Analysis II - 2014.05.05

Erinnerung: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n C^1 \Rightarrow$ Kurvenlänge $= \int_\gamma 1\ d\,\mathrm{vol}_1 = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt$
$C = \mathrm{Graph}(g[a,b] \to \mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathrm{vol}_1(C) = \int_a^b \sqrt{1+|g'(t)|^2}\ dt$

Beispiel: Welche Kurve beschreibt eine homogene Kette? Sei sie der Graph von $[a,b] \ni x \mapsto y(x)$.
Die Schwerkraft ist $\binom{0}{-\mu\,\mathrm{vol}_1(\mathrm{Graph}(y|_{[a,x]}))}$
Die Zugkraft in $\binom{x}{y}$ ist $= \binom{1}{y'}\ s(x)$ für $s(x) > 0$.
Die Zugkraft in $\binom{a}{y(a)}$ ist $= -\binom{1}{y'(a)}\ s(a)$.
Gleichgewicht: $\binom{0}{-\mu l(x)} + \begin{pmatrix} s(x) \\ y'(x)s(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s(a) \\ y'(a)s(a) \end{pmatrix} = \binom{0}{0} \iff \left\{ \begin{matrix} s(x)-s(a)=0 \\ -\mu l(x)+y'(x)s(x)-y'(a)s(a)=0 \end{matrix} \right\}$
$\iff \left\{ \begin{matrix} s(x)=s \quad \text{konstant} \\ (y'(x)-y'(a))s=\mu l(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dx} : y''(x)s = \mu \frac{d}{dx}(\int_a^x \sqrt{1+y'(\xi)^2}\ d\xi) \iff y''s = \mu\sqrt{1+y'^2}$
Mit $z := y'$ ist dies $\iff \frac{dz}{dx}s = \mu\sqrt{1+z^2} \iff \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\mu}{s}\ dx \iff \mathrm{arsinh}\, z = \frac{\mu}{s}x + c$
$\iff y' = z = \sinh(\frac{\mu}{s}x+c) \Rightarrow y = \int \sinh(\frac{\mu}{s}x+c)\ dx = \frac{s}{\mu}\cosh(\frac{\mu}{s}x+c) + c'$ für konst: c, c', s, μ.
Dies ist die *Kettenlinie* (catenary).

Flächenintegral

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi : B \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Funktion, die ausserhalb einer Teilmenge der Dimension 1 injektiv ist. $\Rightarrow F := \varphi(B)$ ist eine parametrisierte Fläche.

Umparametrisierung: $\widetilde{B} \subset \mathbb{R}^2$, $\psi : \widetilde{B} \to B$ C^1-Funktion die ausserhalb von Teilmengen der Dimension ≤ 1 bijektiv ist. $\Rightarrow \varphi \circ \psi$ andere Parametrisierung.
$\varphi\binom{u+\Delta u}{v+\Delta v} = \varphi\binom{u}{v} + \varphi_u\binom{u}{v}\Delta u + \varphi_v\binom{u}{v}\Delta v + o(|\binom{\Delta u}{\Delta v}|) \rightsquigarrow$ Kleines Rechteck. Dies ist näherungsweise ein Parallelogramm mit Kantenvektoren $\varphi_u \Delta u$ und $\varphi_v \Delta v$. Deren Fläche ist:
$|\varphi_u \times \varphi_u|\Delta u \Delta v = |(\varphi u \Delta u) \times (\varphi_u \Delta v)| = \mathrm{vol}_2(\varphi(R)) = |\varphi_u \times \varphi_v|\,\mathrm{vol}_2(R) + o(|\binom{\Delta u}{\Delta v}|)$

Definition: Das Flächenintegal einer Funktion f auf F ist, falls es existiert, definiert durch $\int_F f\ d\,\mathrm{vol}_2 := \int_B (f \circ \varphi) \cdot |\varphi_u \times \varphi_v|\ d\,\mathrm{vol}_2$. Es existiert z.B. wenn f stetig und B kompakt ist. Genauso uneigentliches Integral.

