华北理工大学
NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

国家精品课程

数值计算方法

第二章

插值法

主讲教师：刘春凤

http://210.31.198.78/eol/jpk/course/welcome.jsp?courseId=1220

学习计算方法的建议

思考 1	问题的由来	问题的引入
思考2	问题的实质	提法的抽象
思考 3	新概念的诞生	准确理解概念
思考4	新概念的初识	特性（独有的性质）

学习建议

思考 5 新算法研究

思考6 算法的警示

思考 7 算法的应用

思考8 算法的进一步研究

算法原理

警示：A！ B！ C！

能解决的专业问题

联想与展望

第二章 插值法

1 插值法的一般理论

2 Lagrange插值

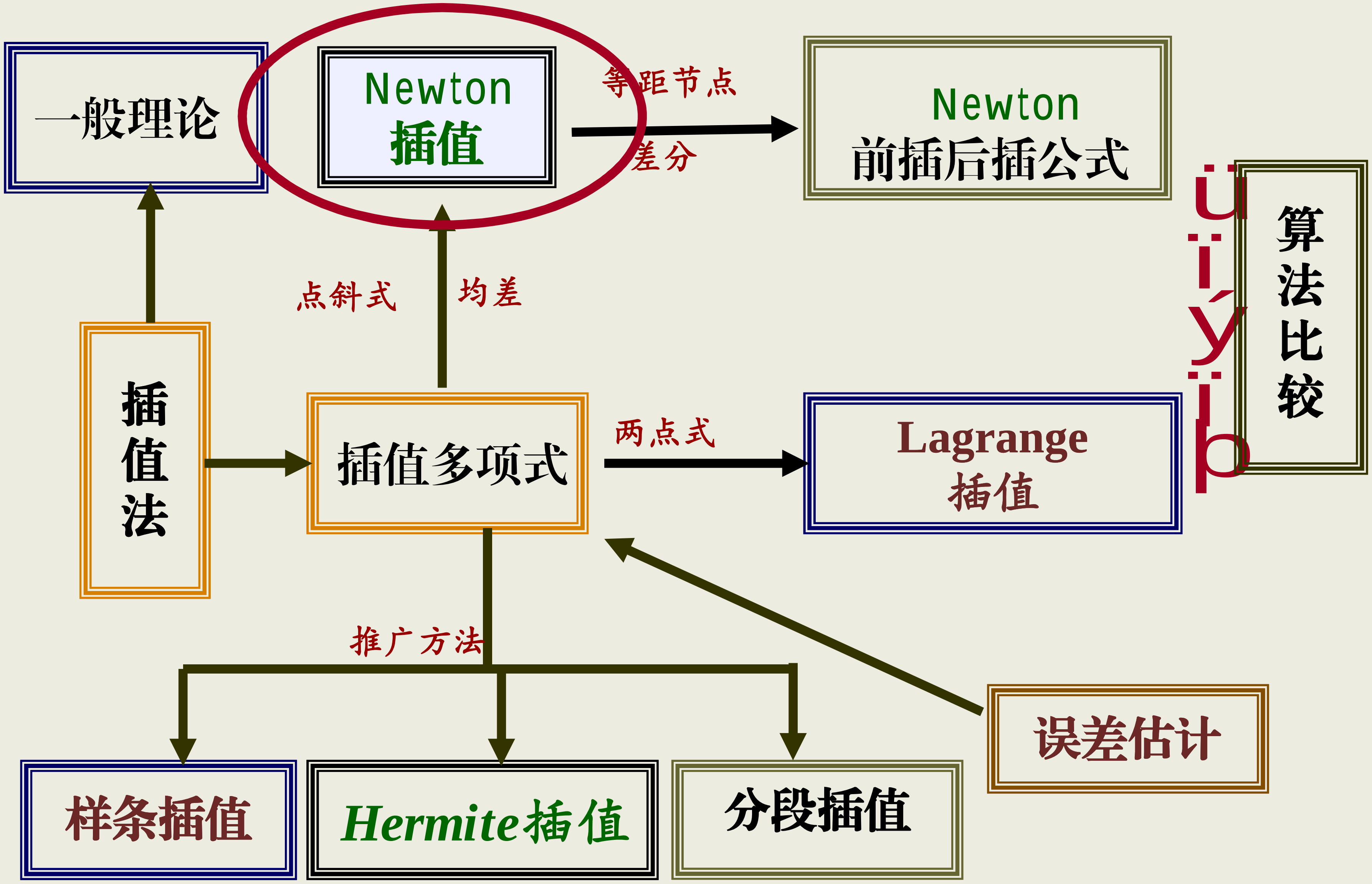
3 Newton插值

4 分段低次插值

5 Hermite插值、样条插值

Chapter 2 Interpolation

知识结构图



三、牛顿插值法

- 差商及其性质
- Newdon插值法的基本思路
- Newdon插值多项式的构造
- Newdon插值多项式余项
- 差分及其应用

差商及其性质

差商定义　称 $f[x_0, x_k] = \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶差商（亦称均差）.

