

# 基于非配对数据的数字信号特征提取与去噪优化

## 摘要

本文针对低成本惯性传感器的信号精度不足问题，基于**小波变换**建立**时频域特征**的提取和分析模型，挖掘出高成本和低成本传感器信号数学特征上的本质区别，而后基于提高信号信噪比和降低均方根误差目标建立了**小波去噪和希尔伯特-黄变换去噪模型**，最后给出增强后的低成本惯性传感器信号。

针对问题一，首先基于附件中提供的**非配对信号**进行数据挖掘，依据**平稳性检验**结果将高成本和低成本传感器分为平稳信号组和非平稳信号组；之后本文对于评价信号特征参数进行搜集和筛选，得到了分别从信号采样、信号分布和信号波动角度进行评价的**六大特征参数指标**；而且针对非平稳信号进行小波变换，完成信号从时域到时频域的转换，得到**时域、频域和时频域综合评价模型**；最后，将低成本和高成本传感器的特征参数进行可视化对比分析，结果表明高成本惯性传感器具有**测量范围广、精度高、噪声水平低和信号稳定性高**的优势，适合应用于精密的科学研究和工程中；低成本惯性传感器由于其**采样精度低、滤波能力弱和灵敏度低**而产生误差，更适合投入在对精度要求不高的大规模生产中。

针对问题二，由于问题一中已对高成本和低成本传感器的信号特征进行了分析，本文首先基于其分析出的信号完成了小波基、阈值和阈值函数的选取，构建了针对低成本惯性传感器的**最优小波去噪模型**；之后利用 EMD 分解，把信号进行分解成不同频率尺度的 IMF 成分，并作出希尔伯特谱图，建立起具有自适应特性、多分辨率和可利用多分量数据的**希尔伯特-黄变换去噪模型**；最终，对低成本传感器进行**双模型融合去噪**，得到增强信号。

最后，本文基于**信噪比、均方根误差和平滑度**三个指标对第二问建立的优化模型进行检验和分析，肯定了本模型的优化效果，并给出了优化前后的可视化时域图进行对比。

**关键字：** 惯性传感器   数字信号   时频域特征   小波变换   希尔伯特-黄变换

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

在未来的信息化社会，各种各样的智能化系统都将依赖于传感器所构成的网络。因此，传感器系统的精度将决定未来社会的智能化程度。然而，高精度传感器因成本限制无法大规模生产，低精度传感器虽然价格低廉，但信号中包含噪声和误差漂移。为了提高低成本传感器的精度，可以选择改进硬件设计和制造方法，虽然技术难度不大，但其成本较高。而选择对传感器输出信号进行信号采集和处理的方法来提高陀螺仪的精度，不仅可以降低对传感器硬件精度的需求，还能达到降低成本的目的，这是传感器领域一直以来的一个重要研究方向。

### 1.2 问题要求

本题提供了非配对的低成本与高成本惯性传感器信号数据，其中包含两种低成本传感器和一种高成本传感器测得的加速度和角速度，我们需要据此建立数学模型解决以下问题：

- (1) 对低成本和高成本惯性传感器信号进行对比，分析低成本传感器的误差和高成本传感器的优势。
- (2) 根据(1)问分析结果，处理低成本传感器的信号，使其具备高成本传感器信号的部分特征，达到信号增强的效果。

## 二、问题分析

题述提供了基于非配对数据的高低传感器数字信号，本文主要对不同成本传感器获取的数字信号进行特征提取、分析和去噪。首先对提供的数据进行可视化，利用自相关系数分析数据的稳定性特征，并以此为依据将数据分为平稳信号及非平稳信号。其中，低成本传感器与高成本传感器的前五组数据属于非平稳信号，高成本传感器的后七组数据属于平稳信号。本文整体流程图如下图 1 所示。

### 2.1 问题一分析

本问主要针对非平稳信号不同成本传感器之间的时频域特征进行分析，以比较不同成本传感器的优劣。针对非平稳信号，时域方面，对高低成本的采样频率、采样精度、偏度和峭度、脉冲因子和裕度因子进行分析，对传感器的量程范围、时间分辨率、波形

的平缓程度、对冲击信号的反应特性进行对比；频域方面，通过对时域信号进行小波变换，进而得到功率谱密度图，对频率的标准差与方差进行分析，得到传感器的频谱特性。针对平稳信号，对其时域、功率谱密度图、小波变换后的分解图进行分析，探究低成本传感器在高频分量上的敏感性和平稳性。

2.2 问题二分析

本问首先考虑到信号的非平稳特征，采用了能够反应时域特征的小波变换进行分解，并基于变换结果进行去噪。其次考虑到小波变换的基函数具有非适应性缺点，进一步采用具有自适应性基函数的希尔伯特-黄变换进行分解与去噪。最后融合两种去噪方法，对低成本传感器数据进行处理与分析。

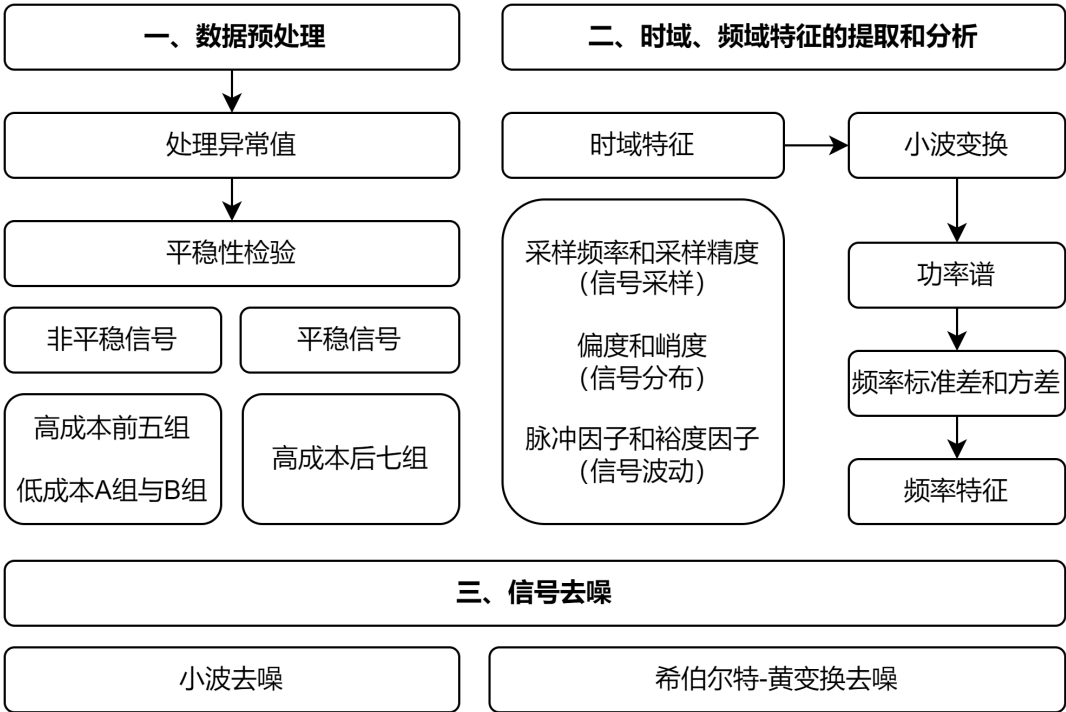


图 1 思路流程图

三、模型假设

1. 假设传感器所采集的各组运动过程之间并无相关性。
2. 假设相似成本的传感器具有相似的传感器特征。
3. 假设传感器采集运动过程外部环境特征保持一致，或不对传感器特性造成影响。
4. 假设传感器采集运动过程不对传感器特性造成影响。

