华北理工大学

NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

国家精品课程

数值计算方法

第二章

插值法

主讲教师：龚佃选

http://210.31.198.78/eol/jpk/course/welcome.jsp?courseId=1220

三弯矩算法

以节点处的二阶导数为参数的三次样条插值函数

记 $S''(x_j)=M_j \quad (j=0,1,\ldots,n)$， $f(x_j)=y_j$

由于 $S(x)$在区间 $[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式,

所以 $S''(x)$在$[x_j, x_{j+1}]$上是线性函数,

由 *Lagrange* 插值公式得:

$$S_j''(x)=M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j}-M_j\frac{x-x_{j+1}}{h_j} \quad x\in[x_j,x_{j+1}]$$

其中：$h_j=x_{j+1}-x_j$

$$\boxed{\begin{aligned} S_j(x) &= M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} - M_j\frac{(x-x_{j+1})^3}{6h_j} \\ &- \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j+1}}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j} \end{aligned}}$$

只要能求出所有的$\{M_i\}$，就能求出样条插值函数$S(x)$.

利用$S(x)$在节点的一阶导数的连续性

$$\boxed{\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}M_{j-1} + 2M_j + \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}M_{j+1} = 6\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j} - \frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)\Big/(h_{j-1}+h_j) \quad (j=1,2,\cdots,n-1)}$$

可得： $\alpha_j M_{j-1} + 2M_j + \beta_j M_{j+1} = c_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$

其中
$$\begin{cases} \alpha_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \quad \beta_j = 1 - \alpha_j \\ c_j = 6\left(\dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \dfrac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)(h_{j-1} + h_j)^{-1} \\ \quad = 6\dfrac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j-1}, x_j]}{(x_j - x_{j-1}) + (x_{j+1} - x_j)} = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}] \end{cases}$$

称为三次样条的M关系式

特点：n+1个未知数，n-1个方程

称为三弯矩方程

边界条件讨论

$$S_j(x)=M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j}-M_j\frac{(x-x_{j+1})^3}{6h_j}$$
$$-(y_j-\frac{M_jh_j^2}{6})\frac{x-x_{j+1}}{h_j}+(y_{j+1}-\frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

第一型边界条件：已知$f(x)$在两端点的导数 $f'(a)=f'(b)$要求

$$S'(a)=f'(a),\ S'(b)=f'(b)$$

分析：若$S(x)$满足：$S'(a)=y'_0,S'(b)=y'_n$，则代入$S'(x)$的表达式可得：

$$S'(a)=-\frac{h_0}{2}M_0+\frac{y_1-y_0}{h_0}-\frac{h_0}{6}(M_1-M_0)=y_0'$$

$$S'(b)=\frac{h_{n-1}}{2}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{h_{n-1}}{6}(M_n-M_{n-1})=y_n'$$

化简得

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_0}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0\right) \longrightarrow c_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}\left(y'_n - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \longrightarrow c_n \end{cases}$$

联立方程组：

$$\begin{cases} \alpha_j M_{j-1} + 2M_j + \beta_j M_{j+1} = c_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n-1) \\ 2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_0}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0\right) \longrightarrow c_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}\left(y'_n - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \longrightarrow c_n \end{cases}$$

$$S_j(x) = M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} - M_j\frac{(x-x_{j+1})^3}{6h_j} - \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j+1}}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6}\right)\frac{x-x_j}{h_j}$$

方程组可写成矩阵形式 如下

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & \beta_0 & & & & \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & & & \\ & \alpha_2 & 2 & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ & & & & \alpha_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\text{其中}\ \beta_0 = \alpha_n = 1,\ c_0 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0'\right),\ c_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$$

不难看出：

三次样条插值问题的解是存在且唯一的。

说明

- 方程组是关于 $M_j(j=0,1,\cdots,n)$的三对角方程组，
- M_j在力学上解释为细梁在 x_j截面处的弯矩，

  因此M_j称为$S(x)$的矩,方程组称为三弯矩方程。
- 因此系数矩阵为严格对角占优阵，从而

  方程组有唯一解。

例 1 已知函数$f(x)$的数值表如下：

x	2	4	6
$f(x)$	3	7	13
$f'(x)$	1		-1

试求$f(x)$ 在[2,6]上的三次样条插值函数

【解】 这是第一类边界条件的问题 ， n=2,h_i=h=2,

$$\begin{pmatrix} 2 & \beta_0 & 0 \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

