数学建模
（Mathematic Modeling）

国防科技大学

第二讲

第二讲

- **主要内容**：介绍以下几个初等模型，椅子问题、席位分配问题、行走步长问题、实物交换模型。

第二讲

- 主要内容：介绍以下几个初等模型，椅子问题、席位分配问题、行走步长问题、实物交换模型。
- 主要目的：体会数学建模的形式多样性与方法多样性，了解建模思想，着重理解由现实问题向数学问题的转化过程。

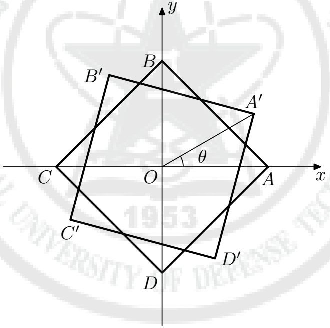
椅子问题

椅子问题

问题　四条腿长度相等的方椅子放在不平的地面上，四条腿能否同时着地?

NATIONAL UNIVERSITY OF DEFENSE TECHNOLOGY 1953

设椅子中心不动，四条腿的下端用 A, B, C, D 表示，中心点为 O。用对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 来表示椅子的位置。A, B, C, D 四点距地面的距离分别设为 a, b, c, d，它们都是旋转角 θ 的函数。



问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。

问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。
在此假设下，a, b, c, d 均为 θ 的连续函数，且

$$(a+b)(c+d)=0$$

问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。
在此假设下，a, b, c, d 均为 θ 的连续函数，且

$$(a+b)(c+d)=0$$

令 $f(\theta)=a+b$，$g(\theta)=c+d$，且 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(0)=0$，$f(0)>0$，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：

问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。
在此假设下，a, b, c, d 均为 θ 的连续函数，且

$$(a+b)(c+d) = 0$$

令 $f(\theta) = a+b$，$g(\theta) = c+d$，且 $\theta = 0$ 时，不妨设 $g(0) = 0$，$f(0) > 0$，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：

已知：$f(\theta)$，$g(\theta)$ 连续，$g(0) = 0$，$f(0) > 0$，$f(\theta)g(\theta) \equiv 0$
求证：$\exists\ \theta_0 \in\ (0, 2\pi)$, s.t. $g(\theta_0) = f(\theta_0) = 0$

问题的转化

假设：地面的凹凸变化是连续的，并且没有大的起伏。
在此假设下，a, b, c, d 均为 θ 的连续函数，且

$$(a+b)(c+d)=0$$

令 $f(\theta)=a+b$，$g(\theta)=c+d$，且 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(0)=0$，$f(0)>0$，于是椅子问题抽象成了如下数学问题：
已知：$f(\theta)$，$g(\theta)$ 连续，$g(0)=0$，$f(0)>0$，$f(\theta)g(\theta)\equiv 0$
求证：$\exists\ \theta_0 \in\ (0,2\pi)$, s.t. $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$

★ 完美的抽象！

结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。

结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。

思考:

1. 方椅子改为长方形椅子，结论如何?

结论 如果地面是连续变化的，则四条腿能够同时落地。

思考:

1. 方椅子改为长方形椅子，结论如何?
2. 地面为球面一部分时，结论如何?

椅子问题的解决关键是引入变量 θ，一是可以用 θ 表示椅子的位置，二是椅子腿与地面的距离可以表示为 θ 的连续函数，再利用函数的介值定理使这一问题解决得非常巧妙而简单。

席位分配问题

席位分配问题

某学校有 200 名学生，甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名，若学生会设 20 个代表席位，公平而又简单的分配方法是三个系分别为 10，6，4 名代表。但若三个系的人数分别为：103 人，63 人，34 人，仍按比例分配席位，则出现小数。在整数部分 19 席分配完后，剩下的一席按惯例分给余数最大的丙系，于是三个系仍分别有 10，6，4 个代表席位。

席位分配问题

某学校有 200 名学生，甲系 100 名，乙系 60 名，丙系 40 名，若学生会设 20 个代表席位，公平而又简单的分配方法是三个系分别为 10，6，4 名代表。但若三个系的人数分别为：103 人，63 人，34 人，仍按比例分配席位，则出现小数。在整数部分 19 席分配完后，剩下的一席按惯例分给余数最大的丙系，于是三个系仍分别有 10，6，4 个代表席位。

席位分配表（20 个席位）

系	学生人数	所占比例（%）	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.3	10
乙	63	31.5	6.3	6
丙	34	17.0	3.4	4

为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。

为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。

席位分配表（21 个席位）

系	学生人数	所占比例（%）	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.815	11
乙	63	31.5	6.615	7
丙	34	17.0	3.570	3

为避免表决提案时出现 10:10 的情形，决定增加一个席位，于是按照惯例重新分配席位。

席位分配表（21 个席位）

系	学生人数	所占比例（%）	按比例应分配	按惯例分配
甲	103	51.5	10.815	11
乙	63	31.5	6.615	7
丙	34	17.0	3.570	3

令人吃惊的是增加了一个席位，丙系反而少了一席，产生了矛盾，因此丙系提出异议，认为按惯例方法分配席位不“公平”，应加以修改。

$$r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \tag{1}$$

$$r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \quad (1)$$

上式等价于

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \quad (2)$$

$$r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1) \tag{1}$$

上式等价于

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \tag{2}$$

结论　当 (2) 式成立时，新增的 1 个席位应当分给 A 方；反之，应分配给 B 方。

将上述方法推广到 m 方分配席位的情况。记

$$Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

当增加一个席位时，这一席位应分配给 Q_i 值最大的一方，然后重新计算 Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$，直到所有席位分配完为止。此方法称为 Q 值方法。

