



一般セッション 3 [9]

直方体の格子展開図における重なり

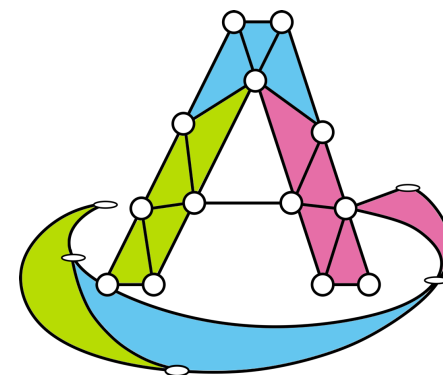
2022年度 冬のLAシンポジウム

© 塩田 拓海（九州工業大学）

鎌田 斗南（北陸先端科学技術大学院大学）

上原 隆平（北陸先端科学技術大学院大学）

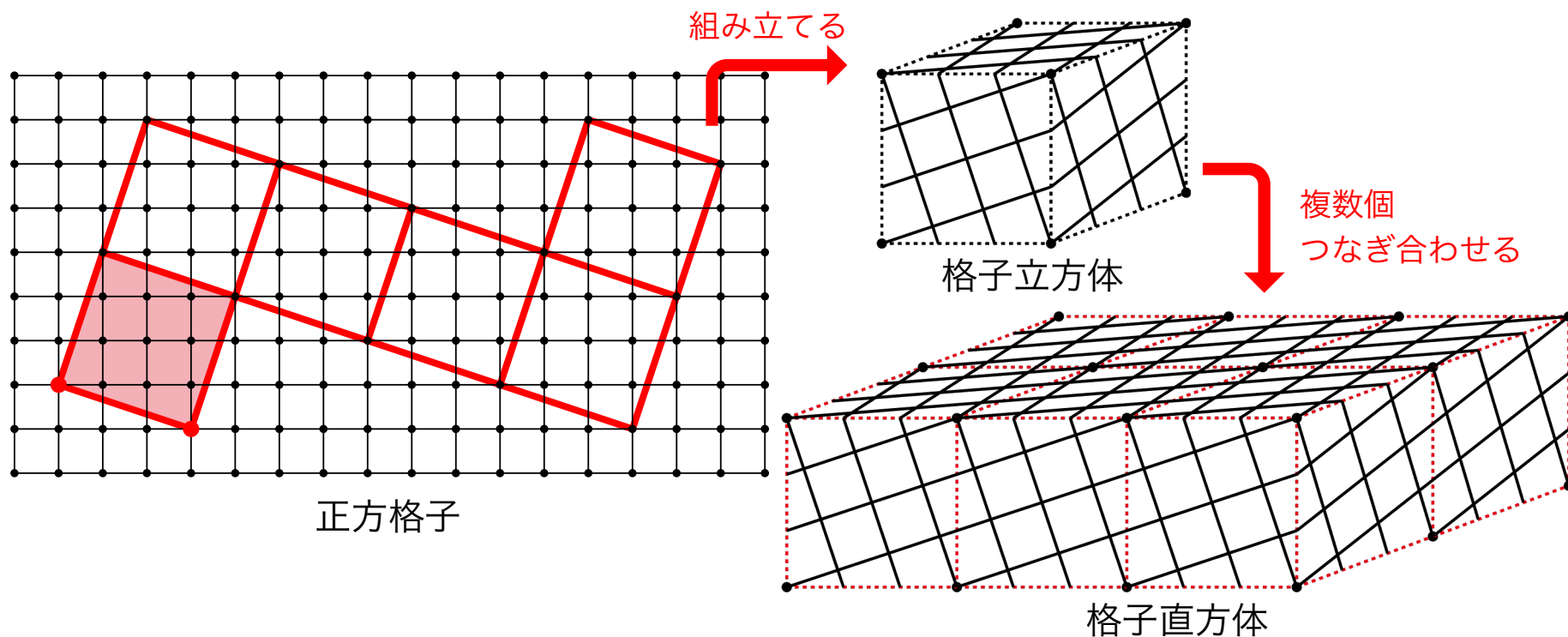
2023年 1月 31日 (土) 13:00～13:25



直方体における格子展開図とは？

定義 1 (格子立方体・格子直方体)

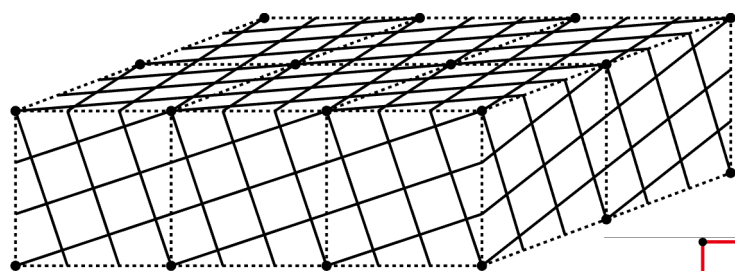
正方格子上に2点を選び、その2点を1辺とする正方形を作る。この正方形を1面にして組み立てた立方体を**格子立方体**という。格子立方体を複数個つなぎ合わせることでできる直方体を**格子直方体**という。(注：格子立方体 \subset 格子直方体)



