

直方体の格子展開図の重なり

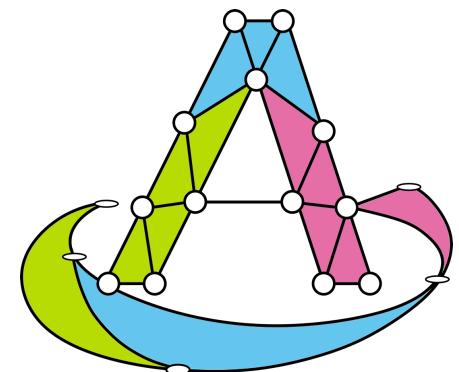
第193回 AL研究発表会

◎ 塩田 拓海 (九州工業大学)

鎌田 斗南 (北陸先端科学技術大学院大学)

上原 隆平 (北陸先端科学技術大学院大学)

2023年 5月 10日 (土) 15:45～16:10

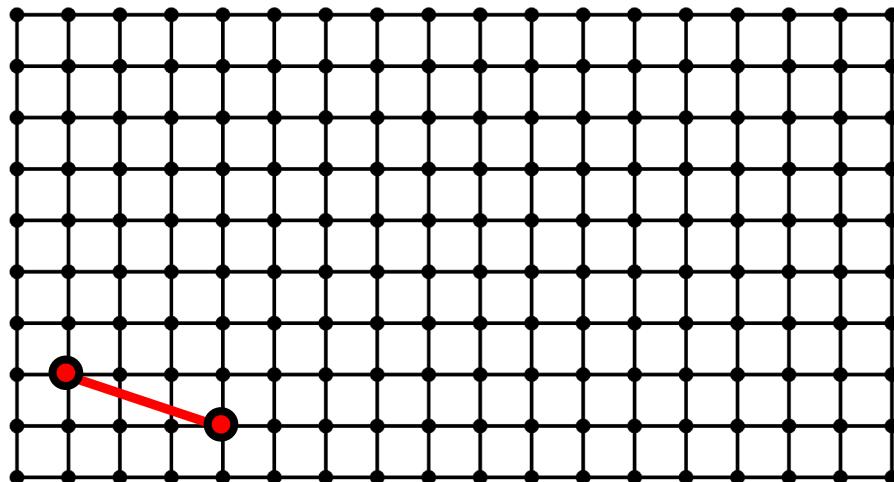


直方体の格子展開図



定義 1

正方格子上に2点を選び、2点を1辺とする正方形をつくる。この正方形を1面にして組み立てた立方体を**格子立方体**という。



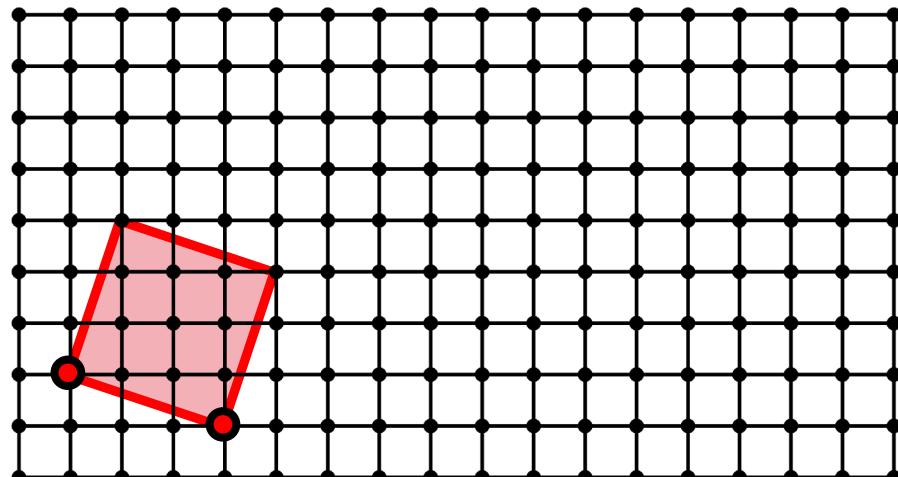
正方格子

直方体の格子展開図



定義 1

正方格子上に2点を選び、2点を1辺とする正方形をつくる。
この正方形を1面にして組み立てた立方体を**格子立方体**という。



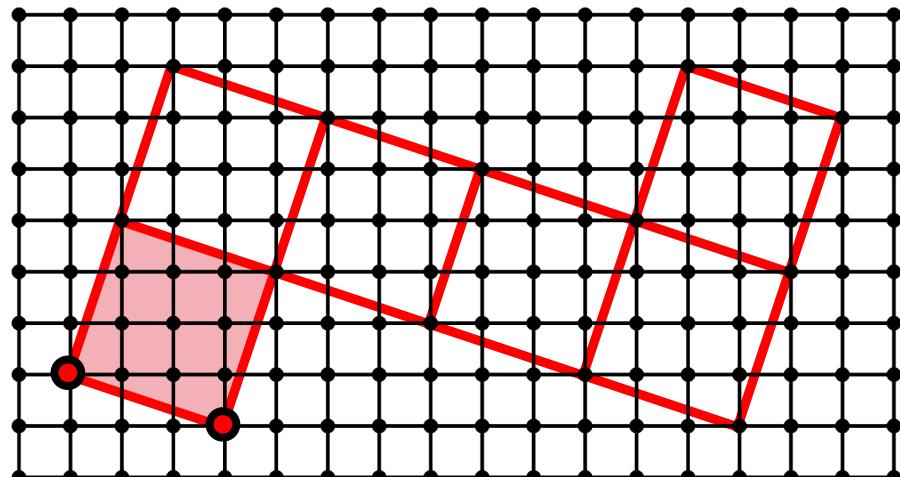
正方格子

直方体の格子展開図



定義 1

正方格子上に2点を選び、2点を1辺とする正方形をつくる。この正方形を1面にして組み立てた立方体を**格子立方体**という。



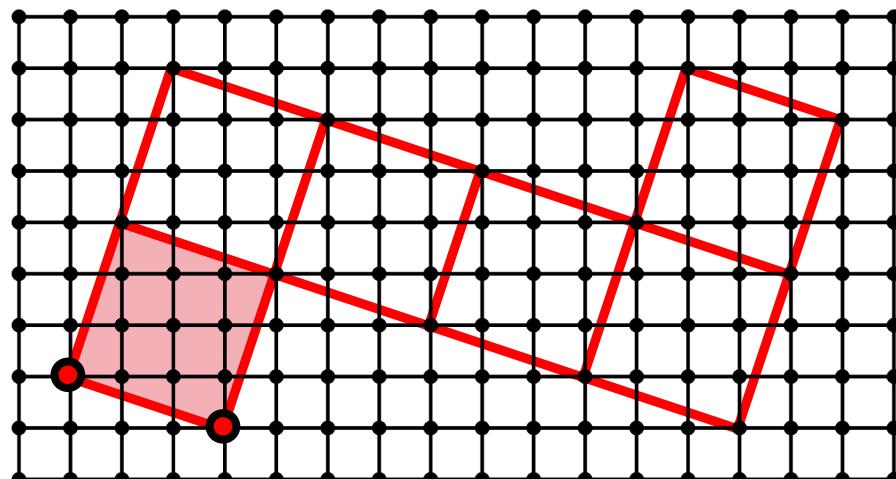
正方格子

直方体の格子展開図

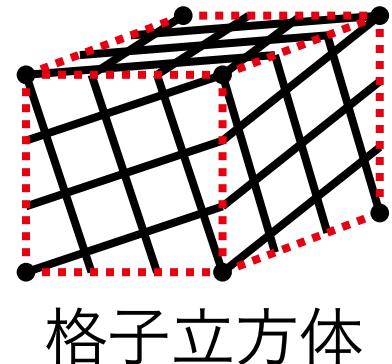


定義 1

正方格子上に2点を選び、2点を1辺とする正方形をつくる。この正方形を1面にして組み立てた立方体を**格子立方体**という。



組み立て
→



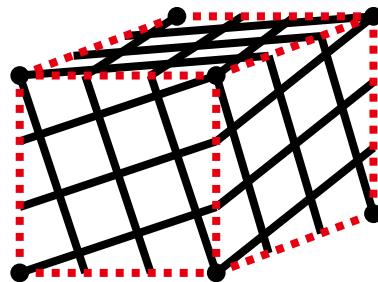
格子立方体

直方体の格子展開図

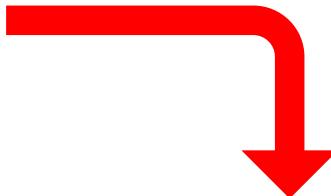


定義 2

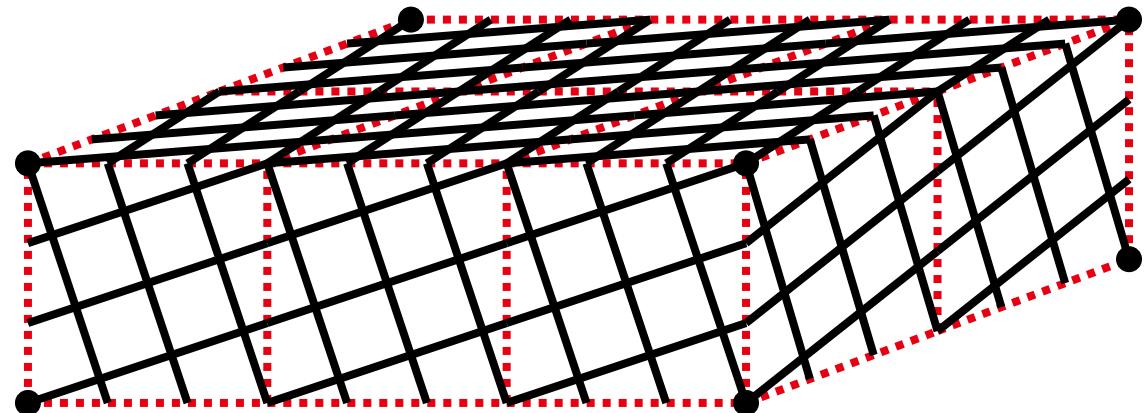
格子立方体を複数個つなぎ合わせることでできる直方体を
格子直方体という。（注：格子立方体 \subset 格子直方体）



格子立方体



複数個つなぎ合わせる



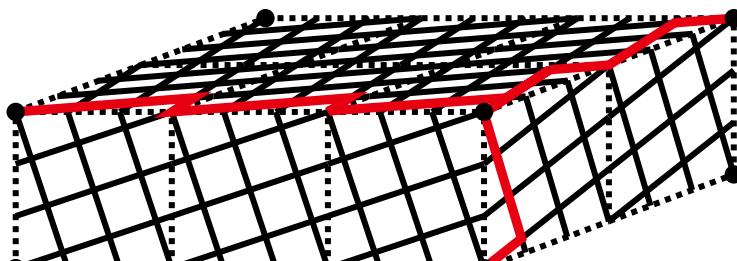
格子直方体

直方体の格子展開図



定義 3

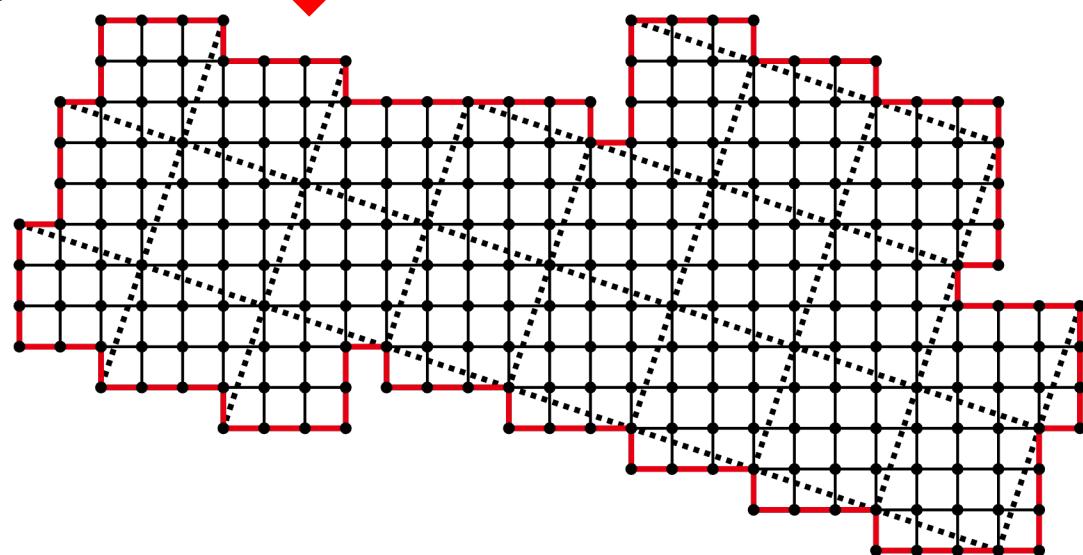
格子直方体の格子に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を
格子展開図という。



格子直方体



格子に切れ込みを
入れて平坦に開く

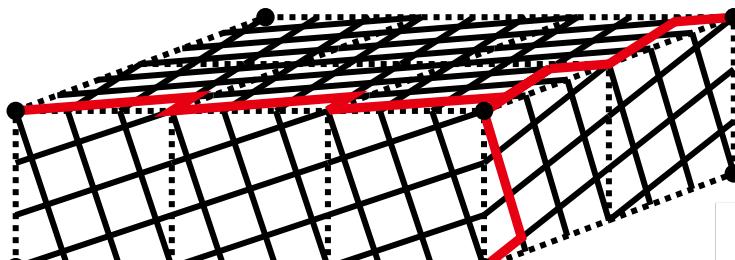


直方体の格子展開図



定義 3

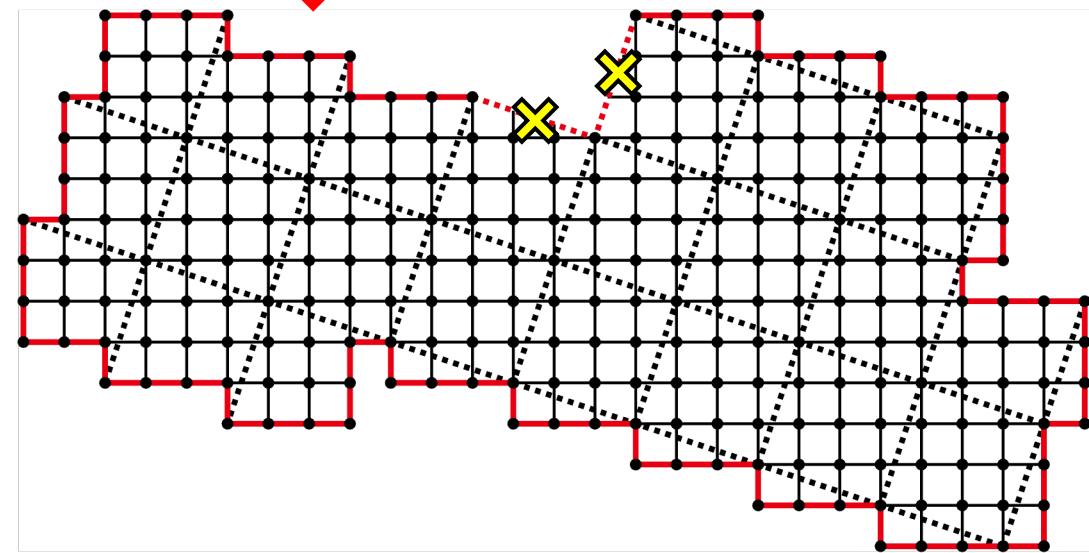
格子直方体の格子に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を
格子展開図という。



格子直方体



格子に切れ込みを
入れて平坦に開く



(注意)

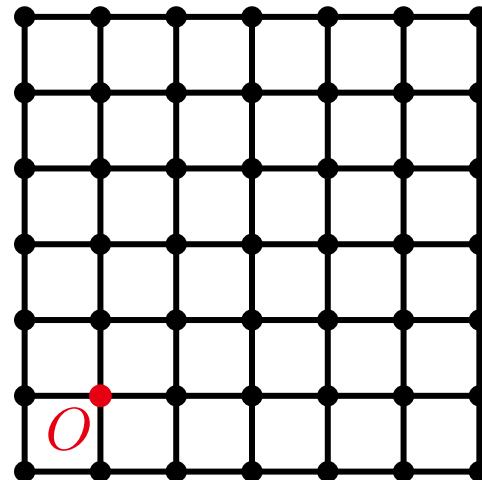
点線 ----- は折り線
(点線は切らない)

格子立方体の1辺の長さ



立方格子の1辺の長さを 1 とする

- ① 正方格子上に原点 $O(0, 0)$ を決める
- ② 点 A を $(a, 0)$ 点 B を $(0, b)$ とする ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^+, a \geq b$)
- ③ 線分 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ を, 格子立方体の1辺の長さ L とする

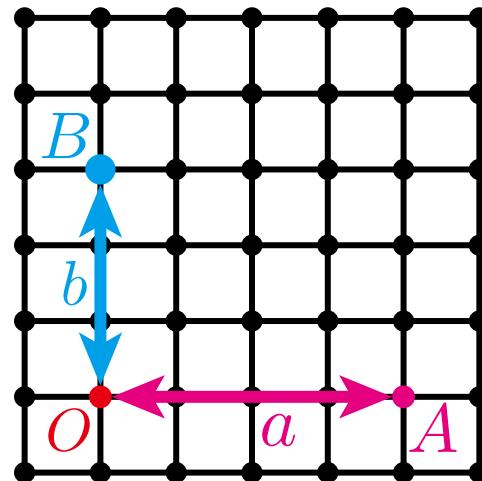


格子立方体の1辺の長さ



立方格子の1辺の長さを 1 とする

- ① 正方格子上に原点 $O(0, 0)$ を決める
- ② 点 A を $(a, 0)$ 点 B を $(0, b)$ とする ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^+, a \geq b$)
- ③ 線分 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ を, 格子立方体の1辺の長さ L とする

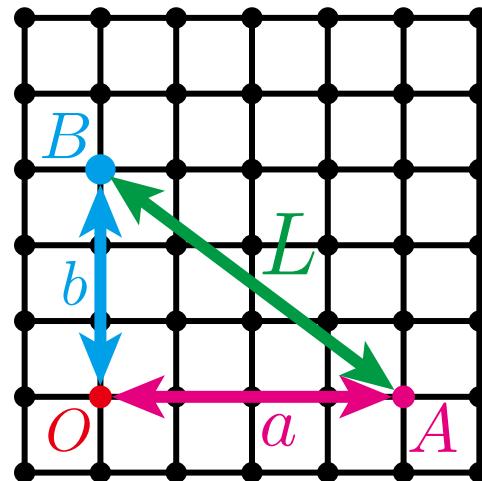


格子立方体の1辺の長さ



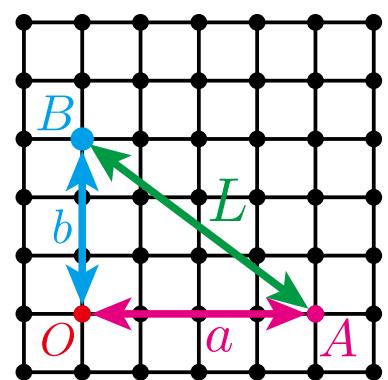
立方格子の1辺の長さを 1 とする

- ① 正方格子上に原点 $O(0, 0)$ を決める
- ② 点 A を $(a, 0)$ 点 B を $(0, b)$ とする ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^+, a \geq b$)
- ③ 線分 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ を, 格子立方体の1辺の長さ L とする



格子立方体の1辺の長さ

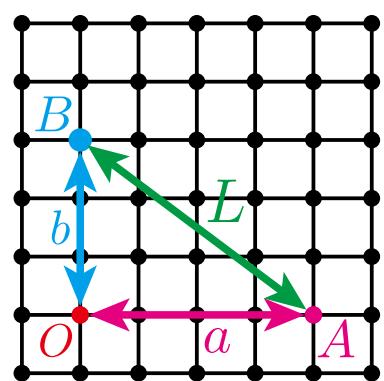
格子立方体の一覧



a の値	1	1	2	2	2	3	...
b の値	0	1	0	1	2	0	...
1辺の長さ L	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	...
正方形 $L \times L$...
立方体 $L \times L \times L$...

格子立方体の1辺の長さ

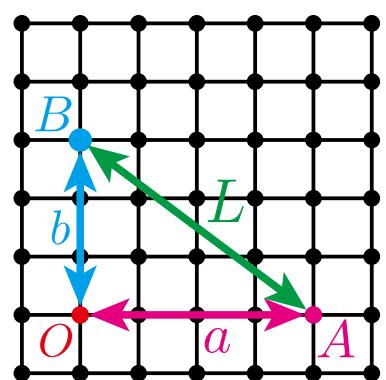
格子立方体の一覧



a の値	1	1	2	2	2	3	...
b の値	0	1	0	1	2	0	...
1辺の長さ L	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	...
正方形 $L \times L$...
立方体 $L \times L \times L$...

