Analysis II - 2014.05.19

Satz von Green

Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit stückweise C^1-Rand. Sei K ein C^1-Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $X \subset U$. Dann gilt: $\int_X \operatorname{rot} K \cdot d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K \cdot d\binom{x}{y}$.
$K = (K_1, K_2) \Rightarrow \operatorname{rot} K = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}$

Beweisskizze. : Reduktion durch Grenzübergang und Zerschneiden auf den Fall, dass X sowohl x-einfach als auch y-einfach ist. x-einfach bedeutet: $X = \left\{\binom{x}{y}\Big|_{\varphi(x)\leq y\leq\psi(\alpha)}^{a\leq x\leq b}\right\}$ für stückweise C^1-Funktionen $\varphi \leq \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Linke Seite: $\int_X \frac{\partial K_1}{\partial y}\, d\operatorname{vol}_2 \overset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial K_1}{\partial y})\, dx = \int_a^b (K_1|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}\ dx$
$= \int_a^b K_1 \binom{x}{\psi(x)}\ dx - \int_a^b K_1 \binom{x}{\varphi(x)}\ dx$

Rechte Seite: $\int_{\partial K} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$ $\quad \int_{\gamma_2}(K_1, 0) \cdot d\binom{x}{y} \overset{\text{def}}{=} \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} (K_1, 0)\binom{0}{1}\ dt = 0$
$\gamma_2 : [\varphi(b), \psi(b)] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{b}{t} \quad \gamma_2' = \binom{0}{1}$
$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{t}{\varphi(t)} \quad \gamma_1'(t) = \binom{1}{\varphi'(t)}$
Genauso: $\int_{\gamma_4} = 0 \quad \int_{\gamma_1}(K_1, 0) \cdot d\binom{x}{y} = \int_a^b (K_1, 0) \cdot \binom{1}{\varphi'(t)}\ dt = \int_a^b K_1 \binom{t}{\varphi(t)}\ dt$
Einsetzen in linke Seite: $= -\int_{\gamma_3}(K_1, 0)d\binom{x}{y} - \int_{\gamma_1}(K_1, 0)d\binom{x}{y} = -\int_{\partial X}(K_1, 0)d\binom{x}{y}$

Also: $\int_X \frac{\partial K_1}{\partial y}\partial\operatorname{vol}_2\binom{x}{y} = -\int_{\partial X}(K_1, 0) \cdot d\binom{x}{y}$ analog: $\int_X \frac{\partial K_2}{\partial x} d\operatorname{vol}\binom{x}{y} = +\int_{\partial X}(0, K_2) \cdot d\binom{x}{y}$
$\Rightarrow \int_X (\frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}) d\operatorname{vol}_2\binom{x}{y} = \int_{\partial X}(K_1, K_2)d\binom{x}{y}$ □

Bemerkung: $\int_\gamma K \cdot d\binom{x}{y}$ misst die *Zirkulation* von K längs γ. Die entsprechende Dichte ist die Rotation $\operatorname{rot} K$.

Definition: Ist $\operatorname{rot} K = 0$, so heisst K *rotationsfrei*. Dann ist $\int_{\partial X} K \cdot d\binom{x}{y} = 0$

Vorsicht: Für einen geschlossenen Weg im Definitionsbereich X von K gilt im Alggemeinen $\int_\gamma K\ d\binom{x}{y} = 0$ nur, wenn $\gamma = \partial X$ für $X \subset U$.

Spezialfall: Flächeninhalt: $K\binom{x}{y} = (0, x)$ oder $(-y, 0)$ oder $\frac{(-y,x)}{2}$
$\operatorname{rot} K = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \rightsquigarrow \operatorname{rot} K = 1$

Beispiel: Flächeninhalt unter einem Bogen einer Zykloiden
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} r(t-\sin t) \\ r(1-\cos t) \end{pmatrix} \quad \delta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \binom{t}{0} \quad \partial X = -\gamma + \delta$
$\Rightarrow \operatorname{vol}_2(X) \overset{\text{def.}}{=} \int_X 1 \cdot d\operatorname{vol}_2 \overset{\text{Green}}{=} \int_{-\gamma+\delta}(-y, 0) \cdot d\binom{x}{y} = -\int_{-\gamma+\delta} y\ dx \quad \int_\delta y\ dx = \int_0^{2\pi r} 0\ dt = 0$
$\int_\gamma y\ dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos t) \cdot \frac{d}{dt}(r(t - \sin t))\ dt = \int_0^{2\pi} r^2(1 - \cos t)^2\ dt = 3\pi r^2$
$\Rightarrow \operatorname{vol}_2(X) = -\int_{-\gamma+\delta} y\ dx = \int_\gamma y\ dx - \int_\delta y\ dx = 3\pi r^2$

Polarplanimeter: Benutze Polarkoordinaten $\binom{x}{y} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$
$\Rightarrow \mathrm{vol}_2(X) = \int_{\partial X} \frac{x\,dy - y\,dx}{2} = .. = \int_{\partial X} \frac{r^2}{2}\,d\varphi$
$m=$ Länge Leitarm, $l=$ Länge Führarm, $r=$ Abstand Stift, φ Winkel Leitarm, ψ Winkel Arme
Kosinussatz: $\Rightarrow r^2 = m^2 - l^2 + 2rl\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{vol}_2(X) = \int_{\partial X} \frac{m^2-l^2+2rl\cos\varphi}{2}\,d\varphi = \int_{\partial X} rl\cos\varphi\,d\varphi$
Position des Stifts $re^{i\varphi}$ Position des Zählrads $re^{i\varphi} = e^{i(\varphi+\psi)}\underbrace{\omega}_{\in\mathbb{C}\text{const.}}$ Rollrichtung $= re^{i(\varphi+\psi)}$

Anteil der Bewegung in Rollrichtung $= \mathrm{Re}(\frac{\partial\delta}{ie^{i(\varphi+\psi)}})$

Continued next time.