Analysis II - 2014.05.15

Erinnerung: $\gamma : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^n$ C^1-parametrisierter Weg von $P := \gamma(a)$ nach $Q := \gamma(b)$
$\Rightarrow \int_\gamma K \cdot dx := \int_a^b (K \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)\ dt$

Satz: $\int_\gamma \nabla f \cdot dx = f(Q) - f(P)$

Spezialfall: $\gamma(t) := t$ für $C := [a,b] \subset \mathbb{R}$
Hauptsatz: $\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)$
Beweis: $\int_\gamma \nabla f \cdot dx \overset{def}{=} \int_a^b \underbrace{(\nabla f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t)}_{\nabla(f\circ\gamma)}\ dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)\ dt = f(Q) - f(P)$

Variante: *Definition*:

a) Eine "formale Summe" von orientierten Wegen $\gamma_1 + .. + \gamma_r$ heisst eine Kette. Ein Integral über γ ist definiert durch $\int_{\gamma_1+..+\gamma_r} := \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i}$.

b) Für jeden Weg γ bezeichnet $-\gamma$ denselben Weg in umgekehrter Richtung, z.B: $[-b,-a] \to C, t \mapsto \gamma(-t)$.

Eigenschaften:

a) Entsteht $\gamma_1 + .. + \gamma_r$ durch Zerlegen eines Wegs γ, dann ist $\int_\gamma = \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i}$

b) $\int_{-\gamma} K \cdot dx = -\int_\gamma K \cdot dx$

Satz: Für jedes stetige Vektorfeld K auf $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

a) K besitzt ein Potential

b) Das Integral von K über jeden Weg in U hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab.

c) Das Integral von K über jeden geschlossenen Weg ist Null.

Definition: Wegen (c) heisst ein solches K *konservativ.* "Erhaltungssatz"

Beweis:

- (b)⇒(c): Sei γ geschlossener Weg von P nach P. Setze $\delta : [0,1] \to C,\ t \mapsto P$
  (b)⇒ $\int_\gamma K \cdot dx = \int_\delta K \cdot dx = \int_0^1 (K \circ \delta)(t) \cdot \delta'(t)\ dt = 0$ ⇒(c)
- (c)⇒(b): Seien γ, δ zwei Wege von P nach Q. ⇒ $-\delta+\gamma$ ist eine Zerlegung eines geschlossenen Wegs. ⇒ $\int_\gamma - \int_\delta \overset{def}{=} \int_{-\delta+\gamma} = \int_\epsilon \overset{(c)}{=} 0 \Rightarrow \int_\gamma = \int_\delta \Rightarrow$ (b)
- (a)⇒(b): Integralsatz: Ist f ein Potential von K, dann ...

- (b)⇒(a): Fixiere $P_0 \in U$. Setze $f(P) := \int_\gamma K \cdot dx$ für einen beliebigen Weg γ von P_0 nach P. Wohldefiniert, wenn U wegzusammenhängend ist. *Behauptung*: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = K_i$. Daraus folgt $\nabla f = K$ und f diff'bar da K stetig.

  Sei $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 an stelle i). Sei $\delta : [0,1] \to U,\ t \mapsto P + the_i$

  $\Rightarrow f(P + he_i) - f(P) \overset{def}{=} \int_{\delta+\gamma} K \cdot dx - \int_\gamma K \cdot dx = \int_\delta K \cdot dx = \int_0^1 \underbrace{K(P + the_i)}_{=K(P)+o(h)} \cdot he_i \, dt$

  $= K(P) \cdot he_i + o(h) = K_i(P)h + o(h)$

Beispiel: $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Feldlinien: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ z \end{pmatrix}$
$\int_\gamma K \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} r^2 \, dt = 2\pi r^2 \Rightarrow$ Kein Potential

Beispiel: $K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix}$
$\int_\gamma K \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \Rightarrow$ Kein Potential global, aber lokal.
Erinnerung: Lokal ist $\arg(x_1 + ix_2)$ ein Potential.

Allgemein: Ist $\int_\gamma K \cdot dx$ in diesem Fall für jeden geschlossenen Weg in $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gleich $2\pi k$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ die *Windungszahl* von γ um $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Integralsatz von Green

Sei $K = (K_1, K_2)$ ein C^1-Vektorfeld auf $U \subset \mathbb{R}^2$ offen.

Definition: $\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y}$ heisst die *Rotation von K*. (Im Englischen: $\operatorname{curl} K$)

Integralsatz: Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und K wie oben. Dann gilt:

$$\int_X \operatorname{rot} K \, d\operatorname{vol}_2 = \int_{\partial X} K \cdot dx$$

Definition: ∂X wird so orientiert, dass in Blickrichtung gesehen die nahegelegenen Punkte von X auf der linken Seite liegen.