Analysis II - 2014.05.22

Integralsatz von Gauss in $\mathbb{R}^2$

Green: $\int_X \operatorname{rot} \widetilde{K}\ d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} \widetilde{K} \cdot d\binom{x}{y}$

Seien X,K wie vorher, $K = (K_1, K_2)$. Setze $\widetilde{K} := (-K_2, K_1)$. Sei n ein nach aussen gerichteter Normaleneinheitsvektor. Das heisst: $\underbrace{\int_{\partial X} K \cdot n\ d\operatorname{vol}_2}_{\int K(\gamma(t))\cdot n(\gamma(t))\cdot|\gamma'(t)|\ dt = \int \widetilde{K}\ d\operatorname{vol}_1} = \int (K_1, K_2) \cdot \binom{dy}{-dx}$

$\operatorname{rot} \widetilde{K} = \frac{\partial \widetilde{K_2}}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{K_1}}{\partial y} = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} = \operatorname{div} K$
I have no idea what's going on at this point, but apparently we did a thing.

Definition: Die *Divergenz* eines Vektorfelds K auf $U \subset \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{div} K := \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + .. + \frac{\partial K_n}{\partial x_n}$

Integralsatz von Gauss:

$$\int_X \operatorname{div} K\ d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K \cdot n\ d\operatorname{vol}_1$$

Bedeutung: Divergenz: örtliche Rate der Dichtezunahme.
$\int_\gamma K \cdot n\ d\operatorname{vol}_1$= Gesamtfluss von K durch γ in Richtung n.

Beispiel: Sei $K := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $K\binom{x}{y} := \binom{ax+by}{ex+dy}$.
$\Rightarrow \operatorname{div} K = \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) + \frac{\partial}{\partial y}(cx + dy) = a + d$
$\Rightarrow \int_X \operatorname{div} K\ d\operatorname{vol}_2 = (a + d)\operatorname{vol}_2(X) = (a + d)\pi r^2$
$\Rightarrow \int_{\partial X} K \cdot n\ d\operatorname{vol}_1 = \left| \begin{array}{c} \gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto\binom{r\cos t}{r\sin t} \\ n(\gamma(t))=\binom{\cos t}{\sin t} \\ |\gamma'(t)|=|\binom{-r\sin t}{r\cos t}|=r \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \binom{ar\cos t+br\sin t}{cr\cos t+dr\sin t} \cdot \binom{\cos t}{\sin t}\, r\ dt$
$= \int_0^{2\pi} r^2(a\cos^2 t + (b + c)\cos t \sin t + d\sin^2 t)\ dt = \int_0^{2\pi} r^2(a\frac{1+\cos 2t}{2} + (b + c)\frac{\sin 2t}{2} + d\frac{1-\cos 2t}{2})\ dt$
$= \int_0^{2\pi} r^2 \frac{a+d}{2}\ dt = (a + d)\pi r^2$

Vektorielles Flächenintegral

Sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise C^1-parametrisierte Fläche, $\varphi : B \to F$ bijektiv ausserhalb Teilmengen der Dimension ≤ 1 für $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. $\varphi\binom{u}{v} \mapsto \varphi\binom{u}{v}$. Skalares Flächenelement: $|\varphi_u \times \varphi_v|$. Vektorielles Flächenelement: $\varphi_u \times \varphi_v = n \cdot |\varphi_u \times \varphi_v|$ wobei n ein Normaleneinheitsvektor auf F ist.

Erinnerung: Skalares Flächenintegral: $\int_F f\ d\operatorname{vol}_2 := \int_B (F \circ \varphi) \cdot |\varphi_u \times \varphi_v|\ d\operatorname{vol}_2\binom{u}{v}$

Definition: Vektorielles Flächenintegral: $\int_F K \cdot n\ d\operatorname{vol}_2 := \int_B (K \circ \varphi) \cdot (\varphi_u \times \varphi_v)\ d\operatorname{vol}_2\binom{u}{v}$

Definition: Eine Umparametrisierung $\psi : \widetilde{B} \to B$ heisst *orientierungserhaltend*, wenn der zu $\varphi \circ \psi$ assoziierte Normalenvektor n derselbe ist wie für φ. Ist er überall minus der zu φ, dann heist ψ *orientierungsvertauschend.*

Definition: Eine orientierte Fläche ist eine Fläche mit einem solchen System von n.

Fakt: $\int_F K \cdot n \; d\,\mathrm{vol}_2$ ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung, bzw. wechselt das Vorzeichen bei orientierungsvertauschender.

Bedeutung von $\int_X K \cdot n \, d\,\mathrm{vol}_2$: Fluss von K durch F in Richtung von n.

Integralsatz von Gauss in $\mathbb{R}^3$

Sei $X \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise C^1-parametrisierter Randfläche ∂X mit überall von X gegebenen, nach aussen gerichteten Orientierung n. Sei K ein C^1-Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit $X \subset U$.

Satz:

$$\int_X \operatorname{div} K \; dvol_3 = \int_{\partial X} K \cdot n \, d\,\mathrm{vol}_2$$

Dies heisst *Satz von Gauss*, oder auch *Divergenzsatz.*

Beispiel: $X := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \right\}$ beschreibt einen Kegel mit Spitze auf Nullpunkt und Boden mit Radius 1 an Position z. Schreibe $\partial X = F_1 \cup F_2$ mit
$F_1 = \mathrm{Bild}(\varphi : \underbrace{\left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| u^2+v^2 \le 1 \right\}}_{B} \to \mathbb{R}^3,\ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$
$F_2 = \mathrm{Bild}(\psi : \overbrace{\left\{ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| u^2+v^2 \le 1 \right\}} \to \mathbb{R}^3,\ \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2+v^2} \end{smallmatrix}\right))$
$\varphi_u \times \varphi_v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zeigt nach aussen.
$\psi_u \times \psi_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u/\sqrt{u^2+v^2} \\ -v/\sqrt{u^2+v^2} \\ 1 \end{pmatrix}$ zeigt nach innen!
Also gilt mit den von φ und ψ induzierten Orientierungen $\partial X = F_1 + (-F_2)$. Sei $K \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) := (2x - yz, xz + 3y, xy - z)$
And then a whole clusterfuck happened and I won't even try to reconstruct it here.