Analysis II - 2014.03.06

Zweikörperproblem

Punktmassen m_1, m_2 in $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^3$, $z_1 \neq z_2$. Anziehungskraft Betrag: $\frac{Gm_1m_2}{|z_1-z_2|^2}$, Rightung: $\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}$
$\Rightarrow$ Kraftvektor: $\frac{Gm_1m_2(z_2-z1)}{|z_2-z_1|^3}$, Beschleunigung: $m_1\ddot{z}_1 = Gm_1m_2\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|^3}$, $m_2\ddot{z}_2 = Gm_1m_2\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|^3}$

(1) $z := \frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$ Schwerpunkt des Gesamtsystems.
$\ddot{z} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2) = 0$
$\Rightarrow \dot{z} = \int \ddot{z}(t)dt = \text{const}$
$\Rightarrow z = \int \text{const}\, dt = \text{const} \cdot t + \text{const}'$
Ersetze Koordinatensystem durch ein anderes Inertialsystem.
d.h: z_i durch $z_i - z_{12} \Rightarrow z := (z_1 - z_2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow z_1 = z_{12} + \frac{z}{m_1}$, $z_2 = z_{12} - \frac{z}{m_2}$
$\Rightarrow \ddot{z} = -\frac{Gm_1^3m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{z}{|z|^3}$

Wähle Einheiten so dass $\frac{Gm_1^3m_2^3}{(m_1+m_2)^2} = 1 \quad \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{z}{|z|^3}$
$\frac{z}{|z|^3}$ ist lokal Lipschitzstetig und deshalb existiert eine Maximallösung.

(2) Sei U der von $z(0)$ und $\dot{z}(0)$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\dim(U) = 1 \vee 2$.
Nach Drehung OBdA ist $U = \begin{pmatrix} * & 0 & 0\end{pmatrix}^T \vee \begin{pmatrix} * & * & 0\end{pmatrix}^T$
Behauptung: Die Lösung bleibt immer in U.
Beweis: Die Einschränkung der DGL $\ddot{z} = -\frac{z}{|z|^3}$ auf U ist eine DGL in U. Diese hat ebenfalls eine Lösung in U und die ist auch eine Lösung in $\mathbb{R}^3$. Folglich stimmt es mit den Lösungen in $\mathbb{R}^3$ überein. *qed.*

(3) $\dim(U) = 1 \rightsquigarrow U \simeq \mathbb{R} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{-1}{|x|^3}$

(4) $\dim(U) = 2$ Identifizieren $U \simeq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$
Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ für $r = r(t)$,
$\dot{z} = \dot{r}e^{i\varphi} + rie^{i\varphi}\dot{\varphi}$
$\iff \ddot{z} = \ddot{r}e^{i\varphi} + 2\dot{r}rie^{i\varphi}\dot{\varphi} + rie^{i\varphi}\ddot{\varphi} + rie^{i\varphi}i\dot{\varphi}\dot{\varphi}$
$\iff \frac{-z}{|z|^3} = -\frac{-re^{i\varphi}}{r^3} = \frac{e^i\varphi}{r^2} = e^{i\varphi}(\ddot{r} + 2\dot{r}ri\dot{\varphi} + ri\ddot{\varphi} - r\dot{\varphi}^2)$
$\iff \frac{-1}{r^2} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + i(2\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{\varphi})r$
$\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{-1}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \end{array} \right\}$
Note: Apparently some of the calculations above are incorrect (additional r), but the last result can be assumed to be correct.

(5) $\mu := r^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\mu} = 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = r(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \quad \mu$ ist das *Winkelmoment*
$\Rightarrow \mu$ ist konstant $\neq 0$. Nach etwaiger Spiegelung ist oBdA $\mu > 0$

(6) $E := \frac{1}{2}|\dot{z}|^2 - \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}|\dot{r}e^{i\varphi} + re^{i\varphi}i\dot{\varphi}|^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}|(\dot{r} + ri\varphi)e^{i\varphi}|^2 - \frac{1}{r} = \frac{1}{2}|\dot{r} + ri\dot{\varphi}|^2 - \frac{1}{r}$
$= \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{r}$
$\dot{E} = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{1}{r^2}\dot{r} = \dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r\dot{\varphi}(-2\dot{r}\dot{\varphi}) + \frac{1}{r^2}\dot{r} = \dot{r}(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2 - rr\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{r^2}) = 0$
$\Rightarrow$ Energie E konstant.

(7) $\dot{\varphi} = \frac{\mu}{r^2}, \quad \dot{r}^2 = 2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2}$

(8) Diese zweite Gleichung hat im Allgemeinen keine elementare Lösungen. Stattdessen finden wir r als Funktion von φ.
Kettenregel: $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \iff \dot{r}^2 = (\dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi})^2 \iff 2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2} = (\frac{\mu}{r^2} dr d\varphi)^2$
$\Rightarrow (\frac{dr}{d\varphi})^2 = \frac{r^4}{\mu^2}(2E + \frac{2}{r} - \frac{\mu^2}{r^2})$

(9) $u = \frac{1}{r} \rightsquigarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \iff (\frac{du}{d\varphi})^2 = \frac{1}{r^4}(\frac{dr}{d\varphi})^2 = \frac{1}{\mu^2}(2E + 2u - \mu^2 u^2) \iff$
$(\frac{du}{d\varphi})^2 = (\frac{2E}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4}) - (u - \frac{1}{\mu^2})^2$ Sei $H := \sqrt{\frac{2E}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^4}} \quad \Rightarrow \quad = H^2 - (u - \frac{1}{\mu^2})^2$
H muss dabei konstant ≥ 0 sein.

(10) Falls $H = 0$, so muss $u = \frac{1}{\mu^2}$ konstant sein.

(11) Falls $H > 0$ ist: $\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{H^2 - (u - \frac{1}{\mu^2})^2} \iff \int \frac{du}{\sqrt{H^2 - (u - \frac{1}{u^2})^2}} = \varphi$
Nach Standardintegral.

(12) *Lösung*: $\frac{1}{u} = r = \frac{\mu^2}{1 + H\mu^2 \sin(\varphi - \varphi_0)}$
Dies deckt auch den Fall $H = 0$ ab.

(13) Übersetze in $z = re^{i\varphi} = x + iy \rightsquigarrow x^2 = 2E\mu^2 y^2 - 2H\mu^4 y + \mu^4$
Also: Körper bewegt sich längs dieser Kurve.
Dies ist eine $\begin{cases} E < 0 & \text{Ellipse} \\ E = 0 & \text{Parabel} \\ E > 0 & \text{Hyperbel} \end{cases}$