## 四、符号说明

符号	含义
$i$	信号的第 $i$ 个采样点
$x_i$	信号的第 $i$ 个采样点的数值
$x_{peak}$	信号峰值
$X(t)$	分析信号
$\omega_{j,k}$	小波分解尺度系数
$\hat{\omega}_{j,k}$	阈值处理后的小波尺度系数
$\lambda$	阈值
$\sigma$	噪声的标准差
$N$	信号长度
$X_{\max}(t)$	信号的的上包络曲线
$X_{\min}(t)$	信号的下包络曲线
$m_1(t)$	信号的平均值

## 五、数据预处理

### 5.1 数据异常

经过分析,发现低成本 B09 组的时间轴并未从 0 开始,可认为传感器并未在开始采样时置 0,故将 B09 组时间数据向后平移 0.00548s 使得时间轴从 0 开始。由于样本数量较小,该异常也可视作低成本传感器的不足之处。

### 5.2 数据分组

数字信号可以依信号随时间的变化规律分为确定性信号和非确定性信号,而其中非确定性信号又可以依据均值和相关随时间变化分为平稳随机信号和非平稳随机信号。题述信息均为非确定性信号,但仍需要对平稳性和非平稳性进行分析。

由自相关图 2 和图 3 可看出，高成本前五组与低成本的自相关图普遍有显著拖尾特征，而高成本的后七组有显著的截尾特征。可以依据随机信号的平稳性将所有数据分为两组：

- 非平稳随机信号：高成本前五组、低成本 A 组与 B 组
- 平稳随机信号：高成本后七组

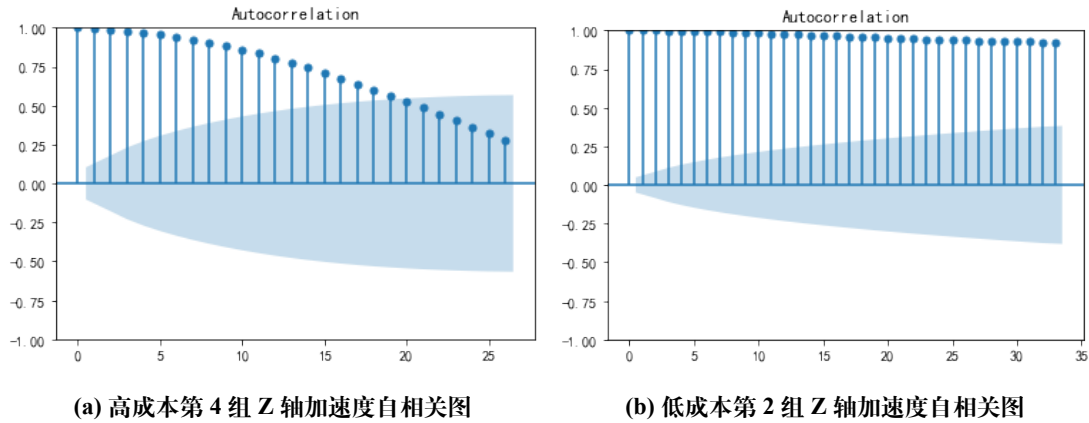


图 2 高成本前五组与低成本自相关图示例

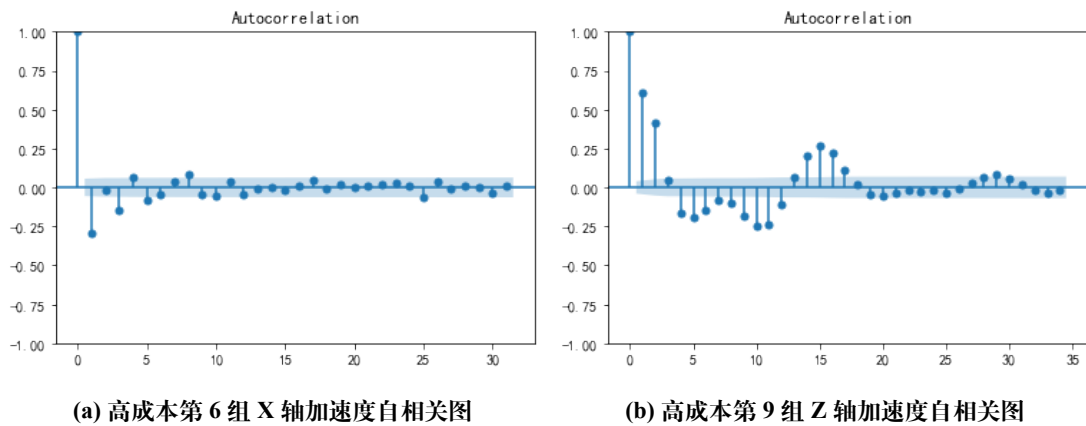


图 3 高成本后七组自相关图示例

## 六、问题一的模型建立与求解

由于题述运动信息中，只有非平稳随机信号包含高成本与低成本两类传感器，故本问首先主要对非平稳随机信号在时域、频域进行对比分析，进而在本问的最后对平稳随机信号进行特征提取与分析，作为对高成本传感器优势的阐述。

6.1 时域特征提取与分析

时域分析是指对系统进行数据输入后，根据输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、瞬态和稳态性能。对信号数据在时间域上提取的特征被称为时域特征。由于有量纲的特征参数随被测对象的运动状态的变化波动很大，所以在对不同信号的特征进行对比时，需要保证其运行参数和测量位点基本一致。但题目要求基于非配对信号数据进行分析，故选用无量纲的时域特征参数对信号进行特征的提取和分析。

为了更加科学地分析不同成本传感器间信号的区别，在选取无量纲的特征参数上，应该遵循系统性、科学性、可比性和实用性等原则 [1]，综合考虑信号在不同评价指标上的表现。依照近年来我国多名学者在传感器各个应用领域进行的研究 [2]-[5]，对信号的时域特征参数进行了整理，选取了六大特征参数如下图 4 所示，并根据平稳性检验得出的结果进行分组分析。

