Analysis II - 2014.05.12

Erinnerung: Ein diff'bares Skalarfeld f auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\nabla f = K$ oder K^T heisst *Potential* von K.

Sei: $U = I_1 \times .. \times I_n$ für Intervalle I_i

Fakt: Ist K stetig diff'bar, so existiert ein Potential genau dann wenn $\forall i, j : \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$
Denn: $K = (K_1..K_n) = \nabla f \Rightarrow f$ zweimal stetig diff'bar und $K_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial K_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial K_j}{\partial x_i}$
$\Rightarrow$ Notwendig. Hinreichend später.

Explizite Konstruktion

Sei K stetig.
$i = 1 :$ "$f = \int K_1 \, dx_1$"
Wähle Stammfunktion $g_1 := \int K_1 \, dx_1 \Rightarrow f = g_1 + f_1$ wobei $f_1(x)$ von x_1 unabhängig ist.
$i = 2 :$ $K_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \iff \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$
Notwendige Bedingung: $K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$ unabhängig von x_1. Wähle eine Stammfunktion $g_2 := \int (K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}) \, dx_2$ die von x_1 unabhängig ist. $\Rightarrow f_1 = g_2 + f_2$ mit f_2 von x_1 und x_2 unabhängig.
$i = 3 :$ $K_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}(g_1 + g_2 + f_2)$
Bedingung: $K_3 - \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3}$ von x_1 und x_2 unabhängig.

Beispiel: $K = (x^2 + xy^2, x^2 y - y^2)$ auf $\mathbb{R}^2$: Wähle $g_1 \binom{x}{y} = \int (x^2 + xy^2) \, dx$
Z.B: $g_1 := \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} \rightsquigarrow K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial y} = (x^2 y - y^2) - (x^2 y) = -y^2 = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y^3}{3})$
Mit $g_2 := \frac{-y^3}{3} \Rightarrow K_2$ besitzt ein Potential, nämlich $f = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + c$ für jede Konstante c.

Beispiel: Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ besitzt $K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2xy + yz, x^2 + xz + z, axy + by + cz)$ ein Potential?
$f := \int (2xy + yz) \, dx = x^2 y + xyz + \underbrace{f_1}_{\text{von } x \text{ unabhängig}} \Rightarrow x^2 + xz + z = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + xz + \frac{\partial f_1}{\partial y} \iff \frac{\partial f_1}{\partial y} = z$
$f_1 = \int z \, dy = yz + \underbrace{f_2}_{\text{von } x,y \text{ unabhängig}} \Rightarrow axy + by + cz = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y + xyz + yz + f_2) = xy + y + \frac{\partial f_2}{\partial z}$
$\iff \frac{\partial f_2}{\partial z} = (a-1)xy + (b-1)y + cz \Rightarrow$ wir brauchen $a = b = 1 \Rightarrow$
$f_2 = \int cz \, dz = c\frac{z^2}{2} + \underbrace{f_3}_{\text{von } x,y,z \text{ unabhängig}}$ Antwort wenn $a = b = 1$ ist. Und dann ist $f = x^2 y + xyz + yz + \frac{cz^2}{2} + c'$

Bemerkung: $K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$ von x_1 unabhängig $\iff \frac{\partial}{\partial x_1}(K_2 - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}) = 0 \iff \frac{\partial K_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}) = \frac{\partial K_1}{\partial x_2}$

Beispiel: $K =$ konstant K_0 hat Potential $f(x) = K_0 \cdot x$

Beispiel: $-c\frac{x}{|x|^3}$ auf $\mathbb{R}^3_{\setminus\{0\}}$ hat Potential $f = \frac{c}{|x|}$

Beispiel: $K = \omega \times x$ für $\omega \in \mathbb{R}^3_{\setminus\{0\}}$. Nach Drehung ist oBdA $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $c \neq 0$.
$K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -cx_3 \\ cx_2 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial K_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}(-cx_3) = -c \quad \frac{\partial K_3}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(cx_2) = +c$
$\Rightarrow$ besitzt kein Potential.

Beispiel: $K = \frac{\omega \times x}{|\omega \times x|^2}$ oBdA $\omega = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \frac{1}{c(x_2^2+x_3^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ +x_2 \end{pmatrix}$
$\frac{\partial K_1}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial K_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial K_1}{\partial x_3} = 0 = \frac{\partial K_3}{\partial x_1} \quad \frac{\partial K_2}{\partial x_3} = \frac{\partial K_3}{\partial x_2} = \frac{x_3^2 - x_2^2}{c(x_2^2+x_3^2)^2}$
$\Rightarrow$ auf jedem Quader in $\mathbb{R}^3_{\setminus \mathbb{R}\omega}$ existiert ein Potential. Lokal tut's $f(x) = \frac{1}{c}\arg(x_2 + ix_3) + c'$
Global existiert *kein* Potential.

Bemerkung: Zu $\mathbb{C}$: besitzt eine Funktion f eine komplexe Stammfunktion genau dann wenn die Cauchy-Riemannschen DGL. gelten.

Vektorielles Kurvenintegral

Sei $\gamma : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-parametrisierte Kurve. Die überall durch γ' definierte Richtung heisst *Orientierung* von C. γ Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, heisst γ ein *geschlossener Weg.*

Definition: Eine Umparametrisierung $\psi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \tilde{\to} [a,b]$ bijektiv C^1 mit ψ monoton wachsend heisst *orientierungserhaltend*, sonst *orientierungsvertauschend.*

Definition: Seien f eine Funktion auf C und g eine auf einer Umgebung von C definierte Funktion. $(\int_\gamma = \int_C) f \; dg := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot (g \circ \gamma)'(t) \; dt$

Satz: Dies ist invariant unter orientierungserhaltender Umparametrisierung und wechselt das Vorzeichen unter orientierungserhaltender.

Definition: Für ein Vektorfeld K auf C ist $(\int_C = \int_\gamma) K \cdot \; dx := \int_\gamma (K_1 \; dx_1 + .. + K_n \; dx_n)$
$= \int_a^b (K \cdot \gamma)(t) \underbrace{\cdot}_{\text{Skalarprodukt}} \gamma'(t) \; dt$

Satz: Voriger Satz genauso.

Bemerkung: Skalares Kurvenintegral $\int_C f \; d\,\mathrm{vol}_1 = \int_C \cdot f|dx|$

Integralsatz

Für jedes C^1 Skalarfeld f auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und jeden Weg γ in U von P nach Q gilt

$$\int_\gamma \nabla f \cdot dx = f(Q) - f(P)$$