Analysis II - 2014.04.03

Erinnerung: $U \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ diff'bar in $\xi \in U \iff f(x) = f(\xi) + \underbrace{\nabla f(\xi)}_{\substack{\text{Funktionalmatrix} \\ \text{Jacobi-Matrix}}} \overbrace{(x-\xi)}^{\text{Spaltenvektor}} + o(|x-\xi|)$

für $x \to \xi$.

Vergleich: $m = 1$, f zwei mal stetig diff'bar
$\rightsquigarrow f(x) = f(\xi) + \nabla f(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}(x-\xi)^T \underbrace{\nabla^2 f(\xi)}_{\text{Hesse-Matrix}}(x-\xi) + o(|x-\xi|^2)$

Definition: f ist regulär in ξ wenn $\text{Rang}(\nabla f(\xi)) = \min(n, m)$ ist.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ t \end{pmatrix}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f \text{ überall regulär} \\ f \text{ injektiv} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Bild}(f) \text{ überall reguläre Fläche.}$$

Satz: Seien $X \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} Y \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} Z \subset \mathbb{R}^l$ dann ist $g \circ f$ diff'bar und
$\nabla(g \circ f)(\xi) = \underbrace{\nabla g}_{n\times m\text{-matrix}}(f(\xi)) \underbrace{\nabla f}_{m\times l\text{-matrix}}(\xi)$. Dies ist die *Kettenregel*.

Beweis:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(\xi) + \nabla f(\xi)(x-\xi) + o(|x-\xi|)) = \\ &= g(f(\xi)) + \nabla g(f(\xi)(\nabla f(\xi)(x-\xi) + o(|x-\xi|)) + o(|\nabla f(\xi)(x-\xi) + o(|x-\xi|)) \\ &= g(f(\xi)) + (\nabla g(f(\xi))\nabla f(\xi))(x-\xi) + o(|x-\xi|) \end{aligned}$$

$$\textit{Beispiel}: \begin{array}{l} f : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \\ g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arg(x+iy) \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \nabla f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ \nabla g = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ \frac{-y}{r} & \frac{x}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = id \\ g \circ f = id \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla f \nabla g = \nabla id \\ \nabla g \nabla f = \nabla id \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nachtrag zur Kettenregel: f, g k-mal stetig diff'bar $\Rightarrow g \circ f$ dito.

Satz: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : X \to Y$ k-mal stetig diff'bar, $\xi \in X$ und $\eta := f(\xi)$.

(a) Ist f invertierbar unf f^{-1} diff'bar, so ist $\nabla f(x)$ invertierbar und $\nabla(f^{-1})(f(x))) = (\nabla f(x))^{-1}$. Ausserdem ist dann g ebenfalls k-mal stetig diff'bar.

(b) Ist $\nabla f(\xi)$ invertierbar, so existieren offene $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $\xi \in U$ und $\eta \in V$, so dass f eine bijektive Abbildung $f \mid U : U \to V$ induziert deren Inverse (a) erfüllt.

.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$ bijektiv, aber $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ in $y = 0$ nicht diff'bar.

Zu (a): Kettenregel: $f^{-1} \circ f = id \Rightarrow (\nabla f^{-1})(f(x))\nabla f(x) = \nabla(f^{-1} \circ f)(x) = \nabla(id)(x) = I_n$

Zu (b): $\nabla f(\xi)$ invertierbar $\iff \overbrace{\det \nabla f(\xi)}^{\text{stetig}} \neq 0$
$\iff \det \nabla f(x) \neq 0$ in der Nähe von $\xi \iff \nabla f(x)$ invertierbar nahe ξ.

Beispiel: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$
$\det \nabla f = 4(x^2 + y^2) = 0 \iff x = y = 0$

Definition: $\det \nabla f$ heisst *Funktionaldeterminante*.

Geometrische Bedeutung: $f(x) = \overbrace{f(\xi)}^{\text{Translation}} + \overbrace{\nabla f(\xi)(x - \xi)}^{\text{Koordinatenwchsel}} + o(|x - \xi|)$
$\nabla f(\xi)$ bildet einen Quader mit Kanten $h_i e_i$ auf einem Raumspat mit Kanten $\nabla f(\xi) \cdot h_i e_i$ ab. Das Volumen des Bilds ist $\det(\nabla f(\xi)) \cdot h_1..h_n$. $\quad \mathrm{vol}(f(Q)) = |\det(\nabla f(\xi))| \cdot \mathrm{vol}(Q)$

Allgemein: $|\det(\nabla f(\xi))|$ ist der lokale Volumenfaktor von f bei ξ, das heisst für jedes $\epsilon > 0$ und jede hinreichend gute Teilmenge $A \subset X \cap B_\epsilon(\xi)$ gilt: $\mathrm{vol}(f(A)) = |\det(\nabla f(\xi))| \cdot \mathrm{vol}(A) + o(\epsilon)$

