$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-E \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(P(x_j) + E(-1)^j\right)_{j=0}^{n+1} = \left(f(x_j)\right)_{j=0}^{n+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 + (-1)^0 E \; a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_{n+1} x_0^{n+1} = f(x_0) \\ \vdots \\ a_0 + (-1)^{n+1} E + a_1 x_{n+1} + a_2 x_{n+1}^2 + \dots = f(x_{n+1}) \end{array}\right.$$

$$P^*(x_i) + (-1)^i E = f(x_i)$$

q) $a_0 +$

$$M_B(g) \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n & (-1)^0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$g \in \mathcal{L}(\underbrace{\mathbb{P}^{\leq n} \times \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^{n+2}}, \mathbb{R}^{n+2})$$

$$\dim(\mathbb{P}^{\leq n} \times \mathbb{R}^{n+2}) = n+1+1 = n+2 = \dim(\mathbb{R}^{n+2})$$

$\dim(\mathbb{R}^{n+2}) = \underline{\dim(\mathrm{Ker}(g))} + \dim(\mathrm{Im}(g))$ (Thm du rang).

si $= 0$, alors $g$ injective

Montrer que $Ker(g) = \{0_{\mathbb{P}^{\leq n} \times \mathbb{R}}\}$ et c'est gagné

Supposons que $Ker(g)$ possède un élément non nul ie.

$(\cancel{p_0, x_1, \dots}, E) \neq \cancel{(0, 0, \dots, 0, 0)}\ 0_{\mathbb{P}^{\leq n} \times \mathbb{R}}$

on a que $\forall 0 \leq i \leq n+1,\ p(x_i) \cancel{+(-1)^i} E = 0$ $\quad \mathbb{P}^{\leq n}$

~~On note~~

On sait que $\forall 0 \leq i \leq n+1,\ p(x_i) = 0$ or $p \in \mathbb{P}^{\leq n}$

et possède $n+2$ racines dont au moins $n+1$ sont distincte.

Donc $p$ ~~possè~~ est forcément la fonction polynome nulle.

ce qui contredit que $p(x_i) \cancel{+(-1)^i E}$ non nul.

~~Donc on a que $Ker(g) = \{0\}$~~

$E = 0$

Si $E \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & (-1) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & (1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & (-1) \\ 1 & x_3 & x_3^2 & 1 \end{pmatrix}$$

si on a exactement $n+1$ $x_i$ distinct,

~~On a donc~~ on peut supposer spdg que $x_0 < x_1 < \dots < x_i = x_{i+1} < x_{i+2} < \dots < x_{n+1}$

(quitte à permuter les $x_i$)

~~On a alors~~

Supposons qu'il existe $p^* \in \mathbb{P}^{\leq n}$ tq $p^*(x_i) + (-1)^i E = 0$ $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}$

Comme $x_i = x_{i+1}$, on a $\cancel{p^*(x_i)} + (-1)^i E = 0 = \cancel{p^*(x_{i+1})} + (-1)^{i+1} E$

$$\iff (-1)^i E = (-1)^{i+1} E$$

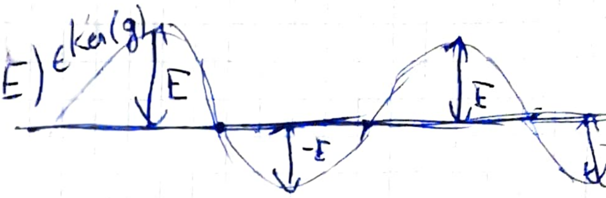
$$\iff (-1)^i E = -(-1)^i E$$

$$\iff \frac{+(-1)^i}{(-1)^i} E = -E \iff E = -E.$$

Contradiction ! $E = -E$ vrai ssi $E = 0$, or $E \neq 0$ par hypothèse.

si on a $n+2$ $x_i$ distinct,

Supposons qu'il existe $p^* \in \mathbb{P}^{\leq n}$ tq $(p^*, E) \in \ker(g)$




Soit $p^* \in \mathbb{P}^{\leq n}$.