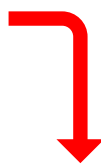
直方体における格子展開図とは？

定義 2（格子展開図）

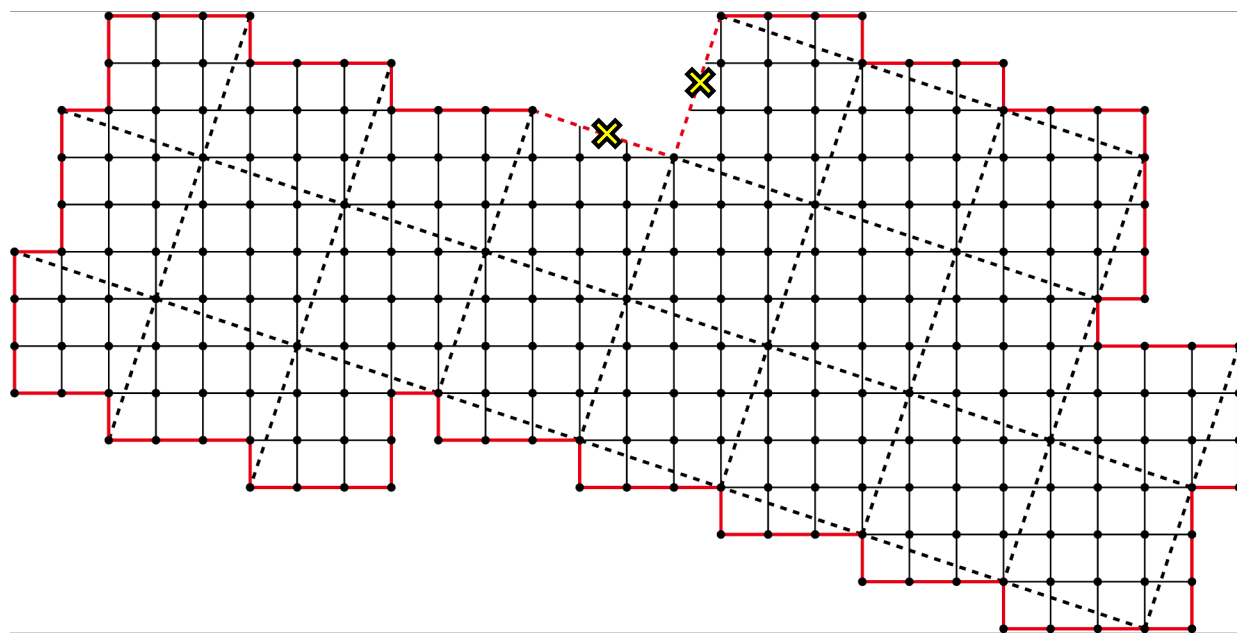
格子直方体の格子に切れ込みを入れて平坦に開いた多角形を**格子展開図**という。



格子直方体



格子に切れ込みを
入れて平坦に開く



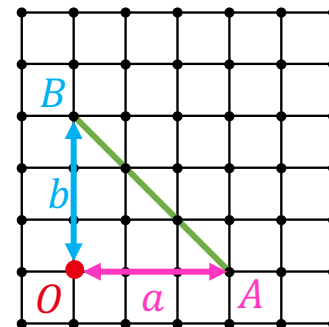
(注意)

点線 ----- は折り線
(点線は切らない)

格子立方体の1辺の長さの決め方

立方格子の1辺の長さを1とする

- ① 正方格子上に原点 $O(0,0)$ を決める
- ② 点 A を $(a,0)$ 点 B を $(0,b)$ とする ($a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}, a \geq b$)
- ③ 線分 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ を, 格子立方体の1辺の長さとする



格子立方体の一覧

a の値	1	1	2	2	2	3	...
b の値	0	1	0	1	2	0	...
線分 AB の長さ L	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3	...
$L \times L$ の正方形							...
$L \times L \times L$ の格子立方体							...

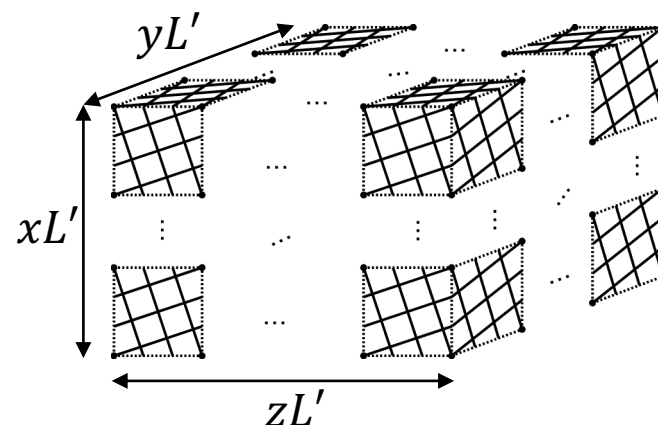
格子直方体の3辺の長さの決め方

格子立方体の1辺の長さを L' とする

$$L' = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}, a \geq b, \text{gcd}(a, b) = 1)$$

格子直方体 $D = xL' \times yL' \times zL'$ ($x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y \leq z$)

格子直方体の一覧



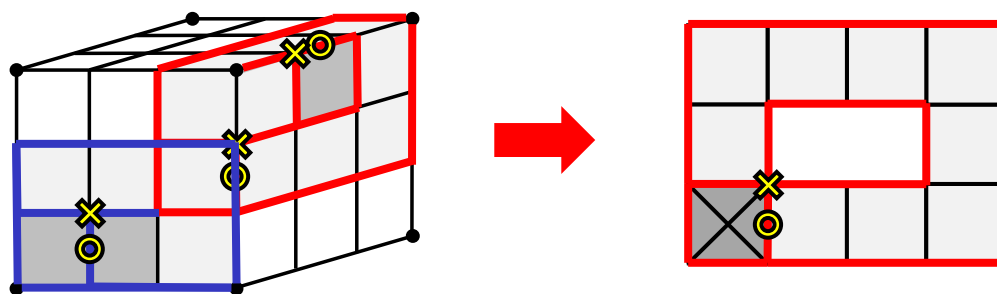
		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
(a, b)	(1, 0)										...
	(1, 1)										...
	(2, 1)										...
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

重なりを持つ格子展開図

定理 1 [上原, 2008]

$3 \times 3 \times 3$ の格子立方体には、面どうしが重なる格子展開図、辺および頂点が接触する格子展開図が存在する。

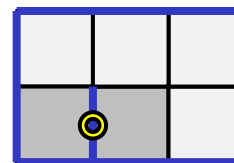
左の格子直方体の赤色の太線に沿って切り開くと…



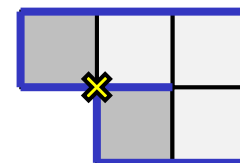
重なりを持つ格子展開図は3種類に分類される

- ① ある2つの面が一致する（面が重なる）
- ② ある2つの辺が接触する（辺接触）
- ③ ある2つの頂点が接触する（頂点接触）

【注意】 元の直方体において、辺・頂点が一致している場合は「接触」と言わない

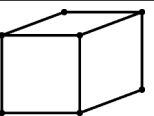
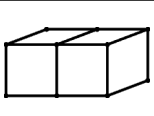
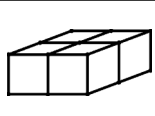
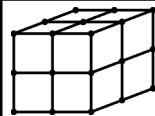
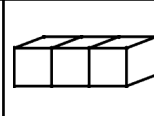
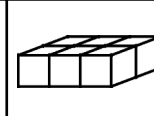
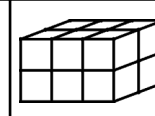
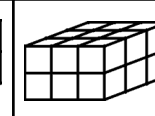
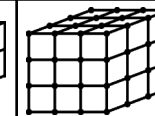
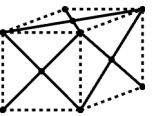

