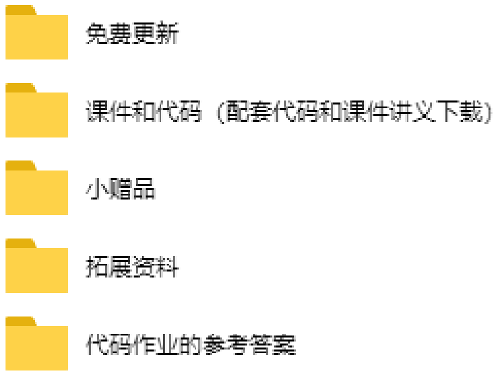
温馨提示

（1）视频中提到的附件可在**售后群的群文件**中下载。

包括**讲义、代码、优秀的作业、我视频中推荐的资料**等。



（2）关注我的**微信公众号《数学建模学习交流》**，后台发送**"软件"**两个字，可获得常见的建模软件下载方法；发送**"数据"**两个字，可获得建模数据的获取方法；发送**"画图"**两个字，可获得数学建模中常见的画图方法。另外，也可以看看公众号的历史文章，里面发布的都是对大家有帮助的技巧。

（3）**购买更多优质精选的数学建模资料**，可关注我的微信公众号《数学建模学习交流》，在后台发送**"买"**这个字即可进入店铺进行购买。

（4）视频价格不贵，但价值很高。单人购买观看只需要**58元**，和另外两名队友一起购买人均仅需**46元**，视频本身也是下载到本地观看的，所以请大家**不要侵犯知识产权**，对视频或者资料进行二次销售。

第九讲:分类模型

本讲将介绍分类模型。对于二分类模型，我们将介绍逻辑回归(logistic regression)和Fisher线性判别分析两种分类算法；对于多分类模型，我们将简单介绍Spss中的多分类线性判别分析和多分类逻辑回归的操作步骤。

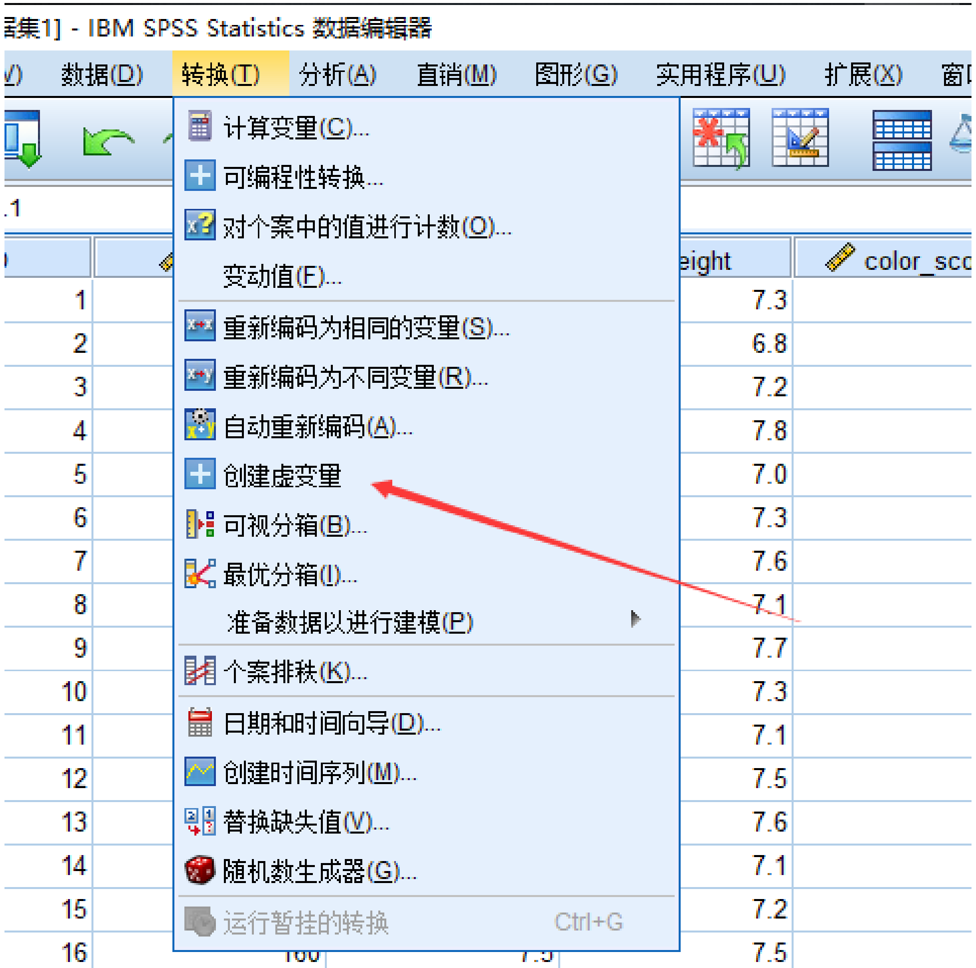
水果分类的例子

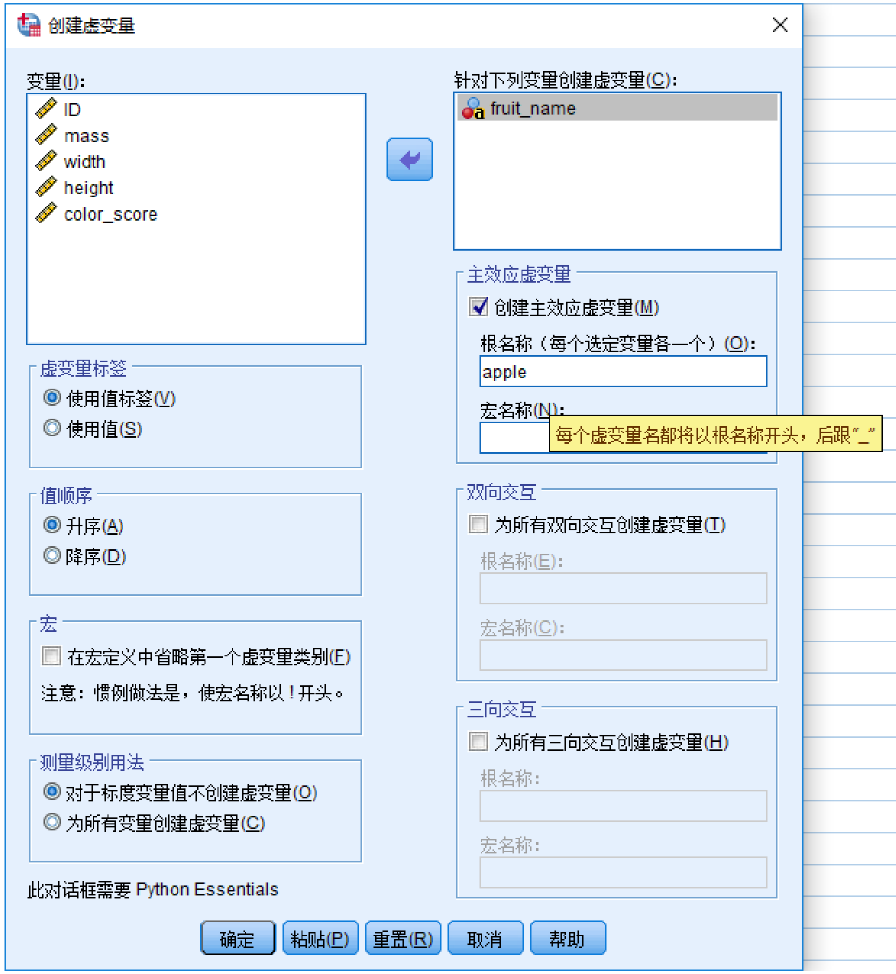
根据水果的属性，判断该水果的种类。

mass: 水果重量
width: 水果的宽度
height: 水果的高度
color_score: 水果的颜色数值，范围0-1
fruit_name：水果类别

前19个样本是苹果
后19个样本是橙子
用这38个样本预测后四个样本对应的水果种类。

数据预处理：生成虚拟变量





逻辑回归logistic regression

类型	模型	Y的特点	例子
线性回归	OLS、GLS（最小二乘）	连续数值型变量	GDP、产量、收入
0-1回归	logistic回归	二值变量（0-1）	是否违约、是否得病
定序回归	probit定序回归	定序变量	等级评定（优良差）
计数回归	泊松回归（泊松分布）	计数变量	每分钟车流量
生存回归	Cox等比例风险回归	生存变量（截断数据）	企业、产品的寿命

