

第24回情報科学技術フォーラム (FIT2025)

# 経路問題における 頂点の不要性判定の 計算困難性とアルゴリズム

---

立花 真龍\* 塩田 拓海† 斎藤 寿樹\*

\* 九州工業大学

† 兵庫県立大学

2025年9月3日@北海道科学大学

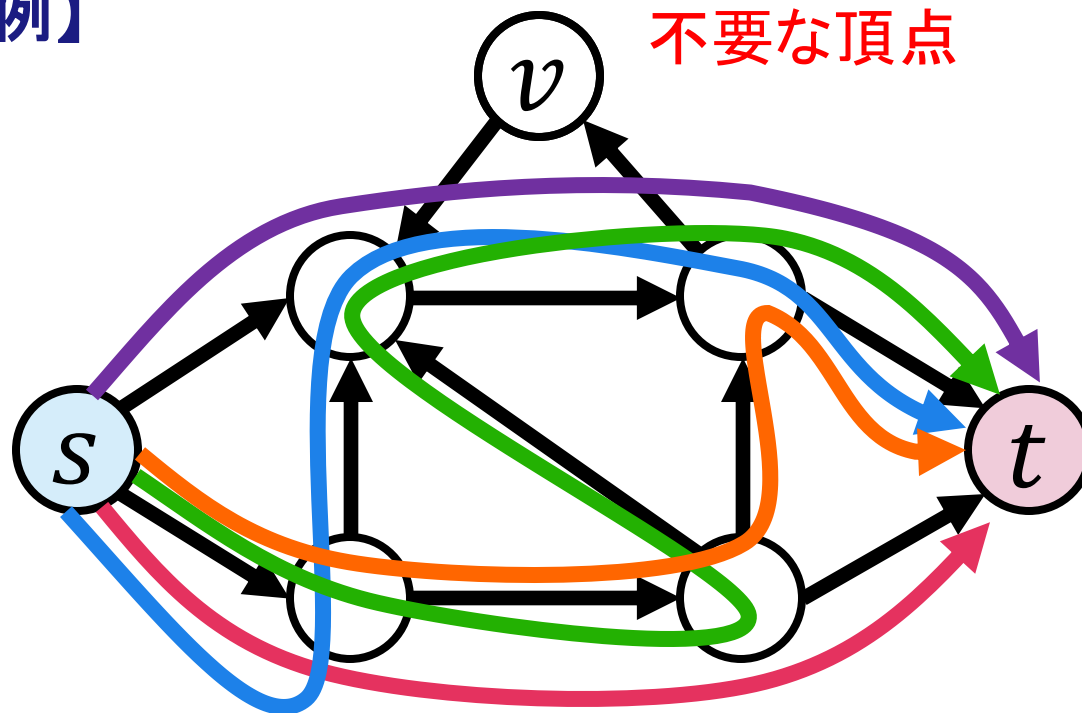
# 経路問題と不要な頂点

## 有向 $s - t$ パスの数え上げ問題

**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, t \in V$ .

**質問:** 頂点  $s$  から  $t$  への有向  $s - t$  パスはいくつあるか？

【例】



頂点  $v$  を通過する  
パスは存在しない



頂点  $v$  は削除しても  
パスの数え上げに  
寄与しない

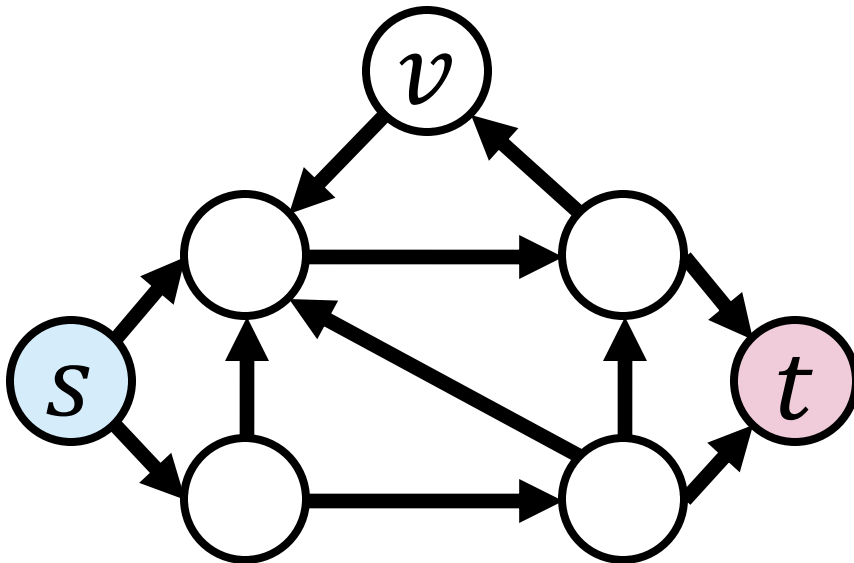
**答え:** 5つのパス

# 問題設定と本研究の成果

## 有向 $s - t$ パスにおける頂点の不要性判定問題 (IRRELEVANT VERTEX IN DIRECTED PATHS PROBLEM: IVDP)

**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, v, t \in V$ .

**質問:** 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パスが存在しないか？  
すなわち, 頂点  $v$  は不要か？



### 定理1

IVDP は co-NP 完全である.

