Analysis II - 2013.03.13

Erinnerung: f diff'bar in $\xi \iff f(x) = f(\xi)\langle\nabla f(\xi), x-\xi\rangle + o(|x-\xi|) \quad \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$
Kettenregel: $f, g_1, .., g_n$ diff'bar $\Rightarrow$ dito $f(g_1(t), .., g_n(t))$ und $\frac{d}{dt}(f(g_1(t), .., g_n(t))) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))\frac{dg_i}{dt}$
$= \langle\nabla f(g(t)), \frac{dg}{dt}\rangle$

Beispiel: $f(x,y) = x^2+y^2, \quad g(t) := (\cos t, \sin t) \quad \Rightarrow f(g(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$
$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f(g(t))) = 0$ Nachrechnen: $\frac{dg}{dt} = (-\sin t, \cos t), \quad \nabla f = (2x, 2y)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(g(t))\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))\frac{dg_2}{dt} = 2\cos t\frac{dg_1}{dt} + 2\sin t\frac{dg_2}{dt} = 2\cos t(-\sin t) + 2\sin t(\cos t) = 0$

Beispiel: Berechne näherungsweise $\alpha := \sqrt{3.03^3 + 3.95^2} = |(3.03, 3.95)|$
Lösung: $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ ist diff'bar bei $(x,y) = (3,4), \quad f(3,4) = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$\Rightarrow f(3.03, 3.95) = f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)(3.03-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)(3.95-4) + o(|(0.03, -0.05)|)$
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2y^2}}, \quad \Rightarrow \quad \simeq 5 + \frac{3}{5}(0.03) + \frac{4}{5}(-0.05) = 5 + 0.018 - 0.04 = \underline{4.978}$
Wahrer Wert: 4.97829..

Beispiel: $(0,0) \to (0,-1) : 20\%$ bergab, $\quad (0,0) \to (1,-1) : 25\%$ bergab.
Annahme: Höhenfunktion h diff'bar.
$\nabla h(0,0) = (a,b) \Rightarrow \langle(a,b),(0,-1)\rangle =$ Anstieg in Richtung $(0,1) =$ Süden.
$\langle(a,b),(0,-1)\rangle = -b = -20\% = \frac{-1}{5} \Rightarrow b = \frac{1}{5}$
$\langle(a,b),(1,-1)\rangle = \frac{a-b}{\sqrt{2}} = +25\% = \frac{1}{4} \Rightarrow a = b + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
$\Rightarrow \nabla h(0,0) = (\frac{1}{5}\sqrt{2}4, \frac{1}{5})$
Dieser Vektor gibt die Richtung des steilsten Anstiegs an, sein Betrag den max. Anstieg.
$\Rightarrow |(\frac{1}{5} + \sqrt{2}4, \frac{1}{5}| \simeq 0.59 = 59\%, \quad (\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{5}) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \Rightarrow \frac{1/5}{1/5+\sqrt{2}/5} = \tan\varphi$
$\Rightarrow \varphi = arct(\frac{1/5}{1/5+\sqrt{2}/4}) \simeq 19.86^\circ + k\pi$

Definition: Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ deren Durchschnitt mit jeder zur (y/x)-Achse parallelen Geraden leer oder eine Intervall ist, heisst (y/x)-einfach.

Beispiel: Für $I \subset \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ ist $\{(x,y)|x \in I, \quad \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ y-einfach.

Erinnerung: Jede auf einem *Intervall definierte*, diff'bare Funktion f mit ableitung 0 ist konstant.

Fakt: ist $X \subset \mathbb{R}^2$ y-einfach und $f : X \to \mathbb{R}$ hat überall $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, dann hängt $f(x,y)$ nur von x ab. Das heisst, dann existiert eine Funktion $U \to \mathbb{R}$ mit $\forall(x,y) \in X : x \in U$ und $f(x,y) = g(x)$. Analog für mehrere Variablen.

Beispiel: $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$. Dies ist nicht y-einfach.
$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 0 \vee x \geq 0 \\ x^n & \text{falls } y > 0 \wedge x < 0 \end{cases}$$

Ableiten unter dem Integral

Satz: Sei $X \subset \mathbb{R}$, und $f : [a,b]X \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto f(x,t)$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}$. Dann ist die Funktion

$$\Phi : X \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int\limits_a^b f(x,t)\, dx \quad \text{diff'bar mit} \quad \frac{d\Phi}{dt} = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx$$

Beispiel: $\Phi_\alpha := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x} dx$ mit $\alpha \geq 0$. Bei $x = 0$ mit 0 stetig fortgesetzt. Bei $x = 1$ besitzt auch stetige Fortsetzung $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim\limits_{x \to 1+} \alpha x^\alpha = \alpha$
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^\alpha - 1}{\log x}) = \frac{\log x \cdot x^\alpha}{\log x} = x^\alpha$
$\Rightarrow \Phi$ diff'bar und $\frac{d\Phi}{d\alpha} = \int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+}}{\alpha+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$
$\Rightarrow \Phi_\alpha = \int \frac{1}{\alpha+1}\, d\alpha = \log(\alpha+1) + c$
Aber $\Phi_0 = \int_0^1 \frac{x^0 - 1}{\log x}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0 = \log(0+1) + c = c$
$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow \forall \alpha \geq 0 : \in_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx = \log(\alpha+1)$

Variante: *Satz*: Sei f eine stetig diff'bare Funktion (x,t). Dann ist, wo definiert $(a,b,t) \mapsto \Phi(a,b,t) := \int_a^b f(x,t)\, dx$ differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = f(a,t) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = f(b,t) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dt$$

