华北理工大学

NORTH CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

数值计算方法

Numerical Computational Method

课程负责人：刘春凤 教授

插值法原理

定理 设有 n+1个互不相同的节点 (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\ldots n)$

则存在唯一的多项式：

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (1)$$

使得 $L_n(x_j) = y_j \qquad (j = 0,1,2,\ldots n) \qquad (2)$

证 构造方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \qquad (3)$$

插值法原理

证

令：
$$A=\begin{bmatrix}1 & x_0 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\qquad Y=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式如下：
$$AX=Y \tag{4}$$

由于 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{n-1}(x_i-x_j)\neq 0$ 所以方程组（4）有唯一解。

从而 $L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ 唯一存在.

证毕

【注1】只要n+1个节点互异，满足上述插值条件的多项式是唯一存在的。

【注2】如果不限制多项式的次数，插值多项式并不唯一。

插值法的程序设计

```
X={x0,x1,x2,x3}={10,11,12,13};
y={y0,y1,y2,y3}={2.3026,2.3979,2.4849,2.5649};
A=Transpose[Table[{x0^j,x1^j,x2^j,x3^j},{j,0,3}]];
MatrixForm[%];
AA=LinearSolve[A,y]//N
X1={1,x,x^2,x^3};
X1.AA
N[%/.x->11.75,10]
```

程序设计

程序设计

绘制点图

A={{0,-1},{1.5,4.25},{5.1,35.21}}

g1=ListPlot[Table[A],Prolog->AbsolutePointSize[10]];

Interpolation[A,InterpolationOrder->2]

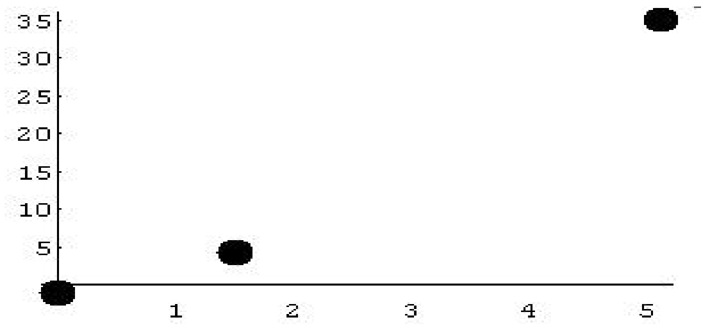
g2=Plot[%[x],{x,0,5.1}];

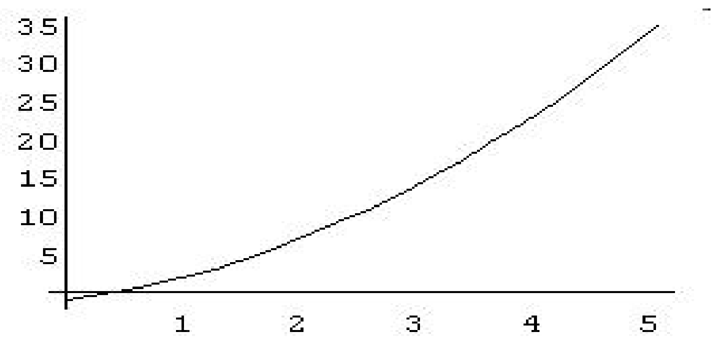
Show[g1,g2]

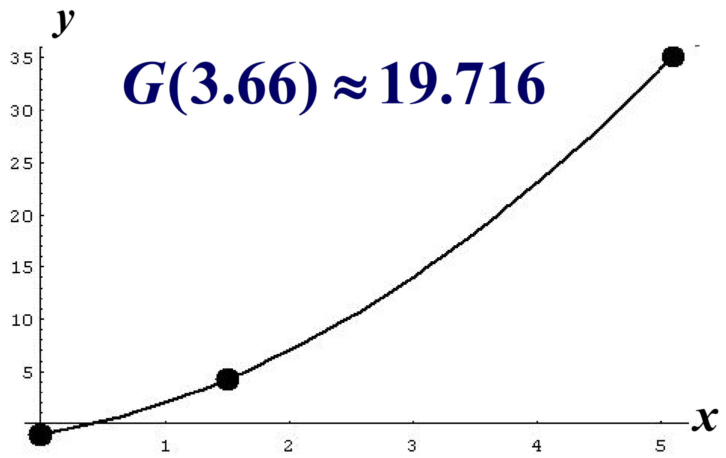
N[%%%[3.66],5]

