Introduction à l'analyse numérique

Projet

Épidémiologie

Alexander Jérôme
Van Dyck Jean-François
Bi Gohi Kristian

<u>Table des matières</u>

Question 1:

Nous devons montrer que les équations (1a)-(1c) préservent la propriété que la taille N de la population est constante dans le temps.

Pour montrer cela, on va montrer, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, la dérivée de N en t est égale à zéro.

i.e., $\forall t \in \mathbb{R}, \ \partial_t N = 0$

soit $t \in \mathbb{R}$.

on a $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

Donc $\partial_t N = \partial_t S + \partial_t I + \partial_t R$.

On remplace $\partial_t S$, $\partial_t I$, $\partial_t R$ par leurs équations.

on obtient :

$$\partial_t N = -\frac{a}{N} SI + \frac{a}{N} SI - \alpha I + \alpha I$$

càd, $\partial_t N = 0$

Donc N est constante dans le temps.

Question II

Montrons que (1a)-(1c) est invariant par changement d'échelle.

Soit (S, I, R) solution de (1a)_(1c)

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

Montrons que $\lambda(S, I, R)$ est solution de (1a)_(1c).

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a que $\lambda(S,I,R)$ est solution ssi $\lambda(S,I,R)$ vérifie (1a)_(1c)

ssi $\begin{cases} \partial_t(\lambda S) = \frac{-a}{\lambda N}(\lambda S)(\lambda I) \\ \partial_t(\lambda I) = \frac{a}{\lambda N}(\lambda S)(\lambda I) - \alpha(\lambda I) \\ \partial_t(\lambda R) = \alpha(\lambda I) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\partial_t(S) = \left(\frac{-a}{N} S I\right)\lambda \\ \lambda\partial_t(I) = \left(\frac{a}{N} S I - \alpha I\right)\lambda \\ \lambda\partial_t(R) = (\alpha I)\lambda \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t(S) = -\frac{a}{N} S I \\ \partial_t(I) = \frac{a}{N} S I - \alpha I \\ \partial_t(R) = \alpha I \end{cases}$

Vrai car (S, I, R) est solution de (1a)-(1c)

Donc $\lambda(S, I, R)$ est solution de (1a)-(1c)

S.P.D.G. on peut supposer que $N=1$.

En effet, si $N = \mu \neq 1$ $\mu \in]0,+\infty[$.

on peut prendre $\frac{1}{\mu}(S,I,R)$. Par l'exercice, en prenant $\lambda = \frac{1}{\mu}$,

$\frac{1}{\mu}(S, I, R)$ est solution de (1a)_(1c).

Donc on peut supposer que $N=1$.

Question 3 :

Montrons que si (S, I) est solution de (2a)-(2b) alors $\forall \tau \in \mathbb{R}$, $t \to (S(t-\tau), I(t-\tau))$ est une solution de (2a)-(2b)

Soit (S, I) une solution de (2a)-(2b)

Soit $\tau \in \mathbb{R}$

Posons (S', I') tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $(S'(t), I'(t)) = (S(t-\tau), I(t-\tau))$

on a que (S', I') est une solution de (2a)-(2b)

ssi
$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \partial_t S' = -a S' I' \\ \partial_t I' = (a S' - \alpha) I' \end{cases}$$

(S', I') est dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$ comme fonction composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$

on a que
$$\begin{cases} \partial_t S' = (\partial_t S)(t-\tau) \cdot \overbrace{\partial_t (t-\tau)}^{=1} \\ \partial_t I' = (\partial_t I)(t-\tau) \cdot \partial_t (t-\tau) \end{cases}$$

par dérivée de fonctions composées.

