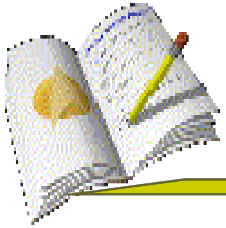
华北理工大学
NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授



三转角算法

构造一阶导数值 $s'(x_i)=m_i(i=0,1,\cdots,n)$表示的三次样条插值函数。$m_i$在力学上解释为细梁在 x_i截面处的转角，并且得到的转角与相邻两个转角有关，故称用 m_i 表示$s(x)$的算法为三转角算法。

三转角法：假定 $s'(x_j)=m_j(j=0,\cdots,n)$，根据分段三次埃尔米特插值多项式，

$$H(x)=\sum_{j=0}^{n}[f_j\alpha_j(x)+m_j\beta_j(x)],$$

由插值条件,连续性条件和边界条件，可得关于m_j的三对角方程组，求出m_j，得到三次样条插值函数.

根据Hermite插值函数的唯一性和表达式

可设 $S(x)$在区间$[x_i , x_{i+1}](i=0,1,\ldots n-1)$的表达式为

$$S(x)=\frac{[h_i+2(x-x_i)](x-x_{i+1})^2}{h_i^3}f_i+\frac{[h_i+2(x_{i+1}-x)](x-x_i)^2}{h_i^3}f_{i+1}$$

$$+\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})^2}{h_i^2}m_i+\frac{(x-x_{i+1})(x-x_i)^2}{h_i^2}m_{i+1}.$$

对S(x)求二次导数得

$$S''(x)=\frac{6x-2x_i-4x_{i+1}}{h_i^2}m_i+\frac{6x-4x_i-2x_{i+1}}{h_i^2}m_{i+1}$$

$$+\frac{6(x_i+x_{i+1}-2x)}{h_i^3}(f_{i+1}-f_i).$$

于是有

$$S'(x_i+0)=-\frac{4}{h_i}m_i-\frac{2}{h_i}m_{i+1}+\frac{6}{h_i^2}(f_{i+1}-f_i).$$

同理，考虑**S(*x*)**在**[x_{i-1}, x_i]**上的表达式，可以得到

$$S'(x_i-0)=\frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1}+\frac{4}{h_{i-1}}m_i-\frac{6}{h_{i-1}^2}(f_i-f_{i-1}).$$

利用条件 $S'(x_i+0)=S'(x_i-0)$，得

$$\mu_i m_{i+1}+2m_i+\lambda_i m_{i-1}=e_i, i=1,2,\cdots,n-1$$

其中 $e_i = 3(\lambda_i f[x_{i-1}, x_i] + \mu_i f[x_i, x_{i+1}]).$

方程

$$\mu_i m_{i+1} + 2m_i + \lambda_i m_{i-1} = e_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$$

是关于m_i的方程组,有 $n+1$个未知数,但只有 $n-1$个方程.可由前面三种边界条件的任一种边界条件补充两个方程。

(1)对于边界条件**(b)**, 两个方程 $m_0 = f'_0, m_n = f'_n$

则$\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}}$满足方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-3} & 2 & \mu_{n-3} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 - \lambda_1 f'_0 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-2} \\ e_{n-1} - \mu_{n-1} f'_n \end{pmatrix}$$

由此可解得$\boldsymbol{m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}}$，从而得 **S(*x*)**的表达式.

(2)对于边界条件(a),可导出两个方程:

$$\begin{cases} M_0 = S''(x_0+0) = -\dfrac{4}{h_0}m_0 - \dfrac{2}{h_0}m_1 + \dfrac{6}{h_0^2}(y_1 - y_0) = y''_0 \\ M_n = S''(x_n-0) = \dfrac{2}{h_{n-1}}m_{n-1} + \dfrac{4}{h_{n-1}}m_n + \dfrac{6}{h_{n-1}^2}(y_n - y_{n-1}) = y''_n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3f[x_0, x_1] - \dfrac{h_0}{2}y''_0, \\ m_{n-1} + 2m_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \dfrac{h_{n-1}}{2}y''_n. \end{cases}$$

若令 $e_0 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_0}{2} f''_0,\ e_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_{n-1}}{2} f''_n$

则可合并成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \lambda_1 & 2 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}$$

可解出 $m_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ **从而得 S(x)的表达式.**

(3)对于边界条件（c），可得

$$\begin{cases} m_0 = m_n \\ \mu_n m_1 + \lambda_n m_{n-1} + 2m_n = e_n \end{cases}$$

其中

$$\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \lambda_n = \frac{h_0}{h_{n-1} + h_0},$$

$$e_n = 3(\mu_n f[x_0, x_1] + \lambda_n f[x_{n-1}, x_n]).$$

可解出 m_i 方程组的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-2} \\ \mu_n & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix}$$