对于因变量为分类变量的情况，我们可以使用逻辑回归进行处理。
把y看成事件发生的概率，$y \geq 0.5$表示发生；$y < 0.5$表示不发生

线性概率模型

线性概率模型（Linear Probability Model，简记LPM）

直接用原来的回归模型进行回归。

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \mu_i$$

写成向量乘积形式：$y_i = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$

内生性问题：y_i只能取0或者1（回归系数估计出来不一致且有偏）

$$u_i = \begin{cases} 1 - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} & , \ y_i = 1 \\ -\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} & , \ y_i = 0 \end{cases}$$

显然$cov(x_i, u_i) \neq 0$

$$\widehat{y_i} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} x_{1i} + \widehat{\beta_2} x_{2i} + \cdots + \widehat{\beta_k} x_{ki}$$

预测值却可能出现$\widehat{y_i} > 1$或者$\widehat{y_i} < 0$的不现实情况

两点分布（伯努利分布）

事件	1	0
概率	p	1-p

在给定$\boldsymbol{x}$的情况下，考虑y的两点分布概率

$$\begin{cases} P(y=1|\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \\ P(y=0|\boldsymbol{x})=1-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \end{cases}$$

注：一般$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})=F(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})$

$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$称为连接函数($link\ function$),它将解释变量$x$和被解释变量$y$连接起来。

我们只需要保证$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$是定义在$[0,1]$上的函数，就能保证$0\leq\hat{y}\leq1$

注意：这里的定义不要理解为定义域，要理解为$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$的值域是$[0,1]$

因为$E(y|\boldsymbol{x})=1\times P(y=1|\boldsymbol{x})+0\times P(y=0|\boldsymbol{x})=P(y=1|\boldsymbol{x})$

所以我们可以将$\hat{y}$可以理解为'$y=1$'发生的概率。

连接函数的取法

$$\begin{cases} P(y=1|\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \\ P(y=0|\boldsymbol{x}) = 1-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \end{cases}$$

$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$是定义在$[0,1]$上的函数

(1)$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$可以取为标准正态分布的累积密度函数($cdf$):

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) = \Phi(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

（$probit$回归）

(2)$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})$可以取为$Sigmoid$函数:

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \frac{\exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})}$$

（$logistic$回归）

由于后者有解析表达式（而标准正态分布的cdf没有），所以计算logistic模型比probit模型更为方便。

数学建模学习交流

函数图像对比

probit_logistic_figure.m

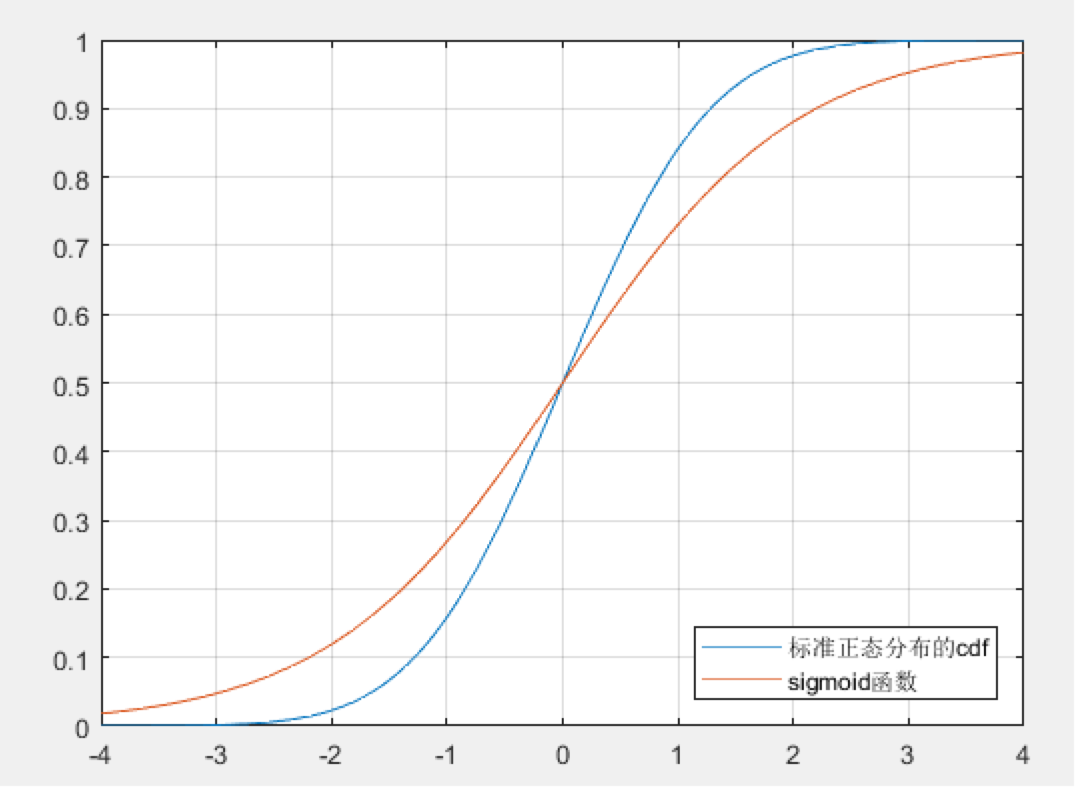
```
f1=@(x) normcdf(x);  % 标准正态分布的累积密度函数
fplot(f1, [-4,4]);  % 在-4到4上画出匿名函数的图形
hold on;
grid on;
f2=@(x) exp(x)/(1+exp(x));
fplot(f2, [-4,4]);
legend('标准正态分布的cdf','sigmoid函数','location','SouthEast')
```

标准正态分布的累积密度函数(cdf):

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$Sigmoid$函数:

$$S(x)=\frac{\exp(x)}{1+\exp(x)}$$



怎么求解?

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta})=S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})=\frac{\exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{1+\exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})}$$

非线性模型，使用极大似然估计方法（MLE）进行估计

$$\begin{cases} P(y=1|\boldsymbol{x})=S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \\ P(y=0|\boldsymbol{x})=1-S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \end{cases} \Rightarrow f(y_i|\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{\beta})=\begin{cases} S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}) & ,\ y_i=1 \\ 1-S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}), & y_i=0 \end{cases}$$

写成更加紧凑的形式：

$$f(y_i|\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{\beta})=[S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^{y_i}[1-S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})]^{1-y_i}$$

取对数：$\ln f(y_i|\boldsymbol{x_i},\boldsymbol{\beta})=y_i[S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})]+(1-y_i)[1-S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})]$

样本的对数似然函数：$\ln L(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i\ln[S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})] + \sum_{i=1}^{n}(1-y_i)[1-S(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})]]$

可以使用数值方法（梯度下降）求解这个非线性最大化的问题。

逻辑回归的推导：https://www.bilibili.com/video/av44798895/?p=45
极大使然估计：大家可参考概率论与数理统计的教材，或搜索相应视频学习

怎么用于分类?