Donc
$$\begin{cases} \partial_t S' = -a S(t-\tau) . I(t-\tau) \\ \partial_t I' = (a S(t-\tau) - \alpha) I(t-\tau) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t S' = -a S'(t) I'(t) \\ \partial_t I' = (a S'(t) - \alpha) I'(t) \end{cases}$$

ce qui vérifie (2a)-(2b) donc (S', I') est solution de (2a)-(2b)

SPDG nous pouvons supposer que $\forall (S, I)$ solution de (2a)-(2b) S_0 et I_0 sont fixés en $t_i = 0$, car sinon nous pouvons prendre $\tau = t_i$, nous aurons alors une solution à (2a)-(2b) similaire à (S, I) où $t_i = 0$

En effet $t \to (S(t-\tau), I(t-\tau))$ est solution de (2a)-(2b) et l'image en 0 de cette solution est (S_0, I_0).

$\square$

Question 4 :

Montrons que les trajectoires $Im(S_1, I_1)$ et $Im(S_2, I_2)$ soit ne s'intersectent pas, soit égales.

Supposons que $Im(S_1, I_1) \cap Im(S_2, I_2) \neq \emptyset$, montrons que $Im(S_1, I_1) = Im(S_2, I_2)$

Comme l'intersection est non vide, il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(S_1(t_1), I_1(t_1)) = (S_2(t_2), I_2(t_2))$

Par le résultat de la question 3 nous avons que (S_2', I_2') est une solution du système (2a)-(2b) avec $\begin{cases} S_2'(t) = S_2(t - t_1 + t_2) \\ I_2'(t) = I_2(t - t_1 + t_2) \end{cases}$

Nous avons que $\begin{cases} S_2'(t_1) = S_2(t_1 - t_1 + t_2) = S_2(t_2) = S_1(t_1) \\ I_2'(t_1) = S_2(t_1 - t_1 + t_2) = I_2(t_2) = I_1(t_1) \end{cases}$

Donc $(S_2'(t_1), I_2'(t_1)) = (S_1(t_1), I_1(t_1))$

Nous avons donc que (S_1, I_1) et (S_2', I_2') satisfont les mêmes équations. En effet les équations permettent de construire les solutions sont les suivantes :

$\begin{cases} \partial_t S_1 = -a S_1 I_1 \\ \partial_t I_1 = (a S_1 - \alpha) I_1 \\ (S_1(t_1), I_1(t_1)) = (S_2'(t_1), I_2'(t_1)) \end{cases}$ $\begin{cases} \partial_t S_2' = -a S_2' I_2' \\ \partial_t I_2' = (a S_2' - \alpha) I_2' \\ (S_2'(t_1), I_2'(t_1)) = (S_2'(t_1), I_2'(t_1)) \end{cases}$

Les 2 systèmes sont les mêmes et leur solution est unique par conséquent $(S_1, I_1) = (S_2', I_2')$

or $Im(S_2', I_2') = Im(S_2, I_2)$ car (S_2', I_2') et (S_2, I_2) sont définit pour tout t.

Donc si $a' \in Im(S_2', I_2')$

on a que il existe $t_{a'} \in \mathbb{R}$ tel que $a' = (S_2'(t_{a'}), I_2'(t_{a'}))$

or $(S_2'(t_{a'}), I_2'(t_{a'})) = (S_2(t_{a'} + t_2 - t_1), I_2(t_{a'} + t_2 - t_1))$

Donc $a' \in Im(S_2, I_2)$

Et si $a \in Im(S_2, I_2)$

on a qu'il existe $t_a \in \mathbb{R}$ tel que $a = (S_2(t_a), I_2(t_a))$

or $(S_2(t_a), I_2(t_a)) = (I_2'(t_a + t_1 - t_2), S_2'(t_a + t_1 - t_2))$

Donc $a \in Im(S_2, I_2) = Im(S_2', I_2') = Im(S_1, I_1)$

Question 5

Nous cherchons l'ensemble des $(S_0, I_0) \in T$ tels que $\exists (S,I)$ solution de 2a − 2b telle que $\forall t \in \mathbb{R}$

$(S(t), I(t)) = (S_0, I_0)$

$(S(t), I(t))$ est une fonction constante ssi $\forall t \in \mathbb{R}$

$\partial_t S = \partial_t I = 0$

Soit $t \in \mathbb{R}$

Séparons en 3 cas :

1er cas : $\boxed{\alpha \neq 0}$

On a que $\begin{cases} \partial_t S = -a S I \\ \partial_t I = (a S - \alpha) I \end{cases}$

on veut que notre solution soit constante.

