

正八面体の展開図分割に関する研究

能美 雄太¹ 塩田拓海² 鎌田斗南¹ 上原隆平¹

¹北陸先端科学技術大学院大学(JAIST)

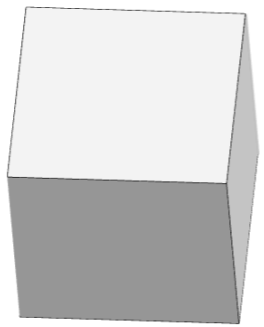
²九州工業大学

目次

- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
 - Regular rep-octahedron の存在性
 - Regular rep-octahedron が存在する必要条件
 - Regular rep-octahedron が無限に存在することの証明
 - Uniform rep-octahedron の存在性
 - 整数計画ソルバーを使った実験
 - 次数 k のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめと課題

用語の定義

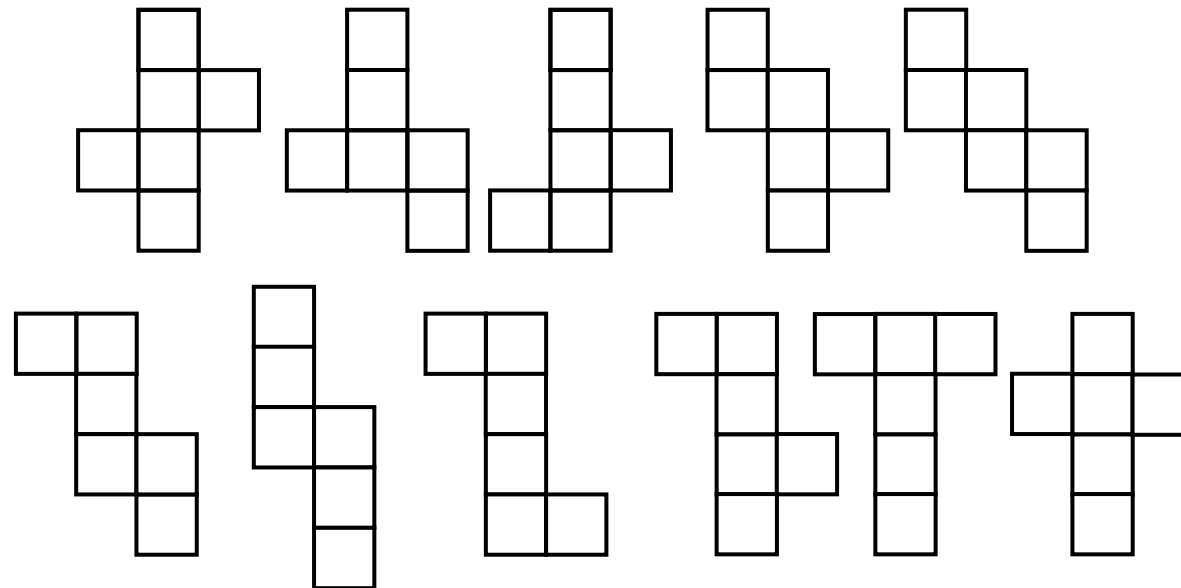
- 展開図: 多面体の表面に切り込みを入れて平面上に展開することによって得られる, 連結で重なりがない多角形.
- 辺展開図: 切り込みを辺に限定した展開図.



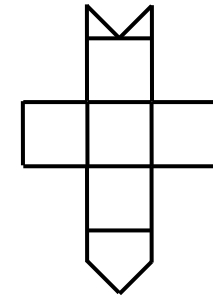
展開



辺展開図

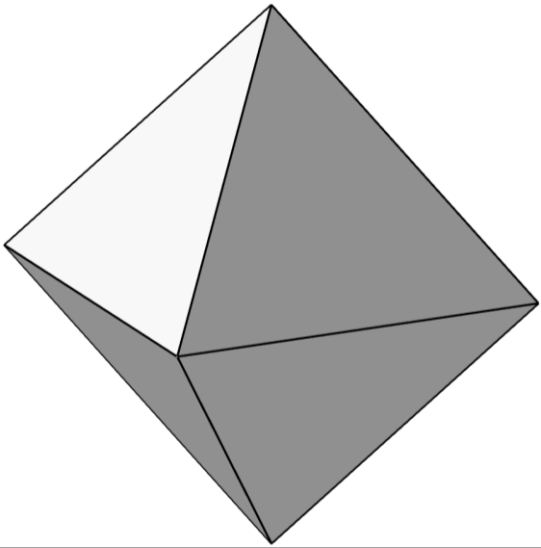


展開図



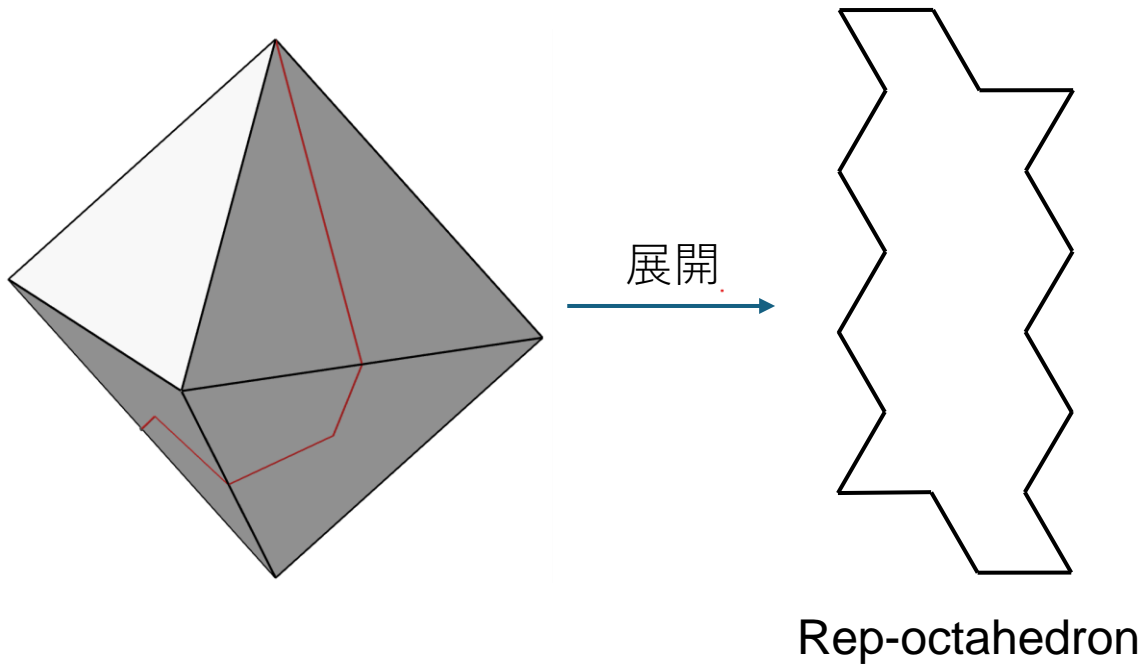
用語の定義

k を自然数とする. 次数 k の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ k 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