由公式知 $\alpha_2=\beta_0=1$，$a_1=\dfrac{h_0}{h_0+h_1}=\dfrac{1}{2}$, $b_1=\dfrac{1}{2}$

$$c_0=\frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1-y_0}{h_0}-y_0'\right)=3(f[x_0,x_1]-y_0')=3(2-1)=3$$

$$c_2=\frac{6}{h_1}\left(y_2'-\frac{y_2-y_1}{h_1}\right)=3(y_2'-f[x_1,x_2])=-12$$

$$c_1=6f[x_0,x_1,x_2]=\frac{3}{2}$$

$$S_j(x) = M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} - M_j\frac{(x-x_{j+1})^3}{6h_j} - (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{x-x_{j+1}}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1}h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j}$$

得方程组

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 3 \\ 0.5M_0 + 2M_1 + 0.5M_2 = 1.5 \\ M_1 + 2M_2 = -12 \end{cases}$$

解得：$M_0 = 0.25$ ，$M_1 = 2.5$ 　$M_2 = -7.25$

故所求的三次样条插值函数

$$S_0(x) = M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_0} - M_0\frac{(x-x_1)^3}{6h_0} + $$

$$-(\frac{y_0}{h_0} - \frac{M_0}{6}h_0)(x-x_1) + (\frac{y_1}{h_0} - \frac{M_1}{6}h_0)(x-x_0)$$

$$\therefore\ S_0(x) = -\frac{1}{48}(x-4)^3 + \frac{5}{24}(x-2)^3 - \frac{17}{12}(x-4) + \frac{8}{3}(x-2),\ x \in [2,4]$$

同理有

$$S_1(x) = -\frac{5}{24}(x-6)^3 - \frac{29}{48}(x-4)^3 - \frac{8}{3}(x-6) + \frac{107}{12}(x-4),\ x \in [4,6]$$

即：

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{48}(x-4)^3 + \frac{5}{24}(x-2)^3 - \frac{17}{12}(x-4) + \frac{8}{3}(x-2), & x \in [2,4] \\ -\frac{5}{24}(x-6)^3 - \frac{29}{48}(x-4)^3 - \frac{8}{3}(x-6) + \frac{107}{12}(x-4), & x \in [4,6] \end{cases}$$

程序设计

Maths程序如下：

```
Clear[x,y,a,b,c,n,M]
x[i_]:=2i;
y[1]=3;
y[2]=7;
y[3]=13;
B=Table[{x[i],y[i]},{i,1,3}];
y'[1]=1;
y'[3]=-1;
h[j_]:=2;
a[j_]:=h[j-1]/(h[j-1]+h[j]);
a[3]=1;
```

接下一页

```
b[1]=1;
b[j_]:=1-a[j];
c[1]=6/h[1]((y[2]-y[1])/h[1]-y'[1]);
c[j_]:=6((y[j+1]-y[j])/h[j]-(y[j]-y[j-1])/h[j-1])/(h[j-1]+h[j]);
c[3]=6/h[3-1](y'[3]-(y[3]-y[3-1])/h[3-1]);
A=Table[Switch[i-j,-1,b[j-1],0,2,1,a[j+1],_,0],{i,1,3},{j,1,3}];
MatrixForm[%]
CC=Table[c[j],{j,1,3}];
MatrixForm[%]
LinearSolve[A,CC];
MatrixForm[%];
```

