M/M/1 モデルの定常分布の導出

M/M/1 モデルとは、次の仮定の下に成り立つ待ち行列モデルである：

- 到着プロセスはポアソン分布（平均到着率 λ）
- サービス時間は指数分布（平均サービス率 μ）
- サーバー数は 1 台
- 待ち行列の長さに制限はなく、無限に並べる
- サービス方式は FCFS（先着順）

1. 定常状態のバランス方程式

このモデルはバース・デス過程であり、定常状態において各状態 n に対して「流入率 = 流出率」が成り立つ。

- 状態 $n = 0$ の場合：

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \tag{1}$$

- 状態 $n \geq 1$ の場合：

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n \tag{2}$$

これを整理すると：

$$\lambda P_{n-1} = \mu P_n \tag{3}$$

2. 状態確率の導出

式 (3) より再帰的に求めると、

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0 \\ P_2 &= \rho P_1 = \rho^2 P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= \rho^n P_0 \end{aligned}$$

ただし、$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ をサーバーの利用率とする。

3. 正規化条件より P_0 を求める

定常状態における全状態の確率の和は 1：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= P_0 \cdot \frac{1}{1-\rho} = 1 \quad (\rho < 1) \\ \Rightarrow P_0 &= 1-\rho\end{aligned}$$

4. 定常分布の結論

$$P_n = (1-\rho)\rho^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

これは幾何分布であり、$\rho < 1$ のときに定常状態が存在する。