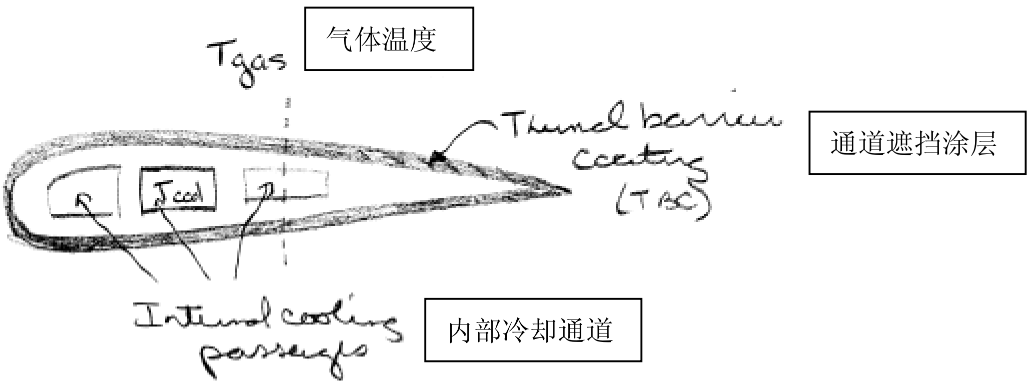
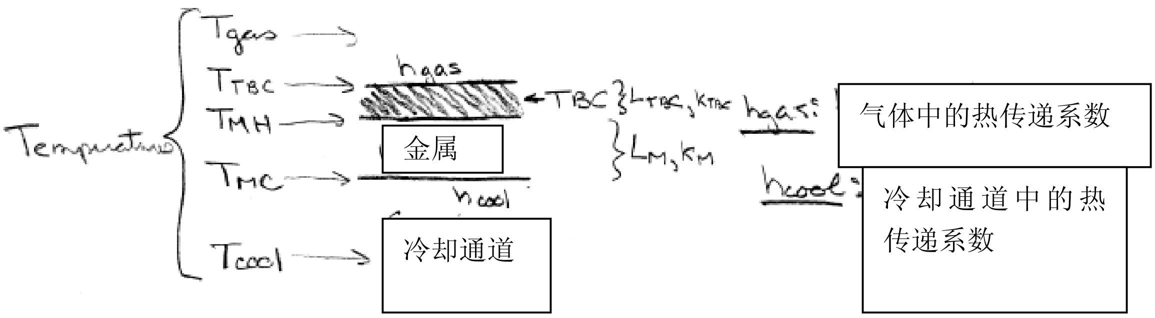
蒙特卡罗方法

为了验证蒙特卡罗方法，我们考虑一个简化的模型：通过一个冷涡轮叶片的热传递。下图是叶片的横截面：



沿着虚线一截，可以给出：



注意：T_{MM} 金属叶片热的一边的温度

T_{MC} 金属叶片凉的一边的温度

对这个问题，一维热传导模型可以写为：

$$\dot{q} = h_{gas}\left(T_{gas} - T_{TBC}\right)$$

$$\dot{q} = \frac{k_{TBC}}{L_{TBC}}\left(T_{TBC} - T_{MH}\right)$$

$$\dot{q}=\frac{k_M}{L_M}\left(T_{MH}-T_{MC}\right)$$

$$\dot{q}=h_{cool}\left(T_{MC}-T_{cool}\right)$$

在一个确定的问题里，有四个未知量：T_{TBC}，T_{MM}，T_{MC}和$\dot{q}$，我们可以利用阻力求解。同样我们也可以写出下列的线性方程组：

$$\begin{bmatrix} -h_{gas} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{k_{TBC}}{L_{TBC}} & -\frac{k_{TBC}}{L_{TBC}} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{k_M}{L_M} & -\frac{k_M}{L_M} & -1 \\ 0 & 0 & h_{cool} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{TBC} \\ T_{MH} \\ T_{MC} \\ \dot{q} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -h_{gas}T_{gas} \\ 0 \\ 0 \\ h_{cool}T_{cool} \end{bmatrix} \Leftarrow 4\times 4\text{的线性方程组}$$