格子立方体の1辺の長さ

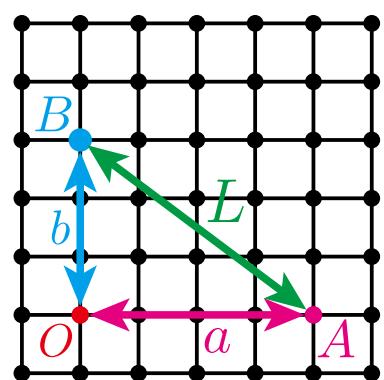
格子立方体の一覧



a の値	1	1	2	2	2	3	...
b の値	0	1	0	1	2	0	...
1辺の長さ L	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	...
正方形 $L \times L$...
立方体 $L \times L \times L$...

格子立方体の1辺の長さ

格子立方体の一覧



a の値	1	1	2	2	2	3	...
b の値	0	1	0	1	2	0	...
1辺の長さ L	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	...
正方形 $L \times L$...
立方体 $L \times L \times L$...

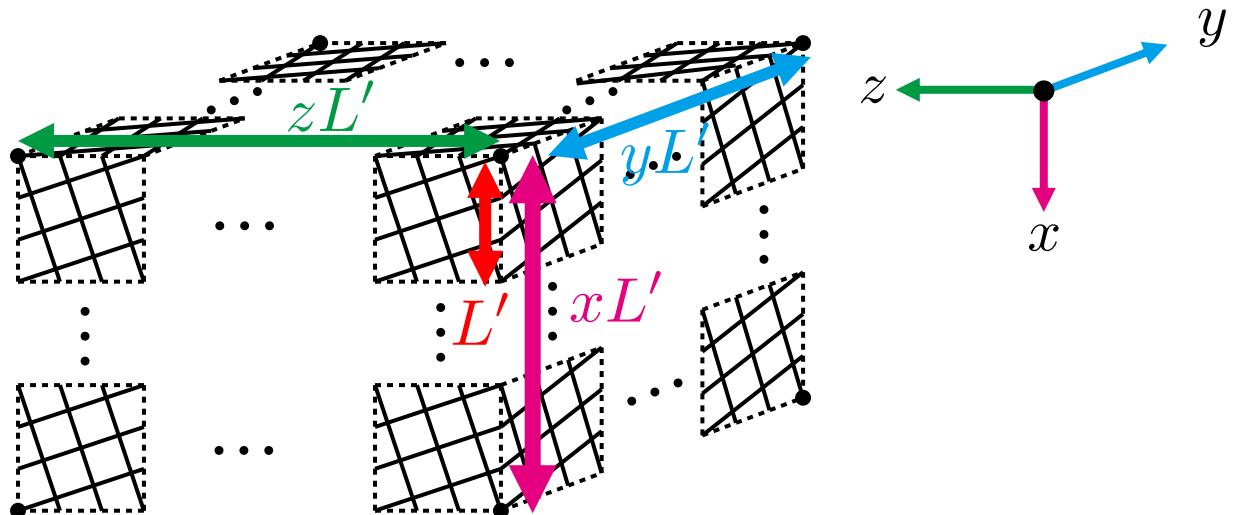
格子直方体の3辺の長さ



格子立方体の1辺の長さを L' とする

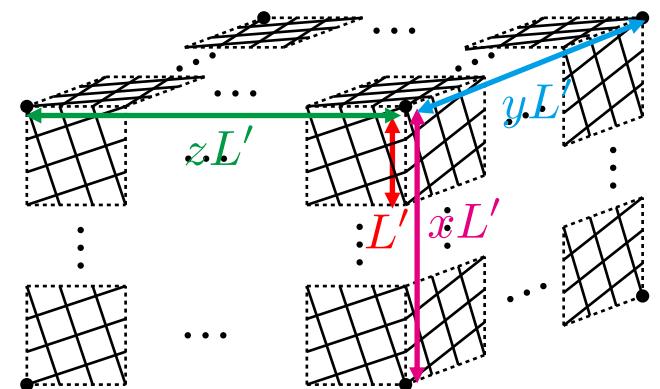
$$L' = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}, a \geq b, \gcd(a, b) = 1)$$

格子直方体を $xL' \times yL' \times zL'$ ($x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y \leq z$) で表記



格子直方体の3辺の長さ

格子直方体の一覧



		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
(a, b)	(1, 0)									...	
	(1, 1)								
	(2, 1)							
	

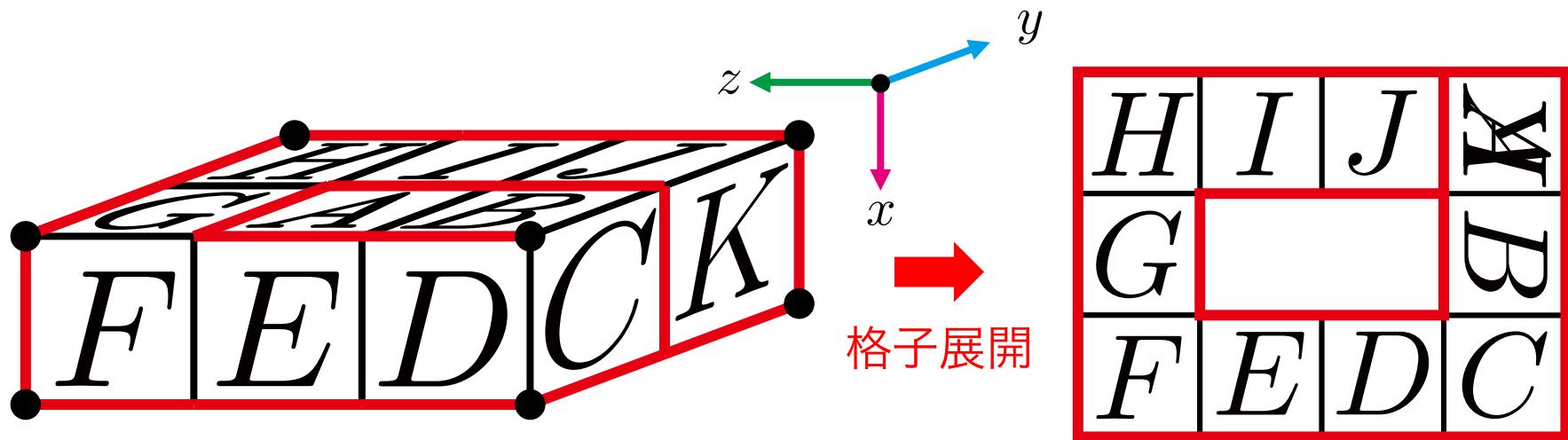
格子展開図の重なり



定理 1 [R. Uehara, 2008]

サイズ $1 \times 2 \times 3$ の格子直方体には、面接触展開図が存在する。
また、辺接触展開図および頂点接触展開図が存在する。

$1 \times 2 \times 3$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



① 面接触展開図

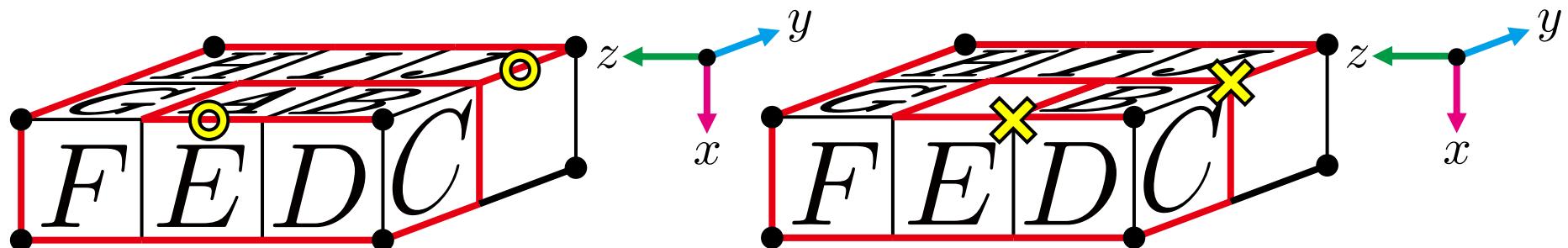
格子展開図の重なり



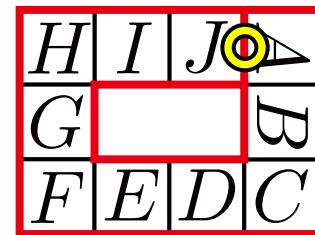
定理 1 [R. Uehara, 2008]

サイズ $1 \times 2 \times 3$ の格子直方体には、面接触展開図が存在する。
また、辺接触展開図および頂点接触展開図が存在する。

$1 \times 2 \times 3$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…

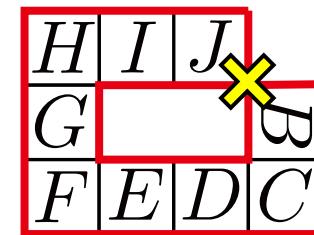


→
格子展開



② 辺接触展開図

→
格子展開



③ 頂点接触展開図

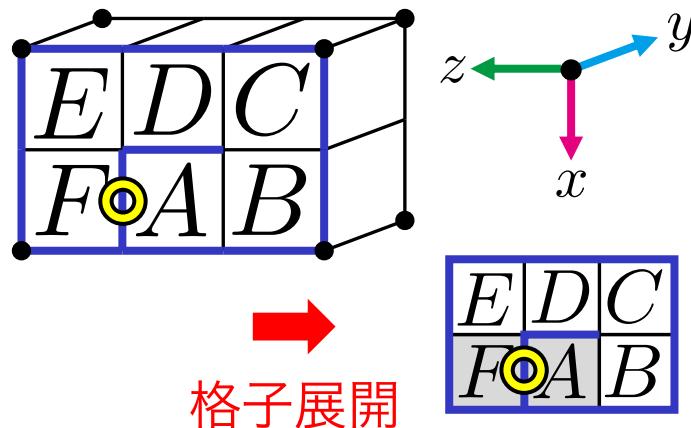
格子展開図の重なり



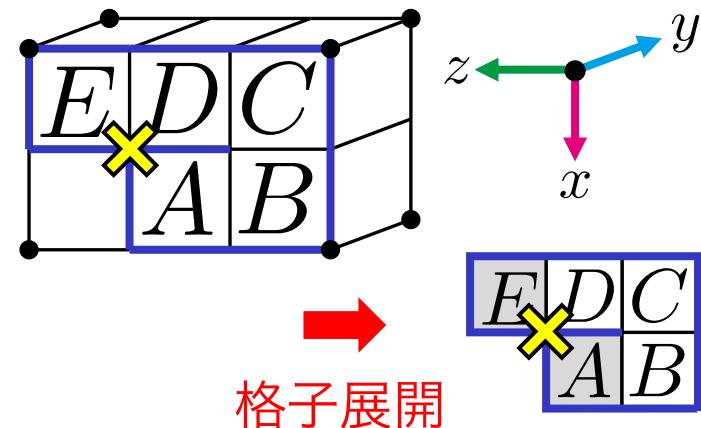
定理 1 [R. Uehara, 2008]

サイズ $1 \times 2 \times 3$ の格子直方体には、面接触展開図が存在する。
また、辺接触展開図および頂点接触展開図が存在する。

【注意】 元の直方体において、辺・頂点が一致しているとき
「辺接触」 「頂点接触」と言わない



辺接触展開図では無い例



頂点接触展開図では無い例

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
(1, 0)										...	
頂	辺	No (Obvi)	Open	Open	Open	Yes For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].					
面	No (†1)	No (†2)									
(1, 1)										...	
頂	辺	Open									
面											
(2, 1)										...	
頂	辺	Open									
面											
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
頂	辺	Open									
面											

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

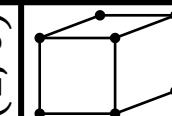
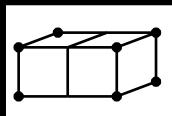
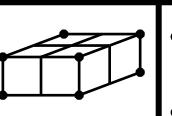
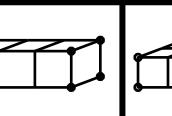
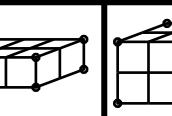
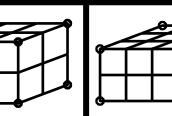
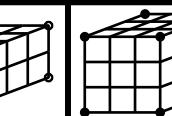
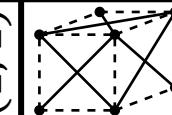
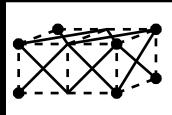
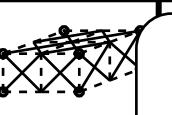
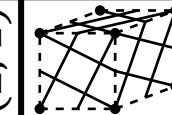
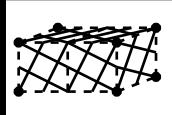
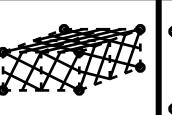
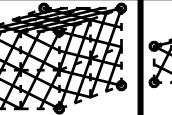
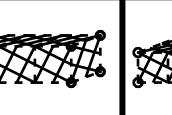
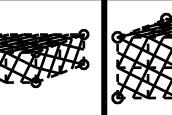
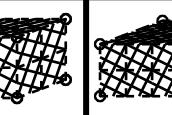
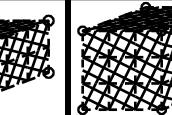
頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].				
		No (\nexists)									...
頂 辺 面		No	Yes								
		(2, 1)									...
頂 辺 面		Yes									
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂 辺 面		Yes									

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂	No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].					
辺	No (†1)	No	No	No	No						
面	No (†2)										
$(a, b) = 1$		(1, 1)				$(a, b) = (1, 0) \rightarrow L' = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$					
頂	No					$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) で表される格子直方体					
辺											
面											
$\gcd(a, b) > 1$		(2, 1)									...
頂						Yes					
辺											
面											
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂						Yes					
辺											
面											

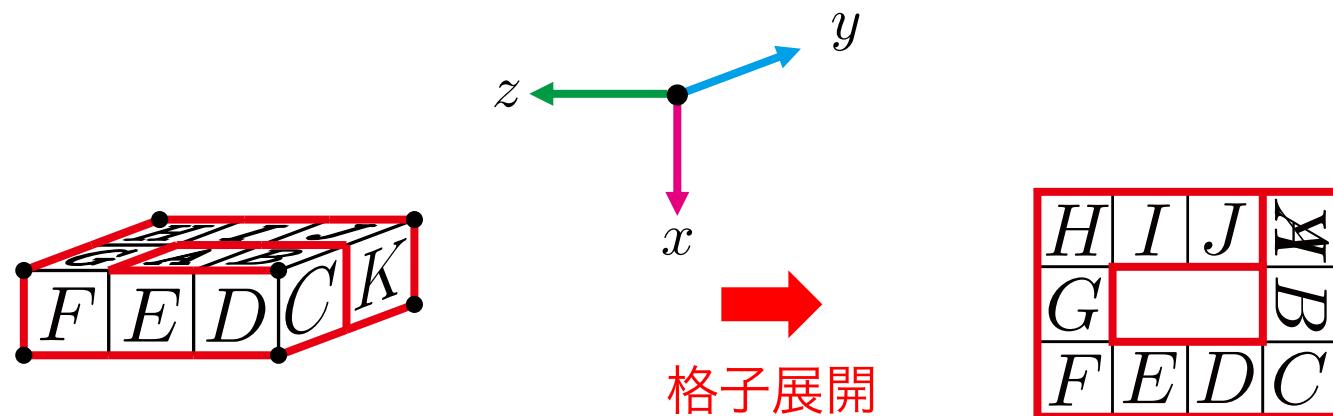
$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の重なり



定理 2 [R. Uehara, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×2×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



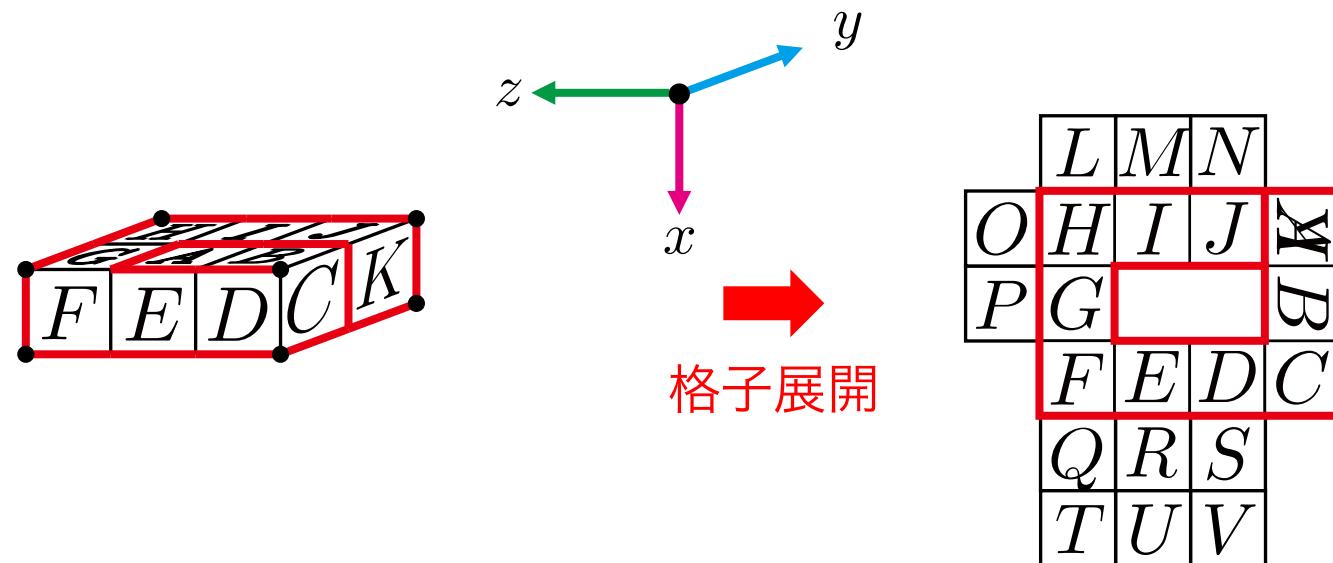
$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の重なり



定理 2 [R. Uehara, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×2×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



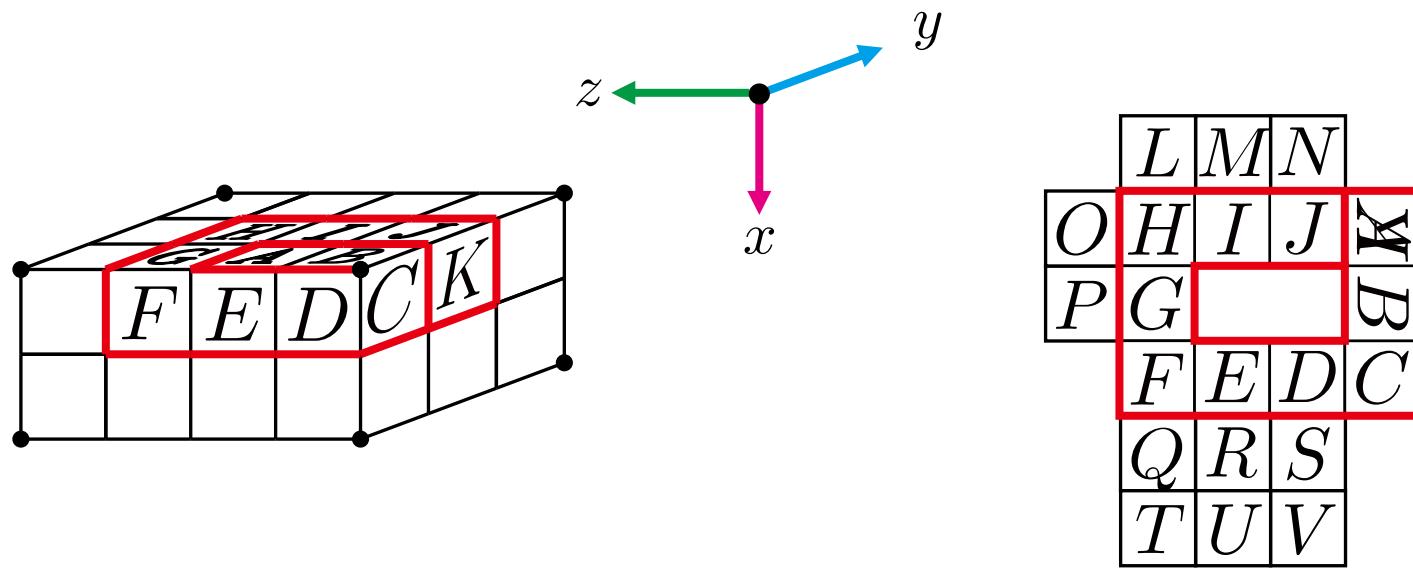
$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の重なり