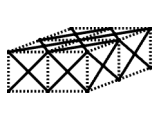
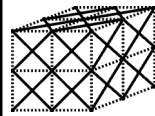
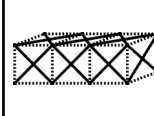
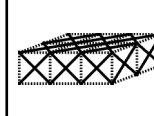
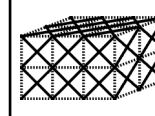
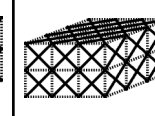
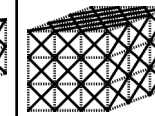
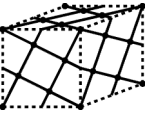
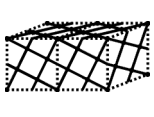



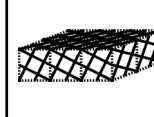

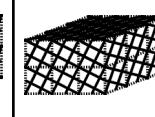
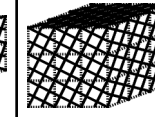


辺接触では無い

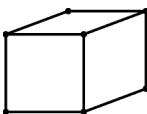
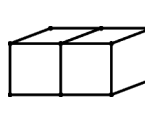
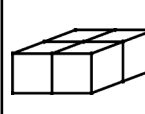
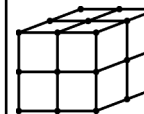
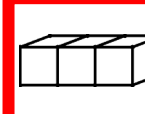
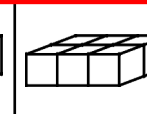
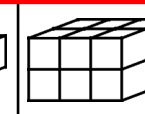
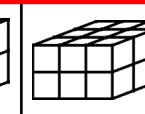
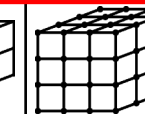
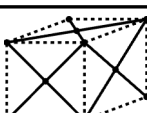

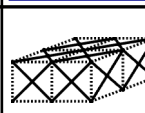


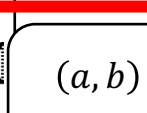
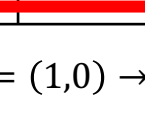
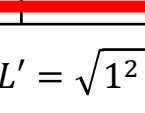
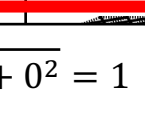




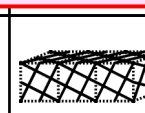
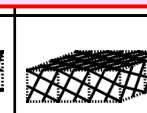
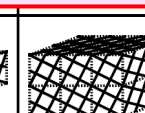
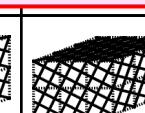



頂点接触では無い

格子直方体における重なるの先行研究と主結果

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
(a, b)	(1, 0)										...
	頂点接触	No (自明)	未解決	未解決	未解決	Yes $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$)で表せるものは[宇野, 2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触										
	面が重なる										
	(1, 1)										...
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										
	(2, 1)										...
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	頂点接触	未解決									
	辺接触										
	面が重なる										

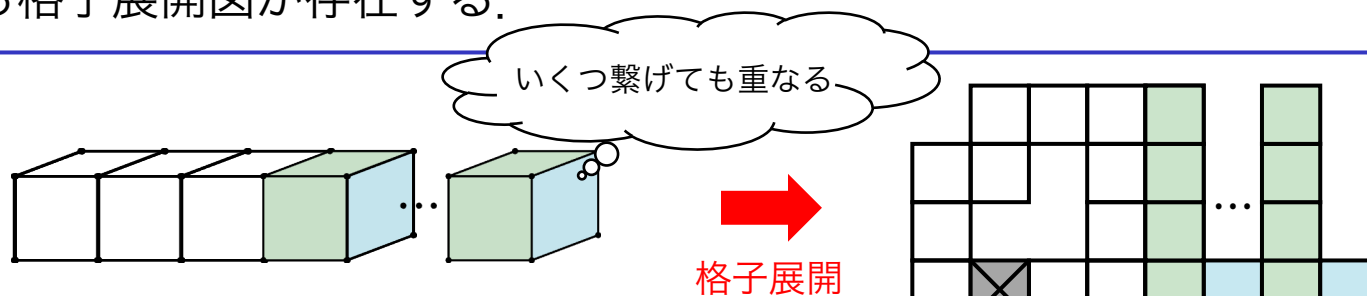
格子直方体における先行研究と主結果

		(x, y, z)									
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...
(a, b)	(1, 0)										...
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]					
	辺接触		No								
	面が重なる		No [R.Hearn,2018]	No	No [杉浦,2018]						
	(1, 1)										...
	頂点接触	No	Yes $(a, b) = (1, 0) \rightarrow L' = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ $x \times y \times z$ (z ≥ 3)で表せる格子直方体								
	辺接触										
	面が重なる										
	(2, 1)										...
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

格子直方体 $x \times y \times z$ ($z \geq 3$) における重なり

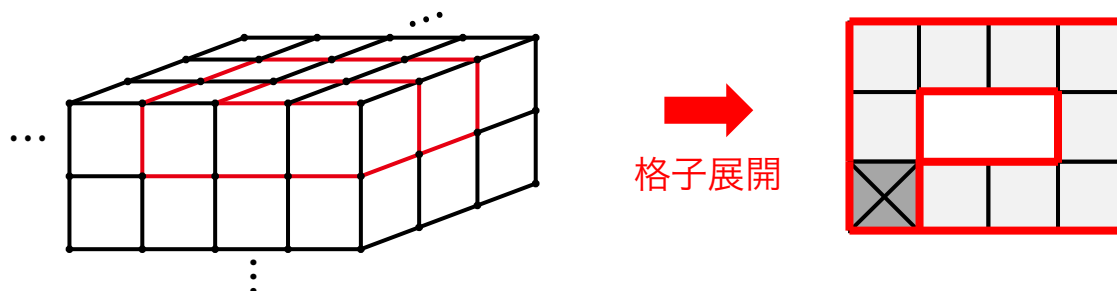
定理 2 [宇野, 2008]

$1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$) の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図、辺および頂点が接触する格子展開図が存在する。

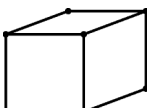
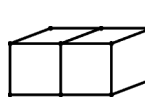
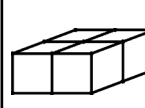
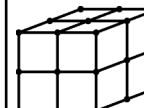
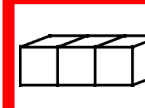
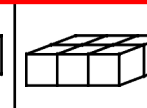
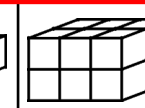
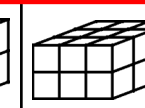

