2025年度 夏のLAシンポジウム [1]

Classification and Visualization of Polyhedral Graphs via Degree ~~Sequences~~ Distributions

塩田 拓海*

Tom van der Zanden†

*兵庫県立大学 †Maastricht University

2025年7月23日

@アイーナ･いわて県民情報交流センター

多面体グラフ

定義1

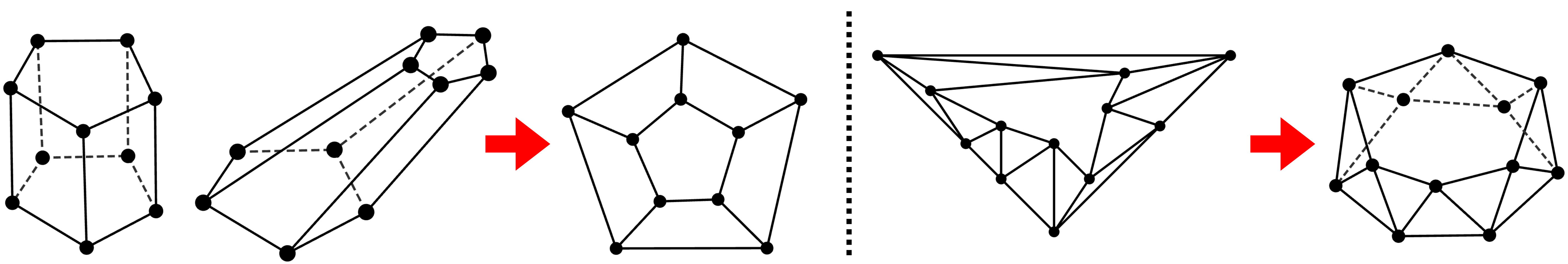
平面かつ 3 頂点連結な単純グラフを，**多面体グラフ** G_P という.

平面グラフ:交差することなく描くことができるグラフ

3 頂点連結グラフ:任意の二つの頂点を除いても連結なグラフ

定理2(シュタイニッツの定理)[B. Grünbaum, 2003]

全ての凸多面体は，多面体グラフを形成する．また，全ての多面体グラフは，凸多面体として表すことができる.

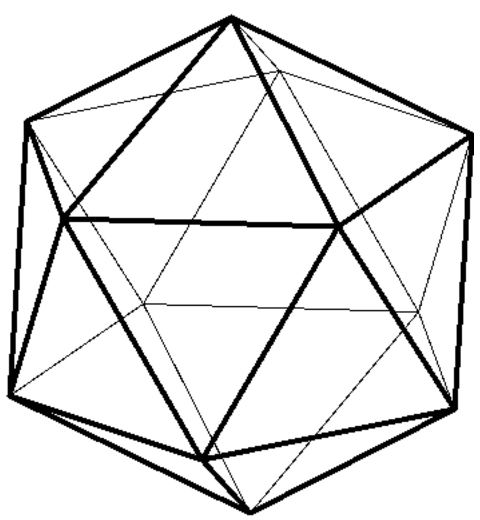


既知の多面体(グラフ)のクラス

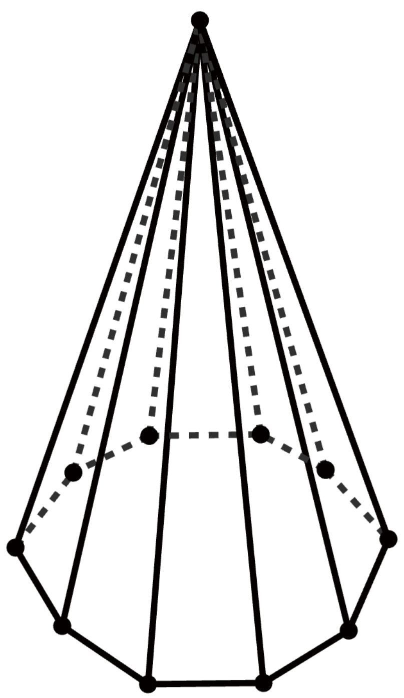
本研究の目的

多面体グラフに対してグループ分け(クラス分け)を行う.

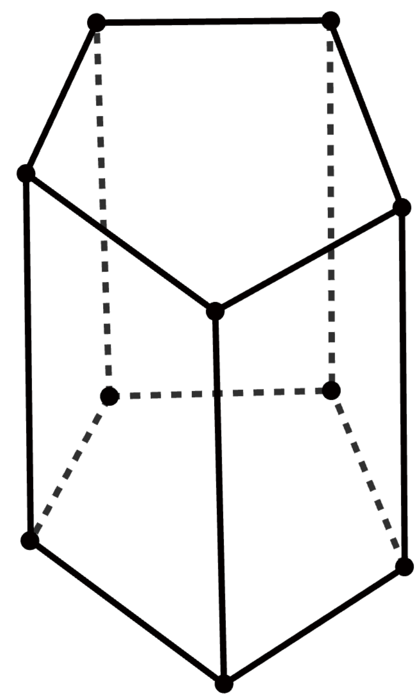
- 名前が付いている多面体のクラスがいくつかある



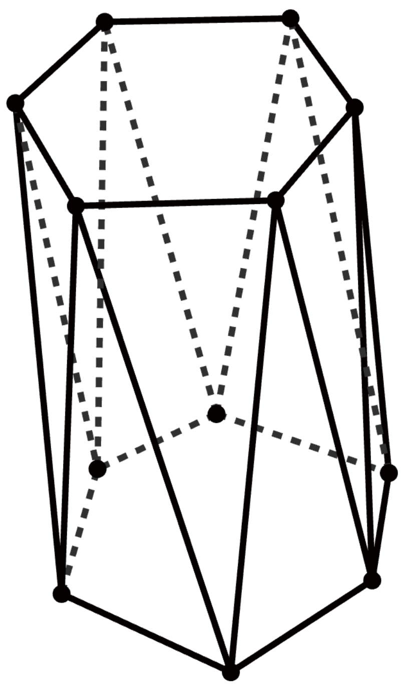
正多面体



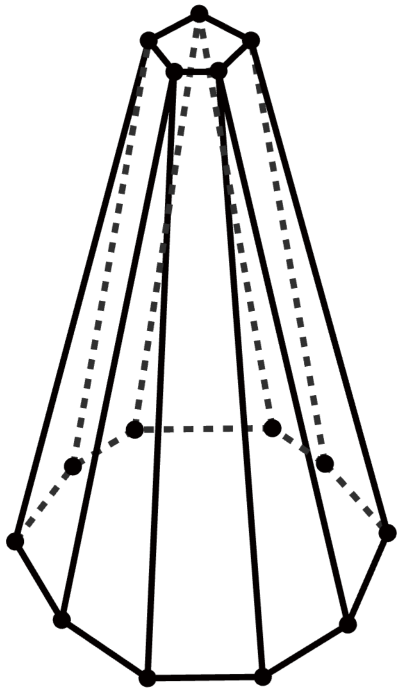
角錐



角柱



反角柱



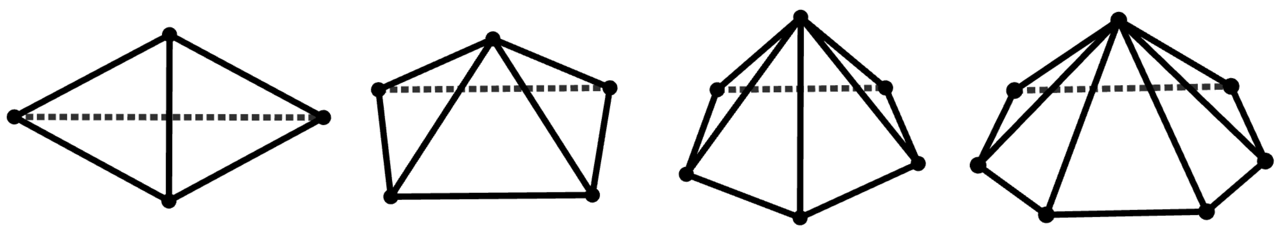
Prismatoid

【注意】角錐・角柱・反角柱は, Prismatoid の特殊な形

既知の多面体(グラフ)のクラス

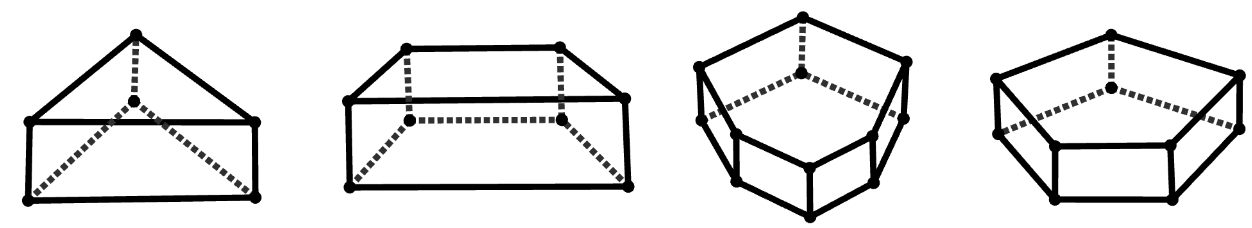
既知の多面体のクラスには，系列をなすものがある

角錐



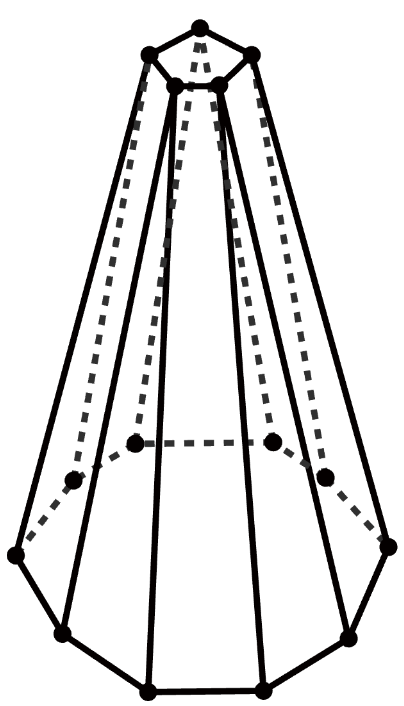
…

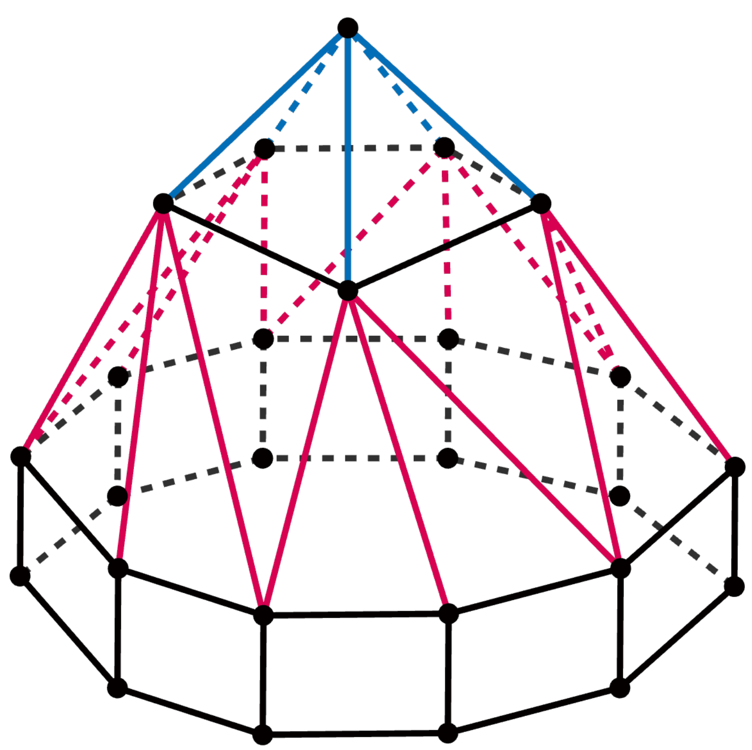
角柱



…

Prismatoid や，Prismatoid を重ねた立体も $n, m, \ell, \ldots$ 角形の値を変えることで，系列をなしていると見ることができる.





疑問

Prismatoid 以外の多面体で系列をなす多面体のクラスは他にはないの？

次数分布に基づく多面体のグループ分け

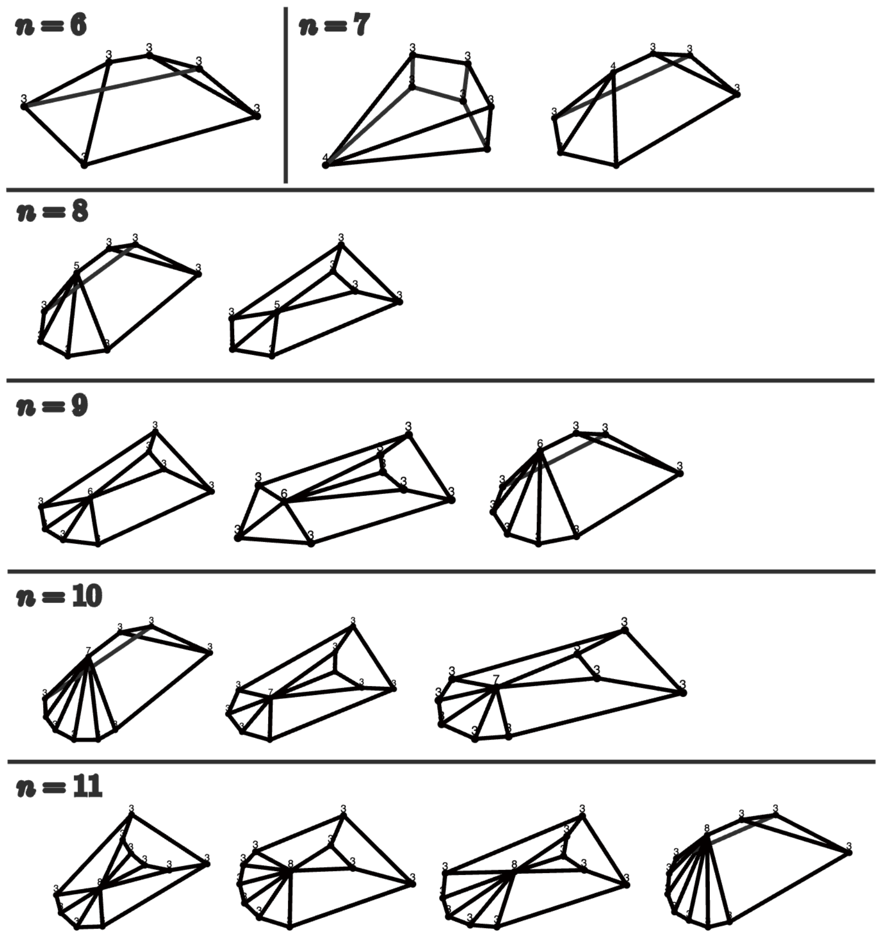
本研究の成果

多面体グラフを次数分布に基づいてグループ分けを行った.

