Analysis II - 2014.05.08

Erinnerung: $g : [a, b] \to \mathbb{R}^{\geq 0} C^1 \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, {}^{a \leq z \leq b}_{\sqrt{x^2+y^2} = g(z)} \right\} \Rightarrow \mathrm{vol}_2(F) = \int_a^b 2\pi g(z) \sqrt{1 + g'(z)^2} \, dz$

Beispiel: $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, {}^{z \geq 1}_{\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{z}} \right\} \quad g(z) = \frac{1}{z} \quad g'(z) = -\frac{1}{z^2}$

$\mathrm{vol}_2(F) = \int_1^\infty 2\pi \frac{1}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}} \, dz \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{dz}{z} = \infty \Rightarrow \mathrm{vol}_2(F) = \infty$

$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, {}^{z \geq 1}_{\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{1}{z}} \right\} \Rightarrow \mathrm{vol}_3(X) = \pi$

Vektorfelder

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Definition: Eine skalarwertige Funktion auf U heisst *Skalarfeld*, eine vektorwertige Funktion ein *Vektorfeld*.

Sei $K : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, stetig.

Definition: Eine C^1-parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma' = K \circ \gamma$ heisst Feldlinie von K.

Fakt: Ist K lokal lipschitzstetig, dann geht durch jeden Punkt von U genau eine maximal ausgedehnte Feldlinie.

Bedeutung: K Strömungsfeld $\Rightarrow \gamma$ Trajektorie eines Teilchens.
K Gradientenfeld $\Rightarrow$ Falllinie.

Beispiel: Konstantes Vektorfeld $K(x) = K_0 \Rightarrow \gamma'(t) = K_0 \Rightarrow \gamma(t) = K_0 t + v_0$

Beispiel: Punktmasse in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad K(x) = -c \frac{x}{|x|^3}$ für konstantes $c > 0$.

$\gamma'(t) = -c \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3} \quad \gamma(t) = r(t) \cdot e_0 \quad r' e_0 = -c \frac{r e_0}{r^3} = -e_0 \frac{c}{r^2} \iff \frac{dr}{dt} = -\frac{c}{r^2}$

$\iff \int r^2 \, dr = \int -c \, dt \iff \frac{r^3}{3} = -c(t - t_0) \Rightarrow r = \sqrt[3]{3c(t_0 - t)} \quad \gamma(t) = \sqrt[3]{3c(t_0 - t)} e_0$

Beispiel: Homogene Kugel von Radius R erzeugt Gravitationsfeld $K(x) = \begin{cases} -c \frac{x}{|x|^3} & \text{für } |x| \geq R \\ -c \frac{x}{R^3} & \text{für } |x| \leq R \end{cases}$

$\Rightarrow$ Feldlinien wie im vorigen Beispiel mit anderer Parametrisierung.

Beispiel: Sei $K(x) := \omega \times x$ für $\omega \in \mathbb{R}^3_{\setminus \{0\}}$ fest. Geschwindigkeitsfeld einer gleichmässigen Rotation um die Achse $\mathbb{R}\omega$. $|\omega \times x| = |\omega| \cdot$ (Abstand von x zu $\mathbb{R}\omega$). Feldlinien = Kreise mit Mittelpunkt auf $\mathbb{R}\omega$ und orthogonal zu $\mathbb{R}\omega$.

Beispiel: $K(x) := \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$ Z.B: Magnetfeld von einem konstanten elektrischen Strom in $\mathbb{R}\omega$ erzeugt. Feldlinien wie vorher, anders parametrisiert.

Beispiel: $K\binom{x}{y} := \binom{x-y}{x+y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ auf $\mathbb{R}^2_{\setminus\{\binom{0}{0}\}}$. Feldlinien?

$\gamma = \binom{x}{y} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\varphi' \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\varphi' \end{pmatrix} \overset{!}{=} \binom{\cos\varphi-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi} = \binom{r\cos\varphi-r\sin\varphi}{r\cos\varphi+r\sin\varphi}\frac{1}{r} = K$

$\Longleftrightarrow \cos\varphi\binom{r'}{r\varphi'} + \sin\varphi\binom{-r\varphi'}{r'} = \cos\varphi\binom{1}{1} + \sin\varphi\binom{-1}{1}$

$\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \cos\varphi(1.\text{ Zeile}) + \sin\varphi(2.\text{ Zeile}) & \Rightarrow r' = 1 \\ \sin\varphi(1.\text{ Zeile}) - \cos\varphi(2.\text{ Zeile}) & \Rightarrow r\varphi' = 1 \end{array}$

$\Rightarrow r(t) = t - \overbrace{t_0}^{\text{Konstante}} \quad \varphi' = \frac{1}{r} = \frac{1}{t-t_0} \quad \varphi(t) = \int\frac{dt}{t-t_0} = \log|t-t_0| + c \quad \gamma(t) = (t-t_0)\begin{pmatrix} \cos(\log|t-t_0|+c) \\ \sin(\log|t-t_0|+c) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ logarithmische Spiralen.

Potentiale

Sei K ein Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Definition: Ein diff'bares Skalarfeld f auf U mit $K = \nabla f$ oder $(\nabla f)^T$ heisst *Potential* von K. Für $n = 1$: Stammfunktion.