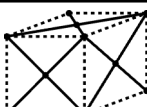











定理 3 [上原, 2008]

$x \times y \times z$ ($y \geq 2, z \geq 3$) の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図、辺および頂点が接触する格子展開図が存在する。



格子直方体における先行研究と主結果

		(x, y, z)											
		(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 2)	(2, 2, 2)	(1, 1, 3)	(1, 2, 3)	(2, 2, 3)	(2, 3, 3)	(3, 3, 3)	...		
(a, b)	(1, 0)										...		
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes 1×1×z (z≥3)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]							
	辺接触		No										
	面が重なる		No [R.Hearn,2018]	No	No [杉浦,2018]								
	(1, 1)						<div>(a, b) = (1,0) → L' = √1² + 0² = 1 x×y×z (z ≥ 3)で表せる格子直方体 Yes</div>					...	
	頂点接触	No											
	辺接触												
	面が重なる												
	(2, 1)				<div>(a, b) = (1,1) → L' = √1² + 1² = √2 x√2×y√2×z√2 (z ≥ 2)で表せる格子直方体</div>					...			
	頂点接触	Yes											
	辺接触												
	面が重なる												
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
	頂点接触	Yes											
	辺接触												
	面が重なる												

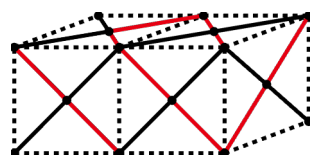
格子直方体 $x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}(z\geq 2)$ における重なり

補題 1

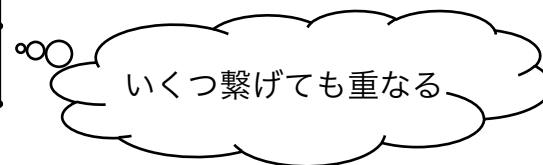
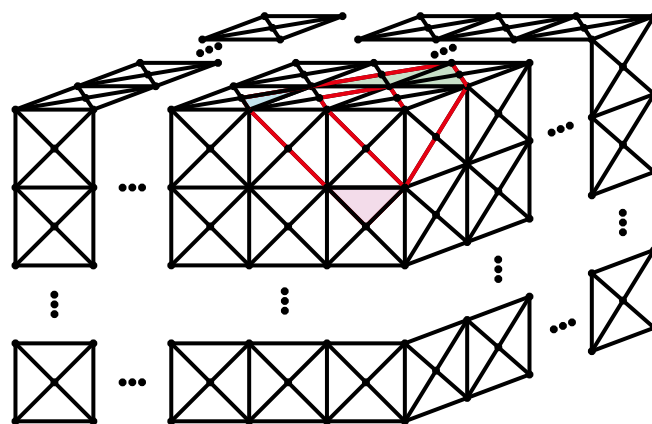
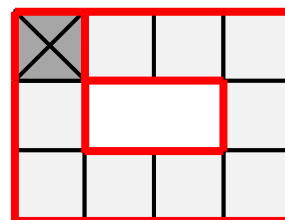
$x\sqrt{2}\times y\sqrt{2}\times z\sqrt{2}(z\geq 2)$ の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図、辺および頂点が接触する格子展開図が存在する。

【証明】 次に示す「 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$ の格子直方体」を考える

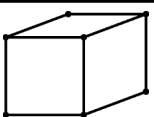
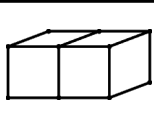
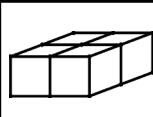
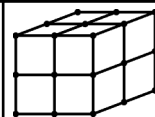
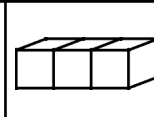
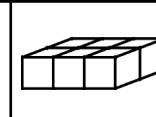
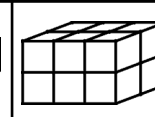
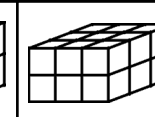
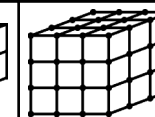
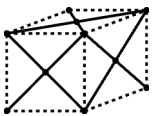


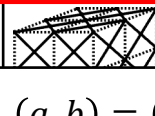
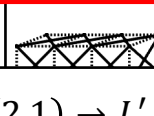
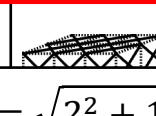
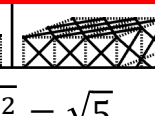
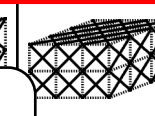
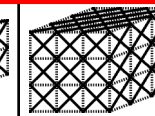
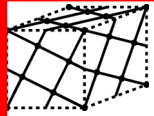
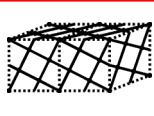

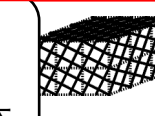
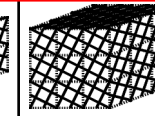
実演あり



格子展開



格子直方体における先行研究と主結果

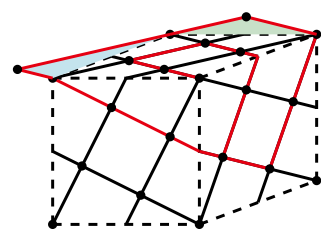
		(x, y, z)														
		$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(2, 2, 3)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 3, 3)$...					
(a, b)	$(1, 0)$										...					
	頂点接触	No (自明)	Yes	Yes		Yes $1 \times 1 \times z$ ($z \geq 3$)で表せるものは[宇野,2008] それ以外は[上原, 2008]										
	辺接触		No													
	面が重なる		No [R.Hearn,2018]	No	No [杉浦,2018]											
	$(1, 1)$										...					
	頂点接触	No	$(a, b) = (2, 1) \rightarrow L' = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$)で表せる格子直方体													
	辺接触															
	面が重なる															
	$(2, 1)$				$(a, b) = (1, 1) \rightarrow L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $x\sqrt{2} \times y\sqrt{2} \times z\sqrt{2}$ ($z \geq 2$)で表せる格子直方体								...			
	頂点接触	Yes														
	辺接触															
	面が重なる															
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
	頂点接触	Yes														
	辺接触															
	面が重なる															

格子直方体 $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) における重なり

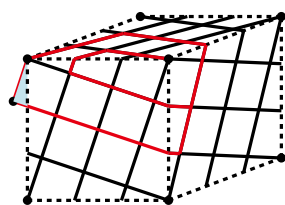
補題 2

$xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図および、辺・頂点が接触する格子展開図が存在する。

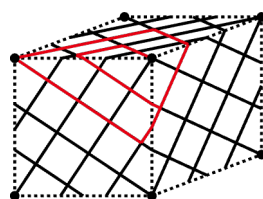
【観察】 $L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) の格子立方体を見ていくと、



