华北理工大学
NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

三弯矩算法

以节点处的二阶导数为参数的三次样条插值函数

记 $S''(x_j)=M_j \quad (j=0,1,\cdots,n)$， $f(x_j)=y_j$

由于 $S(x)$在区间 $[x_j,x_{j+1}]$上是三次多项式，

所以 $S''(x)$在$[x_j,x_{j+1}]$上是线性函数，

由 *Lagrange* 插值公式得：

$$S_j''(x)=M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}-M_j\frac{x-x_{j+1}}{h_j} \quad x\in[x_j,x_{j+1}]$$

其中：$h_j=x_{j+1}-x_j$

对 $S_j''(x)=M_{j+1}\dfrac{x-x_j}{h_j}-M_j\dfrac{x-x_{j+1}}{h_j}$ 积分得：

$$S_j'(x)=\frac{M_{j+1}}{2h_j}(x-x_j)^2-\frac{M_j}{2h_j}(x-x_{j+1})^2+C_1$$

再次积分得：

$$S_j(x)=\frac{M_{j+1}}{6h_j}(x-x_j)^3-\frac{M_j}{6h_j}(x-x_{j+1})^3+C_1x+C_2$$

分别代入：$S(x_j)=y_j$及$S(x_{j+1})=y_{j+1}$得：

目的是确定积分常数

$$\begin{cases} y_{j+1} = M_{j+1}\dfrac{(x_{j+1} - x_j)^3}{6h_j} + C_1 x_{j+1} + C_2 \\ y_j = -M_j\dfrac{(x_j - x_{j+1})^3}{6h_j} + C_1 x_j + C_2 \end{cases}$$

化简得：

$$\begin{cases} y_{j+1} = M_{j+1}\dfrac{h_j^2}{6} + C_1 x_{j+1} + C_2 \\ y_j = M_j\dfrac{h_j^2}{6} + C_1 x_j + C_2 \end{cases}$$

由上式可解出：

$$C_1=\frac{y_{j+1}}{h_j}-\frac{h_j}{6}M_{j+1}-\frac{y_j}{h_j}+\frac{h_j}{6}M_j$$

$$C_2=-\frac{1}{h_j}[x_j y_{j+1}-\frac{h_j^2}{6}M_{j+1}x_j-x_{j+1}y_j+\frac{h_j^2}{6}M_j x_{j+1}]$$

代入：

$$S_j(x)=\frac{M_{j+1}}{6h_j}(x-x_j)^3-\frac{M_j}{6h_j}(x-x_{j+1})^3+C_1x+C_2$$

得：

$$S_j(x)=M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}-M_j\frac{(x-x_{j+1})^3}{6h_j}-(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j+1}}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

第j个区间上的三次样条插值函数

只要能求出所有的$\{M_j\}$，就能求出样条插值函数$S(x)$.

M_i的求法： 利用$S(x)$在节点的一阶导数的连续性

$$S'_j(x) = M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_j} - M_j\frac{(x-x_{j+1})^2}{2h_j}$$

$$+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j \qquad x \in [x_j, x_{j+1}]$$

$$S'(x_j+0) = S'_j(x_j+0) = S'(x_j-0) = S'_{j-1}(x_j-0)$$

$$(j = 1,2,\cdots,n-1)$$

即 $$-\frac{h_j}{2}M_j+\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{M_{j+1}-M_j}{6}h_j$$

$$=-\frac{h_{j-1}}{2}M_j+\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}-\frac{M_j-M_{j-1}}{6}h_{j-1}$$

化简得

$$\frac{h_{j-1}}{6}M_{j-1}+\frac{h_{j-1}+h_j}{3}M_j+\frac{h_j}{6}M_{j+1}$$

$$=\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}\quad(j=1,2,\ldots,n-1)$$

再化简得

$$\boxed{\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}M_{j-1}+2M_j+\frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}M_{j+1} = 6\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)\Big/(h_{j-1}+h_j)\quad (j=1,2,\cdots,n-1)}$$

令

$$\begin{cases} \alpha_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}, \beta_j = 1-\alpha_j \\ c_j = 6\left(\dfrac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\dfrac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)(h_{j-1}+h_j)^{-1} \\ \quad = 6\dfrac{f[x_j,x_{j+1}]-f[x_{j-1},x_j]}{(x_j-x_{j-1})+(x_{j+1}-x_j)} = 6f[x_{j-1},x_j,x_{j+1}] \end{cases}$$

可得：$\alpha_j M_{j-1} + 2M_j + \beta_j M_{j+1} = c_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n-1)$

称为三次样条的M关系式

特点：n+1个未知数，n-1个方程

称为三弯矩方程

这是一个含有n+1个未知数、n-1个方程的线性方程组.要完全确定M_i (i=0,1,…,n)的值还需要补充两个条件,这两个条件通常根据实际问题的需要，根据插值区间[a,b]的两个端点处的边界条件来补充。

華北理工大學

2018.7