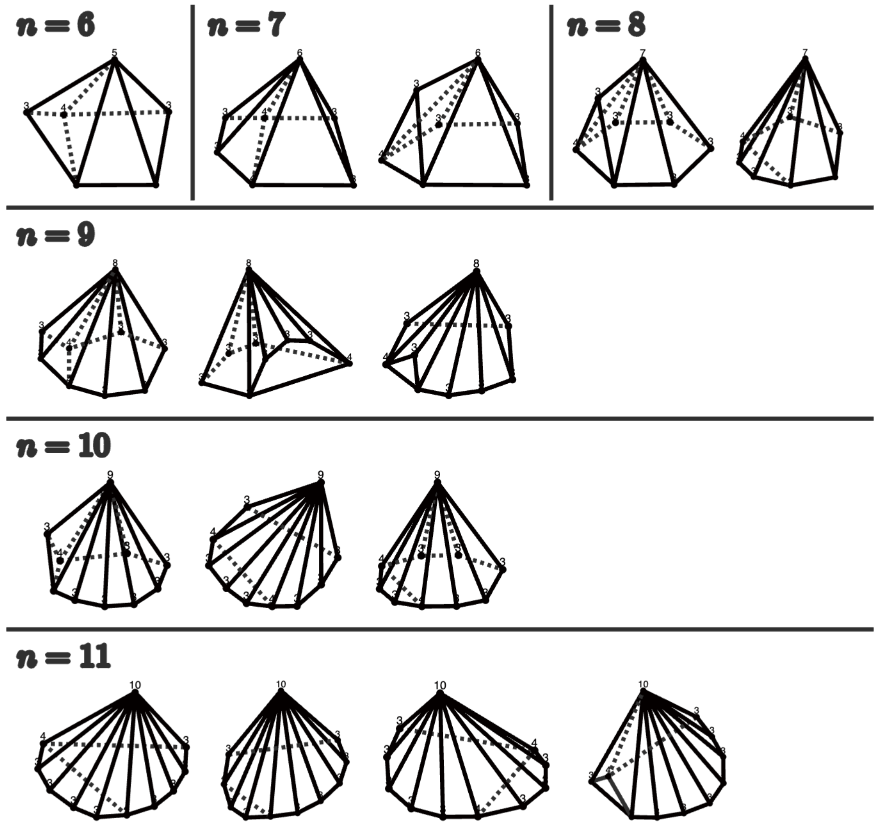
n : グラフの頂点数

次数分布の見方

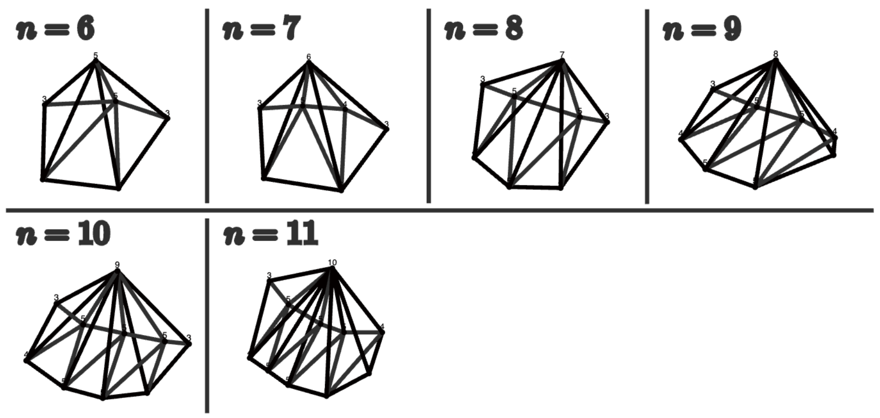
$d_i^{c_i}$: 次数 d_i の頂点が c_i 個



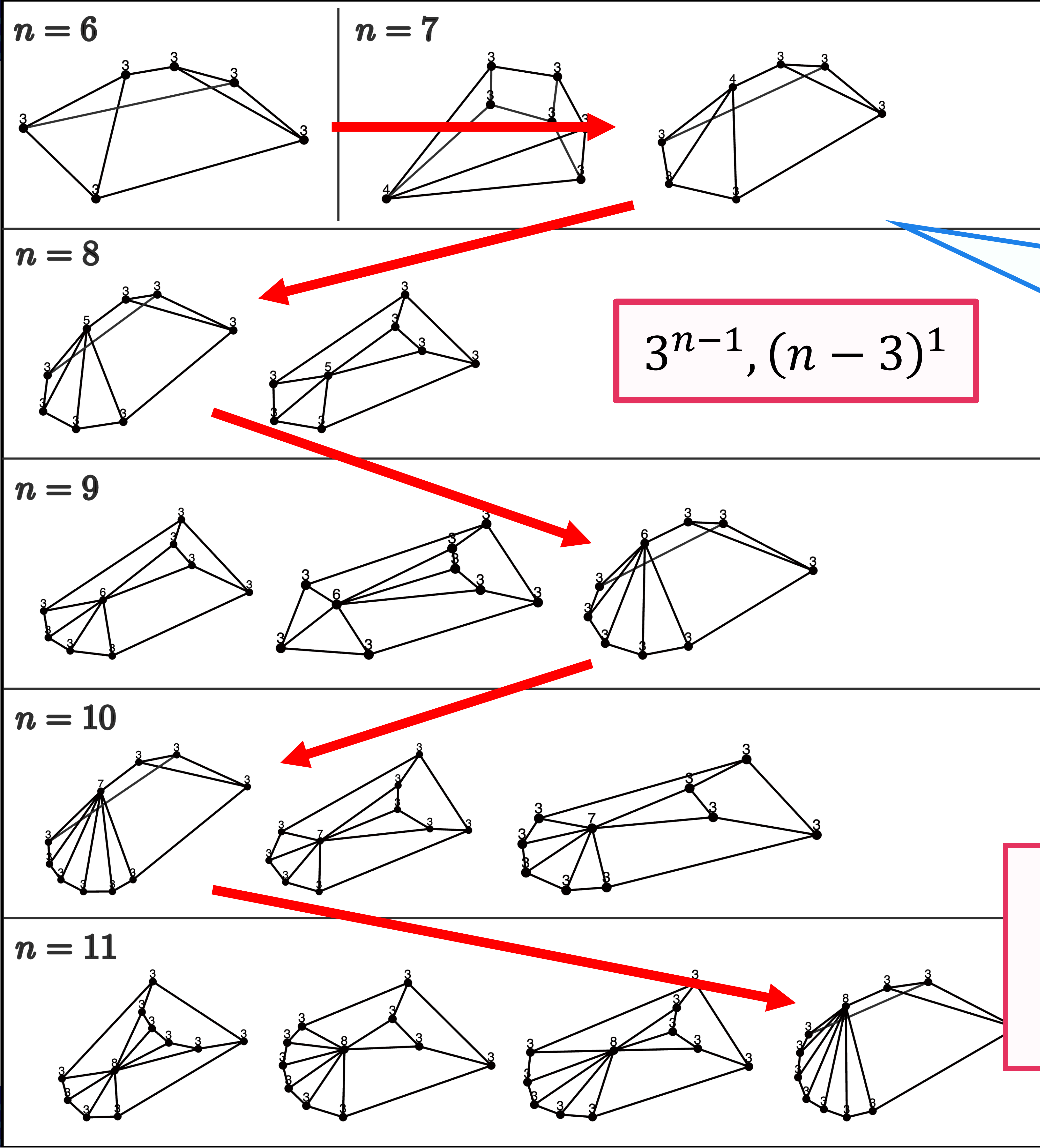
$3^{n-1}, (n-3)^1$



$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$



$5^{n-5}, (n-1)^1, 3^2, 4^2$



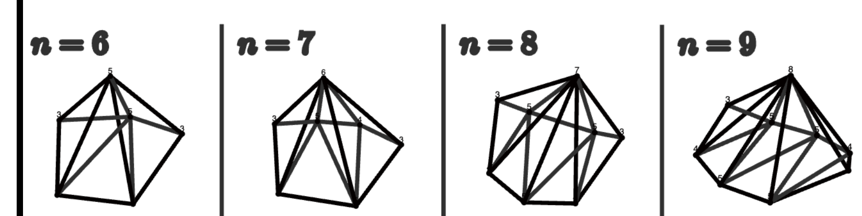
$3^{n-1}, (n-3)^1$

レープ分け

多面体の系列と
なってそう

次数分布の見方

$d_i^{c_i}$：次数 d_i の
頂点が c_i 個



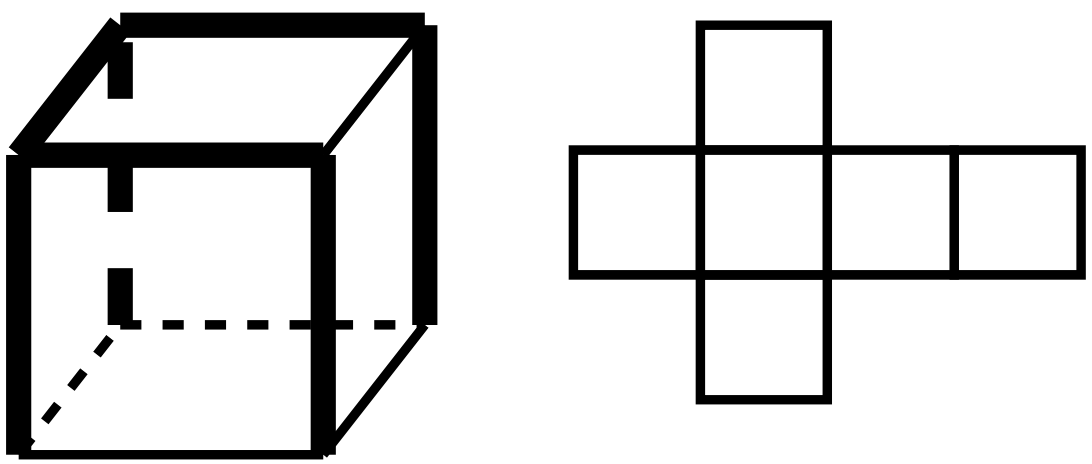
なぜ多面体グラフを
グループ分けをする
必要があった？

辺展開図とは

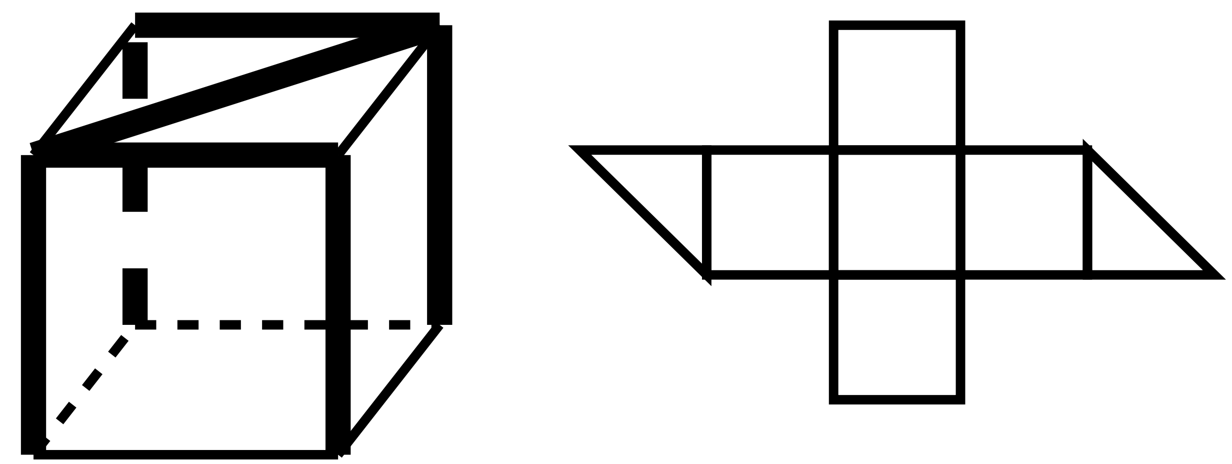
定義3 [E. D. Demaine and J. O’Rourke, 2007]

多面体の辺に切れ込み（切断線）を入れて，平坦に開いた多角形を辺展開図という.

各立方体を太線に沿って切ると…



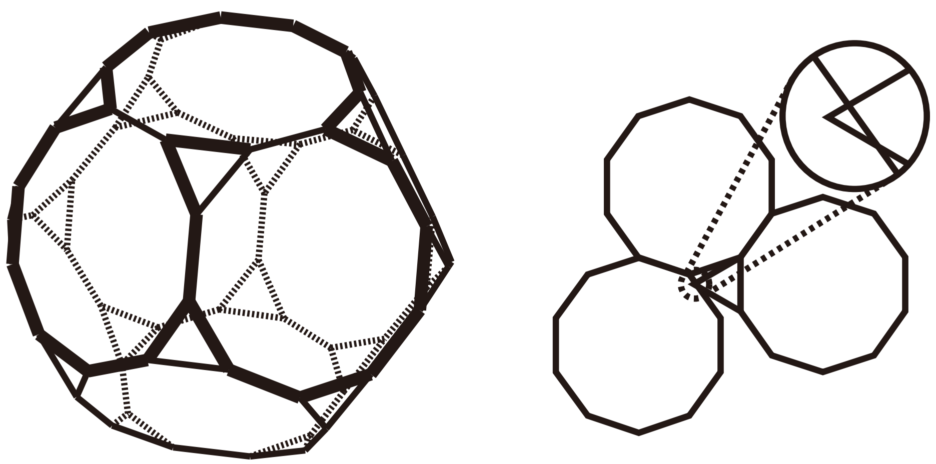
(a) 辺展開図



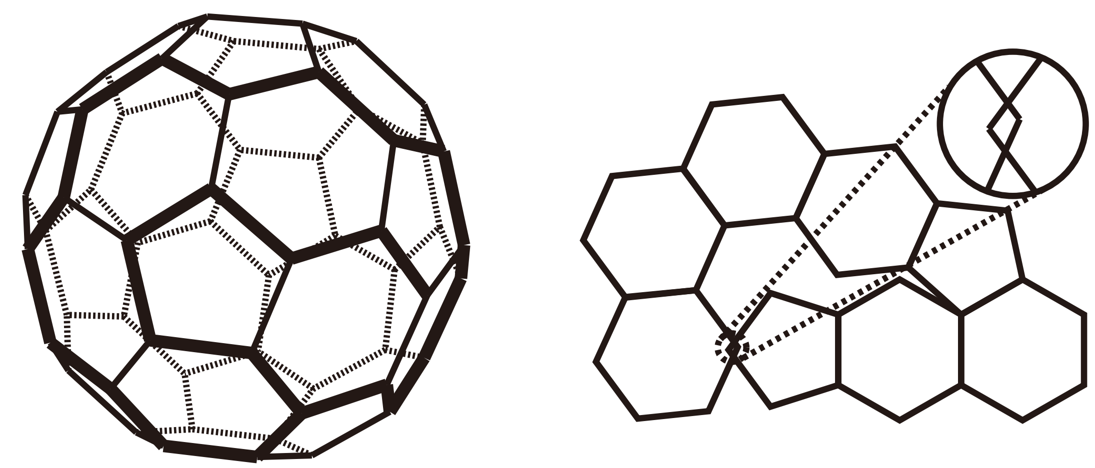
(b) 一般展開図

重なりを持つ辺展開図

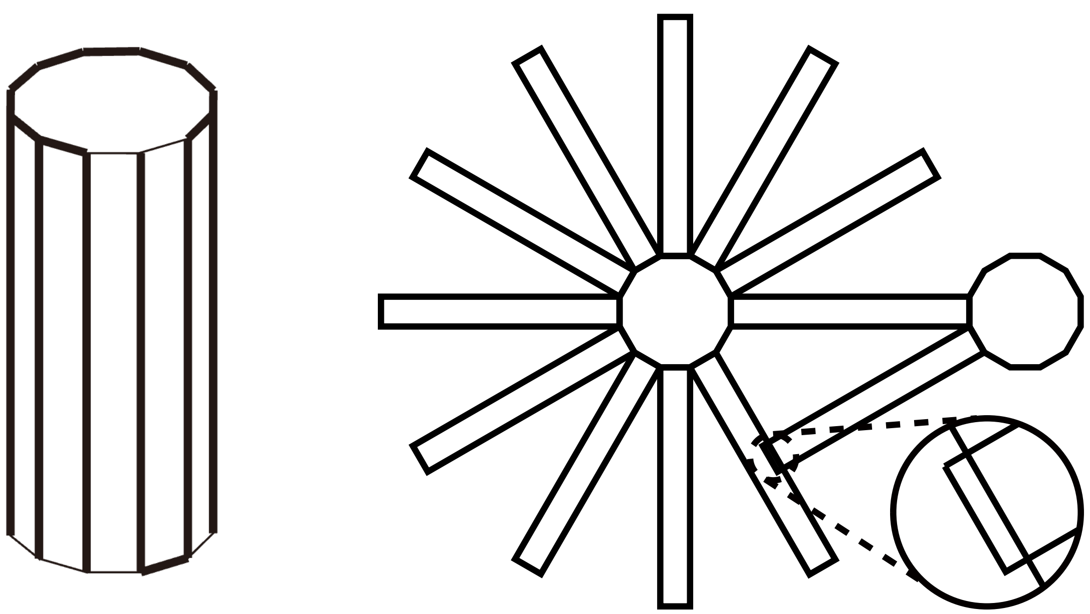
凸多面体は，特定の方法で辺展開すると重なりを持つことがある



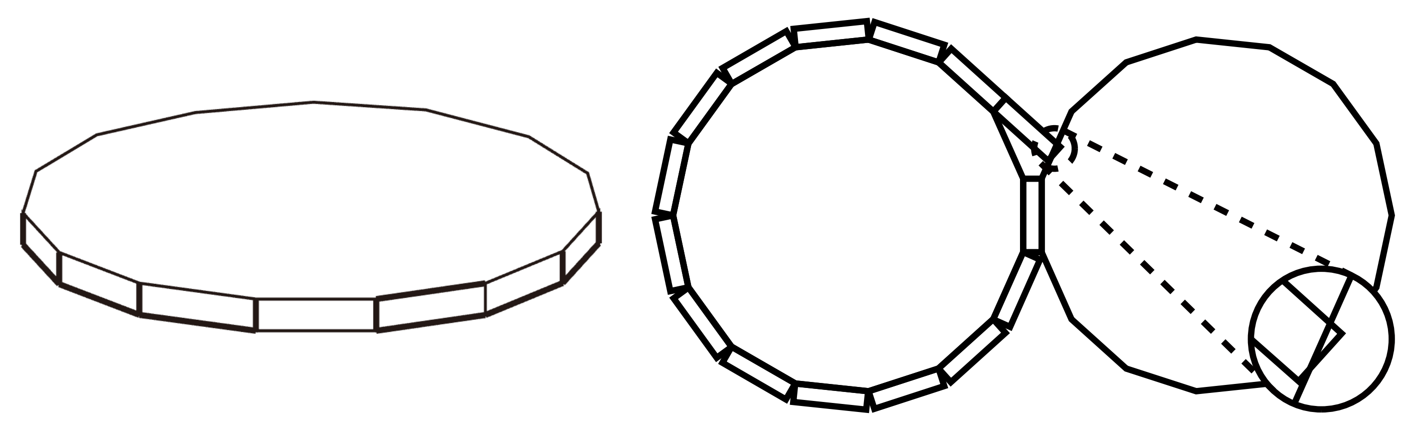
切頂十二面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



切頂二十面体
[T. Horiyama and W. Shoji, 2011]



正 12 角柱
[Schlickenrieder, 1997]

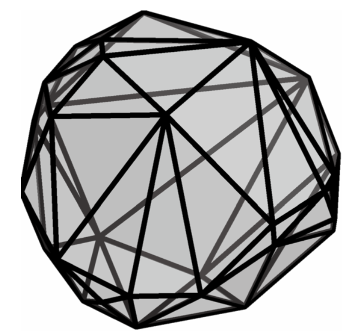
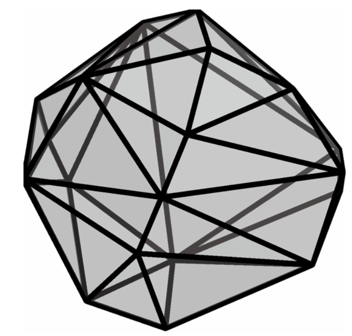
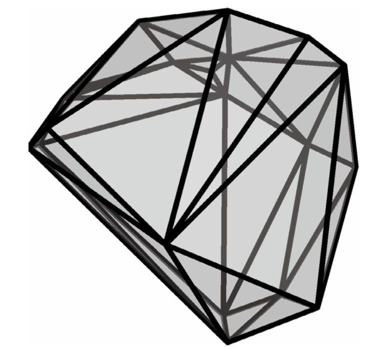


正 15 角柱
[Schlickenrieder, 1997]

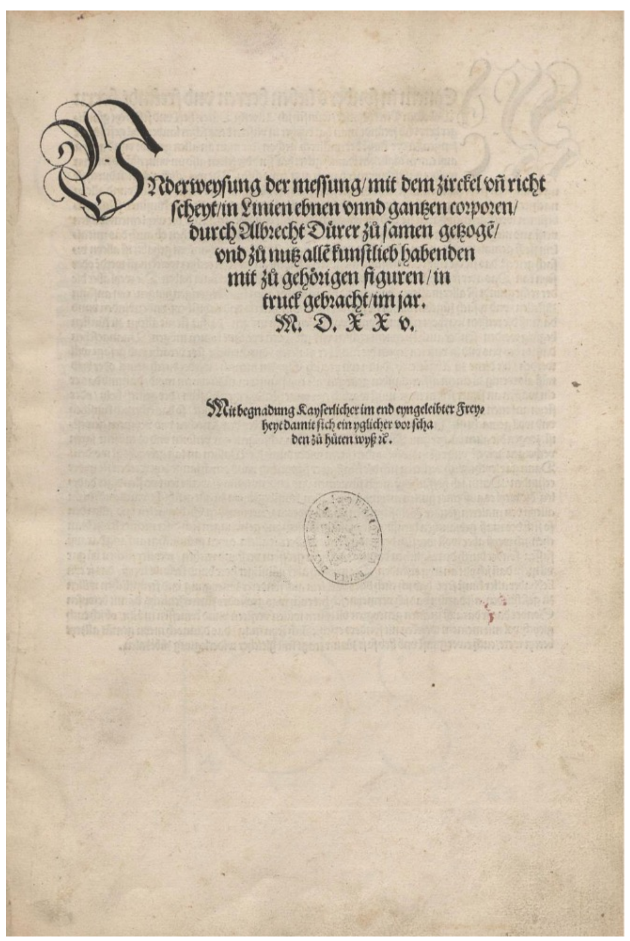
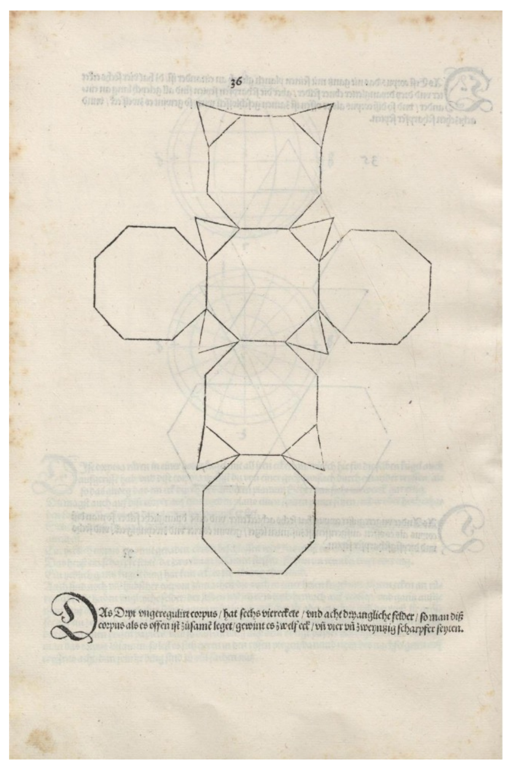
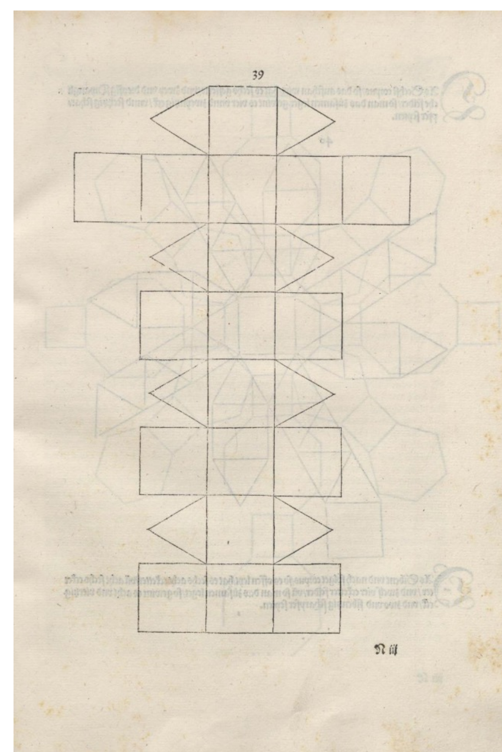
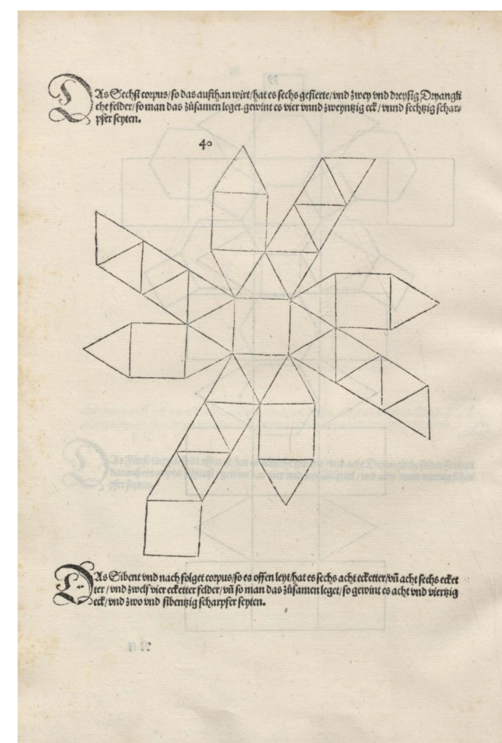
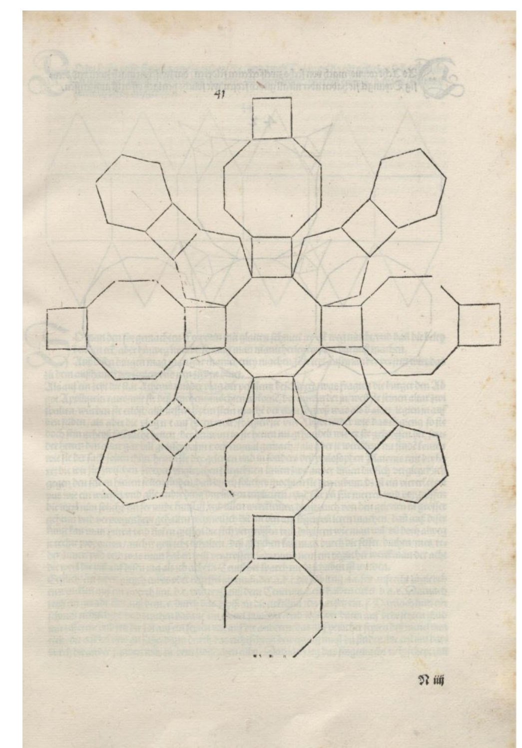
本研究のモチベーション