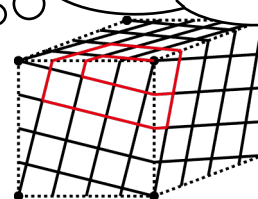
$$L' = \sqrt{5}$$
$$(a, b) = (2, 1)$$



$$L' = \sqrt{10}$$
$$(a, b) = (3, 1)$$



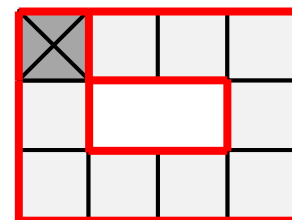
$$L' = \sqrt{13}$$
$$(a, b) = (3, 2)$$



$$L' = \sqrt{17}$$
$$(a, b) = (4, 1)$$

格子立方体の手前半分の
3面で完結している

→
格子展開



補題 3

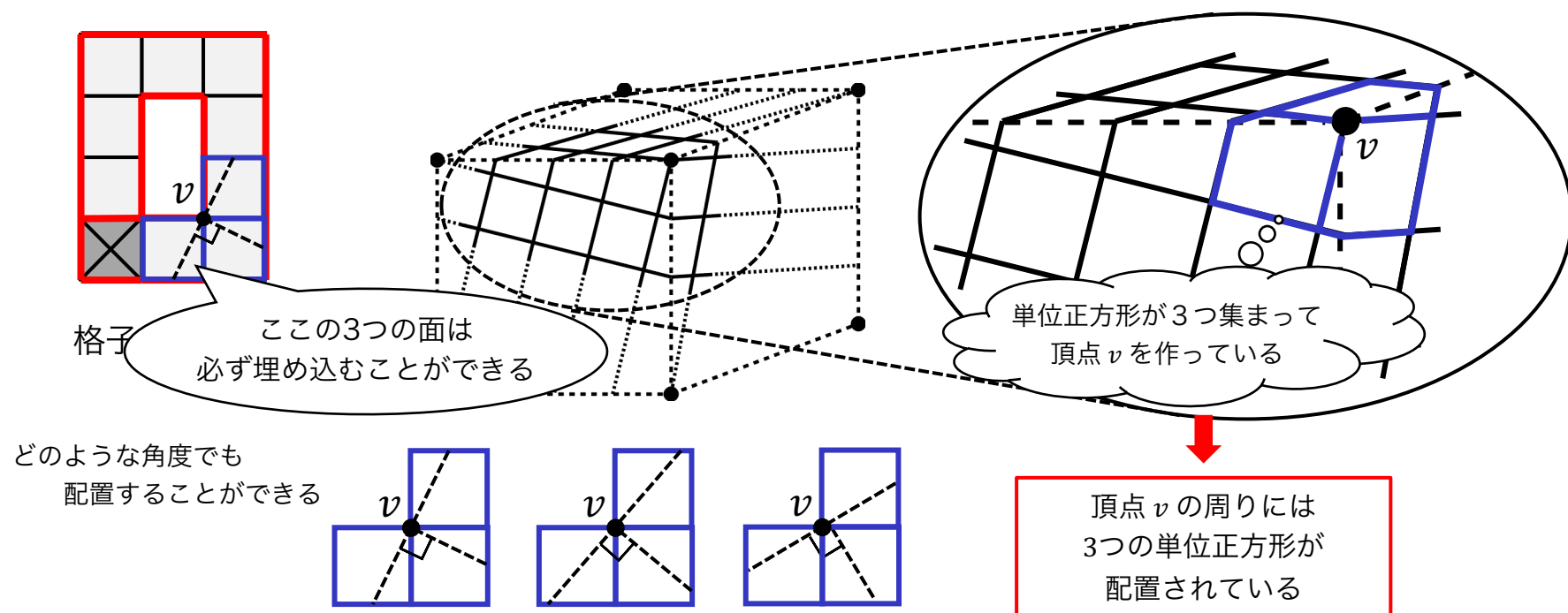
$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前半分には、面どうしが重なる格子展開図および、辺・頂点が接触する格子展開図が存在する。

格子直方体 $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) における重なり

補題 3

$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の手前半分には、面どうしが重なる格子展開図および、辺・頂点が接触する格子展開図が存在する。