输入量是：h_{gas}，k_{TBC}，k_M，h_{cool}

T_{gas}，L_{TBC}，L_M，T_{cool}

对于一个确定的模拟，我们通常使用标称设计的参数初始值，假设是如下数据：

$h_{gas}=3000\,W/m^2$　　$h_{cool}=1000\,W/m^2$

$T_{gas}=1300$ ℃　　$T_{cool}=200$ ℃

$k_{TBC}=1W/mK$　　$k_M=21.5W/mK$

$L_{TBC}=0.0005m$　　$L_M=0.003m$

模拟的结果如下：

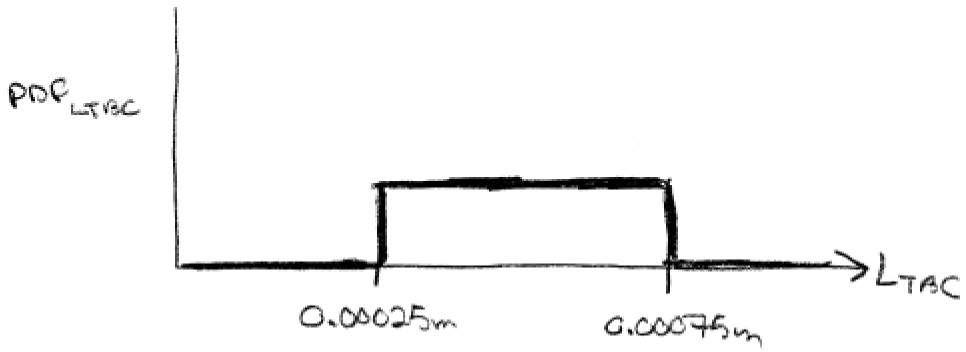
$T_{MH}=835$ ℃　　$T_{TBC}=1114$ ℃

$T_{MC}=758$ ℃　　$\dot{q}=5.58\times 10^5\,W/m^2$

在这个问题中，我们主要感兴趣的就是T_{MH}，因为我们希望这个温度尽可能的低，从而使得叶片的寿命更长。（高温会缩短叶片的寿命）

带一个参数的均匀分布的不确定性

由于生产工艺的限制，TBC 的厚度很难控制。我们假定不确定性在$0.00025m < L_{TBC} < 0.00075m$范围内是均匀分布的，其概率密度函数图像如下：



如果从产品中挑出 100 个叶片，我们可以测量它们的L_{TBC}，再利用测量的值估计每个叶片的T_{MH}，这样就能得到任意一个叶片的$T_{MH\ i}$，我们就可以计算它们的均值和方差：

$$\mu_{T_{MH}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{MHi}$$

$$\sigma_{T_{MH}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (T_{MHi} - \mu_{T_{MH}})^2$$