点的绝对直

插值、插







二、拉格朗日插值法

- Lagrange插值法的基函数
- Lagrange插值多项式的构造
- Lagrange插值的误差估计
- Lagrange插值多项式的震荡
- Lagrange插值的程序设计

插值多项式的基函数

拉格朗日插值

已知 n+1个节点 (x_j, y_j) $(j=0,1,\cdots n,$ 其中 x_j

互不相同，不妨设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b),$

要求形如 $P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 的插值多项式

例如：多项式族的构成

$1, x, x^2, x^3, \ldots x^n$ n 次多项式的基（函数）

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ n 个系数

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n$ n 次多项式

插值多项式的基函数

拉格朗日插值

先讨论 $n=1$ 简单情形，假定给定区间 $[x_0,x_1]$ 及端点函数值，

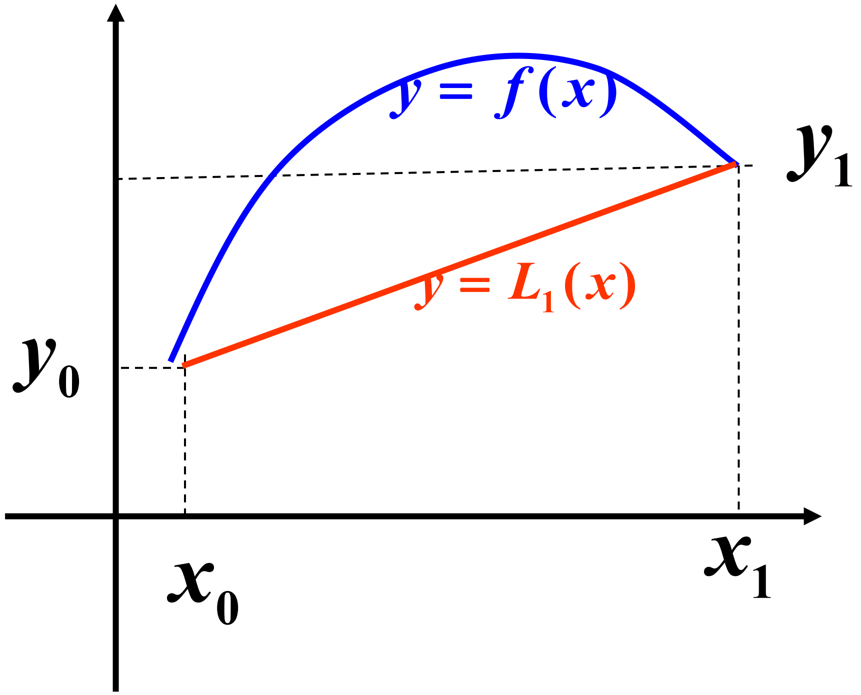
$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),$$

如图所示：

要求线性插值多项式 $L_1(x)$，

使它满足

$$L_1(x_0)=y_0,\quad L_1(x_1)=y_1.$$



插值多项式的构造($n=1$)

