华北理工大学
NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

国家精品课程

数值计算方法

第二章

插值法

主讲教师：刘春凤

http://210.31.198.78/eol/jpk/course/welcome.jsp?courseId=1220

第二章 插值法

三、牛顿插值法

- 差商及其性质
- Newdon插值法的基本思路
- Newdon插值多项式的构造
- Newdon插值多项式余项
- 差分及其应用

差分

- 差分的概念
- 差分的性质
- 差分的计算
- 差分与差商的关系

差分的概念

h 称为步长

差分及其应用

设函数 $y = f(x)$ 在等距节点 $x_k = x_0 + kh\left(k = 0, 1, \cdots, n\right)$ 上的值 $f_k = f(x_k)$ 为已知。

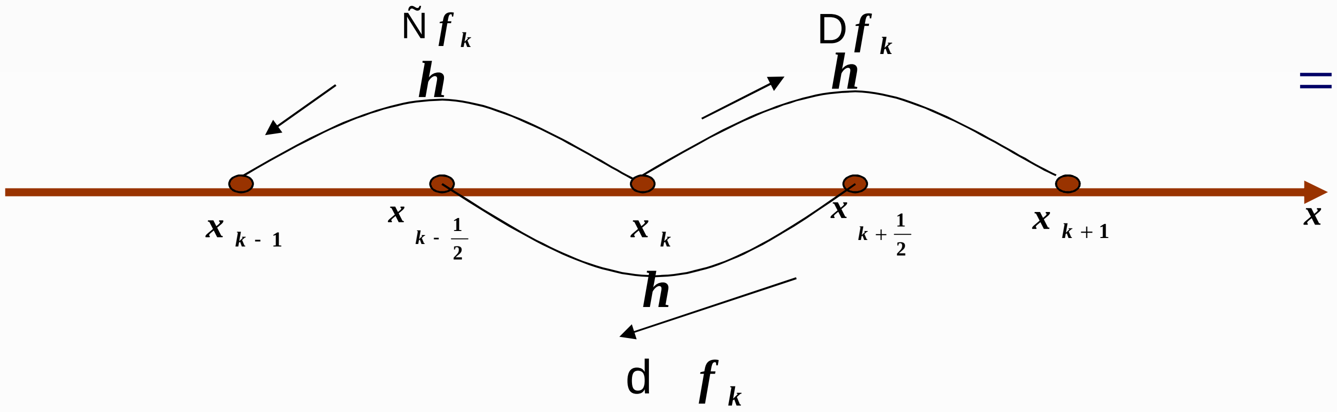
引入记号

（向前）F_差分　$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$

（向后）B_差分　$\nabla f_k = f_{k-1} - f_k$

（中心）C_差分　$\delta f_k = f(x_k + \frac{h}{2}) - f(x_k - \frac{h}{2})$

$= f_{k+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2}}$



差分的性质

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

差分及其应用

性质1 $f(x)=a\varphi(x)+b\psi(x) \Rightarrow \Delta^m f_k = a\Delta^m\varphi_k + b\Delta^m\psi_k$

性质2

$$\Delta^n f_k=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j f_{n+k-j}$$

性质3

$$f_{n+k}=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\Delta^j f_k$$

常用结论

$$\begin{cases}\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k=f_{k+2}-2f_{k+1}+f_k\\ \Delta^3 f_k=\Delta^2 f_{k+1}-\Delta^2 f_k=f_{k+3}-3f_{k+2}+3f_{k+1}-f_k\\ \nabla^2 f_k=\nabla f_k-\Delta f_{k-1}=f_k-2f_{k-1}+f_{k-2}\end{cases}$$

性质4

$$f[x_k,\cdots,x_{k+n}]=\frac{1}{n!}\frac{1}{h^n}\Delta^n f_k$$

差分的性质

差分与导数的关系

性质四的说明

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h},$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{\underbrace{x_{k+2} - x_k}_{2h}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{1}{2!h^2}\Delta^2 f_k,$$

又 $f[x_k, \ldots, x_{k+n}] = \frac{1}{n!}\frac{1}{h^n}\Delta^n f_k$

$$f[x_k, \ldots, x_{k+n}] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\therefore \quad \Delta^n f_k = h^n f^{(n)}(\xi),$$

$$\therefore \quad f^{(n)}(\xi) = \frac{\Delta^n f_k}{h^n}$$

等距节点的插值公式

F—差分表

x_k	f_k	Δf_k	$\Delta^2 f_k$	$\Delta^3 f_k$	$\Delta^4 f_k$	$\cdots$
x_0	$\boxed{f_0}$					
x_1	f_1	$\boxed{\Delta f_0}$				
x_2	f_2	Δf_1	$\boxed{\Delta^2 f_0}$			
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\boxed{\Delta^3 f_0}$		
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\boxed{\Delta^4 f_0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

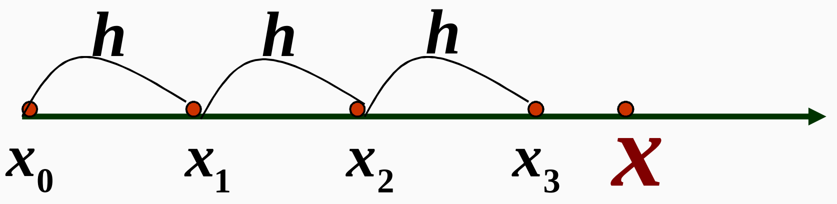
将 $f[x_k,\cdots,x_{k+n}] = \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{h^n}\Delta^n f_k$

代入牛顿插值公式：

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\omega_1(x) + \cdots + f[x_0,x_1,\cdots x_n]\omega_n(x)$$

$$= f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}\omega_1(x) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}\omega_2(x) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}\omega_n(x)$$