注意它的含义

到此求出三弯矩方程的系数矩阵

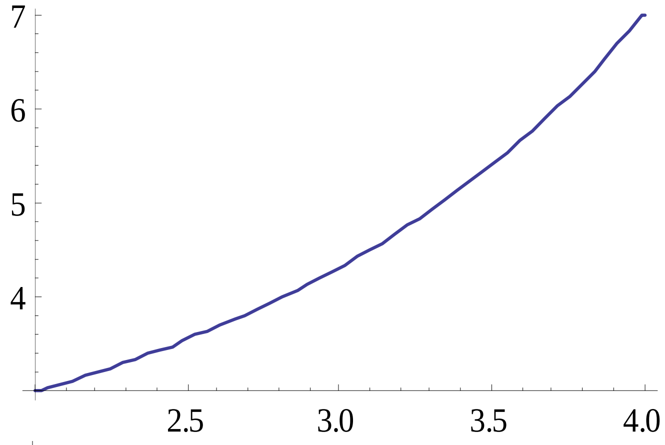
不能单独用c

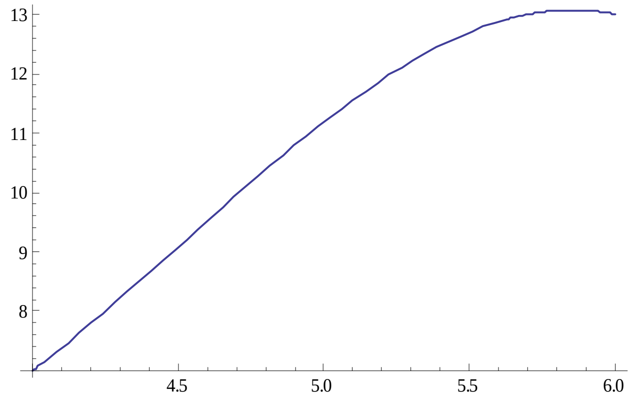
解方程求出M[I]

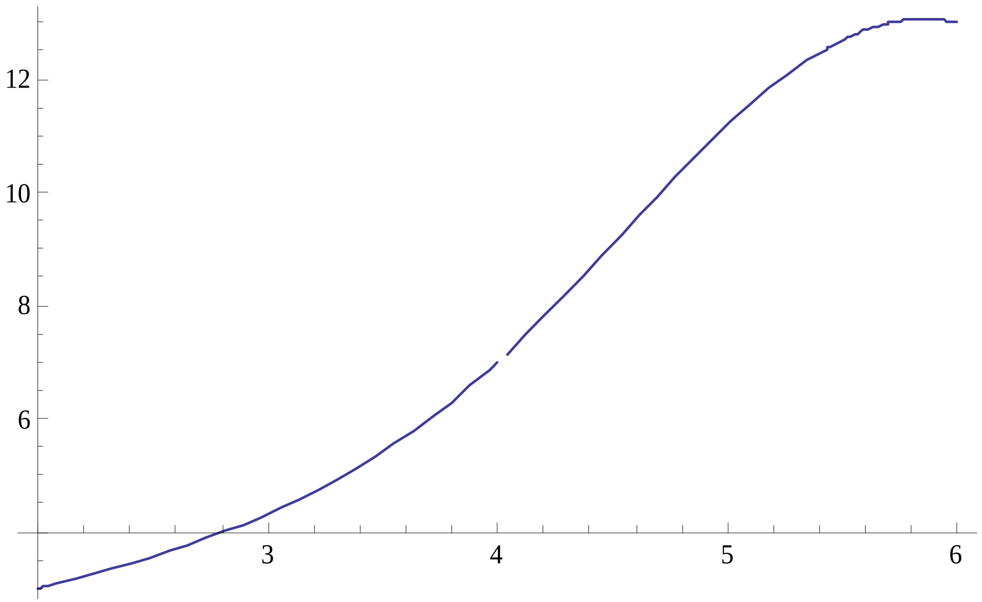
```
M[j_]:=LinearSolve[A,CC][[j]]
Table[M[j],{j,1,3}]
S[j_]:=M[j+1](x-x[j])^3/(6h[j])-M[j](x-x[j+1])^3/(6h[j])+
        (y[j+1]-M[j+1]h[j]^2/6)(x-x[j])/h[j]-
        (y[j]-M[j]h[j]^2/6)(x-x[j+1])/h[j]
Table[S[j],{j,1,2}];
Expand[%];
MatrixForm[%]
```

构造三次样条插值函数

```
g1=Plot[%[[1]],{x,2,4}]
g2=Plot[%%[[2]],{x,4,6}]
g3=ListPlot[B,Prolog->AbsolutePointSize[15]]
Show[g1,g2,g3,Prolog->AbsolutePointSize[15]]
```