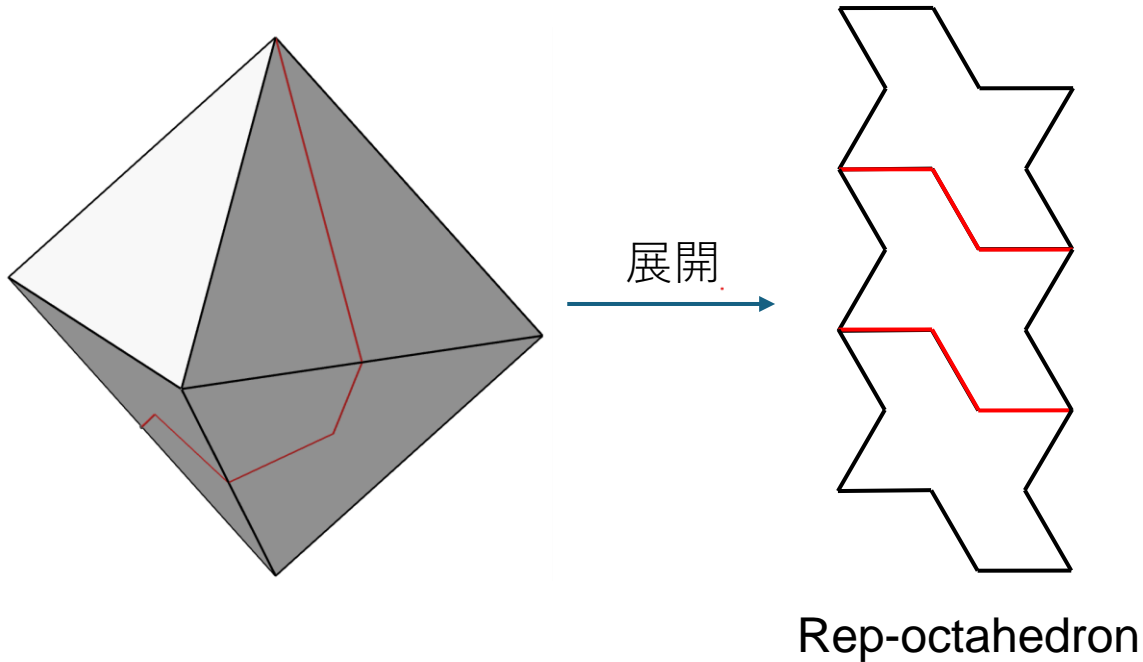
用語の定義

k を自然数とする. 次数 k の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ k 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



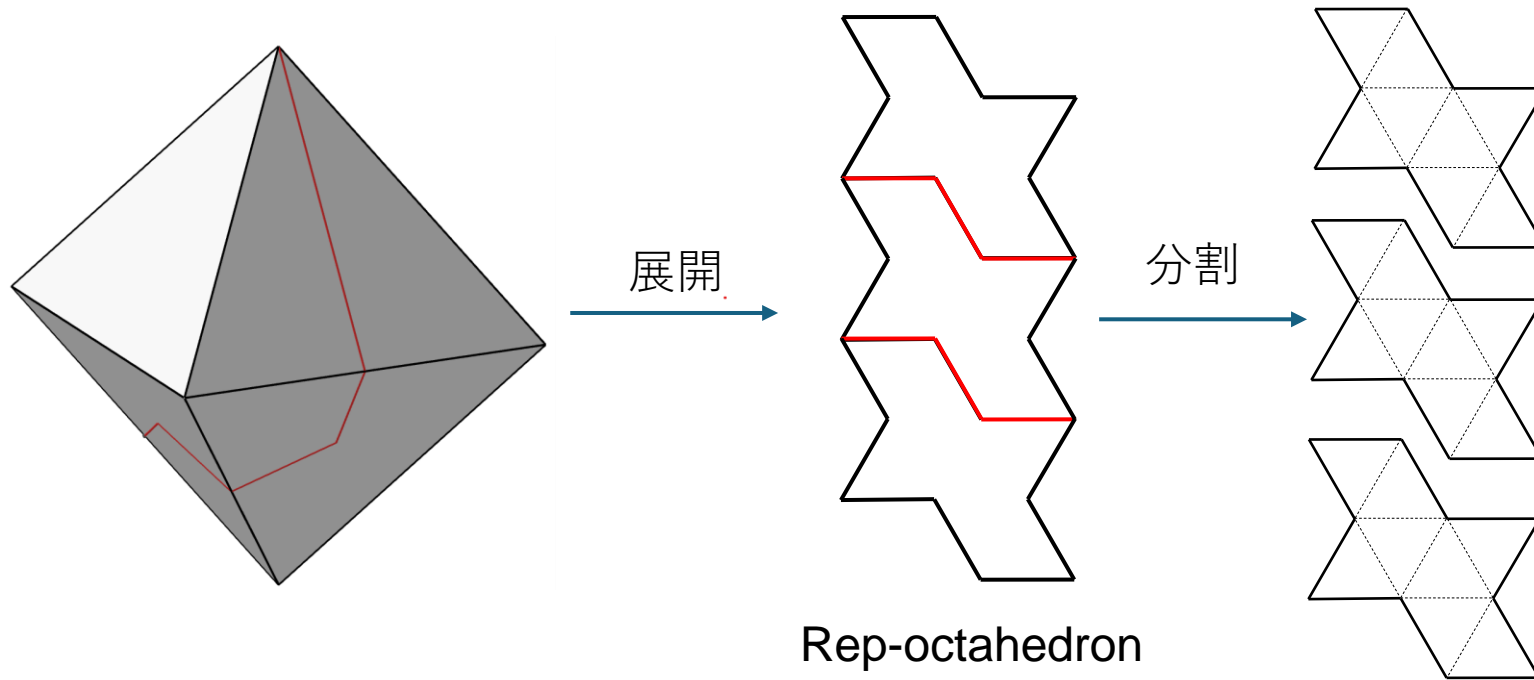
用語の定義

k を自然数とする. 次数 k の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ k 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