$$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

点斜式

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

两点式

若令

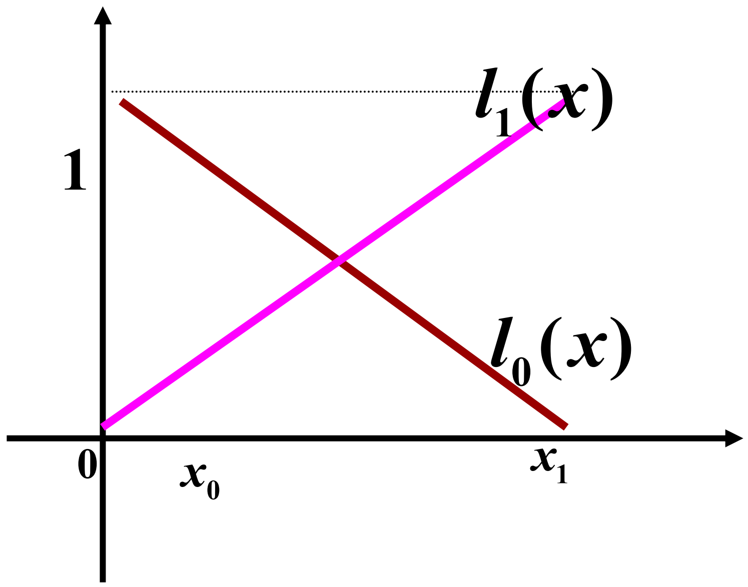
线性插值基函数

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

在节点 x_0 和 x_1 上满足：

$$l_0(x_0)=1,\qquad l_0(x_1)=0;$$

$$l_1(x_0)=0,\qquad l_1(x_1)=1.$$



$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$$ 线性插值多项式

线性插值多项式的构造

拉格朗日插值

$$L_1(x)= y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \quad \text{（点斜式）,}$$

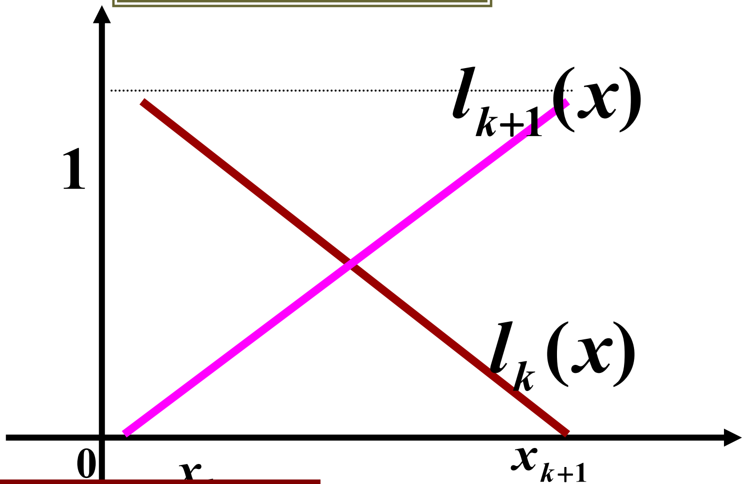
$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} y_{k+1} \quad \text{（两点式）}$$

若令
$$\boxed{l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \quad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}}$$

线性插值基函数

在节点x_k及x_{k+1}上满足条件

$$l_k(x_k) = 1, \qquad l_k(x_{k+1}) = 0;$$
$$l_{k+1}(x_k) = 0, \qquad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1.$$



$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$ 线性插值多项式

L-插值多项式的基函数

拉格朗日插值

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\qquad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

观察与思考

$$L_1(x)=y_k l_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x)$$

- 两个插值点对应一次基函数，n+1个插值点对应 n 次基函数
- n 次基函数应当怎样构造？

插值多项式的基函数

基函数的定义

若n次多项式 $l_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$ 在$n+1$个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$上满足条件

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}\qquad (j,k=0,1,\cdots,n)$$

就称这 $n+1$个n次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$的n次插值基函数 .

插值多项式的基函数

观察与思考

$$l_k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}},\quad l_{k+1}(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$$

假定插值节点为

x_{k-1},x_k,x_{k+1},要求二次插值多项式 $L_2(x)$,使它满足

通过三点 $(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$

猜想：$l_k(x)=\dfrac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$,

于是 $$l_{k-1}(x)=\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})},$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

推而广之

用基函数法构造:

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1\cdots n$$

$$\because\ l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\qquad \therefore\ L_n(x_j)=y_j$$

则 $$\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i l_i(x)}$$ 即为

拉格朗日(Lagrange) 插值多项式

拉格朗日 插值多项式

特别函数

拉格朗日插值

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})\boxed{(x-x_i)}(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{\boxed{(x-x_i)}(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i l_i(x)$$