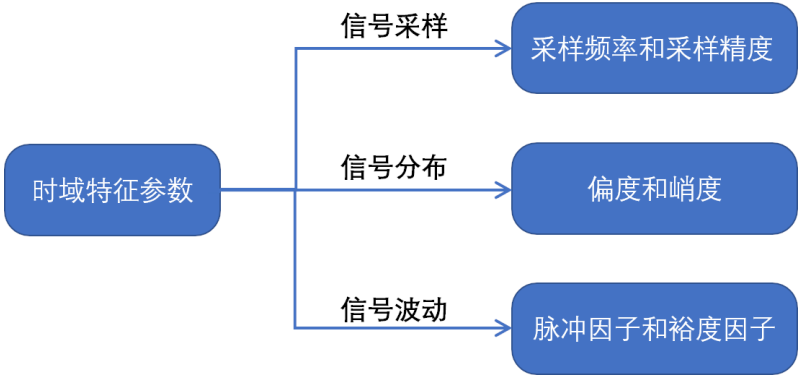


图 4 时域特征参数

6.1.1 采样频率和采样精度

一般来说，采样频率越高，信号的采样点越多，信号的重构精度越高。但是，采样频率过高也会导致误差增加，原因有以下几点：

- 高采样率会增加存储和运算的开销。
- 高采样率会增加高频信号和噪声的采样点，进而增加采样误差。
- 高采样率会增加重构信号时的因重抽样而产生的误差，即重抽样误差。

因此，采样频率和采样精度的平衡是衡量传感器性能的一大特征。通过分析预处理后的信号数据可发现，两种低成本传感器与高成本传感器的采样频率和采样精度各有不同，总结如下：通过低成本 B 与高成本传感器的对比发现，低成本即时以较低的采样频率采样，精度方面仍然劣于高成本传感器；而虽然低成本传感器可以做到高频率采集信号，但在采样精度上远低于高成本传感器，且采样时间有较大的误差，无法做到采样时间间隔恒等。可见，高成本传感器在采样精度和采样频率上远优于低成本传感器。

表 1 采样频率和精度对比 1

传感器类型	采样频率	采样精度
低成本 A	500Hz	9 位数
低成本 B	100Hz	14 位数
高成本	120Hz	16 位数

### 6.1.2 偏度和峭度

偏度是由三阶标准矩给出的理想对称概率分布不对称性的度量，表征概率分布密度曲线相对于均值的不对称程度。

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

峭度用来衡量实数随机变量概率分布的峰态，可以表示样本的函数图形顶峰的凸平度和整个波形的平缓程度。

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^4}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2 \right)^2} \quad (2)$$

偏度和峭度是有一定的相关性的，峭度因子是四阶中心矩和标准差的四次方的比值，偏度因子是三阶中心矩和标准差的三次方的比值。基于偏度和峭度进行分析，可以挖掘出不同成本惯性传感器信号的分布情况。以信号中的 x 轴加速度为例进行分析，作出偏度和峭度折线图如下图 5 所示。

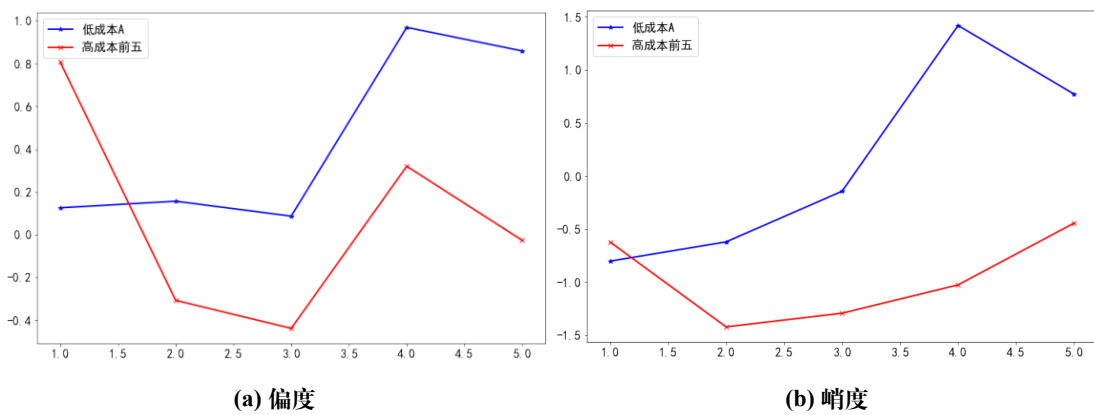


图 5 偏度和峭度对比图

总体来看，高成本传感器的信号偏度更接近于 0，峭度值平均偏低。这说明高成本传感器信号分布更接近于正态分布，且波形更为平缓，突变信号较少。因此，基于信号分布可以判断，高成本传感器具有较低的噪声水平和较高的平稳性。

### 6.1.3 脉冲因子和裕度因子

脉冲因子和裕度因子都是衡量信号冲击的指标，在工程中常用于诊断机械设备的故障。脉冲因子  $I$  是峰值与整流平均值（绝对值的平均值）的比值。

$$I = \frac{x_{\text{peak}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|} \quad (3)$$

裕度因子  $C_e$  是信号峰值与方根幅值的比值。

$$C_e = \frac{x_{\text{peak}}}{\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|} \right)^2} \quad (4)$$

同样地，以不同成本传感器测得的  $x$  轴加速度为例，作出折线图如下图 6 所示。从图中分析可得，与低成本传感器对比，高成本传感器的脉冲因子和裕度因子不仅总体偏低，而且不同组数据间数值相差较小，表现出可以更精确地检测到微小变化的能力，并且在环境条件、应用场景和运动状态发生变化时能够保持更高的稳定性。

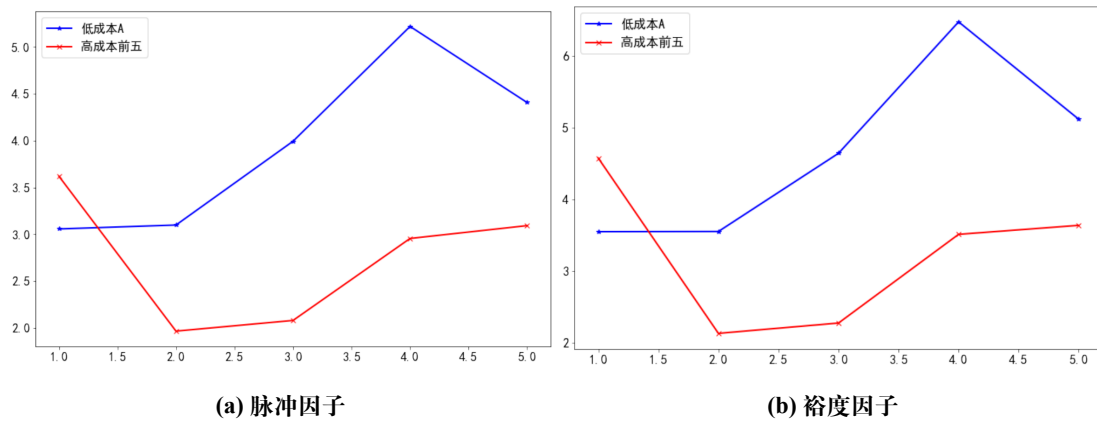


图 6 脉冲因子和裕度因子对比图

### 6.2 频域特征提取与分析

时域分析利用传递函数进行研究，间接地评价系统的性能指标，可以求取信号波形在不同时刻的相似性和关联性，并且直观地反映信号随时间产生的变化。而为了从信号的表面深入到研究信号的本质，本文下面将对传感器信号进行频域特征的提取与分析，流程图如下图 2 所示。