Montrons qu'il existe une racine entre chaque $x_i$

~~Cas de base:~~

~~$p^*(x_0)+E=0$ et $p^*(x_1)-E=0$.~~

~~On a alors que $p^*(x_0)=-E$ et $p^*(x_1)=E$~~

~~donc $p^*(x_0)p^*(x_1)<0$ (car $E\neq 0$) et $p^*$ continue (polynome).~~

~~On a donc par le TVI que $\exists x_{0,1}\in\mathbb{R}$ tq $p^*(x_{0,1})=0$.~~

~~Cas de récurrence: On suppose qu'on est à l'étape $k+1$ et donc~~ qu'on ai $k$ racines.

Soit $i \in \{0,\dots,n\}$, on sait que $x_i \neq x_{i+1}$

On a que $p^*(x_i)+(-1)^i E=0$ ie $p^*(x_i)=(-1)^i E$

et $p^*(x_{i+1})+(-1)^{i+1}E=0$ ie $p^*(x_{i+1})=(-1)^{i+1}E$.

On a donc que $p(x_i)p(x_{i+1})=(-1)^{2i+1}E^2=-E^2<0$ car $E\neq 0$ par hyp.

or $p^*$ est un polynome et est donc continu.

Par le TVI, on a donc qu'il existe un $\xi_i$ tq $p^*(\xi_i)=0$ $\forall 0\leq i\leq n$.

On a donc que $p^*(x)$ possède $n+1$ racine or $p^*\in\mathbb{P}^{\leq n}$.

Il est donc forcément nul.

ie $\forall i\in\{0,\dots,n+1\}$ $p^*(x_i)+E(-1)^i=0 \Leftrightarrow \underbrace{(-1)^i}_{\neq 0} E=0$

$\Leftrightarrow E=0$

ce qui contredit que $E\neq 0$.

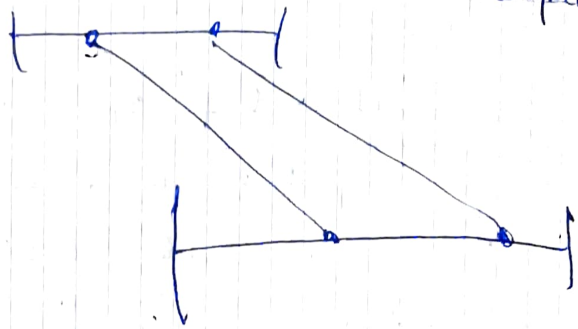
On a donc bien que $\ker(g)=\{0_{\mathbb{R}\times\mathbb{P}^{\leq n}}\}$

et donc, le système possède une seule et unique équation.

$\square$

$$|E| = \|f-p^*\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p^*(x)|$$

(normalement sup mais $f-p^*$ cont sur un compact → TBA)



$|p_{k+1}-p_k| \le \varepsilon$

$|a - b| \le \varepsilon |a||b|$

2 décembre

$$(f-p_{k+1})(x_i) \qquad f-p_k(x_i)$$

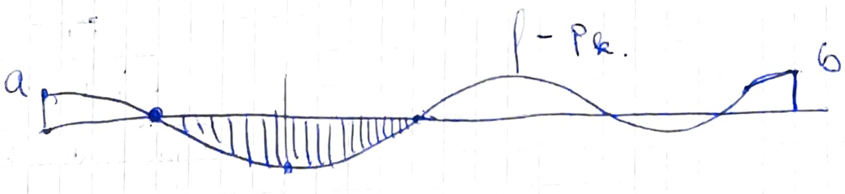
$$\max_{0\le i\le n+1} |p_{k+1}(x_i) - p_k(x_i)| \le \varepsilon\left(\max_{0\le i\le n+1} |p_{k+1}(x_i)| + \max_{0\le i\le n+1} |p_k(x_i)|\right) + \delta$$

b) $\max_{a\le x\le b} \left(|p_{k+1}(x_i) - p_k(x)| \le \varepsilon(|a|+|b|) + \delta\right.$ avec $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_+^*$

max

$\forall i$

$$(ax_i+b-y_i)(ax_i+b-y_i) = (ax_i)^2 + 2ax_ib + 2ax_iy_i + b^2 + 2bx_iy_i + (y_i)^2$$
$$= (ax_i)^2 + b^2 + y_i^2$$




c) On prends $\frac{x_1+x_2}{2}$ et on regarde son signe

~~puis on alterne le~~

si $\frac{x_1+x_2}{2} > 0$, on cherche un max local

Sinon on cherche un min local.

puis on alterne sur les intervalles.