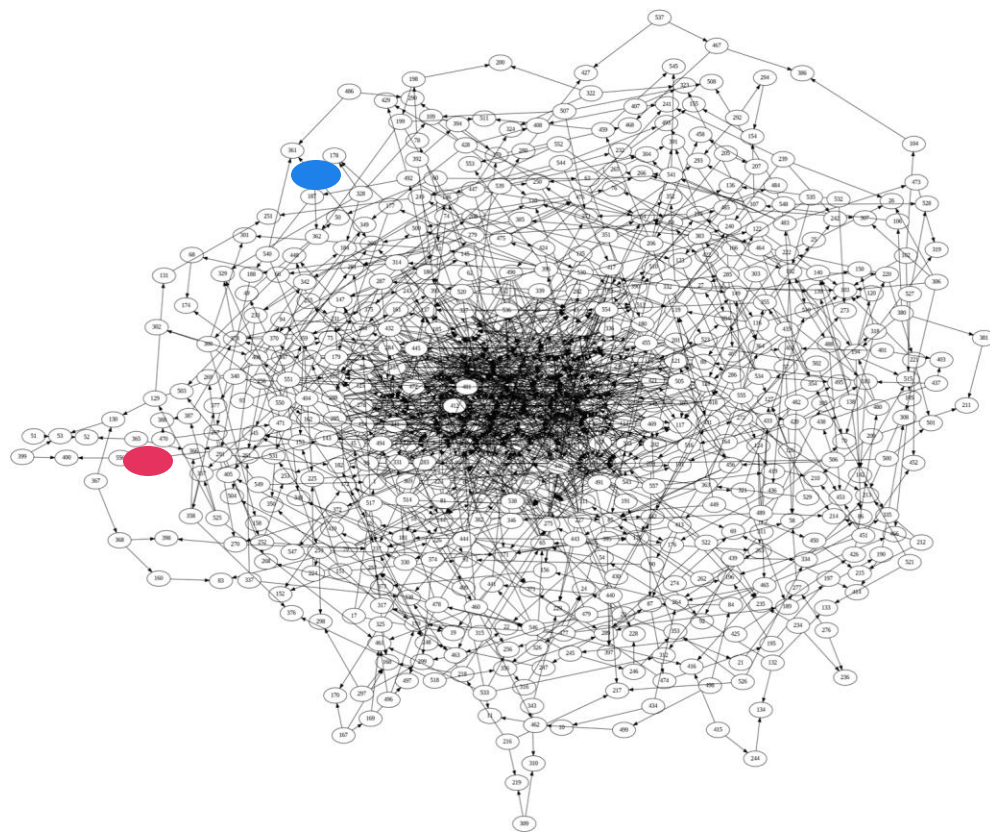


$O(|V| + |E|)$  時間で判定を行う  
ヒューリスティックを設計

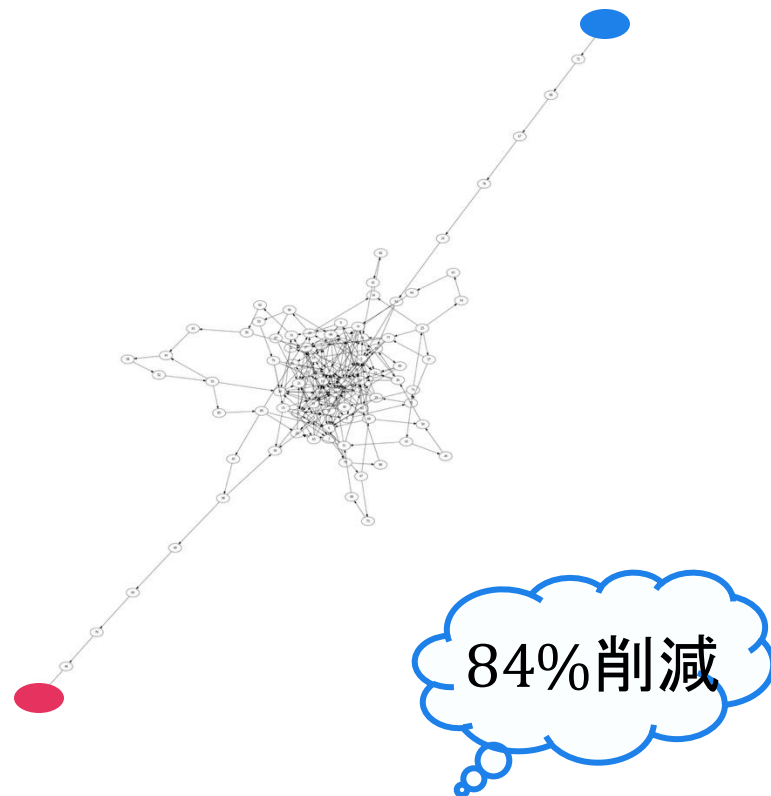
# 問題設定と本研究の成果



提案するヒューリスティックによる前処理



処理前 ( $|V| = 557$ )



処理後 ( $|V| = 90$ )