在给定$\boldsymbol{x}$的情况下，考虑y的两点分布概率

$$\begin{cases} P(y=1|\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \\ P(y=0|\boldsymbol{x})=1-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\beta}) \end{cases}$$

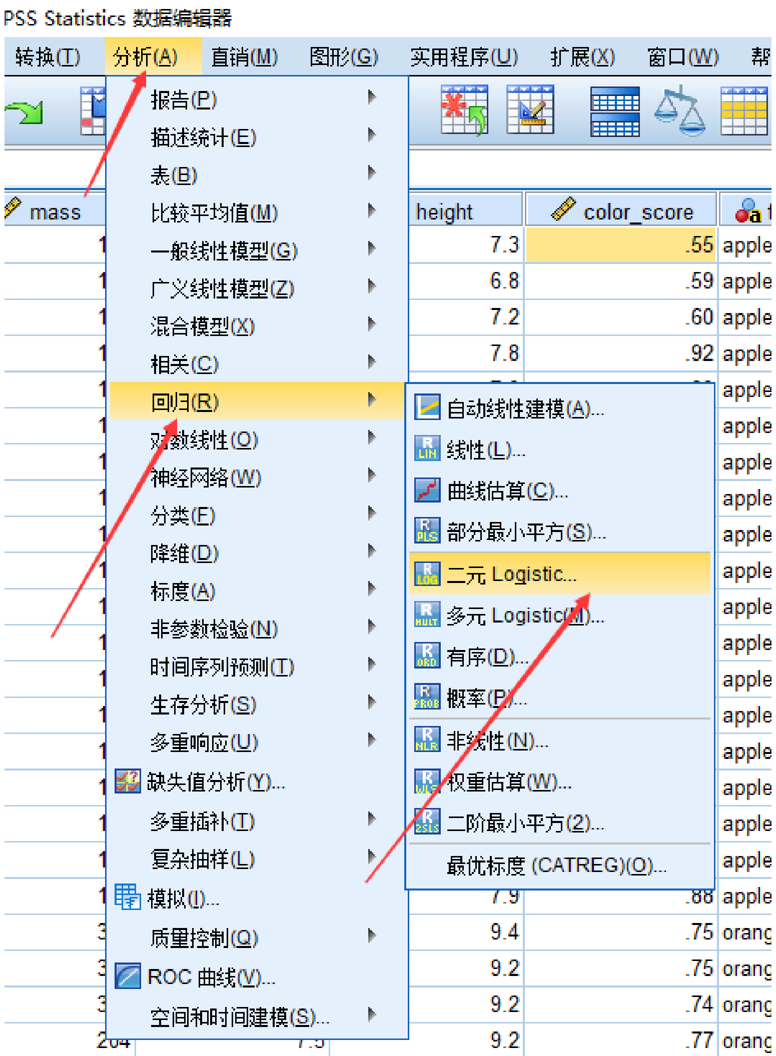
因为$E(y|\boldsymbol{x})=1\times P(y=1|\boldsymbol{x})+0\times P(y=0|\boldsymbol{x})=P(y=1|\boldsymbol{x})$

所以我们可以将$\widehat{y}$可以理解为‘$y=1$’发生的概率。

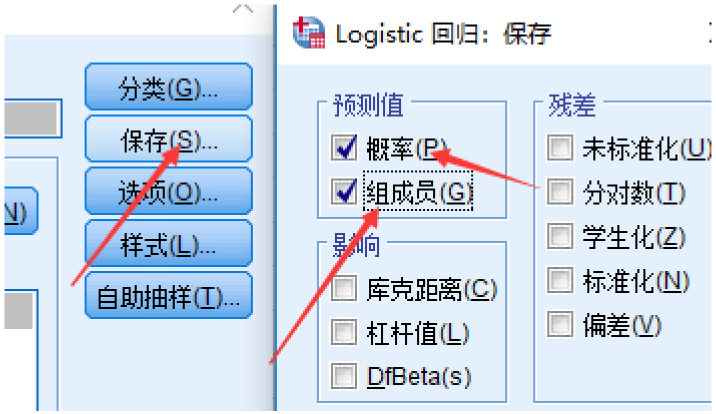
$$\widehat{y_i}=P(y_i=1|\boldsymbol{x})=S(\boldsymbol{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}})=\frac{\exp(\boldsymbol{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}})}{1+\exp(\boldsymbol{x}_i'\widehat{\boldsymbol{\beta}})}=\frac{e^{\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_{1i}+\widehat{\beta_2}x_{2i}+\cdots+\widehat{\beta_k}x_{ki}}}{1+e^{\widehat{\beta_0}+\widehat{\beta_1}x_{1i}+\widehat{\beta_2}x_{2i}+\cdots+\widehat{\beta_k}x_{ki}}}$$

如果$\widehat{y_i}\geq 0.5$，则认为其预测的$y=1$;否则则认为其预测的$y=0$

Spss求解逻辑回归


PSS Statistics 数据编辑器
转换(T) 分析(A) 直销(M) 图形(G) 实用程序(U) 扩展(X) 窗口(W) 帮
报告(P)
描述统计(E)
表(B)
比较平均值(M)
一般线性模型(G)
广义线性模型(Z)
混合模型(X)
相关(C)
回归(R)
对数线性(O)
神经网络(W)
分类(F)
降维(D)
标度(A)
非参数检验(N)
时间序列预测(T)
生存分析(S)
多重响应(U)
缺失值分析(Y)...
多重插补(T)
复杂抽样(L)
模拟(I)...
质量控制(Q)
ROC 曲线(V)...
空间和时间建模(S)...
自动线性建模(A)...
线性(L)...
曲线估算(C)...
部分最小平方(S)...
二元 Logistic...
多元 Logistic(M)...
有序(D)...
概率(P)...
非线性(N)...
权重估算(W)...
二阶最小平方(2)...
最优标度 (CATREG)(O)...
mass
height
color_score


因变量(D):
fruit_name=apple [isapple]
块(B)1 / 1
上一个(V)
下一个(N)
协变量(C):
mass
width
height
color_score
>a*b>
方法(M):
输入
选择变量(B):
规则(U)...


分类(G)...
保存(S)...
选项(O)...
样式(L)...
自助抽样(T)...
Logistic 回归：保存
预测值
概率(P)
组成员(G)
影响
库克距离(C)
杠杆值(L)
DfBeta(s)
残差
未标准化(U)
分对数(T)
学生化(Z)
标准化(N)
偏差(V)

预测成功率

分类表[a]

	实测		预测 fruit_name=apple .00	预测 fruit_name=apple 1.00	正确百分比
步骤 1	fruit_name=apple	.00	15	4	78.9
		1.00	5	14	73.7
	总体百分比				76.3

a. 分界值为 .500

19个苹果样本中，预测出来为苹果的有14个，预测出来的正确率为73.7%;
19个橙子样本中，预测出来为橙子的有15个，预测出来的正确率为78.9%;
对于整个样本，逻辑回归的预测成功率为76.3%.