予想 [G. C. Shephard, 1975]

全ての凸多面体は重なりなく辺展開できるだろうか？

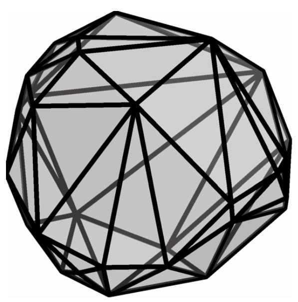
[Albrecht Dürer, 1525] “Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien Ebenen unnd gantzen corporen”

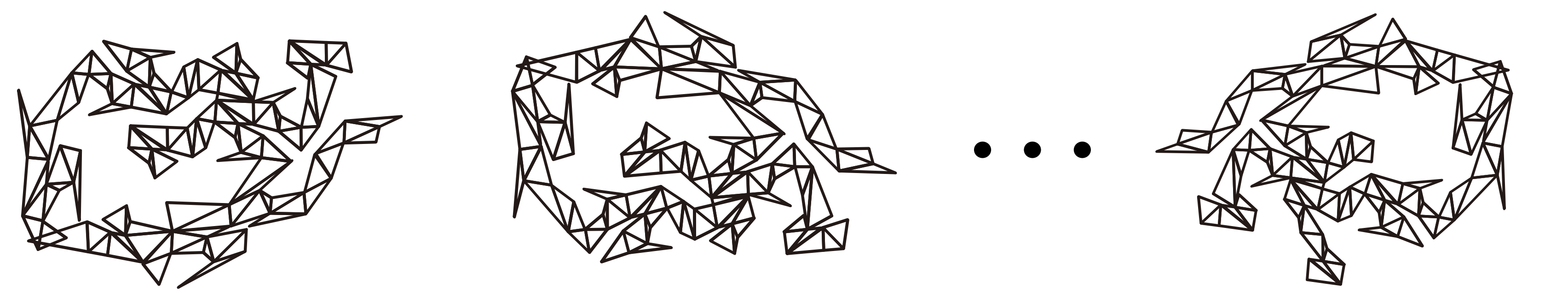
Shephard の予想は Dürer の問題 と呼ばれる

Dürer の問題の解決へのアプローチ

方法1 （否定的解決）	全ての辺展開図が重なりを持つ凸多面体を一つ以上示す.



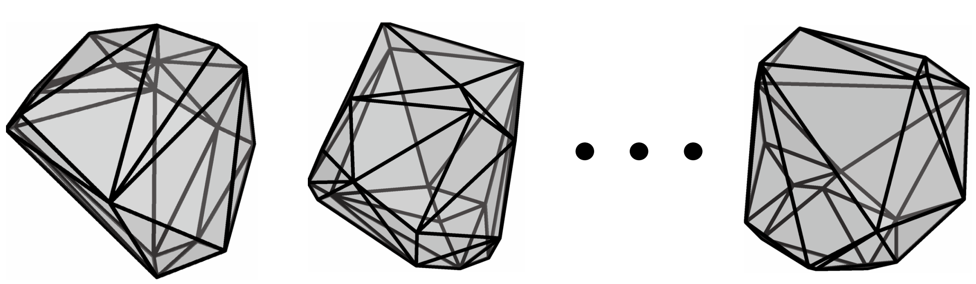
辺展開する



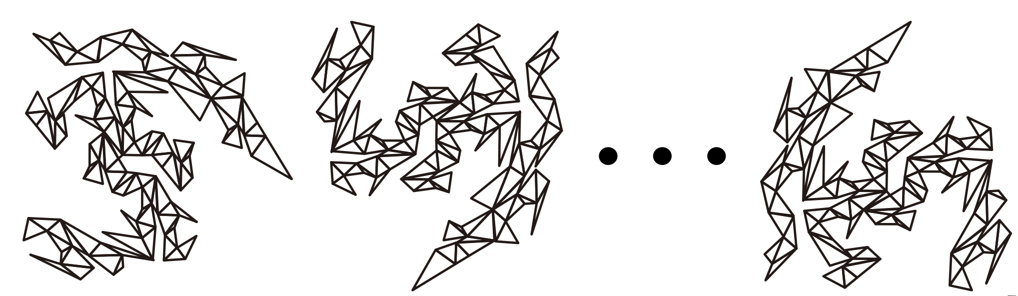
[T. Shiota et al., 2025]

重なりを持たない辺展開図しか存在しない

方法2 （肯定的解決）	全ての凸多面体に対して適用できる，重なりなく辺展開するアルゴリズムを設計する.



アルゴリズム



全ての凸多面体

重なりのない辺展開図

辺展開アルゴリズムの設計に向けた計画

分割と統合に基づく辺展開アルゴリズム

本アルゴリズムのポイント

辺展開と統合の間にはトレードオフの関係がある.

少ない	← 多面体のパーツの個数 →	多い
複雑化+考えるべき対象が爆増	← 辺展開アルゴリズム →	簡単
比較的容易	← 重なりなく統合 →	非常に複雑

良い分割の戦略は？

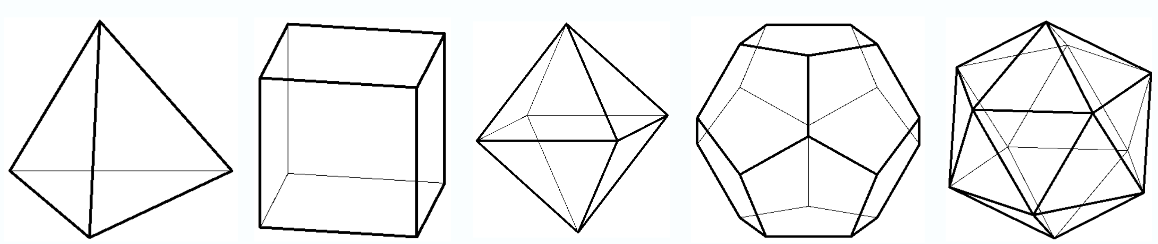
良い分割の戦略とは

戦略1

Edge-overlap-free となっているパーツを選択する.

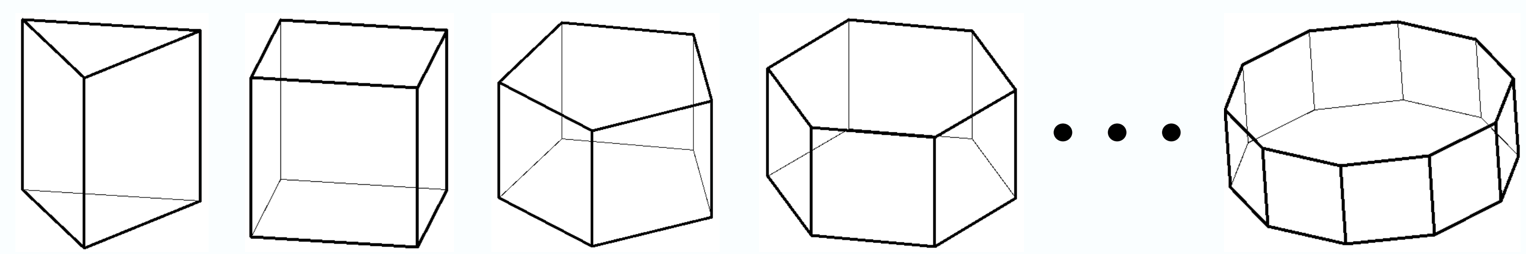
定義4 [T. Kamata, T. Shiota and R. Uehara, 2024]

どのように辺展開をしても重なりを持たない多面体を Edge-overlap-free な多面体という.



正多面体

[T. Horiyama & W. Shoji, 2011]



高さ h の正 k 角柱 $(3 \leq k \leq 10, h > 0)$

[T. Kamata et al., 2025]

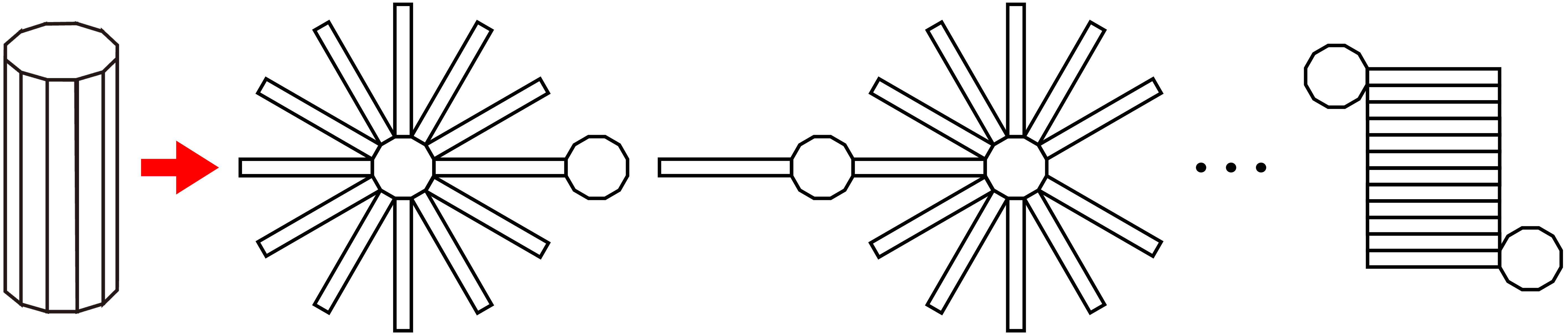
Edge-overlap-free な多面体は，自由に面の配置を替えることができるため，統合の段階で扱いやすい.

良い分割の戦略とは

戦略2

重なりなく辺展開する方法が多く存在するパーツを選択する.

【例】正 k 角柱を，重なりなく辺展開する方法は複数通りある



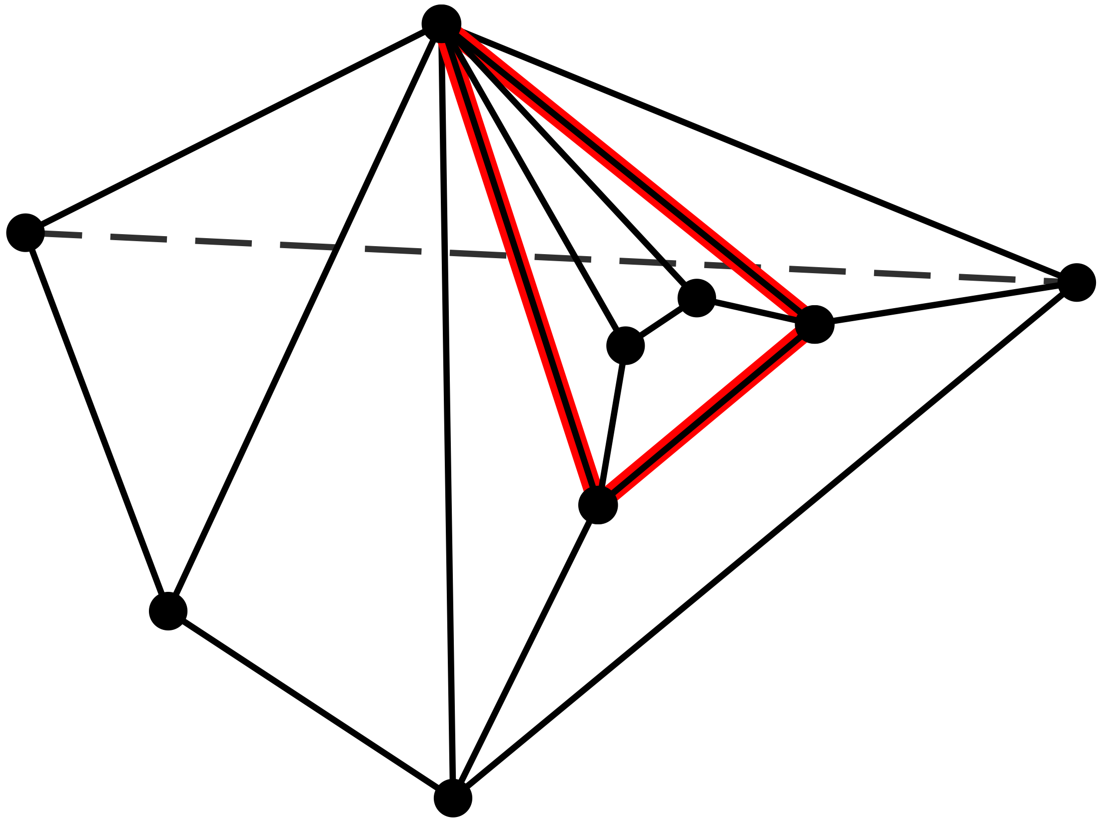
複数の方法で重なりなく辺展開できる多面体は，比較的自由に面の配置を替えることができるため，統合の段階で扱いやすい.

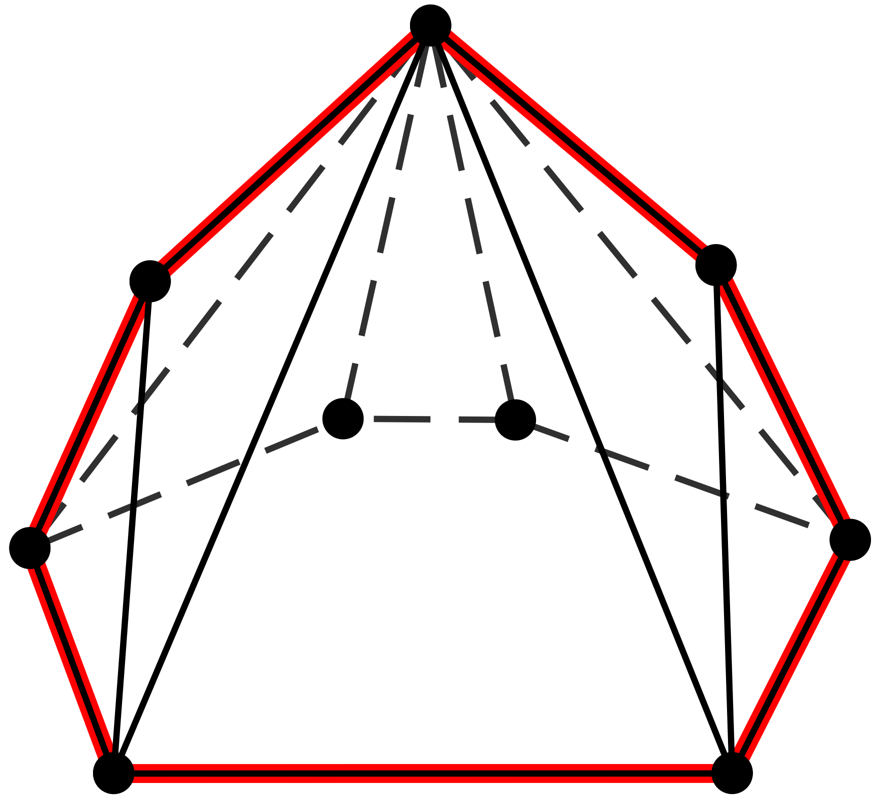
どのようなパーツに対して考えれば良い？

対象とするパーツへの着想

観察1

パーツを取った際の切り口は（非平面）多角形となっている.





ポイント

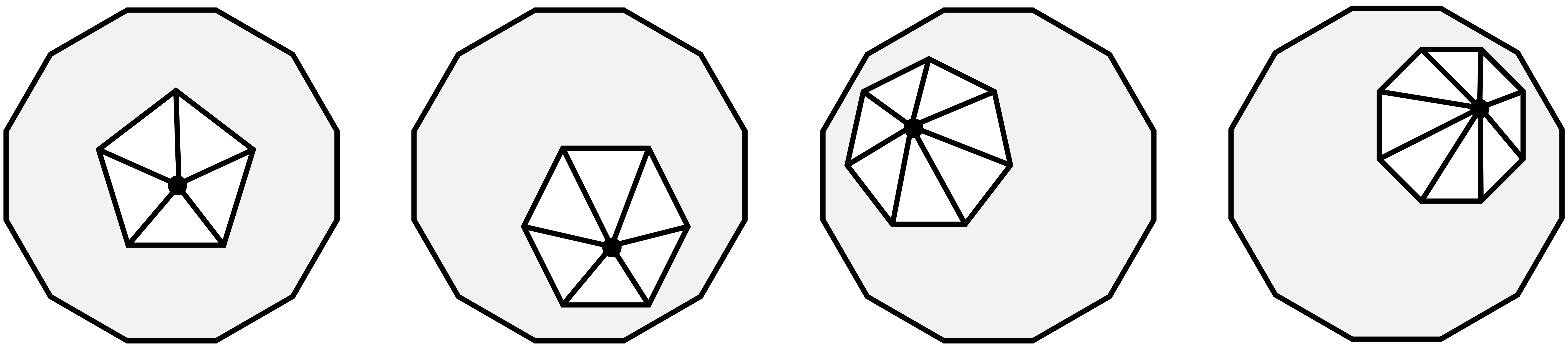
底面が非平面 n 角形

切り口の全ての頂点は
平面上に載っていない

対象とするパーツへの着

次数分布が
同じ多面体

- 底面の形が異なるが，同じ特徴を持つ多面体をグループとする
  - 辺展開アルゴリズムをまとめて設計できる
  - Edge-overlap-freeness となるための条件を示す



