模擬授業

裁合せパズルとアルゴリズム

塩田　拓海

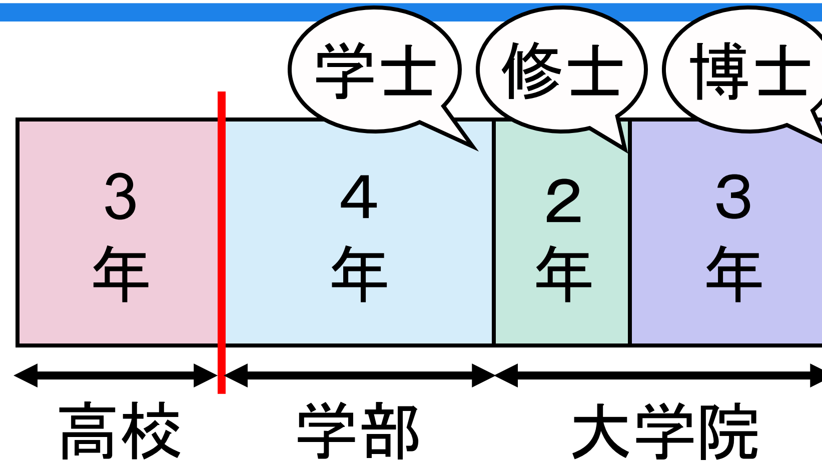
兵庫県立大学

社会情報科学部 / 大学院情報科学研究科

takumi_shiota@gsis.u-hyogo.ac.jp

自己紹介

塩田 拓海（Takumi SHIOTA）



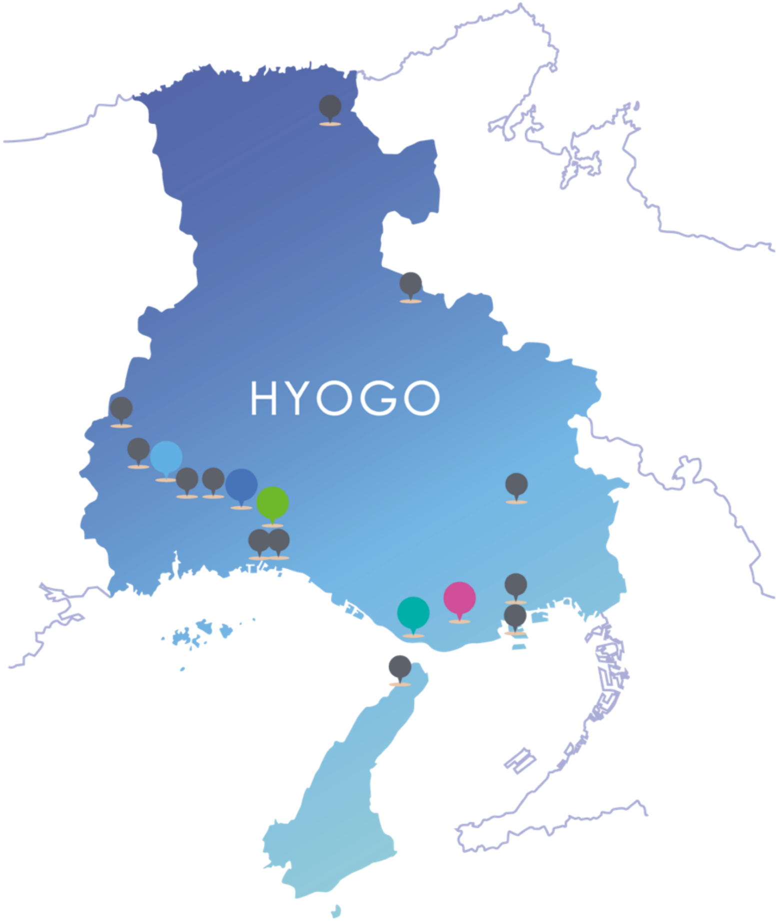
- 出身地
  - 福岡県 福岡市
- 経歴
  - 福岡県立 修猷館高等学校（2013.4−2016.3）
  - 九州工業大学 情報工学部（2017.4−2021.3）
  - 〃 大学院情報工学府 博士前期課程（2021.4−2023.3）
  - 〃 大学院情報工学府 博士後期課程（2023.4−2025.3）
  - 日本学術振興会 特別研究員 DC（2024.4−2025.3）
  - マーストリヒト大学（オランダ）客員研究員（2025.3−2025.6）
  - 兵庫県立大学 社会情報科学部 助教（2025.4−現在）

兵庫県立大学について

県内に9つのキャンパス

- ◆ 神戸商科キャンパス
- ◆ 姫路工学キャンパス
- ◆ 播磨理学キャンパス
- ◆ 姫路環境人間キャンパス
- ◆ 明石看護キャンパス
- ◆ 神戸情報科学キャンパス
- ◆ 淡路緑景観キャンパス
- ◆ 豊岡ジオ・コウノトリキャンパス
- ◆ 神戸防災キャンパス

＋ 5つの附置研究所



社会情報科学部について

社会情報科学部 /
大学院情報科学研究科

- 神戸商科キャンパス(学部・大学院)
- 神戸情報科学キャンパス(大学院)

社会情報科学部について

教員名	研究分野
稲垣 紫緒 教授	非平衡散逸系の物理学： 粉粒体・交通流・振動子系
円谷 友英 教授	数理モデルを用いたグループ意思決定支援
大野 暢亮 教授	数値データの視覚化
川嶋 宏彰 教授	機械学習、行動分析、対話・時系列モデリング
木村 真 教授	財政・社会保障改革の データ分析・シミュレーション
笹嶋 宗彦 教授	知識工学とその産業応用
竹村 匡正 教授	医学データからの知識抽出
玉置 卓 教授	効率の良いアルゴリズムの設計・解析とその限界
中村 知道 教授	非線形データ解析
西出 哲人 教授	情報システム構築時の組織コーディネーション
東川 雄哉 教授	実社会における問題解決に向けた アルゴリズムの理論基盤構築
土方 嘉徳 教授	ソーシャルメディアにおける行動心理モデリング
藤江 哲也 教授	数理計画法：整数計画法と組合せ最適化

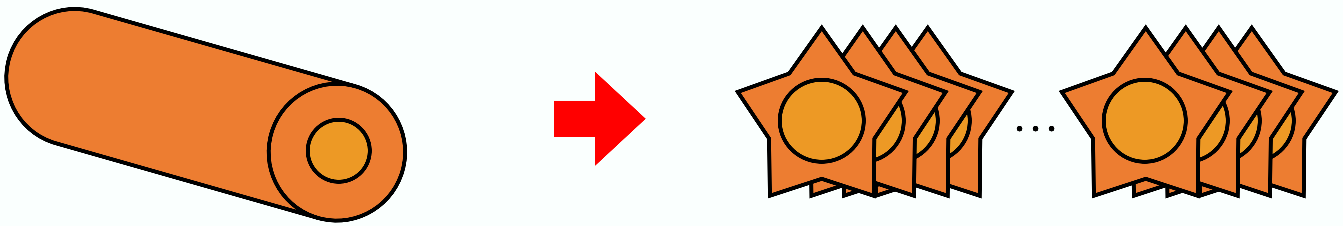
教員名	研究分野
宮崎 修一 教授	組合せ問題に対するアルゴリズムの 設計と解析
大島 裕明 准教授	情報検索技術を基にした情報デザイン
川向 肇 准教授	空間的現象の数理的解析・表現技術
照山 順一 准教授	アルゴリズム理論（充足可能性問題、 ネットワークアルゴリズム、数理パズル）
古隅 弘樹 准教授	官庁統計分析、データベース構築
山本 岳洋 准教授	大量のデータから求める情報を見つける 情報検索技術
湯本 高行 准教授	自然言語処理、データマイニング、 情報検索
入江 穂乃香 助教	ソフトコンピューティング、知識獲得、 クラスタリング
塩田 拓海 助教	計算折り紙および離散構造に対する アルゴリズム設計
三上 渓太 助教	シュレディンガー作用素、超局所解析
柳瀬 友朗 助教	気象学、気候科学、大気物理学

出典：兵庫県立大学入試情報サイト　教員一覧 社会情報科学部（令和7年4月1日現在）
https://www.u-hyogo.ac.jp/hyogoon/about/teacher/