误差估计

在实际应用中，如果不需要规定内节点处的一阶导数值，那么使用三次样条插值函数会得到很好的效果。三次样条插值函数**s(x)**不仅在内节点处的二阶导数是连续的，而且**s(x)**逼近**f(x)**具有很好的收敛性，也是数值稳定的。由于误差估计与收敛性定理的证明比较复杂，下面只给出误差估计的结论。

定理 设函数 $f(x)\in C^2[a,b]$, 记 $M_2=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|, h=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$

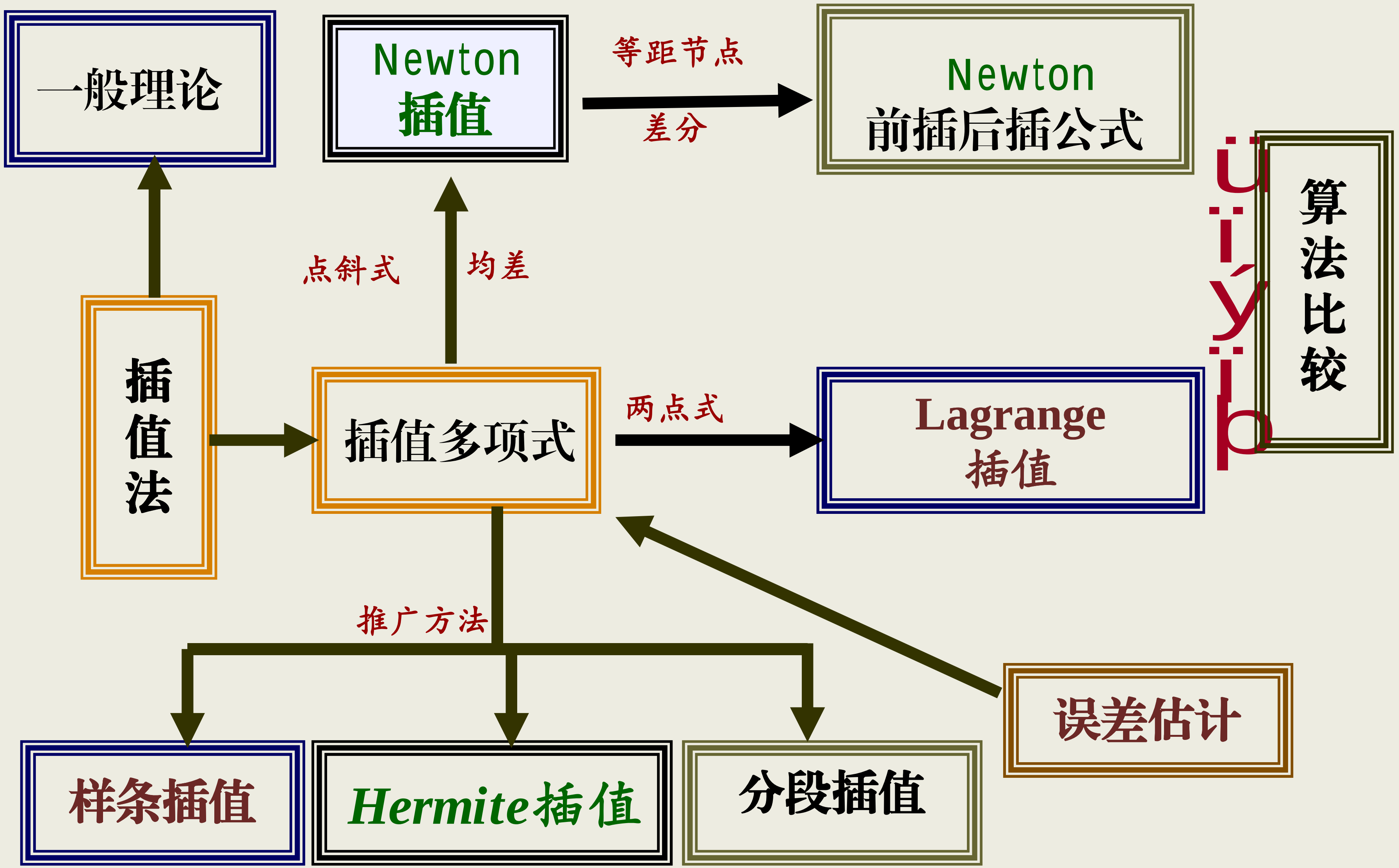
则对任意 $x\in[a,b]$，满足边界条件（a）或（b）的三次样条插值函数**s(x)**，则有估计式

$$\left|f^{(k)}(x)-S^{(k)}(x)\right|\le C_k h^{2-k}M_2, k=0,1,2$$

其中 $C_0=\frac{5}{384}, C_1=\frac{1}{24}, C_2=\frac{1}{8}.$

Chapter 2 Interpolation

知识结构图



華北理工大學

2018.7