

# Dissections of a Net of a Regular Octahedron into Nets of Regular Octahedra

能美 雄太<sup>1</sup> 塩田拓海<sup>2</sup> 鎌田斗南<sup>1</sup> 上原隆平<sup>1</sup>

<sup>1</sup>北陸先端科学技術大学院大学(JAIST)

<sup>2</sup>九州工業大学

# 目次

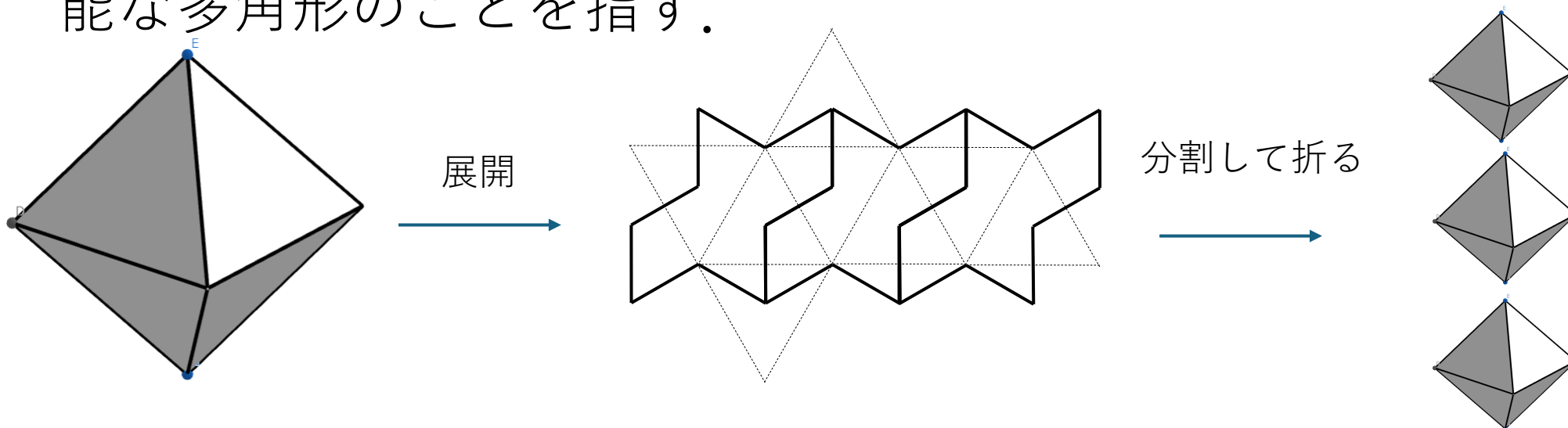
---

- 用語の定義
- 先行研究
- 目的
- 結果
- Regular rep-octahedron の存在性
- Regular rep-octahedron は無限に存在する
- Uniform rep-octahedron の存在性
  - 整数計画ソルバーを使った実験
  - 次数 $k$ のUniform rep-octahedronの存在性
- まとめ

# 用語の定義

- 展開図: 多面体の表面に切り込みを入れて平面上に展開することで得られる, 連結で重なりがない多角形を指す.
- 辺展開図: 切り込みを辺に限定した展開図を指す.

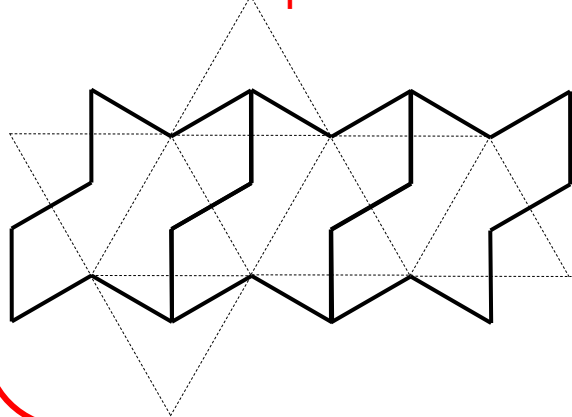
$k$ を自然数とする. 次数 $k$ の Rep-octahedron とは, それ自身が正八面体の展開図であり, かつ $k$ 個の正八面体の展開図に分割可能な多角形のことを指す.