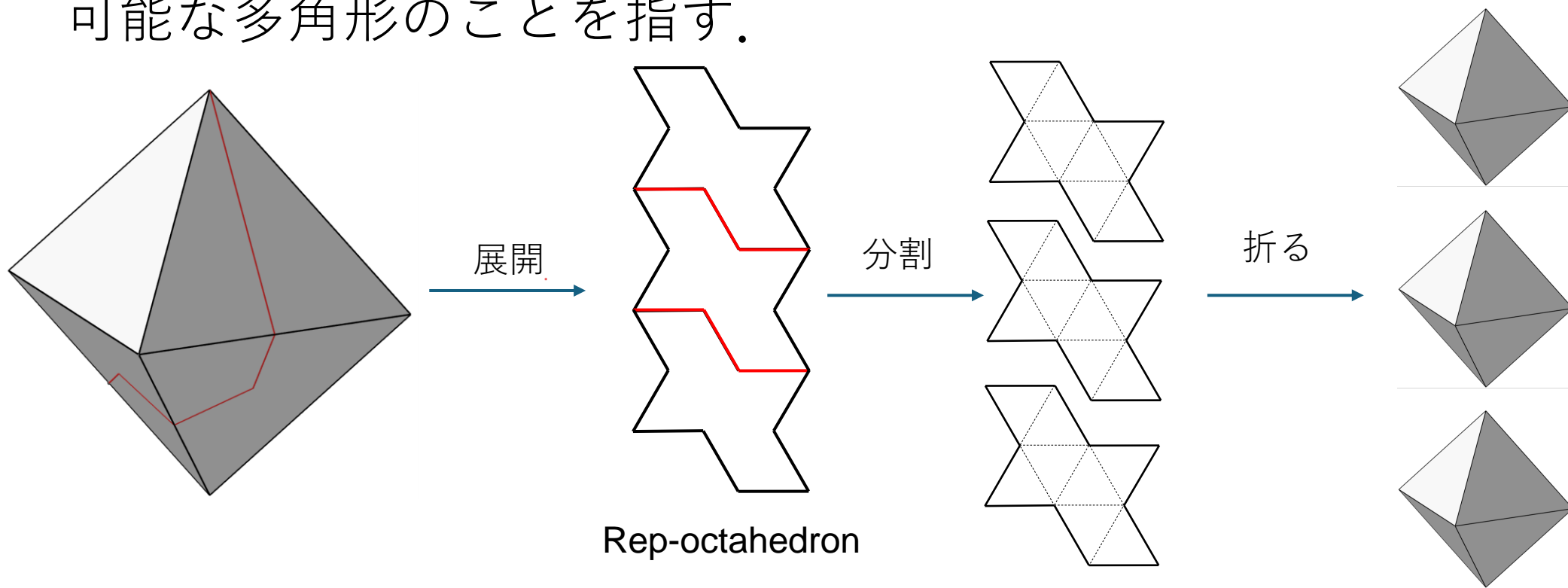
用語の定義

k を自然数とする. 次数 k の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ k 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



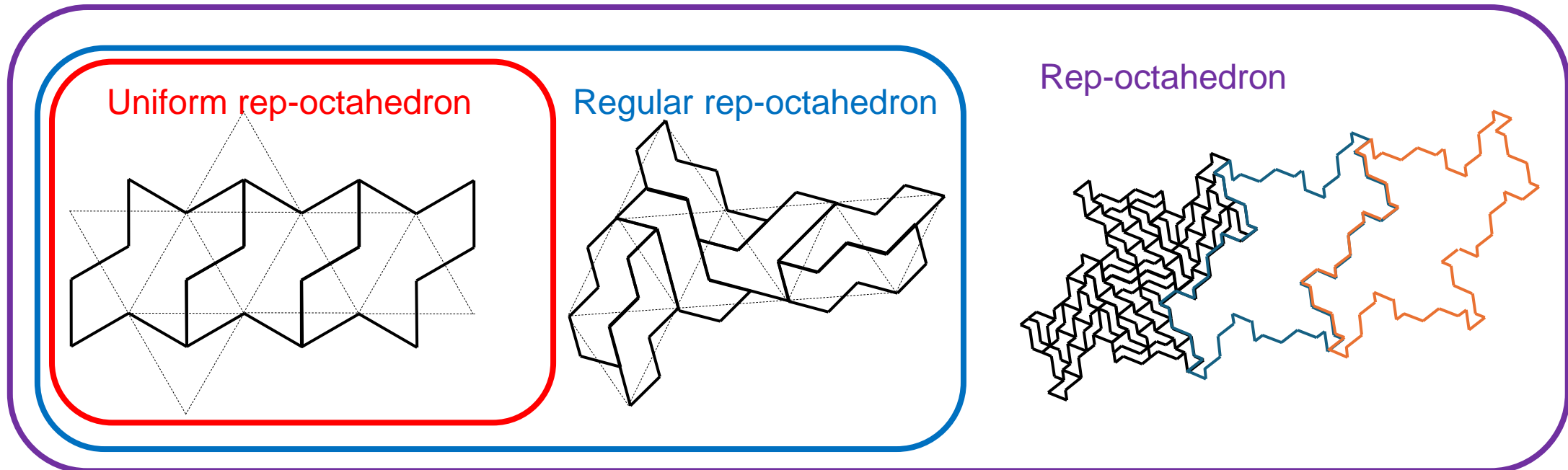
用語の定義

k を自然数とする. 次数 k の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ k 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



用語の定義

- Rep-octahedron が Regular: 分割して得られた展開図が全て同じ面積.
- Rep-octahedron が Uniform: 分割して得られた展開図が全て合同.



目次

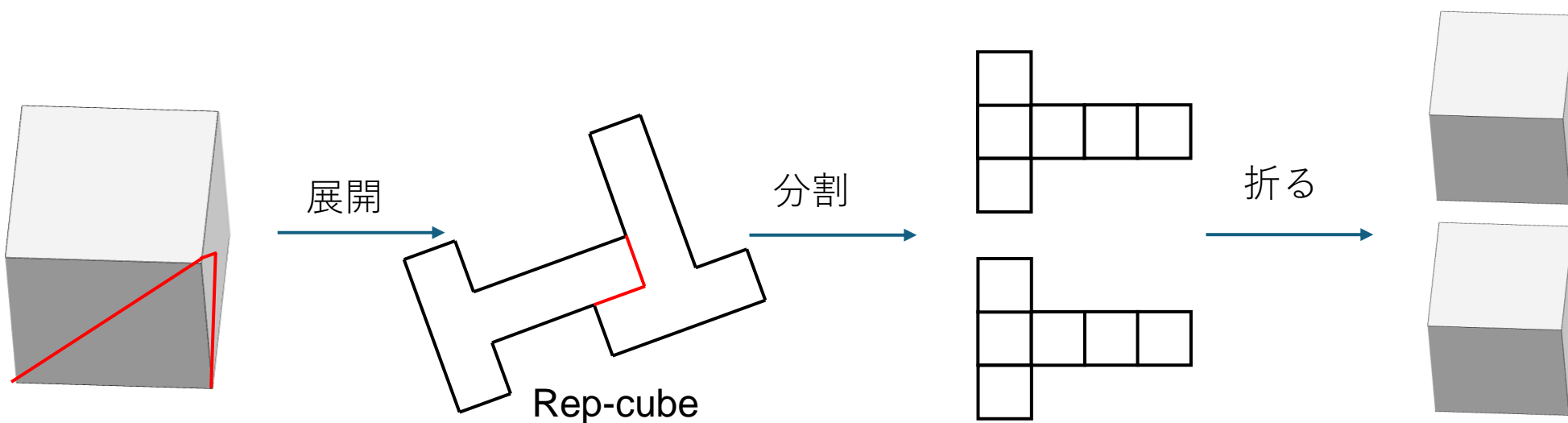
- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
 - Regular rep-octahedron の存在性
 - Regular rep-octahedron が存在する必要条件
 - Regular rep-octahedron が無限に存在することの証明
 - Uniform rep-octahedron の存在性
 - 整数計画ソルバーを使った実験
 - 次数 k のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめと課題

先行研究(1/3)

多面体の展開図分割に着目した研究として、「**Rep-cube**」という概念がある。

Rep-cubeとはそれ自身が立方体の展開図であり，かつ複数の立方体の展開図に分割可能な多角形である。

Rep-cube の性質に関するいくつかの先行研究を示す。



先行研究(2/3)

先行研究 1 [1, 2, 3]

$k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ のそれぞれについて,
次数 k の Regular rep-cube が存在する.

先行研究 2 [2, 3]

次数 k の Regular rep-cube が存在する必要条件是,
 k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\}$ に含まれることである.

先行研究 3 [1]

任意の正整数 i に対して, 次数 $18i^2$ の Uniform (Regular) rep-cube が存在する.

