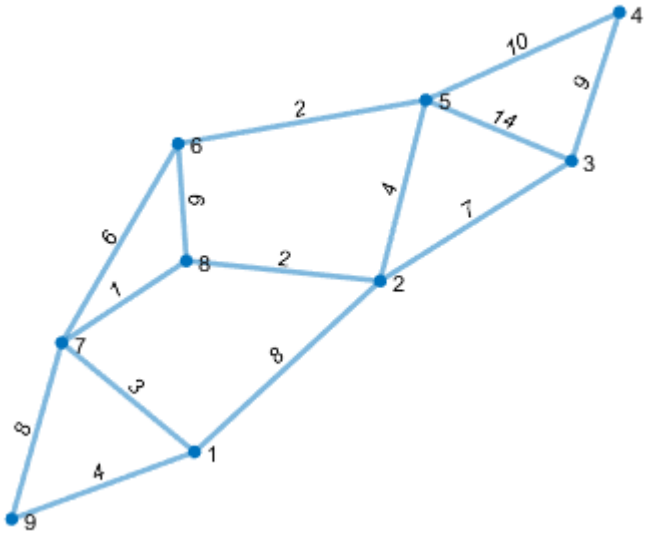


% 注意哦，Matlab中的图节点要从1开始编号，所以这里把0全部改为了9

% 编号最好是从1开始连续编号，不要自己随便定义编号

返回任意两点的距离矩阵

```
d = distances(G [,'Method',algorithm])
```



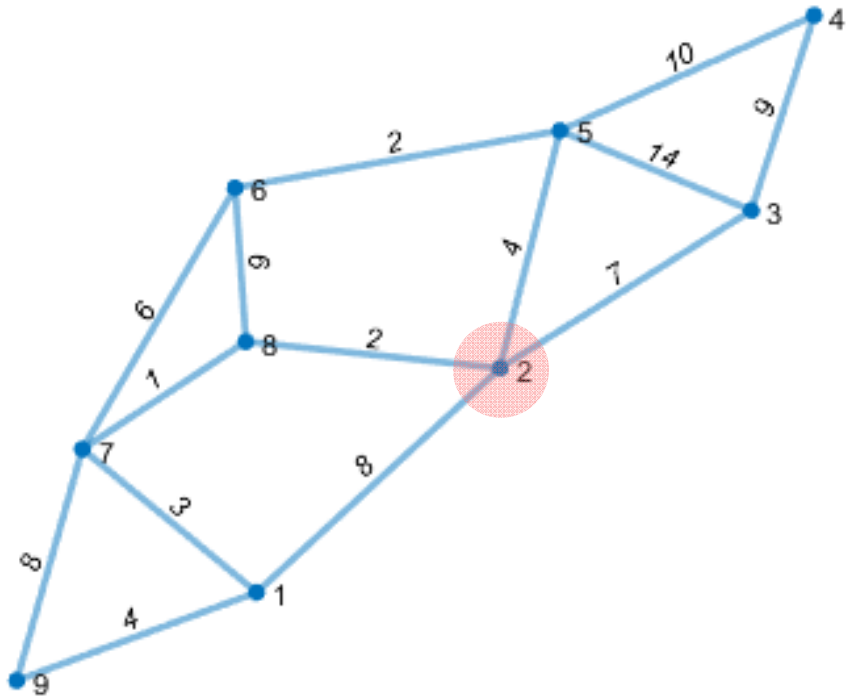

```
>> D = distances(G)

D =

     0     6    13    20    10     9     3     4     4
     6     0     7    14     4     6     3     2    10
    13     7     0     9    11    13    10     9    17
    20    14     9     0    10    12    17    16    24
    10     4    11    10     0     2     7     6    14
     9     6    13    12     2     0     6     6    13
     3     3    10    17     7     6     0     1     7
     4     2     9    16     6     6     1     0     8
     4    10    17    24    14    13     7     8     0
```