アルゴリズムとは？（情報Ⅰの内容）

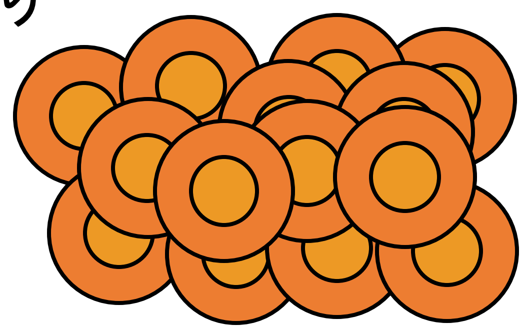
例題1

包丁で星型の人参を30個作る時、何回切る必要がありますか？

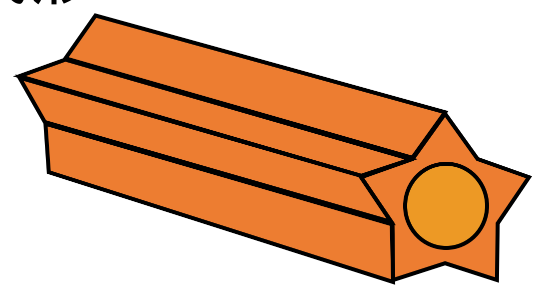


1ステップ目として考えられる切り方は…？

① 輪切り

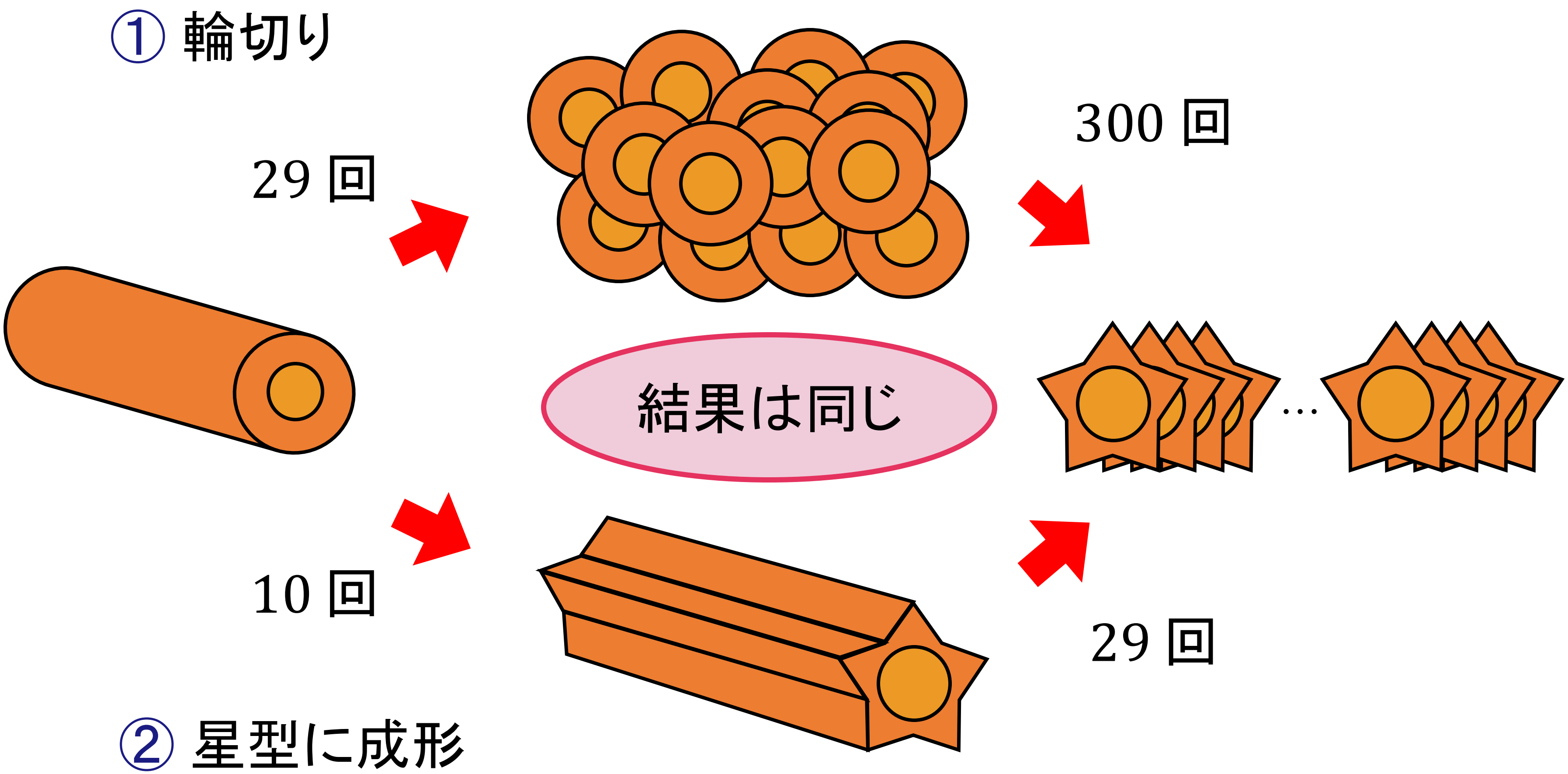


② 星型に成形



出典：アルゴリズムってなんでしょか | http://research.nii.ac.jp/~uno/algo_3.htm

アルゴリズムとは？（情報Ⅰの内容）

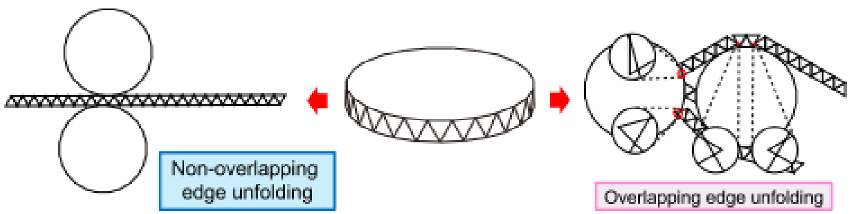


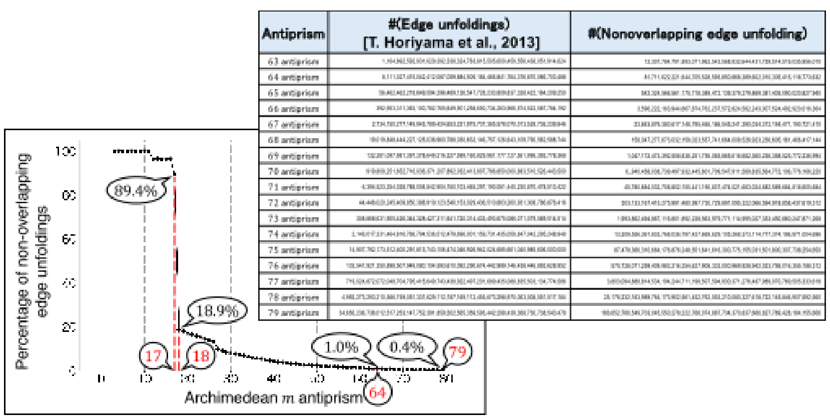
アルゴリズムとは「問題を解決するための方法や手順」のこと

主な研究内容

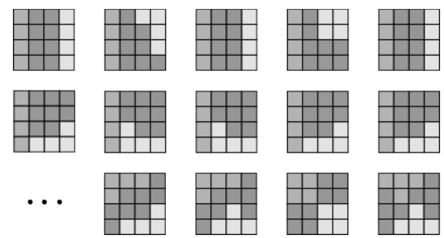
アルゴリズム × 幾何

重なりを持つ展開図 [SEG+25]



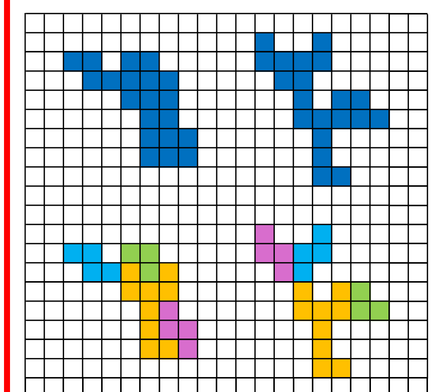


変形数独 [HKK+23]



TACTA™ [Link]

裁合せパズル



展開図に関する研究

パズルに関する研究

本日の授業で扱う教科書

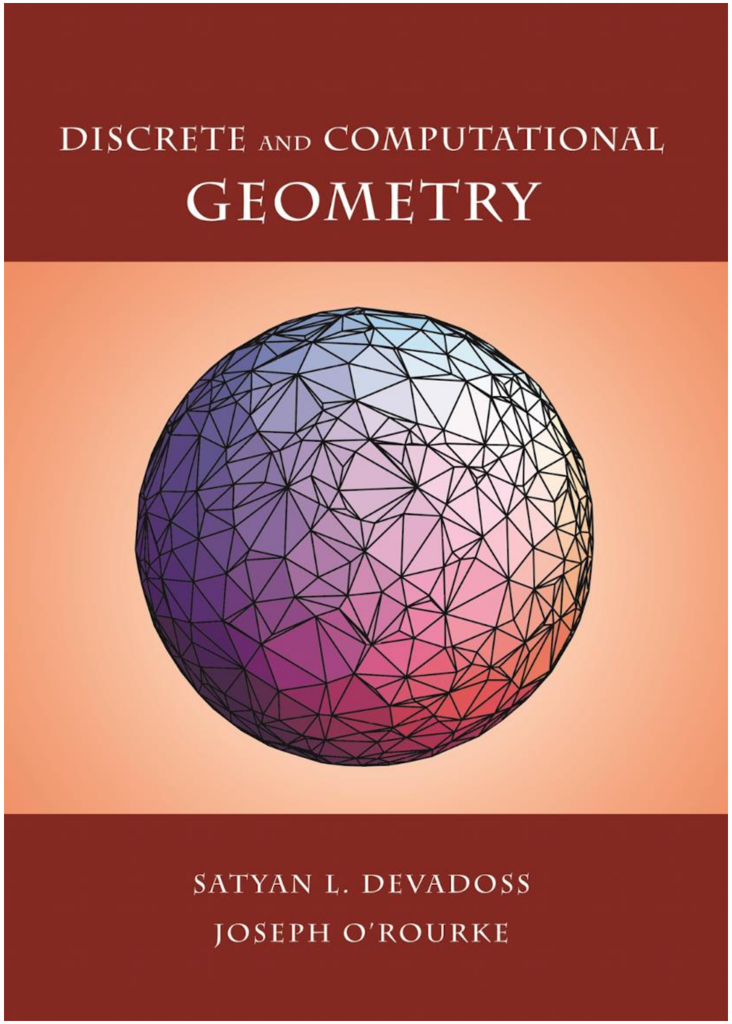
タイトル: 離散および計算幾何学

著者:

サティアン・L・デヴァドス 先生

ジョセフ・オルーク 先生

目次:



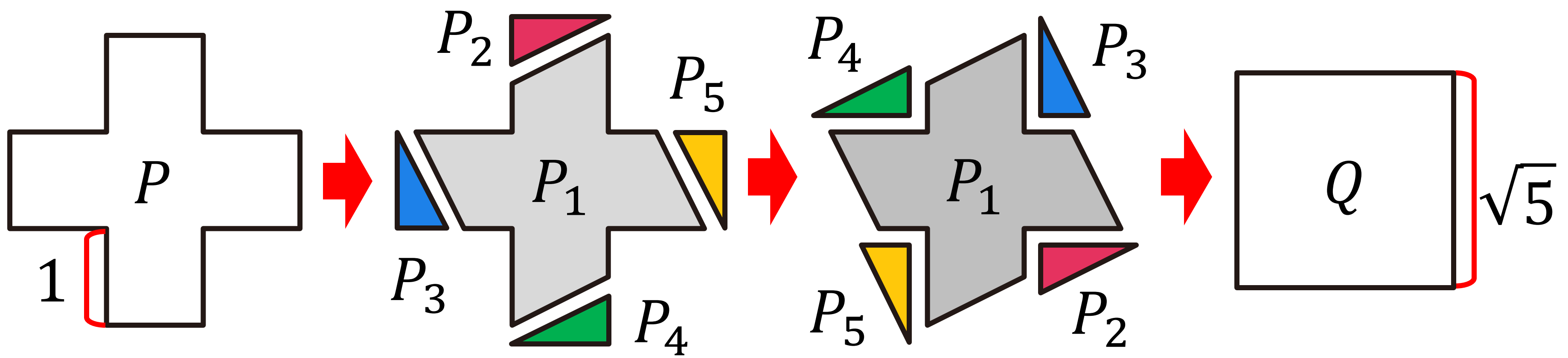
裁合せパズル(合同)とは？ やってみよう

定義2 ある言葉や考え方が“何を意味するか”を決めること

多角形 P と Q が **裁合せ合同** であるとは、P を切り分け、
そのピースを平行移動と回転だけで Q が作れる場合をいう。

例題3

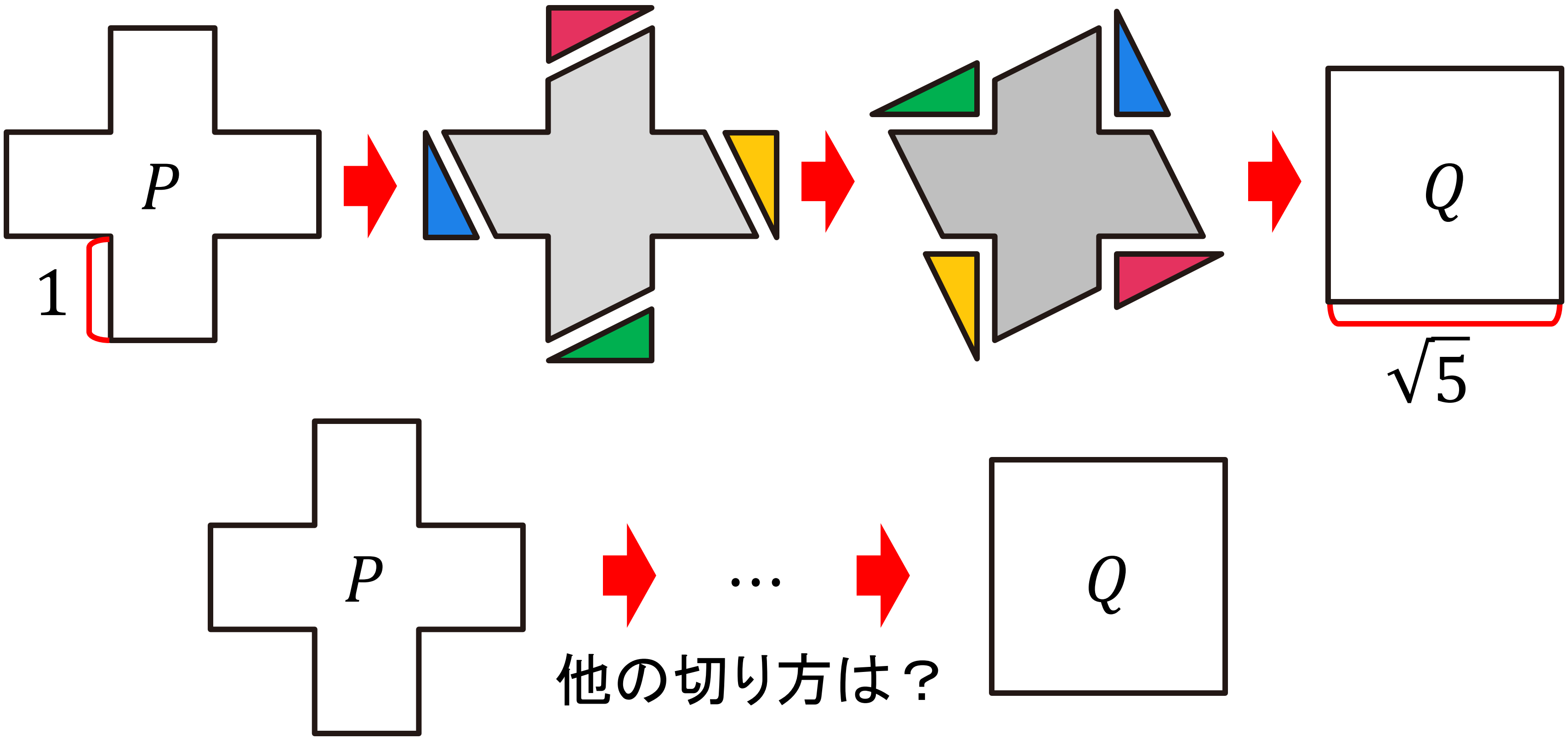
一辺の長さが 1 の正方形を 5 個つなぎ合わせてできる
ギリシャ十字を切り分けて同じ面積を持つ正方形を作りましょう。



裁合せパズル(合同)とは？ やってみよう

問題4

違う方法でギリシャ十字を切り分けて、正方形を作りましょう。

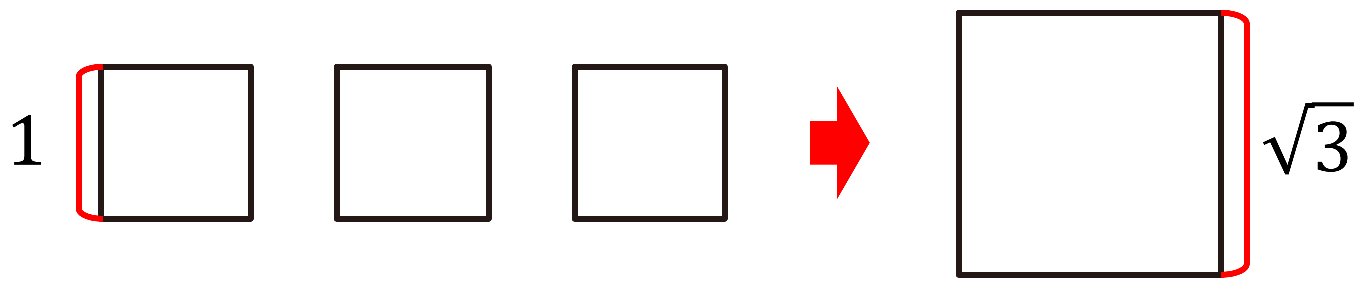


裁合せ合同の起源

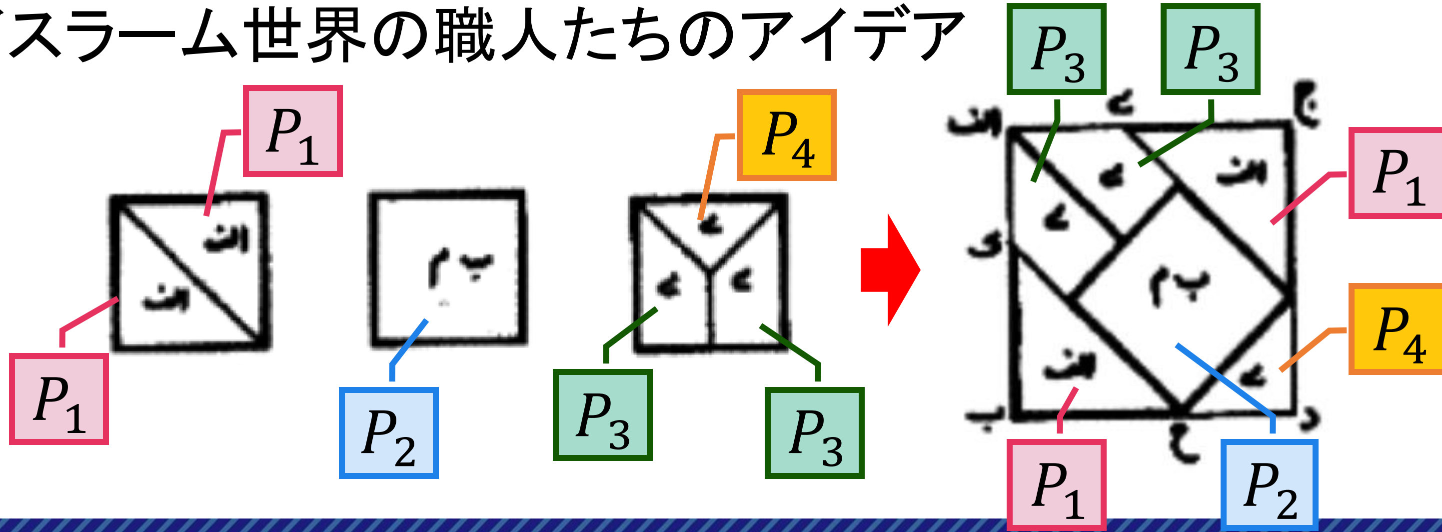
やってみよう

例題5 [A. Özdural, 2000, R. Sarhangi and S. Jablan, 2006]

3つの面積1の正方形を切り分けて、1つの正方形を作りましょう。



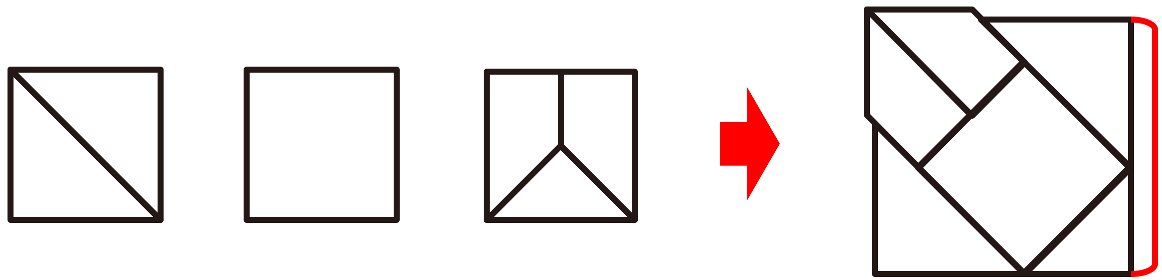
中世イスラーム世界の職人たちのアイデア



裁合せ合同の起源

やってみよう

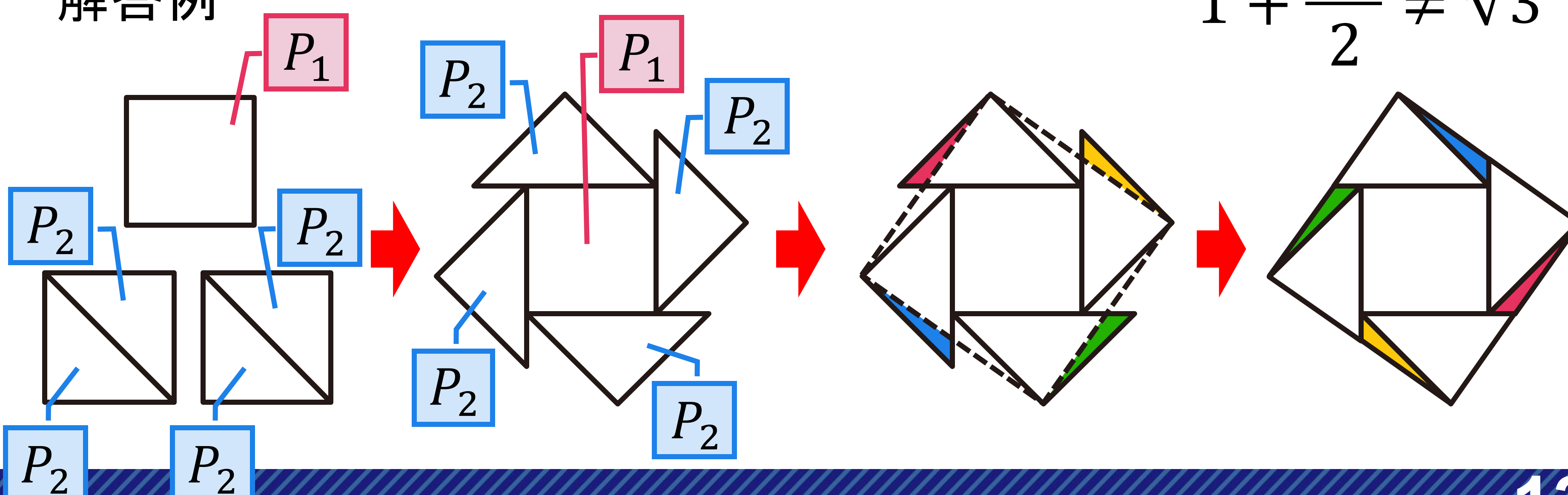
実際に作ってみると…



$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

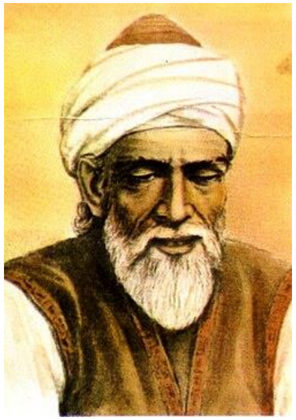
$$1+\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\sqrt{3}$$