Satz: Dies ist invariant unter Umparametrisiertung.

Beweis:
Vorherige Definition $= \int_{\widetilde{B}} (f \circ \varphi \circ \xi) \cdot |(\varphi_u \circ \xi) \times (\varphi_v \circ \xi)| \cdot |\det \nabla\xi|\ d\,\mathrm{vol}_2$
Zu zeigen: $= \int_B (f \circ \varphi \circ \xi)|(\varphi \circ \xi)_{\widetilde{u}} \times (\varphi \circ \xi)_{\widetilde{v}}|\ d\,\mathrm{vol}_2$

Spezialfall: Flächeninhalt von F: $\mathrm{vol}_2(F) = \int_F 1\ d\,\mathrm{vol}_2$

Spezialfall: $F = \mathrm{Graph}(g : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ Nimm $\varphi\binom{u}{v} := \begin{pmatrix} u \\ v \\ g\binom{u}{v} \end{pmatrix} \Rightarrow |\varphi_u \times \varphi_v| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v \end{pmatrix}\right|$
$= \left|\begin{pmatrix} -g_u \\ -g_v \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+g_u^2+g_v^2}$

Beispiel: $F = \text{Graph}(g : \binom{u}{v} \mapsto u^2 - v^2)$ auf $B := \{\binom{u}{v} \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq R^2\}$
<Bild von einem Kartoffelchip> $\Rightarrow \text{vol}_2(F) = \int\limits_{u^2+v^2\leq R^2} 1 \underbrace{\sqrt{1+(2u)^2+(-2v)^2}}_{\sqrt{1+4(u^2+v^2)}} \underbrace{d\,\text{vol}_2 \binom{u}{v}}_{dudv=rdrd\varphi}$

$v \left|{u\cos\varphi \atop v=r\sin\varphi}\right| = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}r \; d\varphi dr = 2\pi \int_0^R \sqrt{1+4r^2}r \; dr = 2\pi (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{12}\Big|_0^R$
$= \frac{\pi}{6}((1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1)$

Spezialfall: Rotationsfläche: $g : I \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\quad C^1-$Funktion $\qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| {z\in I, \quad x,y\in\mathbb{R} \atop \sqrt{x^2+y^2}=g(z)} \right\}$

Parametrisierung von F: $\varphi : I \times [0, 2\pi] \to F, \quad \binom{z}{\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} g(z)\alpha \\ g(z)\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}$
$|\varphi_z \times \varphi_\alpha| = \left| \begin{pmatrix} g'(z)\cos\alpha \\ g'(z)\sin\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -g(z)\sin\alpha \\ +g(z)\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -g(z)\cos\alpha \\ -g(z)\sin\alpha \\ g(z)g'(z) \end{pmatrix} \right| = g(z) \left| \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ g'(z) \end{pmatrix} \right| = g(z)\sqrt{1+g'(z)^2}$
$\Rightarrow \text{vol}_2(F) = \int\limits_{I\times[0,2\pi]} g(z)\sqrt{1+g'(z)^2}\, d\,\text{vol}_2 \binom{z}{\alpha} = \int_I 2\pi g(z)\sqrt{1+g'(z)^2}\; dz$

Beispiel: $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2+z^2 = R^2 \right\} \quad I = [-R, R], \quad g(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$
$\Rightarrow g'(z) = (R^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(-2z) = \frac{-z}{\sqrt{R^2-z^2}}$
$\Rightarrow 1 + g'(z)^2 = 1 + \frac{z^2}{R^2-z^2} = \frac{R^2-z^2+z^2}{R^2-z^2} \Rightarrow \sqrt{1+g'(z)} = \frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}$
$\Rightarrow \text{vol}_2(F) = \int_{-R}^{+R} 2\pi\sqrt{R^2-z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\; dz = \int_{-R}^{+R} 2\pi R\; dz = 2\pi R 2R = 4\pi R^2$