Analysis II - 2014.03.10

Differentialrechnung mehrerer Variablen

Beispiel: $f(x,y) = x^2 \cos y$ Mit x fest $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \cos y$ Mit y fest $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y$ *partielle* Ableitung.

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$. f heisst *(total) differenzierbar* in $\xi \in U$, falls

$$f(x) = f(\xi) + (\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - \xi_i)) + o(|x - \xi|) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), x - \xi \rangle + o(|x - \xi|)$$

für $x \to \xi$. *Fakt*: Die a_i sind dann eindeutig bestimmt.

Fakt: diff'bar $\implies$ stetig.

Def: $(\text{grad}\, f)(\xi) := (\nabla f)(\xi) := (a_1..a_n)$ heisst *Gradient*, *"Nabla"* f oder *erste Ableitung von* f in ξ. Ist f in jedem Punkt von U diff'bar, so ist ∇f eine Funktion $U \to \mathbb{R}^n$.

Geometrische Interpretation: Graph$(x \mapsto f(\xi) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - \xi_i))$ = Tangentialhyperebene an Graph(f) in $(\xi, f(\xi))$.

Sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor, dann heisst $D_e f(\xi) = \frac{d}{dt} f(\xi + te) \mid_{t=0}$ die *Richtungsableitung* von f in Richtung e im Punkt ξ. Ist f total diff'bar in ξ, dann gilt:

$$f(\xi + te) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), te \rangle + o(|te|) = f(\xi) + \langle \nabla f(\xi), e \rangle t + o(t)$$

für $t \to 0$. Also existiert die Richtungsableitung und ist $D_e f(\xi) = \langle \nabla f(\xi), e \rangle$.

Geometrische Interpretation $\nabla f(\xi)$ gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von f an.

Spezialfall: $e = (0,..,0,1,0,..) \rightsquigarrow f(\xi + te) = f(\xi_1,..,\xi_{i-1}, \xi_i + t, \xi_{i+1}, ...\xi_n)$
$\Rightarrow D_{e_i} f(\xi) =$ Ableitung von $f \mid_{\xi_j}$ für alle $j \neq i$ $=: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$
partielle Ableitung von f bezüglich x_i.
Für $\nabla f(\xi) = (a_1..a_n)$ ist $\langle \nabla f(\xi), e_i \rangle = a_i$. Also gilt $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n})$

Beispiel: Die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
ist differenzierbar ausserhalb $(0,0)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{d}{dx}(\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \Bigg|$ Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Richtungsableitung? $e = (a,b)$ mit $a^2 + b^2 = 1$.
$f((0,0) + et) = f(at, bt) = \begin{cases} \frac{atbt}{(at)^2 + (bt)^2} = ab & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow$ Richtungsableitung existiert nicht, da unstetig für $t = 0$. Also ist f nicht total diff'bar.

Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \Bigg| \rightsquigarrow f(at,bt) = \begin{cases} \frac{(at)^2bt}{(at)^2+(bt)^2} = a^2bt & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow$ Rightungsableitung ist $D_ef(0,0) = a^2b$. Insbesondere $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$
$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow f$ ist zwar stetig, aber nicht diff'bar in $(0,0)$.

Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}$
$|x|,|y| \leq |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ Damit ist $|f(x,y)| \leq |(x,y)|^2 = o(|(x,y)|)$
$\Rightarrow f(x,y) = f(0,0) + 0(x-0) + 0(y-0) + o(|(x,y)-(0,0)|)$
$\Rightarrow f$ ist diff'bar in $(0,0)$ mit $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Def: f heisst stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und ∇f stetig ist.

Satz: f ist stetig differenzierbar genau dann, wenn sie partiell diff'bar ist und ∇f stetig ist.

Beispiel: Die Funktionen $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x+y, \quad m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ sind differenzierbar, mit $\nabla p = (1,1), \quad \nabla m = (y,x)$.

Kettenregel: *Satz*: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen $f : X \to \mathbb{R}$ diff'bar. Seien $g_1..g_n : I \to X$ diff'bar für $I \in \mathbb{R}$. Dann ist $I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(g_1(t)..g_n(t))$ diff'bar mit Ableitung
$\frac{d}{dt}(f(g_1(t))..f(g_n(t))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1(t)..g_n(t))\frac{dg_i}{dt}$

Beweis: $\tau \in I$
$f(g_1(t)..g_n(t)) = f(g(\tau)) + (\sum_{i=1}^n + \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))(g_i(t) - t_i(\tau))) + o(|g(t) - g(\tau)|)$
$= f(g(\tau)) + (\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))(\frac{dg_i}{dt}(\tau)(t-\tau) + 0(t-\tau))) + o(|t-\tau|)$
$= f(g(\tau)) + (\sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(\tau))\frac{dg_i}{dt}(\tau))(t-\tau) + o(|t-\tau|)$

Folge: Jede aus differenzierbaren Funktionen und den Grundrechenarten zusammengesetzte Funktion ist diff'bar.