[1] Zachary Abel, Brad Ballinger, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Jeff Erickson, Adam Hesterberg, Hiro Ito, Irina Kostitsyna, Jayson Lynch and Ryuhei Uehara, "Unfolding and Dissection of Multiple Cubes, Tetrahedra, and Doubly Covered Squares", Journal of Information Processing. Vol.25, pp 610-615, 2017.

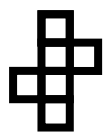
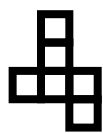
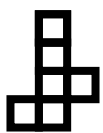
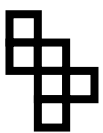
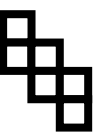
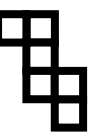
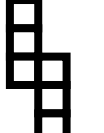
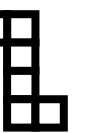
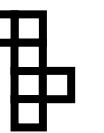
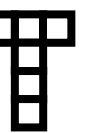
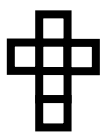
[2] Dawei Xu, Jinfeng Huang, Yuta Nakane, Tomoo Yokoyama, Takashi Horiyama and Ryuhei Uehara, "Rep-Cubes: Dissection of a Cube into Nets" IEICE TRANS. FUNDAMENTALS, VOL.E101-A, NO.9, pp 1420-1430, 2018.

[3] Tamami Okada and Ryuhei Uehara, "Research on Dissections of a Net of a Cube into Nets of Cubes" IEICE TRANS. INF. & SYST, VOL.E105-D, NO.3, pp 459-465, 2022.

先行研究(3/3)

先行研究 4 [3, 4]

立方体の辺展開図 p と整数 $k \leq 8$ に対して, p をもとにして
次数 k の Uniform rep-cube を構成できるか否かは表の通り.

											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

[3] Tamami Okada and Ryuhei Uehara, "Research on Dissections of a Net of a Cube into Nets of Cubes" IEICETRANS. INF. ¥& SYST, VOL.E105-D, NO.3, pp 459-465, 2022.

[4] Liu Xiaoting, minor research at Uehara lab, 2021.

目次

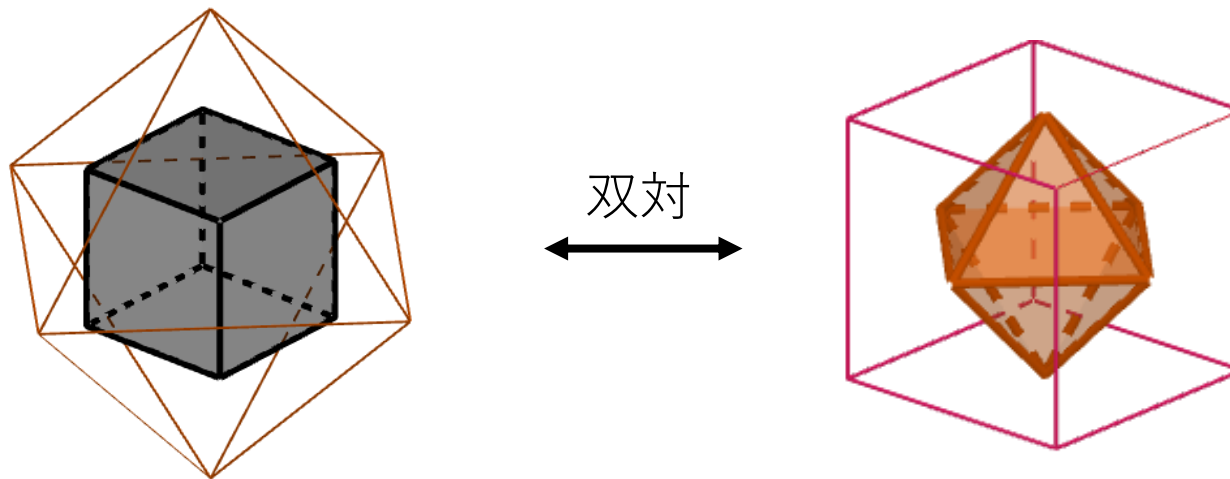
- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
 - Regular rep-octahedron の存在性
 - Regular rep-octahedron が存在する必要条件
 - Regular rep-octahedron が無限に存在することの証明
 - Uniform rep-octahedron の存在性
 - 整数計画ソルバーを使った実験
 - 次数 k のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめと課題

目的

Rep-cube の性質を正八面体に適用した **Rep-octahedron** の研究は行われていない。

正八面体と立方体の間にある双対関係が，**Rep-octahedron** と **Rep-cube** の性質にどのような関係を与えているかは不明である。

本研究の目的は，**Rep-cube** について知られている主要な性質について，正八面体への適用可能性を検討することである。



目次

- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
 - Regular rep-octahedron の存在性
 - Regular rep-octahedron が存在する必要条件
 - Regular rep-octahedron が無限に存在することの証明
 - Uniform rep-octahedron の存在性
 - 整数計画ソルバーを使った実験
 - 次数 k のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめと課題

結果(1/3)

本研究で得られた結果を示す.

定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて,
次数 k の **Regular rep-octahedron**が存在する.
特に, $k = 3, 4, 9, 12, 16$ のそれぞれについて,
次数 k の **Uniform rep-octahedron**が存在する.

結果(2/3)

続き

定理 2

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是,

k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\}$ に含まれることである.

定理 3

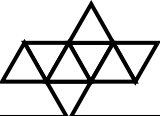
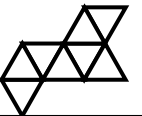
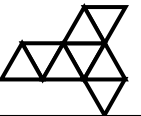
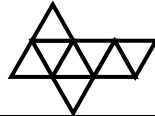
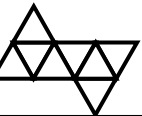
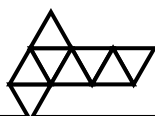
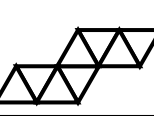
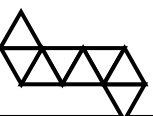
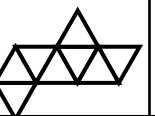
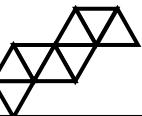
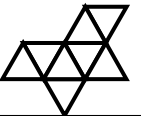
任意の正整数 i に対して, 次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron が存在する.

結果(3/3)

続き

定理 4

正八面体の辺展開図 p と整数 $k \leq 9$ と $k = 16$ に対して, p をもとにして次数 k の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かは表の通り.