定理 2 [R. Uehara, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×2×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



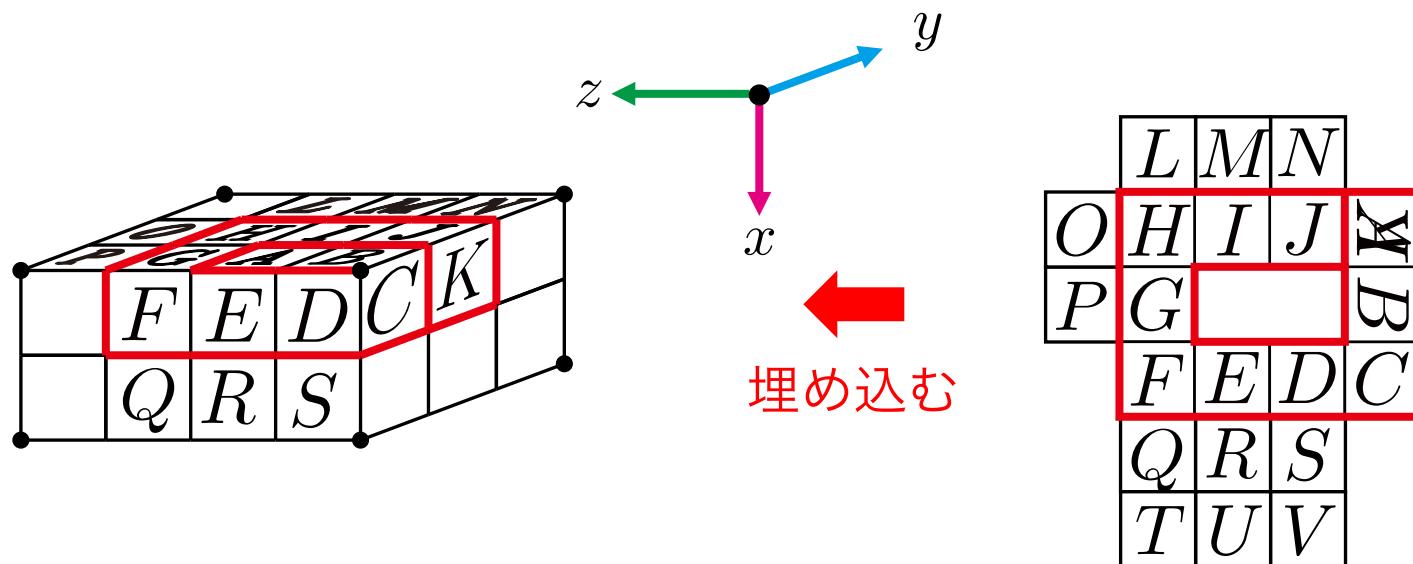
$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の重なり



定理 2 [R. Uehara, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×2×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



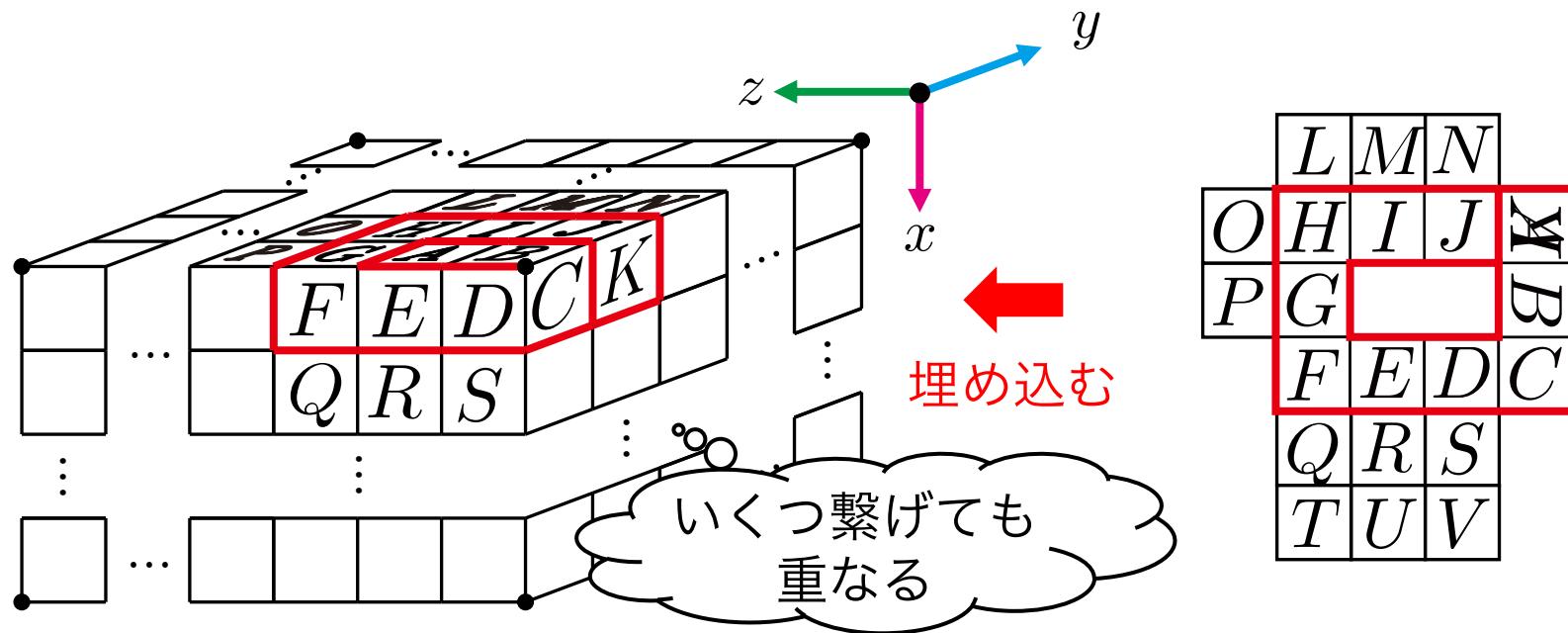
$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の重なり



定理 2 [R. Uehara, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×2×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



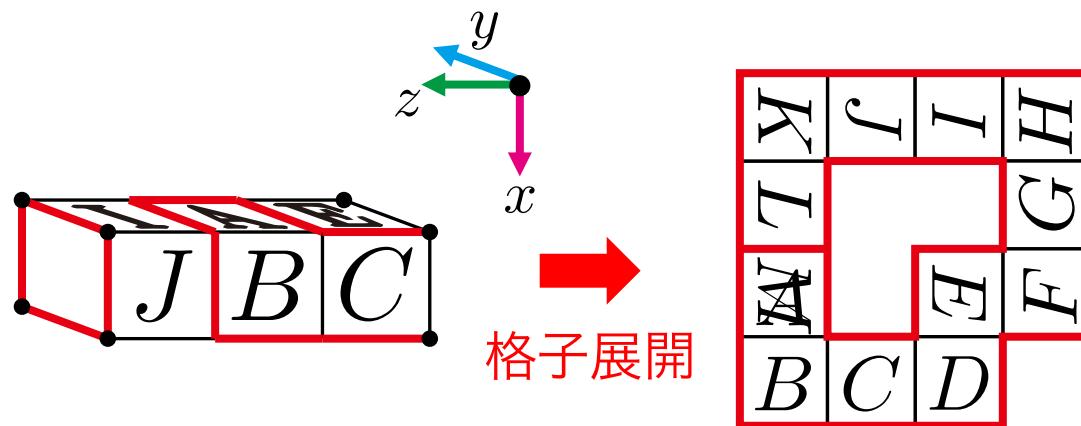
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



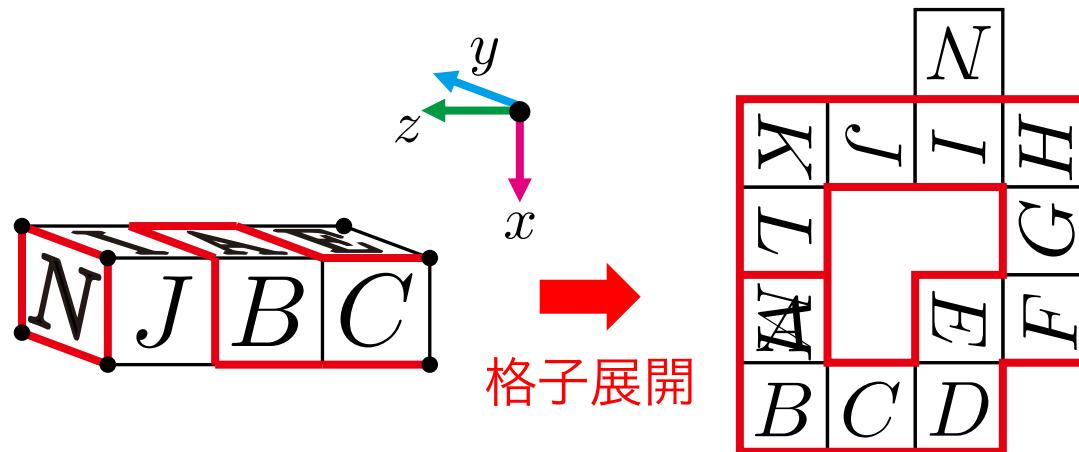
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



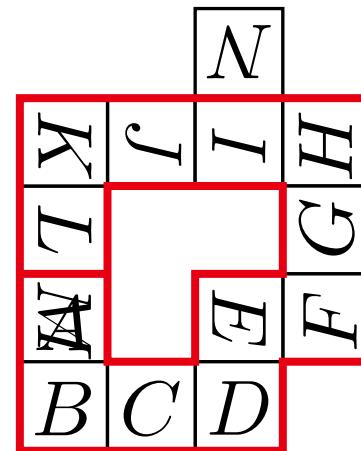
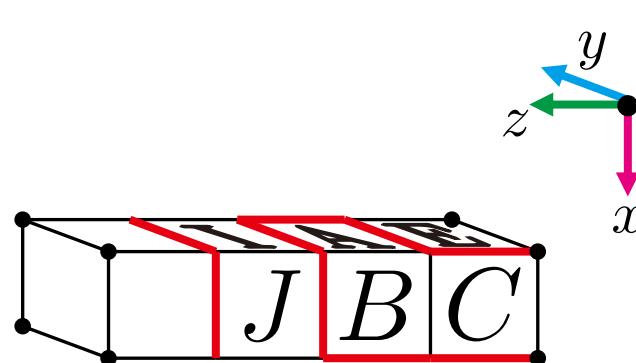
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



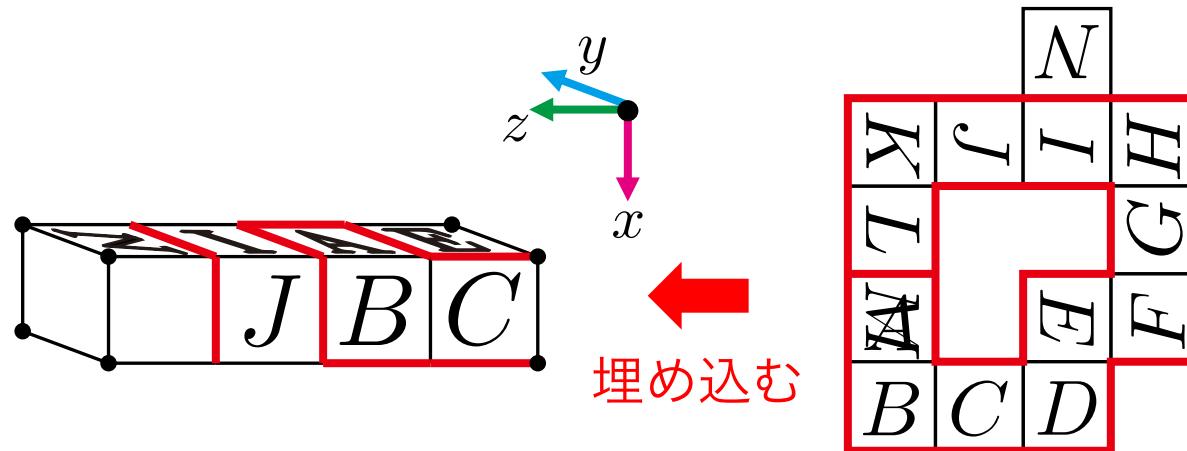
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



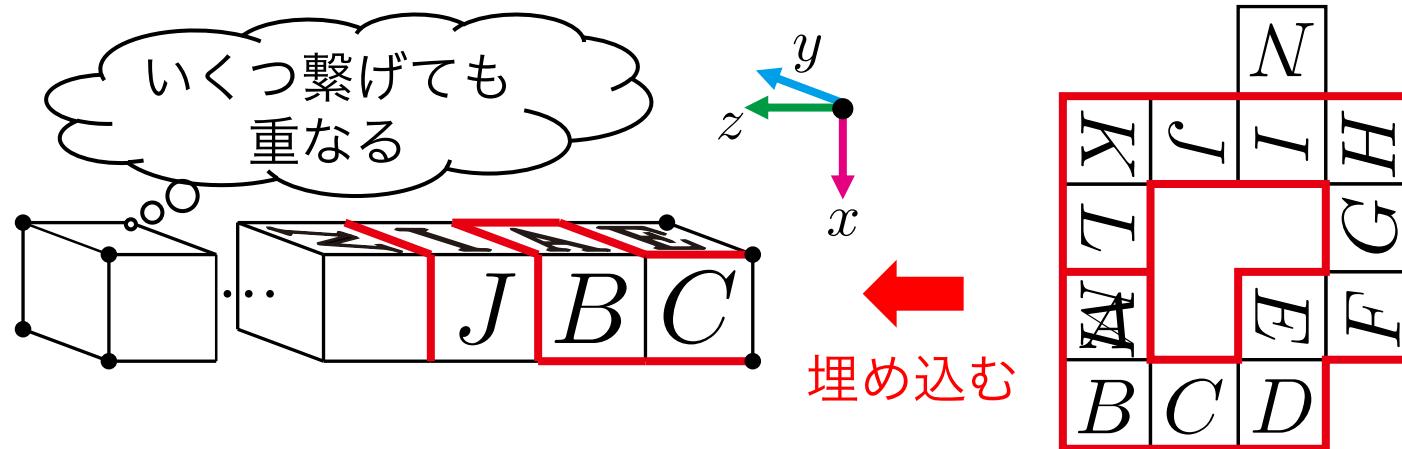
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



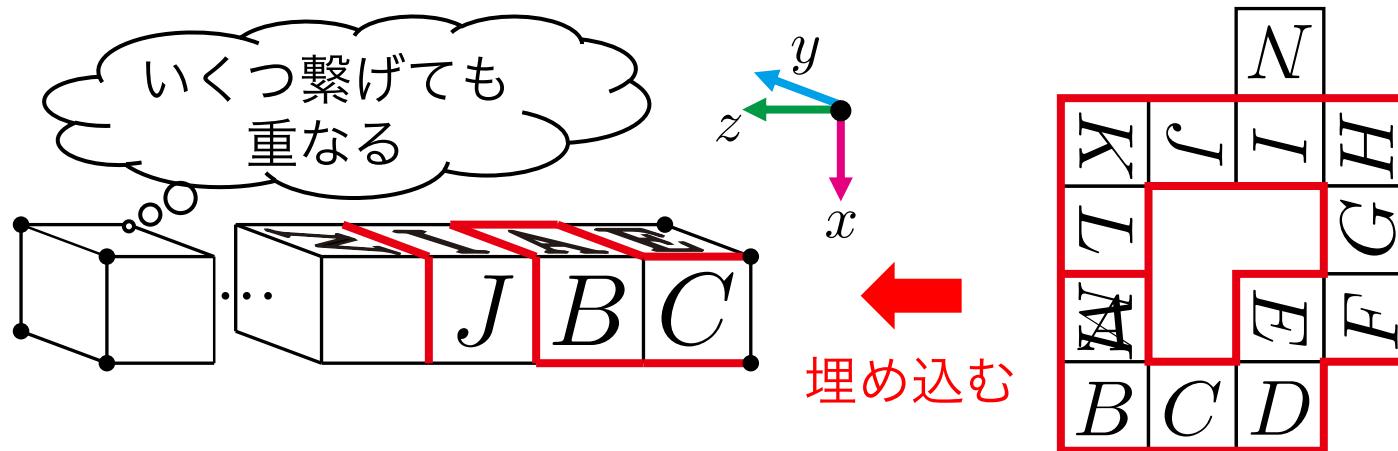
$x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の重なり



定理 3 [T. Uno, 2008]

サイズ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

1×1×3 の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…

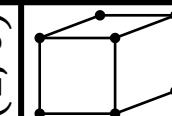
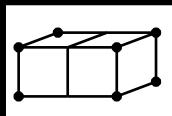
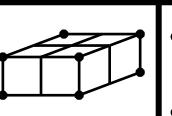
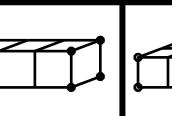
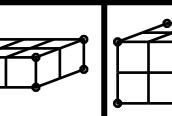
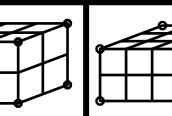
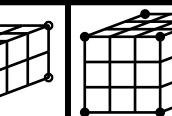
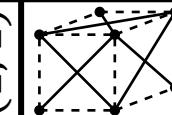
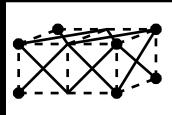
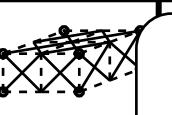
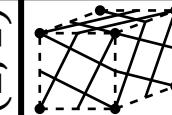
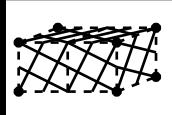
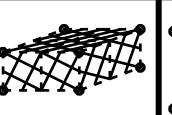
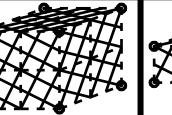
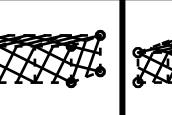
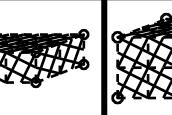
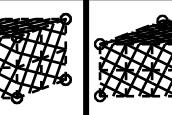
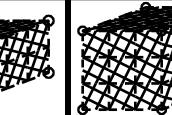


小さいユニットで重なりを持つことが言えると
拡張しても重なることが言える。

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

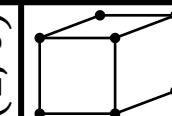
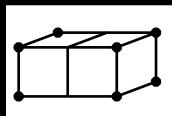
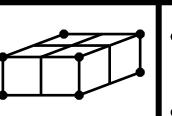
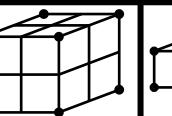
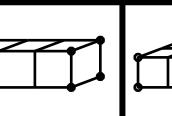
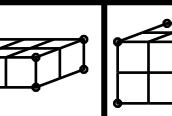
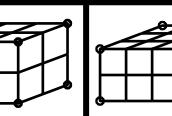
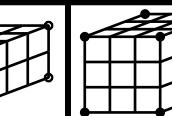
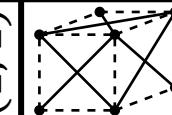
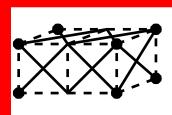
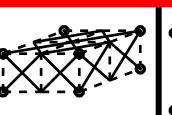
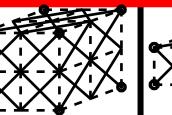
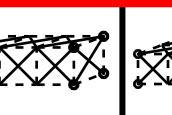
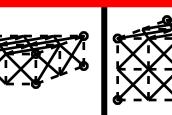
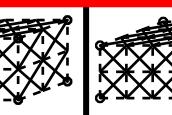
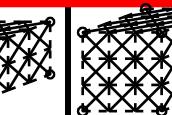
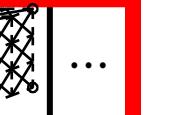
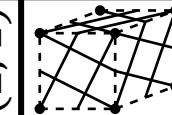
頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面	(1, 0)	No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].
頂 辺 面	(1, 1)				$(a, b) = (1, 0) \rightarrow L' = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) で表される格子直方体						
頂 辺 面	(2, 1)									...	
頂 辺 面		Yes									
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂 辺 面		Yes									

