Analysis II - 2014.03.20

Taylor: $f(x,y) = \sum\limits_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq k}} \frac{\partial^{i+j}f}{\partial y^j x^i}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\frac{(y-y_o)^j}{j!} + o(|(x-x_0,y-y_0)|^k)$

$e^x = \sum\limits_{i\geq 0}\frac{x^i}{i!} \Rightarrow e^{x+y} = e^{x-x_0}e^{y-y_0}e^{x_0+y_0} \Rightarrow e^{x+y} = e^{x_0+y_0}\sum\limits_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j\leq k}}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\frac{(y-y_0)^j}{j!} + o(|(x-x_0,y-y_0)|^k)$

Bemerkung: Einsetzen bekannter Entwicklungen!

Beispiel: $(\cos x)\log(1+x+y)$ Taylor Approx bei $(x,y)=(0,0)$
$\Rightarrow (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^6))((x+y)-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{3}+O((x+y)^4))$
$= (x+y)-\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{x^2}{2}((x+y)+\text{höhere Ordnung})+O(|(x,y)|^4)$
$= (x+y)-\frac{(x+y)^2}{2}+(x+y)(\frac{(x+y)^2}{3}-\frac{x^2}{2})+O(|(x,y)|^4)$
$= (x+y)-\frac{x^2+2xy+y^2}{2}+\frac{(x+y)(-x^2+4xy+2y^2)}{6}+O(|(x,y)|^4)$

Jetzt: $x = x_1..x_n$ $f(x)$: Taylor Approximation vom Grad 2 im Punkt $\xi = (\xi_1..\xi_n)$:
$f(x) = f(\xi)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(x_i-\xi_i)+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\xi)\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_k)}{2}+o(|x-\xi|^2)$
$\underline{n=2}$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(\xi)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\xi)\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\xi)\frac{(x_2-\xi_2)(x_1-\xi_1)}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(\xi)\frac{(x_2-\xi_2)^2}{2}$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi)\frac{(x_1-\xi_1)^2}{2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(\xi)(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi)\frac{(x_2-\xi_2)^2}{2}$

Definition: Die *Hesse-Matrix* von f ist die *zweite Ableitung* $\nabla^2 f = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}$
Diese ist *symmetrisch*, falls f zwei mal stetig diff'bar ist. $\Rightarrow$ Taylor Approx:
$f(x) = f(\xi)+\nabla f(\xi)(x-\xi)^T+\frac{1}{2}(x-\xi)\nabla^2 f(\xi)(x-\xi)^T+o(|x-\xi|^2) =$ beste quad. Approx.

Definition: ξ heisst *kritischer Punkt* von f falls $\nabla f(\xi)=0$.

Fakt: Wenn f in ξ ein lokales Extremum hat, so ist ξ ein kritischer Punkt von f.

Geometrische Interpretation: ξ ist kritischer Punkt $\iff$ Tangentialhyperebene horizontal.

Definition: Ein kritischer Punkt ξ von f mit $\det\nabla^2 f(\xi)\neq 0$ heisst *nicht ausgeartet*.

Definition: Eine reelle symmetrische $n \,\mathrm{x}\, n$ Matrix A heisst

positiv definit	$\iff$	$\forall x\in\mathbb{R}^n_{\backslash\{0\}} : xAx^T > 0$
negativ definit	$\iff$	$\forall x\in\mathbb{R}^n_{\backslash\{0\}} : xAx^T < 0$
positiv semidefinit	$\iff$	$\forall x\in\mathbb{R}^n_{\backslash\{0\}} : xAx^T \geq 0$
negativ semidefinit	$\iff$	$\forall x\in\mathbb{R}^n_{\backslash\{0\}} : xAx^T \leq 0$
indefinit	$\iff$	sonst

Lineare Algebra: Alle Eigenwerte von a sind reell und

positiv definit	$\iff$	alle EW > 0
negativ definit	$\iff$	alle EW < 0
positiv semidefinit	$\iff$	alle EW ≥ 0
negativ semidefinit	$\iff$	alle EW ≤ 0
indefinit	$\iff$	sonst

Fakt: Ist ξ nicht ausgeartet,

- mit $\nabla^2 f(\xi)$ *positiv definit*, so hat f in ξ ein isoliertes lokales Minimum.
- mit $\nabla^2 f(\xi)$ *negativ definit*, so hat f in ξ ein isoliertes lokales Maximum.
- mit $\nabla^2 f(\xi)$ *indefinit*, so hat f in ξ einen Sattelpunkt.

$$\textit{Beispiel}:\ f(x,y) \begin{array}{ll} = x^2 + y^4 & \text{isoliertes lokales Minimum} \\ = x^2 - y^4 & \text{Sattelpunkt} \\ = x^2 + y^3 & ? \end{array} \qquad \rightsquigarrow (0,0) \text{ angeordneter kritischer Punkt.}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ semipositiv.}$$

Beispiel: Untersuche die kritischen Punkte von $f(x,y) := \cos(x+2y) + \cos(2x+3y)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_x = -\sin(x+2y) - 2\sin(2x+3y) = 0 \\ f_y = -2\sin(x+2y) - 3\sin(2x+3y) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \sin(x+2y) = 0 \\ \sin(2x+3y) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x+2y \in \mathbb{Z}\pi \\ 2x+3y \in \mathbb{Z}\pi \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z}\pi \\ y \in \mathbb{Z}\pi \end{array} \right\}$$

Da f in x und y periodisch ist mit Periode 2π, genügt:

$$(x,y) = (0,0): \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ -8 & -13 \end{pmatrix} \qquad \text{neg. definit} \Rightarrow \text{lokales Max.}$$

$$(x,y) = (0,\pi): \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 1 \qquad \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$(x,y) = (\pi,0): \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$(x,y) = (\pi,\pi): \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 \\ 8 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda + 1 \qquad \text{pos. definit} \Rightarrow \text{lokales Min.}$$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\cos(x+2y) - 4\cos(2x+3y) \\ f_{xy} &= -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y) \\ f_{yx} &= -2\cos(x+2y) - 6\cos(2x+3y) \\ f_{yy} &= -4\cos(x+2y) - 9\cos(2x+3y) \end{aligned}$$