解答例



裁合せ合同の起源

アブル・ウワファ（940 − 998）



- ブワイフ朝時代のペルシャ（イラク）の天文学者
- 星の角度（偏角）を精密に測定するために、三角関数の分野の研究をした
- 加法定理（数学Ⅱ）を “明確に式として提示” をした最初期の数学者 [R. Sarhangi and S. Jablan, 2006]

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

Thus TN $= \sin(\widehat{AB}) \cdot \cos(\widehat{BC})$. Finally, in the case of Fig. 5.9,

$$\begin{aligned}\sin(\widehat{AB} + \widehat{BC}) &= \sin(\widehat{AC}) = TH = TN + NH \\ &= \sin(\widehat{AB}) \cdot \cos(\widehat{AC}) + \sin(\widehat{BC}) \cdot \cos(\widehat{AB}).\end{aligned}$$

出典：Wikipedia | Abu al-Wafa' al-Buzjani | https://en.wikipedia.org/wiki/Abu_al-Wafa%27_al-Buzjani

裁合せ合同における重要な定理

多角形 P と Q は 裁合せ合同である	→（自明 👍） ←（本当 🤔）	多角形 P と Q は 同じ面積である

直感的には…

✓ 面積が同じなら、細かく切り刻めば、裁合せ合同になりそう？

↳ 曖昧な表現 ➡ アルゴリズムを示す

定理6 ⇦ 正しいことが “証明によって確かめられた” 主張

任意の同じ面積の二つの多角形は、裁ち合わせ合同である。

全て

以降、上記の定理（ボヤイ・ゲルヴィンの定理）の証明を示す

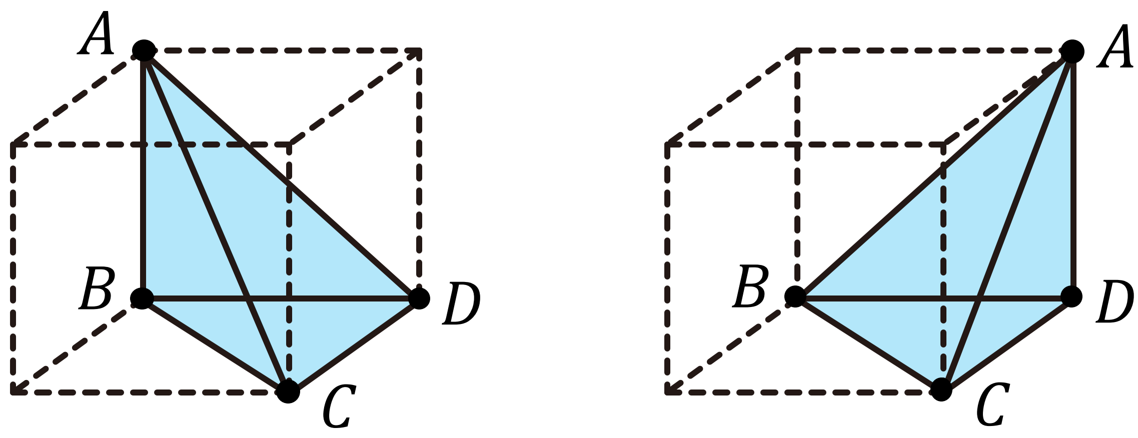
【余談】多面体における裁合せ合同

定理7

同じ体積をもつ任意の二つの多面体が、裁ち合わせ合同になるとは限らない。

これを、「ヒルベルトの第3問題の否定的解決」という

【例】以下の同じ体積を持つ二つの多面体は、
どのように切り分けても、裁合せ合同となることはない

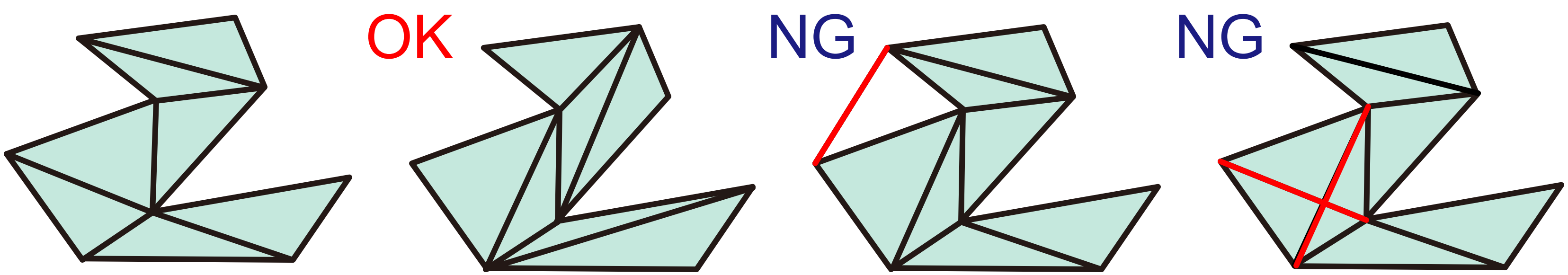


（証明略）

対角線と三角形分割

定義8

多角形 P の頂点どうしを結ぶ線分で、端点以外がすべて図形の内側にあるものを **対角線** いう。
多角形 P に対して、交差しない対角線をこれ以上引けないところまで引いて、P を三角形に分けることを **三角形分割** という。



定理9

任意の多角形は、三角形分割ができる。（証明略）

三角形と長方形の裁合せ

やってみよう

補題10 ⇐ あとで使うために“先に証明しておく”小さな主張

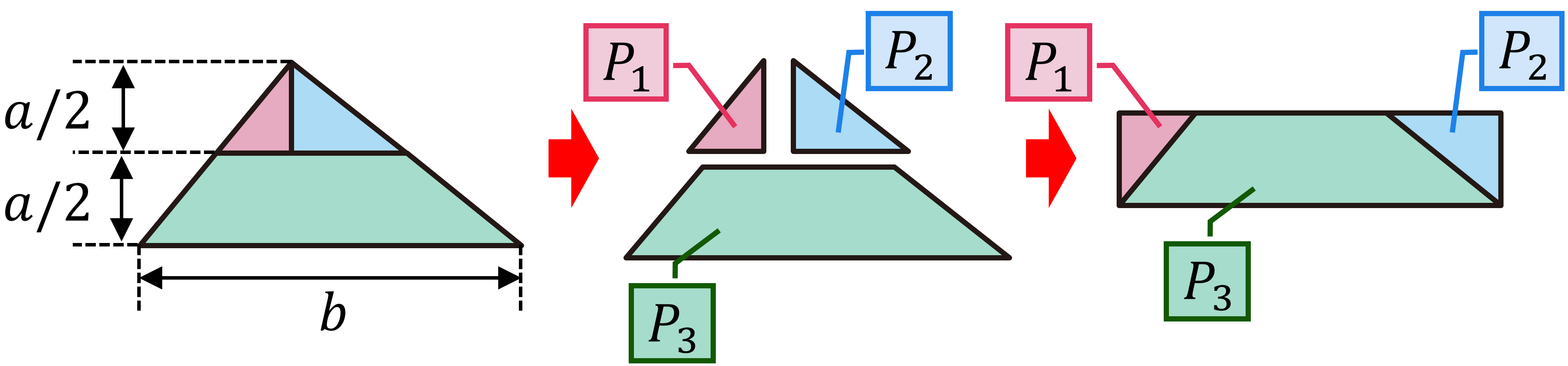
任意の三角形は、ある長方形と裁合せ合同である。

特定の

【証明】

Step 1. 任意の三角形について、最も長い辺を底辺にする。
ここで、底辺の長さを b、三角形の高さを a とする。

Step 2. 以下の図の通りに切って移動すると、長方形が得られる。



長方形どうしの裁合せ

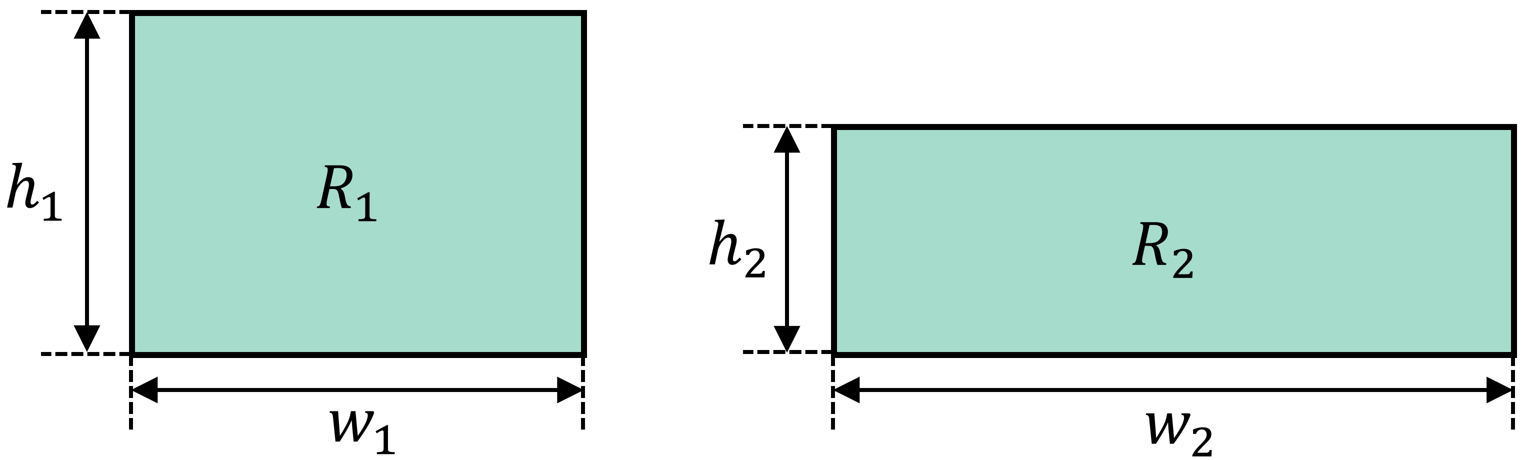
補題11

任意の同じ面積の二つの長方形は、裁合せ合同である。

【証明】次の二つの長方形 R_1, R_2 を考える。

$$R_1 : \text{幅}\ w_1 \times \text{高さ}\ h_1 \qquad R_2 : \text{幅}\ w_2 \times \text{高さ}\ h_2$$

