Analysis II - 2014.02.27

Beispiel: $y' = x^3 - xy$ zugehörige homogene Gleichung: $y_h' = -xy_h \rightsquigarrow y_h = e^{-x^2/2}c$
Ansatz: $y = u(x)e^{-x^2/2} \rightsquigarrow y' = u'e^{-x^2/2} + u(-x)e^{-x^2/2} \rightsquigarrow x^3 - xy = x^3 - xue^{-x^2/2}$
$\Rightarrow u'e^{-x^2/2} = x^3 \Rightarrow u' = x^3e^{x^2/2} \Rightarrow u = \int x^3e^{x^2/2}dx = \int 2ze^z dz = 2ze^z - \int 2e^z dz$
$= 2ze^2 - 2e^z + c = x^2e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + c \Rightarrow y = x^2 - 2 + ce^{-x^2/2}$

Beispiel: $y' + \frac{y}{x} = \sqrt{x}$ homogen: $y_h' = -\frac{y_h}{x} \rightsquigarrow y_h = \frac{c}{x}$
Ansatz: $y = \frac{u}{x} \Rightarrow y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \rightsquigarrow \sqrt{x} - \frac{y}{x} = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2} \Rightarrow \frac{u'}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow u' = x^{3/2} \Rightarrow u = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + c$
$\Rightarrow y = \frac{2x^{3/2}}{5} + \frac{c}{x}$

Konstante Koeffizienten

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + .. + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n \text{ für } a_1..a_n \text{ konstant.}$$

Fakt: Der Raum der Lösungen von $Ly = 0$ für Funktionen y auf $\mathbb{R}$ hat Dimension n.

Definition: Das *charakteristische Polynom* von L ist $f_L(\lambda) := \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + .. + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Fakt: Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $y = e^{\lambda x}$ eine Lösung von $Ly = 0 \iff f_L(\lambda) = 0$
Denn: $\frac{d^k}{dx^k}(e^{\lambda x}) = \lambda^k e^{\lambda x} \Rightarrow L(e^{\lambda x}) = \lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + .. + a_n e^{\lambda x} = f_L(\lambda)e^{\lambda x}$

Fakt: Die Funktionen $x \mapsto e^{\lambda x}$ für verschiedene λ sind linear unabhängig.
Folge: Hat das Polynom f_L n verschiedene Nullstellen $\lambda_1..\lambda_n \in \mathbb{C}$, so bilden $e^{\lambda_i x}$ ein System von Fundamentallösungen und die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ lautet $\sum c_i e^{\lambda_i x}$

Beispiel: $y' + 3y = 0 \rightsquigarrow \lambda + 3 = 0 \Rightarrow$ Eigenwert $\lambda = -3 \rightsquigarrow y = ce^{-3x}$

Beispiel: $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \rightsquigarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \rightsquigarrow y = ce^{2x} + de^{4x}$

Beispiel: $y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0 \rightsquigarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega \cdot i$
$\rightsquigarrow y = ce^{\omega ix} + de^{-\omega ix},\ c, d \in \mathbb{C} = (c_1 + c_2 i)(\cos\omega x + i\sin\omega x) + (d_1 + d_2 i)(\cos\omega x - i\sin\omega x)$
$\Rightarrow$ Reelle Fundamentallösungen $\cos\omega x$, $\sin\omega x \Rightarrow$ allg. reelle Lsg: $a\cos\omega x + b\sin\omega x,\ a, b \in \mathbb{R}$

Definition: Die Nullstellen von f_L heissen *Eigenwerte* von L.

Fakt:

(a) $(\frac{d}{dx} - \lambda)(x^k e^{\lambda x}) = kx^{k-1}e^{\lambda x}$

(b) $L(x^k e^{\lambda x}) = 0$ genau dann, wenn λ ein mindestens $k + 1$ facher Eigenwert ist.

(c) Sonst ist $L(x^k e^{\lambda x}) =$ (Polynom vom Grad $k - m)e^{\lambda m}$ wenn λ Multiplizität $m \le k$ hat.

Denn: $f_L(T) = \prod_{j=1}^{n}(T - \lambda_j) \Rightarrow L = f_L(\frac{d}{dx}) = \prod_{j=1}^{n}(\frac{d}{dx} - \lambda_j)$

Fakt: Die Funktionen $x \mapsto x^k e^{\lambda x}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0},\ \lambda \in \mathbb{C}$ sind linear unabhängig.

Satz: Seien $\lambda_1..\lambda_k \in \mathbb{C}$ die verschiedene Eigenwerte mit Multiplizitäten $m_1..m_k \geq 1$, dann lautet die allgemeine Lösung von $Ly = 0$: $\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{mj-1} c_{jl} x^l e^{\lambda x}$

Beispiel: $y'''' + 2y'' - 8y' + 5y = 0 \rightsquigarrow \lambda^4 + 2\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$
$\Rightarrow \lambda = \{1, 1, -1 \pm 2i\} \rightsquigarrow ae^x + bxe^x + ce^{(-1+2i)x} + de^{(-1-2i)x},\ c, d \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow ae^x + bxe^x + c'e^{-x}\cos 2x + d'e^{-x}\sin^2 x,\ a, b, c', d' \in \mathbb{R}$

Fakt: Hat L reelle Koeffizienten, so entspricht jedes Paar nicht reeller Eigenwerte (der Vielfachheit $> l$) $\mu \pm i\nu$ für $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ den reellen Fundamentallösungen $x^l e^{\mu x}\cos \nu x,\ x^l e^{\mu x}\sin \nu x$