# 本研究の背景

- $s - t$  パスの数え上げ問題は #P 完全 [L. G. Valiant, 1979]
  - $s - t$  パスの数え上げ問題は実社会での多くの応用
    - 交通網・ナビゲーションシステム [M. Duckham & L. Kulik, 2003]
    - 災害時における脆弱性の評価 [T. C. Matisziw & A. T. Murray, 2009]
- ➡ 前処理により, 不要な頂点(辺)を削除することが**極めて重要**



# 本研究の背景

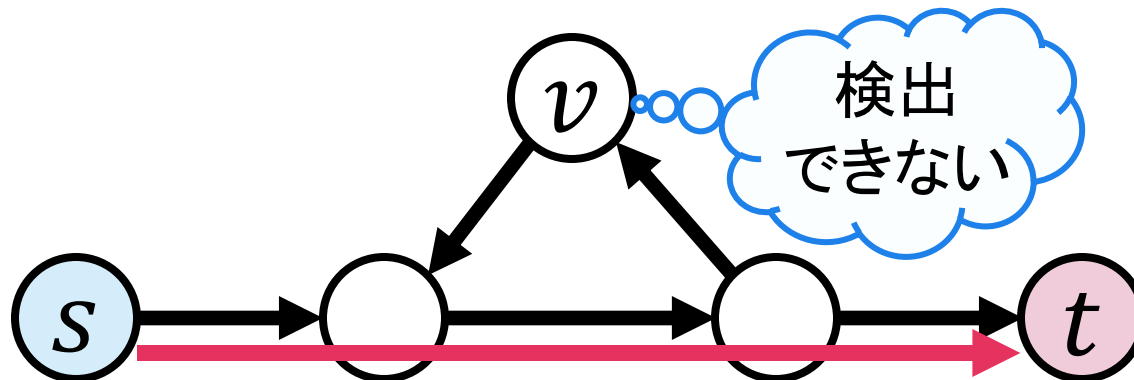
## 不要な頂点の検出

### 無向グラフ

Block-cut tree (BC-tree) に基づくアプローチで、全ての不要な頂点を多項式時間で検出できる [E. Birmelé et al., 2013]

### 有向グラフ

BC-tree では、検出できない頂点が存在する



# IVDP の co-NP 完全性の証明

有向  $s - t$  パスにおける頂点の不要性判定問題  
(IRRELEVANT VERTEX IN DIRECTED PATHS PROBLEM: IVDP)

**入力**: 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, v, t \in V$ .

**質問**: 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パスが存在しないか？  
すなわち, 頂点  $v$  は不要か？

## 定理1

IVDP は co-NP 完全である.

## 証明の方針

- ① IVDP の補問題を定式化   ② 補問題がクラス NP に属する  
→ ③ 補問題が NP 困難 → ④ IVDP が co-NP 完全

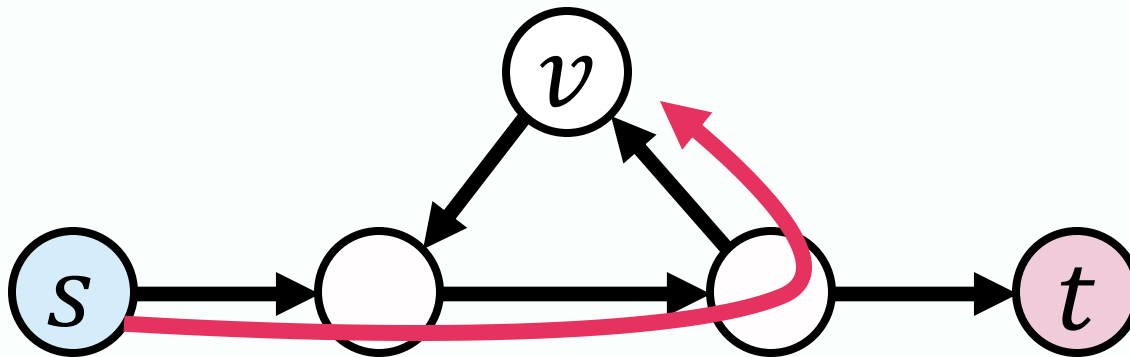
# IVDP の co-NP 完全性の証明

有向  $s - t$  パスにおける頂点の不要性判定問題  
(IRRELEVANT VERTEX IN DIRECTED PATHS PROBLEM: IVDP)

**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, v, t \in V$ .

**質問:** 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パスが存在しないか？

否定を  
問う



**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, v, t \in V$ .

**質問:** 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パスが**存在するか**？すなわち、  
頂点  $v$  を通過して  $s$  から  $t$  に到達することが可能か？



# IVDP の co-NP 完全性の証明

有向  $s - t$  パスにおける頂点の通過可能性判定問題  
(VERTEX PASSAGE IN DIRECTED PATHS PROBLEM: VPDP)

**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s, v, t \in V$ .

**質問:** 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パスが存在するか？すなわち,  
頂点  $v$  を通過して  $s$  から  $t$  に到達することが可能か？

## (I) VPDP がクラス NP に属することの証明

→ 頂点  $v$  を通る有向  $s - t$  パス  $P$  を証拠として与えれば良い

### 確認すべき事項

- $P$  が  $s$  から  $t$  への有向パス
  - 頂点  $v$  が  $P$  の内部に含まれる
- }  $P$  の長さは高々  $|V|$  なので  
多項式時間で実行可能