Q3 : b)

On veut minimiser la fonction ~~qui est~~ définie comme suit

$$m\ f : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\left((B_k)_{0\le k\le m}, (C_k)_{0\le k\le m}\right) \longmapsto \left(\|f - g\|_{L_2}\right)^2$$

avec $\|f-g\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \left((f-g)(t)\right)^2 dt}$ où $[a,b]$ est le domaine de $f$.
ici $a=0$, $b=2\pi$

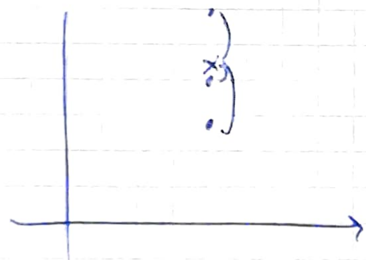
$$= \sqrt{\int_0^{2\pi} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m} B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right)^2 dt}$$

$$= \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt - 2\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\left(\sum_{k=0}^{m} B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right) dt \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{m} B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right)^2 dt \right\}^{\cancel{1/2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt - 2\left(\sum_{k=0}^{m} \int_0^{2\pi} f(t)\cdot B_k \sin(kt)\, dt + \int_0^{2\pi} f(t)\, C_k \cos(kt)\, dt\right)$$

$$+ \int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{m} B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right)^2 dt \Big\}^{\cancel{1/2}}.$$



b) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.
On veut que $\partial_{B_j} m = 0$

On a que $\partial_{B_j} m = \partial_{B_j} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(f - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt))\right)^2 dt$

$$= \int_0^{2\pi} \partial_{B_j} \left(f - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt))\right)^2 dt \quad \text{(par inversion d'intégrales)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \partial_{B_j} \left(f - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right) \cdot 2\left(f - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right) dt \quad \text{(dérivée de fct composée)}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin(jt) \cdot \left(f - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt))\right) dt.$$

(linéarité de $\int$)

$$0 = \int_0^{2\pi} \sin(jt) \cdot f(t) - \left(\sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt)\sin(jt) + C_k \cos(kt) \sin(jt))\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(jt) f(t)\, dt = \underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} B_k \sin(kt)\sin(jt)\, dt}_{A=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} B_j \sin^2(jt)\, dt}_{C=\pi B_j}$$
$$+ \underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} C_k \sin(jt) \cos(kt)\, dt.}_{B}$$

$$\cancel{\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \sin(kt)\, dt = \left[-\sum_{k=0}^{n} B_k \cos(kt)\right]_0^{2\pi} = -\sum_{k=0}^{n} B_k \cos + \sum_{k=0}^{n}}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \sin(kt) \sin(jt)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \frac{1}{2}(\cos((k-j)t) - \cos((k+j)t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k (\cos((k-j)t) - \cos((k+j)t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \cos((k-j)t) - \sum_{k=0}^{n} B_k \cos((k+j)t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \cos((k-j)t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} B_k \cos((j+k)t)\, dt \quad \text{(par linéarité)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \int_0^{2\pi} \cos((j-k)t)\,dt - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \int_0^{2\pi} \cos((j+k)t)\,dt.$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \left[\sin((j-k)t)\right]_0^{2\pi} - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \left[\sin((j+k)t)\right]_0^{2\pi} \right.$$ par thm fond.

$$= \frac{1}{2}\left( \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \left( \underbrace{\sin(\overbrace{(j-k)}^{\in\mathbb{Z}}2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(\overbrace{(j-k)}^{\in\mathbb{Z}}0)}_{=0}\right) - \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} B_k \left(\underbrace{\sin(\overbrace{(j+k)}^{\in\mathbb{Z}}2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(\overbrace{(j+k)}^{\in\mathbb{Z}}0)}_{=0}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Donc $A = 0$

$$B = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} C_k \sin(jt)\cos(kt)\,dt$$

par linéarité de l'intégrale.

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \int_0^{2\pi} \sin(jt)\cos(kt)\,dt$$

formule trigo.

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\sin((j+k)t) + \sin((j-k)t)\right) dt$$

lin de $\int$.

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \left( \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\overbrace{(j+k)}^{\in\mathbb{Z}}t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(\overbrace{(j-k)}^{\in\mathbb{Z}}t)\,dt \right)$$

thm fond.