第二型边界条件：

已知$f(x)$在两端点的二阶导数$f''(a)$和$f''(b)$要求

$S''(a)=M_0=f''(a)$, $S''(b)=M_n=f''(b)$

特别当 $S''(a)=S''(b)=0$时，$S(x)$称为自然三次样条

这种情况下只有n-1个未知数，其矩阵形式为：

$$
(2)\quad
\begin{pmatrix}
2 & \beta_1 & & & & \\
\alpha_2 & 2 & \beta_2 & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \alpha_{n-2} & 2 & \beta_{n-2} \\
 & & & & \alpha_{n-1} & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_1-\alpha_1 y_0'' \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1}-\beta_{n-1} y_n''
\end{pmatrix}
$$

$$
\alpha_i M_{i-1}+2M_i+\beta_i M_{i+1}=c_i\,(i=1,\cdots,n-1)
$$

第三型边界条件：已知$f(x)$是以$b-a$为周期的周期函数，要求$S(x)$满足周期条件

$$S'(x_0+0)=S'(x_n-0),\ M_0=M_n$$

则有
$$\begin{cases} M_n = M_0 \\ \beta_n M_1 + \alpha_n M_{n-1} + 2M_n = c_n \end{cases}$$

与$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = c_i\ (i=1,\cdots,n-1)$联立可得

$$(3)\ \begin{pmatrix} 2 & \beta_1 & & & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ \beta_n & & & \alpha_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

求三次样条插值函数的步骤

（1）确定边界条件，判定是第几型插值问题；

（2）根据所确定的条件计算各值，形成方程组(**)；

（3）解三对角方程组(**)，求得M_0， M_1 ， M_2, žžž M_n ；

（4）将求得的M_i值代回$S(x)$的表达式中，从而可求得函数$y=f(x)$在任一点的近似值$S(x)$。

例5.3 已知$f(x)$在若干点处的值为$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=1, f(3)=0$,试求$f(x)$满足条件（1）$f'(0)=1, f'(3)=2$

（2）$f''(0)=1, f''(3)=2$的三次样条插值函数$s(x)$以及$f(2.5)$的近似值

解：构造一阶均差表

x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$
0	0		
1	1	1	
2	1	0	$-\frac{1}{2}$
3	0	-1	$-\frac{1}{2}$

由于 $h_0 = h_1 = h_2 = 1$,

$$S_i(x) = \frac{M_{i+1}}{6}(x - x_i)^3 - \frac{M_i}{6}(x - x_{i+1})^3 +$$

$$-(y_i - \frac{M_i}{6})(x - x_{i+1}) + (y_{i+1} - \frac{M_{i+1}}{6})(x - x_i)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2$$

对条件(1)有

$$c_0 = 6(f[x_0, x_1] - f'(0)) = 0,$$

$$c_3 = 6(f'(3) - f[x_2, x_3]) = 18,$$

$$c_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = -3, \quad c_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -3,$$

方程组为：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \\ 18 \end{pmatrix}$$

解得 $M_0 = 0.2667$，$M_1 = -0.5333$，

$M_2 = -4.1333$，$M_3 = 11.0667$

将数据代入可得样条插值函数

对条件(2)有 $M_0 = 1, M_3 = 2$

关于 M_1, M_2 的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{c_1 - \alpha_1 y_0'' = -3 - \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{c_2 - \beta_2 y_3'' = -3 - \frac{1}{2} \times 2}$$

解得 $M_1 = -1.3333, M_2 = -1.6667$

$$S(x) = \begin{cases} 0.16667(1-x)^3 - 0.22222x^3 - 0.16667(1-x) \\ \qquad +1.22222x, \qquad x \in [0,1] \\ -0.22222(2-x)^3 - 0.27778(x-1)^3 + 1.22222(2-x) \\ \qquad +1.27778(x-1), \quad x \in [1,2] \\ -0.27778(3-x)^3 + 0.33333(x-2)^3 + 1.27778(3-x) \\ \qquad -0.33333(x-2), \quad x \in [2,3] \end{cases}$$

華北理工大學

2018.7