$(S(t), I(t))$ sera constante si

$\begin{cases} \partial_t S = -a S_0 I_0 = 0 \\ \partial_t I = (a S_0 - \alpha) I_0 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow I_0 = 0$, en effet si $I_0 \neq 0$ alors $\partial_t S = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $S_0 = 0$

mais dans ce cas $\partial_t I \neq 0$

Donc dans ce cas la solution (l'ensemble recherché)

est $S = \{(b, 0) \in T\} = \{(b, 0)$ avec $0 \leq b \leq 1\}$

2ème cas : $\boxed{\alpha = 0 \text{ et } a \neq 0}$

on a que notre solution est constante ssi

$\begin{cases} \partial_t S = -a S_0 I_0 = 0 \\ \partial_t I = a S_0 I_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_0 = 0 \text{ ou } I_0 = 0 \\ \end{cases}$

Donc l'ensemble recherché est $S' = \{(a', b') \in T \mid a' = 0 \vee b' = 0\}$

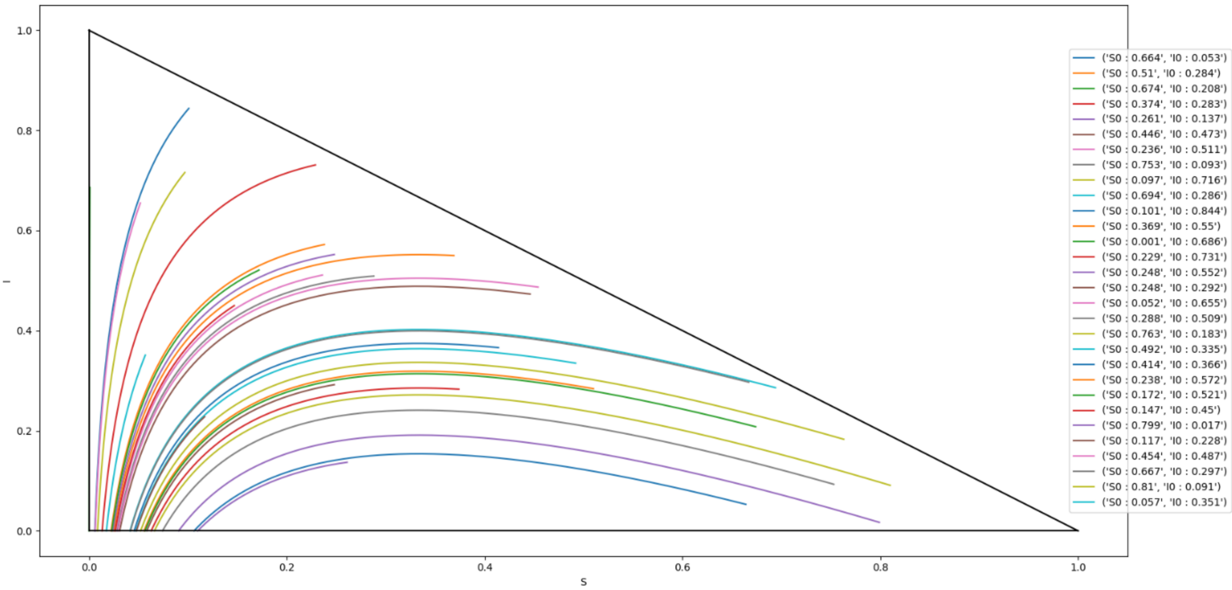
3ème cas : $\alpha = 0$ et $a = 0$

notre solution est constante si

$\begin{cases} \partial_t S = 0 S_0 I_0 = 0 \\ \partial_t I = (0 S_0 - 0) I_0 = 0 \end{cases}$ ce qui est vrai l'ensemble recherché est donc $S'' = \{(a'', b'') \in T\}$

