Analysis II - 2014.02.24

Erinnerung: Separierbare DGL: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \rightsquigarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$
Für jedes y_0 mit $g(y_0) = 0$ $y := y_0$ eine Lösung.

Spezialfall: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ Diese DGL ist invariant unter $(x, y) \mapsto (tx, ty)$, "homogen".
Substitution: $u = \frac{y}{x} \iff y = ux \Rightarrow u + \frac{du}{dx}x = \frac{dy}{dx} = f(u) \rightsquigarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u$
Löse: $\int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x} \iff H(u) = G(x)$
Lösung: $u = H^{-1}(\log|x| + c) \Rightarrow y = H^{-1}(log|x| + c)x$
Beachte: $\exp(\log|x| + c) = e^c|x|$ daher, wenn $H(u) = \log|I(u)| \Rightarrow I(u) = \pm e^c x = c'x$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow y = ux \rightsquigarrow u + \frac{du}{dx}x = \frac{ux+\sqrt{x^2+u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1+u^2}$
$\rightsquigarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{arsinh}(u) = \log|x| + c = \log(c'x) \Rightarrow u = \sinh(\log(c'x))$
$\Rightarrow u = \frac{c'x - \frac{1}{c'x}}{2} = \frac{c'^2x^2-1}{2cx} \Rightarrow y = \frac{c'^2x^2-1}{2c'}$ für $c' \neq 0$
Probe: $\frac{dy}{dx} = c'x = ...$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+qy}{qx-y}$ für q konstant. $\Rightarrow y = ux \rightsquigarrow u + \frac{du}{dx}x = \frac{1+qu}{q-u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1+qu}{q-u} - u = \frac{1+u^2}{q-u}$
$\rightsquigarrow \int \frac{q-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow q\arctan(u) - \frac{1}{2}\log(1+u^2) = \log(cx)$ nicht weiter Lösbar, anders:
$q\arctan(\frac{y}{x}) = \log\left(cx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = \log\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right)$
Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \iff r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x}$
$\Rightarrow q(\varphi - k\pi) = \log(cr) \Rightarrow e^{q\varphi}e^{qk\pi} = cr \iff r = c'e^{q\varphi}$

Lineare Differentialgleichungen

Definition: Für Funktionen $a_0(x)..a_n(x)$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heisst $L := a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + .. + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$ ein linearer *Differentialoperator*, welcher jeder c^n-Funktion $y(x)$ die Funktion

$$x \mapsto Ly(x) := a_0(x)\frac{dy}{dx^n} + .. + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y(x)$$

zuordnet.

Fakt: λ_1, λ_2 konstant $\Rightarrow L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2$

Definition: Eine DGL der Form $Ly(x) = b(x)$ heisst *(inhomogen) linear*, $Ly(x) = 0$ heisst *homogen linear*.

Fakt: Die Lösungen der homogenen Gleichung $Ly = 0$ bilden einen Vektorraum. Sind $y_1..y_n$ eine Basis, dann ist jede Lösung der Gestalt $\lambda_1 y_1 + ..\lambda_n y_n$ für $\lambda_1..\lambda_n$ konstant. Die y_i sind die *Fundamentallösungen* und die $\sum \lambda_i y_i$ ist die *allgemeine Lösung*.

Satz: Ist $a_0(x) = 1$ und alle $a_i(x)$ stetig, dann ist die Dimension des Lösungsraums $Ly = 0$ auf I gleich n. Genauer: zu beiliebigen Anfangswerten existiert eine eindeutige Lösung auf I.

Fakt: Ist y_p eine *partikuläre* Lösung von $Ly_p = b$, dann ist die alggemeine Lösung der Gleichung gleich $y_p + \lambda_1 y_1 + .. + \lambda_n y_n$ für konstante λ_i.

Fakt: Gilt $Ly_1 = b_1 ... Ly_r = b_r$ so ist $L(y_1 + .. + y_r) = b_1 + .. + b_r$.

Spezialfall Ordnung 1

Homogener Fall: $y' + a(x)y = 0$ separierbar $\rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx \Rightarrow \log|y| = ..$
Fundamentallösung: $y(x) = e^{-\int a(x)dx} \iff$ allg. Lösung: $y(x) = \lambda e^{-\int a(x)dx}$ für λ konstant.

Inhomogener Fall: $y' + a(x)y = b(x)$
Ansatz: "Variation der Konstanten" $\implies y(x) = \lambda(x) y_h(x) \rightsquigarrow \frac{d\lambda}{dx} = \frac{b(x)}{y_h(x)}$
$\Rightarrow$ Partikuläre Lösung: $y_p(x) = y_h(x) \int \frac{b(x)dx}{y_h(x)}$