# IVDP の co-NP 完全性の

**定理2** [S. Fortune et al., 1980]

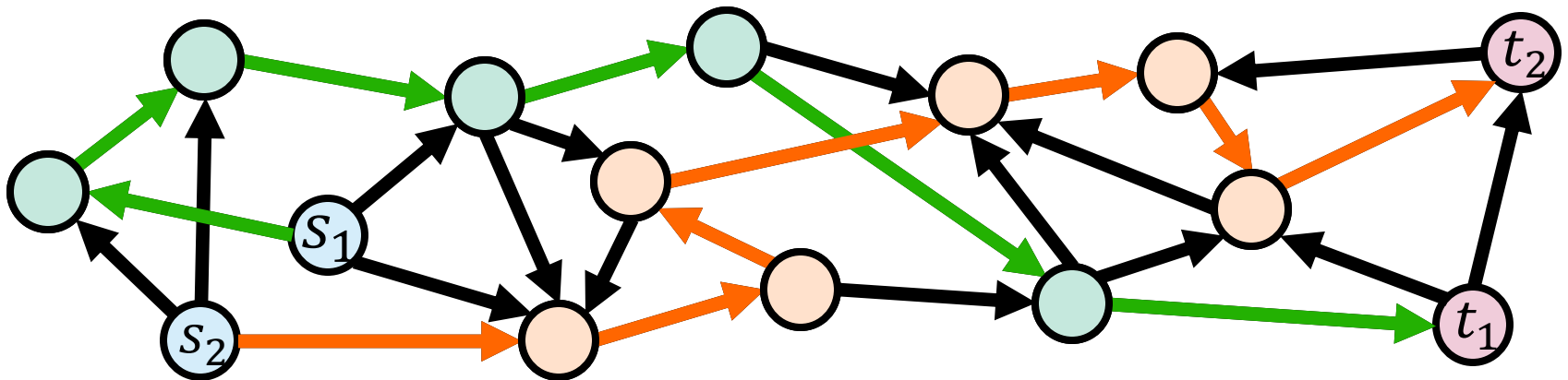
directed 2-DPP は  
NP 完全である.

## (II) VPDP の NP 困難性の証明

有向グラフにおける2本の点素パス問題 (2 DISJOINT PATHS  
DIRECTED PROBLEM IN DIRECTED GRAPH: directed 2-DPP)

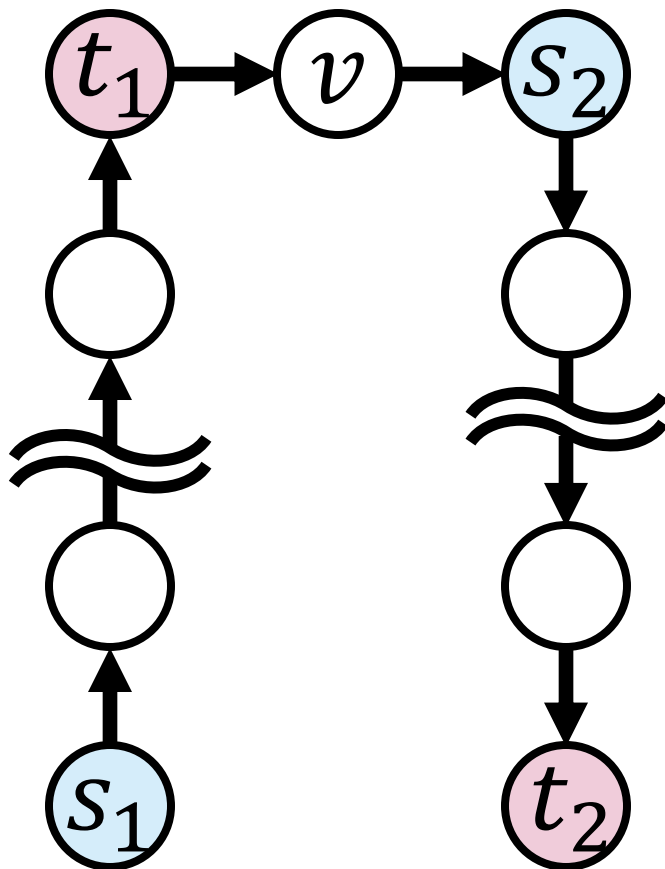
**入力:** 有向グラフ  $G = (V, E)$ , および頂点  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in V$ .

**質問:**  $G$  において,  $s_1$  から  $t_1$  へのパス  $P_1$  と,  $s_2$  から  $t_2$  へのパス  $P_2$  が, 互いに点素なパスとして同時に存在するか?



# IVDP の co-NP 完全性の証明

## (II-1) 帰着の構成



## (II-2) 帰着の正当性

以下の二つは, 同値である

- ① directed 2-DPP のインスタンスにおいて, 2つの点素なパス  $s_1 - t_1$  と  $s_2 - t_2$  が存在
- ② VPDP のインスタンスにおいて 頂点  $v$  を通る  $s_1 - t_2$  パスが存在

