Analysis II - 2014.03.03

Erinnerung: Sei $L = (\frac{d}{dx})^n + a_1 ... + a_{n-1}\frac{d}{dx} + a_n$ für Koeffizienten $a_1..a_n$
$f_L(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + ... a_{n-1}T + a_n$. $L(x^n e^{\lambda x}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda \text{ EW der Mult. } > n. \\ ((\neq 0)x^{n-\mu})e^{\lambda x} \end{cases}$
Z.B. $Ly = e^{\lambda x}$ hat Lösung $cx^\mu e^{\lambda x}$.

Fakt: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von f_L der Multiplizität $\mu \geq 0$ und $g(x)$ ein Polynom vom Grad m, so hat $Ly = g(x)e^{\lambda x}$ eine Lösung $f(x)e^{\lambda x}$ für ein Polynom vom Grad $m + \mu$.

Beispiel: $y^{(5)} + y = xe^{-x} \Rightarrow f_L(T) = T^5 + 1 = 0 \Rightarrow$ Nullstellen $-e^{\frac{2\pi i k}{5}},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = (ax^2 + bx)e^{-x}$ für Konstanten a, b.
$\Rightarrow y' = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x}$
$\Rightarrow y'' = (ax^2 + (b - 4a)x + (2a - 2b))e^{-x}$
$\Rightarrow y''' = (-ax^2 + (6a - b)x + (3b - 6a))e^{-x}$
$\Rightarrow y'''' = (ax^2 + (b - 8a)x + (12a - 4b))e^{-x}$
$\Rightarrow y''''' = (-ax^2 + (10a - b)x + (5b - 20a))e^{-x}$
$\Longrightarrow\ y^{(5)} + y = ((10a)x + (5b - 20a))e^{-x} \stackrel{!}{=} xe^{-x} \iff \left\{ \begin{array}{l} 10a = 1 \\ 5b - 20a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{x^2}{10} + \frac{2x}{5}e^{-x}$

Beispiel: $\ddot{y} + \omega^2 y = \cos\lambda t = \frac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2}$ angeregter harmonischer Oszillator, $\omega \neq 0$. Homogene Gleichung Fundamentallösungen $\cos\omega t,\ \sin\omega t$. Eigenwerte: $\pm\omega i$.
$\lambda \neq \pm\omega \Rightarrow y = ae^{i\lambda t} + be^{-i\lambda t} = (a + b)\cos\lambda t + (a - b)i\sin\lambda t$ für $a, b \in \mathbb{C}$
$y = c\cos\lambda t + d\sin\lambda t$
$\Rightarrow \ddot{y} = -c\lambda^2\cos\lambda t - d\lambda^2\sin\lambda t$
$\Longrightarrow\ \ddot{y} + \omega^2 y = (\omega^2 - \lambda^2)(\cos\lambda t + d\sin\lambda t) \stackrel{!}{=} \cos\lambda t \iff \left\{ \begin{array}{l} (\omega^2 - \lambda^2)c = 1 \\ (\omega^2 - \lambda^2)d = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{\cos\lambda t}{\omega^2 - \lambda^2}$
Fall $w = \pm\lambda$: Ansatz: $y = ct\cos\lambda t + dt\sin\lambda t$
$\Rightarrow \dot{y} = c\cos\lambda t - c\lambda t\sin\lambda t + d\sin\lambda t + d\lambda t\cos\lambda t$
$\Rightarrow \ddot{y} = -2c\lambda\sin\lambda t - c\lambda^2 t\cos\lambda t + 2d\lambda\cos\lambda t - d\lambda^2 t\sin\lambda t$
$\Longrightarrow\ \ddot{y} + \omega^2 y = \ddot{y} + \lambda^2 y = -2c\lambda\sin\lambda t + 2d\lambda\cos\lambda t \stackrel{!}{=} \cos\lambda t \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ d = \frac{1}{2}\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2\lambda}t\sin\lambda t$

Systeme von Differentialgleichungen / Gekoppelte DGL

Fakt: Existenz und Eindeutigkeitssatz gilt genauso.

Beispiel: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

Spezialfall: Konstante Koeffizienten, $n = 1$, linear, homogen.
$\Rightarrow y_1' = a_{11}y_1 + .. + a_{1m}y_m \quad .. \quad y_m' = a_{m1}y_1 + .. + a_{mm}y_m$
Mit $y = (y_1..y_m)^T$ ist dies äquivalent zu $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$
Für jedes $v \in \mathbb{C}^m \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $y := ve^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda ve^{\lambda x} \stackrel{?}{=} Ay = Ave^{\lambda x} \iff \lambda v = Av$

Also ist $ve^{\lambda x}$ eine Lösung $\iff$ λ Eigenwert von A und v ein zugehöriger Eigenvektor.

Folge: Ist A diagonalisierbar und $v_1..v_m$ eine Basis von $\mathbb{C}^m$ bestehend aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1..\lambda_m \in \mathbb{C}$, so ist $v_1e^{\lambda_1 x}..v_me^{\lambda_m x}$ eine Basis des Lösungsraums.

Beispiel: $y_1' = -y_1 + 3y_2,\ y_2' = 2y_1 - 2y_2$ mit $y_1(0) = 5,\ y_2(0) = 0$
Lösung: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = (-1-T)(-2-T) - 2\cdot 3 = T^2 + 3T - 4 = (T-1)(T+4)$
$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda = \{1, -4\}$ Eigenvektoren: $v = \{\begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}^T\}$
$\Rightarrow y = av_1e^x + bv_2e^{-4x} \Rightarrow y_1 = 3ae^x - be^{-4x}, \quad y_2 = 2ae^x + be^{-4x}$
$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y_1(0) = 3a - b = 5 \\ y_2(0) = 2a + b = 0 \end{array}\right| \iff \left|\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y_1 = 3e^x + 2e^{-4x}, \quad y_2 = 2e^x - 2e^{-4x}$
Anmerkung: $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + .. + a_0y = 0 \Rightarrow$ Setze $y_i := y^{(i-1)}$ für $i = 1..n$
$\Rightarrow y_i' = y_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow y_n' = -a_ny_1 - a_{n-1}y_2 - .. - a_1y_n$