注意：稍后我将谈到为什么用$N-1$代替N。

我们还可以绘制直方图。

蒙特卡罗方法模拟挑选单个叶片这样一个随机过程，需要在L_{TBC}允许的范围内产生随机数，这是利用0−1 之间的均匀分布随机数来实现的。

定义 v 为 0−1 间的均匀分布，则可推出：

$$L_{TBCi} = 0.00025 + 0.0005 \times v_i$$

在 MATLAB 中，函数“rand”可以用来产生v_i。

这个例子的程序可以在线获得。

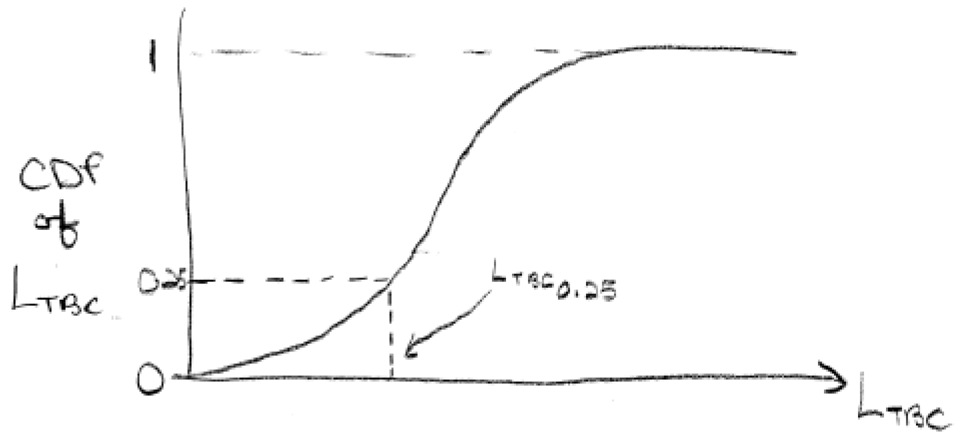
对于多个输入的情况，和单变量类似，只是需要对每个输入都产生一系列随机数。

<u>问题</u>：随着随机输入的个数增加，T_{MH}的分布将会发生怎样的变化？

蒙特卡罗方法中的非均匀分布

我们要说的最后一个问题，就是怎样处理非均匀分布的问题—利用输入随机变量的分布函数。

假设输入随机变量的分布函数如下图所示：

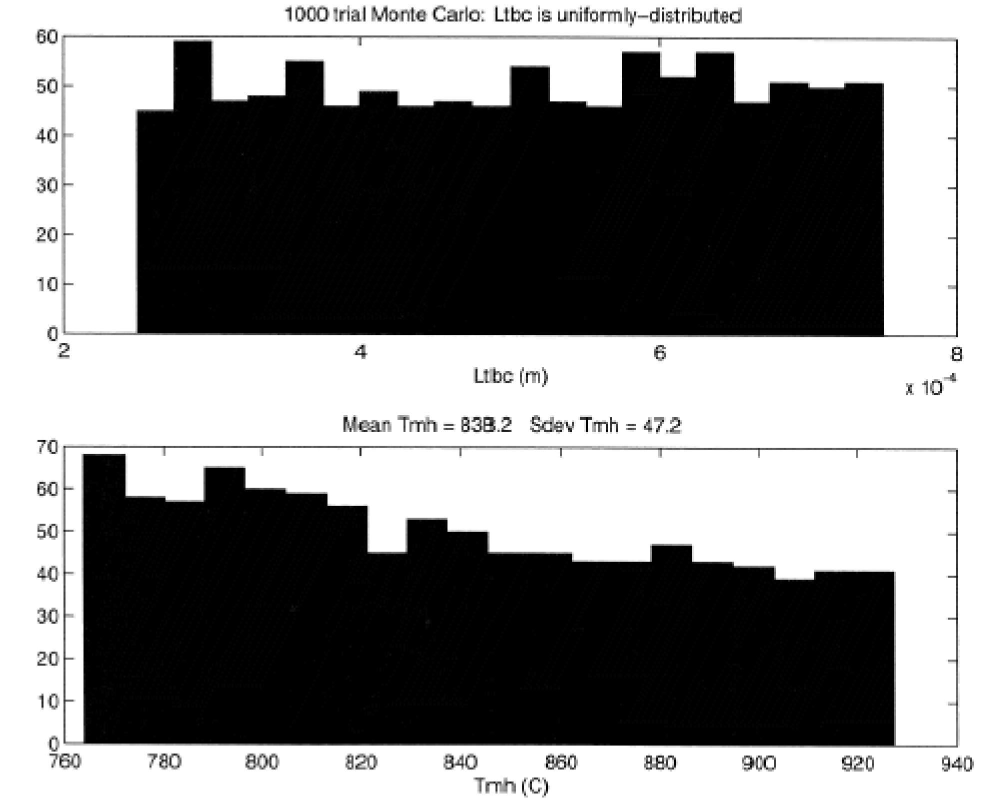


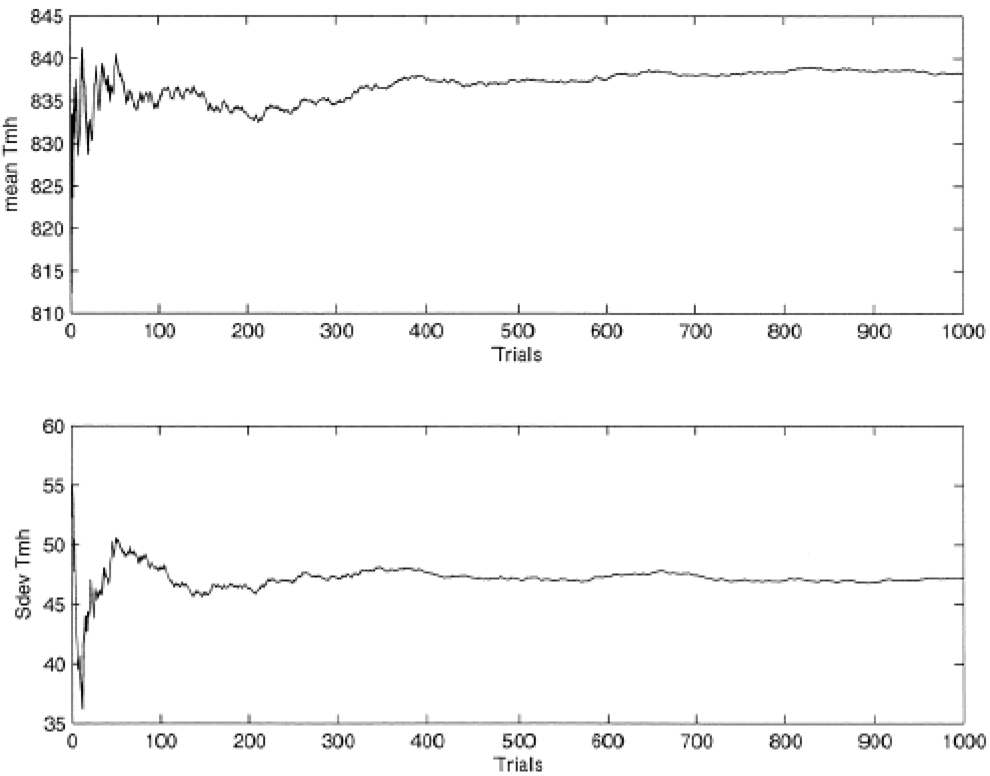
分布函数的函数值定义为一个在 0–1 区间服从均匀分布的百分数。一般的方法是利用均匀随机数得到一个百分数，再对分布函数求逆得到参数值。

小结：

1. 产生 0–1 之间的均匀分布随机数。
2. 对给定随机数，通过对分布函数求逆来求满足分布函数在该百分点所对应的参数值。

注意：在 MATLAB（和很多模拟软件包）中，有现成的函数产生服从正态分布的输入随机数。MATLAB 中“randn”就产生一个均值为零，方差为 1 的正态随机变量。


1000 trial Monte Carlo: Ltbc is uniformly-distributed
Ltbc (m)
x 10^-4
Mean Tmh = 838.2 Sdev Tmh = 47.2
Tmh (C)


mean Tmh
Trials
Sdev Tmh
Trials

blade1D.m　Sun　2003.04.27　22:47:56

```
function [Ttbc, Tmh, Tmc, q] = blade1D(hgas,Tgas, ktbc, Ltbc, km, Lm, …
                                                        hcool, Tcool)
% 计算矩阵
K = [        -hgas,                0,              0,      -1; …
        Ktbc/Ltbc,   -Ktbc/Ltbc,              0,      -1; …
                    0,          km/Lm,      -km/Lm,      -1; …
                    0,                 0,          hcool,     -1; ];

% 计算等式右侧量
b = [-hgas*Tgas;   0;   0;   hcool*Tcool];

u = K\b;

Ttbc = u(1);
Tmh = u(2);
Tmc = u(3);
q     = u(4);
```