✓ ①  $\Rightarrow$  ② の証明 済

✓ ②  $\Rightarrow$  ① の証明 済

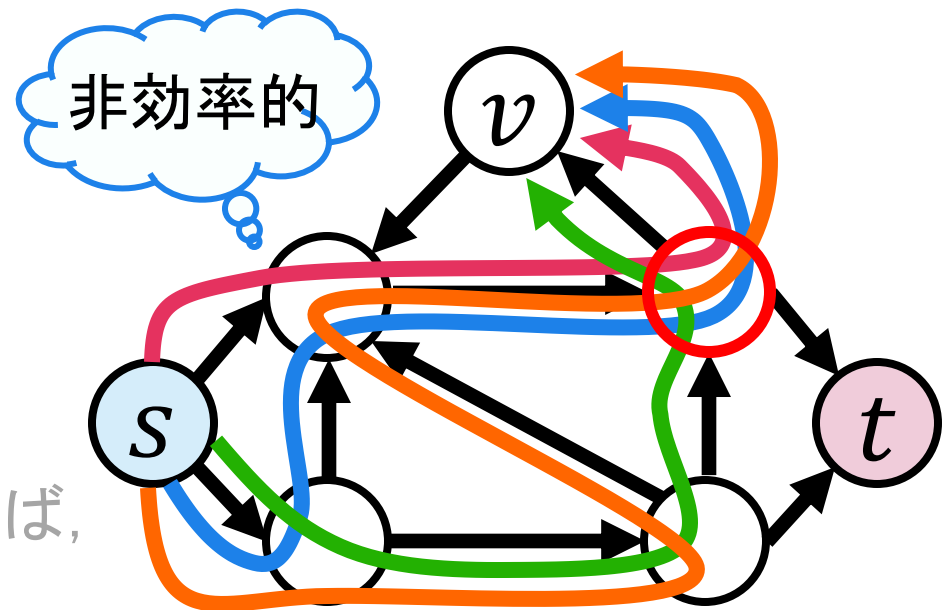
➡ VPDP は NP 困難である

# IVDP に対するヒューリスティック

- IVDP は co-NP 完全であるため,  
一般には多項式時間で不要な頂点を検出できない
- ➡ 実用的な時間で動作するヒューリスティックを考案

## 不要な頂点の検出の概要

- ①  $s - v$  パスに必ず含まれる頂点を探索する
- ②  $s - v$  パスに必ず含まれる頂点をグラフ  $G$  から削除
- ③  $v - t$  パスが存在しないならば,  
頂点  $v$  は不要な頂点

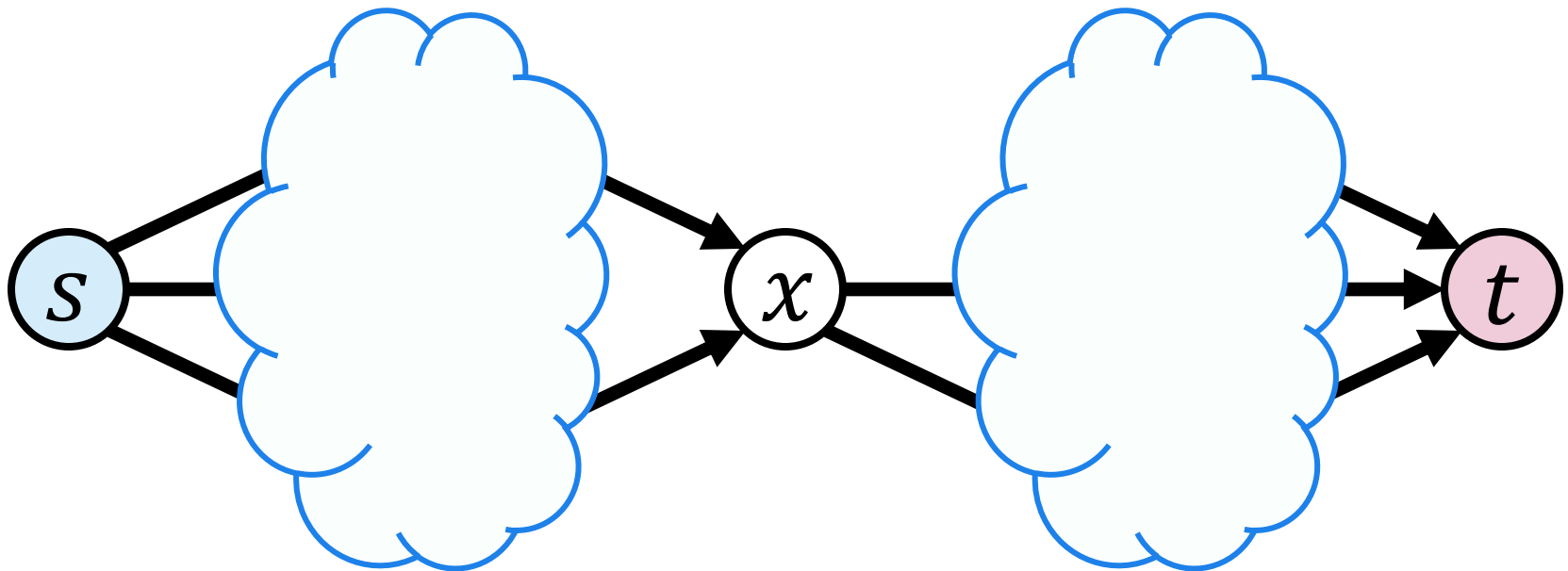




# IVDP に対するヒューリスティック

## 定義3

グラフ  $G = (V, E)$  において, 2頂点  $s, t \in V$  間にパスが存在するとき,  $s$  から  $t$  は**到達可能**という. 頂点  $x \in V$  を削除したとき,  $s$  から  $t$  へ到達できないならば,  $x$  を  **$s - t$  カット点**という.