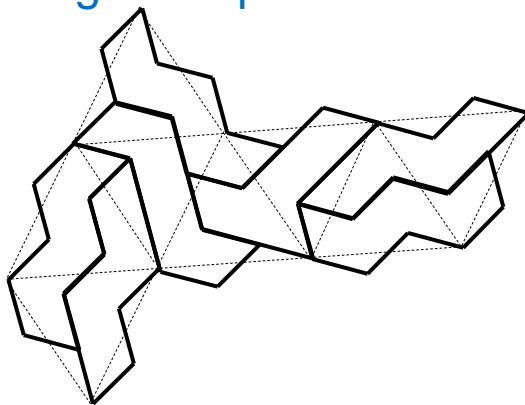
# 用語の定義

- Regular rep-octahedron: 分割して得られた展開図が全て同じ面積である.
- Uniform rep-octahedron: 分割して得られた展開図が全て合同である.

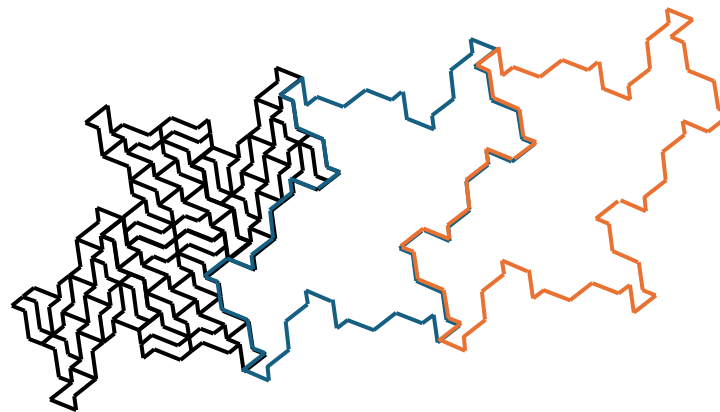
Uniform rep-octahedron



Regular rep-octahedron



Rep-octahedron



# 先行研究

---

多面体の展開図分割に着目した研究として、**Rep-cube** という概念がある.

**Rep-cube**とはそれ自身が立方体の展開図であり、かつ立方体の展開図に分割可能な多角形である.

**Rep-cube** の性質に関するいくつかの先行研究を示す.

# 先行研究

## 先行研究 1

$k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$  のそれぞれについて, 次数 $k$ の **Regular rep-cube** が存在する

## 先行研究 2

次数 $k$ の **Regular rep-cube**が存在する必要条件是,  $k$ が集合  $\{x | \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\}$  に含まれることである.

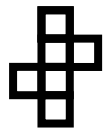
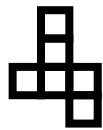
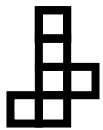
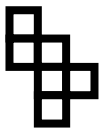
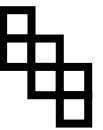
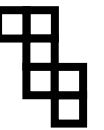
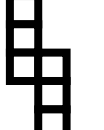
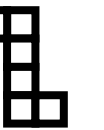
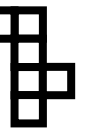
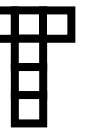
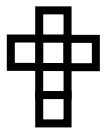
## 先行研究 3

$i$ をある正整数とすると次数 $18i^2$ の **Regular(Uniform) rep-cube** が存在する

# 先行研究

## 先行研究 4

11種類の立方体の辺展開図それぞれに対して、それをもとにして次数 $k \leq 8$ の Uniform rep-cube を構成できるか否かは表の通り.

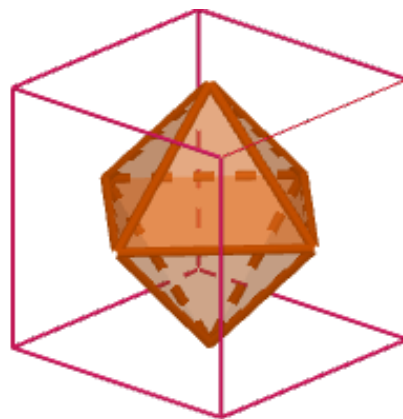
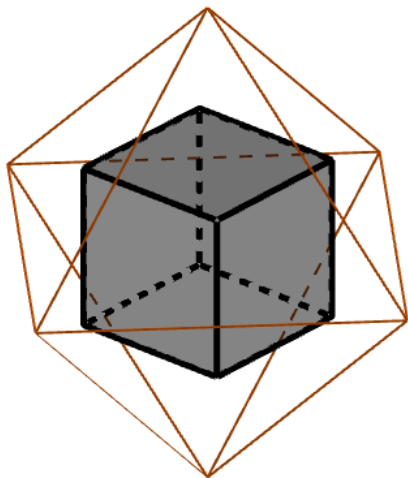
											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

# 目的

**Rep-cube** の性質を正八面体に拡張した**Rep-octahedron** の研究は行われていない。

立方体と正八面体の間にある双対関係が，**Rep-octahedron** と**Rep-cube** の性質にどのような関係をもたらしているか不明である。

本研究の目的は，**Rep-cube** について知られている主要な性質について，正八面体への拡張可能性を検討することである。





# 結果

本研究で得られた結果を示す.