二阶差商:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

K阶差商:

（x_k, x_{k-1} 可以不相邻）

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商及其性质

差商记号

$$f_k(x) = f[x_k] \qquad \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = f[x_0,x_1]$$

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{\dfrac{f_2-f_0}{x_2-x_0} - \dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_k] = \frac{f[x_1,\ldots x_{k-1},x_k]-f[x_0,x_1,\ldots x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

特别地 $f[x_i] = f(x_i),\ \ i = 0,1,\ldots,n.$ $f[x_i]$称为$f(x)$关于x_i的零阶差商。

差商及其性质

- 差商具有线性

若 $f(x)=k_1g_1(x)+k_2g_2(x)$

则

$$f[x_0,x_1,\ldots x_k]=k_1g_1[x_0,x_1,\ldots x_k]+k_2g_2[x_0,x_1,\ldots x_k]$$

- 差商可表示为函数值的线性组合

差商与函数值的关系

$$f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{x_{j+1}})\cdots(x_j-x_k)}=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{j+1}(x_j)}$$

差商及其性质

差商与函数值的关系

观察与思考

牛顿插值法

如：$k=2$时，

$$f[x_0,x_1,x_2]$$

$$=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{\frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2-x_0}-\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{f[x_0]}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f[x_1]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f[x_2]}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=a_0 f(x_0)+a_1 f(x_1)+a_3 f(x_2)$$

$$a_k=\frac{1}{w'_{k+1}(x_k)}\quad(k=0,1,2,\ldots)$$

$$a_0=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{1}{w'_{2+1}(x_0)}$$

$$a_1=\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{1}{w'_{2+1}(x_1)}$$

$$a_2=\frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{1}{w'_{2+1}(x_2)}$$

$$w_{2+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$w'_{2+1}(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)$$

差商与节点的关系

- 差商与所含节点的顺序无关

即 $f[x_0, \ldots, x_k] = f[x_1, x_0, x_2, \ldots, x_k] = \ldots = f[x_1, \ldots x_k, x_0]$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots x_k] - f[x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

建议记忆

差商与导数的关系

设节点$x_0,\cdots x_n\in[a,b]$, $f(x)\in C^{(n)}[a,b]$, 则 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

$\xi\in(\min\{x_0,x_1,\ldots x_n\},\max\{x_0,x_1,\ldots x_n\})$

证明见后

$$R_n(x)=f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]\omega_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\boxed{f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}$$

N阶差商和N阶导数密切相关!

差商性质总结

$$f[x_0,\cdots,x_n]=f[x_{i_0},\cdots,x_{i_n}]$$

$$f[x_0,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'_{i+1}(x_i)}$$

$$f[x_0,\cdots,x_n]=\frac{f^{n}(\xi)}{(n)!}$$

推论：若$f(x)\in P^n(x)$, $f[x_0,\cdots,x_k]=\begin{cases}a_n, k=n\\ 0, k>n\end{cases}$

Newdon插值法的基本思路

牛顿插值法

建立Newdon插值公式的理由

具有规律性

又有承袭性

优点

具有严格的规律性

便于记忆

缺点

不具有承袭性

每当增加一个节点时,不仅要增加求和的项数,而且以前的各项也必须重新计算.

Newdon插值法的基本思路

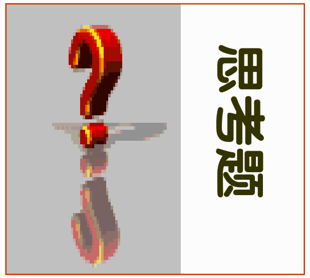
牛顿插值法

构造多项式:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+\ldots+a_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

使其满足: 通过节点　其中 $\{a_0,a_1,a_2\ldots a_n\}$是待定系数

$$P_n(x_k)=y_k \quad (k=0,1,2,\ldots n)$$



$a_k=?$　　需要引入新的概念

華北理工大學

2018.7