频域分析是指应用频率特性对线性系统进行研究，即建立系统的稳态输出与不同频率正弦函数的输入信号之间的关系。通过频域分析可以反映在正弦信号的作用下系统响应的性能，提高识别信号变化或模式的可行性，除此之外，其不仅可以利用单个频率的频谱信息，还能利用频带的频谱信息，快速且高效地分析信号的本质特征。





图 7 频域特征提取与分析流程

### 6.2.1 小波变换

在数据预处理中，对信号进行了平稳性检验和分组。基于待分析信号皆为非平稳信号，故无法使用傅里叶变换（FFT）和短时傅里叶变换（STFT）等具有局限性的方法对信号进行时域和频域之间的转换。针对上文得出的信号特性，本文选择小波分析对信号进行转换。

小波变换将傅里叶变换中无限长的三角函数基替换为有限长的会衰减的小波基，如此便能够获取频率和定位时间，并随着频率改变而不断调整时频分辨率。[6] 小波变换的定义如下：

若  $\psi(t) \in L^2(R)$  满足条件：

$$C_\psi = \int \frac{|\psi(\Omega)|^2}{|\Omega|} d\Omega < \infty \quad (5)$$

则把  $\psi(t)$  称为基本小波函数。

若将函数  $\psi(t)$  经过伸缩变换得到  $\psi_{a,b}(t)$ ，即

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (6)$$

式中， $a, b \in R$ ， $a > 0$ 。则  $\psi_{a,b}(t)$  就称为小波基函数。

对于一个函数  $x(t)$ ，即  $x(t) \in L^2(R)$ ，则  $x(t)$  的小波变换为

$$WT_x(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \int x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (7)$$

此函数将基本小波函数  $\psi(t)$  进行平移和伸缩变换得到的。其中尺度  $a$  控制小波函数的伸缩，平移量  $b$  控制小波函数的平移。其频域表达式为：

$$WT_x(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega) \Psi^*(a\Omega) e^{j\Omega b} d\Omega \quad (8)$$

### 6.2.2 频率标准差和方差

下面，将对信号进行具体的频域分析。通过对信号进行小波变换可以得到频谱图，对信号先作自相关，再进行小波变换可得到功率谱密度函数图（PSD），如下图 8 所示。功率谱定义为单位频带内的信号功率，由于其在表达功率信号乃至随机信号的频域特征时更具有普适性，故使用功率谱对不同成本传感器信号进行对比研究。

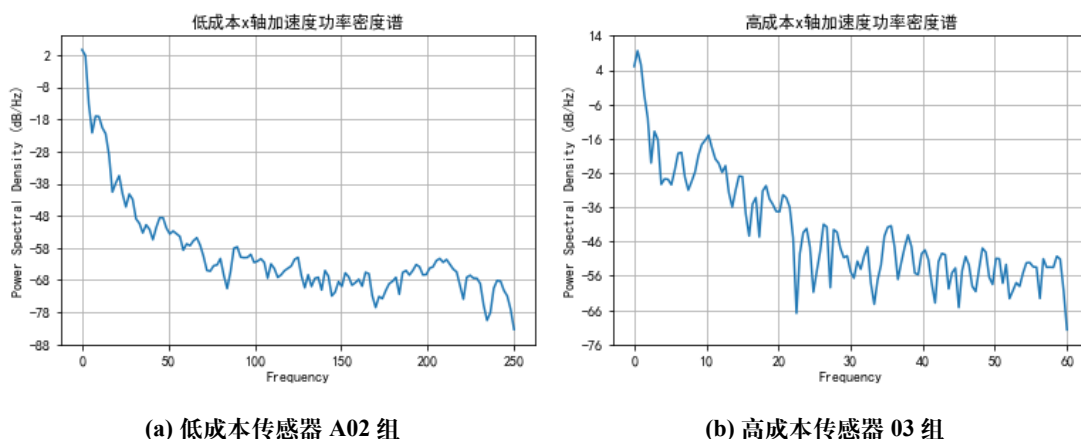


图 8 功率谱密度函数图

为对比信号特征，选取频率方差和标准差为特征参数，对功率谱进行分析。频率标准差是以重心频率为中心的惯性半径，其公式如下：

$$S_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (f_k - S_2)^2 \cdot P(k)}{\sum_{k=1}^N P(k)}}, S_2 = \frac{\sum_{k=1}^N f_k \cdot P(k)}{\sum_{k=1}^N P(k)} \quad (9)$$

若重心附近的频谱幅值较大，则频率标准差较小；若重心附近的频谱较小，则频率标准差较大。频率方差为频率标准差的平方，二者能够描述功率谱能量分布的分散程度，作出其折线图如下图 9 所示。分析此图可得，高成本传感器的频率标准差和方差明显偏低，表明其信号功率谱的能量分布更加均匀，较不易受到环境干扰，采样过程中的噪声水平较低，同时具有较高的分辨率。

