Analysis II - 2014.04.17

Trägheitsmoment

Punktmasse m im Abstand ρ zur Drehachse $\Rightarrow m\rho^2 = m(x^2+y^2)$
Speziell: Drehung um z-Achse.
Körper mit Punktmenge $X \subset \mathbb{R}^3$ kompakt und Massenverteilung
$\Theta_Z(X) = \int_X \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x^2+y^2)\, d\,\mathrm{vol}_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Beispiel: X homogene Kugel mit Radius R um 0, μ konstant $\Rightarrow \Theta_Z(X) = |\text{Kugelkoordinaten}|$
$= \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mu r^2 \cos^2\vartheta r^2 \cos\vartheta\, d\varphi d\vartheta dr = \mu \int\limits_0^R r^4\, dr \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\vartheta\, d\vartheta \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi$
Mittleres Integral: $\left| \substack{\sin\vartheta = s \\ \cos\vartheta d\vartheta = ds \\ \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} \iff s = \pm 1 \\ \cos^2\vartheta = 1-\sin^2\vartheta} \right| = \int\limits_{-1}^{1} (1-s^2)\, ds = (s - \frac{s^3}{3})\mid_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3}) - (-1+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$
$\Rightarrow = \mu\frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \mu\frac{8\pi}{15}R^5$

Skalierung: Sei $Y = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X \right\}$ für $\lambda > 0$. Beide X, Y haben dieselbe konstante Massendichte μ. $\Rightarrow$ Masse$(Y) = \int_Y \mu\, d\,\mathrm{vol}$.
Substituiere mit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad \det \nabla\varphi = \lambda^3$
$\Rightarrow$ Masse$(Y) = \int_X \mu\lambda^3\, d\,\mathrm{vol} \Rightarrow$ Masse$(Y) = \lambda^3$ Masse(X)
$\Theta_Z(Y) = \int_Y \mu(x^2+y^2)\, d\,\mathrm{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_X \mu(\lambda^2x^2 + \lambda^2y^2)\lambda^3\, d\,\mathrm{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \Theta_Z(Y) = \lambda^5\Theta_Z(X)$

©2014TymoonNET/NexT

Gravitation einer Kugelschale

Sei $X := \{x \in \mathbb{R}^3 | R_1 \leq x \leq R_2\}$ und $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Gesucht: Anziehungskraft von X auf P.

Newton: Anziehungskraft einer Punktmasse m' in P' auf eine Punktmasse m in P gleich $Gmm' \frac{P'-P}{|P'-P|^3}$. $F = \int_X \mu(x) Gm \frac{x-P}{|x-P|^3}\, d\,\mathrm{vol}(x)$

Von Oben: $F = \int_X \underbrace{\mu Gm}_{\text{const}} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}\right|^3} d\,\mathrm{vol}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int\limits_{r=R_1}^{R_2} \int\limits_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mu Gm \frac{\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta - a \end{pmatrix}}{(...)^{3/2}} r^2 \cos\vartheta \; d\varphi d\vartheta dr$

$... = r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta\sin^2\varphi + (r\sin\vartheta - a)^2 = r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta - 2ra\sin\vartheta + a^2$
$= r^2 - 2ra\sin\vartheta + a^2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi & = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi & = 0 \\ \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi & = 2\pi \end{array}\right\} = G\mu m 2\pi \int\limits_{R_1}^{R_2} \int\limits_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin\vartheta - a \end{pmatrix}}{(...)^{3/2}} r^2\cos\vartheta\; d\vartheta dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \int\limits_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(r\sin\vartheta - a) r^2 \cos\vartheta}{(r^2 - 2ra\sin\vartheta + a^2)^{3/2}}\; d\vartheta dr$$

$$= \left|_{\cos\vartheta\; dvartheta = ds}^{\sin\vartheta = s}\right| = \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{(rs-a)r^2}{(r^2 - 2ras + a^2)^{3/2}} \right) dr = \left| \begin{array}{c} u^2 = r^2 - 2ras + a^2,\ u \geq 0 \\ 2u\; du = -2ra\; ds \\ s=-1 \iff u^2 = r^2 + 2ra + a^2 = (r+a)^2 \iff u = |r+a| \\ s=1 \iff u^2 = r^2 - 2ra + a^2 = (r-a)^2 \iff u = |r-a| \\ 2ras = r^2 + a^2 - u^2 \\ rs - a = \frac{r^2 + a^2 - u^2}{2a} - a = \frac{r^2 - a^2 - u^2}{2a} \end{array} \right|$$

$$= \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\int\limits_{|r+a|}^{|r-a|} \frac{(\frac{r^2 - a^2 - u^2}{2a}) r^2}{u^3} \frac{2u\; du}{-2ra} \right) dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\int\limits_{|r+a|}^{|r-a|} \frac{r^2}{-2ra^2} \left(\frac{r^2 - a^2 - u^2}{u^2}\right) du \right) dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \left(\frac{r^2}{-2ra^2} \left(\frac{a^2 - r^2}{u} - u\right)\Big|_{u=|r+a|}^{u=|r-a|} \right) dr$$

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{-r}{2a^2} \begin{pmatrix} \frac{a^2 - r^2}{|r-a|} - |r-a| \\ -\frac{a^2 - r^2}{|r+a|} + |r+a| \end{pmatrix} dr \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{(a-r)(a+r)}{|a-r|} - |a-r| \\ -(a-r) + (a+r) \end{pmatrix} = \begin{cases} a > r & \Rightarrow \begin{pmatrix} (a+r) - (a-r) \\ -(a-r) + (a+r) \end{pmatrix} = 4r \\ a < r & \Rightarrow \begin{pmatrix} -(a+r) + (a-r) \\ -(a-r) + (a+r) \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Für $a < R_1$ folgt: $.. = 0 \qquad \Rightarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $a > R_2$ folgt: $.. = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{-r}{2a^2} 4r\; dr = \frac{-2}{a^2} \frac{r^3}{3}\Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{2}{3a^2}(R_2^3 - R_1^3) \quad \Rightarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G\mu m 2\pi \frac{-2}{3a^2}(R_2^3 - R_1^3) \end{pmatrix}$

Masse von $X =: M$. $\quad \mu\,\mathrm{vol}(X) = \mu \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3) \Rightarrow$ Kraft $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -GmM\frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$

= die Kraft, die eine Punktmasse M im Schwerpunkt von X auf P auswirkt.