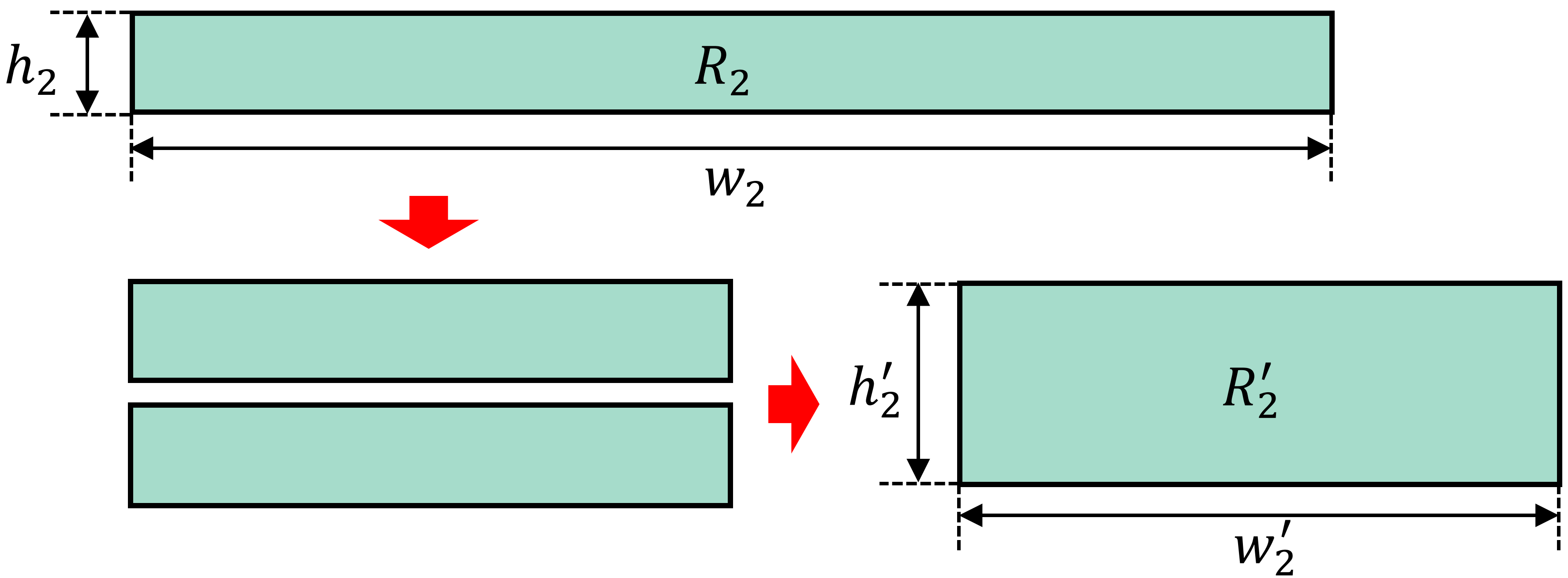
条件: 各辺の長さは $h_2 < h_1 \leqq w_1 < w_2$ を満たすものとする。



長方形どうしの裁合せ

【証明の続き】

Step 1. もし、$2h_1 < h_2$ ならば、長方形 R_2 を半分に切り分け、
切り分けた2つの長方形を上下で積み重ねる。
これを、$2h_1 \geqq h_2$ になるまで繰り返す。

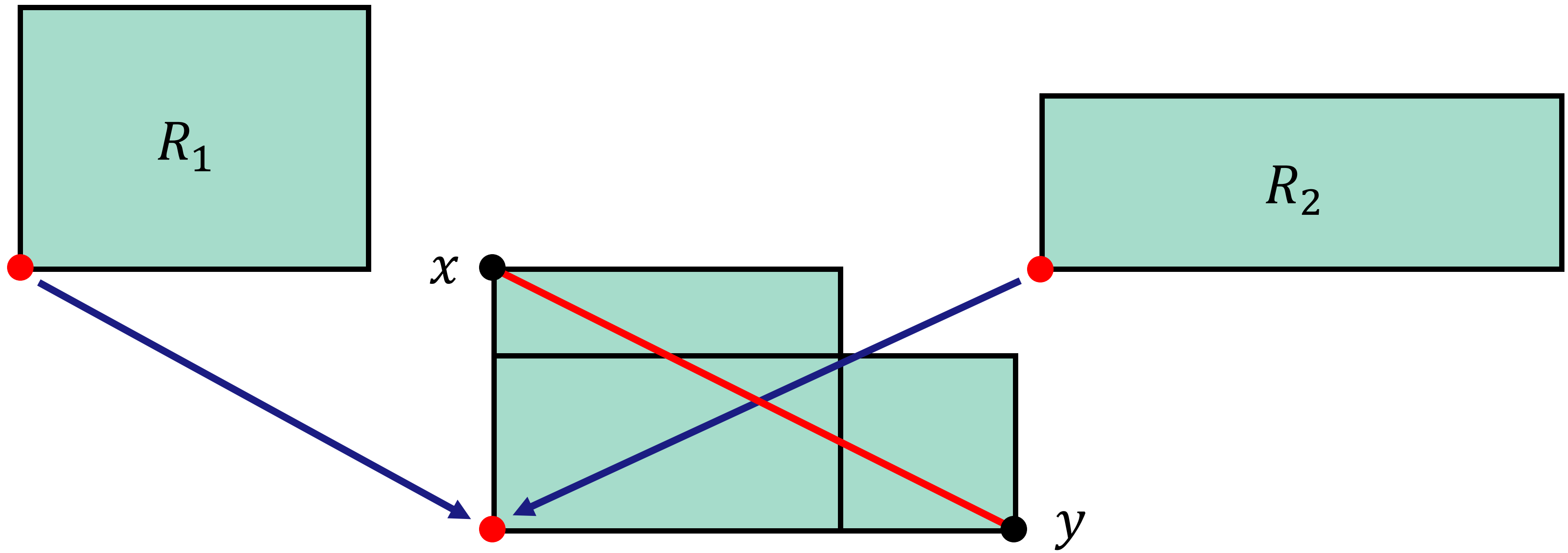


長方形どうしの裁合せ

【証明の続き】

Step 2. R_1, R_2 の左下の直角が一致するように配置する。

Step 3. R_1 の左上の頂点を x、R_2 の右下の頂点を y とし、点 x と y を結ぶ線分で R_1, R_2 を重ねて切る。

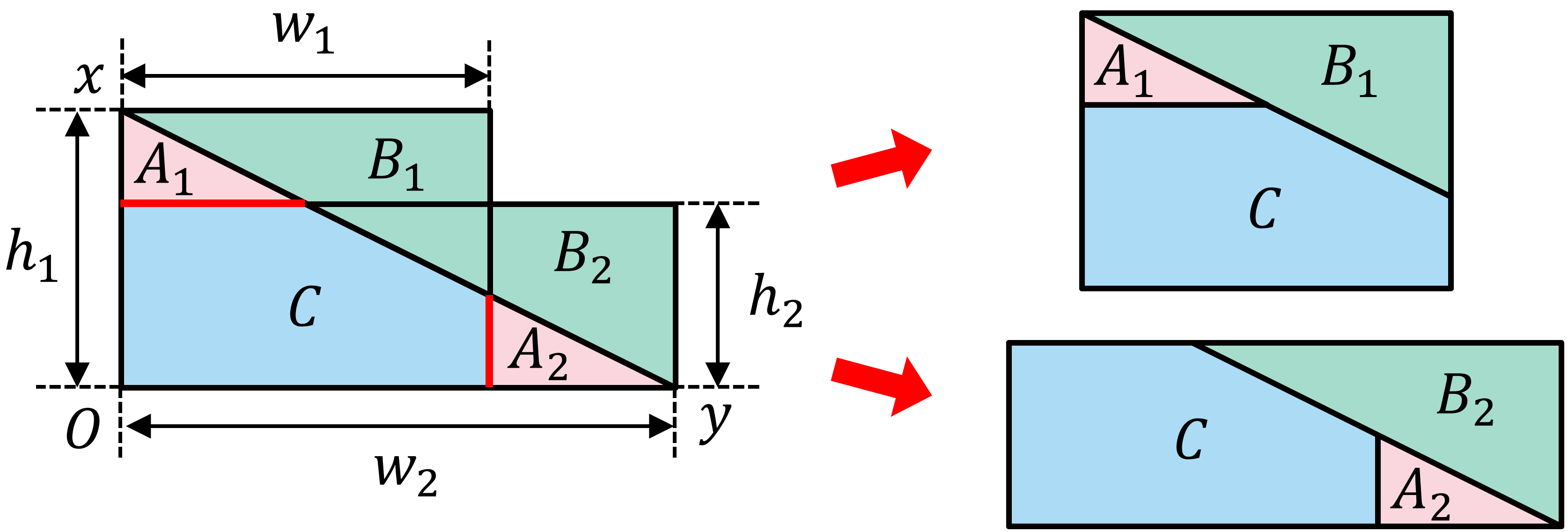


長方形どうしの裁合せ

やってみよう

【証明の続き】

Step 4. 赤線の部分を切り、A_1 を A_2 に、B_1 を B_2 に移動する。



問題12

$A_1 \equiv A_2$、$B_1 \equiv B_2$ を、それぞれ証明しましょう。

長方形どうしの裁合せ

【証明の続き】

(1) $A_1 \equiv A_2$

$\frac{h_1}{w_2} = \frac{h_1-h_2}{a}$ $(\because \triangle\, xOy \sim A_1)$

相似

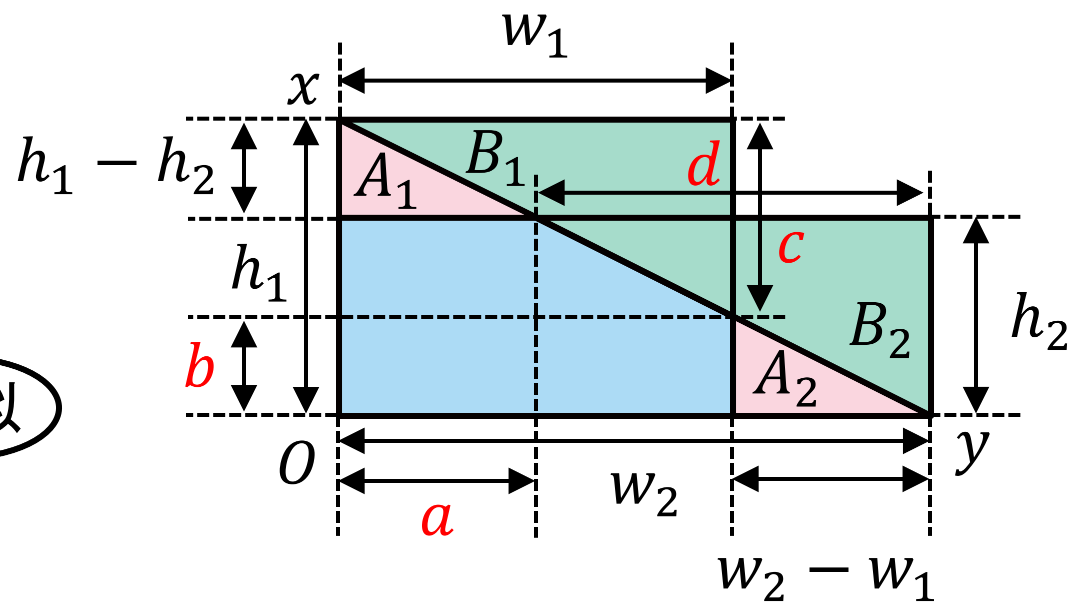
$a = \frac{w_2(h_1-h_2)}{h_1}$

$= \frac{w_2h_1-w_2h_2}{h_1}$

$= \frac{w_2h_1-w_1h_1}{h_1}$ ($\because$ 面積が同じ)

