解答

◎ 解答 解説

1

(1) $\log_8(2-x)+\log_{64}(x+1)=\log_4 x$

⟺ 底を 2に交換しよう step1

底の変換公式

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

step1

$$\frac{\log_2(2-x)}{\log_2 8}+\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 64}=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{3}\log_2(2-x)+\frac{1}{6}\log_2(x+1)=\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow\ 2\log_2(2-x)+\log_2(x+1)=3\log_2 x$$

10点

⇒ 対数の計算則 step2

① $\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab$

② $\log_2 a-\log_2 b=\log_2\frac{a}{b}$

③ $\log_2 a^b=b\log_2 a$

step2

$$\log_2(2-x)^2(x+1)=\log_2 x^3$$

真数を比較することにより、

$$(2-x)^2(x+1)=x^3$$

5点

$$\Leftrightarrow\ x^2=\frac{4}{3}$$

この記述を忘れると大幅減点

ここで、方程式の真数条件より、

$2-x>0$ かつ $x+1>0$

よって xは $-1<x<2$ の範囲であることが必須である。

したがって、 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

上の記述と答えの両方で 10点

(2) $\log_{\frac{1}{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}(2-x)\leqq\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$

→ 対数の計算則より

$$\log_{\frac{1}{3}}\{x(2-x)\}\leqq\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$$

10点

→ ここで、$x(2-x)\leqq(2x-3)$ とすると 0点!!

◎ 底の条件と真数の大小について

$\log_a b\leqq\log_a c$ について、

i) $0<a<1$ の場合

$b\geqq c$ と大小が逆転する

ii) $a>1$ の場合

$b\leqq c$ と大小は保たれる

この場合 $a=\frac{1}{3}$ とみればよいので

$$x(2-x)\geqq 2x-3$$

$\Leftrightarrow\ x^2-3\leqq 0$ ⟺ $-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{3}$ …①

5点

更に、対数の真数条件より、 $x>0$ かつ $(2-x)>0$ かつ $(2x-3)>0$

よって、 $\frac{3}{2}<x<2$ …②

①② より、 $\frac{3}{2}<x\leqq\sqrt{3}$

上の記述ができて答えもあっている場合に 10点

$\boxed{2}$ $6^{24} < 2^n < 5^{28}$

このままでは比較できないので底を2に変換する

つまり、問の狙いは、対数を利用した底の変換ができるかを問う問題である。

$6^{24} = 2^x$ とおいて、両辺に $\log_2$ をとると、

$\log_2 6^{24} = \log_2 2^x \Leftrightarrow 24\log_2 6 = x$

→ 底の変換

$24\left\{\frac{\log_{10}6}{\log_{10}2}\right\} = x$ 10点

ここで、常用対数の近似値を使うと、

計算省略 → $x \fallingdotseq 62.04$

つまり、$6^{24} > 2^{62}$ （又は $6^{24} \fallingdotseq 2^{62.04}$）…① 10点

同様に $5^{28} = 2^y$ とおいて、底を2に変換した値は 10点

$y \fallingdotseq 65.12$ つまり $5^{28} < 2^{66}$ …② 上と同じ配点 10点

①、②より、$2^{62} < 2^n < 2^{66}$ 5点

となり、求める自然数nは $n = 63, 64, 65$ 5点

$\boxed{3}$ $f(x) = 4^x + 4^{-x} - k(2^x + 2^{-x}) + 4$

(1)、$t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$

よって、$f(t) = t^2 - 2 - kt + 4$

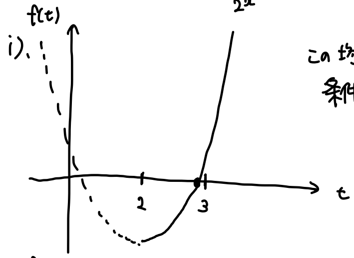
$= t^2 - kt + 2$ 10点

(2)、$f(t) = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + 2$

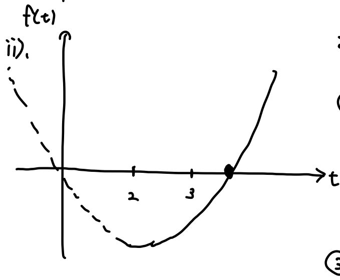
(1)で置換したtの範囲を求めておく

$t = \underset{正}{2^x} + \underset{正}{\frac{1}{2^x}} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$ 5点 相加・相乗平均

