Analysis II - 2014.03.17

Erinnerung: Kettenregel. $\frac{d}{dt}f(g_1(t),g_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt}$
$m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy \Rightarrow \frac{d}{dt}(g_1(t)g_2(t)) = g_2 g_1' + g_1 g_2'$

Ableitung unter dem Integral: *Satz*: Sei $f(x,t)$ stetig diff'bar, und seien $a(t), b(t)$ diff'bar. Dann ist $t \mapsto \Psi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$ diff'bar mit

$$\Psi'(t) = b'(t)f(b(t),t) - a'(t)f(a(t),t) + \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Beweis: $\Psi(\alpha,\beta,t) = \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx$ ist diff'bar. Setze Kettenregel ein.

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$
Beweisskizze: $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ hat stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ durch $0 \mapsto 1$.
Betrachte $I_c(t) := \int_0^c e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow} I_c$ diff'bar und
$\frac{dI_c}{dt} = \int_0^c (-x)e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_0^c e^{-tx}\sin x\,dx = \frac{-1}{2i}\int_0^c (e^{(i-t)x} - e^{(-i-t)x})\,dx$
$= \frac{-1}{2i}\left(\frac{e^{(i-t)x}}{i-t} - \frac{e^{(-i-t)x}}{-i-t}\right|_{x=0}^{c} = \frac{-1}{2i}\left(\frac{e^{(i-t)c}-1}{i-t} - \frac{e^{(-i-t)c}-1}{-i-t}\right) = \frac{e^{-tc}}{1+t^2}(\cos c + t\sin c) - \frac{1}{1+t^2}$
$\Rightarrow I_c(t) - I_c(0) = \int_0^t \frac{dI_c}{dt}\,dt = \int_0^t \frac{e^{-tc}}{1+t^2}(\cos c + t\sin c)\,dt - \int_0^t \frac{1}{1+t^2}\,dt \Rightarrow |\int_0^t \text{"}\,dt| \leq \int_0^t e^{-ct}dt \leq \frac{1}{c}$
$\Rightarrow \lim\limits_{c\to\infty}(I_c(t) - I_c(0)) = -\int_0^t \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t$
D.h. $\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\arctan t \qquad t \to \infty :\to -\frac{\pi}{2}$
Da das erste Integral nach 0 geht, kann geschlossen werden, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Höhere Ableitungen

Definition: Eine Funktion $f(x_1..x_n)$ heisst $(k+1)$-mal diff'bar, wenn sie diff'bar ist und jedes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1..x_n)$ k-mal diff'bar ist. Dito für stetig diff'bar.

Zweite Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$
Abkürzung: $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad f_{x_i x_j x_k} = ...$
Also ist f k-mal stetig diff'bar, falls f k-mal diff'bar ist und $\frac{\partial^k f}{\prod_{n=1}^k \partial_{i_n}}$ stetig ist für alle $i_1..i_k \in 1..n$

Sei $f(x,y)$ beliebig oft diff'bar. Taylor bezüglich x in x_0:
$f(x,y) = (\sum_{i=0}^k \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x_0,y)\frac{(x-x_0)^i}{i!}) + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(\xi,y)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$
At this point he's expanding the first factor of the sum, I think? Anyway, he writes:
$\sum_{j=0}^{k-i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}(\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^j}{j!} + \frac{\partial^{k-i+1}}{\partial y^{k-i+1}}(\frac{\partial f}{\partial x^i})(x_0,\eta_i)\frac{(y-y_0)^{k-i+1}}{(k-i+1)!}$

$$\Rightarrow f(x,y) = \left.\begin{array}{l} \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq k}} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial y^j \partial x^i}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\frac{(y-y_0)^j}{j!} + \\ \sum_{0\leq i\leq k} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k-i+1}\partial x^i}(x_0,\eta_i)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\frac{(y-y_0)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} + \\ \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(\xi,y)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \end{array}\right\} \text{Erster Summand} + O(|(x-x_0,y-y_0)|^{k+1})$$

Satz: Ist $f(x,y)$ k-mal diff'bar, so gilt:

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq k}} \frac{\partial^k f}{\partial y^j \partial x^i}(x_0,y_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!} \frac{(y-y_0)^j}{j!} + o(|(x-x_0, y-y_0)|^k)$$

Satz: Für jede k-mal stetig diff'bare Funktion ist jede k-te Ableitung von der Reihenfolge unabhängig.

Beispiel: $r(x_1..x_n) := \sqrt{\sum_{l=1}^n x_l^2}$ ist beliebig oft diff'bar auf $\mathbb{R}^n_{\setminus\{(0..0)\}}$
$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{l=1}^n x_l^2}} = \frac{x_i}{r}$ $\quad i \neq j \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{x_i}{r}) = -\frac{x_i}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{x_i x_j}{r^3}$ $\quad i = j \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x_i} = .. = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$

$\rightsquigarrow$ *Matrix*:

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{r^2-x_1^2}{r^3} & \cdots & \frac{-x_1 x_n}{r^3} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-x_n x_1}{r^3} & \cdots & \frac{r^2-x_n^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