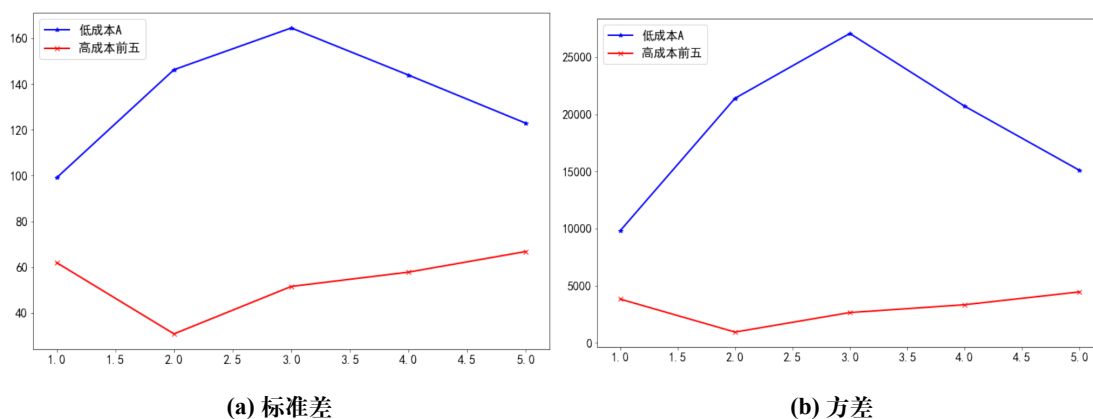


图 9 频率标准差和方差

### 6.3 平稳信号的分析

根据统计数字特征显现的周期性，循环平稳信号类型还可划分为一阶循环平稳、二阶循环平稳和高阶循环平稳信号。本题的循环平稳信号属于一阶循环平稳，是源信号经

过频移后的均值，不需要历经非线性变换即本身就具备有限强度的加性正弦波分量，此类信号可采用传统的谱分析方法来分析。

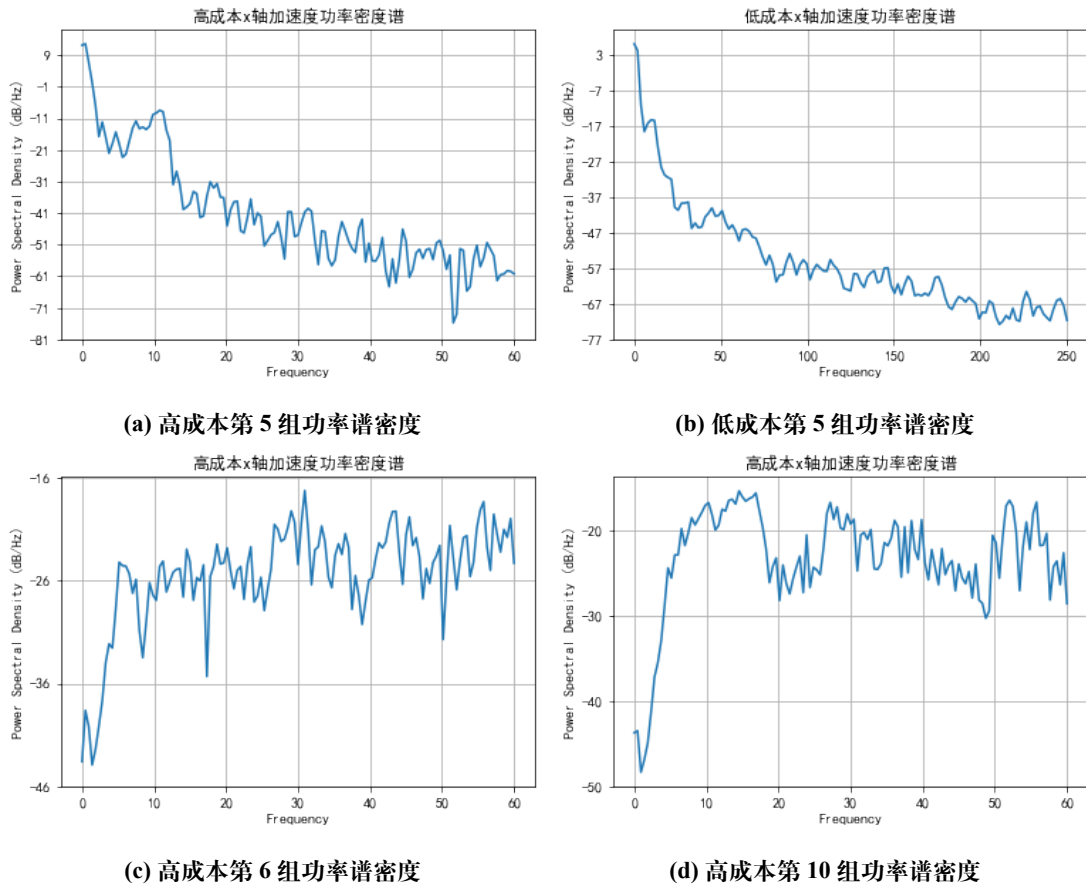


图 10 非平稳与平稳信号功率谱密度对比

从非平稳与平稳信号的功率谱密度对比来看，高成本传感器采集的频域信号在高频处分量更多、更平稳，较之低成本传感器具有更大的敏感度和信息量。

## 七、问题二的模型建立与求解

### 7.1 小波去噪

小波去噪方法是一种建立在小波变换多分辨分析基础上的算法，其基本思想是根据噪声与信号在不同频带上的小波分解系数具有不同强度分布的特点，将各频带上的噪声对应的小波系数去除，保留原始信号的小波分解系数，然后对处理后的系数进行小波重构，得到纯净信号。此方法计算速度较快，噪声能得到较好抑制，且反映原始信号的特征尖峰点能得到很好的保留。其流程如下图所示：

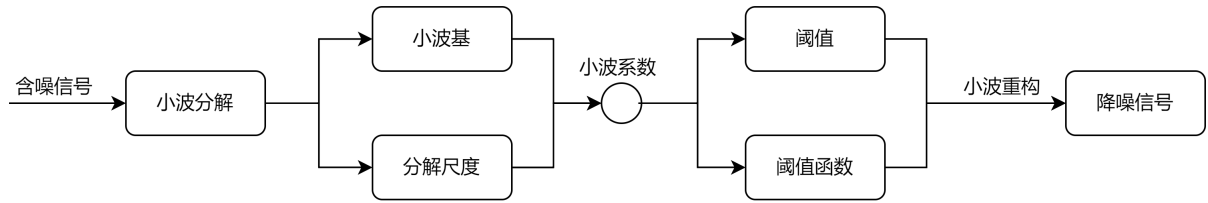


图 11 小波去噪流程图

由图 1 可知，小波阈值去噪中主要有三个步骤：首先，将输入的原始带噪信号进行小波分解，得到各尺度系数  $\omega_{j,k}$ ；然后，对各个系数进行阈值处理，得到新的小波系数  $\hat{\omega}_{j,k}$ ；最后，进行小波重构，得到最终去噪后的信号。在小波分解、重构这两个步骤中，各个信号的分解与重构结果会依据所选的小波基的不同而有不同的效果，这直接会影响到最终所得去噪后信号的质量好坏。对于小波去噪法来说，阈值选取规则、阈值处理方法、小波基选择等对去噪结果都是至关重要的。

### 7.1.1 小波基的选择

首先，对小波基进行选取。查阅文献总结出以下标准：

- (1) 支撑长度：支撑长度越长，耗费的计算时间就会越多，同时产生更多高幅值的小波系数；若支撑长度太短消失矩太低，便不利于信号能量的集中。大部分去噪使用选支撑长度为 5 9 之间的小波。
- (2) 对称性：若小波具有对称性，则其对应的滤波器具有线性相位的特点，在信号处理中可以很有效地避免相位畸变。
- (3) 正则性：小波的正则性越强，则在信号或图像的重构中能够获得较好的平滑效果，减小量化或舍入误差的视觉影响。

基于问题一对不同传感器信号的平稳性检验和时频域特征分析，本文选取常用以分解和重构信号的 Daubechies (dbN) 小波作为小波基，其中 N 是小波的阶数。dbN 小波在时域是有限支撑的，即长度有限，并且在频域在处有 N 阶零点，和其整数位移正交归一，即小波函数可以由长度有限的低通函数——“尺度函数”求出。而随着小波的阶次增大，其消失矩阶数便会越大，频带划分效果越好，但是会使时域紧支撑性减弱，同时实时性变差。因此，在进一步选择阶次时，为同时兼顾算法本身的效果和算法的效率，本文选择 db4 小波作为小波基进行小波去噪。