注目した点

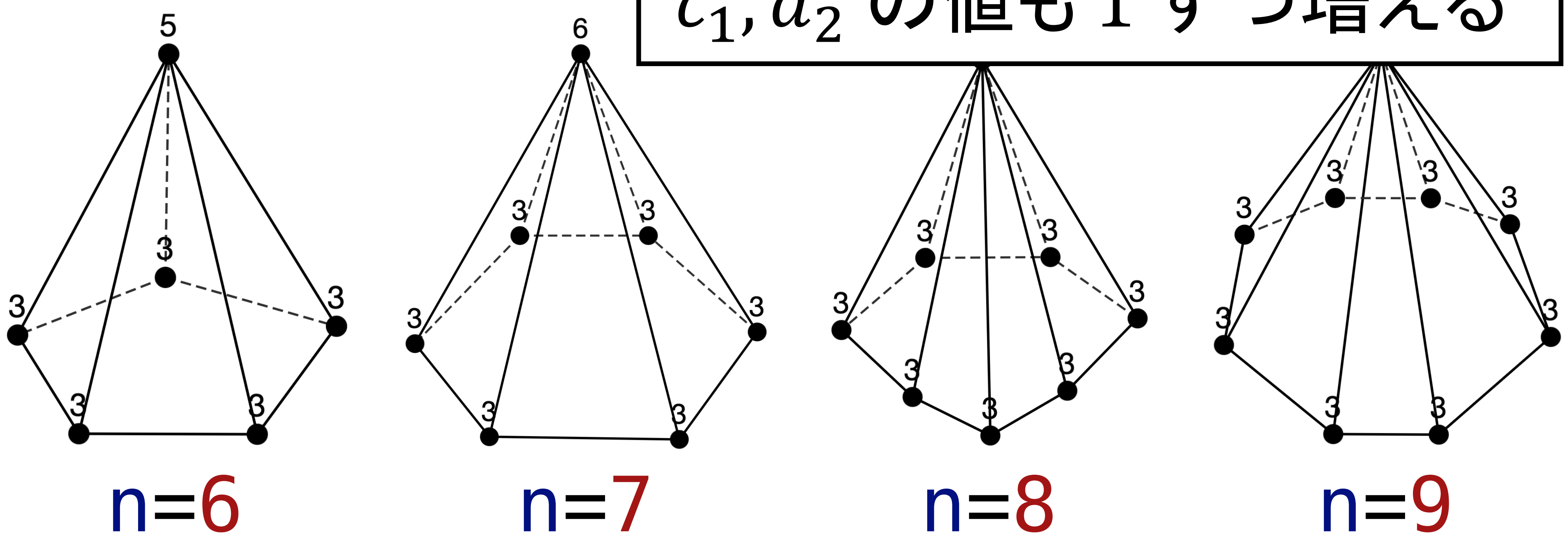
底面の形は，$n \rightarrow n+1$と，段階的に増えていくため，段階的に頂点数が増えていく多面体の系列に着目すればよいのでは？

既知の多面体の次数分布

次数分布の見方

$d_1^{c_1}, d_2^{c_2}, \ldots$：次数 d_1 の頂点が c_1 個，次数 d_2 の頂点が c_2 個，…

角錐



n の値が 1 大きくなると，
c_1, d_2 の値も 1 ずつ増える

n=4：3^4
n=5：$3^4, 4^1$
n=6：$3^5, 5^1$
n=7：$3^6, 6^1$
n=8：$3^7, 7^1$
n=9：$3^8, 8^1$

観察2

角錐の次数分布は，$3^{n-1}, (n-1)^1$ の形で書くことができる．

既知の多面体の次数分布

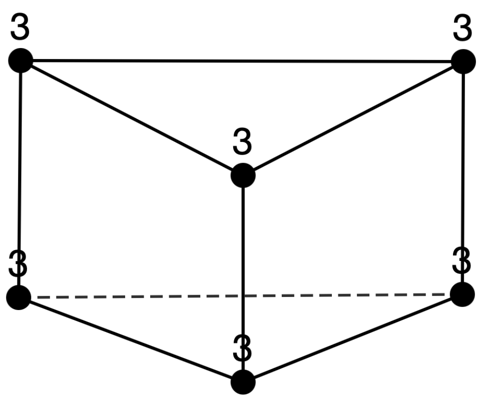
次数分布の見方

$d_1^{c_1}, d_2^{c_2}, \ldots$: 次数 d_1 の頂点が c_1 個，次数 d_2 の頂点が c_2 個，…

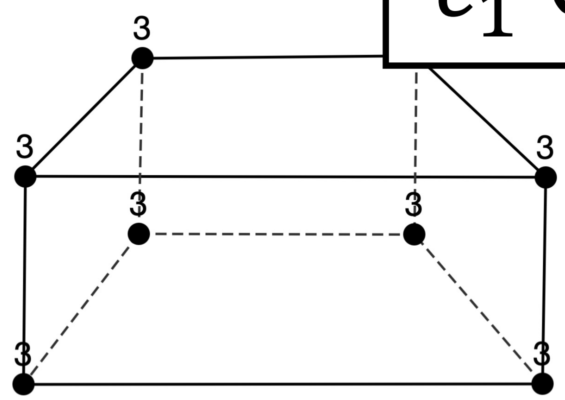
n の値が 2 大きくなると，
c_1 の値も 2 ずつ増える

n=6: 3^6
n=8: 3^8
n=10: 3^{10}
n=12: 3^{12}

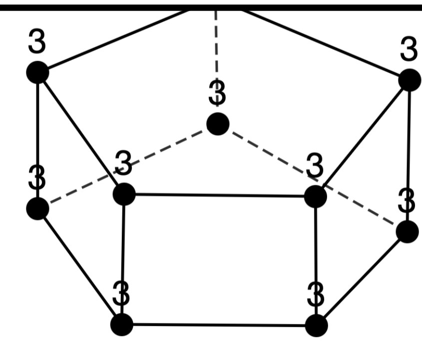
角柱



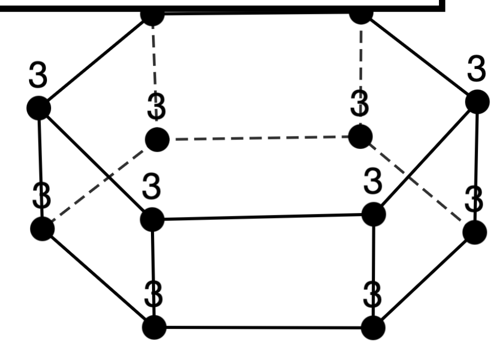
n=6



n=8

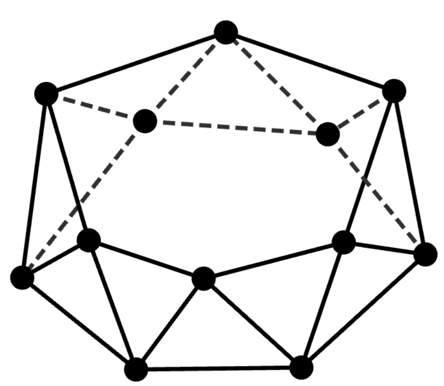


n=10



n=12

反角柱



観察3

角柱の次数分布は，3^n の形で書くことができる．
反角柱の次数分布は，4^n の形で書くことができる．

既知の多面体の次数分布

観察2＋観察3

- 角錐の次数分布は，$3^{n-1}, (n-1)^1$ の形で書くことができる.
- 角柱の次数分布は，3^n の形で書くことができる.
- 反角柱の次数分布は，4^n の形で書くことができる.

角錐・角柱・反角柱を表す次数分布

$$d_1^{n-x}, (n-y)^{c_2} \ \ \text{where} \ \ 0 \le x, y \le n, \ \ x, y \in \mathbb{N}$$

多面体には，n の値によらない次数も存在する.

本研究においてグループ分けに用いた次数分布

$$d_1^{n-x}, (n-y)^{c_2}, d_3^{c_3}, \dots, d_k^{c_k} \ \ \text{where} \ \sum_{i=2}^{k} c_i = x$$

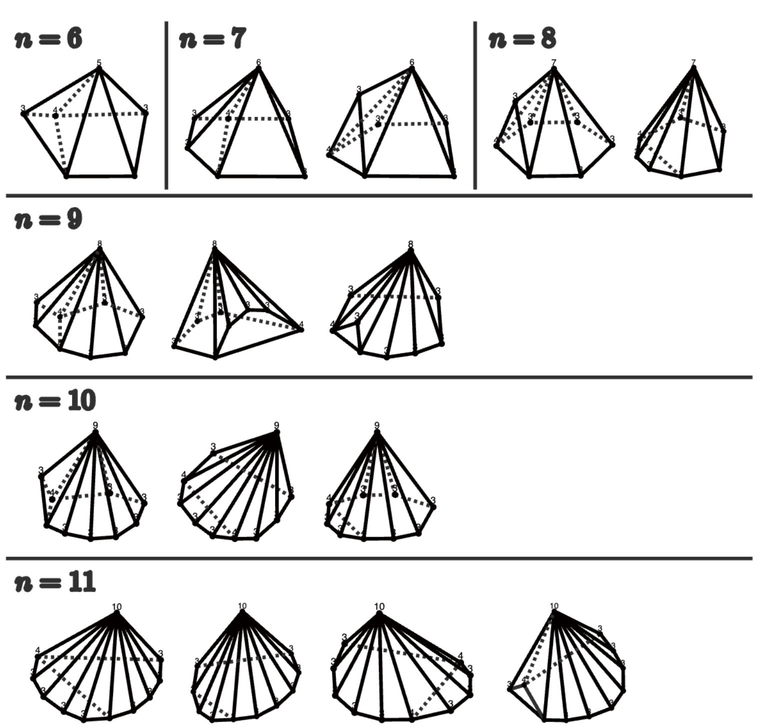
$d_1^{n-x}, (n-y)^{c_2}, \ldots, d_k^{c_k}$ となる多面体

手順

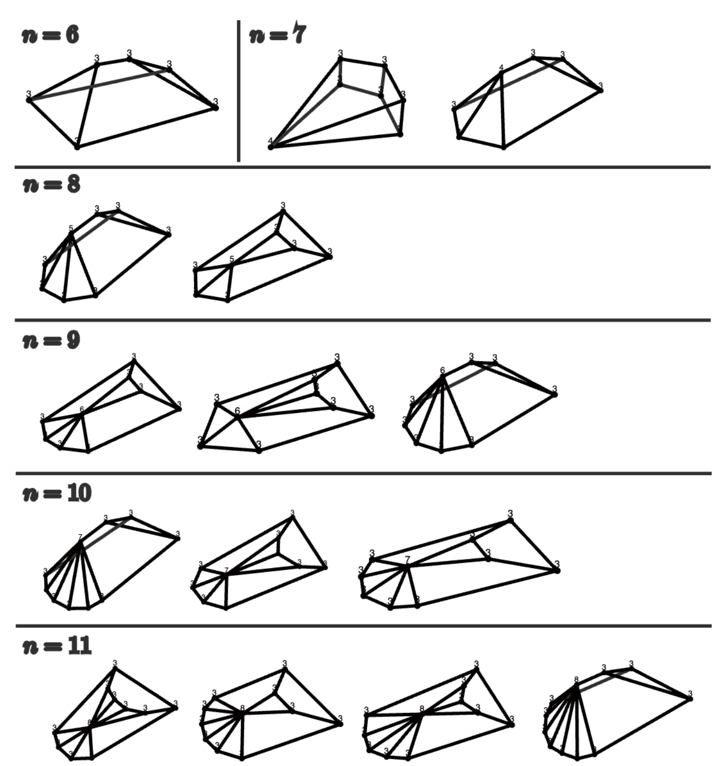
Step 1. 非同型な多面体グラフを列挙 (頂点数 $4 \le n \le 11$)

Step 2. 各多面体グラフに対して，次数分布を計算

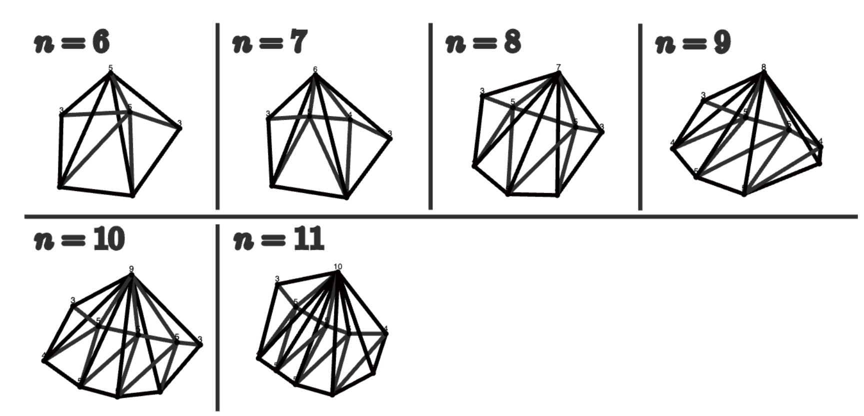
Step 3. 同じ次数分布で表される多面体をグループでまとめる



$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$



$3^{n-1}, (n-3)^1$



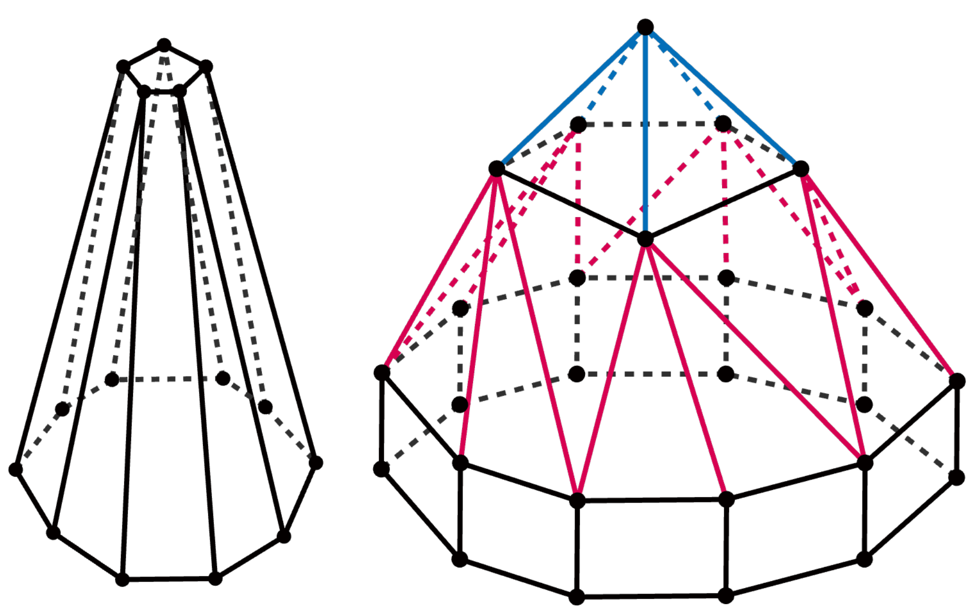
$5^{n-5}, (n-1)^1, 3^2, 4^2$

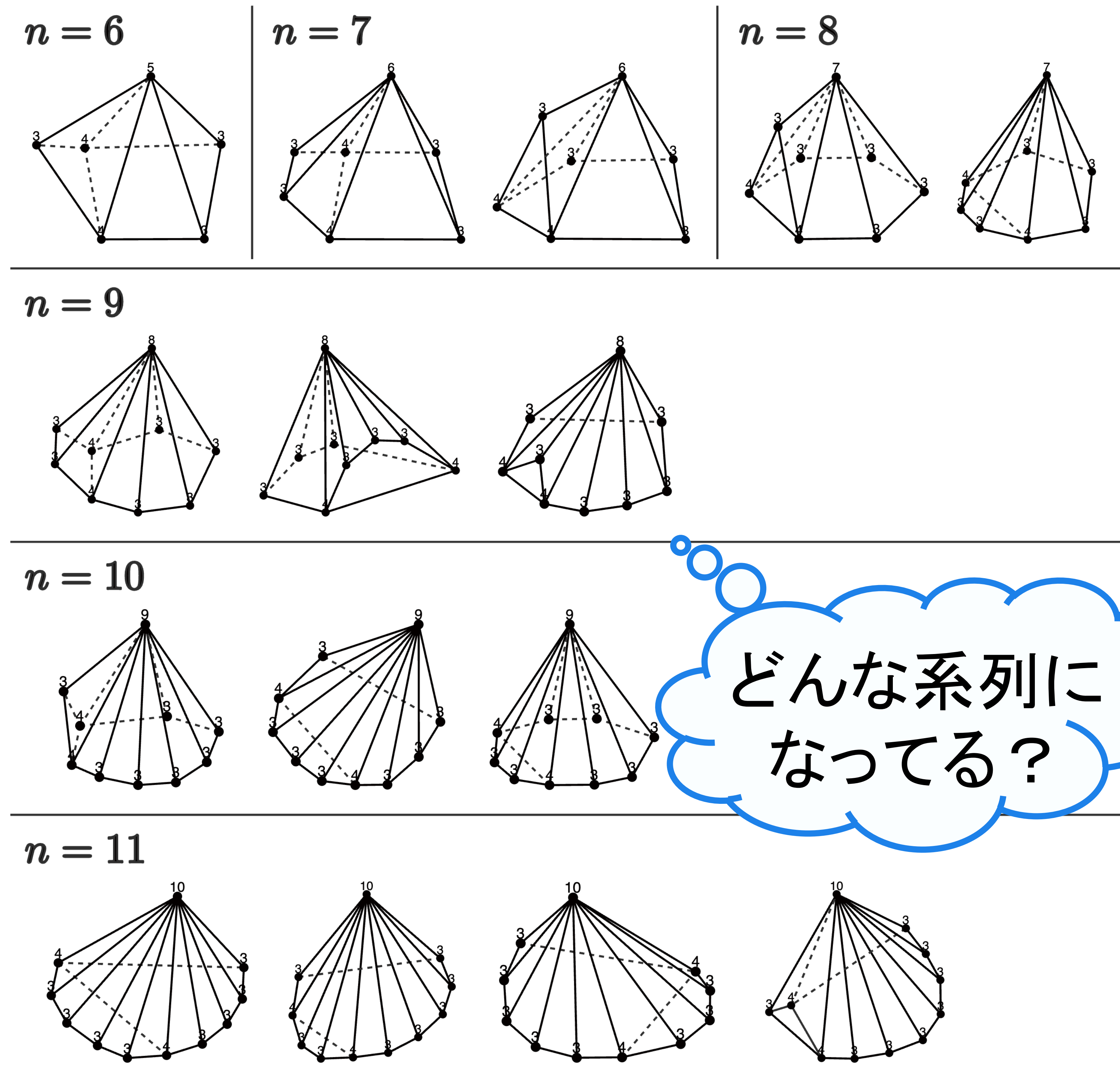
…

$d_1^{n-x}, (n-y)^{c_2}, \dots, d_k^{c_k}$ となる多面体

疑問(再掲)

Prismatoid 以外の多面体で系列をなす多面体のクラスは他にはないの？





どんな系列になってる？

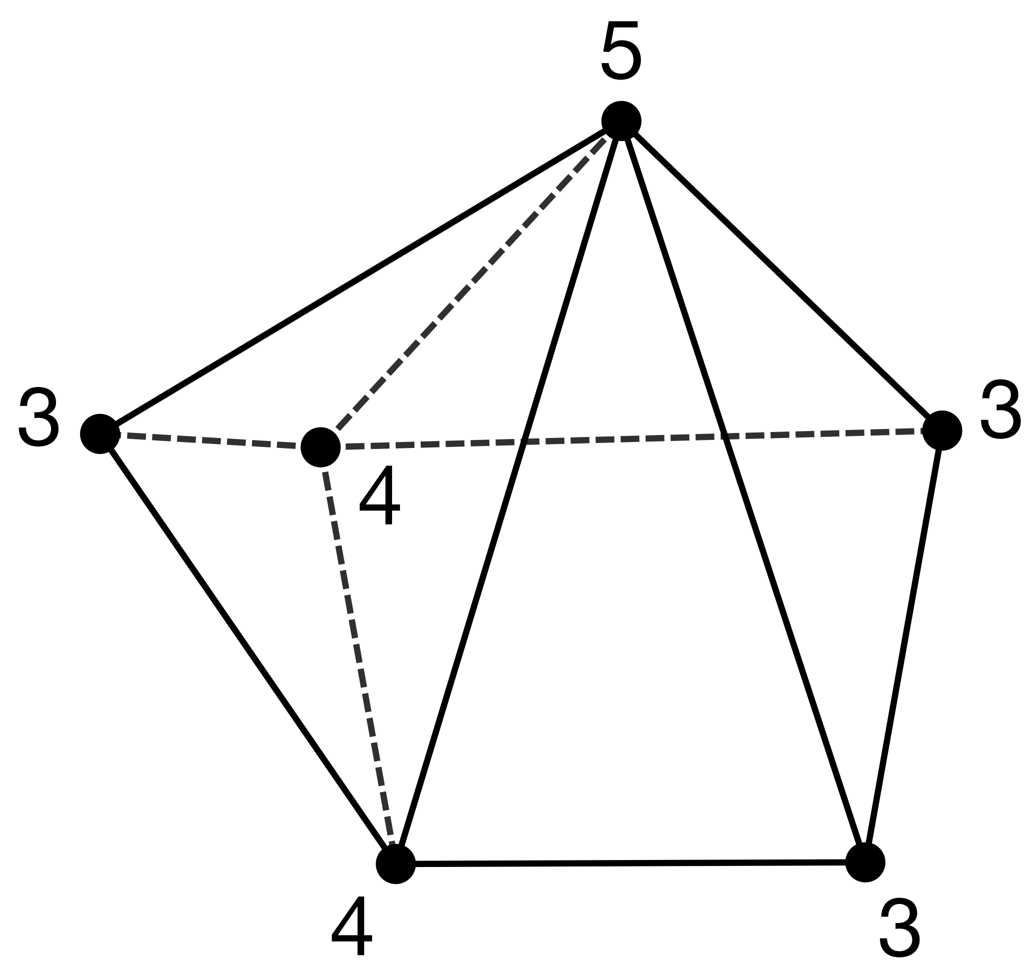
n 頂点$\Rightarrow$ $n+1$ 頂点の多面体の関係

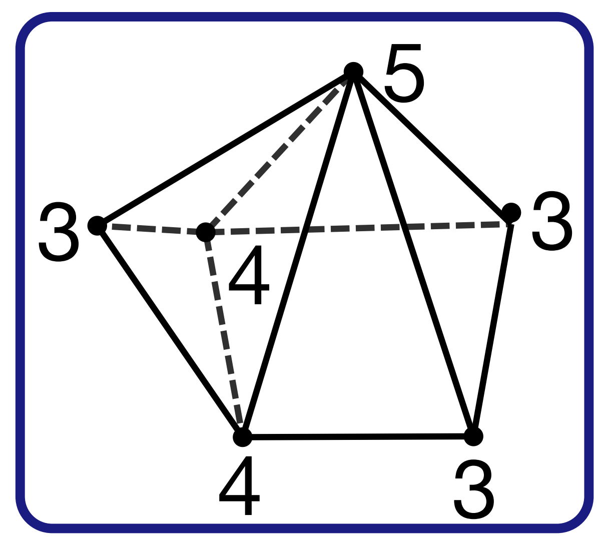
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