逻辑回归系数表

方程中的变量

		B	标准误差	瓦尔德	自由度	显著性	Exp(B)
步骤 1[a]	mass	-.024	.024	.965	1	.326	.977
	width	4.307	1.844	5.452	1	.020	74.199
	height	-3.750	1.641	5.224	1	.022	.024
	color_score	9.891	5.746	2.964	1	.085	19758.273
	常量	-7.202	14.503	.247	1	.620	.001

a. 在步骤 1 输入的变量：mass, width, height, color_score。

注意:上面表格中的回归系数保留了小数点后三位，可点进去看更加精确的数据。

$$\hat{y}_i = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}}}$$

$$\hat{y}_i = \frac{e^{-7.202 - 0.024 mass + 4.307 width - 3.75 height + 9.891 color\_score}}{1 + e^{-7.202 - 0.024 mass + 4.307 width - 3.75 height + 9.891 color\_score}}$$

如果$\hat{y}_i \geq 0.5$，则认为其预测的是苹果;否则则认为其预测的是橙子。

数学建模学习交流

表格中新添的两列解读

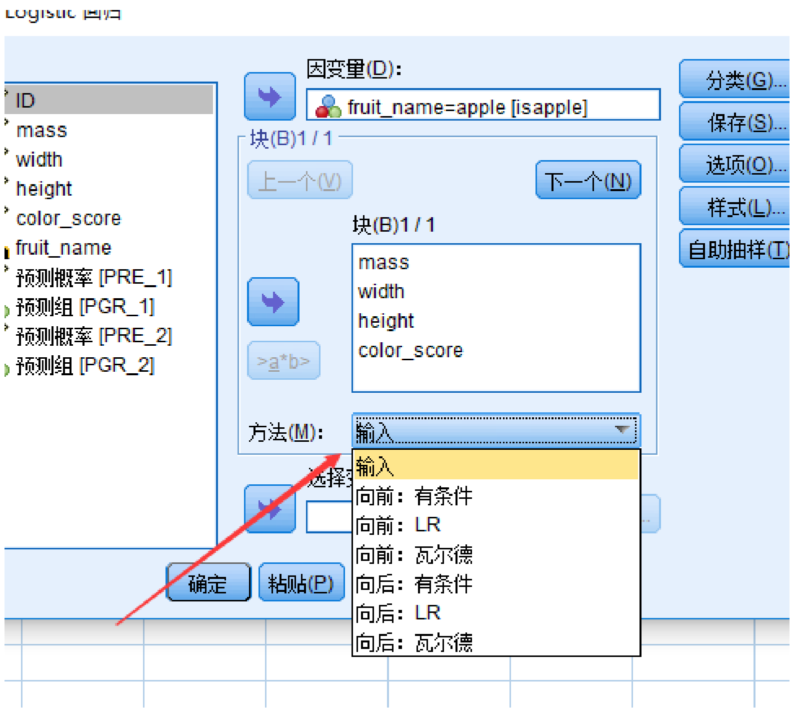
ID	mass	width	height	color_score	fruit_name	isapple	PRE_1	PGR_1	变量
1	192	8.4	7.3	.55	apple	1.00	.92283	1.00	
2	180	8.0	6.8	.59	apple	1.00	.96492	1.00	
3	176	7.4	7.2	.60	apple	1.00	.35993	.00	
4	178	7.1	7.8	.92	apple	1.00	.26898	.00	
5	172	7.4	7.0	.89	apple	1.00	.95843	1.00	
6	166	6.9	7.3	.93	apple	1.00	.59813	1.00	
7	172	7.1	7.6	.92	apple	1.00	.47319	.00	
8	154	7.0	7.1	.88	apple	1.00	.79718	1.00	
9	164	7.3	7.7	.70	apple	1.00	.16700	.00	
10	152	7.6	7.3	.69	apple	1.00	.79755	1.00	
11	156	7.7	7.1	.69	apple	1.00	.92105	1.00	
12	156	7.6	7.5	.67	apple	1.00	.58134	1.00	
13	168	7.5	7.6	.73	apple	1.00	.45786	.00	
14	162	7.5	7.1	.83	apple	1.00	.94467	1.00	
15	162	7.4	7.2	.85	apple	1.00	.90289	1.00	
16	160	7.5	7.5	.86	apple	1.00	.84316	1.00	
17	156	7.4	7.4	.84	apple	1.00	.82104	1.00	
18	140	7.3	7.1	.87	apple	1.00	.94757	1.00	

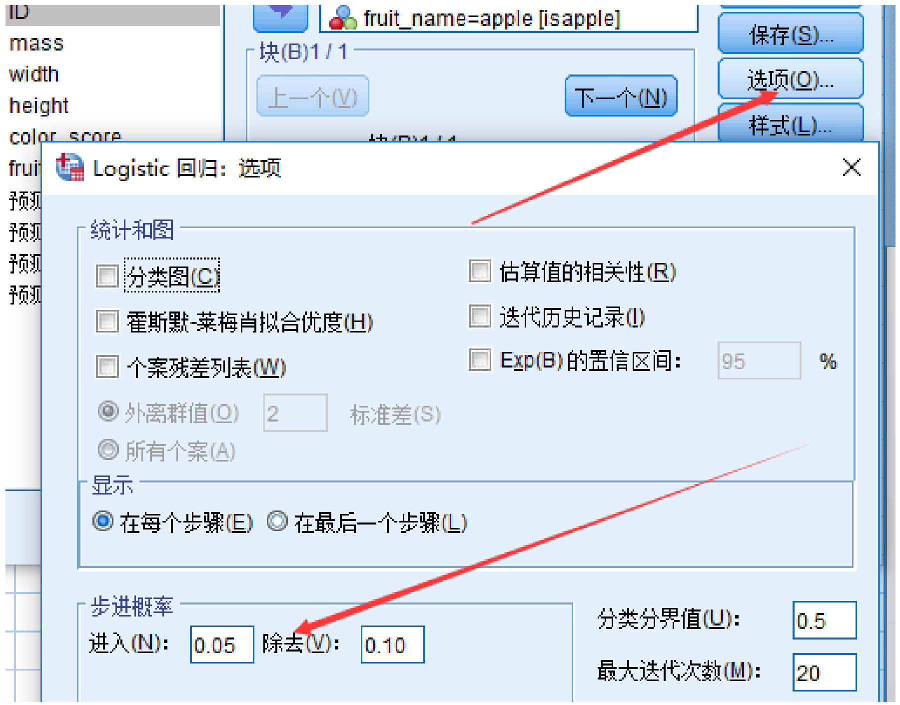
y_hat

预测的类别

$$\frac{e^{-7.201568-0.0237544\times192+4.306753\times8.4-3.749733\times7.3+9.891328\times0.55}}{1+e^{-7.201568-0.0237544\times192+4.306753\times8.4-3.749733\times7.3+9.891328\times0.55}}=0.922834$$