## 定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$  のそれぞれについて, 次数 $k$ の Regular rep-octahedron が存在する.

特に,  $k = 3, 4, 9, 12, 16$  のそれぞれについて, 次数 $k$ の Uniform rep-octahedron が存在する.

# 結果

続き

## 定理 2

次数 $k$ の Regular rep-octahedronが存在する必要条件是,  $k$ が集合  $\{x|\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\}$  に含まれることである.

\* 今回は定理 2の詳細の説明は省略する.

## 定理 3

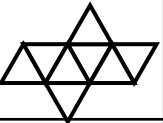
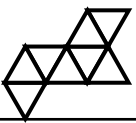
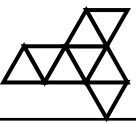
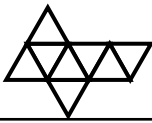
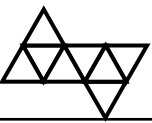
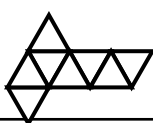
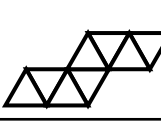
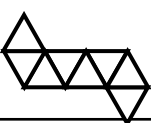
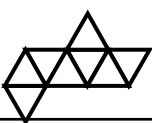
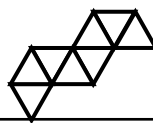
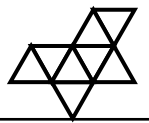
$i$ をある正整数とすると次数 $64i^2$ の Regular rep-octahedron が存在する.

# 結果

続き

## 定理 4

11種類の正八面体の辺展開図それぞれに対して，それをもとにして次数 $k \leq 9$  と  $k = 16$ の **Uniform rep-octahedron** を構成できるか否かは表の通り．

											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

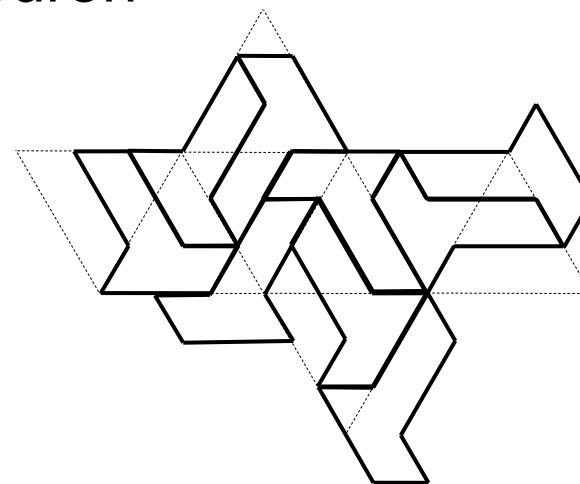
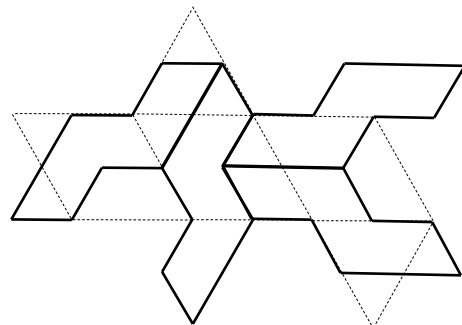
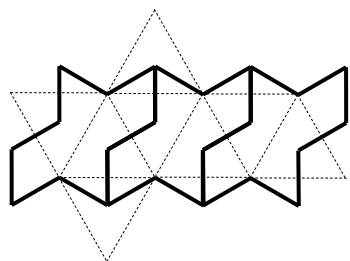
# Regular rep-octahedron の存在性

## 定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Regular rep-octahedron が存在する.

特に、 $k = 3, 4, 9, 12, 16$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Uniform rep-octahedron が存在する.

