Analysis II - 2014.03.31

Beispiel: Bestimme das Maximum von $f(x_1..x_n) := x_1 \cdot .. \cdot x_n$ auf
$B := \{(x_1..x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ alle } x_i \geq 0 \quad x_1 + .. + x_n = s\}$ für $s > 0$ fest.

Lösung: Nebenbedingung $g(x_1..x_n) := x_1 + .. + x_n - s$. B kompakt, da abgeschlossen, beschränkt und nichtleer. f stetig $\Rightarrow$ Maximum existiert. Weil z.B. $(\frac{s}{n}..\frac{s}{b}) \in B$ mit $f('') > 0$
$\Rightarrow$ Maximalstelle erfüllt $x_i > 0$ für alle i.
$\Rightarrow$ lokales Extremum von f unter $g = 0$.
$\Rightarrow$ entspricht kritischem Punkt von $F(x_1..x_n) := x_1 \cdot .. \cdot x_n - \lambda(x_1 + .. + x_n - s)$
$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = x_1 \cdot .. \cdot \widehat{x_i} \cdot .. \cdot x_n - \lambda \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x_1 + .. + x_n - s) = 0 \iff \frac{x_1..x_n}{x_i} = \lambda \iff x_i = \frac{x_1..x_n}{\lambda} \iff$ alle x_i gleich $\frac{s}{n}$.
$\Rightarrow$ Die einzige Maximalstelle von f auf B ist $(\frac{s}{n}..\frac{s}{n})$ mit $f(..) = \left(\frac{s}{n}\right)^n$
$\Rightarrow \forall s \geq 0 \forall x_1..x_n \geq 0 : x_1 + .. + x_n = s : x_1 \cdot .. \cdot x_n \leq (\frac{s}{n})^n$

Folge: Für alle $x_1..x_n \geq 0$ gilt $\underbrace{\sqrt[n]{(x_1 \cdot .. \cdot x_n)}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + .. + x_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$.

Beispiel: Bestimme die Extrema von $f(x, y, z) := x$ auf
$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad 5x + 4y + 3z = 0\}$

Lösung: $g_1(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad g_2(x, y, z) := 5x + 4y + 3z$
$\Rightarrow \nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \quad \nabla g_2 = (5, 4, 3)$
Wenn die linear abhängig sind, ist $(2x, 2y, 2z) = \lambda(5, 4, 3)$ sein.
$\Rightarrow g_2(x, y, z) = \frac{\lambda}{2}(5^2 + 4^2 + 3^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow g_2(x, y, z) \neq 0$
$\Rightarrow B$ überall reguläre Kurve.
$F(x, y, z) := x + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(5x + 4y + 3z)$

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x + 5\mu &\overset{!}{=} 0 \\ F_y &= 2\lambda y + 4\mu &\overset{!}{=} 0 \\ F_z &= 2\lambda z + 3\mu &\overset{!}{=} 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &\overset{!}{=} 0 \\ F_\mu &= 5x + 4y + 3z &\overset{!}{=} 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{-1-5\mu}{2\lambda} \\ y &= \tfrac{-4\mu}{2\lambda} \\ z &= \tfrac{-3\mu}{2\lambda} \\ \lambda &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{Einsetzen} \rightsquigarrow \lambda = \pm\tfrac{\sqrt{2}}{10}$$

$\Rightarrow (x, y, z) = \pm\frac{\sqrt{2}}{10}(-5, 4, 3)$. Dort ist $f = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Diese Punkte sind die Extremalstellen.

Vektorwertige Funktionen

Ab jetzt *Spaltenvektoren.* Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f := (f_1..f_m)^T : U \to \mathbb{R}^n$

Definition: f heisst k-mal diff'bar, bzw. k-mal stetig diff'bar, wenn jedes f_i es ist.

f_i diff'bar in $\xi \iff f_i(x) = f_i(\xi) + \overbrace{\nabla f_i(\xi)}^{\text{Zeile}} \cdot \overbrace{(x - \xi)}^{\text{Spalte}} + o(|x - \xi|)$
f diff'bar in $\xi \iff f(x) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot (x - \xi) + o(|x - \xi|)$

Dabei ist $\nabla f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ *erste Ableitung von f*, *Funktionalmatrix von f*, *Jacobi-Matrix*.

Beispiel: $f(x) := \overbrace{A}^{m\times n \text{ Matrix}} x + \underbrace{b}_{\text{Spaltenvektor der Länge } m}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $f(x) = \underbrace{(A\xi + b)}_{f(\xi)} + \underbrace{A(x - \xi)}_{\nabla f(\xi)} \Rightarrow f$ diff'bar mit $\nabla f = A$.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto x \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: I_n$

Definition: Eine diff'bare Funktion f heisst *regulär in* ξ, wenn $\nabla f(\xi)$ maximalen Rang hat.

Spezialfall: $m \leq n \Rightarrow$ Zeilen von ∇f lin. unabhängig.
Bedeutung: Niveaumenge $\{x \in U \mid f(x) = c \in \mathbb{R}^m\}$ regulär.

Spezialfall: $m \geq n \Rightarrow$ Spalten von ∇f lin. unabhängig.
Bedeutung: f lokal injektiv. Bild(f) lokal glatte Teilmenge der Dimension n.

Beispiel: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},\ \nabla t = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ regulär $\iff t \neq 0$

Vergleiche: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$