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)										
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...	
		(1, 0)									...	
頂 辺 面	(1, 0)	No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].	
頂 辺 面	(1, 1)										...	
頂 辺 面	(1, 1)	No	Yes									
※ (a, b)	(2, 1)		$(a, b) = (1, 1) \rightarrow L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) で表せる格子直方体									
頂 辺 面	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
頂 辺 面	⋮	Yes										

$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

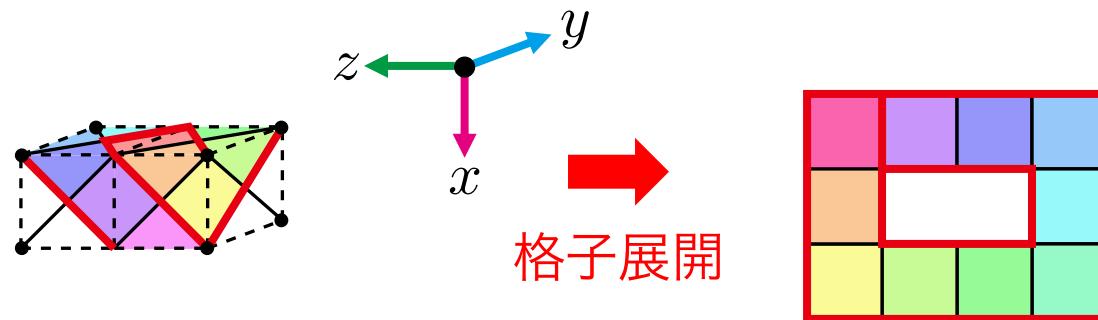


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

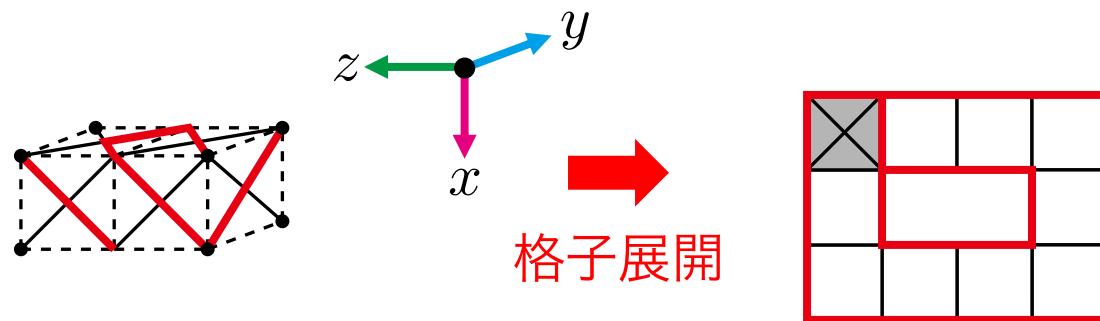


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

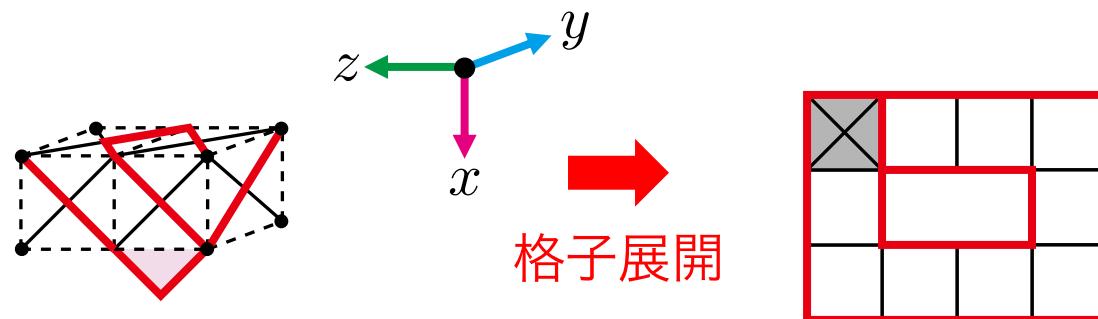


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

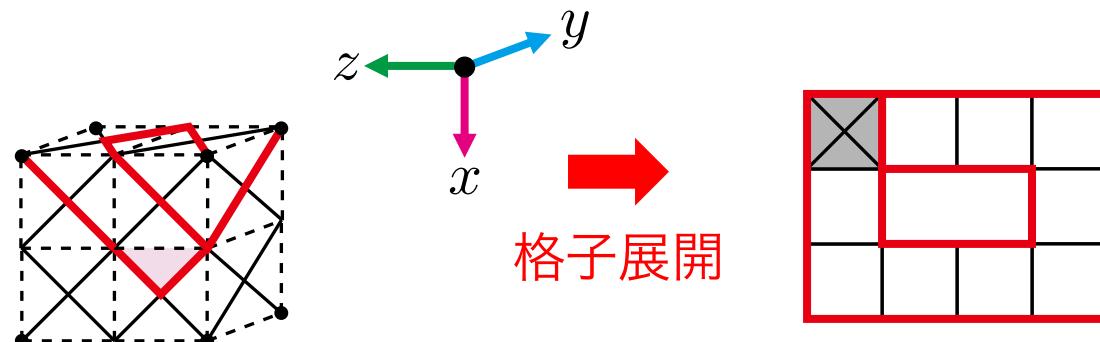


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

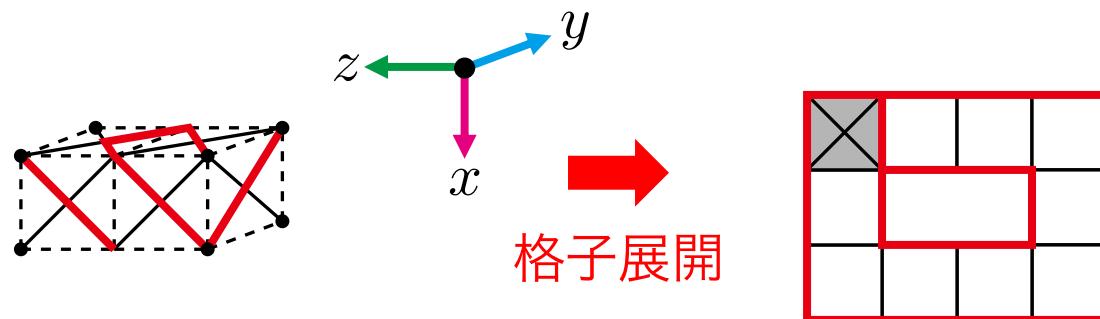


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

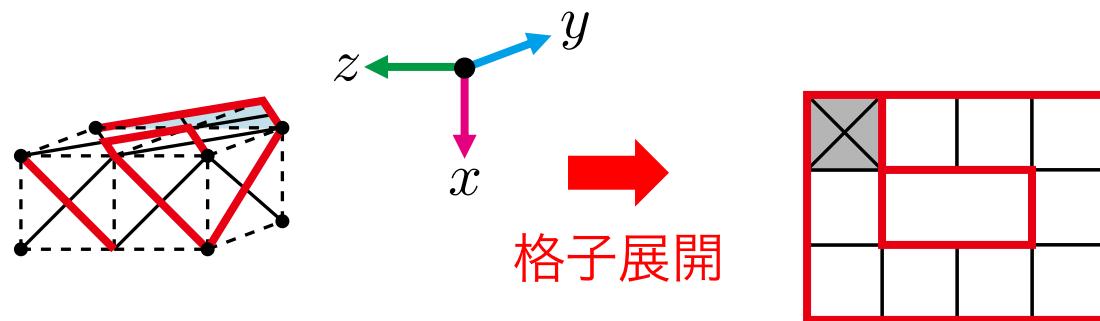


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

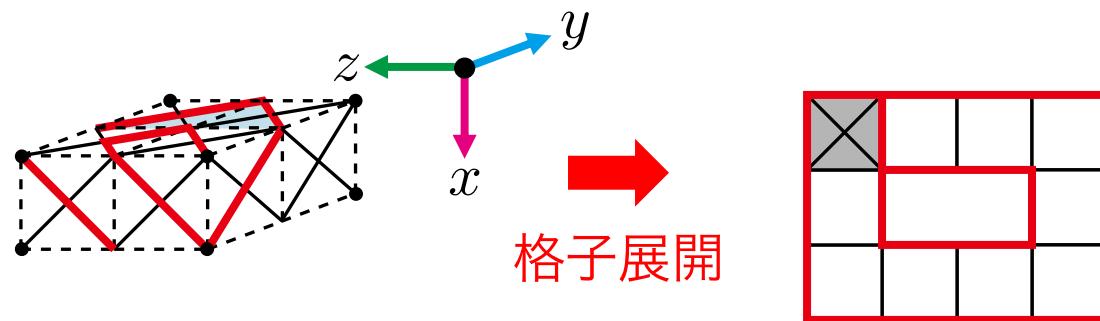


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

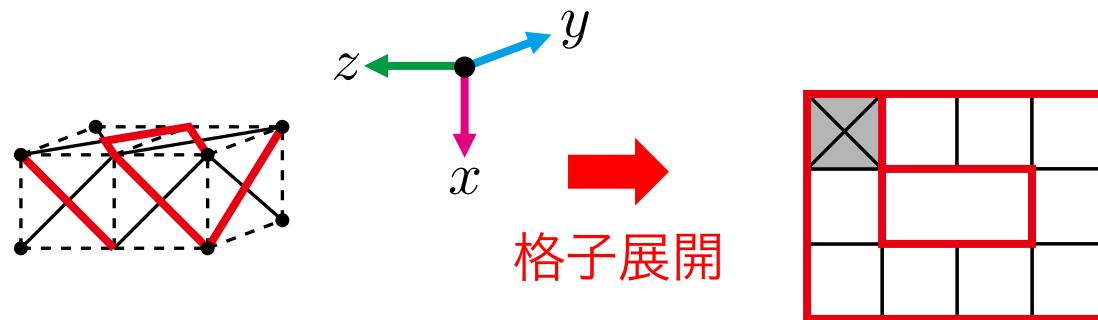


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

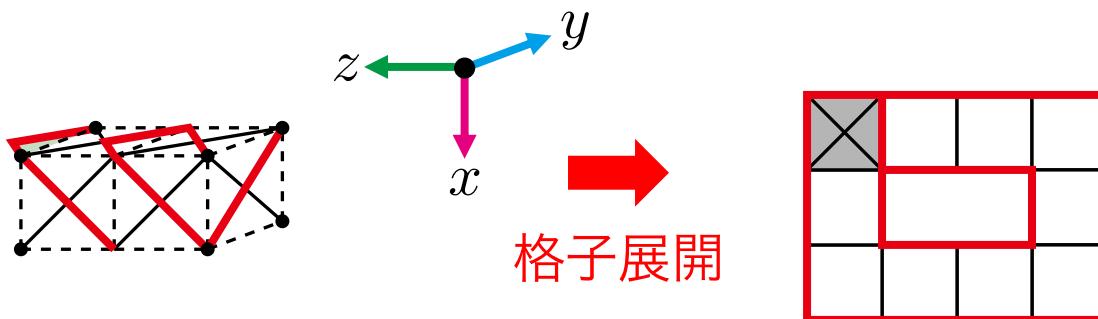


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

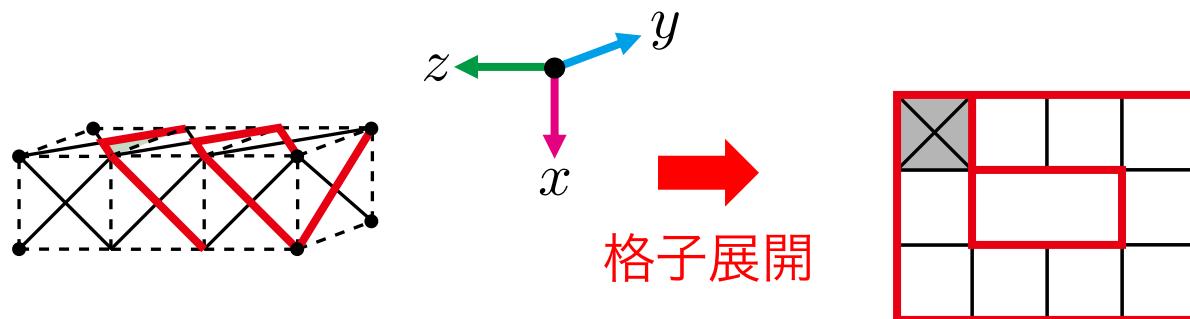


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

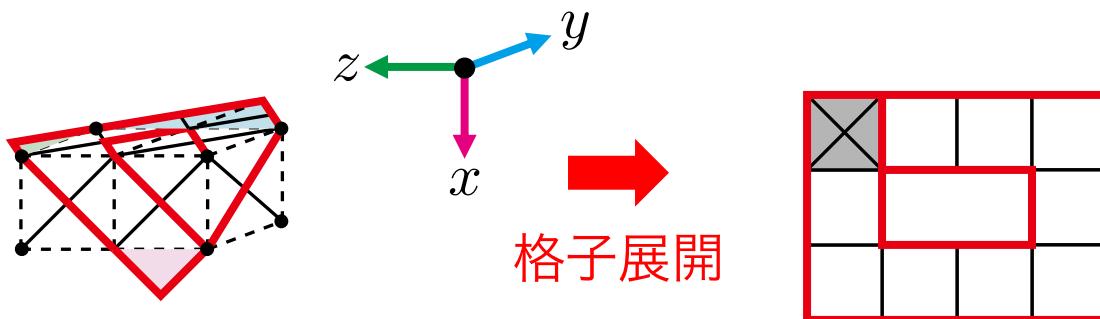


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

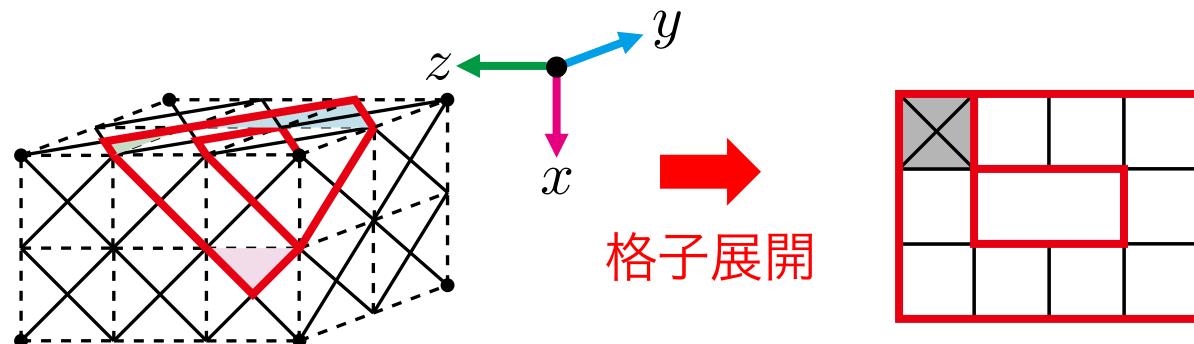


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



$x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の重なり

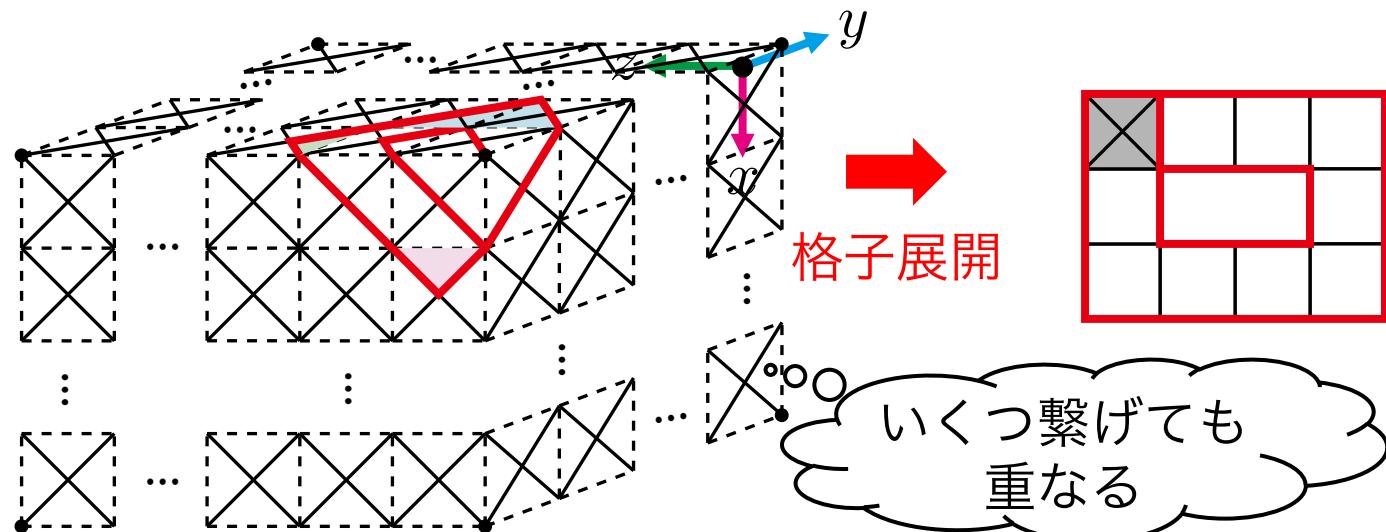


補題 1

サイズ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

【証明】サンプルをご覧下さい

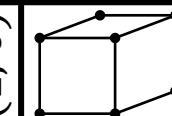
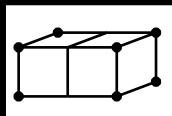
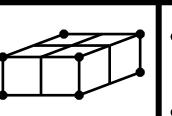
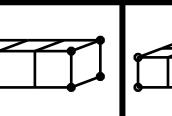
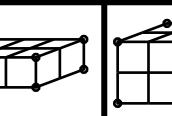
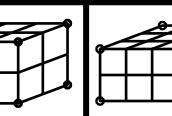
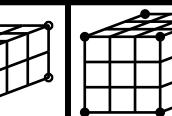
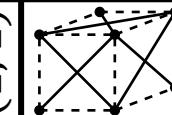
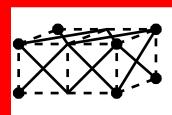
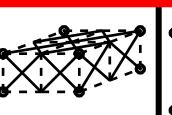
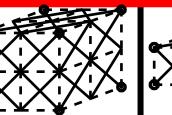
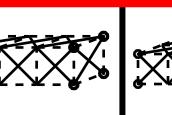
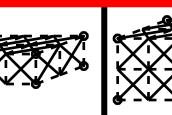
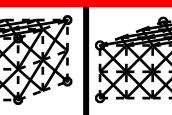
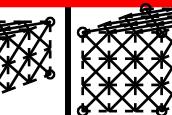
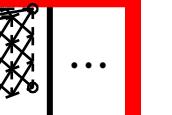
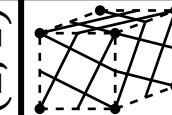
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体を赤色の太線に沿って切り開くと…



先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

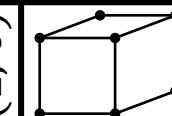
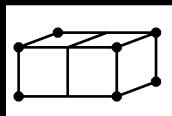
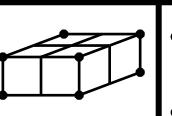
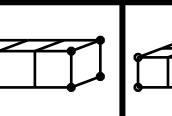
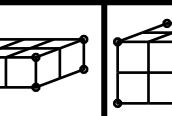
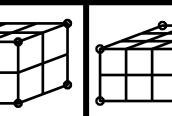
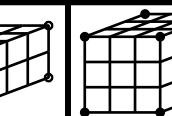
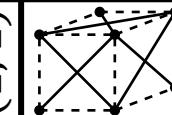
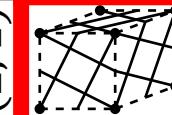
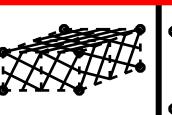
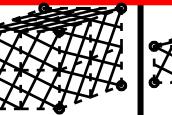
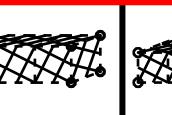
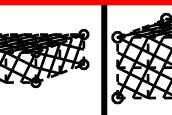
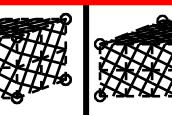
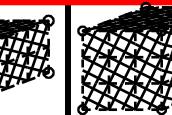
頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)										
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...	
		(1, 0)									...	
頂 辺 面	(1, 0)	No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].	
頂 辺 面	(1, 1)										...	
頂 辺 面	(1, 1)	No	Yes									
※ $(a, b) = 1$	(2, 1)		$(a, b) = (1, 1) \rightarrow L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$) で表せる格子直方体									
頂 辺 面	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
頂 辺 面	⋮	Yes										

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)														
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...					
		(1, 0)									...					
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].									
頂 辺 面		No (†1)	No	No	No	No										
頂 辺 面		(1, 1)		$(a, b) = (2, 1) \rightarrow L' = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$												
頂 辺 面		No	$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) で表せる格子直方体													
頂 辺 面		(2, 1)									...					
頂 辺 面		Yes														
頂 辺 面		Yes														

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].
(1, 1)											...
頂 辺 面		No	Yes								
(2, 1)											...
頂 辺 面		Yes									
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂 辺 面		Yes									

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
		No (†1)	No	No (†2)	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
(1, 1)											...
頂 辺 面		No	Yes								
(2, 1)											...
頂 辺 面		Yes									...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂 辺 面		Yes									⋮

格子展開図を列挙？

[Oto, 2008];

[otherwise, Sugiura, 2008].