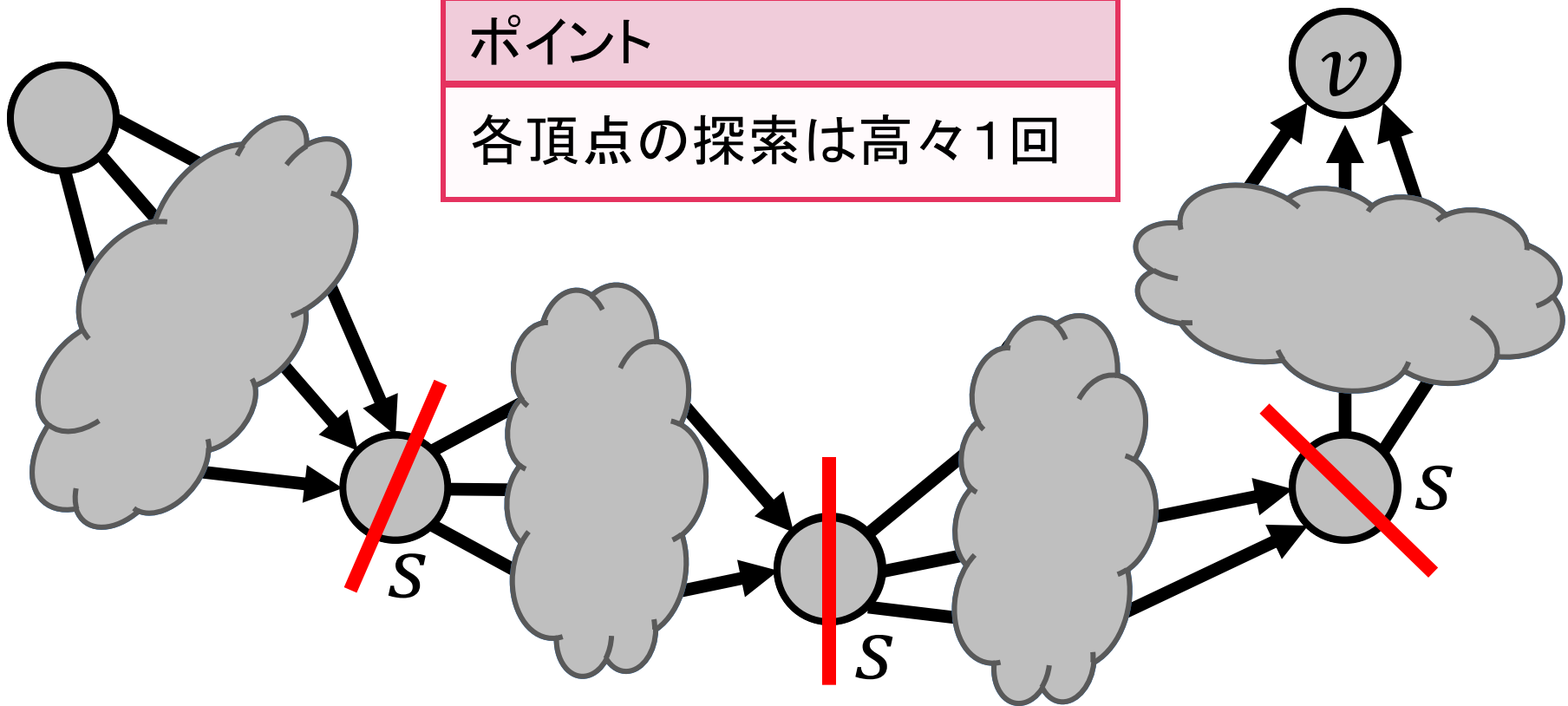
# IVDP に対するヒューリスティック

□  $s - v$  パスに必ず含まれる頂点を探索する

➡ ネットワークフローを用いて、全ての  $s - v$  カット点を求める

ポイント

各頂点の探索は高々1回



# IVDP に対するヒューリスティック

深さ優先探索

$$O(|V| + |E|)$$

## 時間計算量

頂点  $v$  は不要な頂点か？

- ①  $s - v$  パスに必ず含まれる  
頂点を探索する

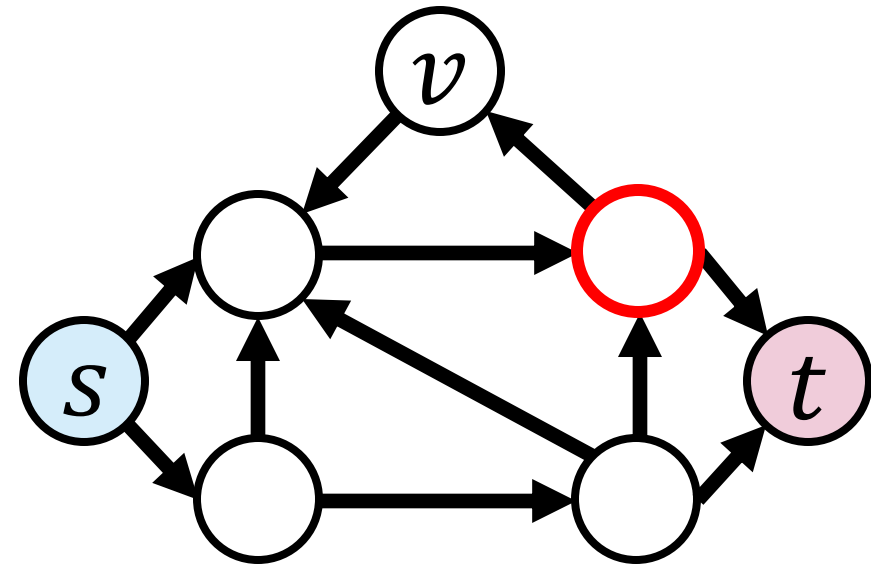
$$O(|V| + |E|)$$