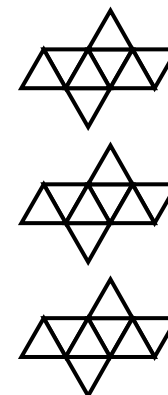
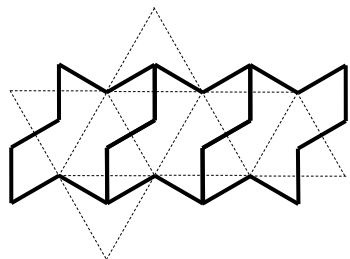
											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

Regular rep-octahedron の存在性(1/5)

定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて、
次数 k の Regular rep-octahedron が存在する。
特に、 $k = 3, 4, 9, 12, 16$ のそれぞれについて、
次数 k の Uniform rep-octahedron が存在する。

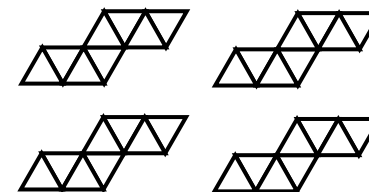
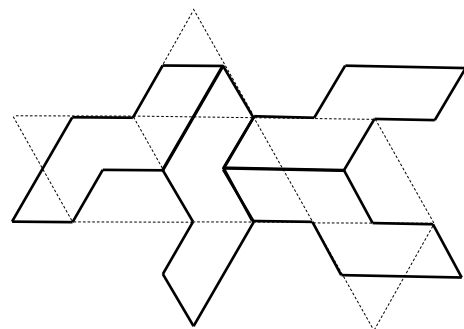
- 次数3の Uniform (Regular) rep-octahedron



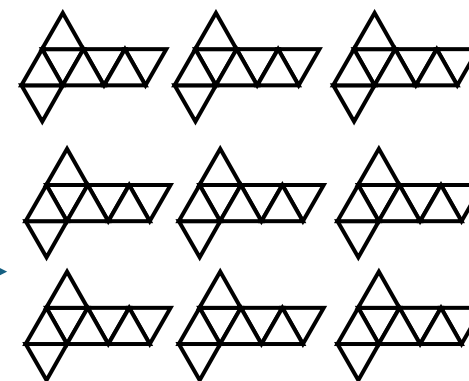
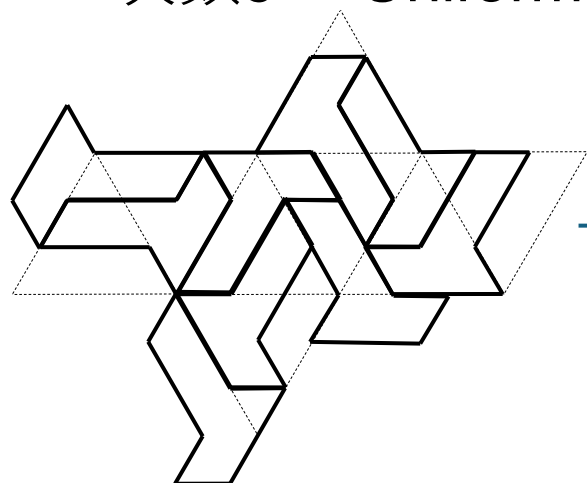
Regular rep-octahedron の存在性(2/5)

続き

- 次数4の Uniform (Regular) rep-octahedron



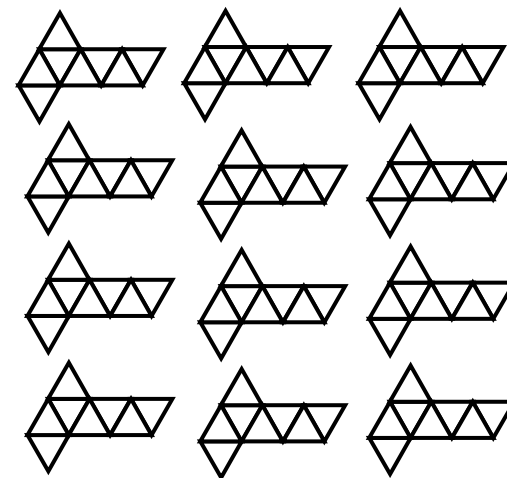
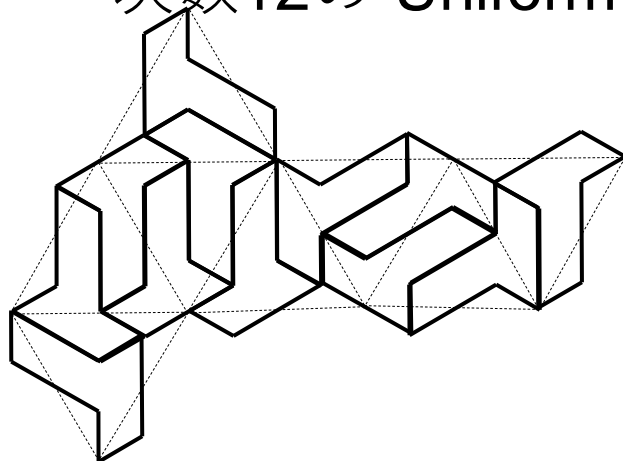
- 次数9の Uniform (Regular) rep-octahedron



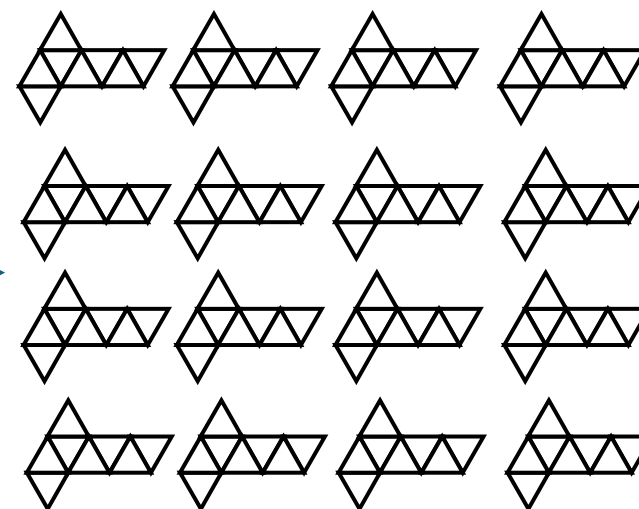
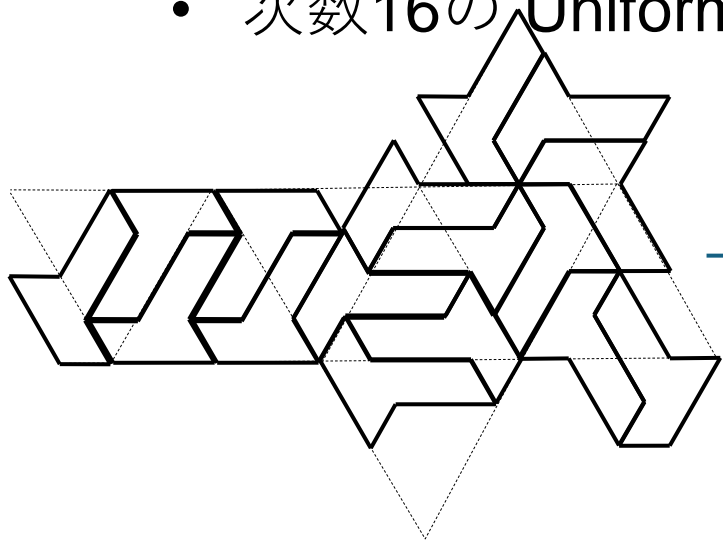
Regular rep-octahedron の存在性(3/5)

続き

- 次数12の Uniform (Regular) rep-octahedron



- 次数16の Uniform (Regular) rep-octahedron



Regular rep-octahedron の存在性(4/5)

続き

定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて、
次数 k の Regular rep-octahedron が存在する。
特に、 $k = 3, 4, 9, 12, 16$ のそれぞれについて、
次数 k の Uniform rep-octahedron が存在する。

- 次数7の Regular rep-octahedron



Regular rep-octahedron の存在性(5/5)

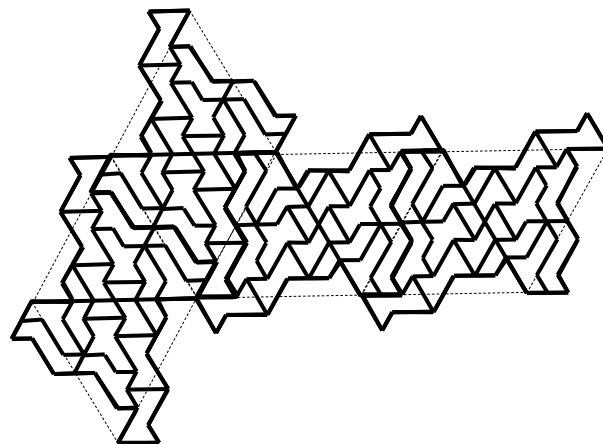
続き

定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて, 次数 k の Regular rep-octahedron が存在する.

