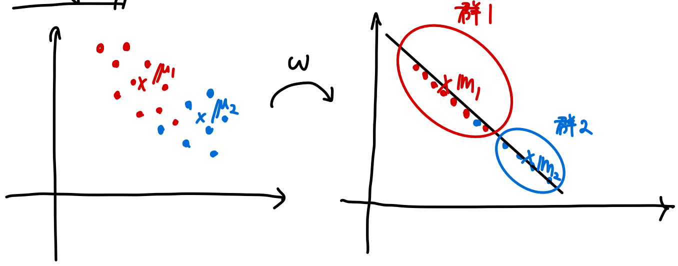
@ 線形判別分析 (LDA)

point

$\forall \omega$ で 線型変形 した像 $\omega^T x$ の 点群を最大限 分離する

image



☆ カテゴリーが2つの場合

o カテゴリー毎に平均ベクトルを計算する

$$\mu_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i \in C_1}^{N_1} x_i \qquad \mu_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i \in C_2}^{N_2} x_i$$

o μ_1 μ_2 を ω で射影したものを m_1, m_2 とおく

$m_1 = \omega^T \mu_1$ $\quad m_2 = \omega^T \mu_2$ $\quad$ ※群の重心とみることもできる

⟶ $m_1 - m_2 = \omega^T(\mu_1 - \mu_2)$ を最大化すればよい

⟶ ω^T を最大化することと同値

o 制約を設ける

☆ $\|\omega\|^2 = 1$

☆ 射影後の分散 s_1^2 s_2^2 を小さくして、分離するために

$\min(s_1^2 + s_2^2)$ としておく

$$E[(\omega^T x_i - \omega^T \mu_1)(\omega^T x_i - \omega^T \mu_1)^T]$$

$$s_1^2 = \frac{1}{N_1}\sum_{i \in C_1}^{N_1}(\omega^T x_i - \omega^T \mu_1)^2 = \omega^T \underbrace{S_1}_{\text{クラス1の共分散行列}} \omega$$

$$s_2^2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i \in C_2}^{N_2}(\omega^T x_i - \omega^T \mu_2)^2 = \omega^T \underbrace{S_2}_{\text{クラス2の共分散行列}} \omega$$

o 最適化関数

フィッシャー基準 $J(\omega)$

$$= \frac{(m_1 - m_2)^2}{s_1^2 + s_2^2}$$ を最大化する

$$(m_1 - m_2)^2 = (\omega^T(\mu_1 - \mu_2))^2$$
$$= (\omega^T(\mu_1 - \mu_2))(\omega^T(\mu_1 - \mu_2))^T$$
$$= \omega^T \underbrace{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T}_{\text{共分散行列}} \omega$$
$$= \omega^T S_B \omega^T$$

$$J(\omega) = \frac{\omega^T S_B \omega}{\omega^T S_W \omega}$$ を最大化する

$$\frac{\partial J}{\partial \omega} = \frac{2 S_B \omega \cdot \omega^T S_W \omega - \omega^T S_B \omega \cdot 2 S_W \omega}{(\omega^T S_W \omega)^2}$$
$$= \frac{2}{\omega^T S_W \omega}\left(S_B \omega - \underbrace{\frac{\omega^T S_B \omega}{\omega^T S_W \omega}}_{=\lambda \text{ とおく}} S_W \omega\right) = 0$$
$$= \frac{2}{\omega^T S_W \omega}(S_B \omega - \lambda S_W \omega) = 0$$

⟶ $S_B \omega - \lambda S_W \omega = 0$ $\quad$ 固有値問題

⟶ $S_W^{-1} S_B \omega = \lambda \omega$

λ は $\det(S_W^{-1} S_B - \lambda I) = 0$ を解くことで求まる

また、ω は λ に対する固有ベクトルである