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

拉格朗日 插值多项式

拉格朗日插值

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

拉格朗日插值多项式

优 点

结构紧凑

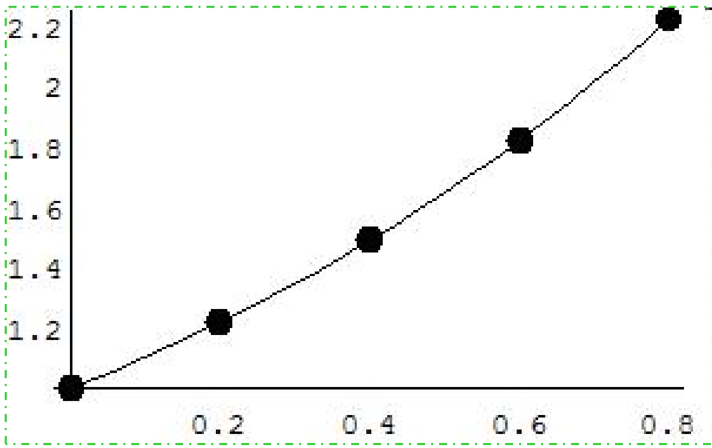
理论分析方便

缺 点

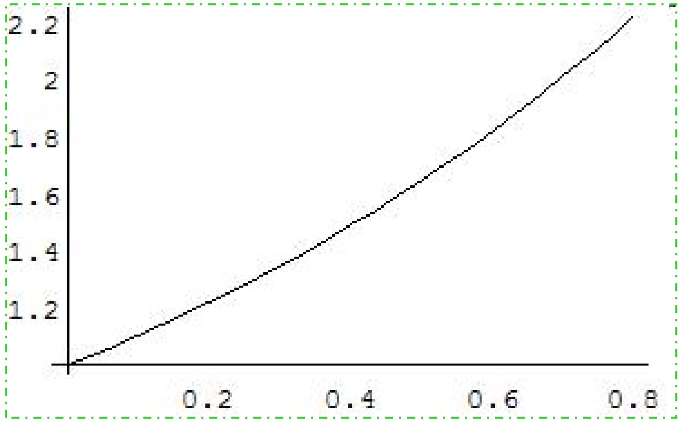
改变一个节点

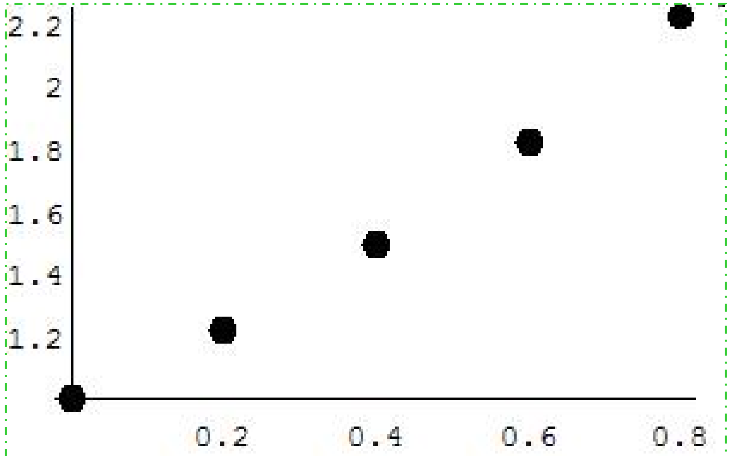
则全部的插值基函数都改变，基函数没有承袭性

插值主程序




```
f[x_]:=Exp[x]
A=Table[{x,f[x]},{x,0,0.8,0.2}]//N
g1=ListPlot[Table[A],
Prolog->AbsolutePointSize[18]];
Interpolation[A,InterpolationOrder->3]
g2=Plot[%[x],{x,0,0.8}]
Show[g1,g2]
N[%%%[0.12],20]
N[%%%%[0.72],20]
N[f[0.12],20]
N[f[0.72],20]
```





