Analysis II - 2014.03.27

Seien $g_1..g_r : U \to \mathbb{R}$ diffbar, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B := \{x \in U \mid g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.

Beispiel: g_i linear $\Rightarrow B$ linearer Teilraum.
$\forall \xi \in B \Rightarrow$ für $x \to \xi$ mit $x \in B$: $\quad \underbrace{g_i(x)}_{=0} = \underbrace{g_i(\xi)}_{=0} + \langle \nabla g_i(\xi),\ x - \xi \rangle + o(|x - \xi|)$

$\Rightarrow \langle \nabla g_i(\xi),\ \frac{x-\xi}{|x-\xi|} \rangle \to 0$

Definition: Ein Punkt $\xi \in B$, für den $\nabla g_1(\xi)..\nabla g_r(\xi)$ linear unabhängig sind, heisst *regulärer Punkt von B*.

Definition/Satz: Der Tangentialraum von B in einem regulären Punkt $\xi \in B$ ist der $(n - r)$ dimensionale affin-lineare Unterraum $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1..r : \langle \nabla g_i(\xi), x - \xi \rangle = 0\}$.

Beispiel: $g(x, y) = x^2 - y^2 - x^4 \quad \nabla g = (2x - 4x^3, -2y)$

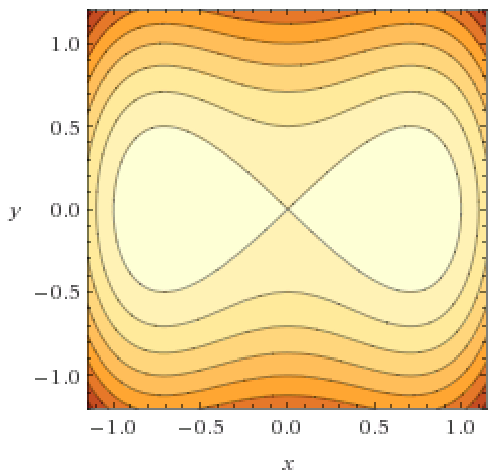

Figure 1: Singularität in $(0, 0)$

Tangentialraum = Tangente in $(\xi, \eta) : (\xi - 4\xi^3)(x - \xi) - 2\eta(y - \eta) = 0$

Beispiel: $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1}_{g(x,y,z)} = 0\}$
$\Rightarrow \nabla g = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow S^2$ überall regulär.
Tangentialebene in $(\xi, \eta, \zeta) \in S^2 : 2\xi(x - \xi) + 2\eta(y - \eta) + 2\zeta(z - \zeta) = 0$

Beispiel: F gegeben durch $g(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \nabla g = (2x, 2y, -2z)$

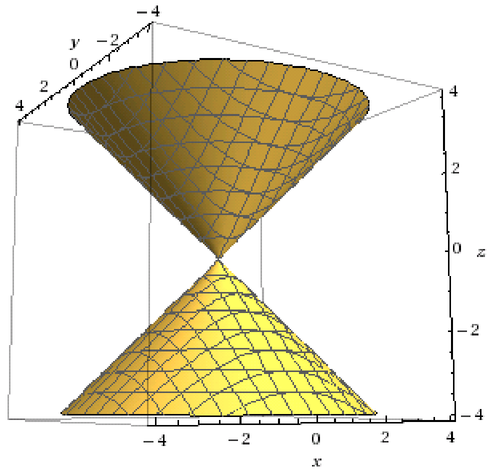

Figure 2: Singularität in $(0,0,0)$

Beispiel: $\begin{array}{ll} g_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 & \Rightarrow \nabla g_1 = (2x, 2y, 2z) \\ g_2(x,y,z) := x^3 + y^3 + z^3 & \Rightarrow \nabla g_2(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2) \end{array}$
Regulärer Punkt $\iff$ $g_1 = g_2 = 0$ und $\nabla g_1, \nabla g_2$ lin. unabhängig. Wenn $\nabla g_1, \nabla g_2$ lin. abhängig, so sind $x = y = z \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow g_2 = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \neq 0$.
$\Rightarrow$ gemeinsame Nullstellenmenge überall regulär.