$= w_2 - w_1$

$b = h_1 - h_2$ ($\because$ 角度が同じ)



(2) $B_1 \equiv B_2$

$c = h_1 - b = h_2$

$d = w_2 - a = w_1$

（証明終）

ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明

定理9（再掲）
任意の多角形は、三角形分割ができる。

補題10（再掲）
任意の三角形は、ある長方形と裁合せ合同である。

補題11（再掲）
任意の同じ面積の二つの長方形は、裁合せ合同である。

⬇

定理6（再掲）
任意の同じ面積の二つの多角形は、裁ち合わせ合同である。

ボヤイ･ゲルヴィンの定理の証明

【証明】

多角形 $X = P$ もしくは $X = Q$（P, Q の面積を U とする）に対して、次の手順で $(1 \times U)$ の長方形を作ればよい。

Step 1. 多角形 X を n 個の三角形 X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に分割する

Step 2. 三角形 X_i を全て長方形 Y_i にする（面積を z_i とする）

Step 3. 長方形 Y_i を全て $1 \times z_i$ の長方形 Y_i' にする

Step 4. 長方形 Y_i' を上下に重ね、$(1 \times U)$ の長方形にする

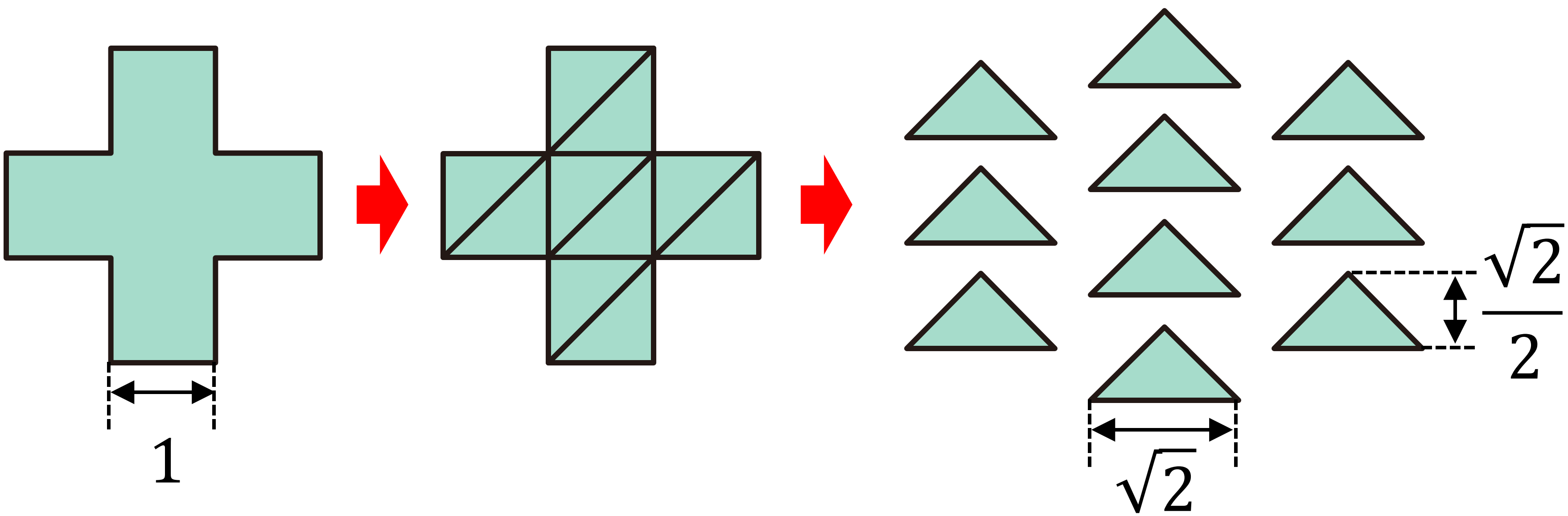
例題3（再掲）

一辺の長さが 1 の正方形を 5 個つなぎ合わせてできる
ギリシャ十字を切り分けて同じ面積を持つ正方形を作りましょう。

ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明

定理9（再掲）
任意の多角形は、三角形分割ができる。

Step 1. 多角形 X を n 個の三角形 X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ に分割する