### 7.1.2 阈值的选择

阈值指设定一个数值，当小波系数的绝对值小于这个阈值的时候，强制赋值为 0。在小波阈值去噪中，阈值的选择体现了对超过和低于阈值的小波系数的不同处理策略，是去噪中较为关键的一步，常用选择方法如下表 2 所示：

表 2 阈值选择方法

方法	描述
<i>rigsure</i>	基于 stein 的无偏似然估计原理的自适应阈值选择
<i>sqtwolog</i>	固定的阈值形式
<i>minimaxi</i>	用极大、极小原理选择的阈值
<i>VisuShrink</i>	普适性通用阈值方法

本文使用在高斯模型下，针对多维独立正态变量联合分布得出的 VisuShrink 通用阈值方法进行阈值选择。其计算公式如下：

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (10)$$

其中， $\sigma$  为噪声的标准差， $N$  为信号长度。

### 7.1.3 阈值函数的选择

传统的阈值函数有两种，分别是硬阈值和软阈值函数。硬阈值指被检测数据所不能逾越的阈值，模小于  $3\sigma$  的小波系数全部切除，将大于  $3\sigma$  的全部保留，其计算公式如下：

$$\eta_H(w, \lambda) = \begin{cases} w & , |w| > \lambda \\ 0 & , |w| < \lambda \end{cases} \quad (11)$$

但这样的不做任何处理的数据删除操作势必会在小波域产生突变，导致去噪后结果产生局部的抖动，类似于傅立叶变换中频域的阶跃会在时域产生拖尾现象。而软阈值将模小于  $3\sigma$  的小波系数全部置零，而将模大于  $3\sigma$  的进行特殊处理：大于  $3\sigma$  的小波系数全部减去  $3\sigma$ ，小于  $-3\sigma$  的小波系数全部加  $3\sigma$ 。软阈值实质上是规定被检测数据的变动范围的阈值，经过其作用，小波系数在小波域上将较为平滑。软阈值的计算公式如下：

$$\text{soft}(x, T) = \begin{cases} x + T & x \leq -T \\ 0 & |x| \leq T \\ x - T & x \geq T \end{cases} \quad (12)$$

但使用软阈值函数也存在问题，处理过程中小波分解系数值将会改变，这相当于每个大于阈值的系数都被减掉，这势必会在信号重构的时候引入误差。因此，本文针对这两种传统阈值函数进行了改进，即在消除阈值函数的不连续性的同时，使函数迅速靠近硬阈值函数，其中  $\lambda$  为阈值，具体函数表达式如下：

$$\overline{w_{j,k}} = \begin{cases} \text{sign}(w_{j,k}) \times \left[ |w_{j,k}|^2 - \lambda^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (13)$$

#### 7.1.4 去噪结果

下面，根据前文对相关参数的分析与选择，对传感器信号进行去噪处理。首先，选择小波基和分解层数，然后对带噪传感器信号进行小波变换，获取小波系数。然后，设定阈值，选择阈值函数，利用阈值函数对小波系数进行处理，得到一组新的小波系数。利用获得的新小波系数对信号进行重构，即得到降噪信号。依据以上步骤，作出对高低成本惯性传感器信号进行小波分解和去噪的结果如下图 12 所示。

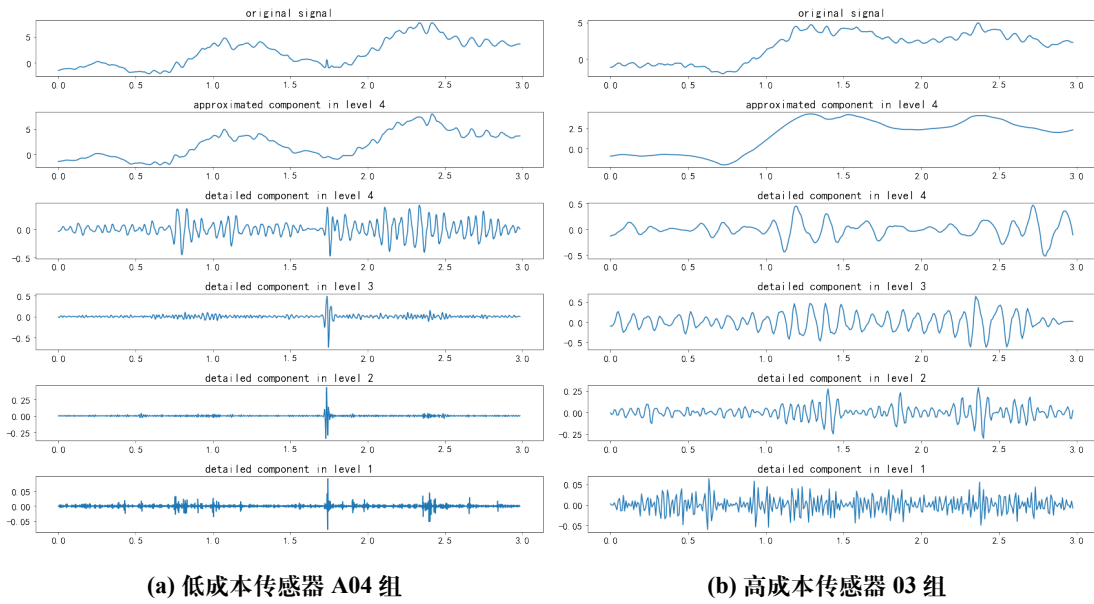


图 12 小波分解与去噪

## 7.2 希尔伯特—黄变换去噪

希尔伯特—黄变换 (HHT) 通过对信号进行一维经验模态分解 (EMD)，将信号分解为各阶本征模态函数 (IMF) 和一个剩余分量 (res)，各阶的 IMF 频率由高到低变化，且每一阶的 IMF 分量有其自身的物理意义。再对 IMF 进行 Hilbert 变换，可得到包含时间—能量—频率三维离散时频谱的分布特征。希尔伯特—黄变换不仅具有多分辨率的特性，而且具有自适应性，该方法的提出很好地解决了非线性、非平稳信号的时频分析问题。

### 7.2.1 EMD 分解过程

首先找到信号的极大值和极小值，通过三次样条拟合对所有的极值点进行插值，从而获得信号的上包络曲线  $X_{\max}(t)$  和下包络曲线  $X_{\min}(t)$ ；然后计算上下包络曲线在每一

