Analysis II - 2014.04.28

Uneigentliche Integrale

Sei f eine Funktion auf $X \subset \mathbb{R}^n$. Jetzt: X nicht kompakt oder f nicht stetig.

Annahme: Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert $\int f \; d\,\mathrm{vol}$.

Definition: $\int_X f \; d\,\mathrm{vol} := \lim\limits_{K} \int_K f \; d\,\mathrm{vol}$
Genauer: $\int_X f \;\; d\,\mathrm{vol} := S$ falls $\forall \epsilon > 0 \exists K_0 \subset X$ kompakt, sodass $\forall K \subset X$ kompakt: $K_0 \subset K \Rightarrow \left|\int_K f \; d\,\mathrm{vol} - S\right| < \epsilon$ falls das existiert. *Uneigentliches Integral.*

Fakt: Ist f stetig und sind die Werte $\int_K |f| \; d\,\mathrm{vol}$ nach oben beschränkt für alle K, dann existiert $\int_X f \; d\,\mathrm{vol}$. Wie früher $\int_K f \; d\,\mathrm{vol} = \underbrace{\infty}_{\text{uneigentlicher Grenzwert}}$ wenn $\forall N \exists K_0.\ \forall K : K_0 \subset K \Rightarrow \int_K f \; d\,\mathrm{vol} > N$.

Ist $f \geq 0$ überall, so existiert $\int_X f \; d\,\mathrm{vol}$ oder es ist ∞ und alle Regeln gelten.

Beispiel: $\int\limits_{[1,\infty[\times[1,\infty[} \frac{1}{(x+y)^s} \; d\,\mathrm{vol} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Fubini}}{=} \int_1^\infty (\int_1^\infty (x+y)^{-s} \; dy) \; dx \overset{s \geq 1}{=} \int_1^\infty (\frac{(x+y)^{1-s}}{1-s} \Big|_{y=1}^{y=\infty}) \; dx$

$= \int_1^\infty (\lim\limits_{y \to \infty} \frac{(x+y)^{1-s}}{1-s} - \frac{(x+1)^{1-s}}{1-s}) \; dx = \frac{1}{s-1} \int_1^\infty (x+1)^{1-s} \; dx = \begin{cases} \infty & \text{falls } s - 1 \leq 1 \\ \text{sonst..} & \text{falls } s > 2 \end{cases}$

sonst: $= \frac{1}{s-1} \; (\frac{(x+1)^{2-s}}{2-s}) \Big|_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{s-1} (-\frac{2^{2-s}}{2-s}) = \begin{cases} \infty & \text{falls } s \leq 2 \\ \frac{2^{2-s}}{(s-1)(s-2)} & \text{falls } s > 2 \end{cases}$

Beispiel: $I := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \; dx = ?$
Lösung: $I^2 = (\int\limits_{]-\infty,\infty[} e^{-x^2} \; dx)(\int\limits_{]-\infty,\infty[} e^{-y^2} \; dy) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} \; d\,\mathrm{vol}_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left| \begin{smallmatrix} e^{-x^2} e^{-y^2} = e^{-(x^2+y^2)} \\ x = r\cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{smallmatrix} \right|$

$= \int\limits_{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^{leq0} \times [0,2\pi]} \int e^{-r^2} r \; dr d\varphi = \underbrace{\int_0^\infty e^{-r^2} r \; dr}_{\frac{e^{-r^2}}{-2}\Big|_0^\infty = 0 - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \pi \implies I = \sqrt{\pi}$

Kurvenintegral

Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, die ausserhalb endlich vieler Punkte injektiv ist. Dann heisst $C := \mathrm{image}(\gamma)$ eine (parametrisierte) C^1-Kurve in $\mathbb{R}^n$, oder Weg von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$, oder Weg mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$.

Vorsicht: $\mathrm{vol}_n(C) = 0$ falls $n > 1$.

Fakt: $[t_0, t_0 + \Delta t]$ wird von γ auf ein Kurvenstück der Länge $|\gamma'(t_0)| \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ abgebildet.

Definition: Sei f eine Funktion auf C. Das Integral von f über C, falls es existiert (z.B. wenn f stetig ist), ist

$$\int_C f \, d\,\mathrm{vol}_1 := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt$$

Fakt: Das ist invariant unter Umparametrisierung.
d.h.: $\forall \psi : [\widetilde{a}, \widetilde{b}] \to [a,b]$ bijektiv, C^1 gilt: $\int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f(\gamma(\psi(\widetilde{t}))) \cdot |(\gamma \circ \psi)'(\widetilde{t})| \, d\widetilde{t}$
$= \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} f(\gamma(\psi(\widetilde{t}))) \cdot |\gamma'(\psi(\widetilde{t}))| \cdot |\psi'(\widetilde{t})| \, d\widetilde{t} =$ obige Definition

Spezialfall: Die Kurvenlänge von C ist $\mathrm{vol}_1(C) := \int_C 1 \, d\,\mathrm{vol}_1 = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$

Spezial^2-Fall: $C = \mathrm{Graph}(g)$ für C^1-Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Wähle $\gamma : [a,b] \to C \subset \mathbb{R}^{n1},\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix}$
$\Rightarrow |\gamma'(t)|^2 = 1^1 + |g'(t)|^2 \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + |g'(t)|^2}$
$\Rightarrow \mathrm{vol}_1(C) = \int_a^b \sqrt{1 + |g'(t)|^2} \, dt$

Beispiel: $C : y = x^2$ für $x \in [-1,1] \Rightarrow \mathrm{vol}_1(C) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \left| \substack{\sinh z = 2t \\ \cosh z \, dz = 2 \, dt \\ t = \pm 1 \iff \\ 2t = \pm 2 \iff z = \pm \operatorname{arsinh}(2)} \right|$
$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \cosh z \cdot \frac{\cosh z}{2} \, dz = .. = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5})$