bladeLtb.m　2003.04.28. 12:51:00

```
clear all;

% 参数的标称值
hgas = 3000;       % TBC-气体热传递系数 (W/m^2)
Tgas = 1300;       % 混合气体温度 (c)
ktbc   = 1;            % TBC 热传导。 (W/mK)
km     = 21.5         % 金属温度传导。 （W/mK）
Lm     = 0.003       % 金属厚度 （m）
hcool = 1000;       % 冷却液—金属热传递系数 (W/m^2)
Tcool =   200;       %冷却液温度 (c)

% 蒙特卡洛试验次数
Ntrial = 1000;

for n = 1:Ntrial,
  % 用均匀分布产生 Ltbc 的值。
  Ltbc(n) = 0.00025 + 0.0005*rand;
  % 求解热传导问题
  [Ttbc, Tmh(n), Tmc, q] = blade1D(hgas, Tgas, …
                                                ktbc, Ltbc(n),…
                                                km,   Lm, …
                                                hcool, Tcool);
  if (n>1),
```

```
        mTmh(n-1) = mean(Tmh);
        sTmh(n-1) = std(Tmh);
    end

% plot(Ltbc(n),Tmh(n),'*'); hold on;
% drawnow;
end

fprintf('Mean Tmh = %f\n', mtmh(Ntrial-1));
fprintf('Sdev Tmh = %f\n', stmh(Ntrial-1));

hist(Ltbc,20);
xlabel('Ltbc    (m)');

subplot(212);
hist(Tmh,20);
xlabel('Tmh    (C)');

figure;
subplot(211);
plot(mTmh);
subplot(212);
plot(sTmh);
```

bladeuni.m Mon 2003.04.28 12:57:33

```
clear all;

%  输入参数的上下界
hgas = [1500, 4500];       % TBC-气体热传递系数  (W/m^2)
Tgas = [1200, 1400];       %  混合气体温度  (C)
ktbc    = [0.9, 1.1];            % TBC  热传导。  (W/mK)
Ltbc    = [0.00025, 0.00075]; %TBC  厚度  (m)
km      = [20.0, 23.0];         %  金属温度传导。  （W/mK）
Lm      = [0.002,    0.004];       %  金属厚度  （m）
hcool = [ 500, 1500];       %  冷却液—金属热传递系数  (W/m^2)
Tcool = [ 150; 250];      %冷却液温度  (C)

%  将参数边界放进一个向量中
Pbound = [hgas; …
             Tgas; …
             ktbc; …
             Ltbc; …
             Km; …
```

```
          Lm; …
          Hcool; …
          Tcool];

% 蒙特卡洛试验次数
Ntrial = 1000;

for n = 1:Ntrial,
  % 用均匀分布产生 Ltbc 的值。
  P(:,n) = Pbound(:,1) + (Pbound(:,2)-Pbound(:,1)).*rand;

  % 求解热传导问题
  [Ttbc, Tmh(n), Tmc, q] = blade1D(P(1,n), P(2,n), P(3,n), P(4,n), …
                                P(5,n), P(6,n), P(7,n), P(8,n));
  if (n>1),
    mTmh(n-1) = mean(Tmh);
    sTmh(n-1) = std(Tmh);
  end

% plot(Ltbc(n),Tmh(n),'*'); hold on;
% drawnow;
end

fprintf('Mean Tmh = %f\n', mtmh(Ntrial-1));
fprintf('Sdev Tmh = %f\n', stmh(Ntrial-1));
subplot(311);
hist(Tmh,20);
xlabel('Tmh   (C)');
subplot(312);
plot(mTmh);
subplot(312);
plot(sTmh);
```