点上的平均值, 从而获得平均值曲线  $m_1(t)$ . 设分析信号为  $X(t)$ , 则:

$$m_1(t) = (X_{\max}(t) + X_{\min}(t)) / 2 \quad (14)$$

再用  $X(t)$  减掉  $m_1(t)$  得到  $h_1(t)$  为

$$X(t) - m_1(t) = h_1(t) \quad (15)$$

对于不同的信号,  $h_1(t)$  可能是一个 IMF 分量, 也可能不是, 一般来说, 它并不完全满足 IMF 所需的条件, 此时把  $h_1(t)$  当做一个新的信号, 重复上述步骤, 即得:

$$h_{11}(t) = h_1(t) - m_{11}(t) \quad (16)$$

式中,  $m_{11}(t)$  是  $h_1(t)$  的上、下包络线的均值. 若  $h_{11}(t)$  不是 IMF 分量, 则重复上面的方法  $k$  次, 可以得到第  $k$  次循环的数据  $h_{1k}(k)$  为

$$h_{1k}(t) = h_{1(k-1)}(t) - m_{1(k-1)}(t) \quad (17)$$

$h_{1k}(t)$  满足筛选终止条件的要求, 则  $h_{1k}(t)$  为第一阶 IMF, 记为  $c_1(t)$ , 即

$$c_1(t) = h_{1k}(t) \quad (18)$$

从原信号中减去  $c_1(t)$  得到剩余信号, 即残差  $r_1(t)$  为

$$r_1(t) = X(t) - c_1(t) \quad (19)$$

这里, 第一个被分离出来的固有模态函数, 也是频率最高的分量; 然后, 把  $r_1(t)$  作为一个新的原序列, 按照上面的步骤, 依次提取出第  $n$  个固有模态函数; 最后, 我们得到的  $r_n(t)$  是单调的函数, 不能再被分解了. 通过这样我们得到了原始序列  $X(t)$  为

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) + r_n(t) \quad (20)$$

EMD 分解过程是一个“筛选”的过程, 在此过程中, 不经消除了模态波形叠加的影响, 还更使得波形轮廓对称更好. 从特征时间尺度来看, 首先分离出来的是信号中特征尺度最小的固有模态分量; 然后是特征时间尺度较大的固有模态; 最后分离出来的是特征时间尺度最大的固有模态分量, 因此 EMD 方法相当于一个自适应的高通滤波器对信号的处理。

### 7.2.2 希尔伯特变换和希尔伯特谱

希尔伯特变换 (Hilbert) 变化是信号处理分析中重要的工具. 复信号是频谱的实部与虚部的关系, 通常是希尔伯特变换的关系. 对给定的连续时程曲线  $X(t)$ , 其中 Hilbert 变换定义为

$$Y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (21)$$

引入了解析函数  $Z(t)$  后, 则有:

$$Z(t) = X(t) + iY(t), \quad (22)$$

$Z(t)$  可写为

$$Z(t) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (23)$$

其中  $a(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$

$$\theta(t) = \arctan \left[ \frac{Y(t)}{X(t)} \right] \quad (24)$$

瞬时频率可定义为

$$w(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (25)$$

可见, 瞬时频率  $w(t)$  也是时间的函数.

信号  $X(t)$  通过 EMD 分解得到一系列的 IMF 分量及余项后, 对  $X(t)$  的  $n$  阶 IMF 分量分别进行 Hilbert 变换后, 构造解析函数  $H(t)$  表示为

$$H(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \exp \left[ i \int w_j(t) dt \right] \quad (26)$$

其中,  $a_j(t)$  是第  $j$  阶固有模态函数  $c_j(t)$  的解析信号的幅值, 对照 (26) 式可看出, 这里省略残余函数,  $\text{Re}$  表示取实部, 展开后, 则称为 Hilbert 幅值谱, 记作:

$$H(w, t) = \text{Re} \sum_{j=1}^n a_j(t) e^{i \int w_j(t) dt}. \quad (27)$$

最终, 作出低成本和高成本传感器信号的 IMF 分解图和 Hilbert 谱图如下图 12 和图 13 所示.



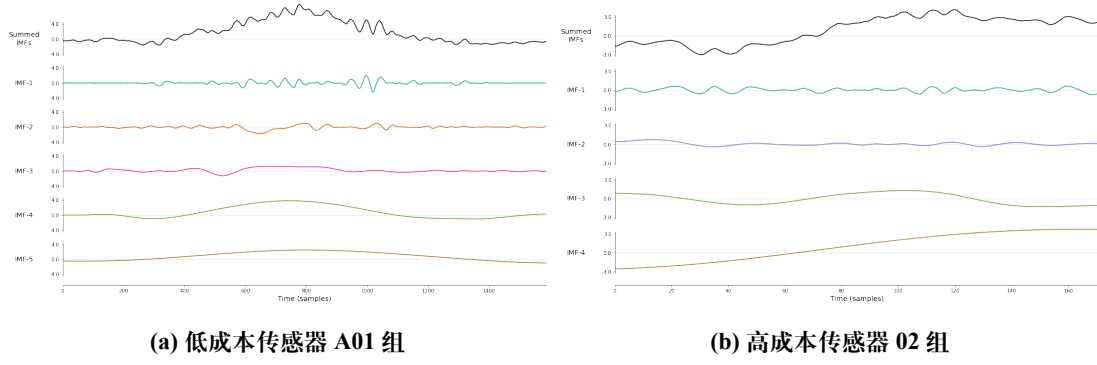


图 13 IFM 分解图

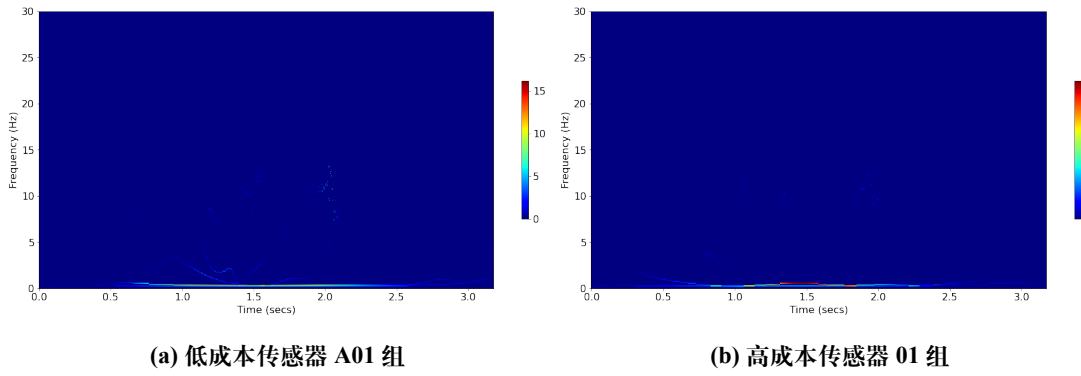


图 14 Hilbert 谱图

## 八、模型检验

### 8.1 去噪效果评价指标

选用不同的方法所得到的去噪效果都有一定的差异，本文建立了一系列评价指标，包括信噪比（SNR）、均方误差（RMSE），用以衡量去噪效果的优劣。计算公式如下：

$$SNR = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^n x^2(i)}{\sum_{i=1}^n [x(i) - y(i)]^2} \quad (28)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x(i) - y(i)]^2}{n}} \quad (29)$$