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \left( \frac{1}{2}\left[-\cos((j+k)t)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[-\cos((j-k)t)\right]_0^{2\pi} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{1}{2}\left( -\underbrace{\cos((j+k)2\pi)}_{1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} - \underbrace{\cos((j-k)2\pi)}_{=1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_k \frac{1}{2}(2-2) = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(jt) f(t)\,dt = \pi B_j$

ie: $\displaystyle B_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(jt) f(t)\,dt.$

$$\partial_{C_j} m = 2\int_0^{2\pi} \cos(jt)\cdot\left(f(t) - \sum_{k=0}^{m} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)\right)dt$$

or $\partial_{C_j} m = 0$

$$\iff \int_0^{2\pi} \cos(jt)\, f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m} B_k \sin(kt)\cos(jt)\,dt \Big) = A$$

$$+ \int_0^{2\pi} C_j \cos^2(jt)\,dt \Big) = \pi C_j$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \cos(kt)\cos(jt) \Big) = B$$

$$A = \sum_{k=0}^{m} B_k \int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(jt)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((j+k)t) + \sin((j-k)t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{1}{2} \left( \int_0^{2\pi} \sin((j+k)t)\,dt + \int_0^{2\pi} \sin((j-k)t)\,dt \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{1}{2} \left( \Big[-\cos((j+k)t)\Big]_0^{2\pi} + \Big[-\cos((j-k)t)\Big]_0^{2\pi} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{1}{2} \Big( -\underbrace{\cos((j+k)2\pi)}_{=1} + \underbrace{\cos((j+t)0)}_{=1} + -\underbrace{\cos((j-k)2\pi)}_{=1} + \underbrace{\cos(0)}_{=1} \Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} B_k \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

$$B = \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \cos(kt)\cos(jt)\,dt \Big) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((j+k)t) + \cos((j-k)t)\,dt$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \frac{1}{2} \left( \Big[\sin((j+k)t)\Big]_0^{2\pi} + \Big[\sin((j-k)t)\Big]_0^{2\pi} \right)$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \frac{1}{2} \Big( \underbrace{\sin(\overbrace{(j+k)}^{\in\mathbb{Z}}2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \underbrace{\sin(\overbrace{(j-k)}^{\in\mathbb{Z}}2\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \Big).$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} C_k \frac{1}{2}(0) = 0$$

$(**)$ $C_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(0) \cdot 1 \, dt = \frac{1}{\pi} \cancel{\int} \left[ x \right]_0^{2\pi} = 2$

$$\partial_{C_0} m = 2 \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(0t)}_{=1} \cdot \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt) \right) dt$$

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t) \, dt - \cancel{\int_0^{2\pi} \sum_{k \neq 0}^{k} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)) dt} - \underbrace{\int_0^{2\pi} C_0 \, dt}_{= 2\pi C_0}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt$$

$\cos(0)^2 = 1$

$$(*) \quad \partial B_0^m = 2 \int_0^{2\pi} \sin(0t) \cdot \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)) \right) dt$$

$$0 = \underbrace{\int_0^{2\pi} 0 \cdot f(t) \, dt}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sum_{k \neq 0}^{n} (B_k \sin(kt) + C_k \cos(kt)) \, dt - \int_0^{2\pi} B_0 \cdot \sin(0)^2 \, dt}_{=0} \quad \cancel{=0}$$

$$\int_0^{2\pi} B_0 \cdot \sin(0)^2 + C_0 \cdot \cos(0) \sin(0) \, dt.$$

$0 = 0$, Peut importe la valeur de $B_0$, sa dérivée vaut 0.
On peut donc poser $B_0 = 0$, cela n'as aucune incidence.

$(x-y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2)$

$$\lim_{\|B_0, \dots, B_k, C_0, \dots, C_k\| \to \infty}$$

$$g = \sum_{k=1}^{N} B_k \sin(kt) + \sum_{k=0}^{N} C_k \cos(kt)$$

$$\|B_0, \dots, B_k, C_0, \dots, C_k\|_2^2$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} B_k^2 + C_k^2 \right| = \sum_{k=0}^{n} B_k^2 + C_k^2 \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

On sait que l'on doit montrer que $\|f-g\|_{L_2}^2$ est coercive malheureusement toutes nos tentatives ont été infructueuses.