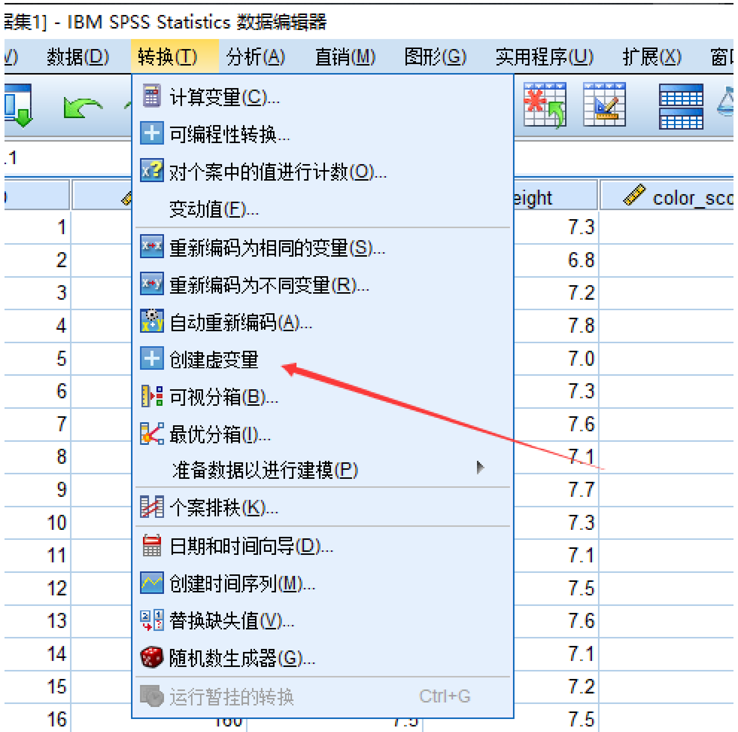
逐步回归的设置

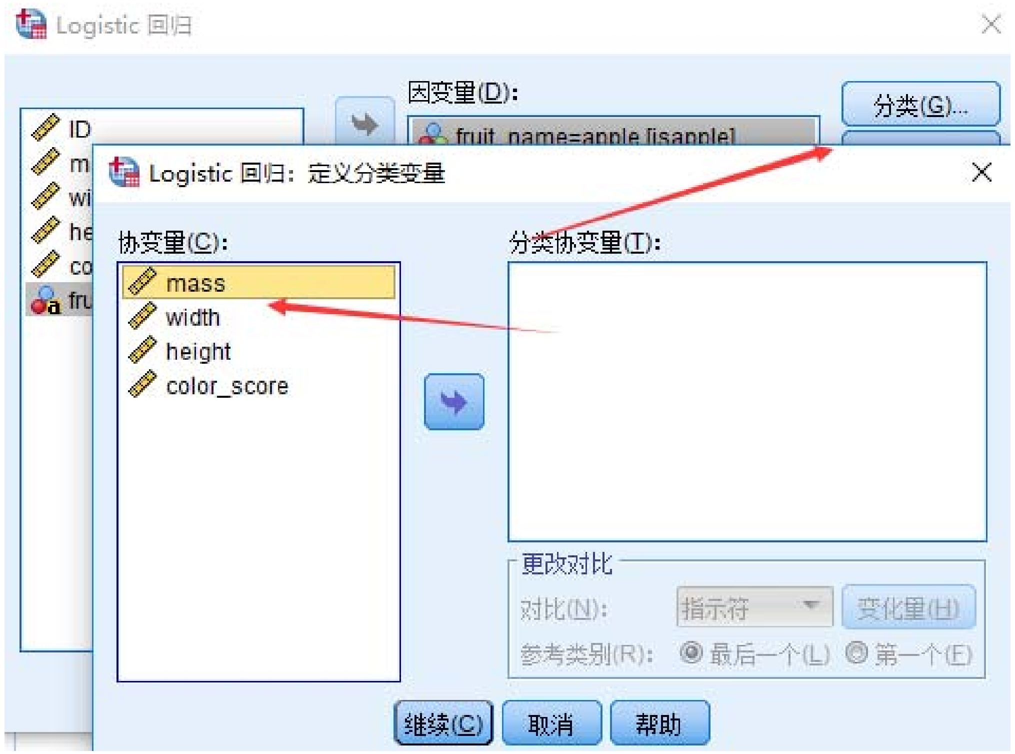




向前（向后）逐步回归可选择的统计量有所区别。
进入（或者除去）自变量的显著性水平可以自己调节。

假如自变量有分类变量怎么办?





两种方法

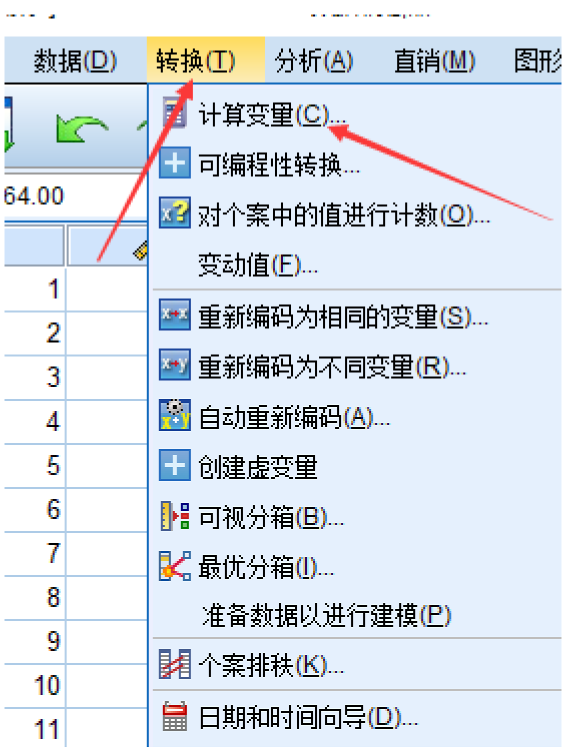
（1）先创建虚拟变量，然后删除任意一列以排除完全多重共线性的影响；

（2）直接点击分类，然后定义分类协变量，Spss会自动帮我们生成。

（如果没有生成虚拟变量这个选项，则说明SPSS没有安装到默认位置）

预测结果较差怎么办?

可在logistic回归模型中加入平方项、交互项等。



数学建模学习交流

加入了平方项后的结果

分类表[a]

实测			预测 fruit_name=apple .00	预测 fruit_name=apple 1.00	正确百分比
步骤 1	fruit_name=apple	.00	19	0	100.0
		1.00	0	19	100.0
	总体百分比				100.0

a. 分界值为 .500

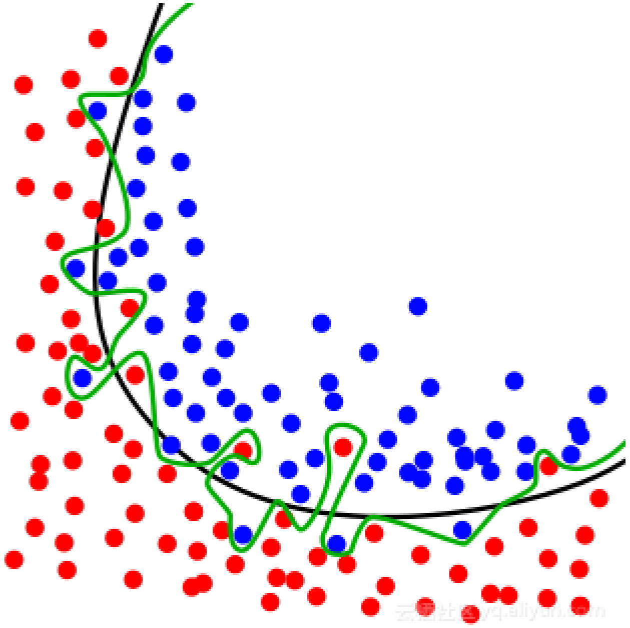
方程中的变量

		B	标准误差	瓦尔德	自由度	显著性	Exp(B)
步骤 1[a]	mass	-11.258	4914.503	.000	1	.998	.000
	width	5272.822	3345761.455	.000	1	.999	.
	height	678.860	1139320.490	.000	1	1.000	6.683E+294
	color_score	-18786.133	3023120.896	.000	1	.995	.000
	mass2	.035	15.039	.000	1	.998	1.035
	width2	-353.067	228243.987	.000	1	.999	.000
	height2	-49.685	76875.991	.000	1	.999	.000
	color_score2	11890.132	1906867.598	.000	1	.995	.
	常量	-13667.353	8106658.615	.000	1	.999	.000

a. 在步骤 1 输入的变量：mass, width, height, color_score, mass2, width2, height2, color_score2。