$\square$

Question 6



Question 7

$(S_0, I_0) \in T$, donc S_0 et I_0 sont positives.
Nous pouvons voir que S diminue au fil du temps (Le temps est de la droite vers la gauche). S tend vers une valeur s $\in [0, 1]$. I est décroissant à partir d'un moment et il tend vers 0.
On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\big(S(t), I(t)\big) \in T$. En particulier, $S(t) \geq 0$ et $I(t) \geq 0$.

Question 8

Le pourcentage minimum de personnes infectées I(0) doit être 25.815297928987324% pour avoir au moins 40% de la population infecté à un certain moment.

Il est évident que si $I_0 \geq 0{,}4$, au moins 40% de la population est infectée à un certain moment. À l'inverse, si $I_0 = 0$, la population infectée est égale à 0 quel que soit le temps (question 5). Donc la réponse attendue se trouve dans l'intervalle $]0, 0.4]$.

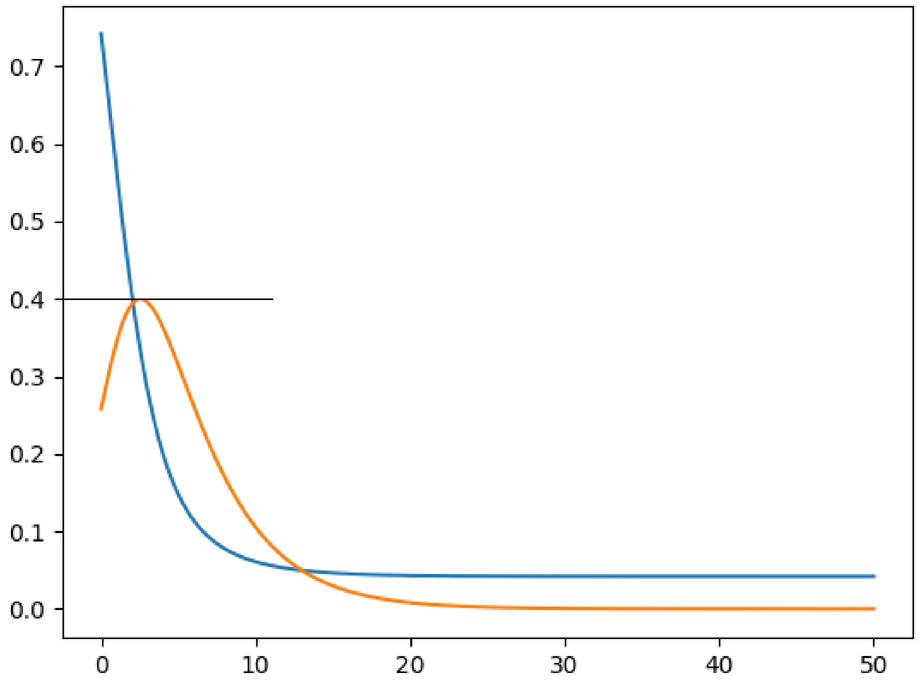
S'il existe un I_0 tel qu'il existe un unique t $\in \mathbb{R}$ tel que, $I(t) = 0{,}4$ et pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$ différents de t, $I(t_1) < I(t)$. Alors I_0 est la solution de la question.

En effet, si I'_0 est strictement inférieur à I_0, par la question 4, la courbe associée à ce I'_0 sera strictement inférieure à la courbe associée à I_0. Et donc elle n'atteindra pas les 40%. I_0 est donc bien le minimum.