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)								
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 2), (1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
※ $\gcd(a, b) = 1$	(1, 0)									...
	頂	No (Obvi)	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
	辺	31,500	29,859,840	31,500	29,859,840	31,500	29,859,840	31,500	29,859,840	...
	面	No (†1)	No	No	No (†2)	other wise, ...	other wise, ...	other wise, ...	other wise, ...	[Oto, 2008]; [Sugiyara, 2008].
(1, 1)										...
※ $\gcd(a, b) = 1$	(1, 1)	No	331,776	331,776	331,776	331,776	331,776	331,776	331,776	...
	頂	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
	辺	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
	面	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
(2, 1)										...
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂		Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
辺		Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
面		Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)								
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 2), (1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 3)	...		
頂	No (Obvi)	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
辺	No (†1)	31,500	29,859,840	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
面	No	No (†2)	331,776	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	...
*										
(a, b)	(2, 1)									
頂										
辺										
面										
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
頂										
辺										
面										

301,056,000,000

格子展開図を列挙？

31,500 29,859,840
No (†1) No No (†2)
[Oto, 2008];
otherwise, [Sugiyara, 2008].

- ▶ 面の数が多くなると展開図の個数が急増
- ▶ 重なり方の区別もしないといけない

- ▶ 回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023] を拡張して使う

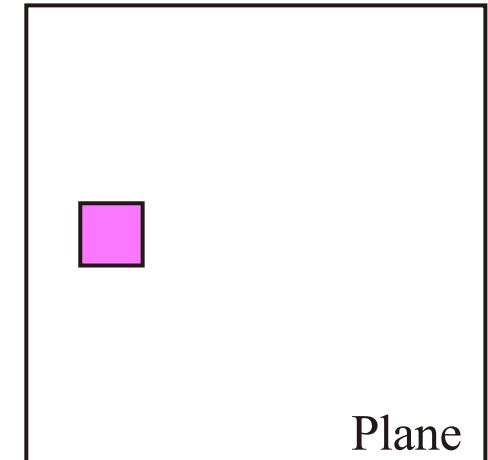
Yes

回転展開



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。

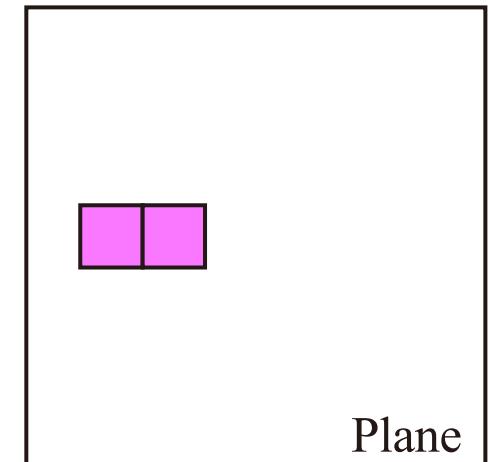


回転展開



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。

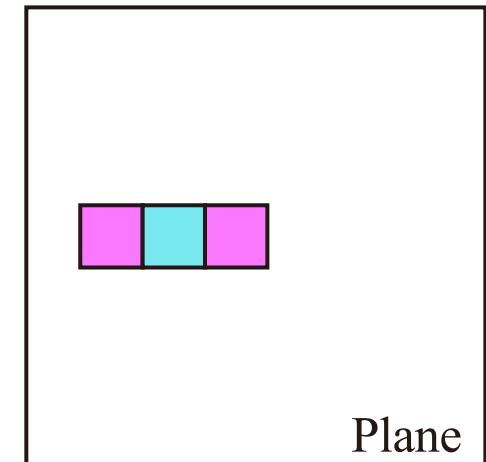
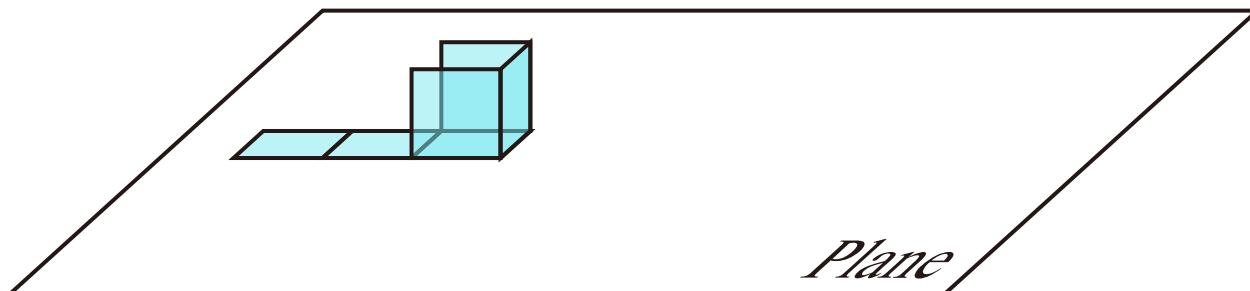


回転展開

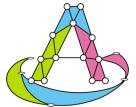


回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。

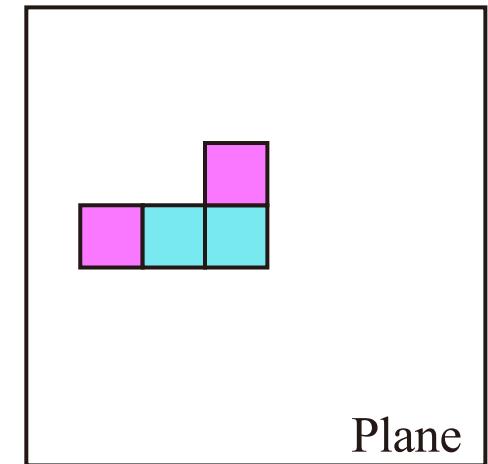
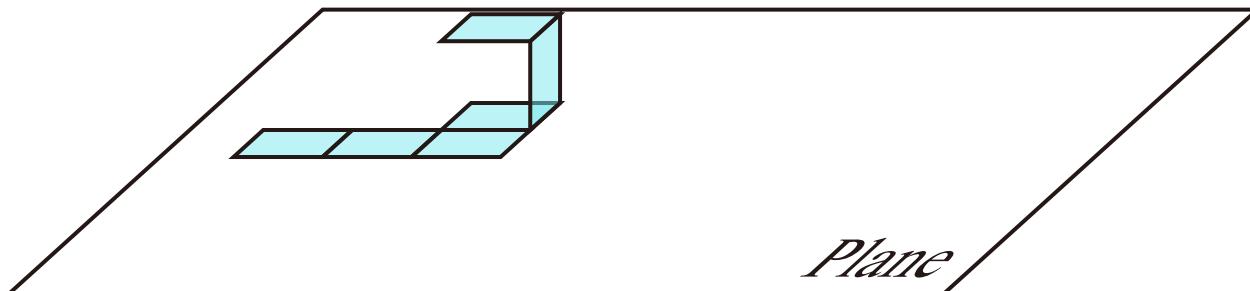


回転展開



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。

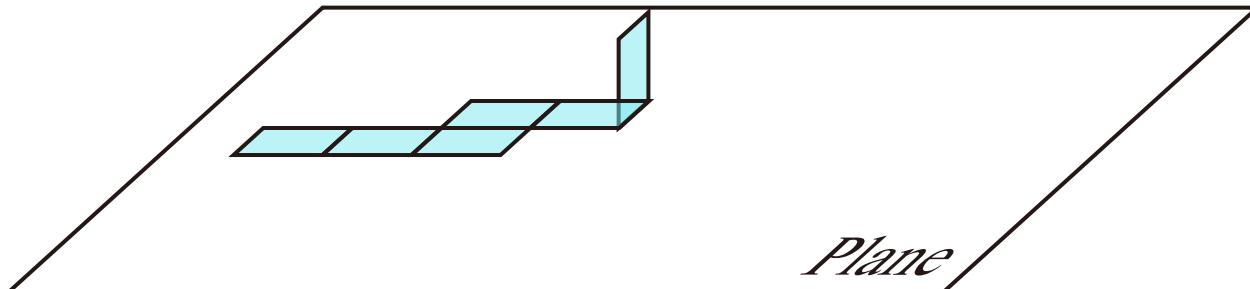


回転展開

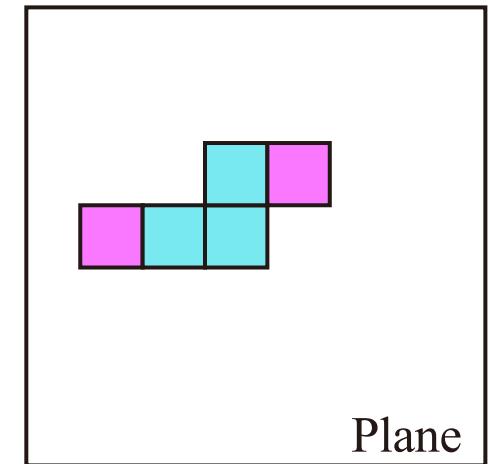


回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。



Plane



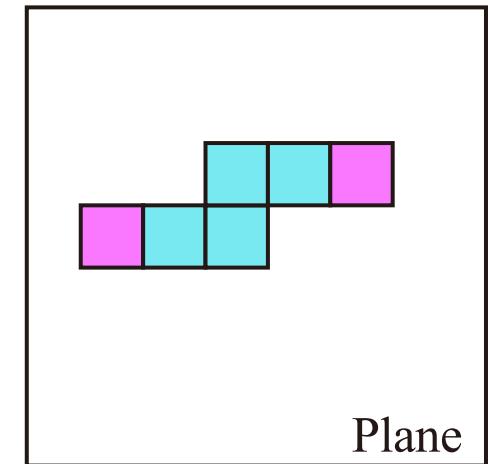
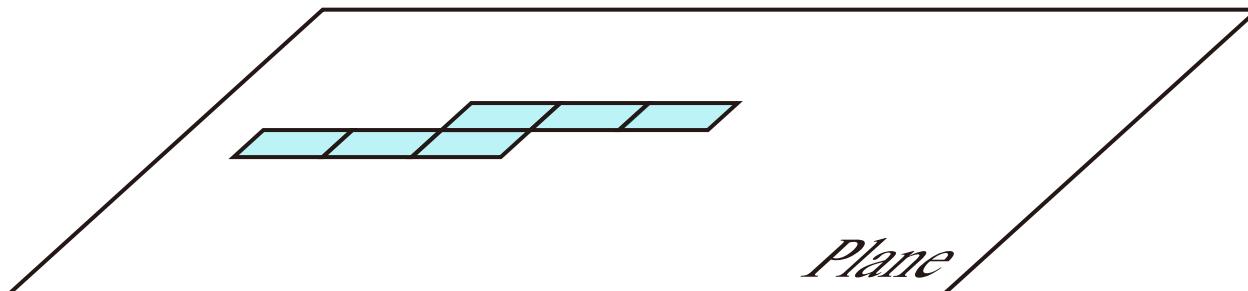
Plane

回転展開



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。

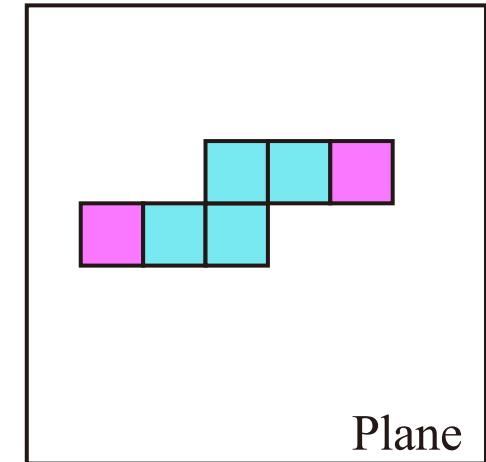
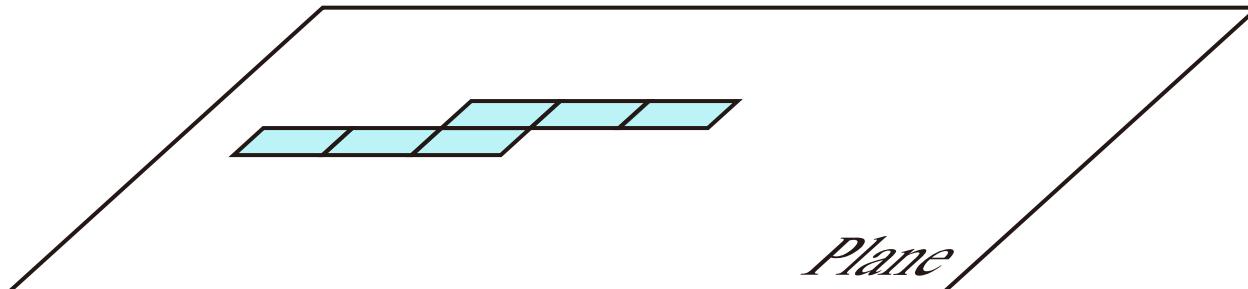