PRE_1	PGR_1
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
1.00000	1.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00
.00000	.00

过拟合现象



虽然预测能力提高了，但是容易发生过拟合的现象。

对于样本数据的预测非常好，但是对于样本外的数据的预测效果可能会很差。

(是不是和龙格现象有点相似)

如何确定合适的模型

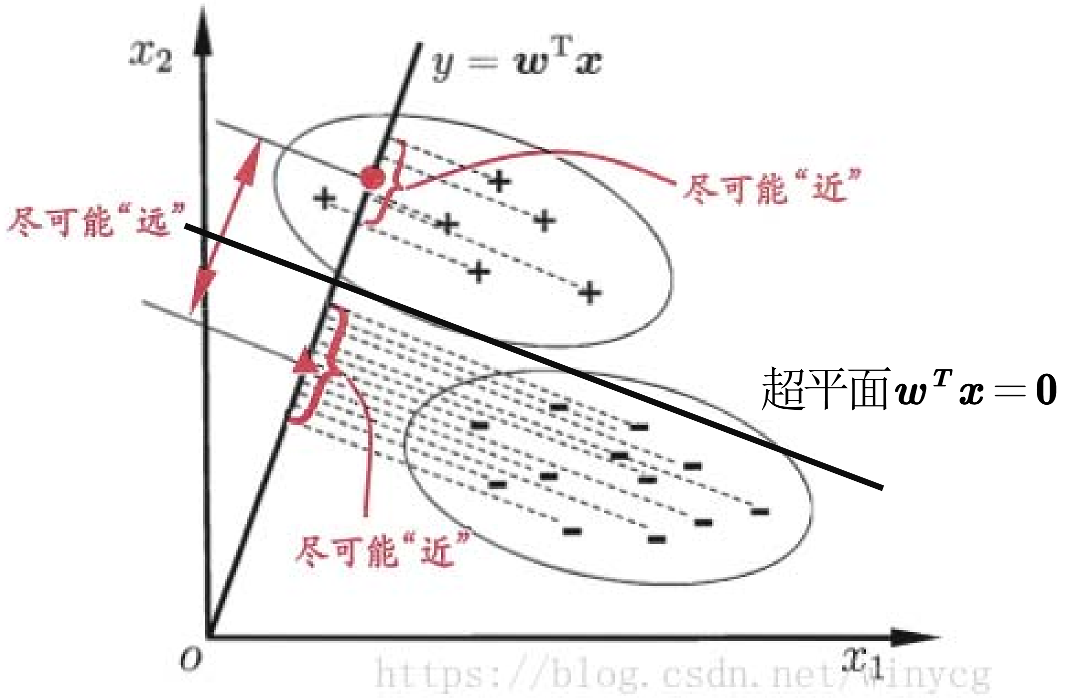
把数据分为**训练组**和**测试组**，用训练组的数据来估计出模型，再用测试组的数据来进行测试。（训练组和测试组的比例一般设置为80%和20%)

已知分类结果的水果ID为1-38，前19个为苹果，后19个为橙子。
每类水果中随机抽出3个ID作为测试组，剩下的16个ID作为训练组。
（比如：17-19、36-38这六个样本作为测试组）
比较设置不同的自变量后的模型对于测试组的预测效果。

（注意：为了消除偶然性的影响，可以对上述步骤多重复几次，最终对每个模型求一个平均的准确率，这个步骤称为交叉验证。）

Fisher线性判别分析

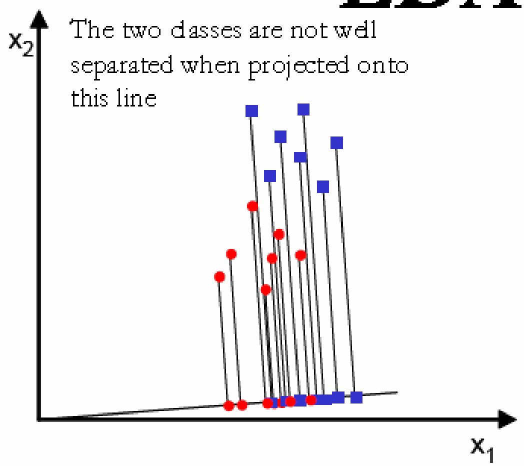
LDA(Linear Discriminant Analysis)是一种经典的线性判别方法，又称Fisher判别分析。该方法思想比较简单:给定训练集样例，设法将样例投影到一维的直线上，使得同类样例的投影点尽可能接近和密集，异类投影点尽可能远离。

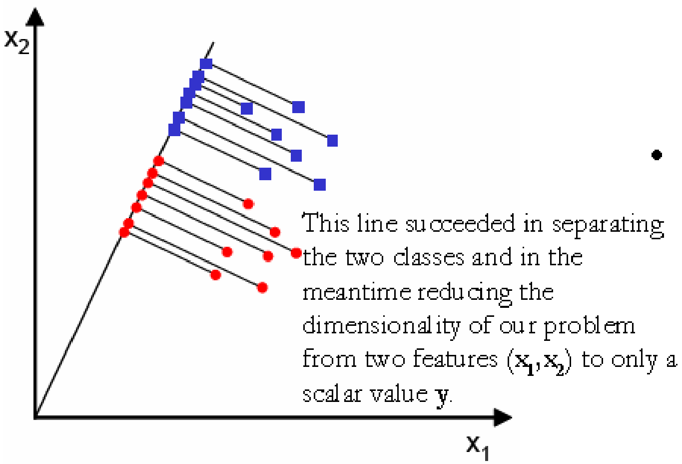


详细证明和求解步骤：https://www.bilibili.com/video/av33101528/?p=3

核心问题：找到线性系数向量ω

LDA … Two Classes





- Assume we have *m*-dimensional samples $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$, N_1 of which belong to ω_1 and N_2 belong to ω_2.
- We seek to obtain a scalar **y** by projecting the samples **x** onto a line (C-1 space, C = 2).

$$y = w^T x \quad \text{where} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ w_m \end{bmatrix}$$

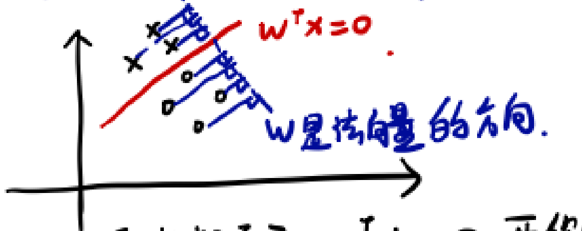
- Of all the possible lines we would like to select the one that maximizes the separability of the scalars.

我自己的笔记

② Fisher 线性分类 linear classification.

P维 → 1维

思想:



将所有的点分隔在超平面 $w^Tx=0$ 两侧 ⟺ 将每个点投影到 w这个法向量上，保证:

类内小，类间大.（高内聚，松耦合）.