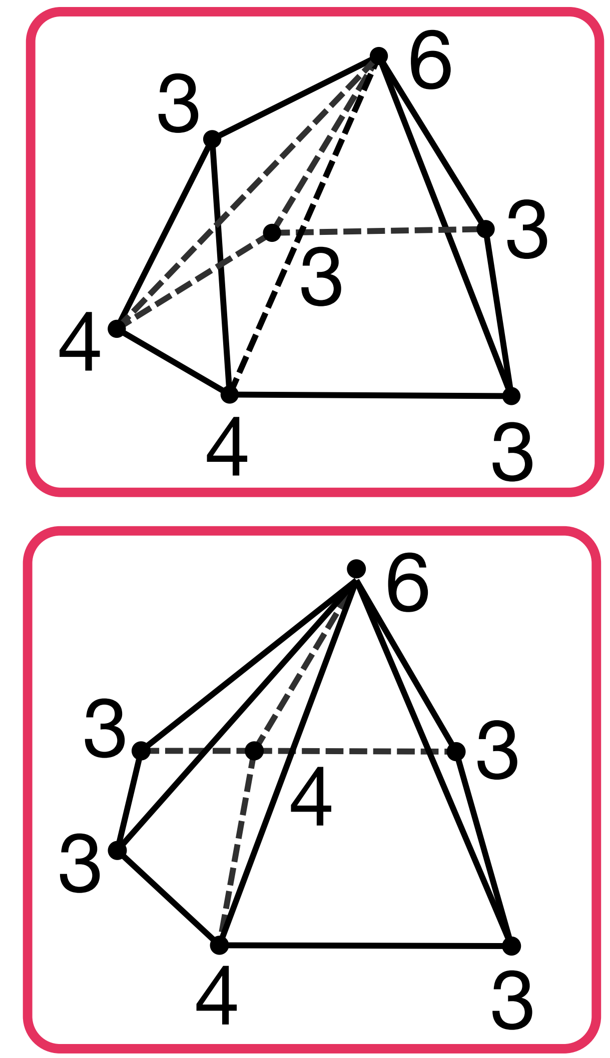
Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





$n = 6$



$n = 7$

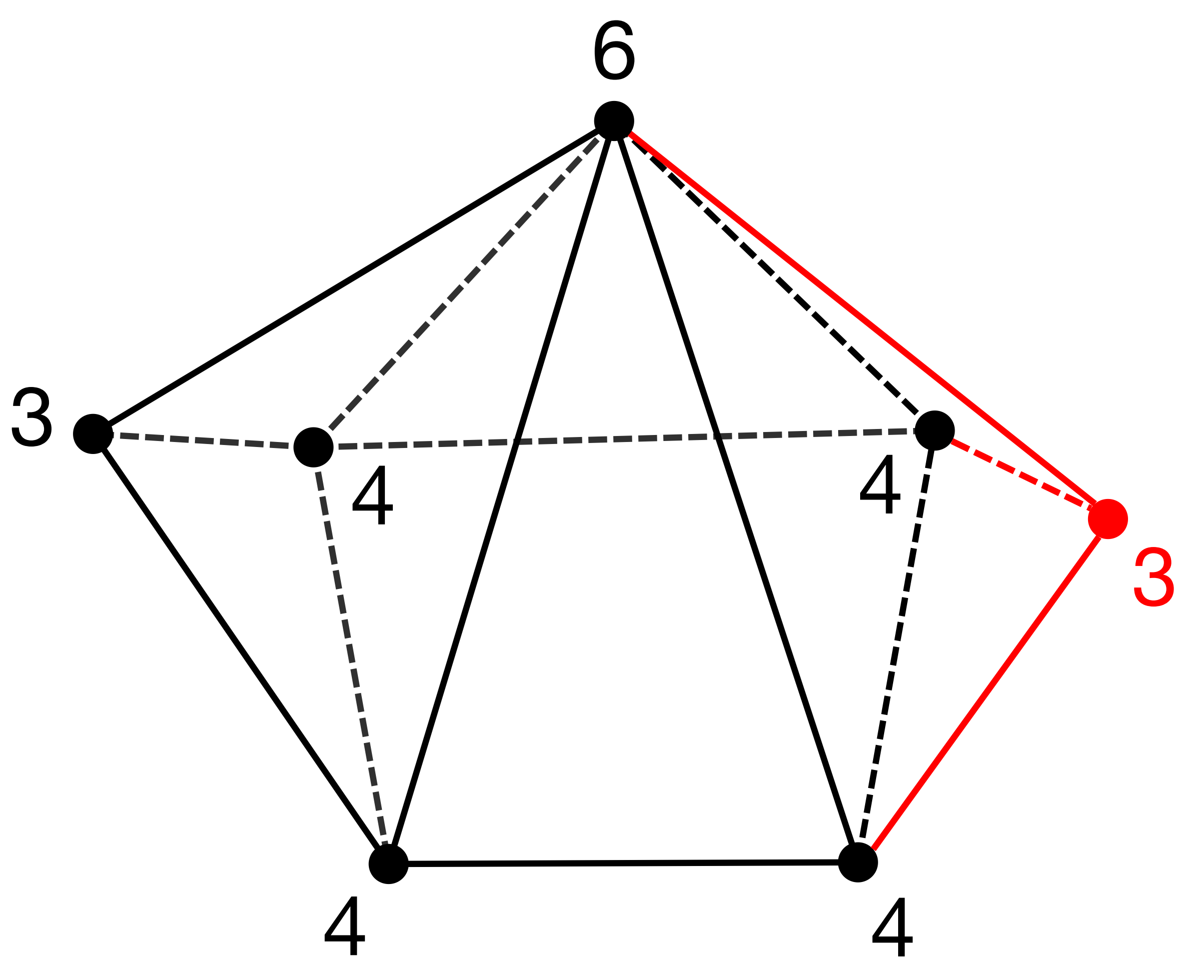
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

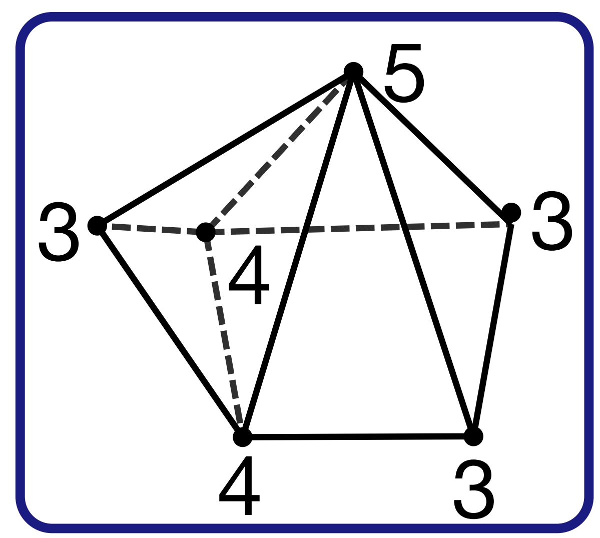
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

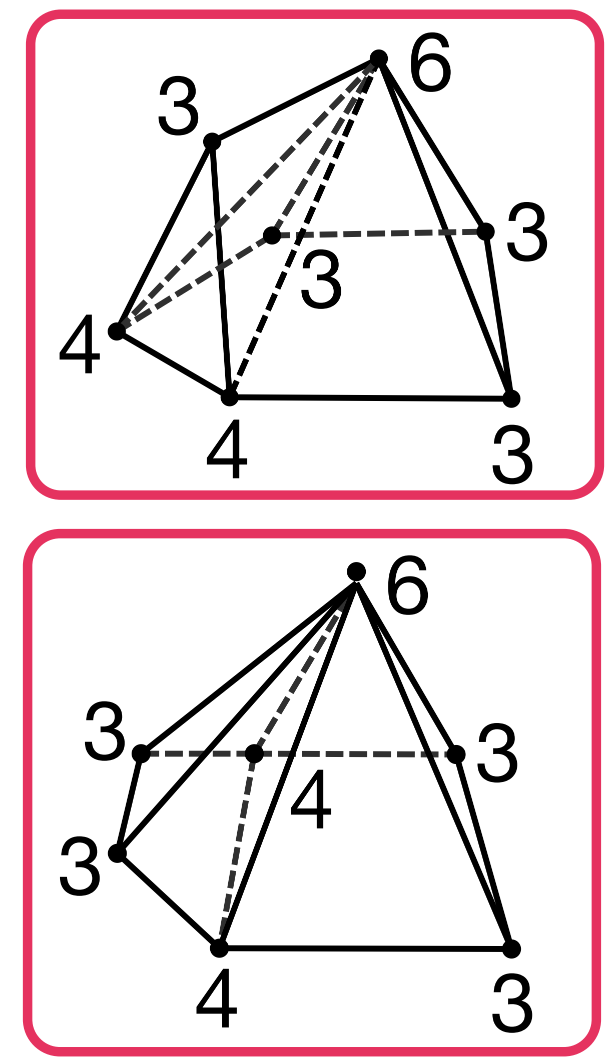
Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





$n=6$



$n=7$

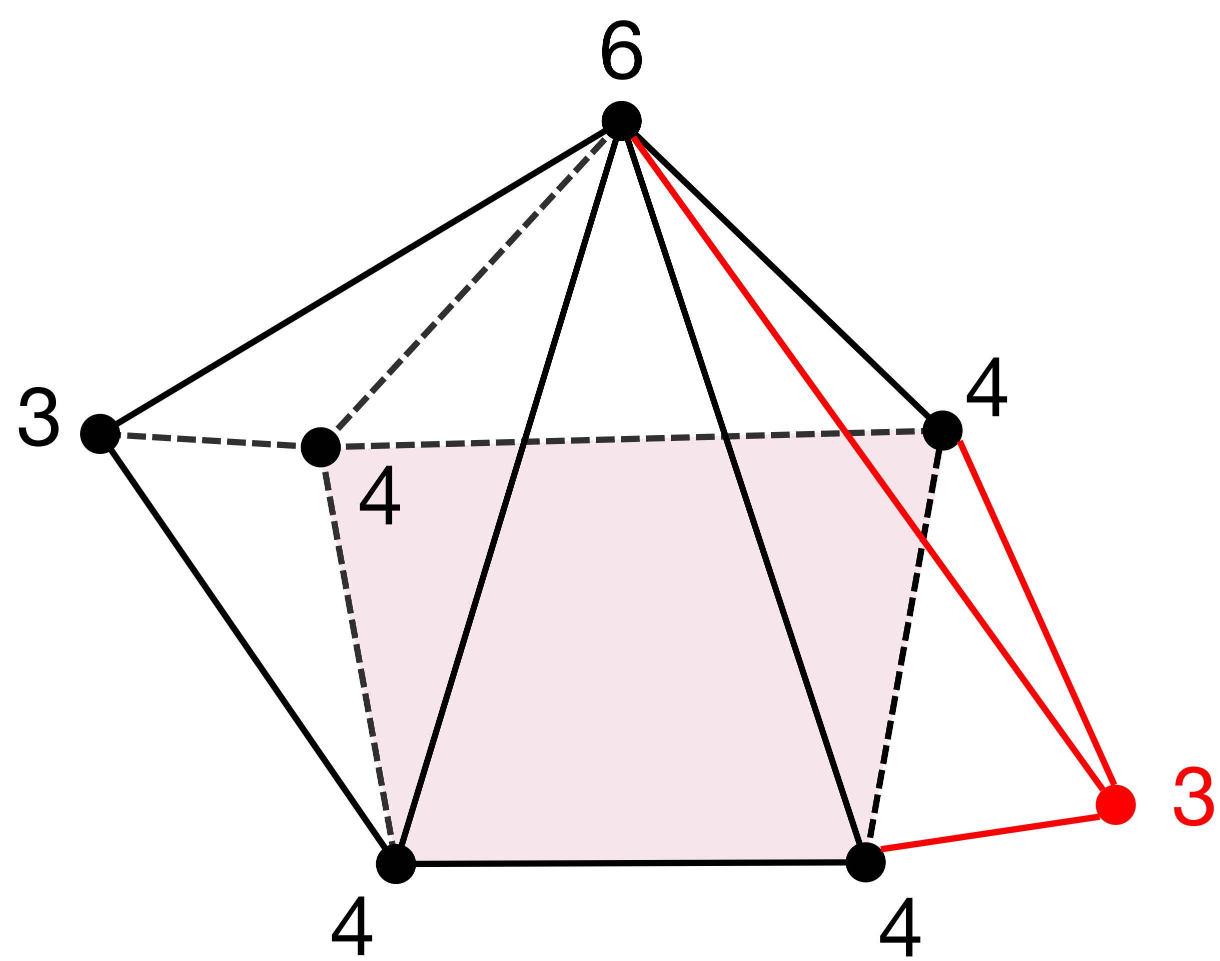
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

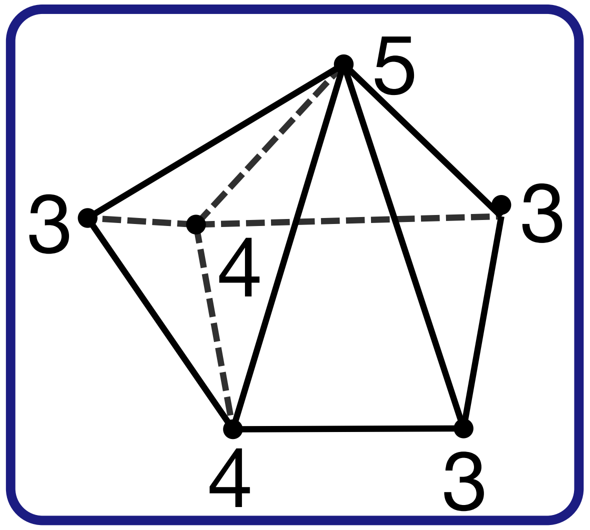
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

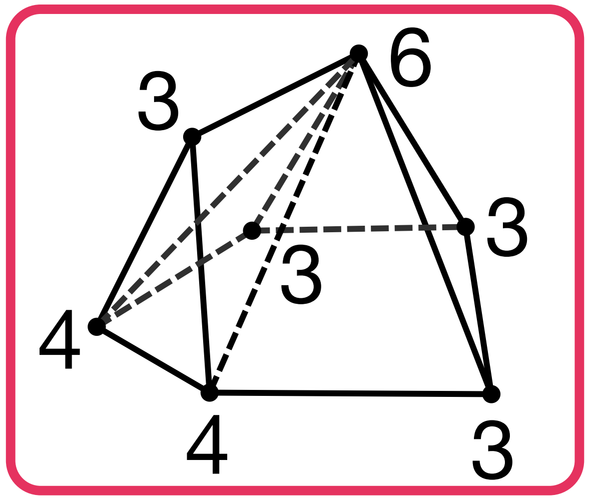
Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

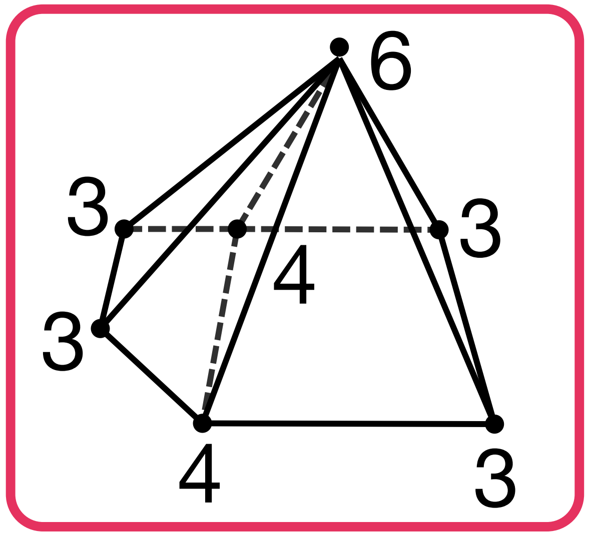
【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





$n=6$





$n=7$

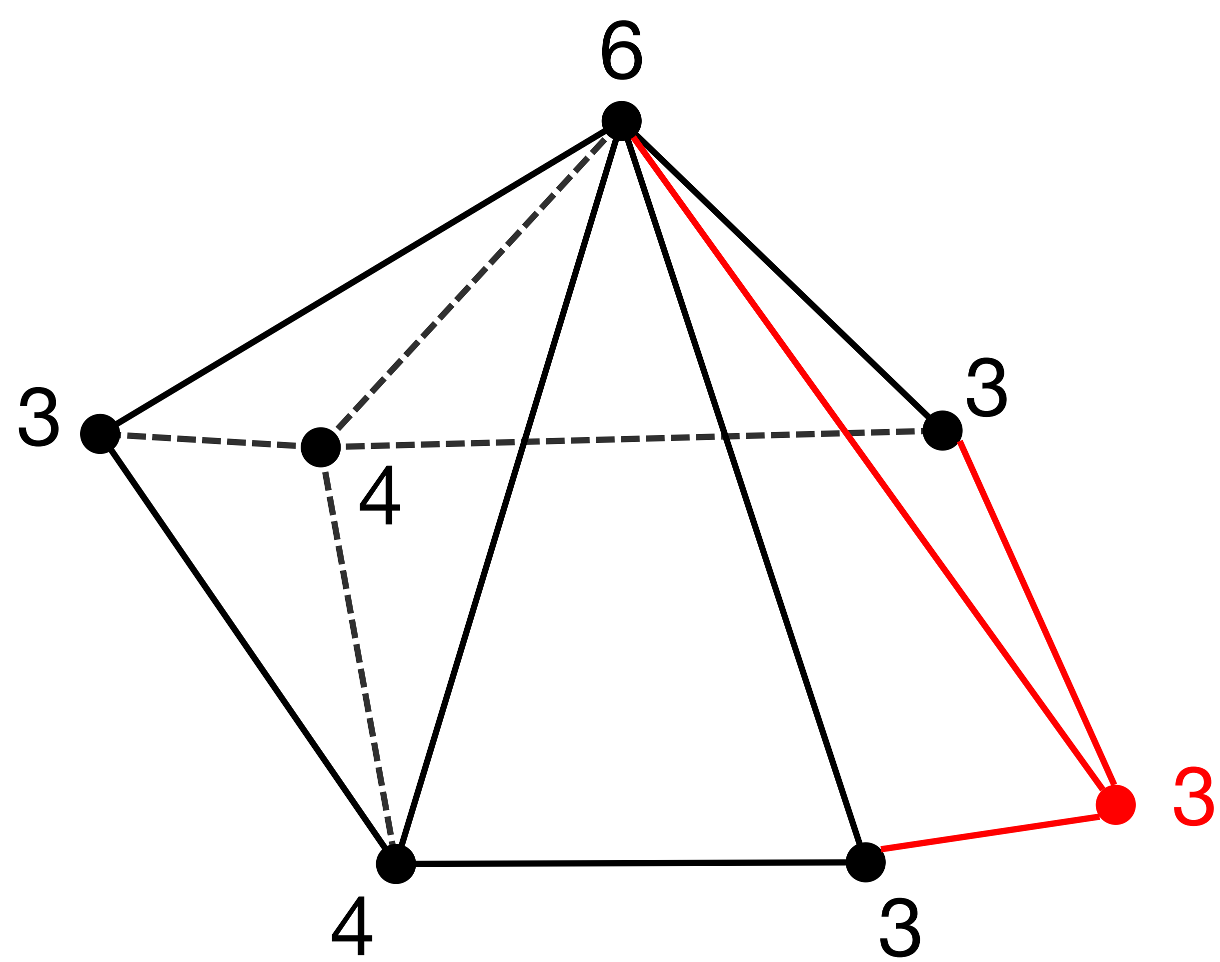
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