- ②  $s - v$  パスに必ず含まれる  
頂点をグラフ  $G$  から削除

$$O(|V| + |E|)$$

- ③  $v - t$  パスが存在しないならば,  
頂点  $v$  は不要な頂点

$$O(|V| + |E|)$$

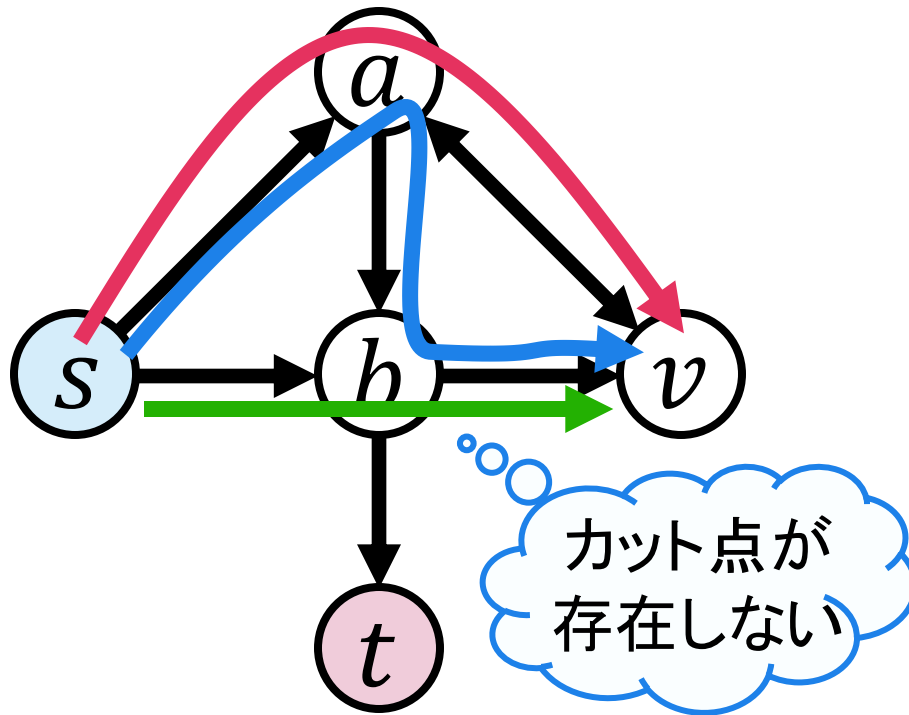


全体の時間計算量

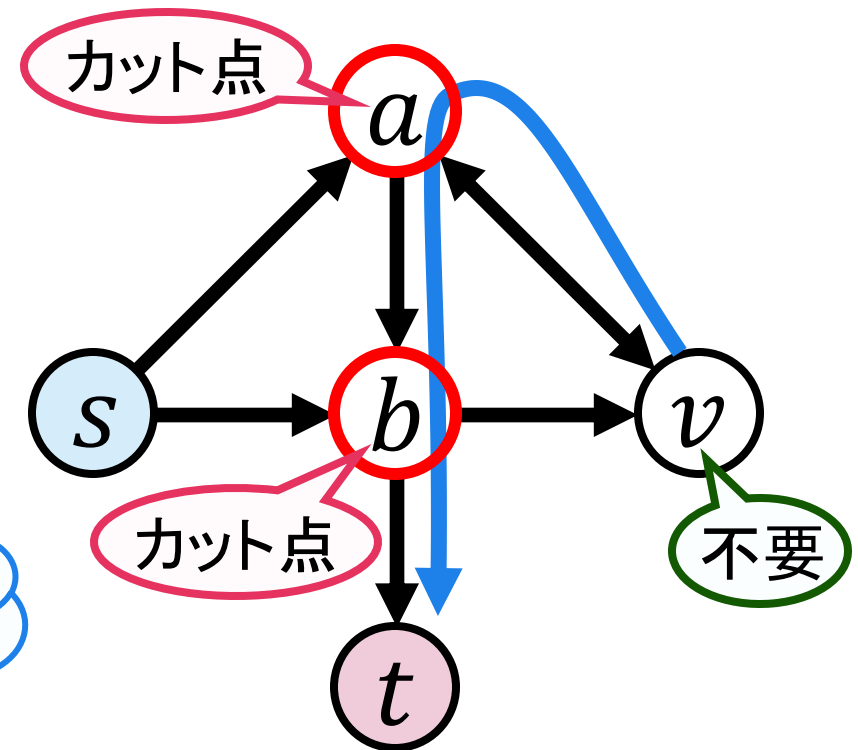
$$O(|V| \cdot (|V| + |E|))$$

# ヒューリスティックの拡張と限界

$s - v$  パスに必ず含まれる頂点が存在しないグラフ



$s - v$  パスに必ず  
含まれる頂点を探索