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T = \begin{pmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{pmatrix}_{N\times p} \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}_{N\times 1}$$

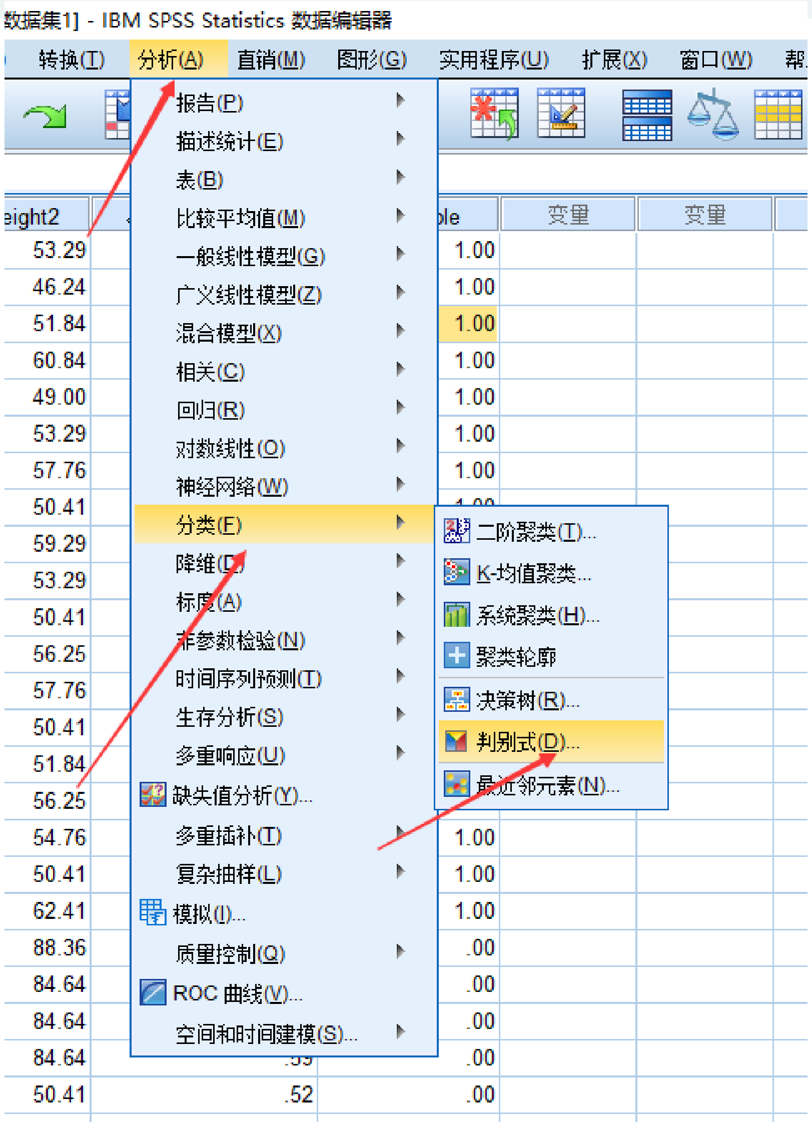
$$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N},\quad x_i\in R^p,\quad y_i\in\{\overset{C_1}{+1}, \overset{C_2}{-1}\}$$

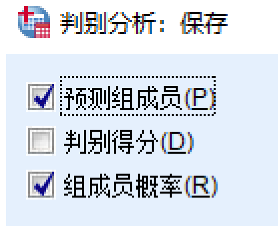
$$X_{c_1}=\{x_i \mid y_i=+1\} \qquad X_{c_2}=\{x_i \mid y_i=-1\}$$

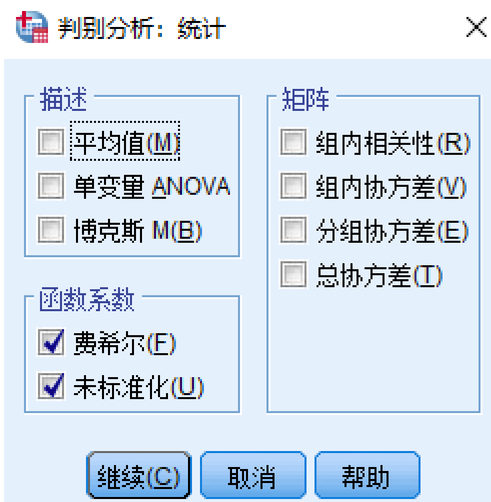
$$|X_{c_1}|=N_1,\quad |X_{c_2}|=N_2 \quad 且\ N_1+N_2=N$$

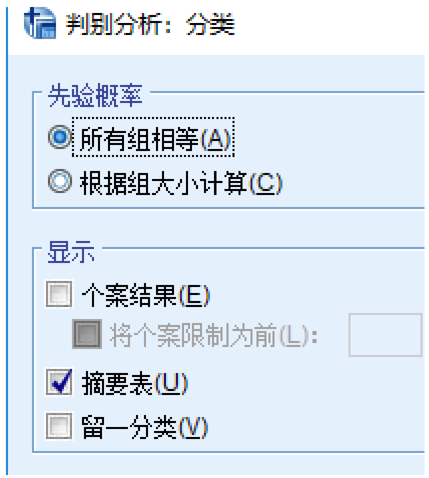
本节拓展资料：白板机器学习：线性分类 .pdf

Spss操作









数学建模学习交流

结果分析

典则判别函数系数

	函数
	1
mass	-.021
width	3.012
height	-1.894
color_score	6.915
(常量)	-9.732

未标准化系数

线性系数向量ω

isapple	Dis_1	Dis1_1	Dis2_1
1.00	1.00	.09397	.90603
1.00	1.00	.06420	.93580
1.00	.00	.72767	.27233
1.00	.00	.68654	.31346
1.00	1.00	.05913	.94087
1.00	1.00	.44293	.55707
1.00	.00	.50406	.49594
1.00	1.00	.24571	.75429
1.00	.00	.80899	.19101
1.00	1.00	.20434	.79566
1.00	1.00	.09415	.90585
1.00	1.00	.39039	.60961
1.00	.00	.51349	.48651
1.00	1.00	.06740	.93260
1.00	1.00	.10985	.89015
1.00	1.00	.13519	.86481
1.00	1.00	.16740	.83260

真实的类别

预测的类别

属于0的概率

属于1的概率

分类函数系数

	fruit_name=apple	
	.00	1.00
mass	-1.843	-1.875
width	144.004	148.579
height	48.493	45.616
color_score	310.325	320.829
(常量)	-678.418	-693.201