【証明】 次に示す面どうしが重なる格子展開図 Q を考える

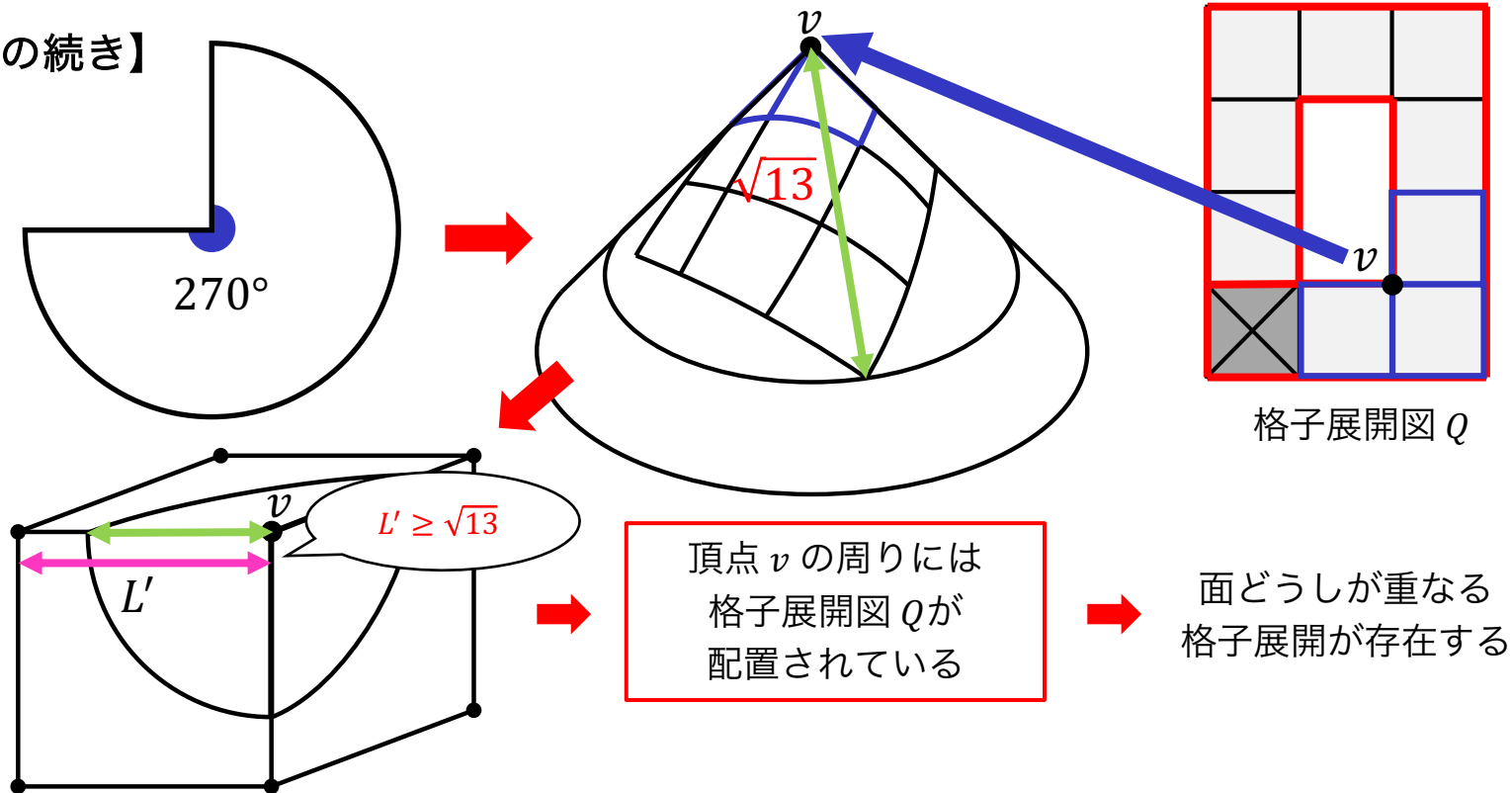


格子直方体 $xL' \times yL' \times zL'$ ($L' \geq \sqrt{5}$) における重なり

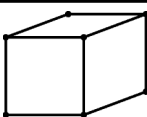
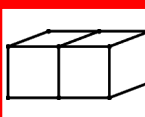
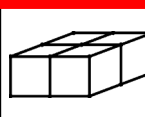

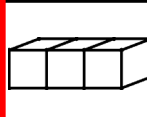
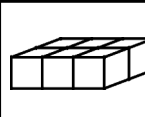
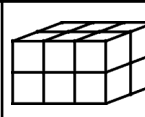
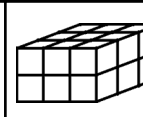
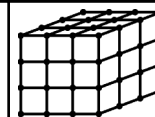
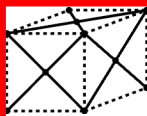



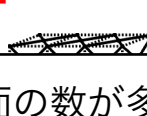




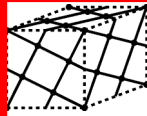
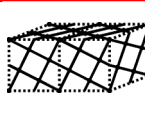
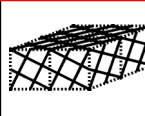

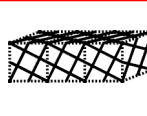
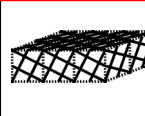



補題 3

$L' \times L' \times L'$ ($L' \geq \sqrt{13}$) の格子立方体の半分には、面どうしが重なる格子展開図および、辺・頂点が接触する格子展開図が存在する。

【証明の続き】



格子直方体における先行研究と主結果

		(x, y, z)									
		$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(2, 2, 3)$	$(2, 3, 3)$	$(3, 3, 3)$...
(a, b)	$(1, 0)$										...
	頂点接触	No	Yes	格子展開図を列挙すればよいのでは？ [原, 2008]							
	辺接触	No (自明)	No								
	面が重なる	No [R.Hearn, 2018]	No								
	$(1, 1)$										...
	頂点接触	No	(a, xL' × yL') ➤ 面の数が増えると格子展開図の個数が増える！ ➤ 格子展開図の重なり方の種類の区別が付けにくい								
	辺接触	No									
	面が重なる	No									
	$(2, 1)$										...
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	頂点接触	Yes									
	辺接触										
	面が重なる										

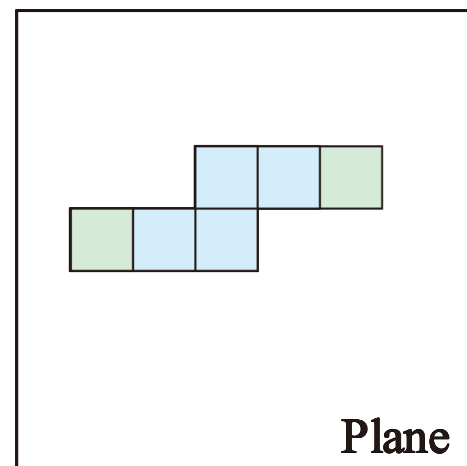
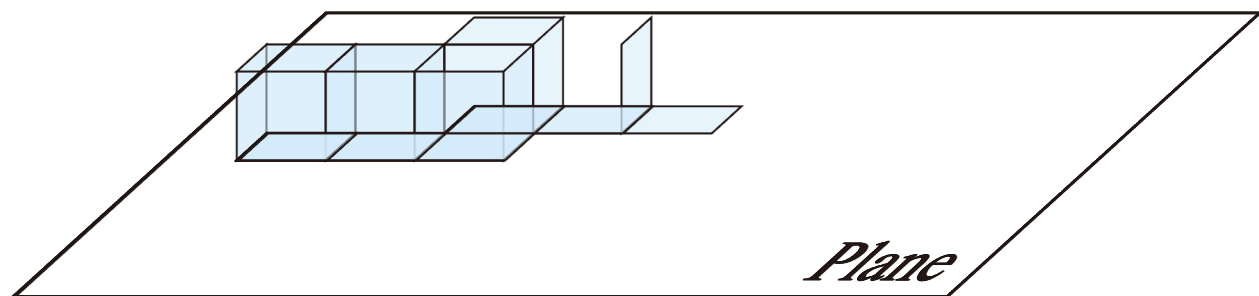
(a, b)
 $xL' \times yL'$

- 面の数が多くなると格子展開図の個数が増える！
- 格子展開図の重なり方の種類の区別が付けにくい

重なりを持つ展開図の探索

回転展開 [T. Shiota and T. Saitoh, 2023]