回転展開



回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

1. 多面体をコロコロと転がすことで、任意の二面間のパスを列挙する。
2. パスの両端に位置する面どうしの重なりを確認する。



Q. なぜパスの両端に位置する面の重なりだけでよい？

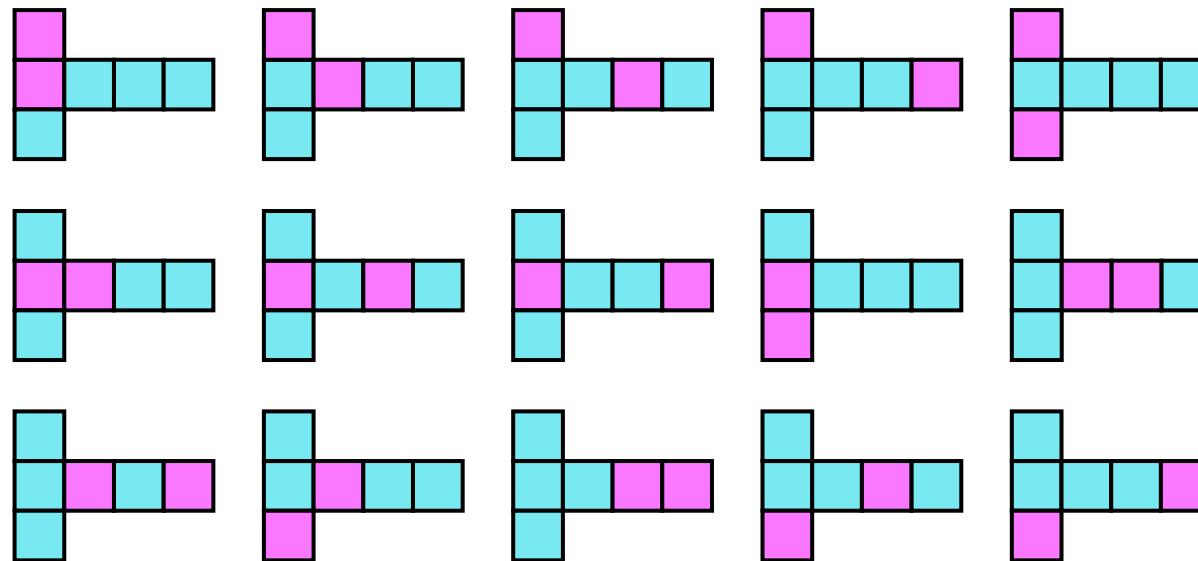
回転展開



補題 2

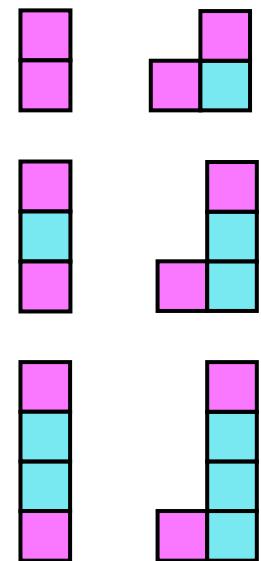
辺展開図のある2面を結ぶパスは、回転展開で列挙されたいずれかのパスに該当する。

既存手法 [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



$${}_6C_2 = 15 \text{ 通り}$$

回転展開



$$6 \text{ 通り}$$

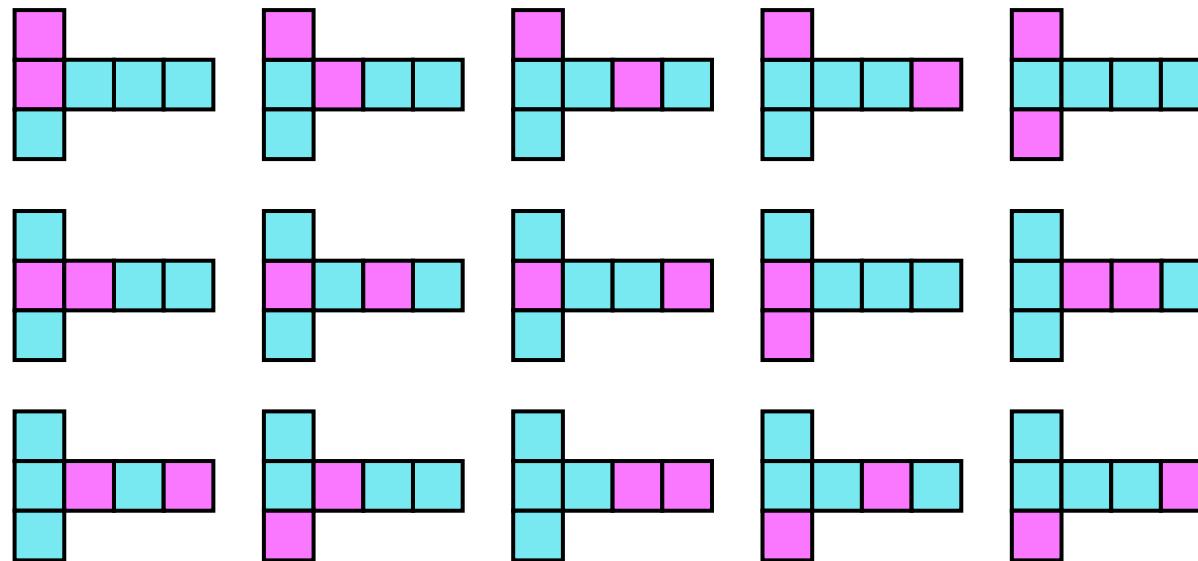
回転展開



補題 2

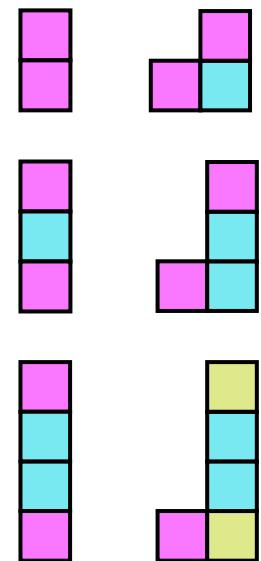
辺展開図のある2面を結ぶパスは、回転展開で列挙されたいずれかのパスに該当する。

既存手法 [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



$${}_6C_2 = 15 \text{ 通り}$$

回転展開



$$6 \text{ 通り}$$

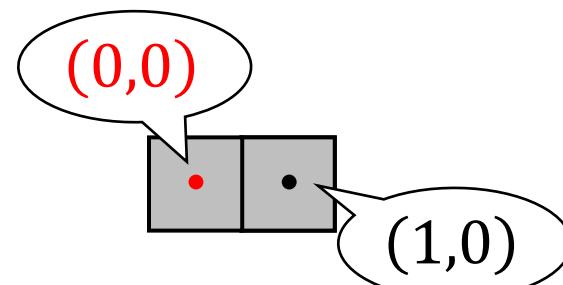
格子展開図の重なり判定



回転展開では、転がす度に重なりがあるかを判定

- パスの片方の端点の面の中心座標を $(x, y) = (0,0)$
- 転がしながら逐次、もう一方の端点の中心座標を計算

【メモ】正方形の1辺の長さは1



もう一方端点の座標の計算のイメージ

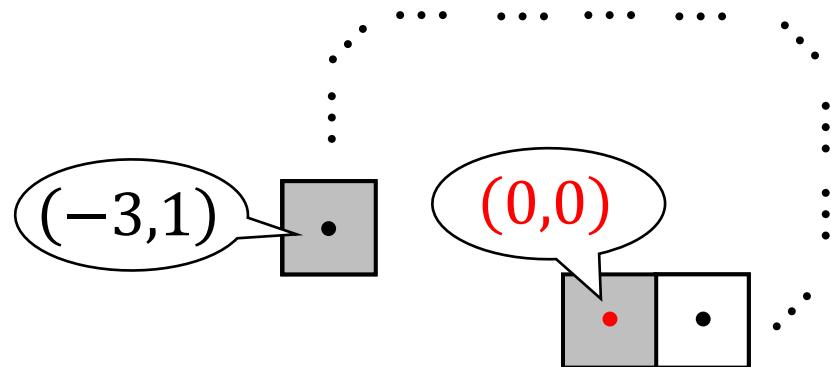
格子展開図の重なり判定



回転展開では、転がす度に重なりがあるかを判定

- パスの片方の端点の面の中心座標を $(x, y) = (0,0)$
- 転がしながら逐次、もう一方の端点の中心座標を計算

【メモ】正方形の1辺の長さは1



もう一方端点の座標の計算のイメージ

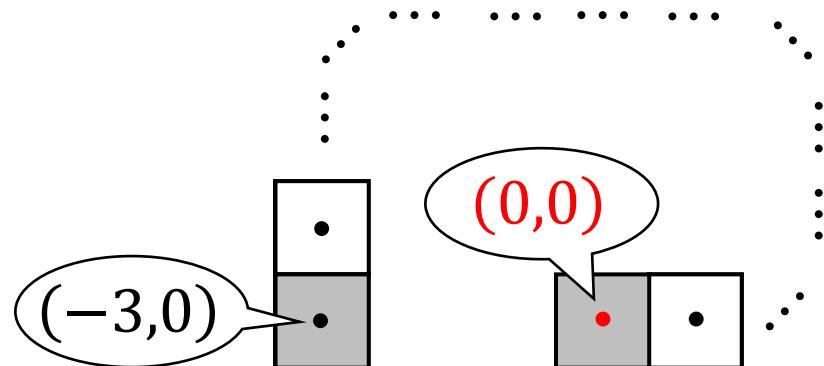
格子展開図の重なり判定



回転展開では、転がす度に重なりがあるかを判定

- パスの片方の端点の面の中心座標を $(x, y) = (0,0)$
- 転がしながら逐次、もう一方の端点の中心座標を計算

【メモ】正方形の1辺の長さは1



もう一方端点の座標の計算のイメージ

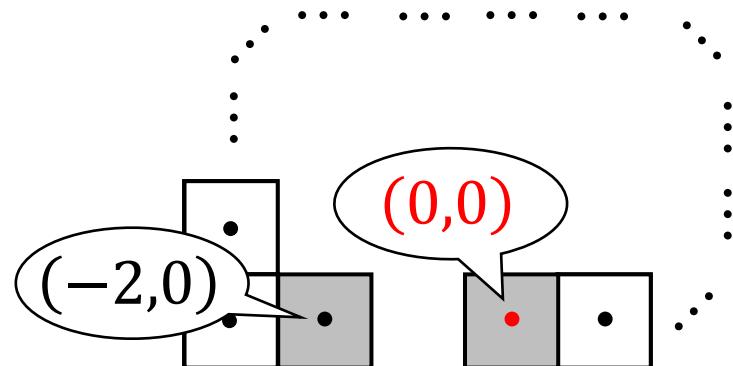
格子展開図の重なり判定



回転展開では、転がす度に重なりがあるかを判定

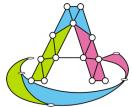
- パスの片方の端点の面の中心座標を $(x, y) = (0,0)$
- 転がしながら逐次、もう一方の端点の中心座標を計算

【メモ】正方形の1辺の長さは1



もう一方端点の座標の計算のイメージ

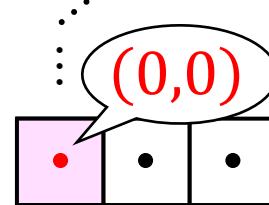
格子展開図の重なり判定



パスの、もう一方の端点の面の中心座標が…

- $(0,0)$

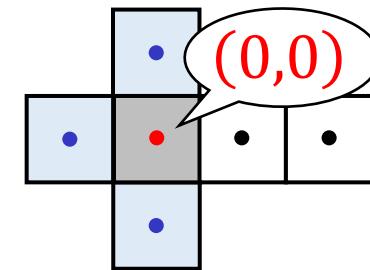
→ 面接触展開図



面接触

- $(0,1), (-1,0), (0,-1)$

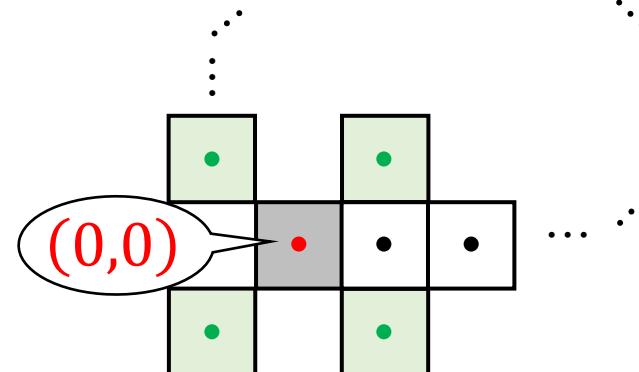
→ 辺接触展開図



辺接触

- $(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$

→ 頂点接触展開図



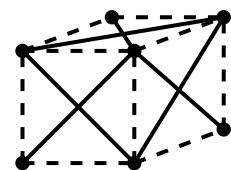
頂点接触

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}, x \times y \times z (z = 2)$ の重なり



補題 3

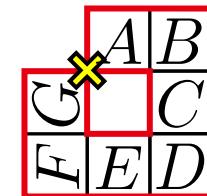
1. サイズ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子立方体には、面／辺／頂点接触展開図がいずれも存在しない。
2. サイズ $1 \times 1 \times 2$ の格子直方体には、面／辺接触展開図が存在しないが、頂点接触展開図が存在する。



存在
しない

サイズ $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

頂点接触



サイズ $1 \times 1 \times 2$

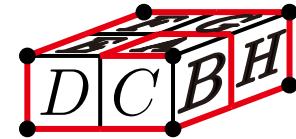
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, $x \times y \times z$ ($z = 2$) の重なり



補題 3 (続き)

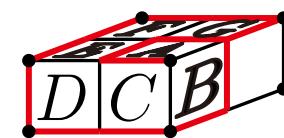
3. サイズ $1 \times 2 \times 2$ の格子直方体, サイズ $2 \times 2 \times 2$ の格子立方体には, 面接触展開図が存在しないが, 辺／頂点接触展開図が存在する.

辺接触



H	A		B	C	D
F	G		E	D	C
F	G		E	D	C

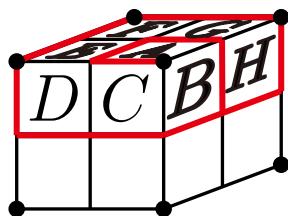
頂点接触



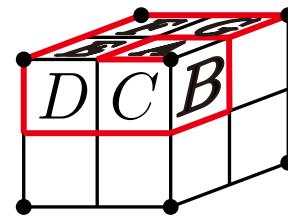
	A		B	C	D
F	G		E	D	C
F	G		E	D	C

サイズ $1 \times 2 \times 2$

辺接触



頂点接触



サイズ $2 \times 2 \times 2$

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	No	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].
(1, 1)											...
頂 辺 面		No	Yes								
(2, 1)											...
頂 辺 面		Yes									
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
頂 辺 面		Yes									

先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]

†2 : [H. Sugiura, 2018]

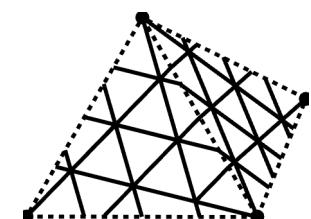
頂
辺
面

頂点接触展開図
辺接触展開図
面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂	No (Obvi)										...
辺	Yes										...
面	No										...
※	No (†1)										...
頂	No										...
辺	Yes										...
面	No										...
※	gcd(a, b) = 1										...

今後の課題

三角格子から作ることができるデルタ多面体における重なりの存在性を明らかにする。

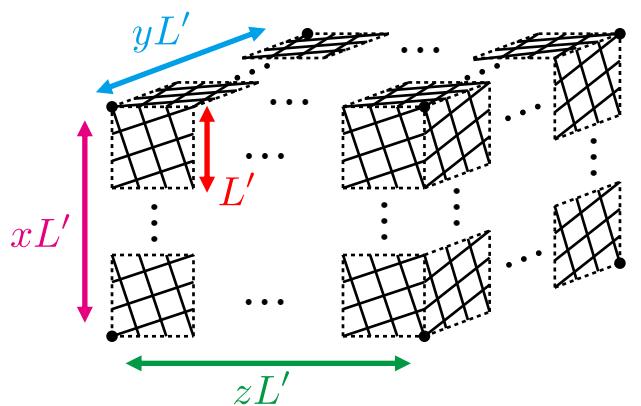


格子四面体

補足スライド

$\gcd(a, b) = 1$ の説明

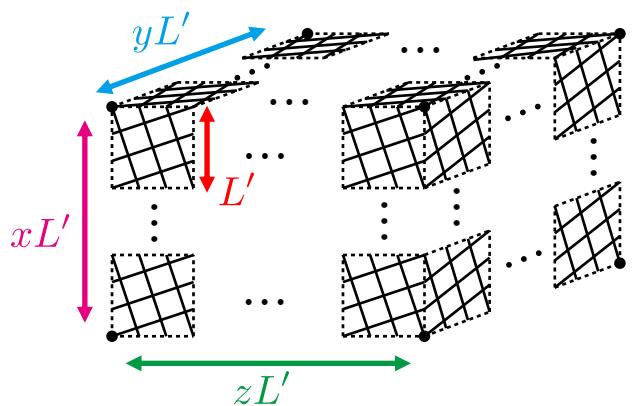
格子直方体の一覧



		(x, y, z)									
		$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(2, 2, 3)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 3, 3)$...
(a, b)		$\ast \gcd(a, b) = 1$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$...	
											...
											...
											...
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\gcd(a, b) = 1$ の説明

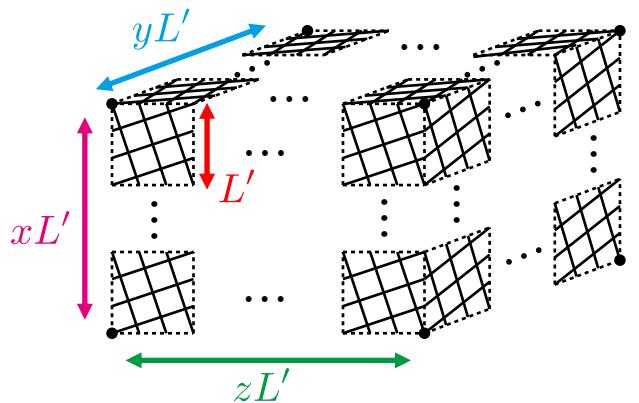
格子直方体の一覧



		(x, y, z)									
		$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(2, 2, 3)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 3, 3)$...
(a, b)		$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(2, 4)$	$(2, 5)$	$(3, 5)$...
$\ast \quad \gcd(a, b) = 1$...
$\ast \quad \gcd(2, 0) \neq 1$...
$\ast \quad \gcd(2, 2) \neq 1$...
...		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$\gcd(a, b) = 1$ の説明

格子直方体の一覧



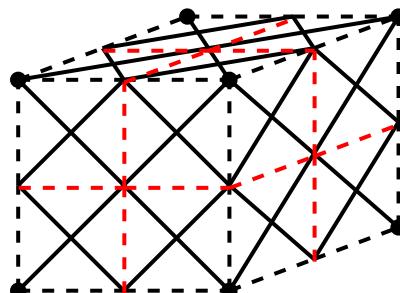
(x, y, z)

$$(a, b) = (2, 2), \gcd(a, b) = 2$$

$$\rightarrow L' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

$\rightarrow 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体

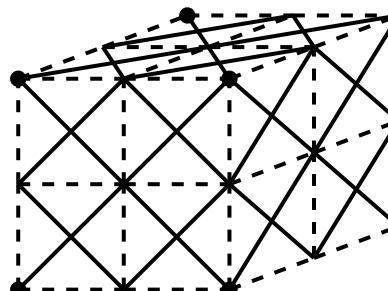


$$(a, b) = (1, 1), \gcd(a, b) = 1$$

$$\rightarrow L' = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(x, y, z) = (2, 2, 2)$$

$\rightarrow 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ の格子直方体



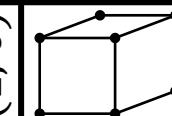
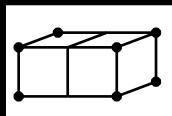
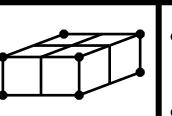
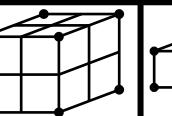
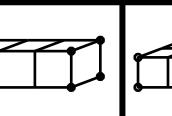
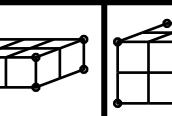
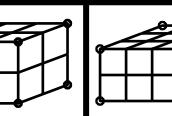
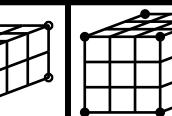
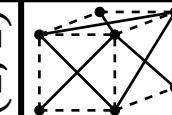
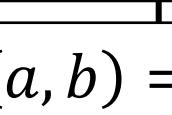
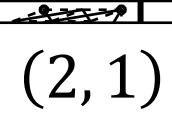
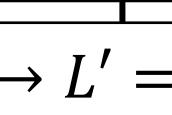
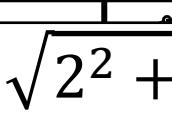
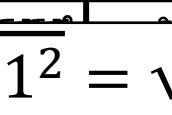
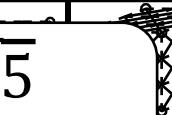
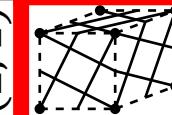
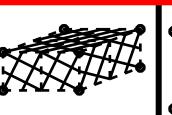
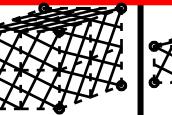
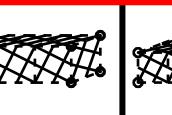
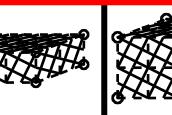
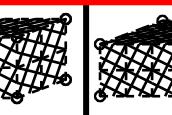
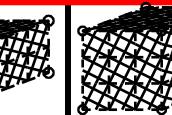
同じ直方体



先行研究と主結果

†1 : [R. Hearn, 2018]
†2 : [H. Sugiura, 2018]

頂	頂点接触展開図
辺	辺接触展開図
面	面接触展開図

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
		(1, 0)									...
頂 辺 面		No (Obvi)	Yes	Yes	Yes	Yes	For $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$), represent [T. Uno, 2008]; otherwise, use [R. Uehara, 2008].				
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		(1, 1)									...
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		(1, 1)	No	$(a, b) = (2, 1) \rightarrow L' = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) で表せる格子直方体							
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		(2, 1)									...
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		Yes									
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		Yes									
Top row: $\gcd(a, b) = 1$		Yes									

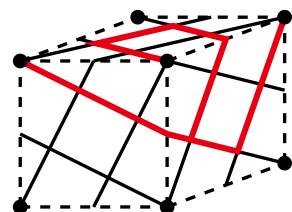
$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の重なり



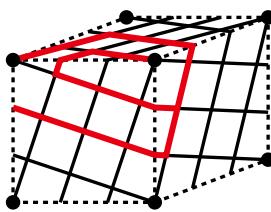
補題 3

サイズ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

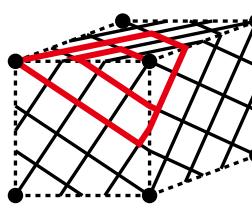
$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子立方体を観察すると…



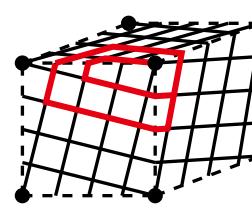
$$L' = \sqrt{5}$$



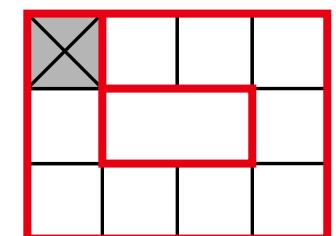
$$L' = \sqrt{10}$$



$$L' = \sqrt{13}$$



$$L' = \sqrt{17}$$



格子展開図 Q

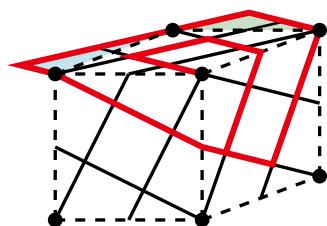
$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の重なり



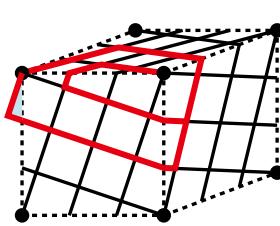
補題 3

サイズ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

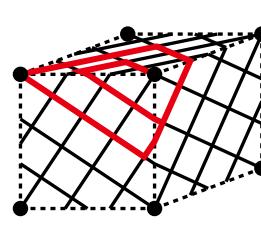
$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子立方体を観察すると…



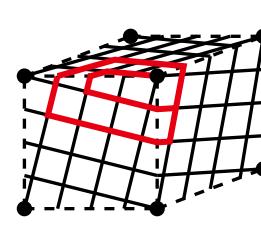
$$L' = \sqrt{5}$$



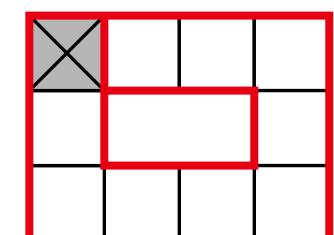
$$L' = \sqrt{10}$$



$$L' = \sqrt{13}$$



$$L' = \sqrt{17}$$



格子展開図 Q

$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の重なり

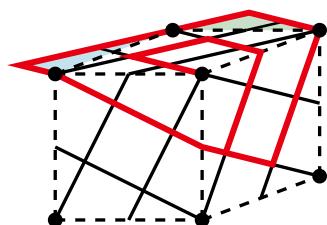


補題 3

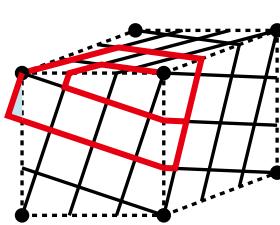
サイズ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子立方体

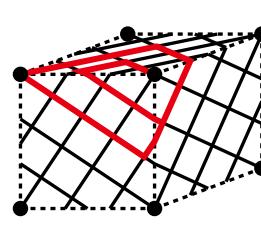
手前3面で完結



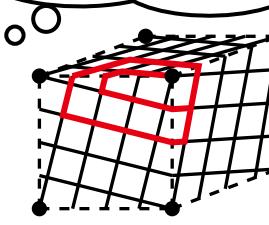
$$L' = \sqrt{5}$$



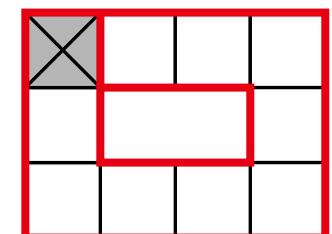
$$L' = \sqrt{10}$$



$$L' = \sqrt{13}$$



$$L' = \sqrt{17}$$



格子展開図 Q

$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の重なり

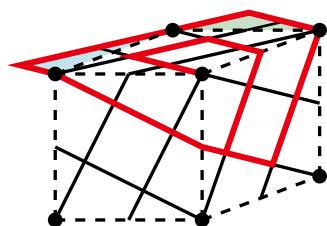


補題 3

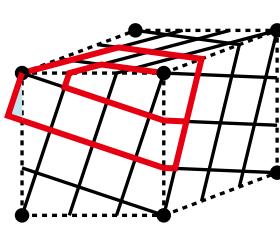
サイズ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子直方体には、面接触展開図が存在する。また、辺／頂点接触展開図が存在する。