特に, $k = 3, 4, 9, 12, 16$ のそれぞれについて, 次数 k の Uniform rep-octahedron が存在する.

- 次数64の Regular rep-octahedron



Regular rep-octahedron が存在する必要条件(1/4)

集合 S について, $S = \{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\} = \{1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, \dots\}$ と定義する.

定理 2

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是,
 k が集合 S に含まれることである.

Regular rep-octahedron が存在する必要条件(2/4)

定理 2

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是、
 k が集合 S に含まれることである。

[証明の方針]

P から折れる正八面体の一边の長さは必ず $a^2 + b^2 + ab$ という形で表現可能であることを利用する。

[証明の概略]

辺展開図 P_i から折れる正八面体を Q_i とする。

Q_i の一边の長さを l とする(ただし l は整数)。

Regular rep-octahedron が存在する必要条件(3/4)

定理 2

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是,

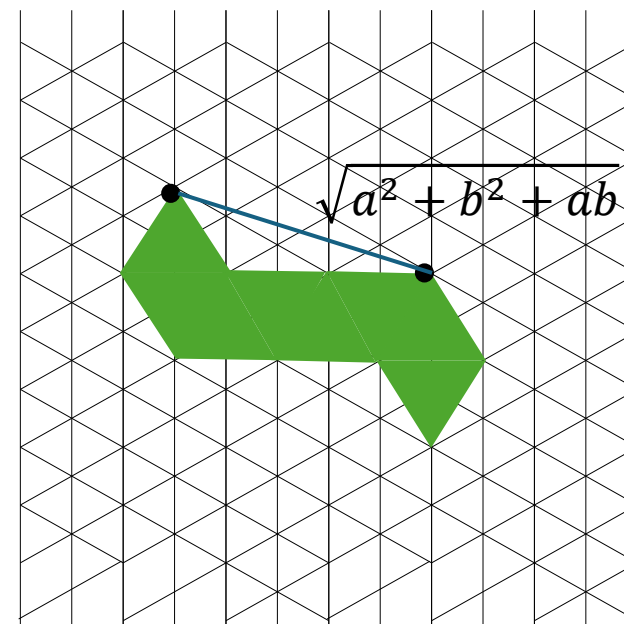
k が集合 S に含まれることである.

[証明の概略(続き)]

P_i を単位三角格子点上に載せると Q_i のすべての頂点が三角格子点上にのるように配置できる.

このとき, Q_i の任意の2頂点間の距離は余弦定理より $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ ($\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0$) と表すことができる.

よって $l^2 = a^2 + b^2 + ab$.



Regular rep-octahedron が存在する必要条件(4/4)

定理 2

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是、

k が集合 S に含まれることである。

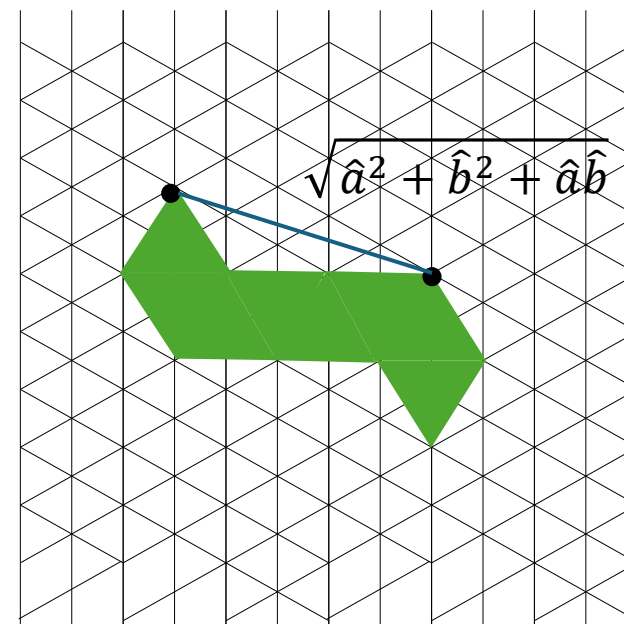
[証明の概略(続き)]

P と、 P から折れる正八面体 Q でも同様の操作を行う。

Q の任意の2頂点間の距離は $\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b}}$

($\exists \hat{a} \in \mathbb{Z}, \exists \hat{b} \in \mathbb{Z}, \hat{a} > 0, \hat{b} \geq 0$) と表すことができる。

よって Q の一辺の長さは $\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b}}$
($\exists \hat{a} \in \mathbb{Z}, \exists \hat{b} \in \mathbb{Z}, \hat{a} > 0, \hat{b} \geq 0$) である。



Regular rep-octahedronが無限に存在することの証明(1/4)

非同型な Regular rep-octahedron が無限に存在することを示す.

定理 3

任意の正整数 i に対して, 次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron が存在する.

[証明の概略]

正八面体の辺展開図を16枚敷き詰めてできた多角形 pp を使用する.

