Analysis II - 2014.03.24

Erinnerung: Kritischer Punkt: $\nabla f = 0$, nicht ausgeartet: $\det \nabla^2 f \neq 0$, etc. See prev. doc.

Beispiel: Zwei Partikel an den Stellen $0 < x < y < 1$ mit Abstossungskräften proportional zum Kehrwert des Abstandes zum Rand und dem anderen Partikel. Wo ist ein Gleichgewicht, und ist es *stabil*?

Lösung: Energie: $E = \log\frac{1}{x} + 2\log\frac{1}{y-x} + \log\frac{1}{1-y} = -\log x - 2\log(y-x) - \log(1-y)$
$\nabla E = (-\frac{1}{x} + \frac{2}{y-x},\ \frac{-2}{y-x} + \frac{1}{1-x})$
Krit. Punkte: $\frac{1}{x} = \frac{2}{y-x} \iff y - x = 2x,\ \frac{1}{1-y} = \frac{2}{y-x} \iff y - x = 2(1-y) \Rightarrow x = \frac{1}{4} \wedge y = \frac{3}{4}$
$\nabla^2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(y-x)^2} & \frac{-2}{(y-x)^2} \\ \frac{-2}{(y-x)^2} & \frac{2}{(y-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla^2 E(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = 8\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-1)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4) \Rightarrow \text{EWe} > 0 \Rightarrow$ pos.def.
$\Rightarrow$ E hat isoliertes, lokales Minimum in $(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}) \Rightarrow$ stabil.

Globale Extrema

Erinnerung: Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ für $\varnothing \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt hat ein Minimum und ein Maximum.

Fakt: Sei f diff'bar. Jede Extremalstelle von f ist entweder ein kritischer Punkt von $f \mid K^\circ$ (Inneres) oder eine Extremalstelle von $f \mid \partial K$ (Rand). Für den Rand teilen wir ∂K in Stücke auf und eliminieren auf jedem eine Variable.

Beispiel: Finde die Extrema von $f(x,y) := x^3 - 18x^2 + 81x + 12y^2 - 144y + 24xy$ auf $B := \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$

Lösung: Auf $B^\circ : \nabla f = (3x^2 - 36x + 81 + 24y,\ 24y - 144 + 24x)$
Kritische Punkte: Diff: $3x^2 - 36x + 81 + 144 - 24x = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-15) = 0$
Da 15 sowieso nicht im Bereich liegt, müssen wir nur 5 probieren: $24(-6+5) = 0 \Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow$ Kandidat $(5,1)$

Auf Teilmenge $y = 0,\ 0 < x < 10,\ f(x,0) = x^3 - 18x^2 + 81x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x,0) = 3(x-3)(x-9)$
$\Rightarrow$ Kandidaten $(3,0)$ $(9,0)$

Auf Teilmenge $x = 0,\ 0 < y < 10$
$\Rightarrow$ Kandidaten $(0,6)$ $(0,0)$

Auf Teilmenge $x + y = 10,\ 0 < y < 10$
$\Rightarrow$ Kandidaten $(5,5)$

$\Rightarrow$ Eckpunkte $(0,10)$ $(10,0)$ $(0,0)$

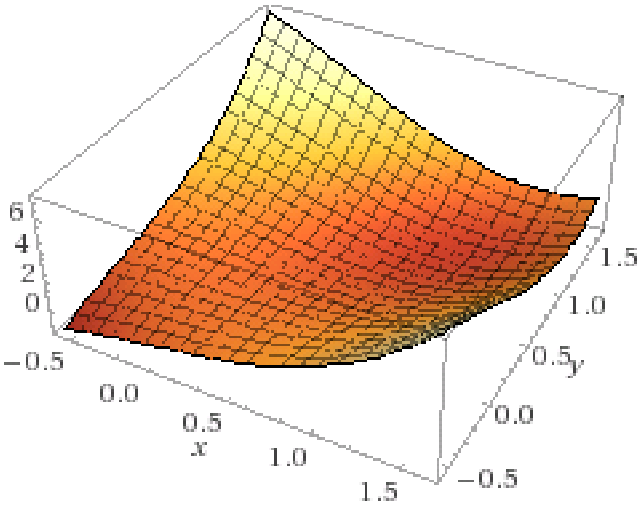
(x,y)	$f(x,y)$	
$(5,1)$	68	
$(3,0)$	108	
$(9,0)$	0	
$(0,6)$	-432	MIN
$(5,5)$	260	MAX
$(0,0)$	0	
$(10,0)$	10	
$(0,10)$	-240	

Implizite Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ $k \geq 1$ mal stetig diff'bar.
Definition: Ein Punkt $x \in U$ mit $\nabla f(x) \neq (0..0)$ heisst *regulärer Punkt von f*.

Satz: Sei $\xi = (\xi_1..\xi_{n+1})$ ein regulärer Punkt von f mit $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\xi) \neq 0$ und $\xi \in G := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$. Dann existieren eine offene Teilmenge $V \times I \subset U$ mit $\xi \in V \times I$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ und eine k-mal stetig diff'bare Funktion $\varphi : V \to I$, sodass $\text{Graph}(\varphi) = G \cap (V \times I)$ ist. Für die gilt also $\varphi(\xi_1..\xi_n) = \xi_{n+1}$ und $\forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\xi_1..\xi_n) = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) / \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(\xi)$

Beispiel: $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ und $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$



Die maximalen Zweige von G, die Graph einer Funktion sind, sind $\{(x, y) \in G \mid x < 0\}$, $\{'' \mid x > 0 \wedge y < 0\}$, $\{'' \mid 0 < x < \sqrt[3]{4} \wedge 0 < y < \sqrt{x}\}$, $\{'' \mid 0 < x < \sqrt[3]{4} \wedge y > \sqrt{x}\}$

$(\xi, \eta) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \Rightarrow f(\xi, \eta) = (\frac{2}{3})^3 + (\frac{4}{3})^3 - 3\frac{2}{3}\frac{4}{3} = 0 \Rightarrow (\xi, \eta) \in G$
$\nabla f = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$ $\nabla f(\xi, \eta) = (-\frac{8}{3},\ \frac{10}{3})$ $\frac{d\varphi}{dx}(\xi) = -(-\frac{8}{3})^3 / (\frac{10}{3})^3 = \frac{4}{5}$

$f(x, y) = f(\xi, \eta) + \nabla f(\xi, \eta)(x - \xi,\ y - \eta) + o(|(x - \xi,\ y - \eta)|)$
$\Rightarrow$ Falls $\nabla f(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ ist, ist $f(\xi, \eta) + \nabla f(\xi, \eta)(x - \xi, y - \eta) = 0$ die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x, y) = 0$ in (ξ, η).