$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子立方体

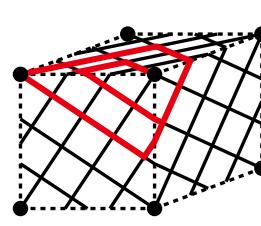
手前3面で完結



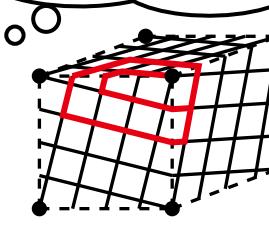
$$L' = \sqrt{5}$$



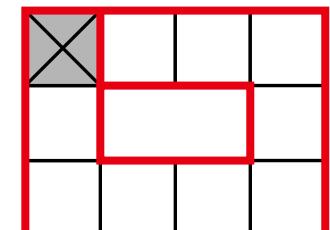
$$L' = \sqrt{10}$$



$$L' = \sqrt{13}$$



$$L' = \sqrt{17}$$



格子展開図 Q

補題 4

格子展開図 Q は、 $L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前3面に埋め込むことができる。

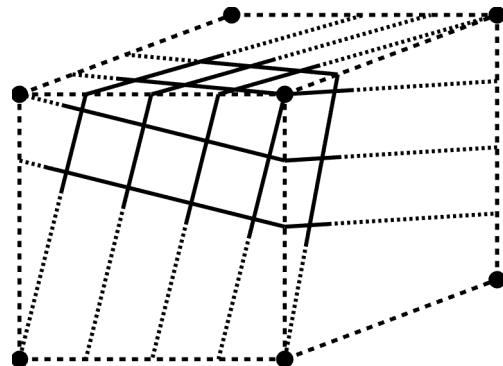
補題 4 の証明



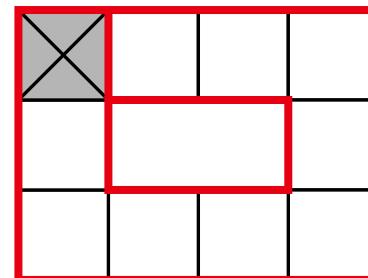
補題 4

格子展開図 Q は、 $L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前 3面に埋め込むことができる。

【証明】



格子展開図 Q



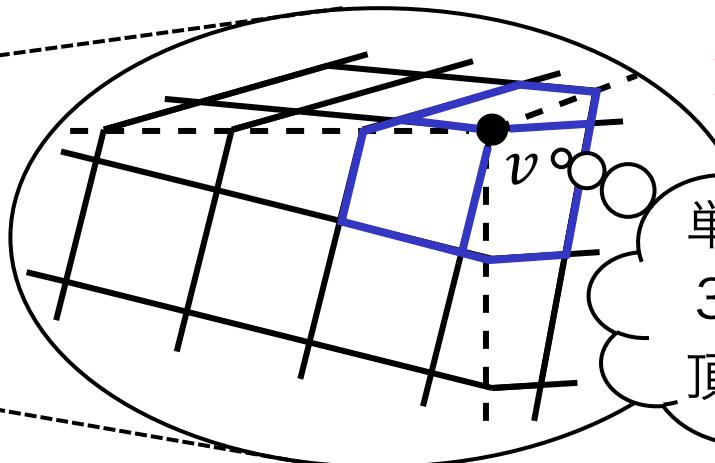
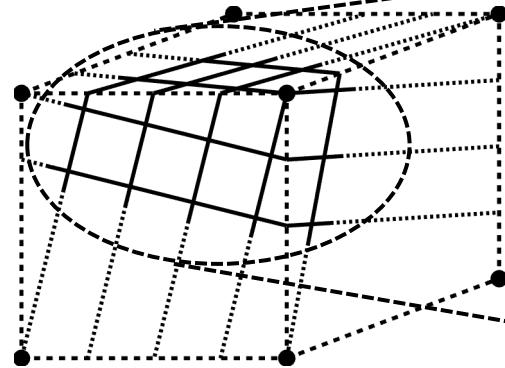
補題 4 の証明



補題 4

格子展開図 Q は、 $L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前 3面に埋め込むことができる。

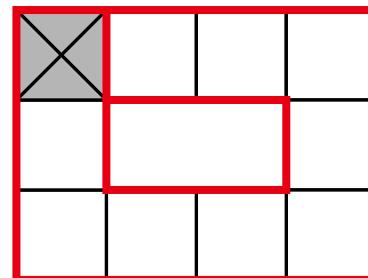
【証明】



角に注目する

単位正方形が
3つ集まって
頂点 v を作る

格子展開図 Q



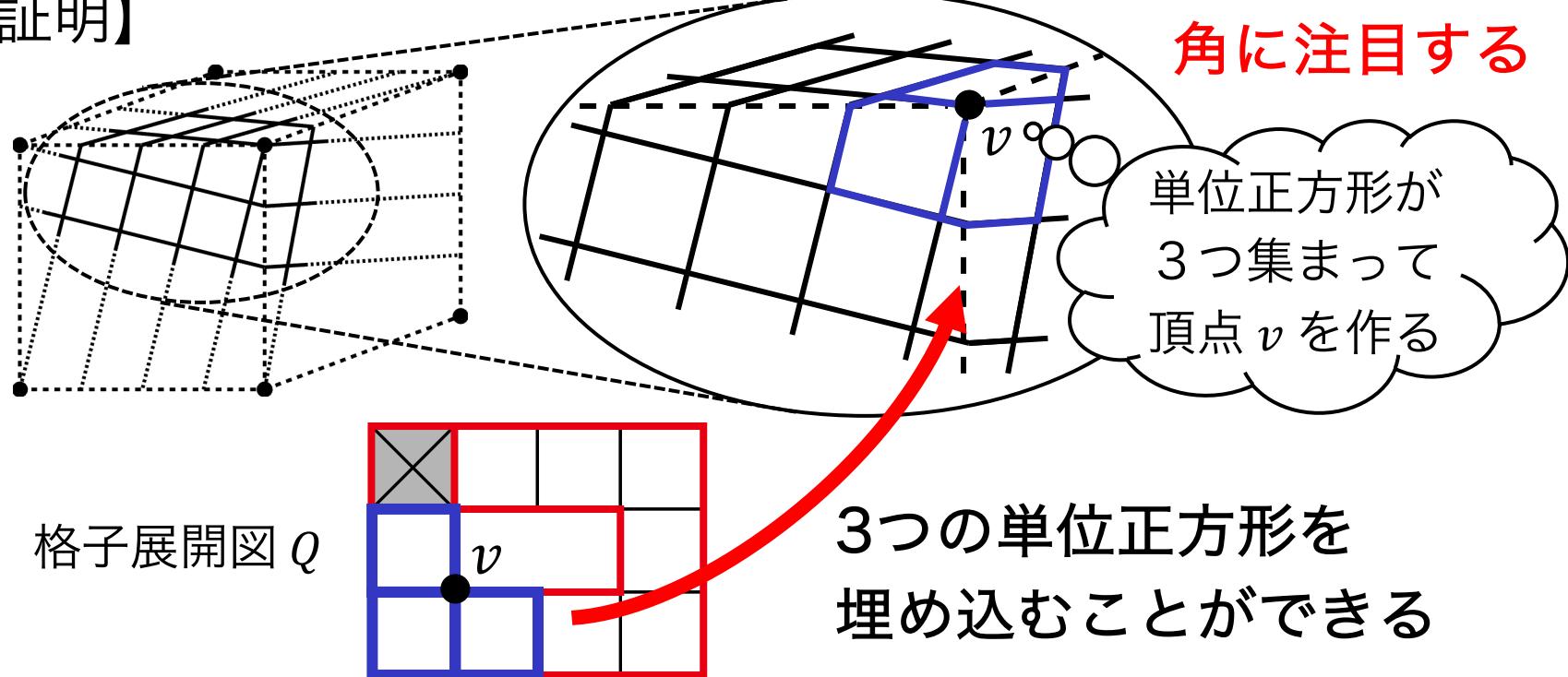
補題 4 の証明



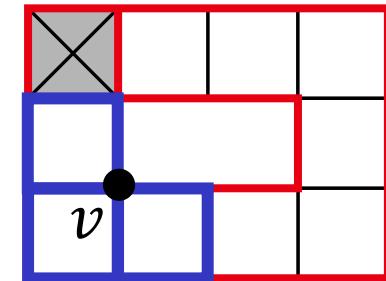
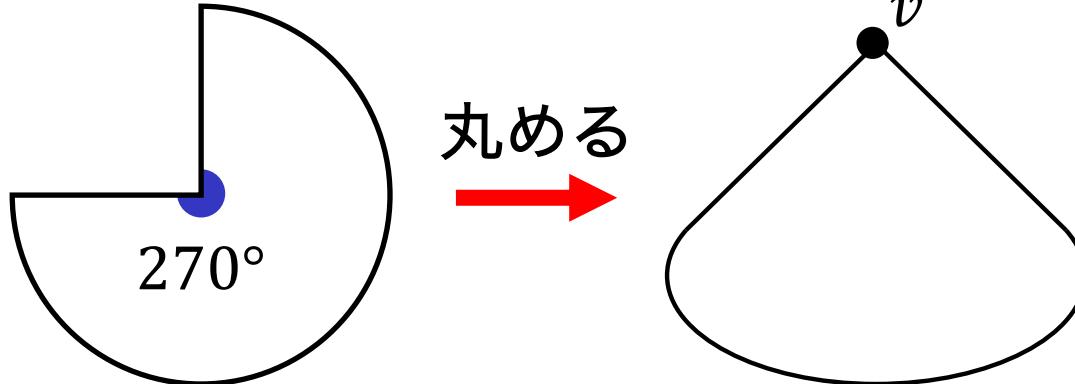
補題 4

格子展開図 Q は、 $L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前 3面に埋め込むことができる。

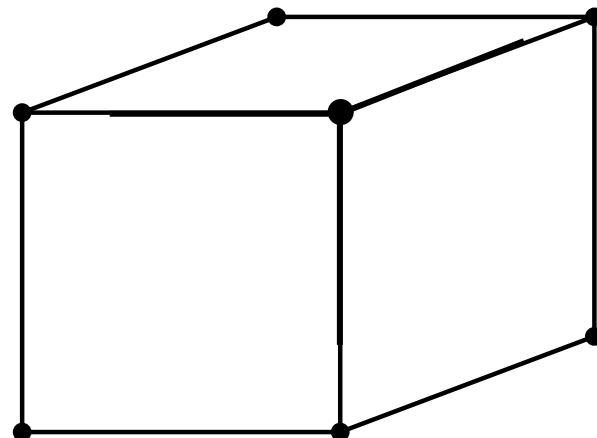
【証明】



補題 4 の証明

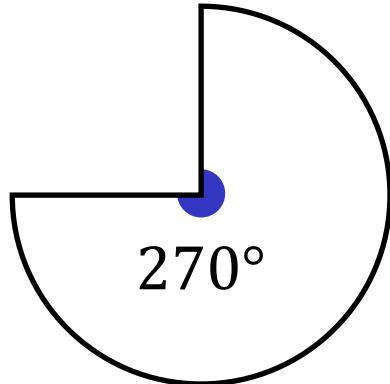


格子展開図 Q

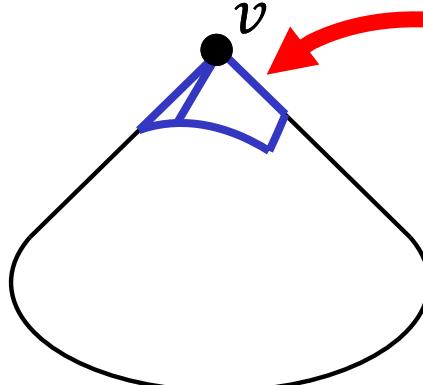


$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

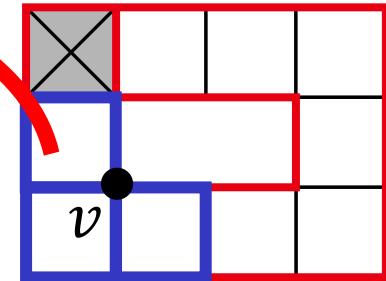
補題 4 の証明



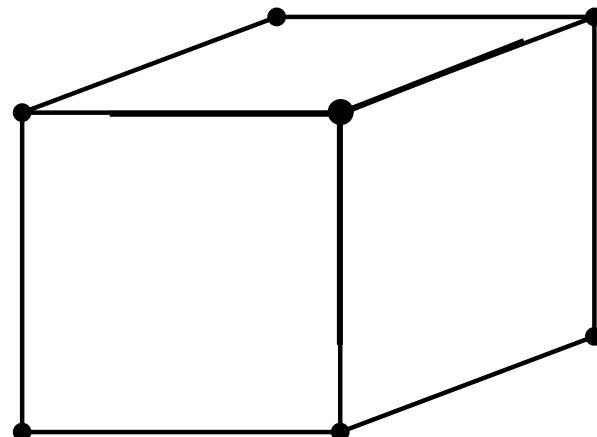
丸める
→



埋め込み可能

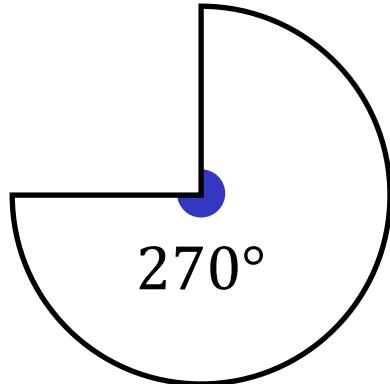


格子展開図 Q

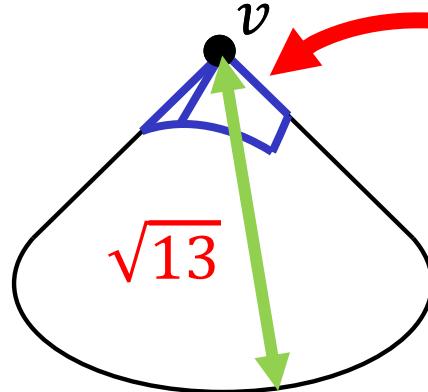


$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

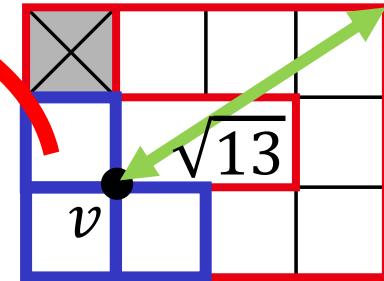
補題 4 の証明



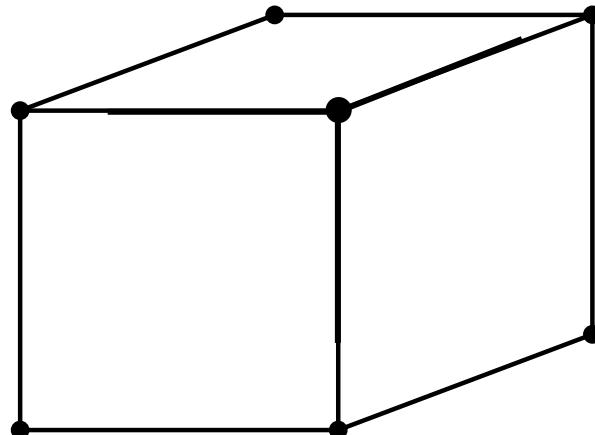
丸める
→



埋め込み可能

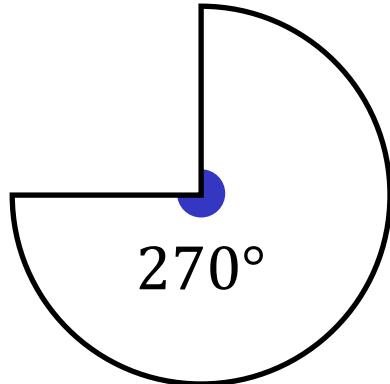


格子展開図 Q

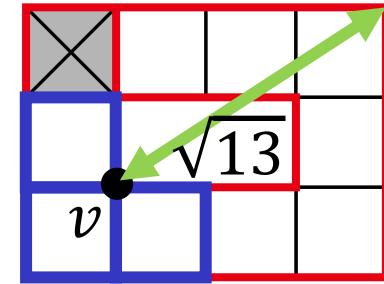
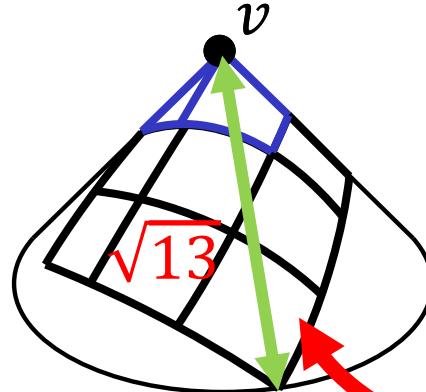


$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

補題 4 の証明

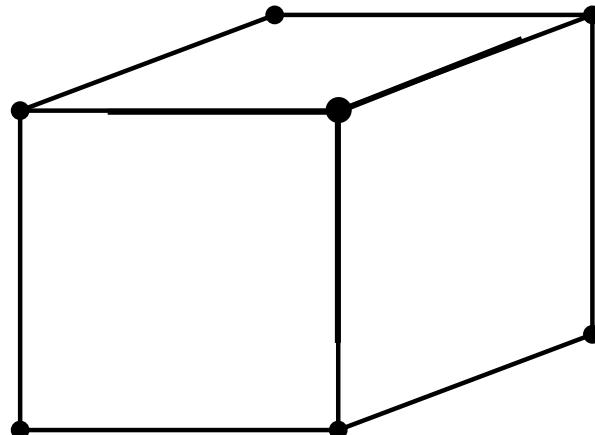


丸める
→



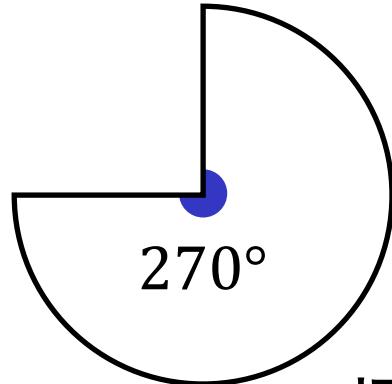
格子展開図 Q

埋め込み可能



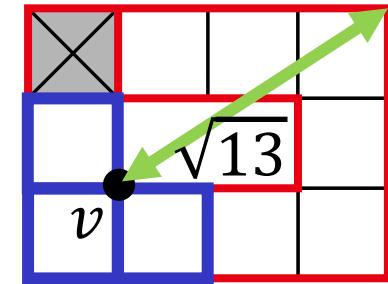
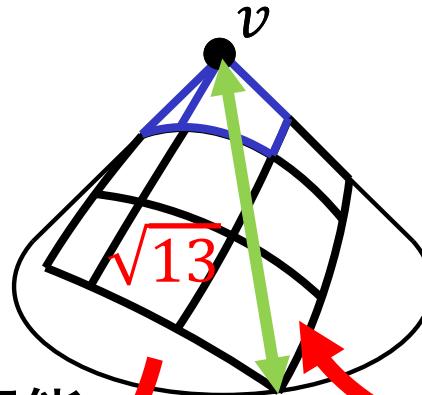
$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

補題 4 の証明



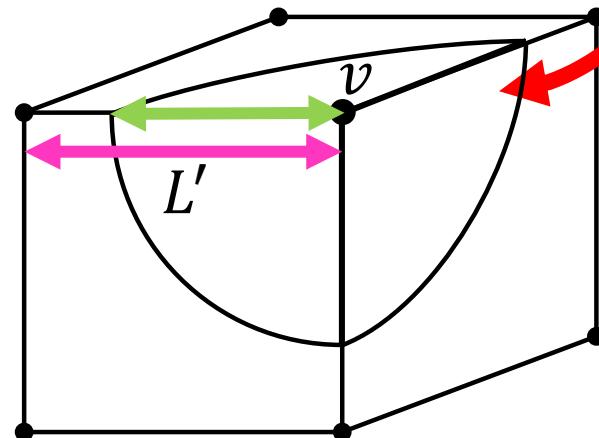
丸める
→

埋め込み可能



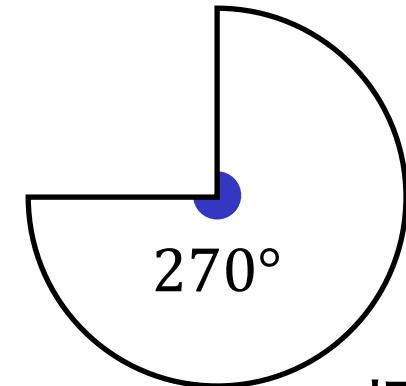
格子展開図 Q

埋め込み可能



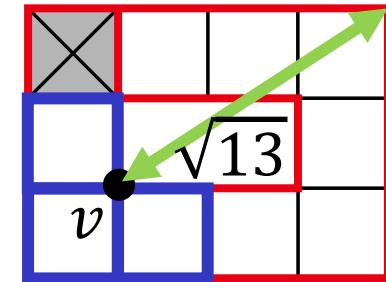
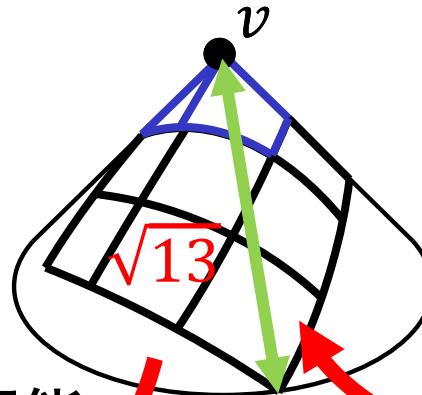
$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