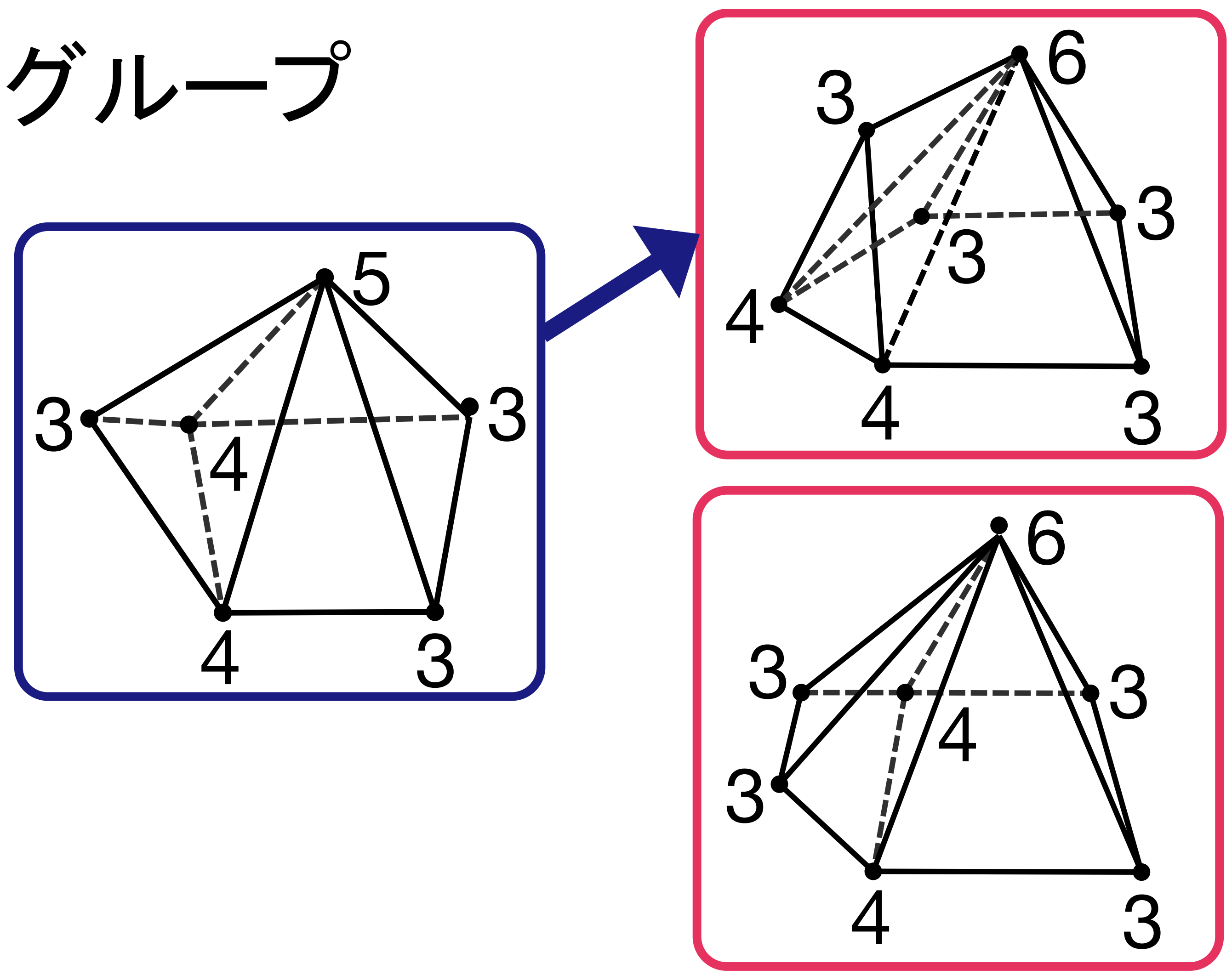
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





$n=6$ $\quad$ $n=7$

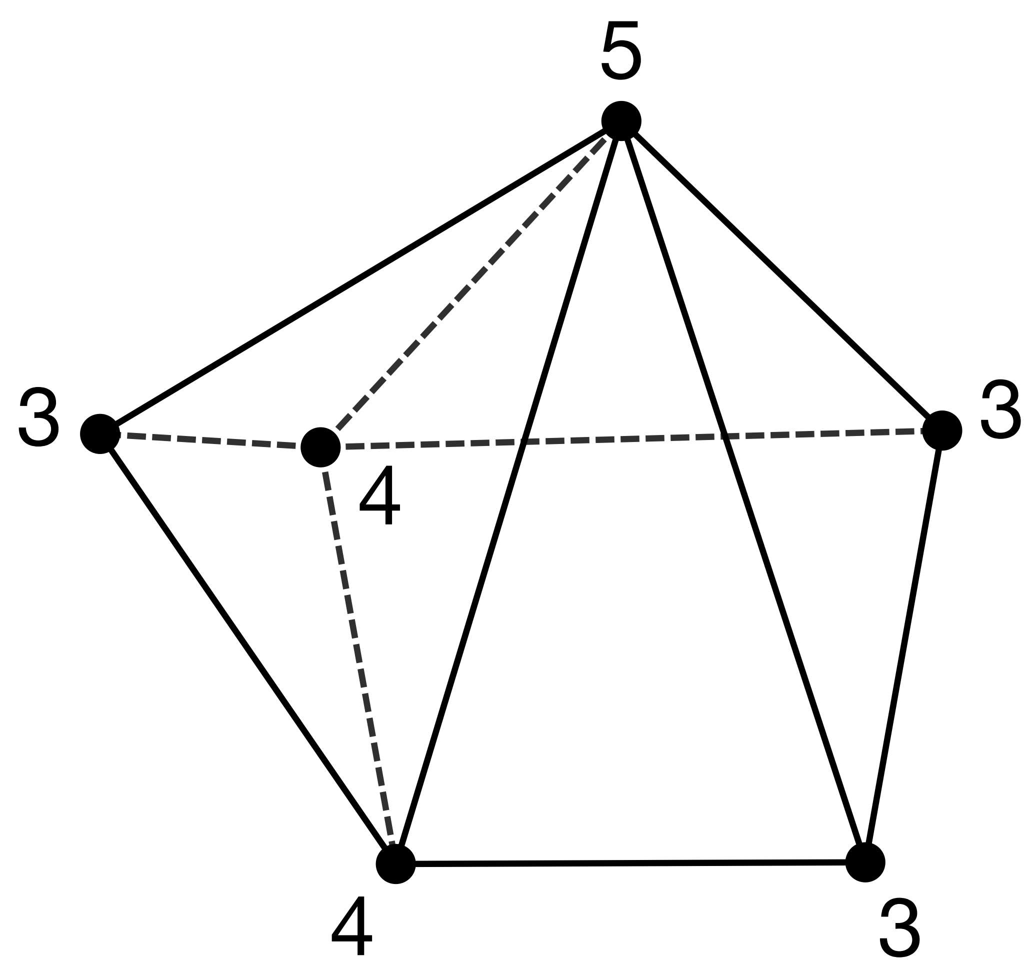
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

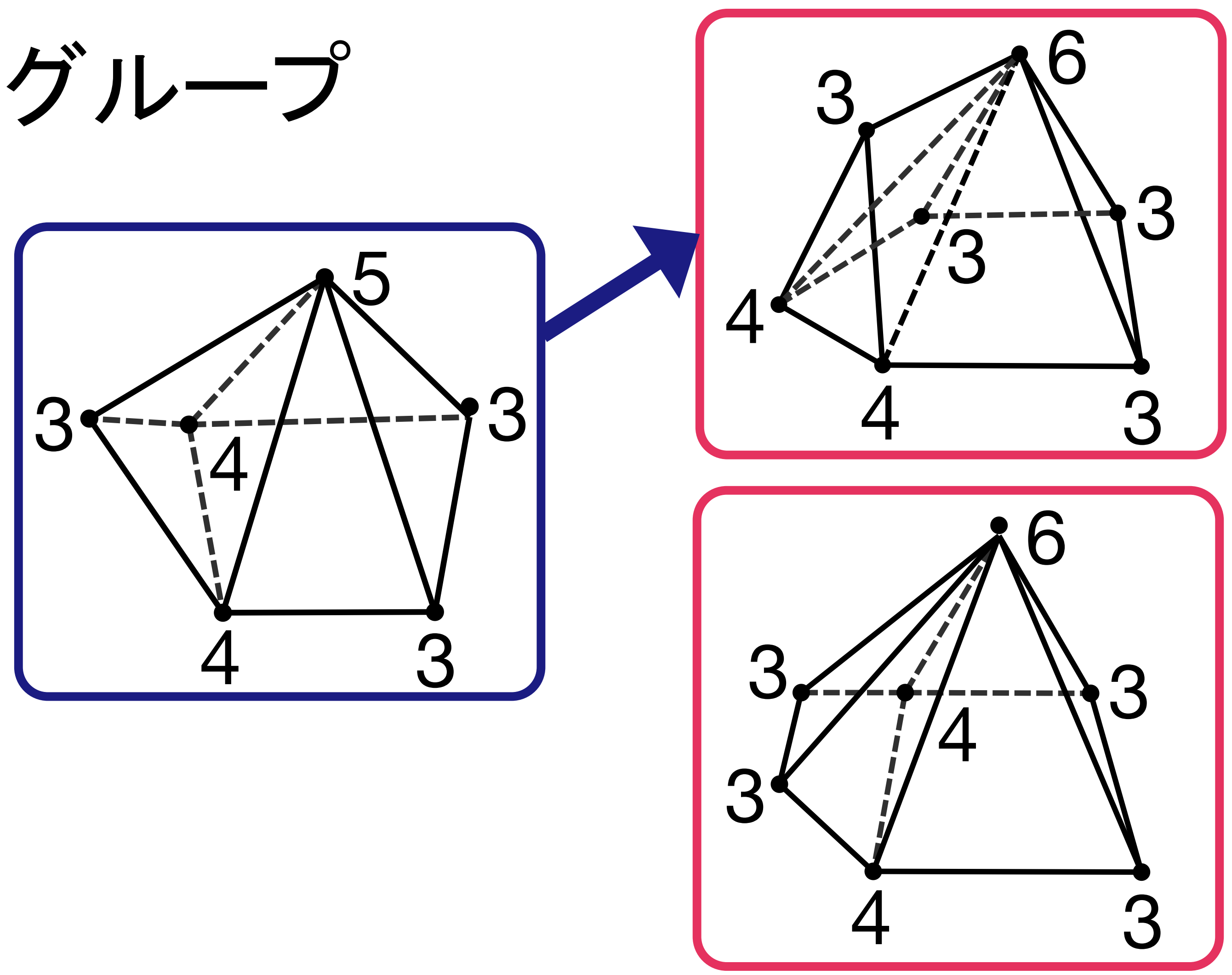
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





$n = 6$ $n = 7$

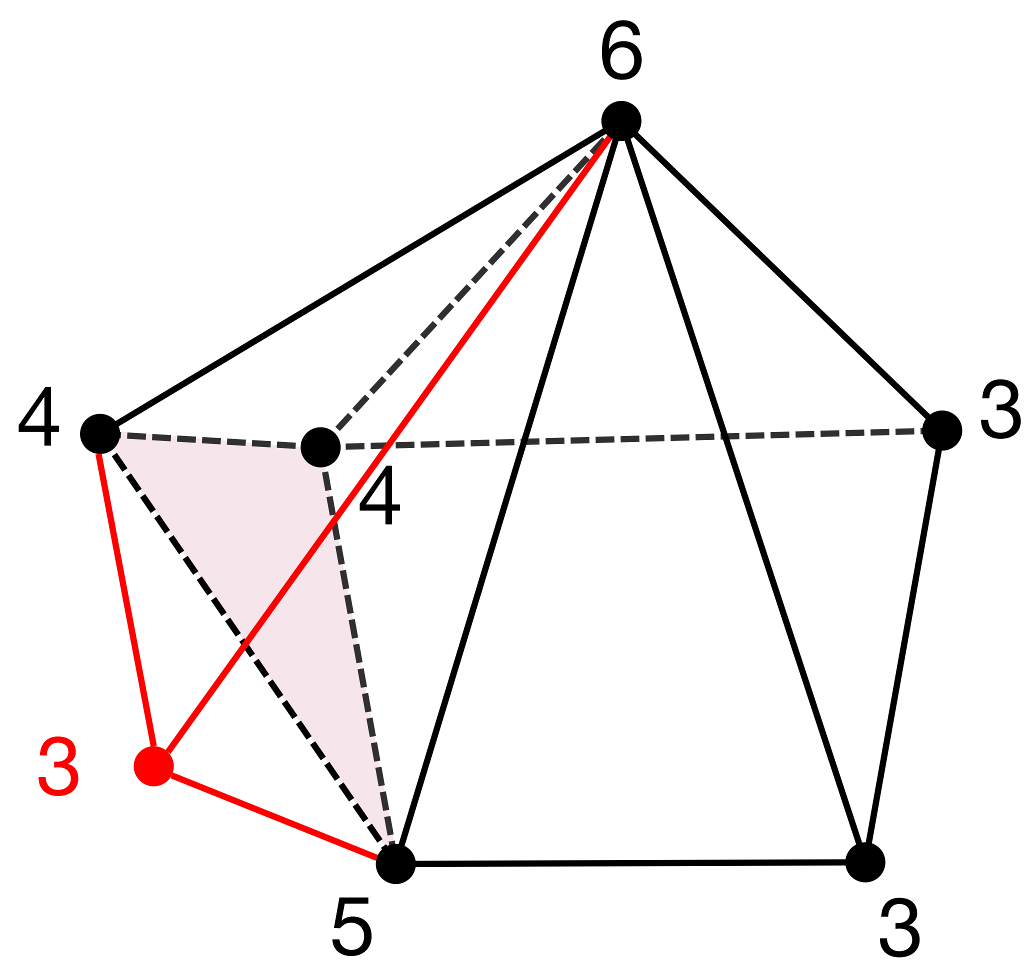
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

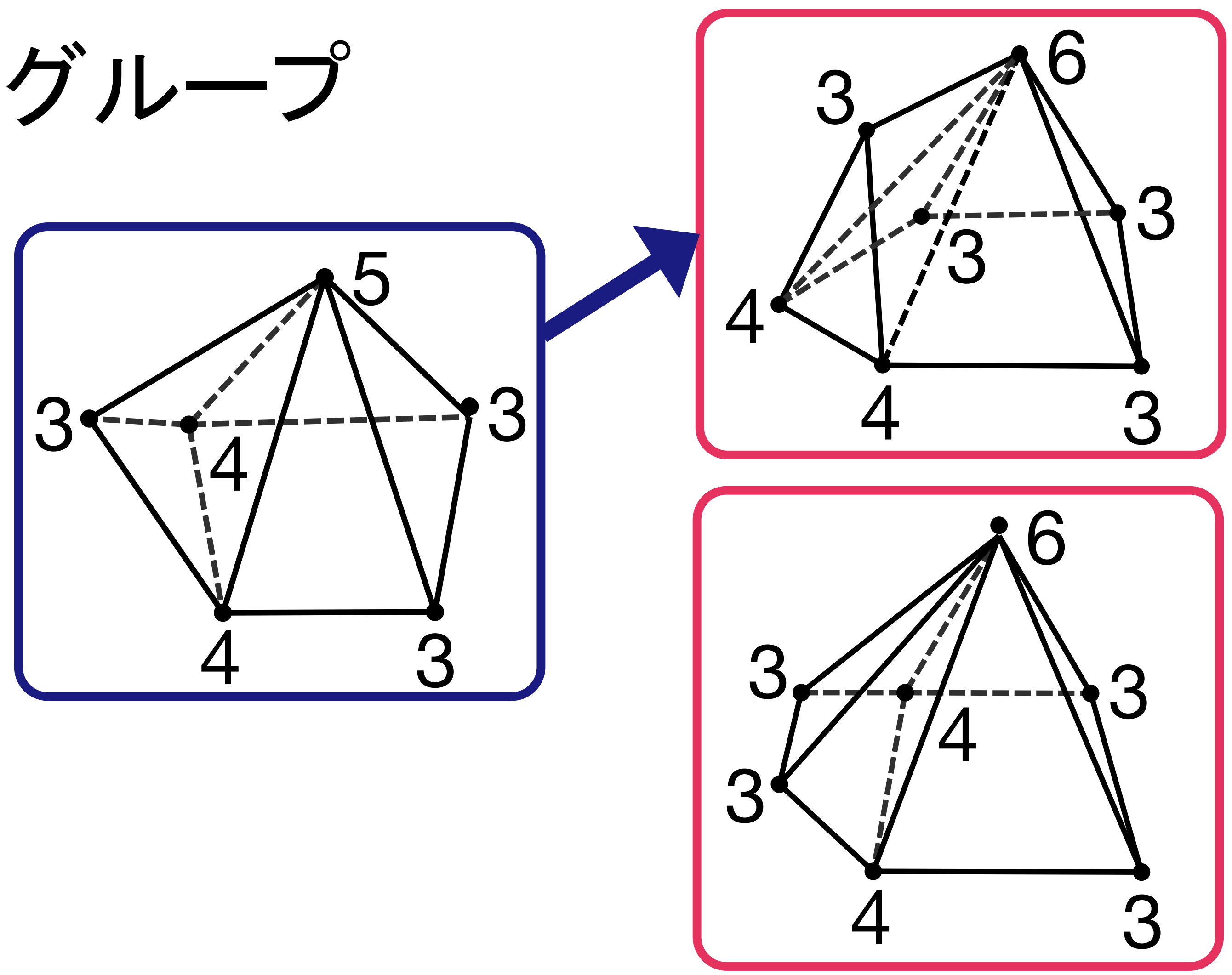
手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加

Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

【例】$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表されるグループ





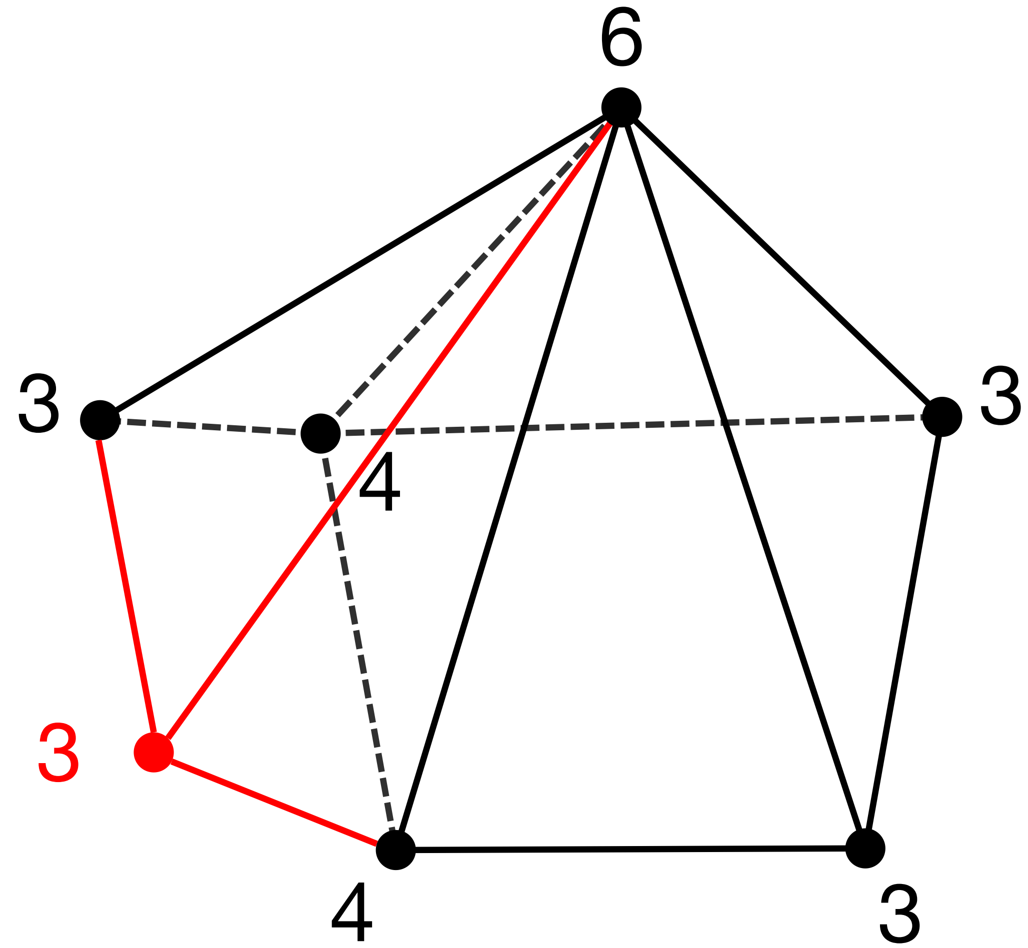
$n=6$ $n=7$

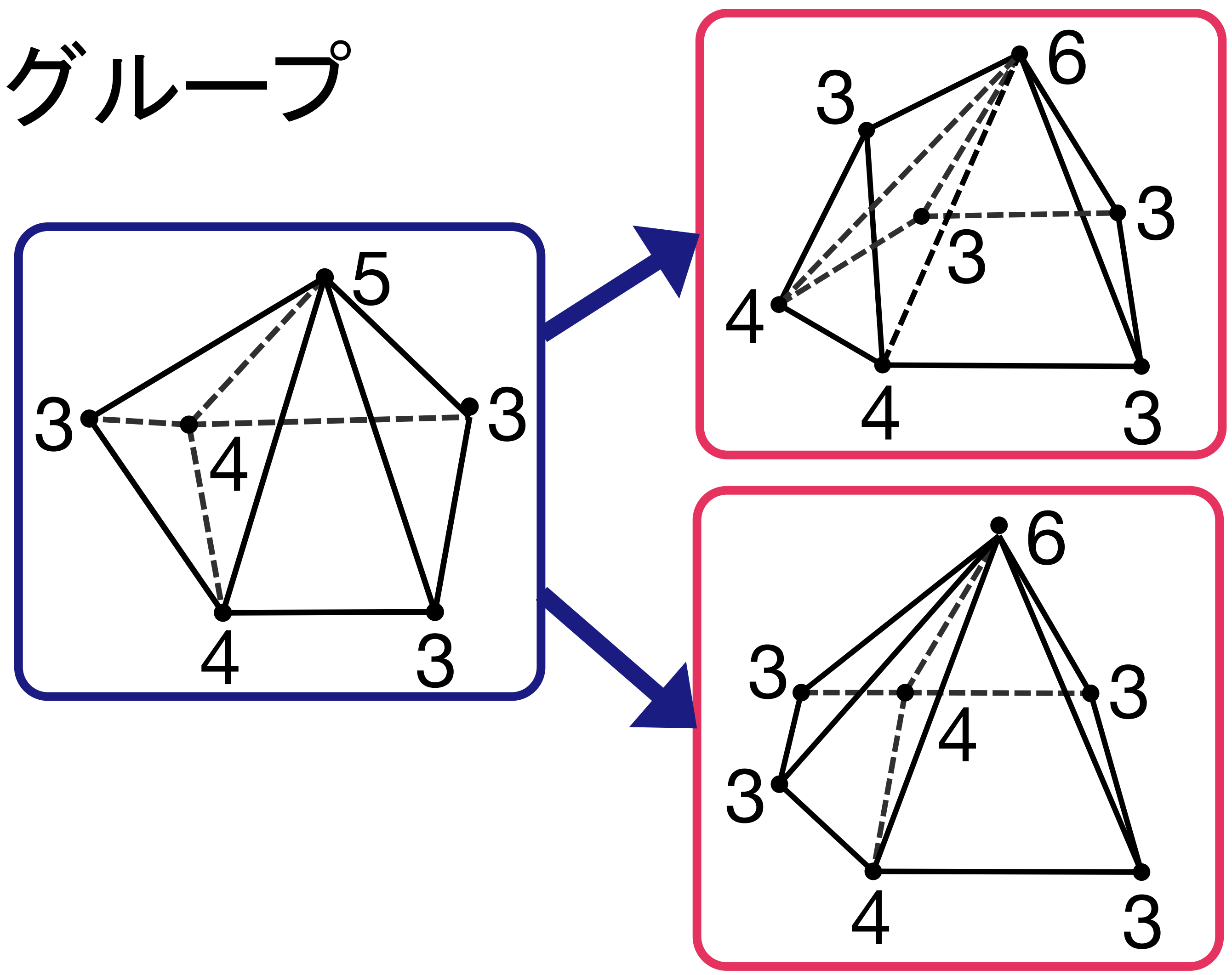
n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係