多面体をコロコロと転がすことで任意の二面間のパスを列挙し，列挙したパスの両端点に位置する面どうしの重なりを確認する手法



なぜパスの両端点の面の重なりだけを判定すれば良いのか…？

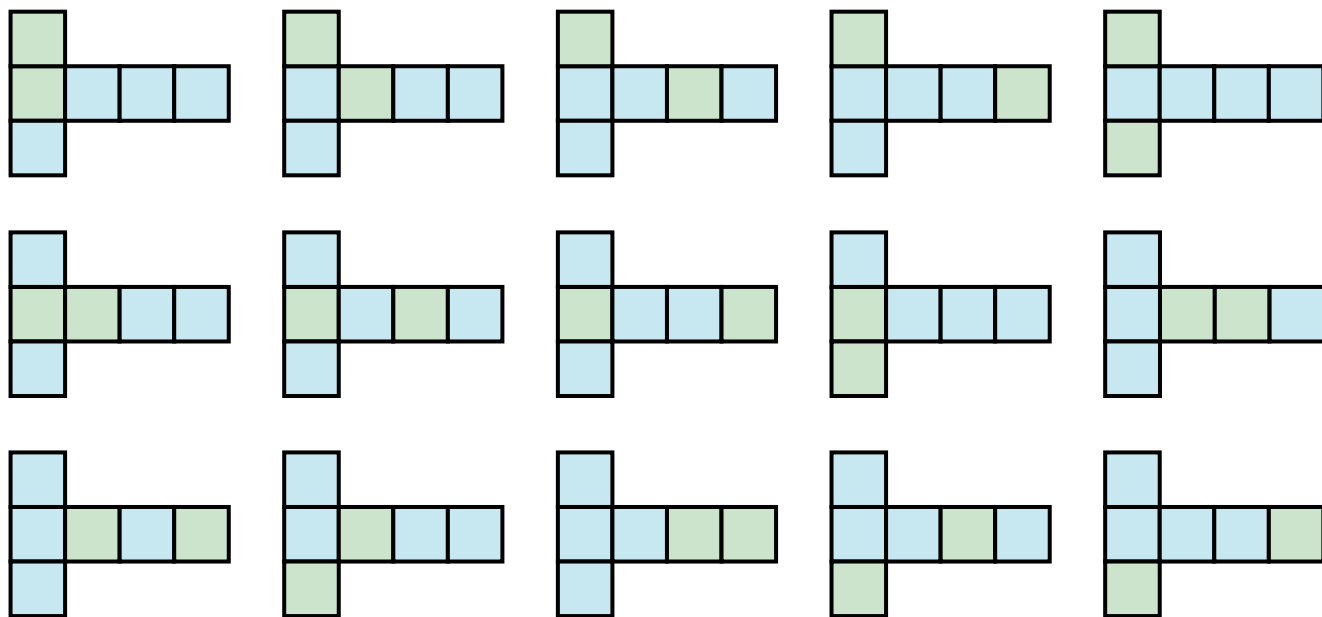
補題 4

辺展開図のある2面を結ぶパスは，回転展開で列挙したいずれかのパスに該当する。

なぜ回転展開が早いのか？

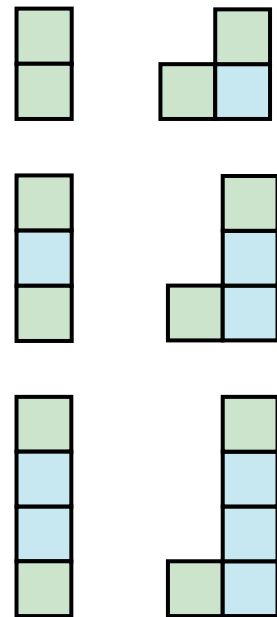
(例) 立方体の辺展開図の1つに対する重なりを確認すべき面の組み

全ての面の組みに対して重なりを確認する方法 [T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



${}_6C_2 = 15$ 通り

回転展開



6通り

ポイント

辺展開図を列挙する必要がなく，パスの両端点の面の重なりだけを判定すればよい

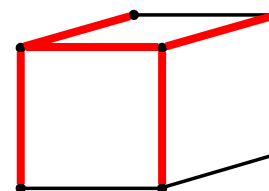
回転展開の格子直方体への適用

今までの回転展開は…

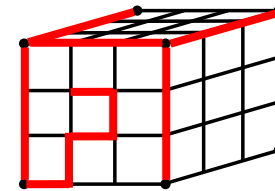
- ▶ 多面体の辺に沿って切れ込みを入れることで得られる**辺展開図**を扱っていた
 - ➡ 各頂点に対して、必ずいずれかの方向かに切れ込みを入れないといけない
∴ 平坦に開くことができないから

一方で格子立方体・格子直方体は…

- 全ての格子上的点に対して、必ずしも切れ込みを入れなくてもよい



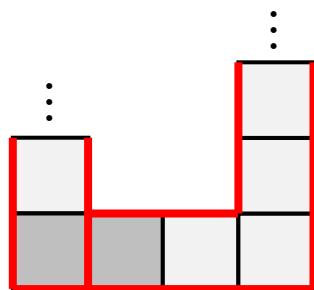
立方体



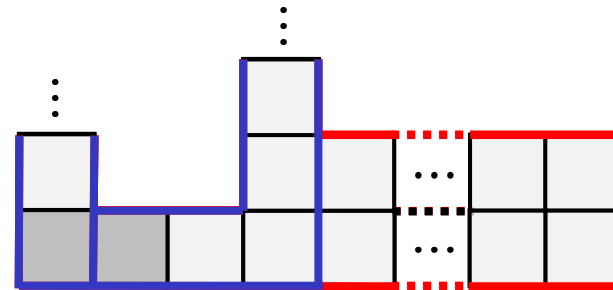
格子立方体

そのため…

- 重なりを確認する上では冗長な部分が、パスの中に含まれてしまうことがある



求めたいパス



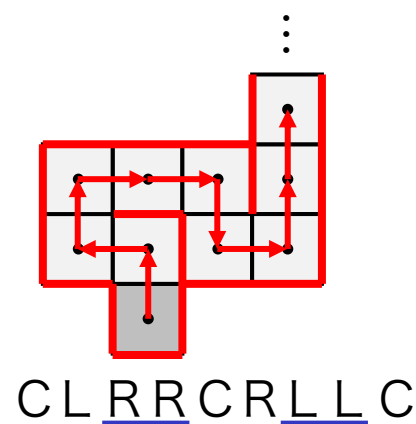
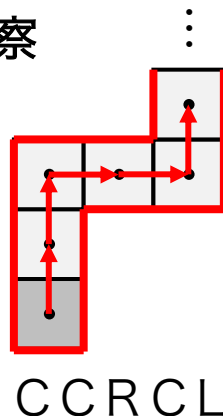
冗長な部分を含むパス