Nous avons donc supposé qu'un tel I_0 existe. (*)

Ce I_0 sera donc la racine de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I_0 \longmapsto \max(I(t)) - 0{,}4$ avec $I(0) = I_0$.
Nous avons décidé de rechercher la racine de la fonction f en utilisant brentq, ceci est accompli par la méthode Precision2.
Nous devions, pour cela, calculer le maximum de chaque $I(t)$.
Graphiquement, nous avons remarqué que pour tout $I_0 \neq 0$, soit I est strictement croissant puis strictement décroissant, soit I est strictement décroissant. Dans les deux cas, I admet un seul maximum global.
Dans le premier cas, (croissant puis décroissant) on calcule la racine de la dérivée avec brentq et dans le deuxième cas, le maximum est I_0, ce maximum est calculé par maxI2.
Notre algorithme nous donne I_0 =25.815297928987324%, nous remarquons graphiquement qu'il existe un unique t tel que $I(t) = 0.4$ et pour tout $t_1 \in \mathbb{R}$ différents de t, $I(t_1) < I(t)$. Notre hypothèse (*) était valide.

Il s'agit donc de la solution.



Question 9

Nous avons décidé de prendre 1000 comme valeur « infinie ». En effet, nous avons remarqué graphiquement qu'à partir d'un t_1 = 100, pour tout $t > t_1, S(t)$ varie très faiblement, la variation est négligeable. Nous avons donc pris 1000 afin d'obtenir un peu plus de précision pour un coût raisonnable.
Notre programme calcule l'erreur relative pour tous les $S_0 \in \{n \times 0.05 \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge n \times 0.05 < 1\}$, en revanche, pour $S_0 = 1$, le programme calcule l'erreur absolue car $\log(1) = 0$. L'erreur maximale est 2.9111747147033393e-05.
Cette erreur est suffisamment faible pour justifier que la relation est vérifiée.

Question 10

La valeur minimal α que le gouvernement doit atteindre afin de limiter le pourcentage de la population infectée à maximum 15%, en considérant que S_0 = 0.99 et I_0 = 0.01, est de 0.4613426911640657.

Si la réponse existe, elle se trouve dans l'intervalle $[0, 1]$ car $\alpha \in [0, 1]$. Après vérification, la solution existe car si $\alpha = 0, I(t)$ dépasse les 15%, et si $\alpha = 1$, on n'atteint pas les 15%.
Le raisonnement qui permet de trouver la solution est identique à celui de la question 8. Les programmes sont similaires, nous utilisons brentq. La seule différence, nous faisons varier α et non I_0.

Le α sera donc la racine de la fonction $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \longmapsto \max(I(t)) - 0{,}15$ par un raisonnement similaire à celui de la question 8.

Question 11

1)On suppose que I0 = 0.01, S0 = 0.99 et T0 = 0.
La valeur minimum du taux de traitement γ est de 0.43744593214347377 pour limiter la population infectée à 15% maximum.

Si la réponse existe, elle se trouve dans l'intervalle $[0, 1]$ car $\gamma \in [0, 1]$. Après vérification, la solution existe car si $\gamma = 0, I(t)$ dépasse 15%, et si $\gamma = 1$, $I(t)$ n'atteint pas les 15%.
Le raisonnement qui permet de trouver la solution est identique à celui de la question 8. Les programmes sont similaires, nous utilisons brentq. Les seules

différences, nous faisons varier γ et non I_0, et les équations différentielles (3a)-(3c) sont différentes des équations (2a)-(2b) mais elles vérifient les même propriétés.

Le γ sera donc la racine de la fonction $f\ :[0,1]\ \rightarrow\ \mathbb{R}, \gamma \longmapsto \max\left(I(t)\right) - 0{,}15$ par un raisonnement similaire à celui de la question 8.

2)Le pourcentage maximal de la population qui aura reçu le traitement est de 11.769980309499063% si γ = 0.43744593214347377.

La courbe T étant similaire à la courbe I, nous avons décidé de calculer le maximum de T de la même manière que nous avons calculé le maximum de I. C'est à dire, nous avons recherché la racine de la dérive de T avec brentq.