等距节点的插值公式



$$\omega_{n+1}(x)=\omega_{n+1}(x_0+th)=(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+(x-x_n)$$
$$=(t-0)h\times(t-1)h\times(t-2)h\times\ldots\times(t-n)h$$
$$=(t-0)(t-1)(t-2)\ldots(t-n)\times h^{n+1}$$

$$x=x_0+th$$
$$x_k=x_0+kh$$
$$x-x_k=(t-k)h$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1]\omega_1(x)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots x_n]\omega_n(x)$$

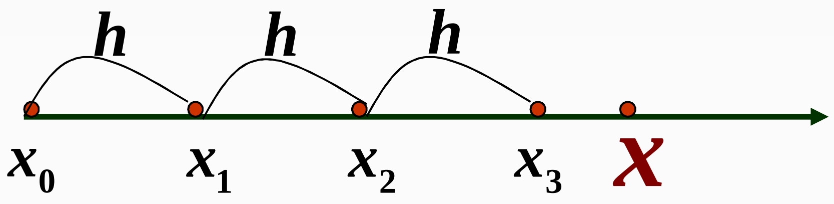
$$=f_0+\frac{\Delta f_0}{h}\omega_1(x)+\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}\omega_2(x)+\cdots+\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}\omega_n(x)$$

$$=f_0+\frac{\Delta f_0}{h}th+\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}t(t-1)h^2+\cdots+\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)\times h^n$$

$$=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

等距节点的插值公式

对于等距节点 $x = x_0 + th,$



牛顿F-插值公式可写成：

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$
$$= f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$x = x_0 + th$$
$$x_k = x_0 + kh$$
$$x - x_k = (t-k)h$$

其余项为:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+(x-x_n) = \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1} f^{n+1}(\xi)$$

$$|R_n(x)| \le \left|\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{(n+1)!}h^{n+1} M\right|$$

$$\xi \in (x_0, x_n)$$

差分的计算

B—差分表

x_k	f_k	∇f_k	$\nabla^2 f_k$	$\nabla^3 f_k$	$\nabla^4 f_k$	$\cdots$
x_0	f_0					
x_1	f_1	∇f_1				
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$			
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$		
x_4	$\boxed{f_4}$	$\boxed{\nabla f_4}$	$\boxed{\nabla^2 f_4}$	$\boxed{\nabla^3 f_4}$	$\boxed{\nabla^4 f_4}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

类似有牛顿 B-插值公式

$$N_n(x_0+th) = f_n + t\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots$$

$$+\frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

差分的计算

例2.4 已知$f(x)=\sin x$ 的函数表如下，分别用F-插值和B-插值公式求$\sin 0.57891$的近似值。

x	0.4	0.5	0.6	0.7
Sinx	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422

解析

x_i	$f_i=\sin x_i$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	基函数
0.4	$\boxed{0.38942}$				1
0.5	0.47943	$\boxed{0.09001}$			t
0.6	0.56464	0.08521	$\boxed{-0.00480}$		$\frac{t}{2}(t-1)$
0.7	0.64422	0.07958	-0.00563	$\boxed{-0.00083}$	$\frac{t}{3!}(t-1)(t-2)$
	1	t	$\frac{t}{2}(t+1)$	$\frac{t}{3!}(t+1)(t+2)$	

差分的计算

F—插值公式为

$$N_3(x_0+th)=0.38942+0.09001t-\frac{t(t-1)}{2!}\times 0.00480-\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\times 0.00083$$

$$t=\frac{x-x_0}{h}=(0.57891-0.4)/0.1=1.7891$$

$$\sin 0.57891\approx N_3(0.57891)=0.38942+0.09001\times 1.7891-\frac{1.7891\times 0.7891}{2}\times 0.00480$$

$$+\frac{1.7891\times 0.7891\times 0.2109}{6}\times 0.00083=0.54711$$

F—插值公式误差:

误差为

$$|R_3(0.57891)|=\left|\frac{(0.1)^4}{4!}\times 1.7891\times 0.7891\times(-0.2109)\times(-1.2109)\sin\xi\right|$$

$$<2\times 10^{-6}$$

差分的计算

B—插值公式为

$$N_3(x_4+th)=\boxed{0.64422}+0.\boxed{07958t}-\frac{t(t+1)}{2!}\times\boxed{0.00563}$$

$$-\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\times\boxed{0.00083}$$

$$t=\frac{x-x_4}{h}=\frac{0.57891-0.7}{0.1}=-1.2109$$

x_i	$f_i = \sin x_i$	一阶差分	二阶差分	三阶差分	
0.4	0.38942				1
0.5	0.47943	0.09001			t
0.6	0.56464	0.08521	-0.00480		$\frac{t}{2}(t-1)$
0.7	$\boxed{0.64422}$	$\boxed{0.07958}$	$\boxed{-0.00563}$	$\boxed{-0.00083}$	$\frac{t}{3!}(t-1)(t-2)$
	1	t	$\frac{t}{2}(t+1)$	$\frac{t}{3!}(t+1)(t+2)$	

差分的计算

$$\sin 0.57891 \approx 0.64422 - 0.07958 \times 1.2109$$

$$- \frac{(-1.2109) \times (-0.2109)}{2} \times 0.00563$$

$$- \frac{(-1.2109) \times (-0.2109) \times 0.7891}{6} \times 0.00083 = 0.54711$$

【注意】

当插值点x接近数据表头时，一般用向前插值公式，

而当插值点x接近数据表尾时，则采用向后插值公式。

華北理工大學

2018.7