Beispiel: $g(x,y) := (1+x+y)e^{x^2+y^2} - 1 = 0$ lässt sich nach keiner Variablen elementar auflösen.

Fakt: $\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} > 0$ überall auf $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} \Rightarrow K$ überall lokal Graph einer beliebig oft diff'baren Funktion φ mit $\varphi' < 0$.

Fakt: $K =$ Graph einer bijektiven Funktion.

Extrema mit Nebenbedingungen

Sei $u \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, g_1..g_r : U \to \mathbb{R}$ diffbar, $B := \{x \in U \mid g_1(x) = .. = g_r(x) = 0\}$. Gesucht sind lokale Extrema von $f \mid B$.

Definition: Ein regulärer Punkt $\xi \in B$, bei dem $\nabla f(\xi)$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(\xi)..\nabla g_r(\xi)$ ist, heisst ein *bedingt kritischer Punkt von f auf B*. Kritischer Punkt $\Longrightarrow$ bedingt krit. Punkt.

Satz: Jede lokale Extremalstelle von $f \mid B$ ist ein bedingt kritischer Punkt.

Beweisidee: Wenn nicht, dann ist $\nabla f(\xi)$ auf dem Tangentialraum
$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla g_1(\xi),\ x - \xi \rangle = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq r\}$ nicht konstant. Also existiert ein Richtungsvektor $e \in \mathbb{R}^n, |e| = 1$ mit $\langle \nabla f(\xi),\ e \rangle = c \neq 0$ und $\forall i \langle \nabla g_i(\xi),\ e \rangle = 0$. Wenn $x \in B$ gegen ξ geht mit $\frac{x-\xi}{|x-\xi|} \to e$, dann $f(x) = f(\xi) + \underbrace{\langle \nabla f(\xi),\ x - \xi \rangle}_{=|x-\xi|(c+o(1))} + o(|x - \xi|)$ $\square$

Satz: Ein regulärer Punkt $\xi \in B$ ist ein bedingt kritischer Punkt von f auf B mit $\nabla f(\xi) = \lambda_1 \nabla g_1(\xi) + .. + \lambda_r \nabla g_r(\xi)$ für $\lambda_1..\lambda_r \in \mathbb{R}$ genau dann wenn $(\xi, \lambda_1..\lambda_r)$ ein kritischer Punkt der Funktion $F(x, \lambda_1..\lambda_r) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - .. - \lambda_r g_r(x)$ ist. Dies ist die *Lagrange-sche Hilfsfunktion.*

Das heisst: Wenn gilt: $\forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\xi) - .. - \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\xi) = 0$ und
$\forall 1 \leq i \leq r : \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(\xi) = -g_i(x)(\xi) = 0 \iff \nabla f(\xi) - \lambda_1 \nabla g_1(\xi) - .. = 0$

Beispiel: Extrema von $f(x, y, z) := -\sqrt{3}x + 3y + 2z$ auf $\underbrace{S^2}_{\text{regulär}} = \{g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$.

Jede globale Extremalstelle von $f \mid S^2$ ist ein bedingt kritischer Punkt.

$$F(x, y, z, \lambda) = f - \lambda g \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\sqrt{3} - \lambda 2x & = 0 \iff x = -\frac{\sqrt{3}}{2\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3 - \lambda 2y & = 0 \iff y = \frac{3}{2\lambda} \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2 - \lambda 2z & = 0 \iff \underbrace{z = \frac{1}{\lambda}}_{\text{Einsetzen}} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) & = 0 \end{cases}$$

$\frac{16}{4\lambda^2} = 1 \iff \lambda = \pm 2 \overset{\text{Extremalstellen}}{\Rightarrow} \pm(\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$