Q 值方法

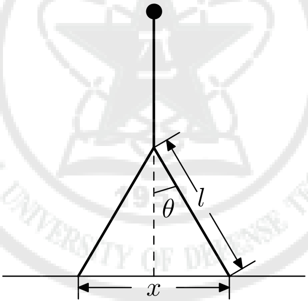
n	甲系		乙系		丙系	
1	5304.5	(4)	1984.5	(5)	578.0	(9)
2	1768.2	(6)	661.5	(8)	192.7	(15)
3	884.1	(7)	330.8	(12)	96.3	
4	530.5	(10)	198.5	(14)		
5	353.6	(11)	132.3	(18)		
6	252.6	(13)	94.5			
7	180.4	(16)				
8	147.3	(17)				
9	117.9	(19)				
10	96.4	(20)				
11	80.4					
	共 11 席		共 6 席		共 4 席	

行走步长问题

行走步长问题

问题　人在匀速行走时步长多大最省劲?

设人的体重为 M，腿重为 m，腿长为 l，速度为 v，单位时间步数为 n，步长为 x。（$v = nx$）



人行走时所做的功可以认为转化成两部分：一部分抬高人体重心，转化为势能，另一部分转化为两腿运动的动能（上身运动的动能是常数，与步长无关，故不考虑）。下面分别计算之。

1. 重心升高所需的能量
   记一步中重心升高为 δ，则

$$
\begin{aligned}
\delta &= l - l\cos\theta \\
&= l - l(1-\sin^2\theta)^{1/2} \\
&= l - l(1-\frac{x^2}{4l^2})^{1/2} \\
&\approx l - l(1-\frac{x^2}{8l^2}) \\
&= \frac{x^2}{8l}
\end{aligned}
$$

   于是，单位时间重心升高所需做功为

$$
W_{势} = nMg\delta = \frac{nMgx^2}{8l} = \frac{Mgv}{8l}x
$$

2. 腿运动所需的能量

将人行走视为均匀直杆（腿）绕腰部的转动，则在单位时间内所需动能为

$$W_{动} = \frac{1}{2} I\omega^2 \cdot n$$

其中转动惯量 $I = \frac{1}{3}ml^2$，$\omega = \frac{v}{l}$，故

$$W_{动} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \left(\frac{v}{l}\right)^2 n = \frac{n}{6} mv^2 = \frac{mv^3}{6x}$$

$\therefore$ 单位时间所做的功为

$$W = W_{势} + W_{动} = \frac{mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = 0$，解得

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{mlv^2}{Mg}} \qquad n = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{Mg}{ml}}$$

$\therefore$ 单位时间所做的功为

$$W = W_{势} + W_{动} = \frac{mgv}{8l}x + \frac{mv^3}{6x}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = 0$，解得

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{mlv^2}{Mg}} \qquad n = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{Mg}{ml}}$$

最佳步长与 v 有关，最佳步数与 v 无关。（如何解释？）

实物交换模型

实物交换模型

实物交换的原则是：互通有无，等价交换。根据双方的需要的迫切程度，“等价”的概念可以不同。

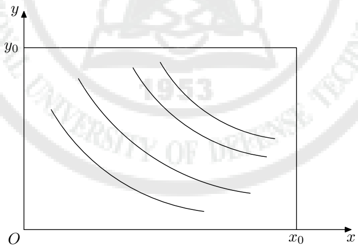
设交换前甲有物品 X 的数量为 x_0，乙有物品 Y 的数量为 y_0，交换后甲有物品 X 和 Y 的数量分别为 x 和 y。于是矩形 $0 \leqslant x \leqslant x_0$，$0 \leqslant y \leqslant y_0$ 内任一点的坐标 (x, y) 都代表了一种交换方案。

实物交换模型

实物交换的原则是：互通有无，等价交换。根据双方的需要的迫切程度，“等价”的概念可以不同。

设交换前甲有物品 X 的数量为 x_0，乙有物品 Y 的数量为 y_0，交换后甲有物品 X 和 Y 的数量分别为 x 和 y。于是矩形 $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$ 内任一点的坐标 (x, y) 都代表了一种交换方案。

用无差别曲线描述甲对 X、Y 的偏爱程度



甲有无数条无差别曲线，记作

$$f(x,y) = C_1$$

C_1 称为满意度，该曲线应满足（按常识）：

1. 单调减的
2. 下凸的
3. 互不相交的

甲有无数条无差别曲线，记作

$$f(x,y)=C_1$$

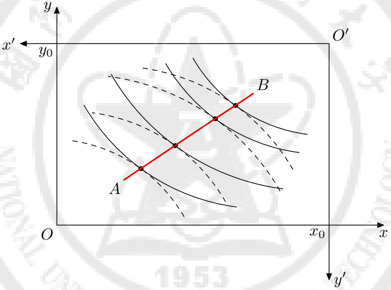
C_1 称为满意度，该曲线应满足（按常识）：

1. 单调减的
2. 下凸的
3. 互不相交的

同样，乙的无差别曲线记作

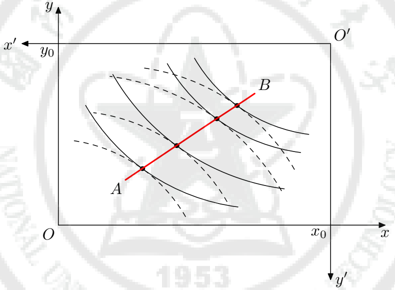
$$g(x,y)=C_2$$

为了得到双方满意的交换方案，将双方的无差别曲线画在一起。



$\widehat{AB}$ 表示两族无差别曲线的切点连成的曲线。

为了得到双方满意的交换方案，将双方的无差别曲线画在一起。



$\widehat{AB}$ 表示两族无差别曲线的切点连成的曲线。

结论 双方满意的交换方案在曲线 AB 上。