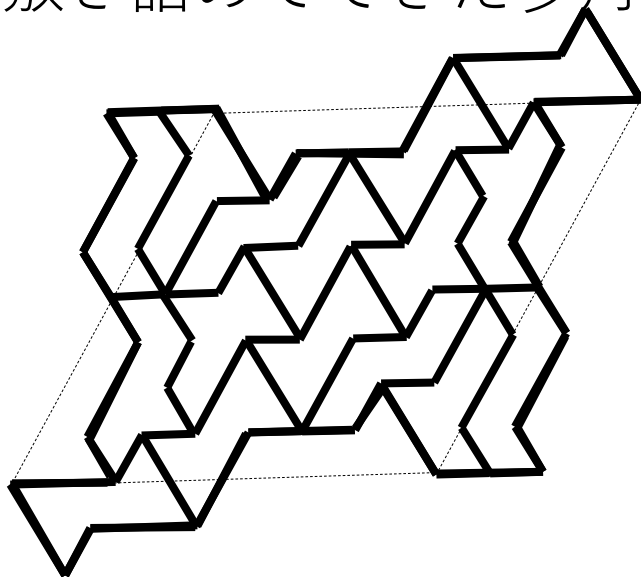


図: pp

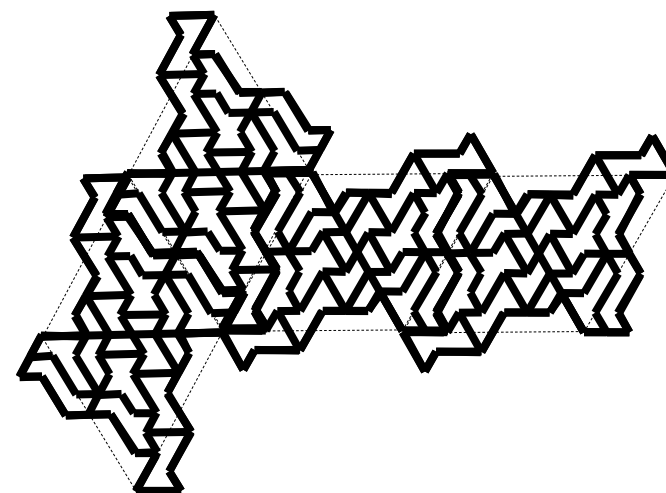
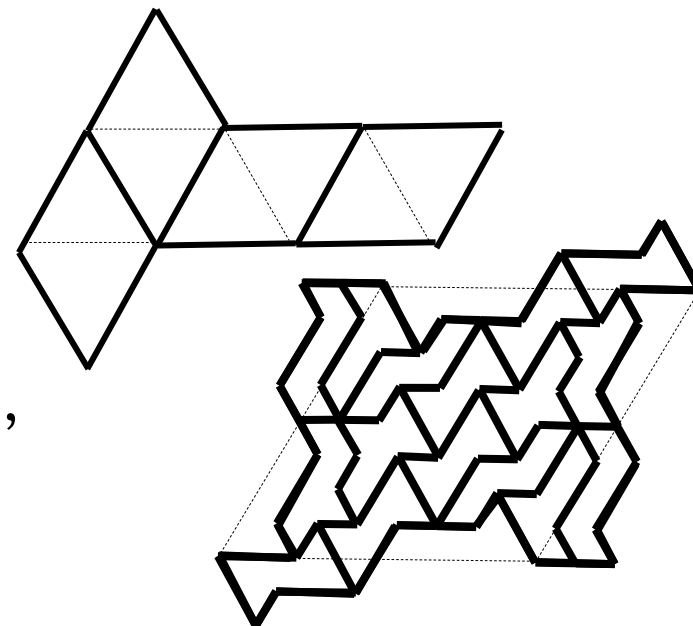
Regular rep-octahedronが無限に存在することの証明(2/4)

[証明の概略(続き)]

正八面体の辺展開図を4枚のひし形に分割をする.
 pp を4枚のひし形に敷き詰める.

このとき, 切り欠けが一致するため埋め込むことができ,
正八面体に折っても切り欠けが一致する.

よって, 次数64のRegular rep-octahedronが得られる.

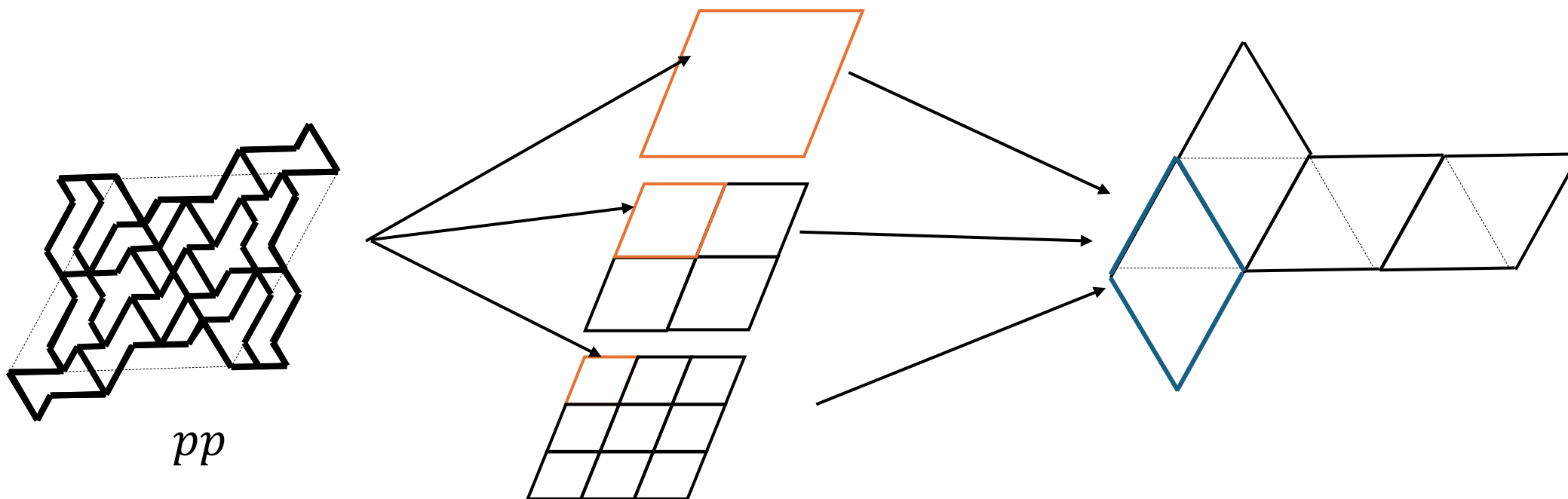


Regular rep-octahedronが無限に存在することの証明(3/4)

[証明の概略(続き)]

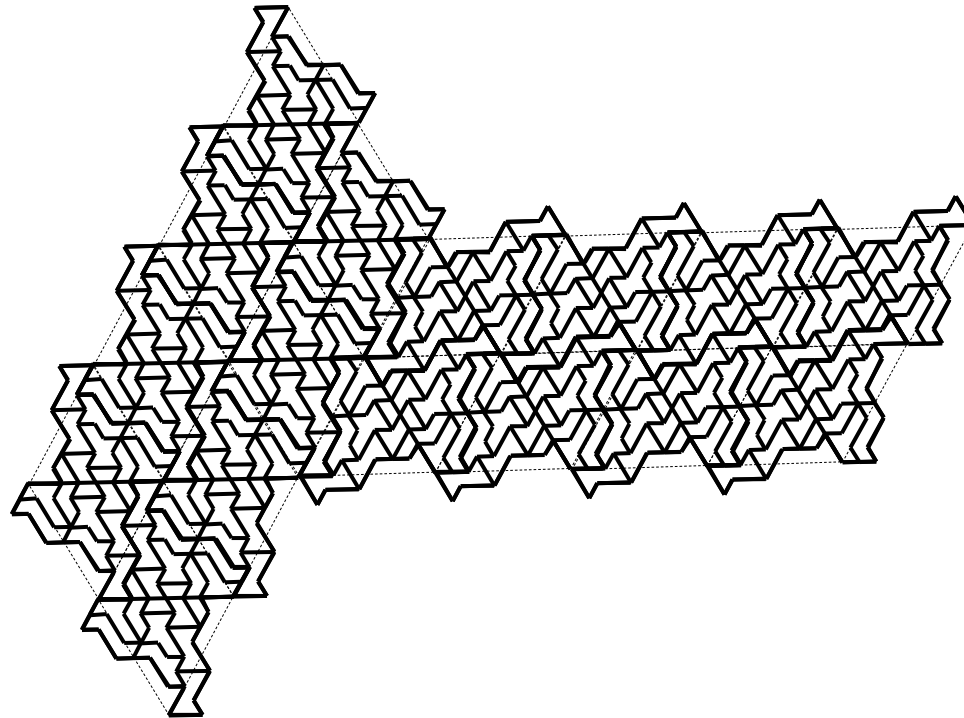
ひし形を分割することを考える.

pp は分割したひし形に埋め込むことができ, 個々のひし形を pp に置き換える. 置き換えたものも全体として正八面体に折れる.