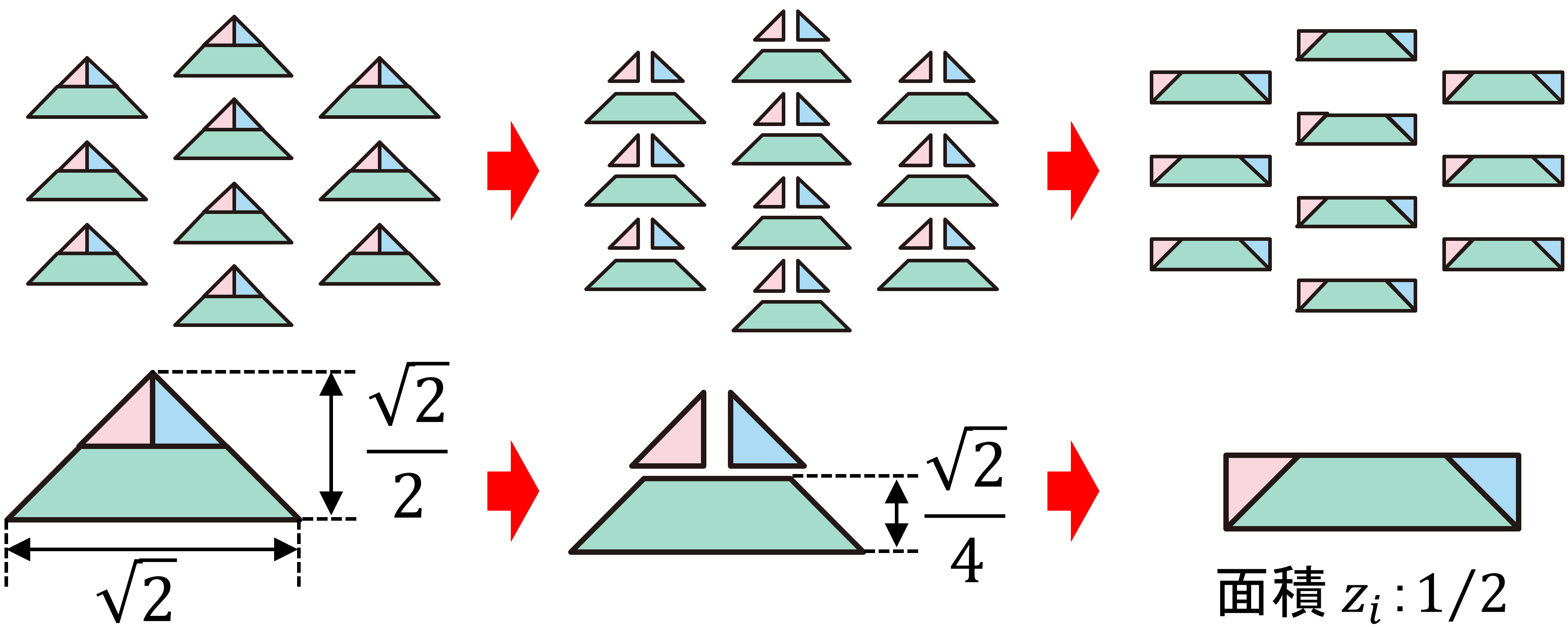


ボヤイ･ゲルヴィンの定理の証明

補題10（再掲）

任意の三角形は、ある長方形と裁合せ合同である。

Step 2. 三角形 X_i を全て長方形 Y_i にする（面積を z_i とする）

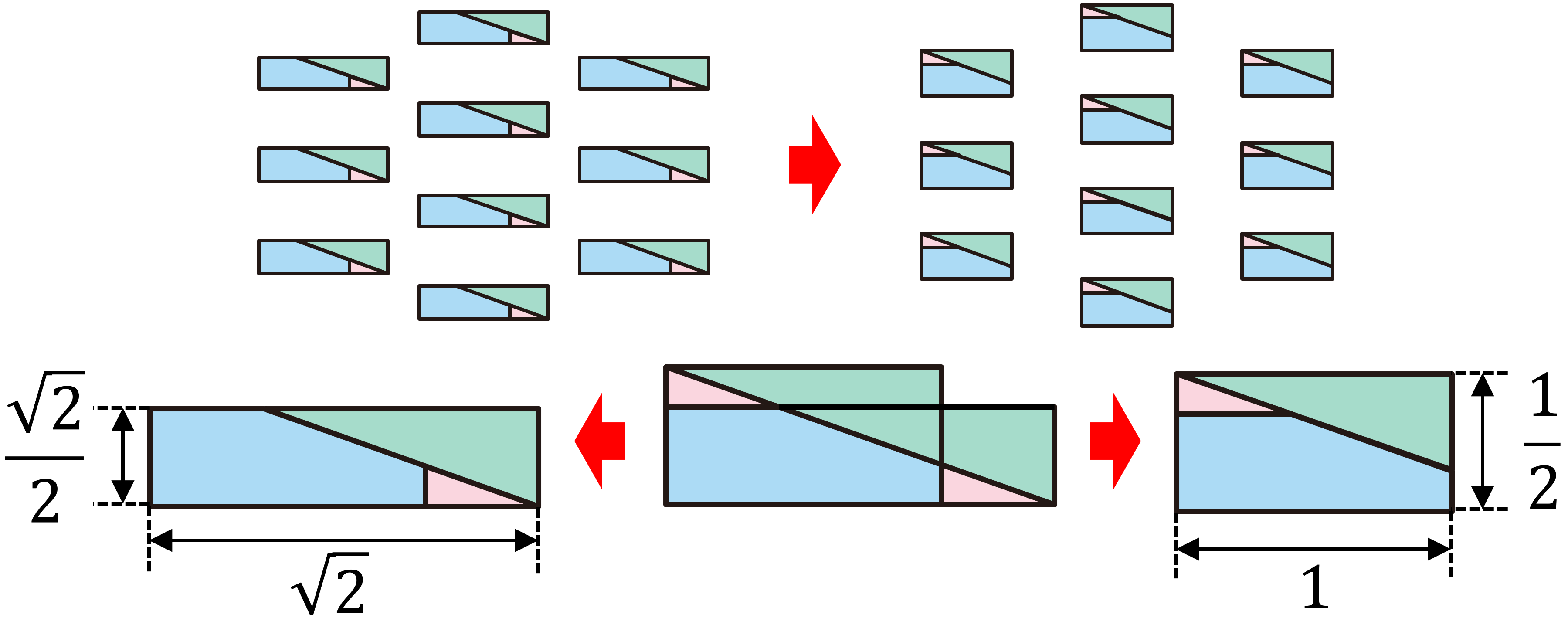


ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明

補題11（再掲）

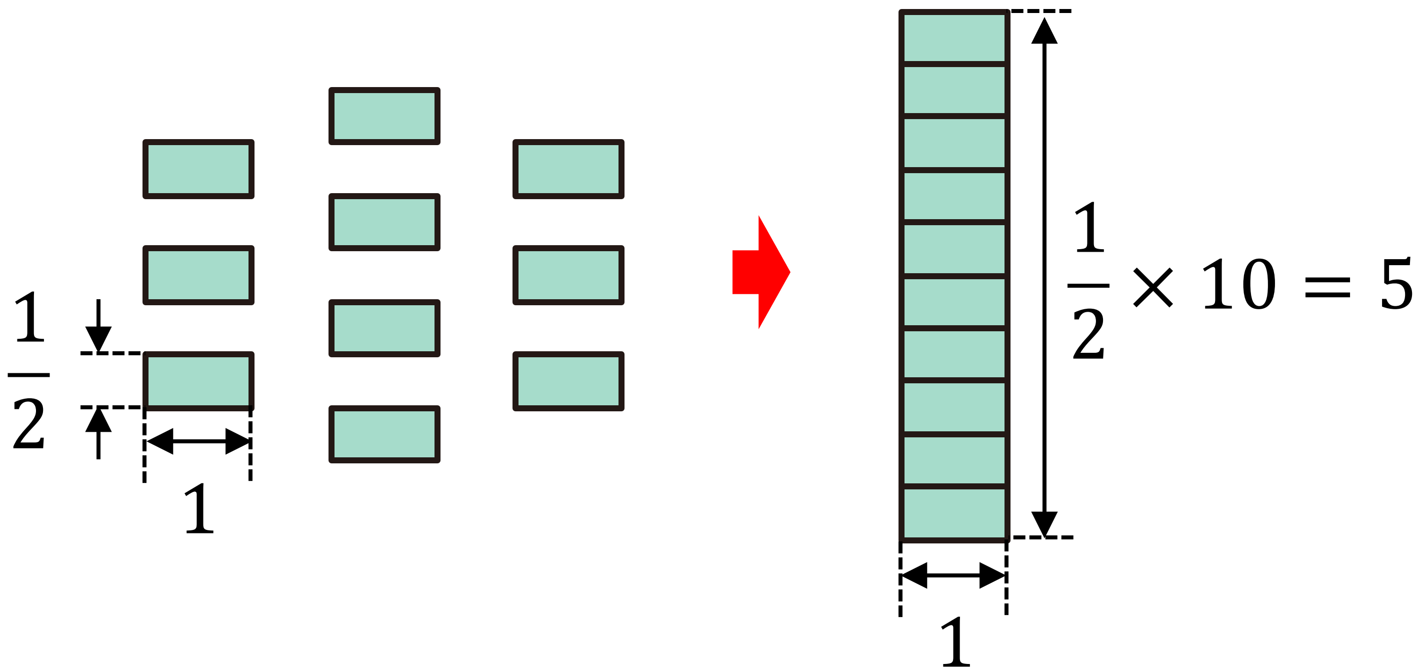
任意の同じ面積の二つの長方形は、裁合せ合同である。

Step 3. 長方形 Y_i を全て $1 \times z_i$ の長方形 Y_i' にする



ボヤイ･ゲルヴィンの定理の証明

Step 4. 長方形 Y_i' を上下に重ね、$(1 \times U)$ の長方形にする

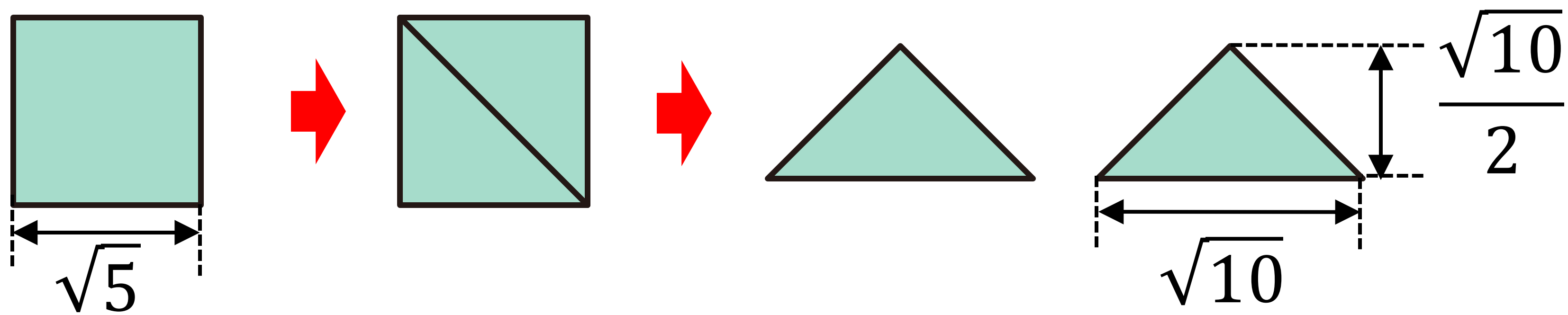


多角形 P (ギリシャ十字)を (1×5) の長方形にできた

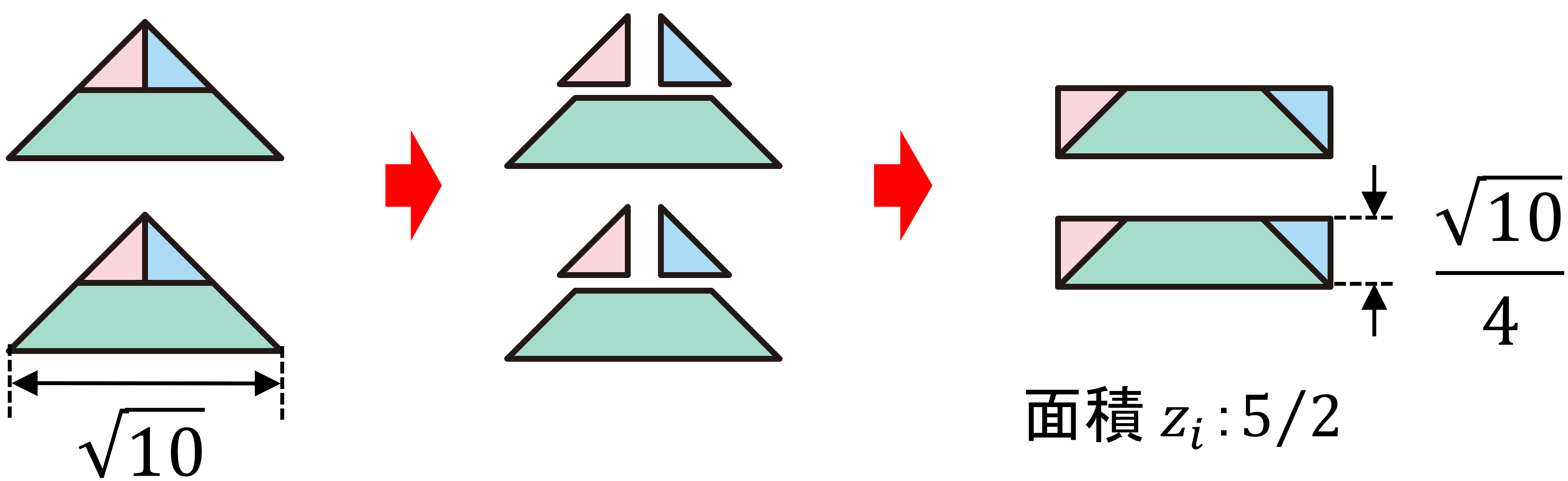
➡ 多角形 Q (一辺 $\sqrt{5}$ の正方形)を (1×5) の長方形にする