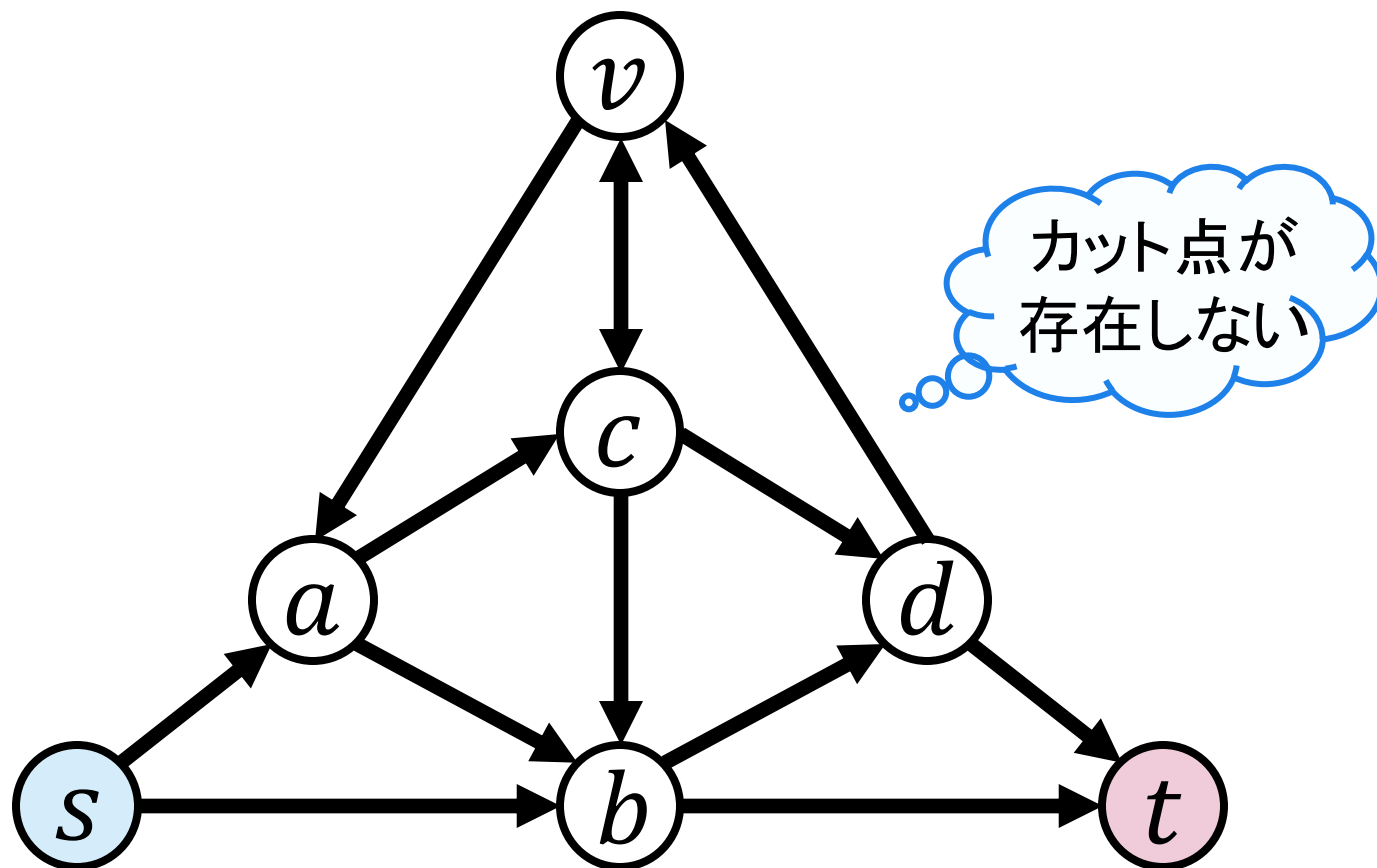
$v - t$  パスに必ず  
含まれる頂点を探索



# ヒューリスティックの拡張と限界



不要な頂点を検出ができないグラフ



## 本研究のまとめ

- 有向  $s-t$  パスにおける頂点の不要性判定問題 (IVDP) の計算困難性を示した
- IVDP に対してヒューリスティックを考案し、従来手法では検出できなかった一部の不要な頂点を検出できるようになった

## 今後の課題

- 入力グラフにおける「真に不要な頂点」を求め、提案するヒューリスティックの精度を評価する
- 入力グラフに対して制限を与え、構造的特徴を活かすことでより強力かつ効率的なヒューリスティックの設計を目指す