- 次数3,4,9の Regular(Uniform) rep-octahedron



# Regular rep-octahedron の存在性

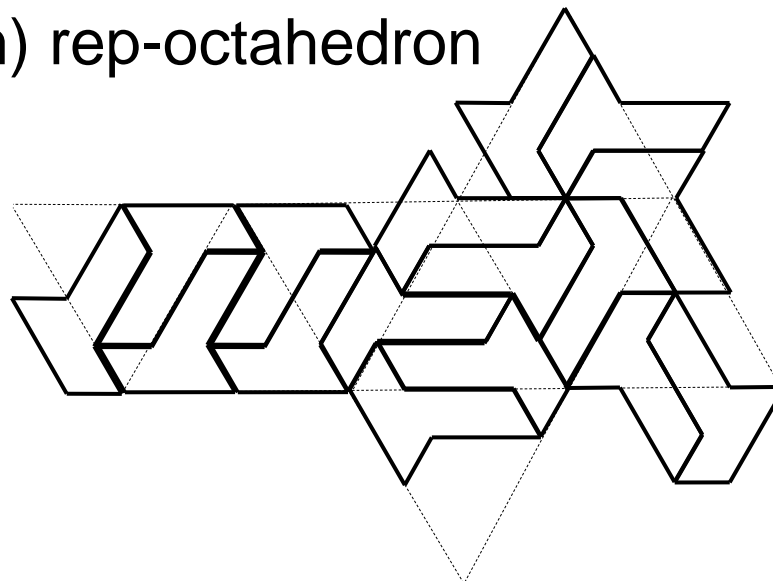
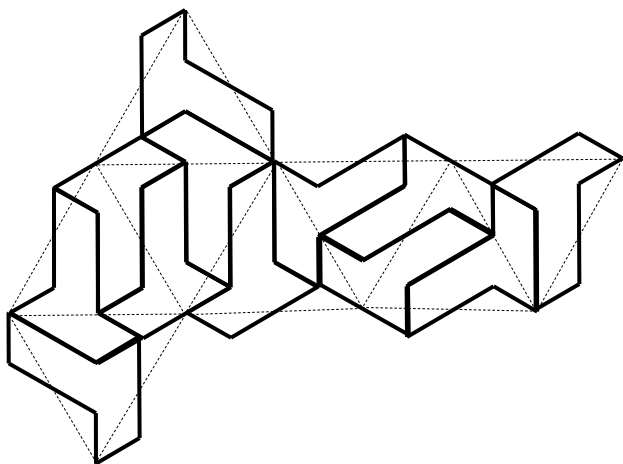
続き

## 定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Regular rep-octahedron が存在する.

特に、 $k = 3, 4, 9, 12, 16$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Uniform rep-octahedron が存在する.

- 次数12,16の Regular(Uniform) rep-octahedron



# Regular rep-octahedron の存在性

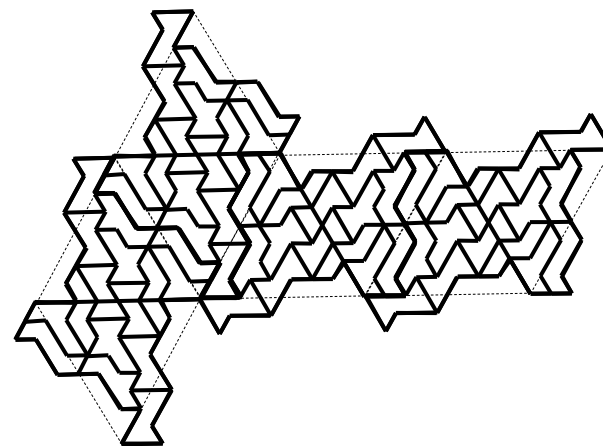
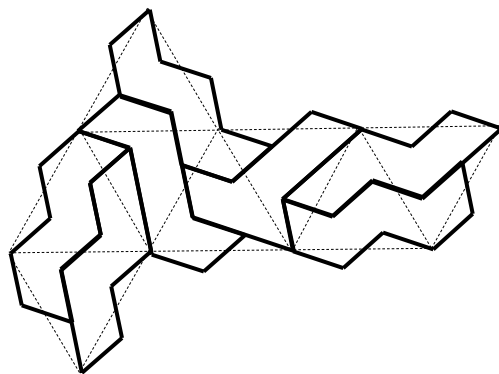
続き

## 定理 1

$k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Regular rep-octahedron が存在する.

特に、 $k = 3, 4, 9, 12, 16$  のそれぞれについて、次数  $k$  の Uniform rep-octahedron が存在する.

- 次数 7, 64 の Regular rep-octahedron



# Regular rep-octahedron は無限に存在する

非同型な Regular rep-octahedron が無限に存在することを示す.

## 定理 3

$i$  をある正整数とすると次数  $64i^2$  の Regular Rep-octahedron が存在する.