ボヤイ･ゲルヴィンの定理の証明

Step 1. 多角形 X を n 個の三角形 X_i $(i = 1,2,\dots,n)$ に分割する

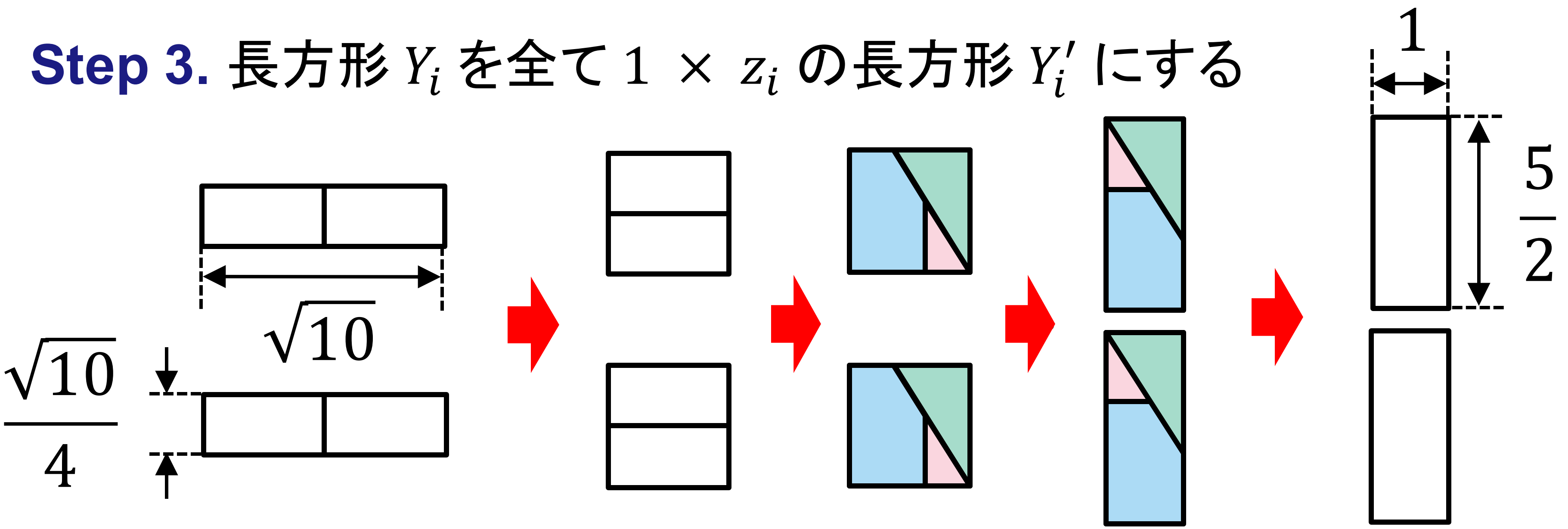


Step 2. 三角形 X_i を全て長方形 Y_i にする（面積を z_i とする）

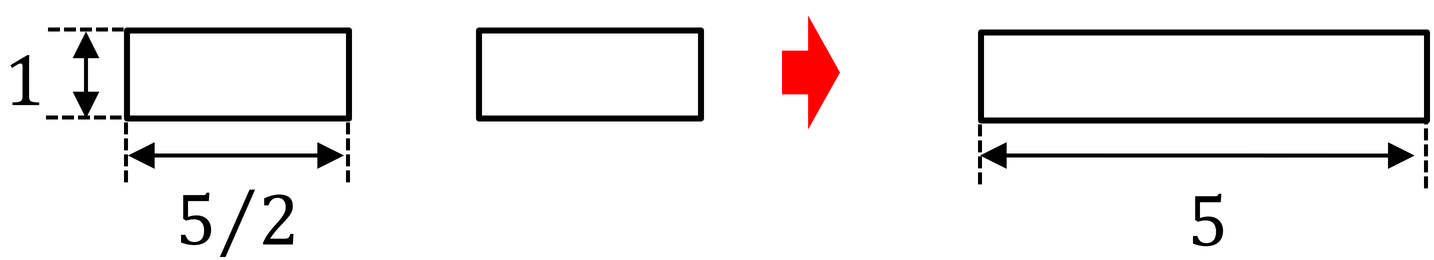


ボヤイ·ゲルヴィンの定理の証明

Step 3. 長方形 Y_i を全て $1 \times z_i$ の長方形 Y_i' にする

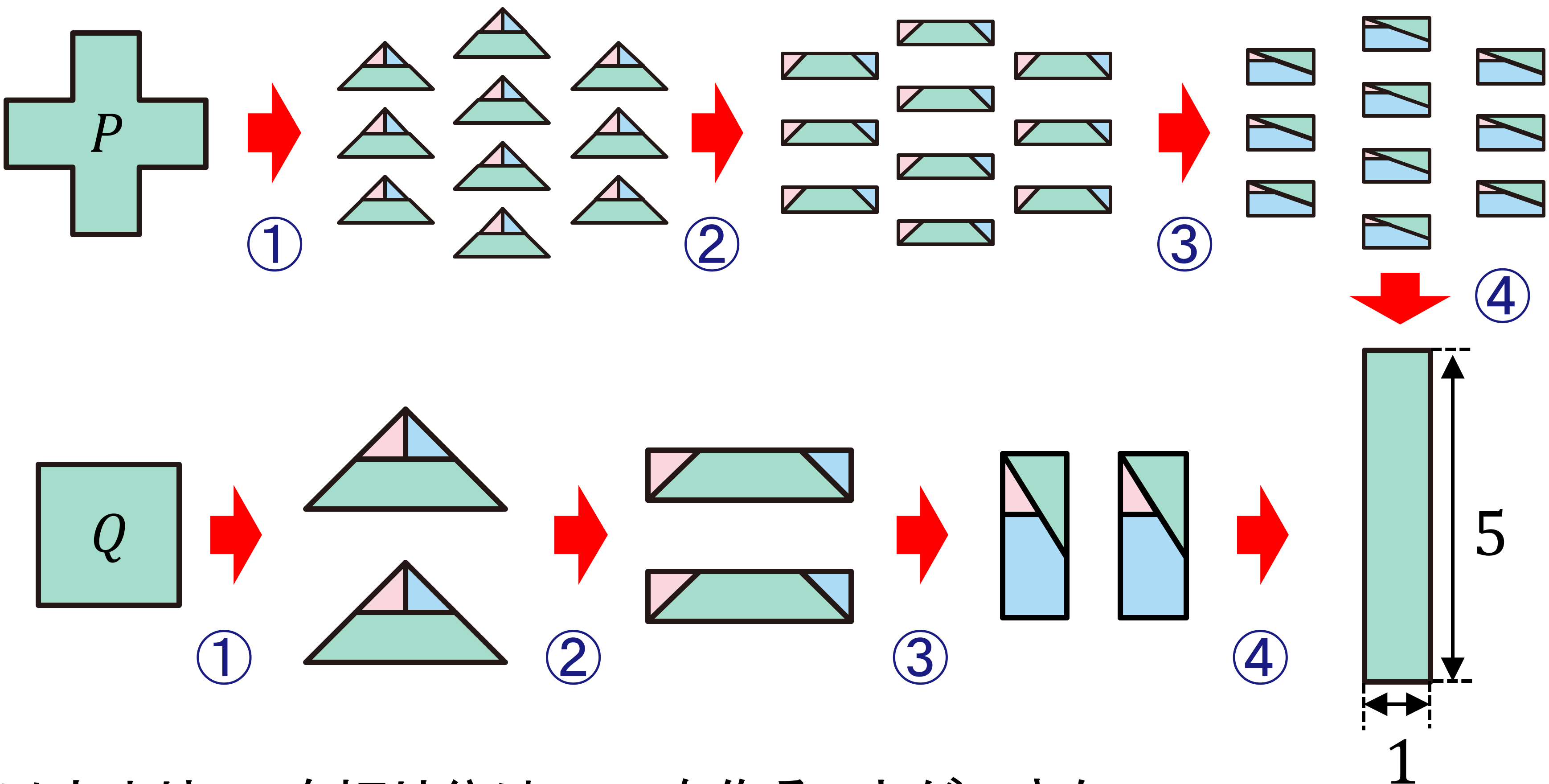


Step 4. 長方形 Y_i' を上下に重ね、$(1 \times U)$ の長方形にする



ボヤイ・ゲルヴィンの定理の証明

多角形 P, Q のいずれも (1×5) の長方形にできた



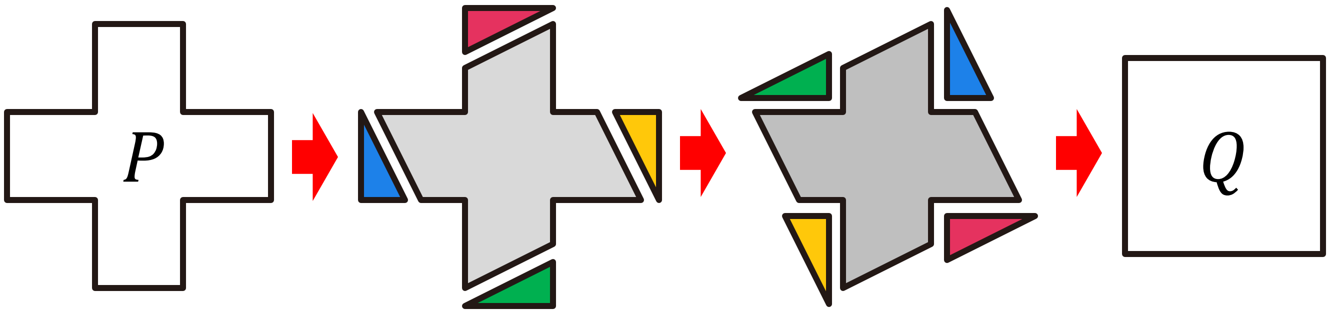
以上より、P を切り分けて Q を作ることができた。 ■

裁合せパズルにおける最小ピース数

定理6(再掲)

任意の同じ面積の二つの多角形は、裁ち合わせ合同である。

- ボヤイ・ゲルヴィンの定理で切り分けるピース数は多すぎる
  (先の例の場合、本来は5ピースに分けるだけで良かった)



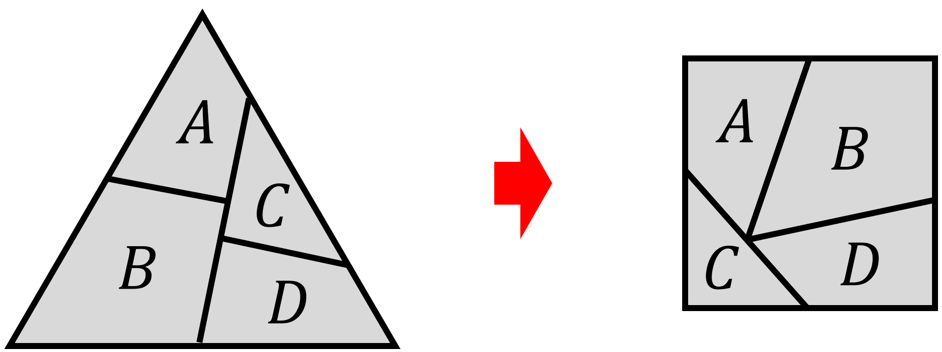
研究の興味

二つの多角形が与えられた時の、最小の切り分ける個数は?

裁合せパズルにおける最小ピース数

問題13

同じ面積を持つ正三角形と正方形が与えられたとき、裁合せに必要な最小の切り分ける個数は？



定理14 [E. D. Demaine, T. Kamata and R. Uehara, 2024]

同じ面積を持つ正三角形と正方形が与えられたとき、裁合せをするには、4ピース以上に切り分ける必要である。

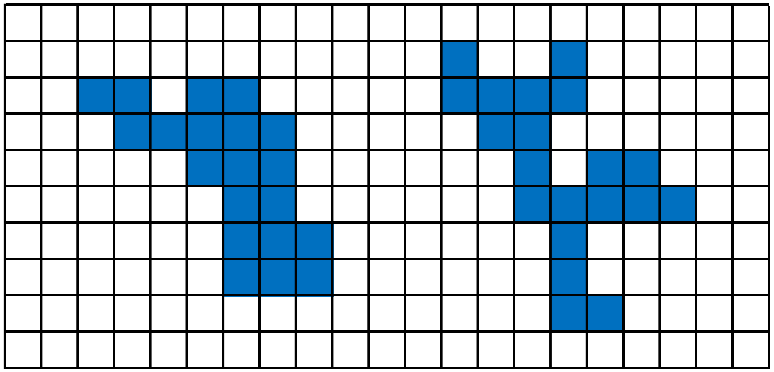
裁合せパズルにおける最小ピース数

定理15

１ × １の正方形を、辺どうしが一致するようにつなぎ合わせた多角形を **ポリオミノ** という。

問題16

同じ面積を持つポリオミノが2つ与えられたとき、裁合せに必要な最小の切り分ける個数は？



現在、取り組んでいる問題

チャレンジ問題

やってみよう

問題17

自分のオリジナルの裁合せパズルを作ってみましょう。
完成したら、どのような点が面白いかを、説明してみましょう。

面白いと感じる裁合せパズルのポイント

- できるだけ少ないピース数
- 単純な形から、単純な形への裁合せ
- 曲線やジグザグなど、直線以外での切り方

本日のスライドと配布した資料（型紙）は
右の QR コードから入手できます