注意：该函数matlab2015b之后才有哦

找给定范围内所有的点

```
[nodeIDs,dist]  = nearest(G,s,d [,'Method',algorithm])
```

返回图形 G 中与节点 s 的距离在 d 之内的所有节点。
nodeIDs是符合条件的节点
Dist是这些节点与s的距离




```
>> [nodeIDs,dist] = nearest(G, 2, 10)

nodeIDs =

     8
     7
     5
     1
     6
     3
     9

dist =

     2
     3
     4
     6
     6
     7
    10
```

注意：该函数matlab2016a之后才有哦

课后作业

代码作业（选做）：

自己实现迪杰斯特拉算法，可定义一个函数。

```
[P,d] = Dijkstra(D,start,end)
```

输入参数：

（1）D是权重邻接矩阵

（2）start 起始的节点

（3）end 目标的节点

输出参数：

（1）P – 最短路径经过的节点

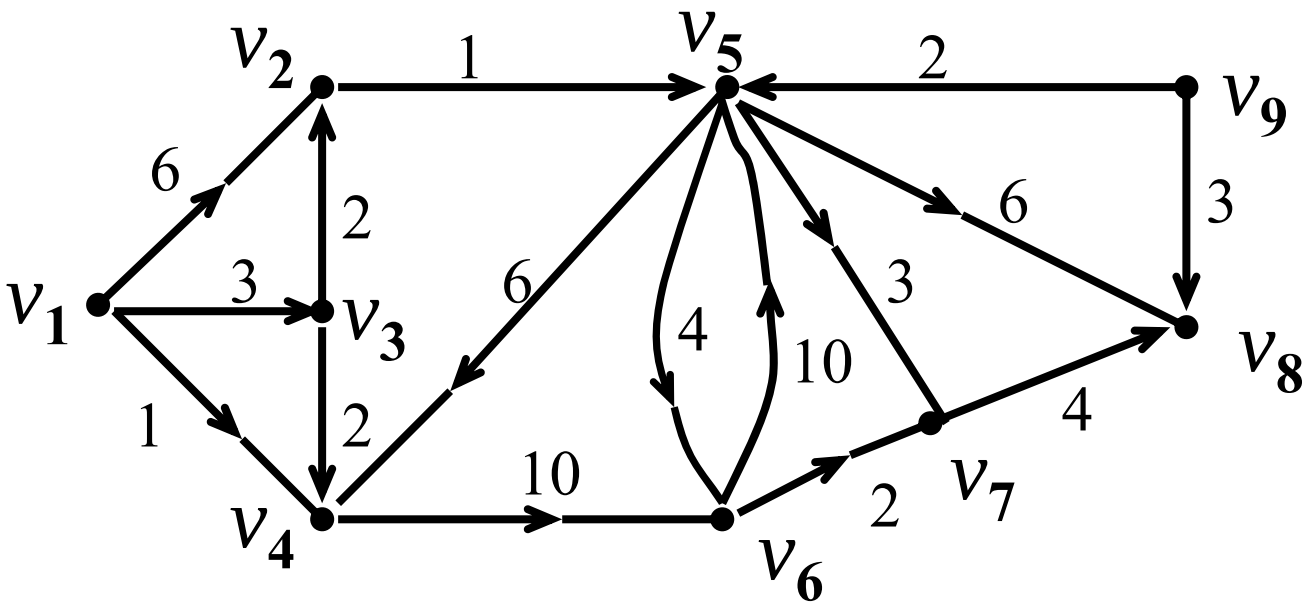
（2）d – 最短距离

注：迪杰斯特拉算法支持有向图和无向图，但是权重不能为负数。

课后作业

论文作业（提交时请附上单独的代码文件打包一起提交）

下图为单行线交通网，每弧旁的数字表示通过这条线所需的费用。现在某人要从v1出发，通过这个交通网到v8去，求使总费用最小的旅行路线。



答案：对应的最短距离为12，路径为：$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_5 \to v_8$