手順

Step 1. n 頂点のグラフに次数 d_1 の頂点を1つ追加
Step 2. $n+1$ 頂点のグラフと一致すればグラフ間を辺でつなぐ

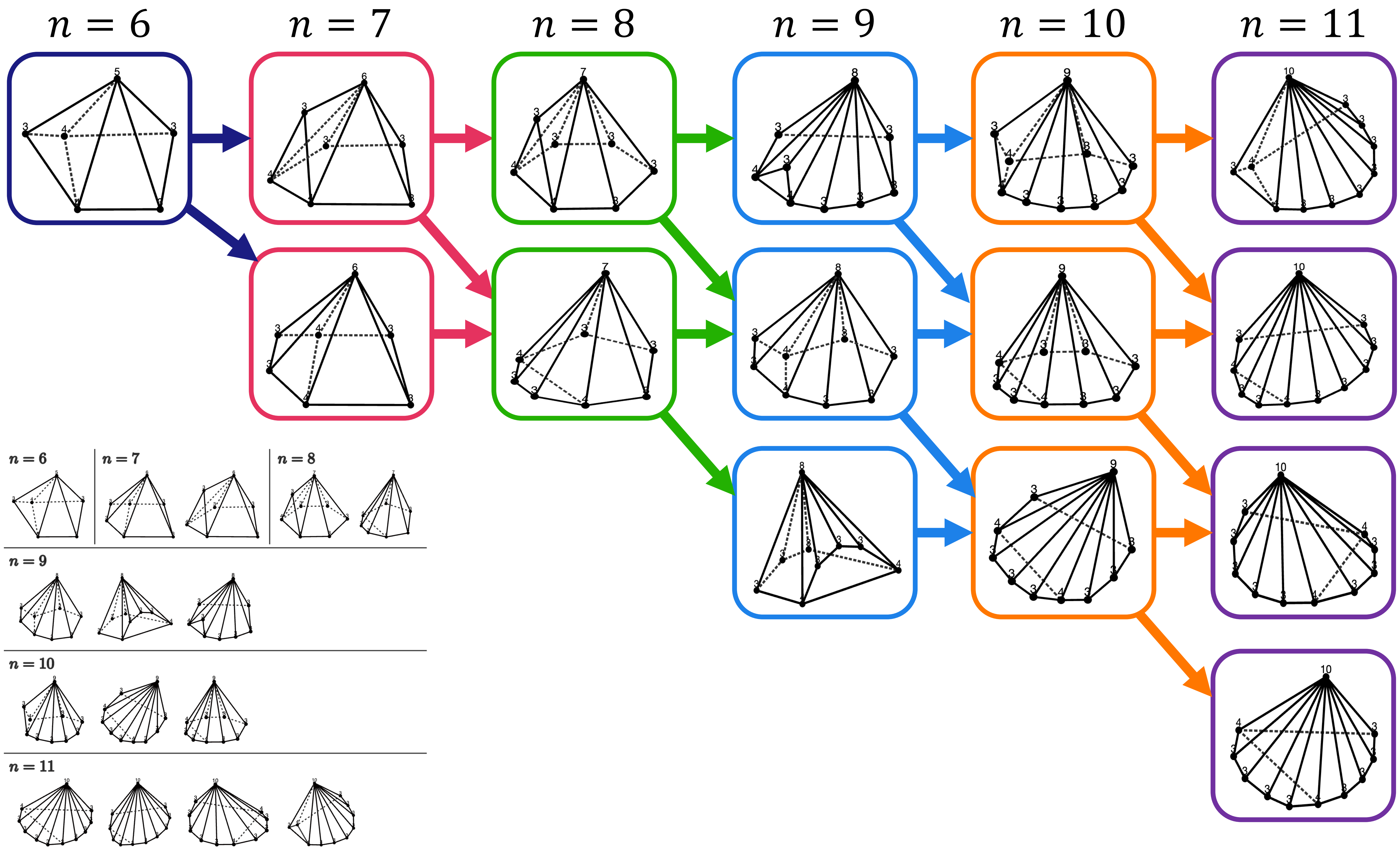
【例】$3^{n-3},(n-1)^1,4^2$ で表されるグループ



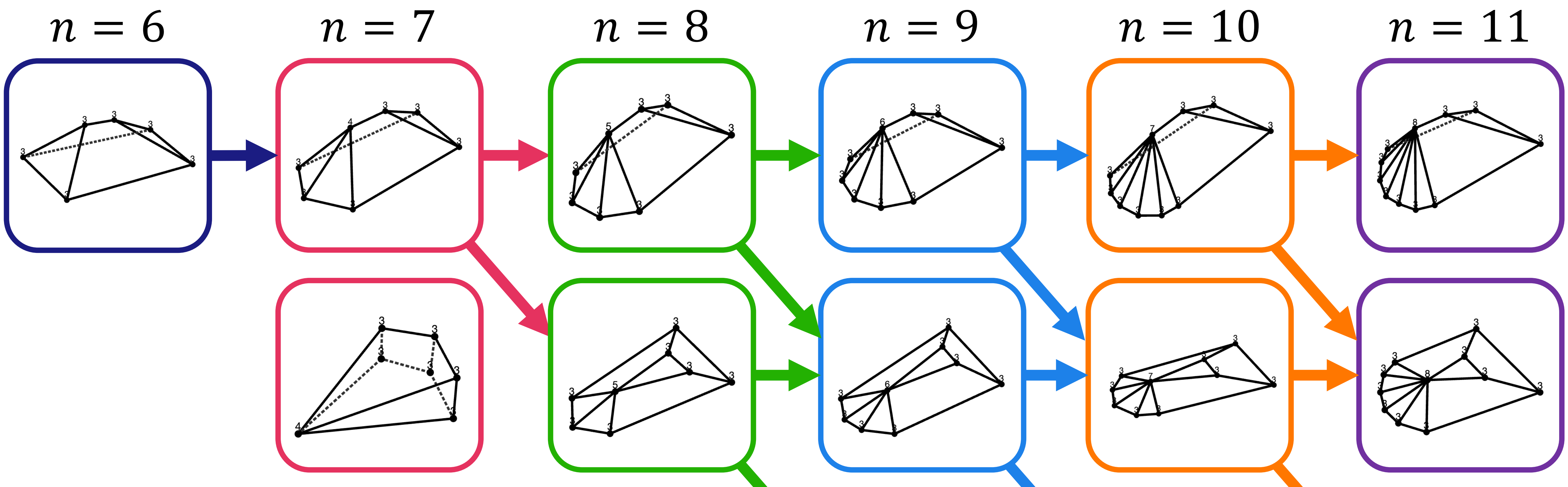


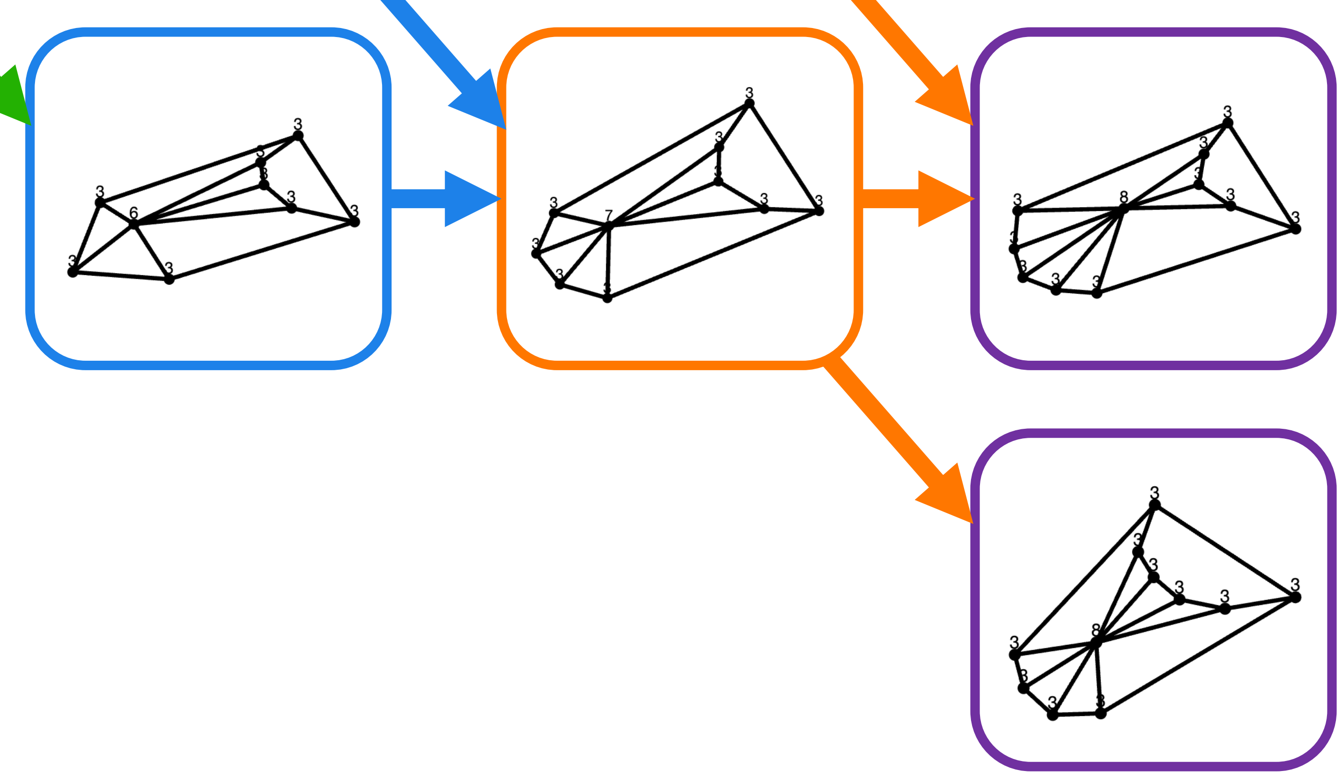
$n=6$ $n=7$

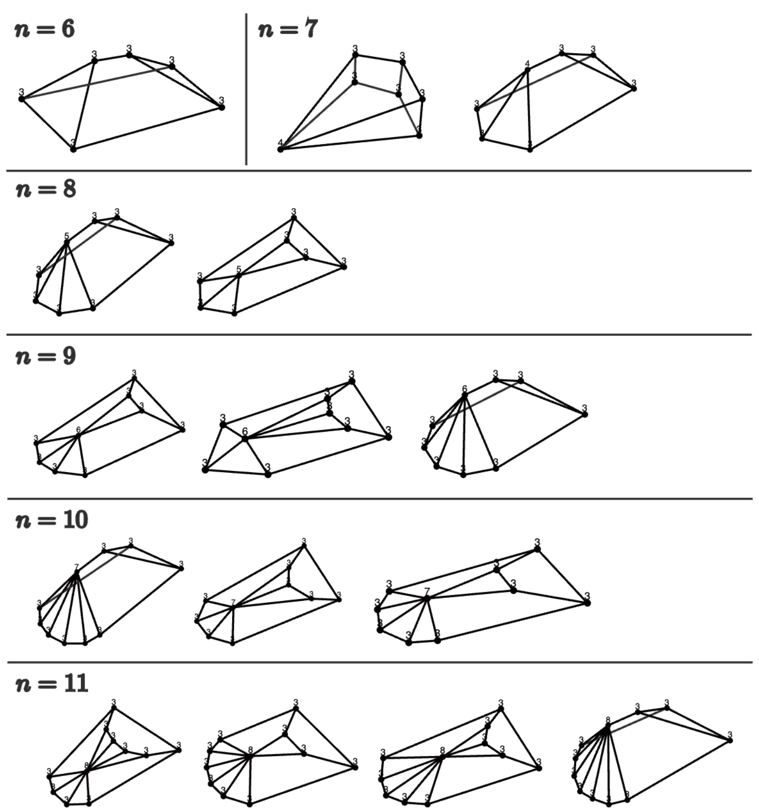
$3^{n-3}, (n-1)^1, 4^2$ で表される多面体



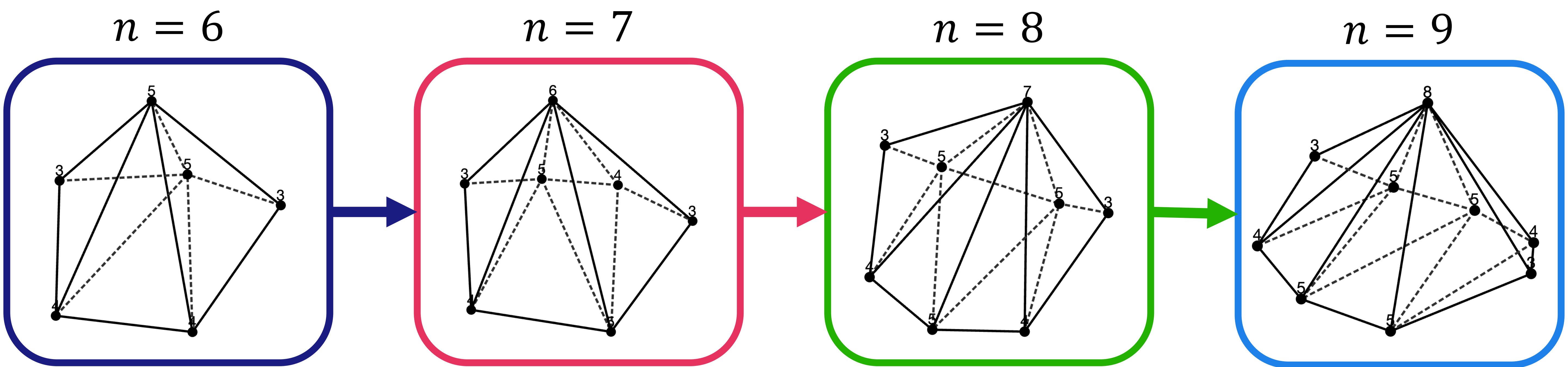
$3^{n-1}, (n-3)^1$ で表される多面体

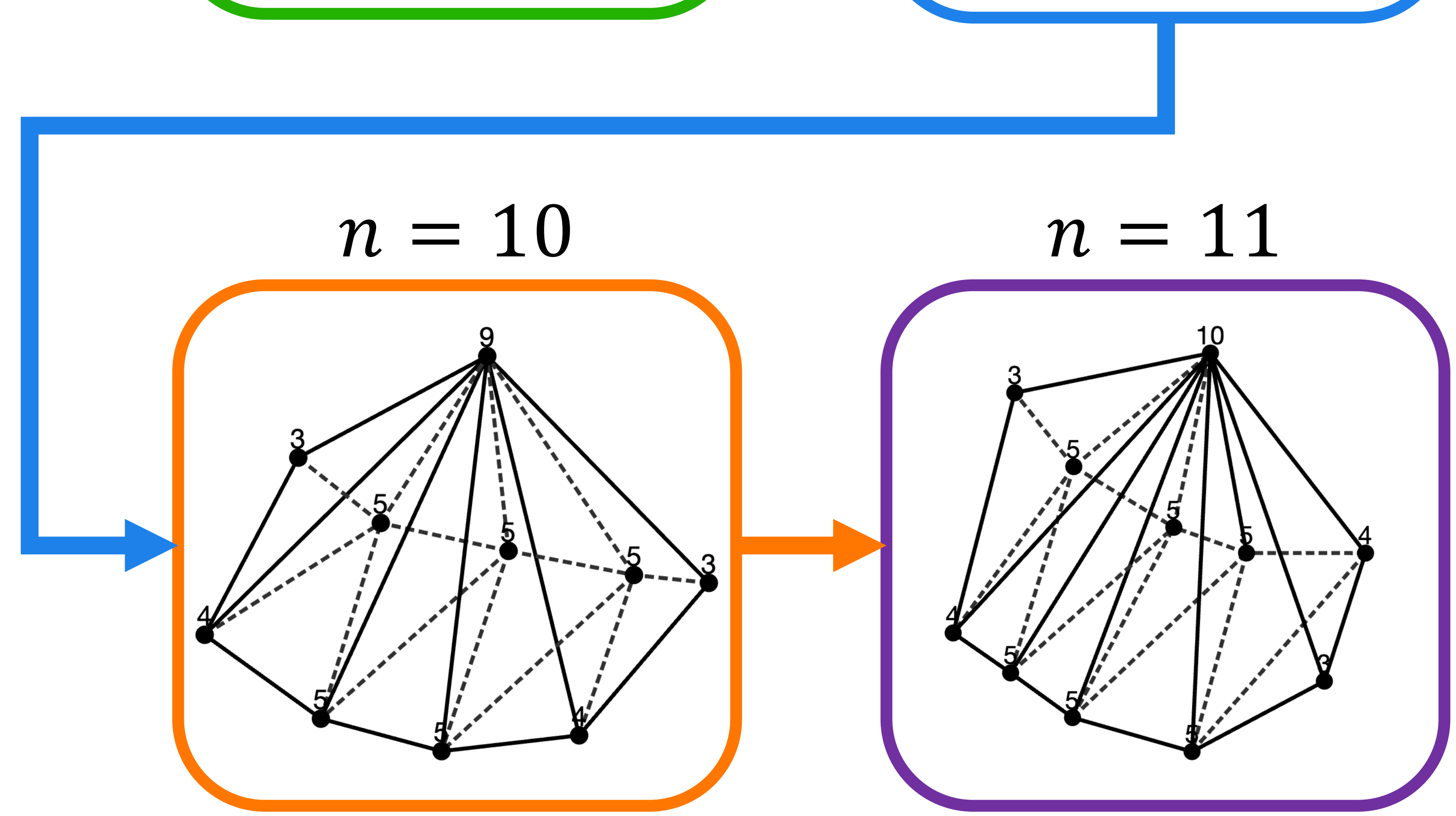


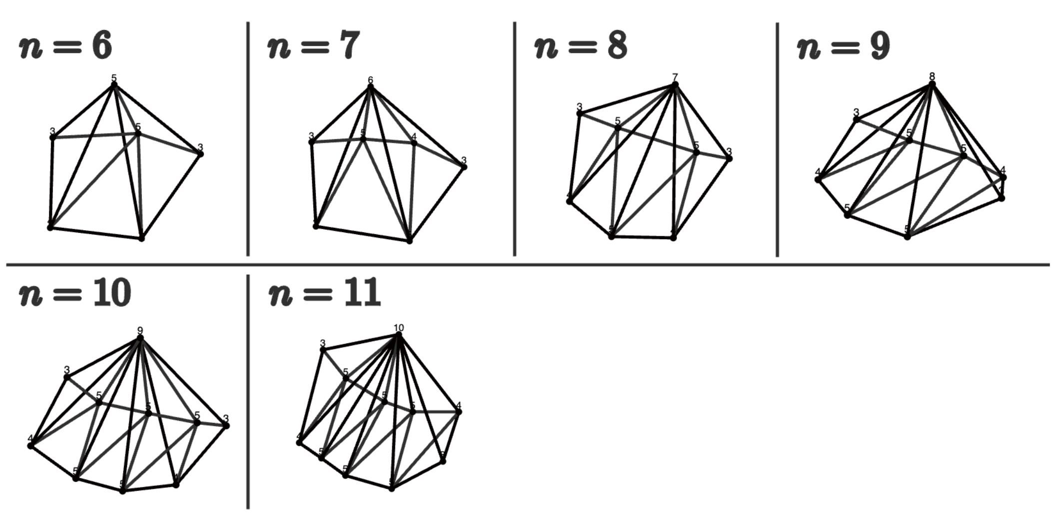




$5^{n-5}, (n-1)^1, 3^2, 4^2$ で表される多面体





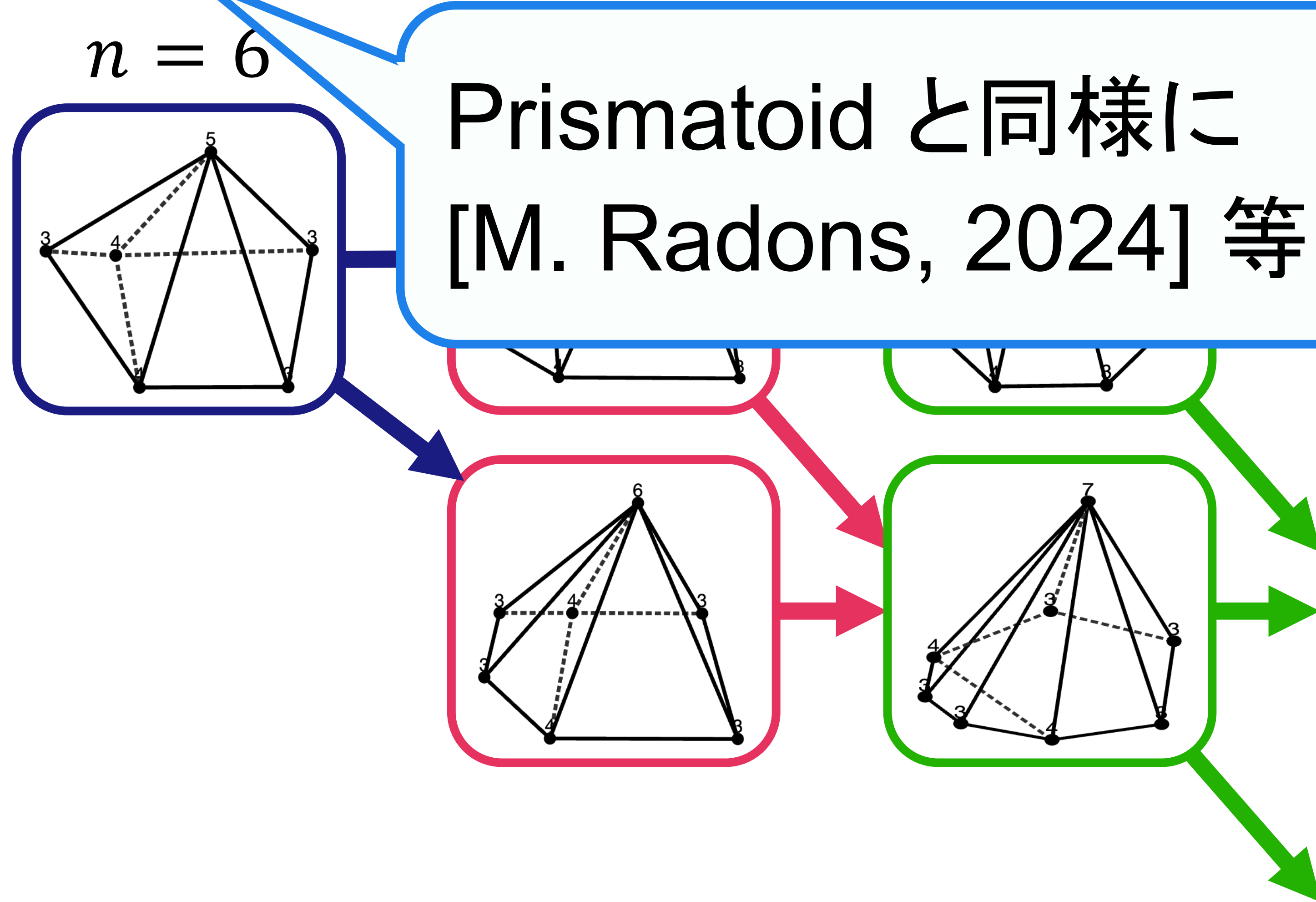


まとめ

- 多面体グラフに対し，次数分布に基づくグループ分けを行った
- 展開図の研究において，研究の対象となる多面体のグループを prismatoid 以外にも拡張できた

【例えば】辺の長さや面の位置関係などの制約を付ける

- Edge-overlap-free となるための条件を示す
- 重なりなく辺展開するアルゴリズムを示す



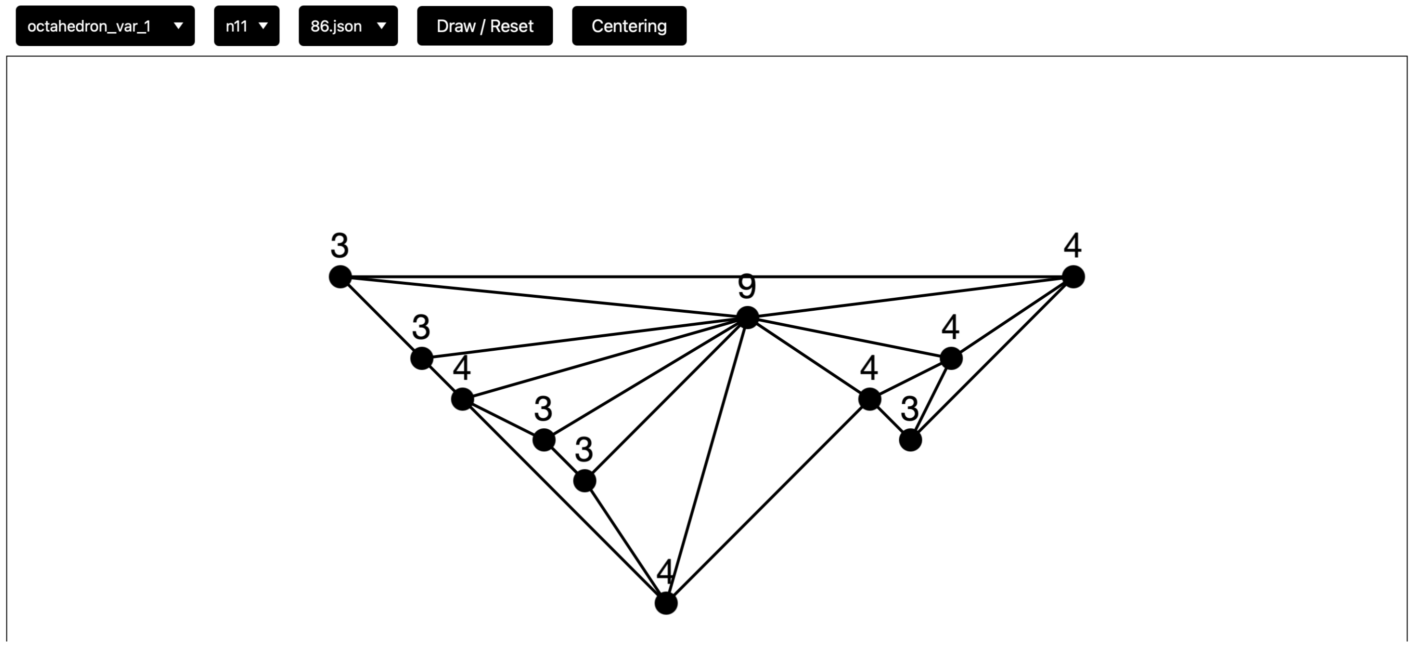
今後の課題

課題1

今回，扱うことができなかった次数分布で表される多面体のグループに対し，どのような系列になっているかを示す．

現状の問題点

- 多面体グラフから多面体の描画が手作業
- n 頂点⇒ $n+1$ 頂点の多面体の関係を示すのも手作業



計算機で処理できるようにしたい

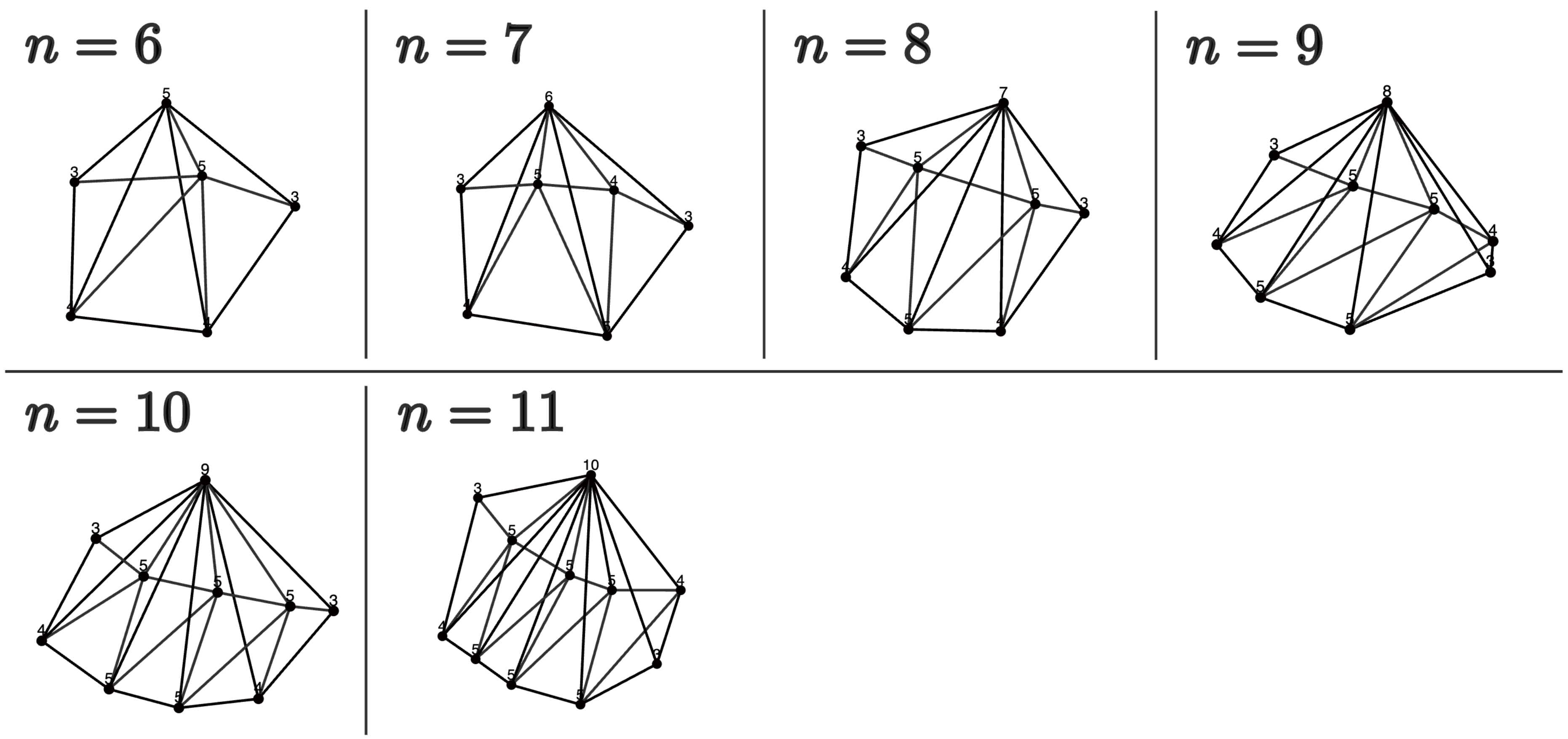
今後の課題

課題2

各次数分布からなる多面体グラフの個数の理論的な説明づけ

- $5^{n-5}, (n-1)^1, 3^2, 4^2$ で表される多面体は，$n \leq 11$ の範囲だとそれぞれ1種類ずつしか存在しない．

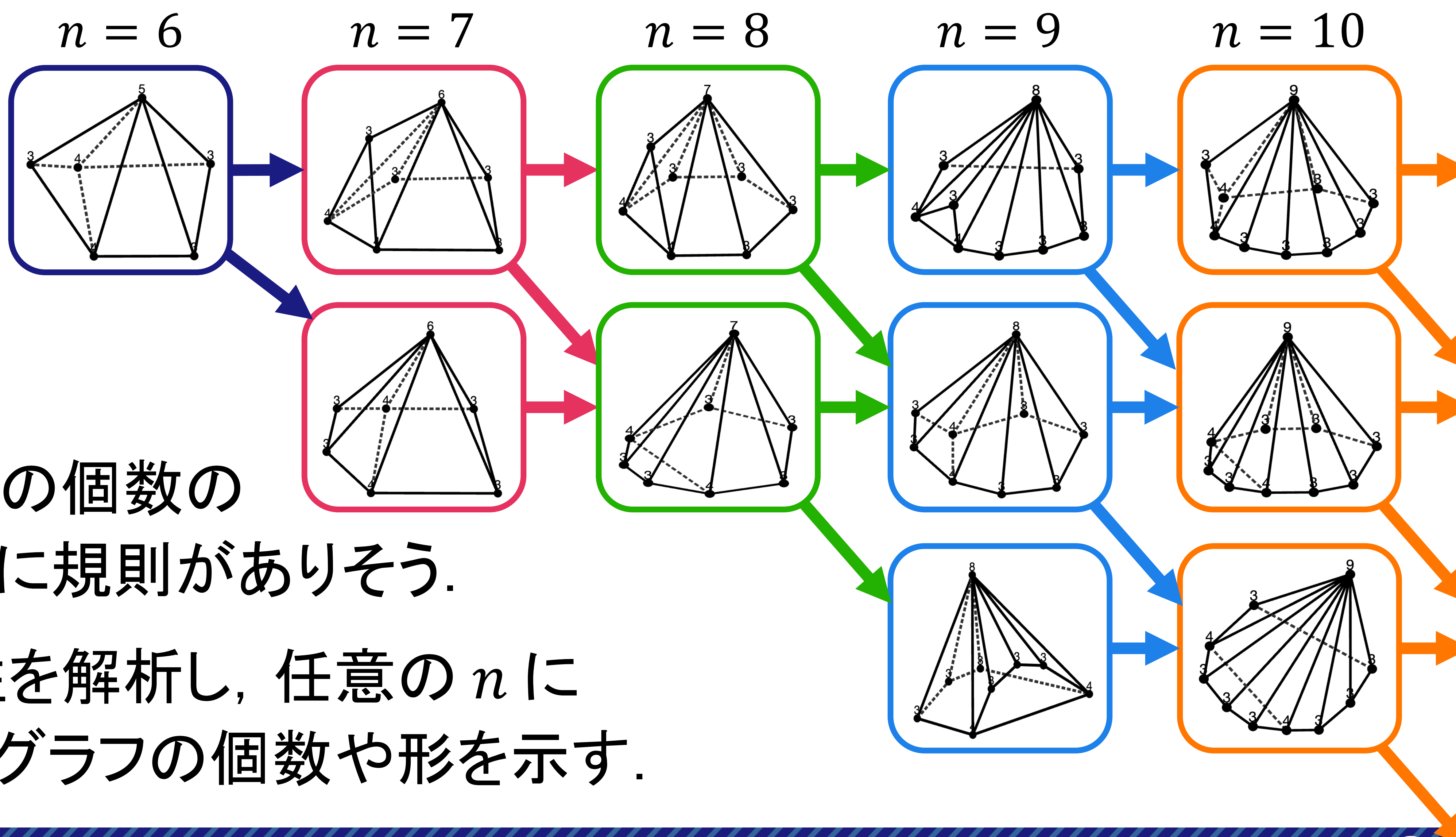
$n > 12$ でも
1種類しかない？



今後の課題

課題2

各次数分布からなる多面体グラフの個数の理論的な説明づけ



- 多面体の個数の増え方に規則がありそう.

➡ 規則性を解析し，任意の n におけるグラフの個数や形を示す.