费希尔线性判别函数

贝叶斯判别函数系数表，将样品的各参数带入2个贝叶斯判别函数，比较得出的函数值，哪个函数值较大就将该样品归于哪一类。

多分类问题

现在水果的类别一共有四种，其四个指标的平均值如下表所示：

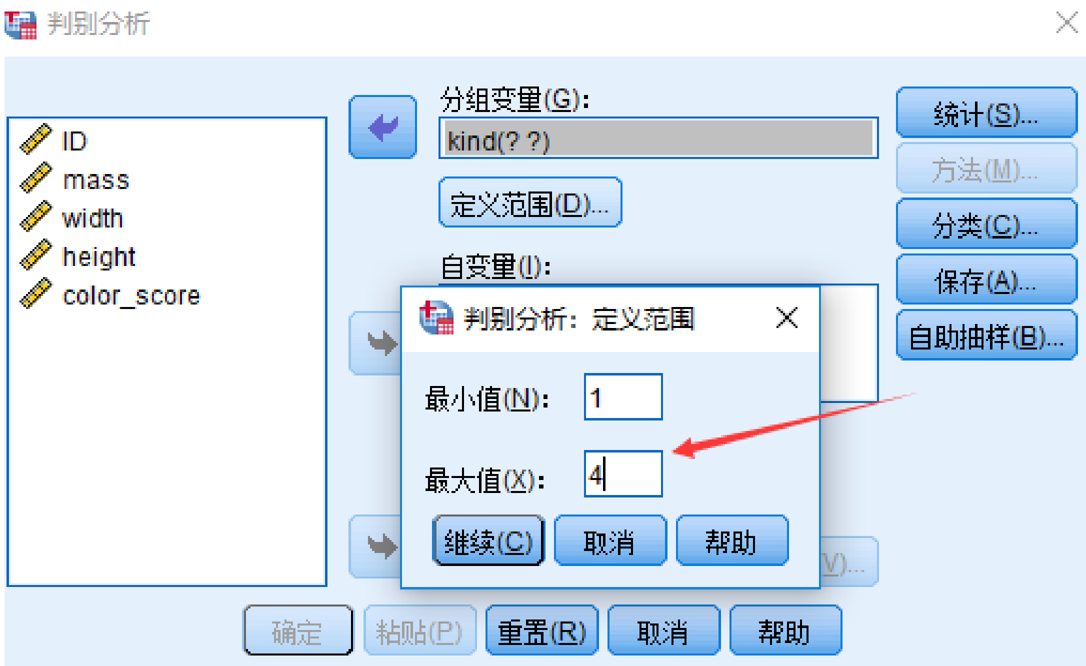
	平均值项：mass	平均值项：width	平均值项：height	平均值项：color_score	样本数
apple	165	7.46	7.34	0.78	19
lemon	150	6.51	8.86	0.72	16
mandarin（橘子）	81	5.94	4.38	0.80	5
orange	194	7.56	7.94	0.77	19

问题：对ID为60-67的八个水果进行归类。

Fisher判别分析可用于多分类

https://blog.csdn.net/z962013489/article/details/79918758

水果	Apple	Lemon	Mandarin	Orange
符号	1	2	3	4



Fisher判别分析多分类的结果

kind	Dis_1	Dis1_1	Dis2_1	Dis3_1	Dis4_1
1	1	.92017	.00000	.07982	.00000
1	1	.91184	.00000	.08777	.00039
1	3	.14636	.00001	.85360	.00002
1	3	.29593	.00000	.70407	.00000
1	1	.93223	.00000	.06747	.00030
1	3	.45789	.00000	.54205	.00006
1	3	.47531	.00000	.52469	.00000
1	1	.70574	.00000	.29418	.00008
1	3	.17820	.00004	.82176	.00000
1	1	.84030	.00000	.15970	.00000
1	1	.92277	.00000	.07723	.00000
1	1	.67779	.00000	.32221	.00000
1	1	.51248	.00000	.48752	.00000
1	1	.94092	.00000	.05906	.00002
1	1	.90115	.00000	.09884	.00001
1	1	.91503	.00000	.08497	.00000
1	1	.87692	.00000	.12308	.00000
1	1	.96396	.00000	.03604	.00000
1	1	.85819	.00000	.14181	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	.99922	.00078	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	.99998	.00002	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	1.00000	.00000	.00000
2	2	.00000	.99917	.00083	.00000

分类结果[a]

			预测组成员信息				
		kind	1	2	3	4	总计
原始	计数	1	14	0	5	0	19
		2	0	16	0	0	16
		3	4	1	14	0	19
		4	0	0	0	5	5
		未分组个案	2	1	4	1	8
	%	1	73.7	.0	26.3	.0	100.0
		2	.0	100.0	.0	.0	100.0
		3	21.1	5.3	73.7	.0	100.0
		4	.0	.0	.0	100.0	100.0
		未分组个案	25.0	12.5	50.0	12.5	100.0

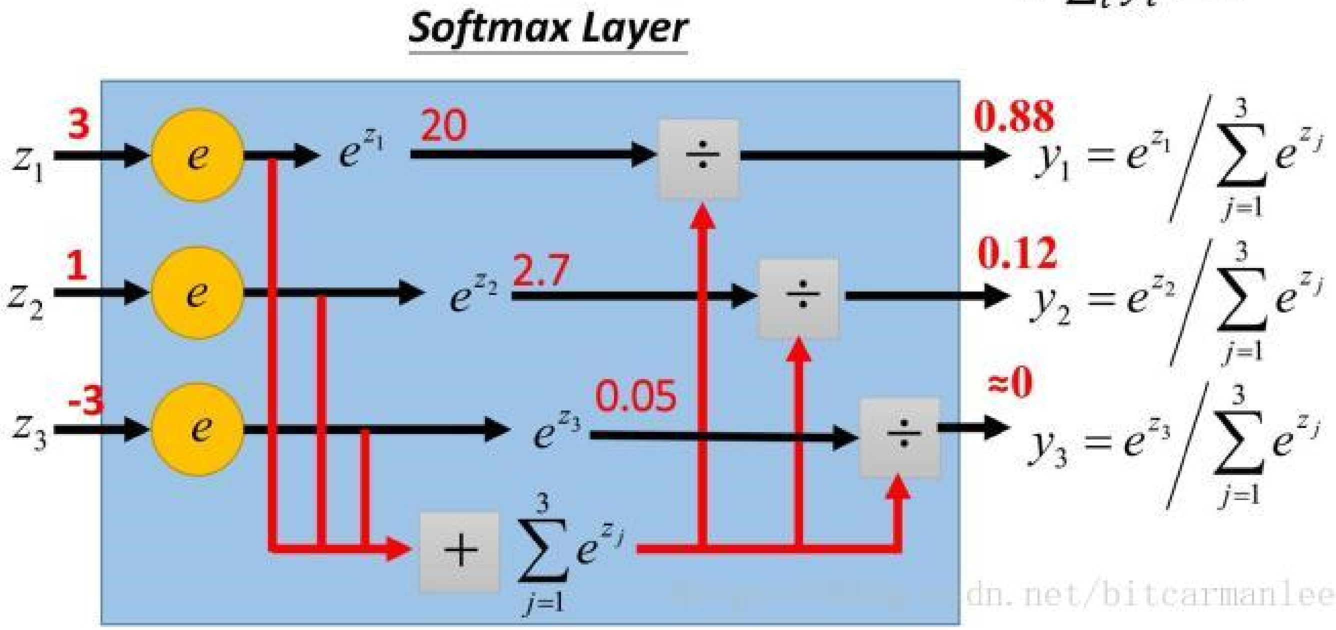
a. 正确地对 83.1% 个原始已分组个案进行了分类。

Logistic回归也可用于多分类

将连接函数：Sigmoid函数 推广为 Softmax函数
https://www.cnblogs.com/bonelee/p/8127411.html
https://blog.csdn.net/bitcarmanlee/article/details/82320853

- Softmax layer as the output layer

Probability:
- $1 > y_i > 0$
- $\sum_i y_i = 1$



课后作业

鸢尾花有很多种分类，它们一般通过花萼长度、花萼宽度、花瓣长度、花瓣宽度进行区分。

请根据数据建立合适的模型完成鸢尾花的分类，并预测剩下六朵花对应的种类。

4.9	3.1	1.5	0.1	山鸢尾
6.3	2.9	5.6	1.8	维吉尼亚鸢尾
5.4	3.7	1.5	0.2	山鸢尾
6.3	2.3	4.4	1.3	变色鸢尾
6.4	2.8	5.6	2.1	维吉尼亚鸢尾
5.2	3.4	1.4	0.2	山鸢尾

注：表中空着的六朵花真实的分类如上表所示。

课后思考

今年很火的垃圾分类问题，我们能否设计一个分类模型出来？