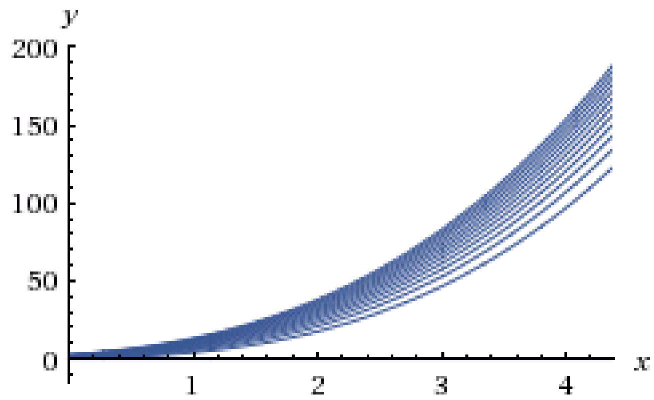
Analysis II - 2014.02.20

Erinnerung: $\frac{dy}{dx} = y^2$ Wo $y \neq 0$ ist $y(x)$ lokal invertierbar
$\rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y^2} \rightsquigarrow x = \int \frac{dy}{x^2} + c = c - \frac{1}{y}$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$ Wo $y \neq 0$ ist, ist $y(x)$ lokal invertierbar $\rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3y^{2/3}} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$
$\rightsquigarrow x = \int \frac{1}{3}y^{-2/3}dy = y^{1/3} + c \rightsquigarrow (x-c)^3 = y$ wo $y \neq 0$
Probe: $\frac{d}{dx}((x-c)^3) = 3(x-c)^2 = 3((x-c)^3)^{2/3} = 3(y)^{2/3} \rightsquigarrow$ Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-c)^3$ eine Lösung. Durch Einsetzen von 0 erscheint eine weitere Lösung: $y \equiv 0$ identisch:



Die max. Lösungen sind dann genau die Funktionen $x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} (x-c_2)^3 & \text{für } x \geq x_2 \\ 0 & \text{für } c_1 < x < c_2 \\ (x-c_1)^3 & \text{für } x \leq c_1 \end{array} \right\}$

für $-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \infty$.

Lösung durch Potenzreihenansatz

Besipeil: Besselsche DGL mit $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$:

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})f(x) = 0$$

Gesucht sind alle Lösungen $f(x) = \sum_k^\infty a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ auf $]0, \varepsilon[,\ \varepsilon > 0$. Wir benutzen dies nun als Ansatz und bestimmen die a_k.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} + \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} + (1 - \frac{n^2}{x^2}\sum_{k\geq 0} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{l+2}(l+2)(l+1)x^l + \frac{1}{x}\sum_{l=-1}^{\infty} a_{l+2}(l+2)x^l + \sum_{l\geq 0} a_l x^l - \sum_{l=-2}^{\infty} a_{l+2}n^2x^{l+2} = 0$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(a_{l+2}(l+2)(l+1) + a_{l+2}(l+2) + a_l - a_{l+2}n^2)x^l + (a_1 1 - a_1 n^2)x^{-1} + (-a_0 n^2)x^{-2} = 0$$

Jede dieser Klammerteile kann nun nach 0 aufgelöst werden.

$$\iff n^2 a_0 = 0 \qquad (n^2-1)a_1 = 0 \qquad \forall l \geq 0 : a_l + a_{l+2}((l+2)^2 - n^2) = 0$$

$$\iff \forall k \geq 2 : a_{k-2} = (n^2 - k^2)a_k \Rightarrow n \geq 0 \rightsquigarrow \forall k \neq n : a_k = \frac{a_{k-2}}{n^2 - k^2}$$

$\Rightarrow \forall k \geq 0$ mit $k \not\equiv n \mod 2, \rightsquigarrow a_k = 0$
$\Rightarrow \forall k \geq 0$ mit $k \equiv n \mod 2$: Für $k < n$ folgt ebenso $a_k = 0$
$k = n,\ a_{n-2} = 0 \qquad k = n + 2l,\ l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$
$\Rightarrow a_{n+2l} = \frac{a_{n+2l-2}}{(n^2-(n+2l)^2)} = \frac{a_{n+2l-2}}{(2n+2l)(-2l)} = \frac{a_n}{(2n+2l)(2n+2l-2)..(2n+2)\cdot(-2l)(-2l+2)..(-2)} = \frac{a_n \cdot n!}{(n+l)!\cdot 2^l \cdot (-1)^l \cdot 2^l \cdot l!}$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{(-1)^l \cdot 4^l \cdot (n+l)! \cdot l!} x^{n+2l}$$

Definition: n-te Besselfunktion erster Art $Y_n(x) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{n+2l}}{(-4)^l (n+l)! l!}$
Der Konvergenzradius ist ∞.

Seperierbare DGLen

$\frac{dy}{dx} = y' = g(x)h(y) \iff \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \Rightarrow H(y) = G(x) + c$
$\rightsquigarrow y = H^{-1}(G(x) + c)$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Rightarrow \arctan y = x + c \Rightarrow y = \tan(x+c)$
Probe: $\frac{d}{dx}(\tan(x+c)) = \frac{1}{\cos^2(x+c)} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2(x+c)$

Beispiel: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}},\ x, y \in]-1, 1[\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + c$
$\Rightarrow y = \sin(\arcsin x + c) = \sin(\arcsin x)\cos c + \cos(\arcsin x)\sin c = x\cos c + \sqrt{1-x}^2 \sin c$
$\Rightarrow y = ax + b\sqrt{1-x^2}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.