Analysis II - 2014.04.07

Integral mehrerer Variablen

Fakt: Jede $\overbrace{\text{hinreichend gutartige}}^{\text{z.B. jede beschränkte offene oder abgeschlossene Teilmenge.}}$ Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ hat ein Volumen $\mathrm{vol}_n(X) \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$.
$n = 1$: Länge $n = 2$: Flächeninhalt.

Eigenschaften

- invariant unter Translationen, Drehungen, Spiegelungen.
- $\mathrm{vol}_{m+n}(X \times Y) = \mathrm{vol}_m(X) \cdot \mathrm{vol}_n(Y)$ für $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathrm{vol}_n(X \cup Y) = \mathrm{vol}_n(X) + \mathrm{vol}_n(Y) - \mathrm{vol}_n(X \cap Y)$
- $\mathrm{vol}_n(X) = 0$ für jedes X der Dimension $< n$.
- $\mathrm{vol}_n(X) \leq \mathrm{vol}_n(Y)$ für alle $X \subset Y$.
- Zu pt. 3&4: Insbesondere gilt $\mathrm{vol}_n(X \cup Y) = \mathrm{vol}_n(X) + \mathrm{vol}_n(Y)$ wenn $X \cap Y$ Dimension $< n$ hat.

vorläufig: $\mathrm{vol} := \mathrm{vol}_n$

Riemann Integral

Zerlegung: Z von $X \subset \mathbb{R}^n$ in endlich viele: $X = \bigcup\limits_{i=1}^{r} X_i$ so dass $\mathrm{vol}(X_i \cap X_j) = 0$ für alle $i \neq j$ mit $x_i \in X_i$ Basispunkt.

Durchmesser von X_i: $\mathrm{diam}(X_i) := \sup(|x - y| : x, y \in X_i)$

Feinheit von Z ist $\delta(Z) := \max\limits_{i=1..r}\{\mathrm{diam}(X_i)\}$

f Funktion auf X : $S_f(Z) := \sum\limits_{i=1}^{r} f(x_i)\,\mathrm{vol}_n(X_i)$

Riemannsumme: $\int_X f(x)\; d\,\mathrm{vol}_n(x) := \lim\limits_{\substack{\text{Z Zerlegung von X} \\ \delta(Z)\to 0}} S_f(Z)$ falls der Grenzwert existiert.

Satz: Jede stetige Funktion auf einer kompakten Teilmenge ist Riemann-integrierbar.

Spezialfall: $X = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow \int\limits_X f(x)\; d\,\mathrm{vol}_1(x) = \int\limits_a^b f(x)\; dx$

Alternative Bezeichnungen: $d\mu(x)$, $\mu(x)$, $\overbrace{dF}^{\dim 2}$, $\overbrace{dV}^{\dim 3}$

Eigenschaften

$\int_X 1 \, d\operatorname{vol}_n = \operatorname{vol}_n(X)$
$\int_{X\cup Y} f \, d\operatorname{vol}_n = \int_x f \, d\operatorname{vol}_n + \int_Y f \, d\operatorname{vol}_n$ falls $X \cap Y$ Dimension $< n$ hat.
$\int_X (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) \, d\operatorname{vol}_n = \lambda_i \int_X f_1 \, d\operatorname{vol}_n + \lambda \int_X f_2 \, d\operatorname{vol}_n$
$\int_X f \, d\operatorname{vol}_n \leq \int_X g \, d\operatorname{vol}_n$ falls überall $f \leq g$.
$\left|\int_X f \, d\operatorname{vol}_n\right| \leq \int_X |f| \, d\operatorname{vol}_n$

Satz (Fubini): Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, seine $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit $\forall x : \varphi(x) \leq \psi(x)$
$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid {\scriptstyle x\in X,\, y \in \mathbb{R} \atop \scriptstyle \varphi(x)\leq y \leq \psi(x)} \right\}$ Sei f stetig auf Z, dann $\int\limits_Z f \, d\operatorname{vol}_{n+1} = \int\limits_X \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dy \right) \, d\operatorname{vol}_n(x)$

Speziell: $\operatorname{vol}(Z) = \int_X (\psi(x) - \varphi(x)) \, d\operatorname{vol}_n(x)$

Beispiel: $B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid {\scriptstyle 0\leq x \leq 4 \atop \scriptstyle -\sqrt{x}\leq y \leq \sqrt{x}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid {\scriptstyle -2\leq y \leq 2 \atop \scriptstyle y^2\leq x \leq 4} \right\}$
$\int_B f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, d\operatorname{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^4 (\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dy) \, dx = \int_{-2}^2 (\int_{y^2}^4 f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \, dx) \, dy$