補題 4 の証明



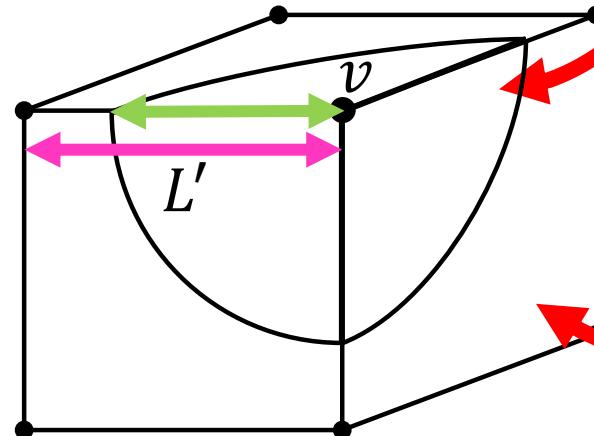
丸める
→

埋め込み可能



格子展開図 Q

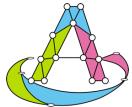
埋め込み可能



$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体

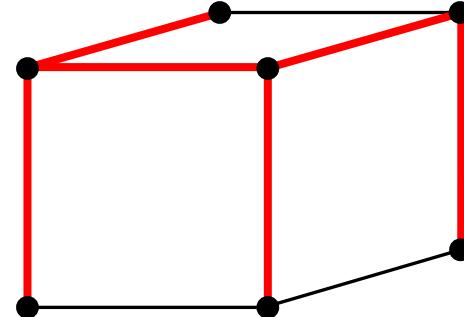
埋め込み可能

格子展開における回転展開の高速化



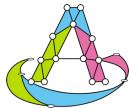
従来の回転展開は…

- 多面体の辺に沿って切れ込みを入れることで得られる
辺展開図に対して使うものである
 - 平坦に開くことができないため、各頂点に対して、
いずれかの方向か必ず切れ込みを入れる



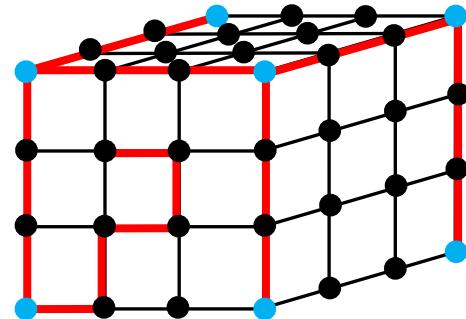
立方体（正六面体）

格子展開における回転展開の高速化



格子立方体では…

- ▶ 全ての格子上の点について、必ずしもいずれかの方向に切れ込みを入れる必要はない
- ※ 立方体の頂点に位置する点には必ず切れ込みを入れる



格子立方体

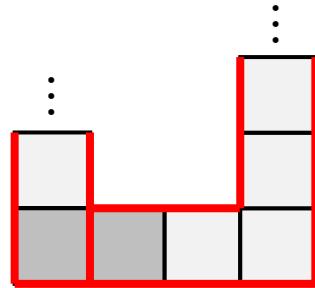
青色の点を全て
含む木を形成

格子展開における回転展開の高速化

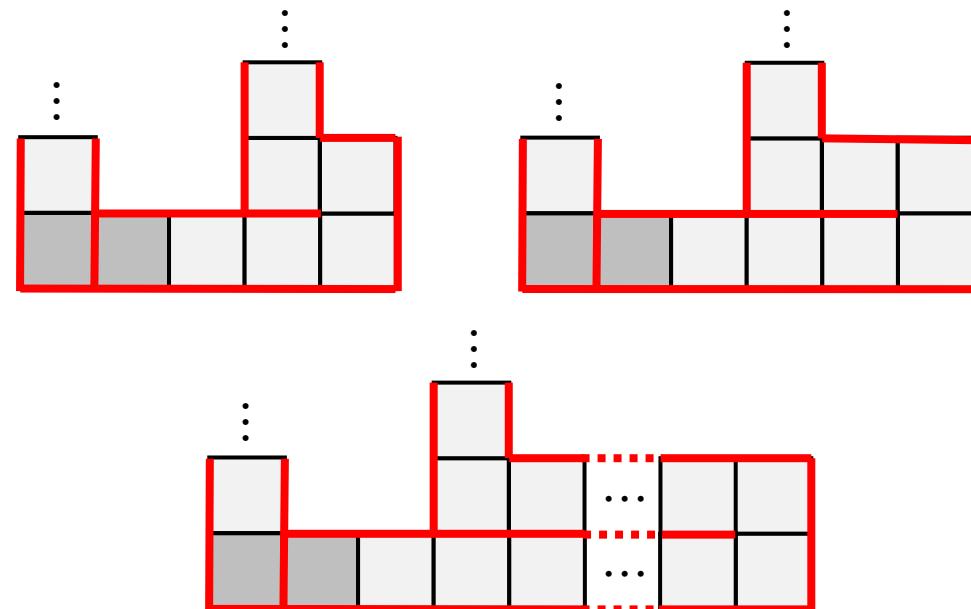


問題点

- ▶ 列挙したパスの中に、重なりを確認する上で不要なパスが含まれてしまう



求めたいパス



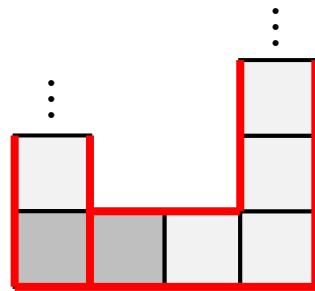
探索が不要なパス

格子展開における回転展開の高速化

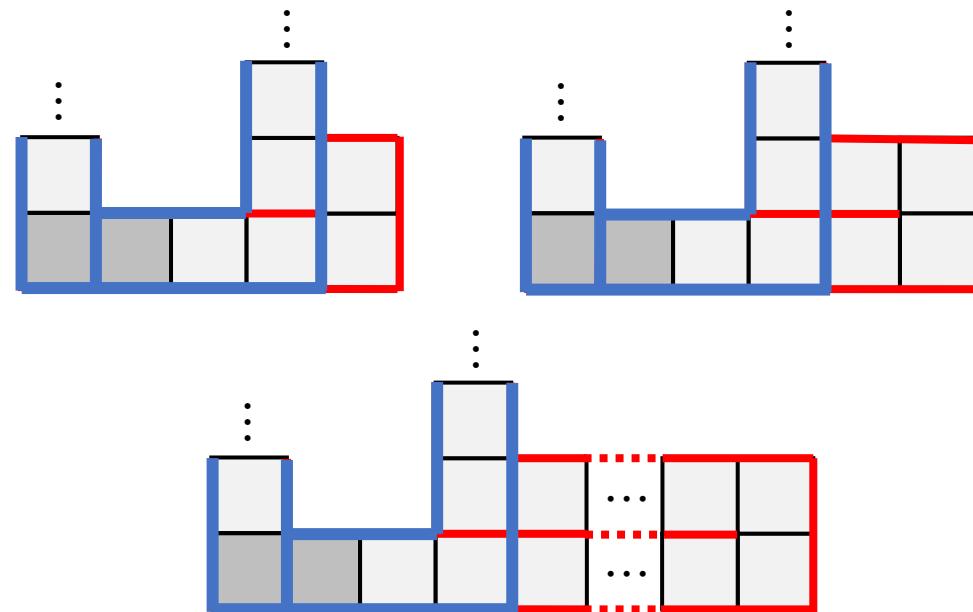


問題点

- ▶ 列挙したパスの中に、重なりを確認する上で不要なパスが含まれてしまう



求めたいパス



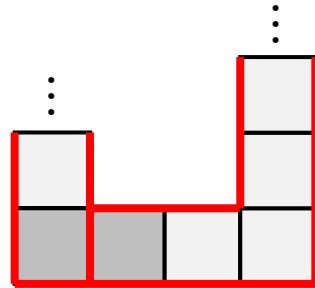
探索が不要なパス

格子展開における回転展開の高速化

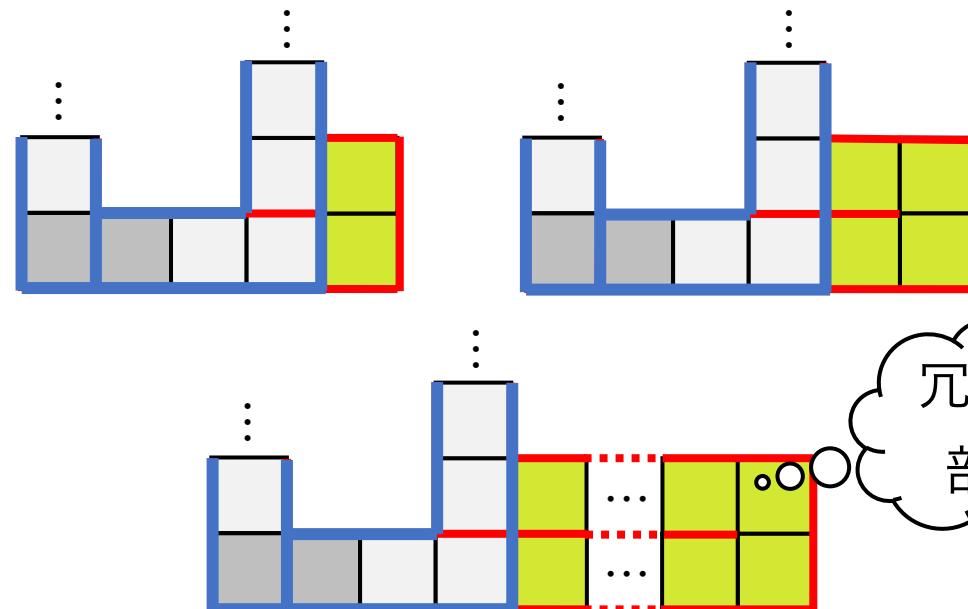


問題点

- ▶ 列挙したパスの中に、重なりを確認する上で不要なパスが含まれてしまう



求めたいパス



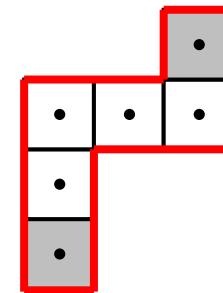
探索が不要なパス

不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

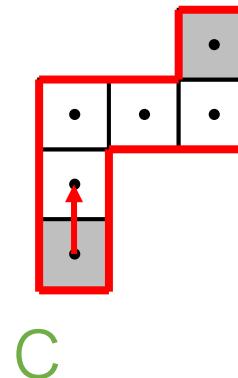


不要なパスの除去



- 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

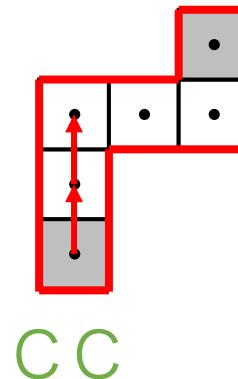


不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

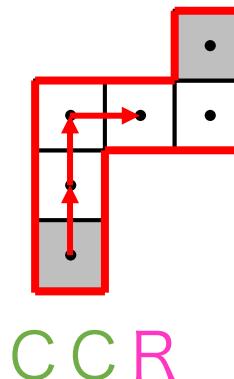


不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

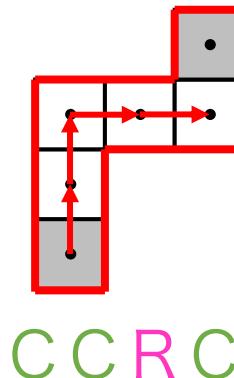


不要なパスの除去



- 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

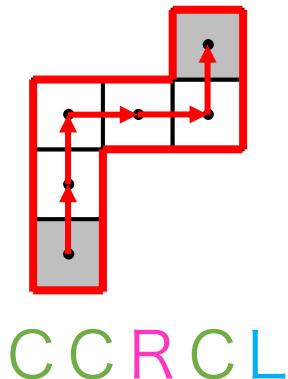


不要なパスの除去



- 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

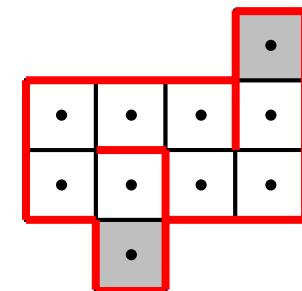
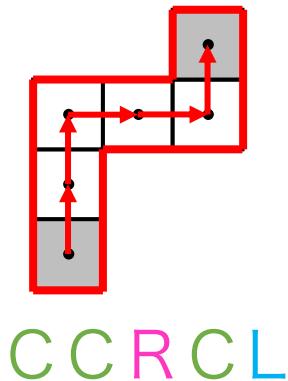


不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

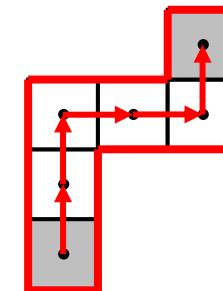


不要なパスの除去

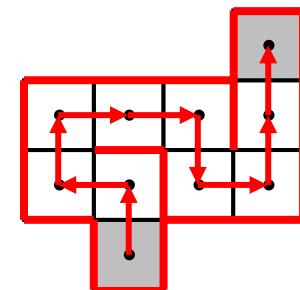


- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L



C C R C L



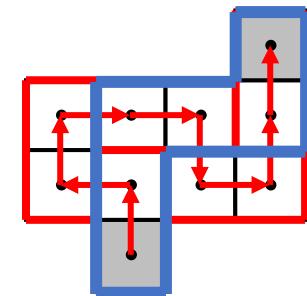
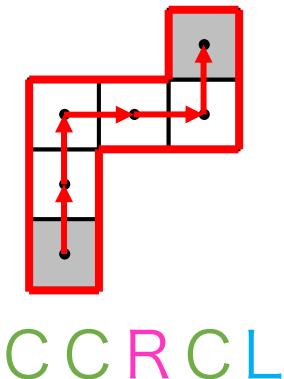
C L R R C R L L C

不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

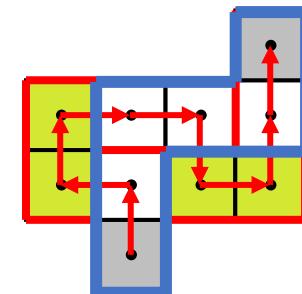
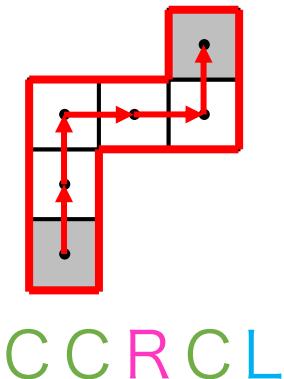


不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

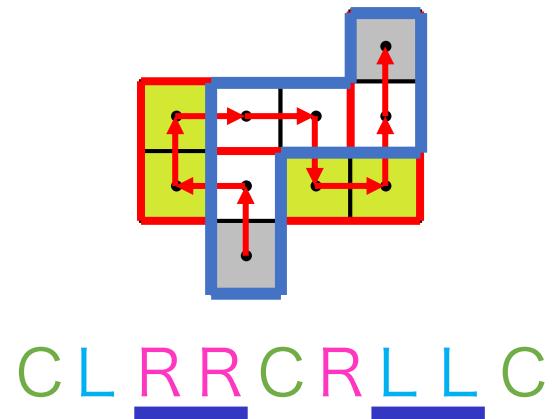
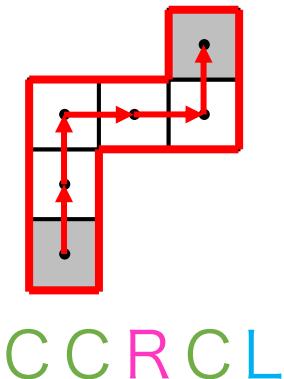


不要なパスの除去



- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L

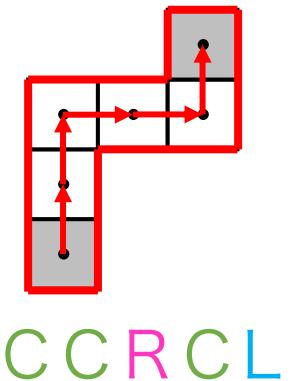


不要なパスの除去



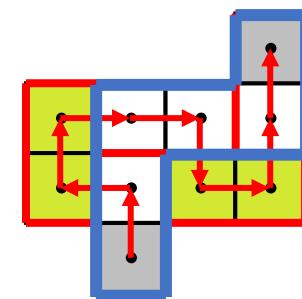
- ▶ 「1ステップ前から見たときの転がす方向」 の情報を回転展開に追加

- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L



補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。



C L R R C R C L L C

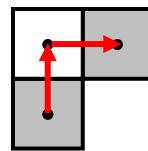
補題 5 の証明



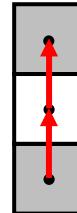
補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。

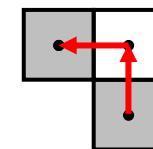
【証明の概略】 回転展開の2ステップ目で3つに場合分けをする



① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき

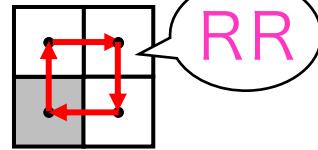
補題 5 の証明



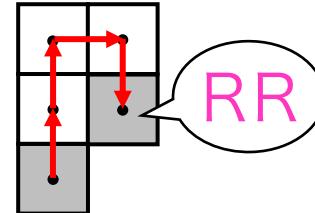
補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。

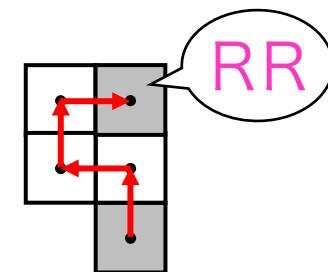
【証明の概略】 回転展開の2ステップ目で3つに場合分けをする



① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき

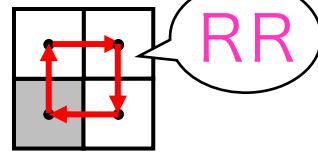
補題 5 の証明



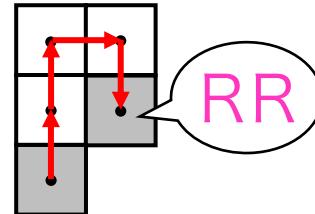
補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。

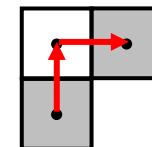
【証明の概略】 回転展開の2ステップ目で3つに場合分けをする



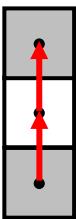
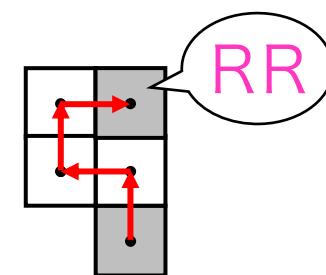
① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき



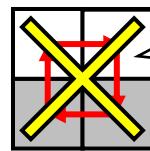
補題 5 の証明



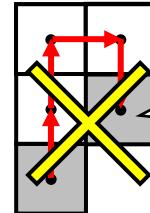
補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。

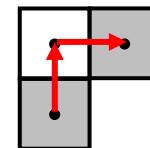
【証明の概略】 回転展開の2ステップ目で3つに場合分けをする



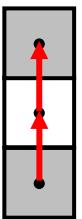
① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき



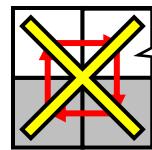
補題 5 の証明



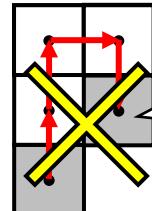
補題 5

回転展開で得られるパスを文字列で表すとき “RR” or “LL” が含まれるならば、冗長な部分を含む。

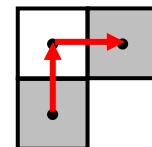
【証明の概略】 回転展開の2ステップ目で3つに場合分けをする



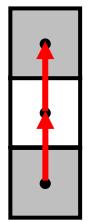
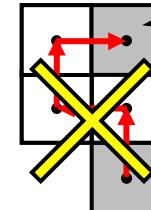
① C R のとき



② C C のとき



③ C L のとき



文字列 “RR” が表れたら探索中止 \leftrightarrow 求めたいパスのみを得る