等号成立は $2^x = \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

i)、


この場合は、解は3より小さいので条件をみたさない 5点

ii)、


この場合は、片方の解は3を超えるのでOK

① 軸条件 $\frac{k}{2} < 3 \Leftrightarrow k < 6$

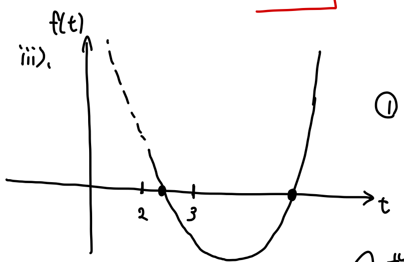
② 頂点のy座標 < 0 $-\frac{k^2}{4} + 2 < 0$

$\Leftrightarrow k^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow k < -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < k$

③ 端点条件 $f(3) < 0 \Leftrightarrow 11 - 3k < 0$

$\Leftrightarrow k > \frac{11}{3}$

①〜③より、$\frac{11}{3} < k < 6$ 5点

iii)、


ii)と同様に片方の解は3を超えるのでOK

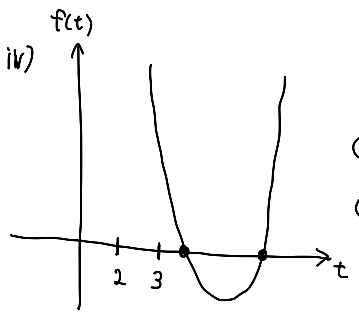
① 軸条件 $\frac{k}{2} \geq 3 \Leftrightarrow k \geq 6$

② 頂点のy座標 < 0

$\Leftrightarrow k < -2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2} < k$

③ 端点条件 $f(3) < 0 \Leftrightarrow k > \frac{11}{3}$

①〜③より、$k \geq 6$ 5点

iv)


この場合、両方の解が3より大きいのでOK

① 軸条件 $\frac{k}{2} > 3 \Leftrightarrow k > 6$

② 頂点のy座標 < 0 $k < -2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2} < k$

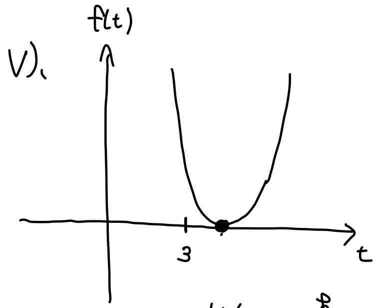
③ 端点条件 $f(3) > 0$ $11 - 3k > 0$

$\Leftrightarrow \frac{11}{3} > k$

①〜③を同時にみたすkは存在しない

よって 不適 5点

v)、



この場合は、$f(t)=0$ は重解をもち、その解は3より大きいのでOK

① 軸条件 $\frac{k}{2}>3 \iff k>6$

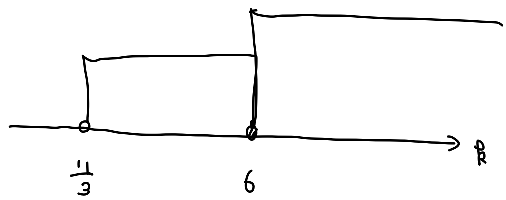
② 頂点のy座標は $-\frac{k^2}{4}+2=0 \iff k=\pm 2\sqrt{2}$

③ 端点条件 $f(3)>0 \iff 11-3k>0$

$\iff \frac{11}{3}>k$

同様に ①~③を同時にみたす k は存在しない　5点

i)~v)より、



$\frac{11}{3}<k<6$ または $6\leq k$ (境界線の値が等しければつなげてよい)

つまり、$\frac{11}{3}<k$　10点

◎ 2次方程式の解の存在条件についての説明は後々つくる予定