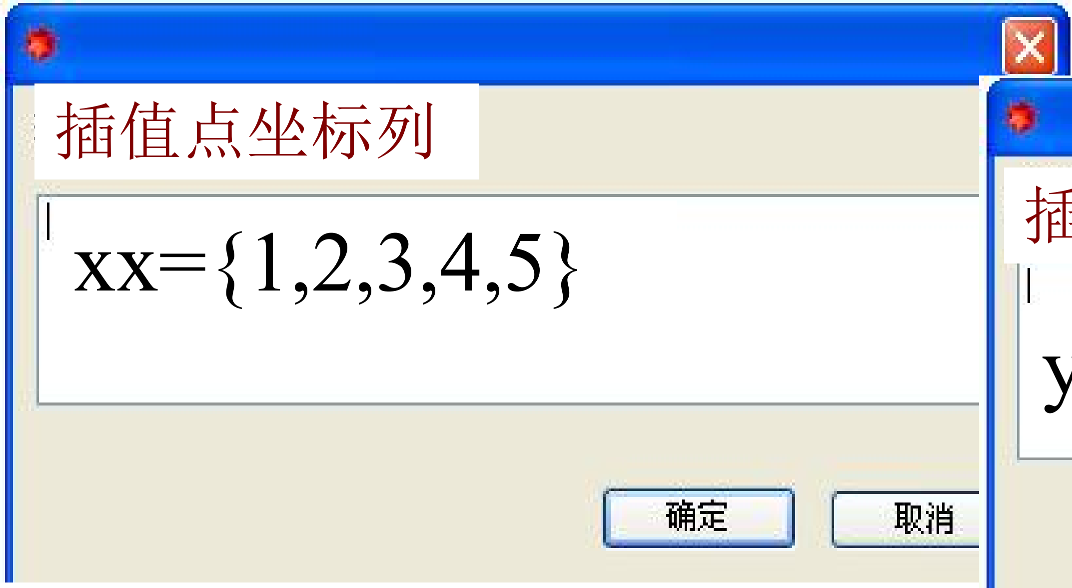
拉格朗日插值法的通用程序

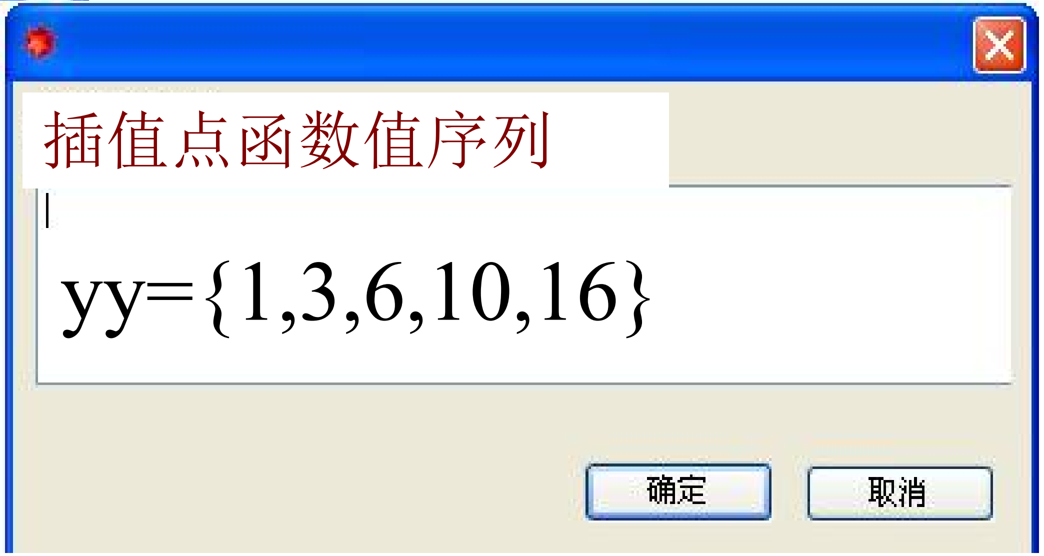
插值多项式多的程序设计

```
Clear[x, y, n, w, xx, yy]
xx = Input["插值点坐标列: "]
yy = Input["插值点函数值序列: "]
n = Length[xx];
w[x_] := Product[(x - xx[[i]]), {i, 1, n}];
q[i_, x_] := Simplify[w[x] / (x - xx[[i]])];
l[i_, x_] :=
 Simplify[q[i, x]] / (Simplify[q[i, x]] /. x → xx[[i]]);
(*定义拉格朗日基函数*)
LagPol[x_] := Sum[yy[[i]] l[i, x], {i, 1, n}];
(*生成拉格朗日插值多项式*)
Print["Lagranger插值多项式为: ", Simplify[LagPol[x]]];
```

拉格朗日插值法的通用程序

插值多项式多的程序设计





运行结果:

Lagranger插值多项式为: $\frac{1}{24}$ $24 \quad 38\,x \quad 47\,x^{2} \quad 10\,x^{3} \quad x^{4}$

華北理工大學

2018.7