Regular rep-octahedronが無限に存在することの証明(4/4)

次数 $64i^2 (i = 2)$ の Regular rep-octahedron を示す.



Uniform rep-octahedron の存在性

比較的小さい次数において **Uniform rep-octahedron** の存在性を明らかにするために計算機実験を行う.

計算機実験は整数計画ソルバーの**SCIP 8.0.3**を使用した.
実験の環境を表に示す.

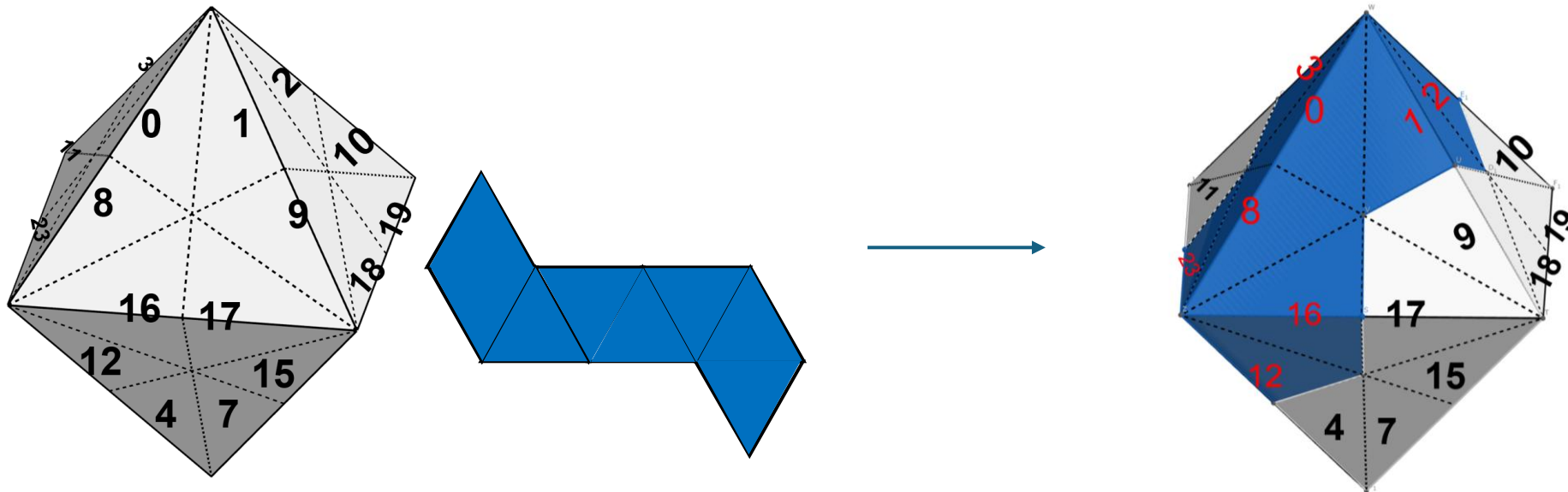
使用ツール	SCIP version 8.0.3
CPU	11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz 2.42 GHz
RAM	8.00GB
OS	Windows 11 Education

整数計画ソルバーを使った実験

タイル張り問題の解法を用いた.

タイル張り問題とは, 特定の形状の多角形を複製して隙間なく重なりなく, 与えられた領域を敷き詰める問題である.

1辺の長さが1の展開図を k 枚用いて, 1辺の長さが \sqrt{k} の正八面体の表面上で敷き詰めができるか検証した.



次数 k の Uniform rep-octahedron の存在性

定理 4







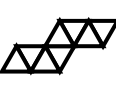




正八面体の辺展開図 p と整数 $k \leq 9$ と $k = 16$ に対して, p をもとにして次数 k の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かは表の通り.

3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

次数 k の Uniform rep-octahedron の存在性

定理 3

正八面体の辺展開図 p と整数 $k \leq 9$ と $k = 16$ に対して, p をもとにして次数 k の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かは表の通り.

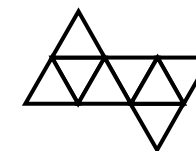
											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

観察

辺展開図から構成される次数 7 の Uniform rep-octahedron は存在しない.

予想

下の辺展開図をもとにしてできる Uniform rep-octahedron は存在しない.



目次

- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
 - Regular rep-octahedron の存在性
 - Regular rep-octahedron が存在する必要条件
 - Regular rep-octahedron が無限に存在することの証明
 - Uniform rep-octahedron の存在性
 - 整数計画ソルバーを使った実験
 - 次数 k のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめと課題

まとめと課題(1/5)

Rep-cubeの性質と比較する

Rep-cube

$k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$ のそれぞれについて, 次数 k の Regular rep-cube が存在する.

Rep-octahedron

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$ のそれぞれについて, 次数 k の Regular rep-octahedronが存在する.

まとめと課題(2/5)

続き

Rep-cube

次数 k の Regular rep-cube が存在する必要条件是、
 k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\}$ に含まれることである。

Rep-octahedron

与えられた Rep-octahedron P が k 個の同じ面積の辺展開図 P_i ($1 \leq i \leq k$) から構成できる必要条件是、
 k が集合 $\{x \mid \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\}$ に含まれることである。

まとめと課題(3/5)

続き

Rep-cube

非同型な Uniform (Regular) rep-cube は無限に存在する.
任意の正整数 i に対して, 次数 $18i^2$ の Uniform (Regular) rep-cube が存在する.

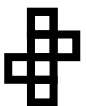
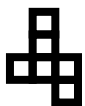
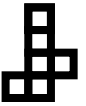
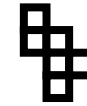
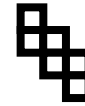
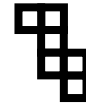
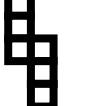
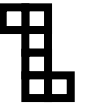
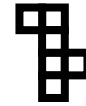
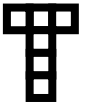

Rep-octahedron












非同型な Regular rep-octahedron は無限に存在する.
任意の正整数 i に対して, 次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron が存在する.

非同型な Uniform rep-octahedron が無限に存在するかは現時点で不明である.

まとめと課題(4/5)

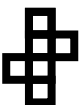
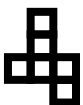
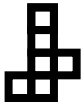
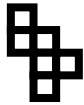
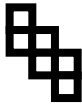
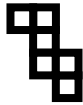
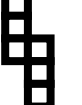
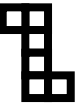
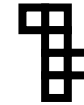
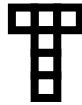
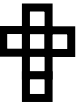
続き












											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×

まとめと課題(4/5)

続き

											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×

11種類の辺展開図 p と比較的小さい整数 k に対して, k をもとにして, 次数 k の Uniform rep-cube と Uniform rep-octahedron を構成できるか否かを示す.

- 立方体のすべての辺展開図で Uniform rep-cube は構成可能だが, 正八面体は Uniform rep-octahedron を構成できない辺展開図があると予想できる.
- 2つの表に共通点は見られない. 立方体と正八面体の間の双対関係は Rep-cube と Rep-octahedron の性質に影響はないと考えられる.

まとめと課題(5/5)

Rep-cube の性質を正十二面体，正二十面体に応用した Rep-dodecahedron, Rep-icosahedron が存在するか否かは不明である．