式中， $x(i)$  为纯净信号； $y(i)$  为去噪信号； $N$  为初始信号采样长度值；对 SNR 而言，其值越大表示去噪后误差越小。RMSE 表示去噪信号相对纯净信号的波动，RMSE 越小，表示处理后的信号相对纯净信号的波动更小，更接近于纯净信号，去噪能力越好。

8.2 去噪效果分析

基于小波去噪和希尔伯特-黄变换去噪模型对传感器信号进行处理，得到的信号信噪比、均方误差结果如下表所示。

表 3 低成本与高成本的 SNR 与 RMSE 值

	SNR	RMSE
低成本 01 组	39.77237	0.26749
高成本 01 组	49.32732	0.00148

从表中可以看出，高成本传感器的信噪比高于低成本传感器，均方误差低于低成本传感器，证明了本模型的优越性。

8.3 灵敏度分析

在第二问中，采用了引用文献中推荐阈值  $\lambda = 0.3$ ，下图将给出选用不同阈值时去噪前与去噪后的对比图，以低成本第六组信号为例：

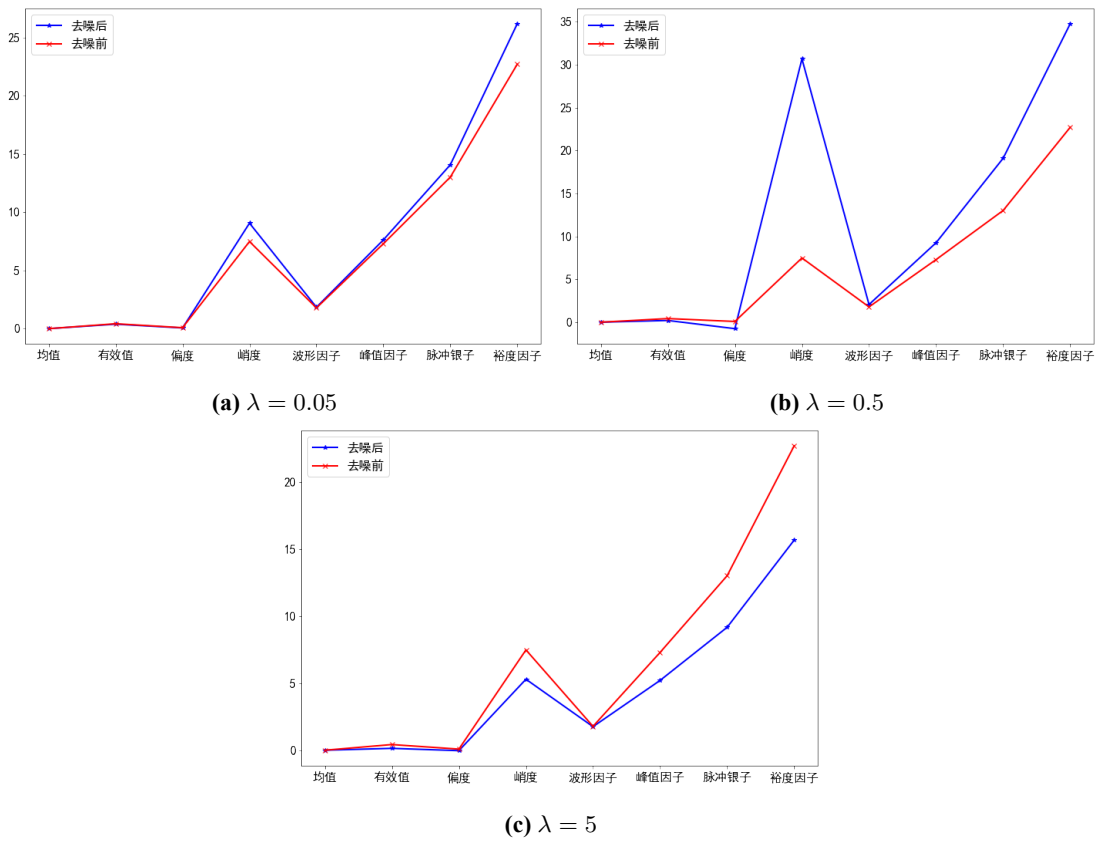


图 15 阈值取值不同时去噪前后的信号对比图

## 九、模型评价与展望

### 9.1 模型评价

1. 本模型考虑到信号的平稳性特征，对平稳随机信号和非平稳随机信号进行分组讨论。
2. 本模型综合时域、频域、时频域对高低成本传感器进行特征提取与分析，兼顾了数字信号在时域和频域的特性。
3. 本模型采用了小波分解和希尔伯特-黄变换进行融合去噪，并对两种方法的结果进行了综合分析。

### 9.2 模型展望

1. 本模型考虑的数字信号不仅适用于 MEMS 惯性传感器，也可以适用于热敏、光敏等传感器，可以广泛用于通信、机械、自动化、金融等领域。
2. 本模型的分解和去噪方法可以继续融合广义 S 变换、分数阶傅立叶变换进行分析和融合去噪，具体地，小波变换可以改进成对高频分量分解更具体的小波包算法，EMD 算法可以改进成 EEMD 算法及一众 EMD 衍生算法。

## 参考文献

- [1] 王玉伟, 高永. 基于时域分析法的无人机飞行质量综合评价方法 [J]. 海军航空工程学院学报, 2018, 33(04): 412-417.
- [2] 赵民, 安军, 落 □ 寿, 于煜斌. 基于时域法的火箭空气舵系统频率特性分析 [J]. 导弹与航天运载技术 (中英文), 2022(06): 16-20.
- [3] 庞玉凤. 基于控制系统的时域分析 [J]. 集成电路应用, 2022, 39(11): 202-203. DOI: 10.19339/j.issn.1674-2583.2022.11.090.
- [4] 张超, 丁心志, 王宾. 基于时域解析法的电容式电压互感器铁磁谐振分析与抑制 [J]. 广东电力, 2022, 35(10): 56-64.
- [5] 袁振钦, 邹科, 孙亚峰, 刘刚, 屈衍, 李居跃. 基于时域分析法的动态电缆疲劳分析 [J]. 海洋工程装备与技术, 2022, 9(02): 50-55.
- [6] 张凯. 基于小波变换的时频分析方法研究及模块实现 [D]. 电子科技大学, 2022. DOI: 10.27005/d.cnki.gdzku.2022.003391.
- [7] 何正友, 符玲, 麦瑞坤, 钱清泉, 张鹏. 小波奇异熵及其在高压输电线路故障选相中的应用 [J]. 中国电机工程学报, 2007, No.228(01): 31-36.
- [8] 彭祯, 谢斌. 基于 tanh 函数的小波阈值去噪算法 [J]. 湖南工程学院学报 (自然科学版), 2022, 32(04): 35-40. DOI: 10.15987/j.cnki.hgjbz.2022.04.011.
- [9] 吴飞, 马晨浩, 程坤. 基于改进阈值的振动信号小波去噪方法研究 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2022, 45(07): 873-877+900.