回転展開の格子立方体への適用

パスに冗長な部分が含まれる格子展開図の観察

1 ステップ前で転がした方向から見て…

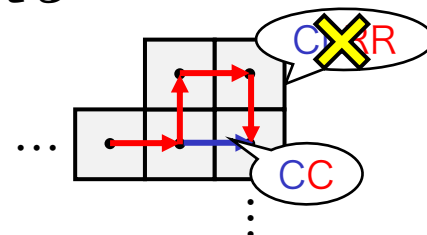
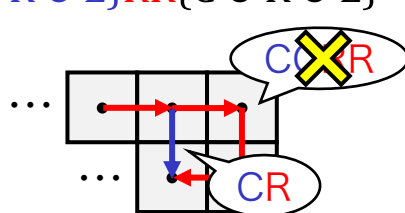
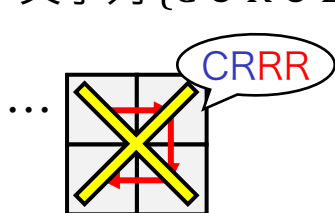
- ✓ 真っ直ぐに転がす → C
- ✓ 右向きに転がす → R
- ✓ 左向きに転がす → L



補題 5

回転展開において，文字列 "RR" or "LL" が現れるパスには，冗長な部分がある。

【証明の概略】 文字列 $\{C \cup R \cup L\}^* C \{C \cup R \cup L\} RR \{C \cup R \cup L\}^*$ を考える



$\{C \cup R \cup L\}^* CRRR$ のとき

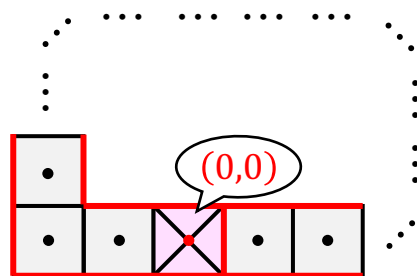
$\{C \cup R \cup L\}^* CCRR$ のとき

$\{C \cup R \cup L\}^* CLRR$ のとき

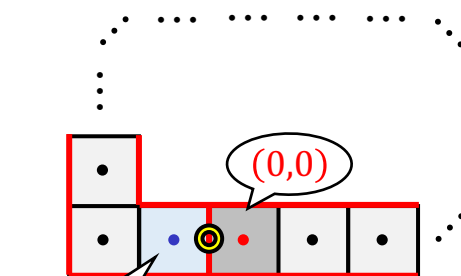
文字列 "RR" or "LL" が表れたら枝刈り ➡ 冗長な部分を含まないパスのみが得られる

回転展開の格子立方体への適用

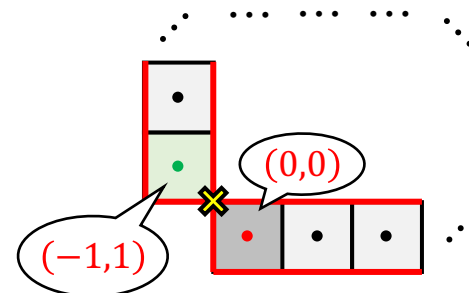
格子展開図が重なるときの、パスの両端の面の位置関係



① 面が重なる

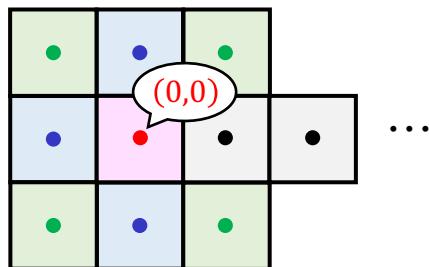


② 辺接触



③ 頂点接触

格子展開図の（種類も含めた）重なる判定



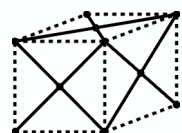
パスの、もう一方の端点の面の中心座標が...

- $(0,0)$ のとき → 面が重なる
- $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ のとき → 辺接触
- $(1,1), (1,-1), (-1,-1), (-1,1)$ のとき → 頂点接触

格子直方体 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$, $x \times y \times z$ ($z = 2$) における重なり

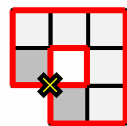
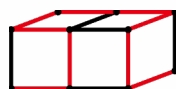
補題 6

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子直方体には、重なりを持つ格子展開図が存在しない。
2. $1 \times 1 \times 2$ の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図、辺が接触する格子展開図が存在しないが、頂点が接触する格子展開図が存在する。
3. $1 \times 2 \times 2$ および $2 \times 2 \times 2$ の格子直方体には、面どうしが重なる格子展開図が存在しないが、辺および頂点が接触する格子展開図が存在する。



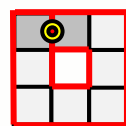
存在しない

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の
格子直方体

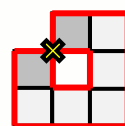


頂点接触

$1 \times 1 \times 2$ の
格子直方体

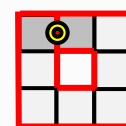
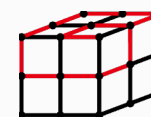
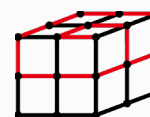


辺接触

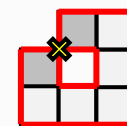


頂点接触

$1 \times 2 \times 2$ の格子直方体



辺接触



頂点接触

$2 \times 2 \times 2$ の格子直方体

まとめ

定理 4

格子立方体の1辺の長さを L' を $L' = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}, a \geq b, \gcd(a, b) = 1$)

格子直方体 D を $xL' \times yL' \times zL'$ ($x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y \leq z$) で表すとき以下のことが成り立つ.

1. $1 \times 1 \times 1$ および $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の格子直方体には, 重なりを持つ格子展開図が存在しない.
2. $1 \times 1 \times 2$ の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図, 辺が接触する格子展開図が存在しないが, 頂点が接触する格子展開図が存在する.
3. $1 \times 2 \times 2$ および $2 \times 2 \times 2$ の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図が存在しないが, 辺および頂点が接触する格子展開図が存在する.
4. 上記以外の格子直方体には, 面どうしが重なる格子展開図, 辺および頂点が接触する格子展開図が必ず存在する.

今後の課題

立方格子から作ることができる六面体（直方体）を対象

➡ 三角格子から作ることができる四面体や八面体へと拡張していく.