### [証明の方針]

正八面体の辺展開図を **16** 枚敷き詰めてできた多角形  $pp$  を使用する.

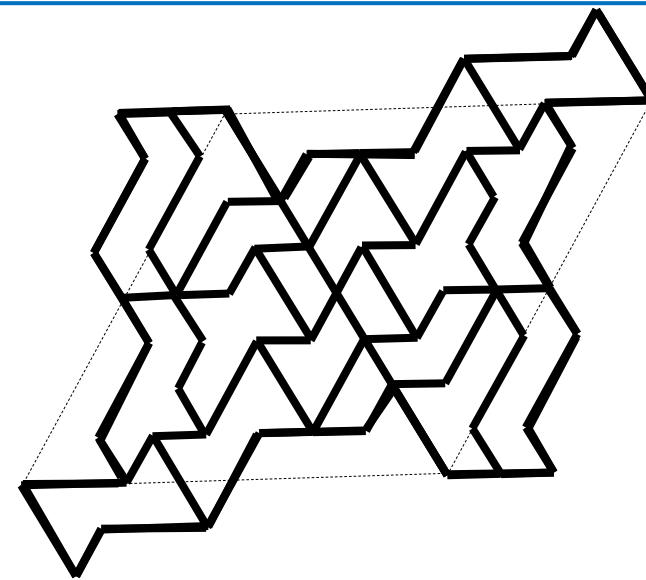
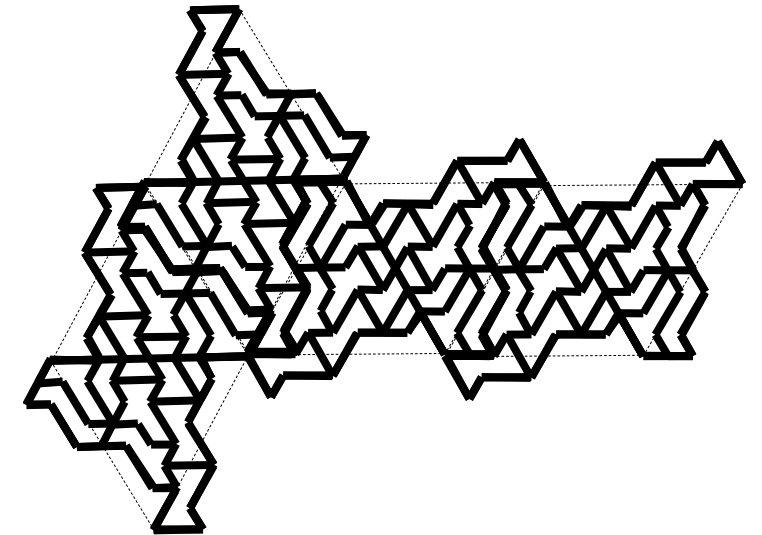
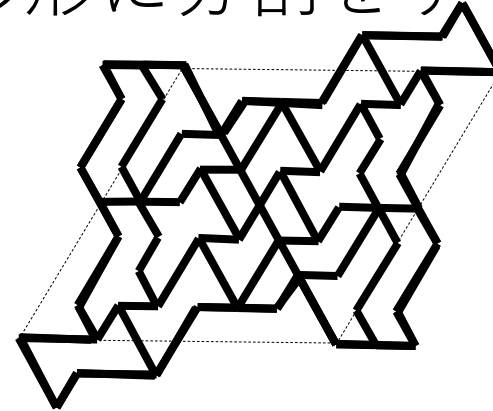
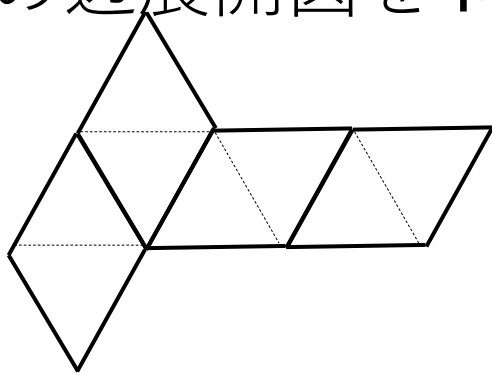


図:  $pp$

# Regular rep-octahedron は無限に存在する

[証明の方針(続き)]

正八面体の辺展開図を4枚のひし形に分割をする.



$pp$ を4枚のひし形に敷き詰める.

このとき, 切り欠けが一致するため  
埋め込むことができる.

正八面体に折っても切り欠けが一致する.

よって, 次数64のRegular rep-octahedronが得られる.



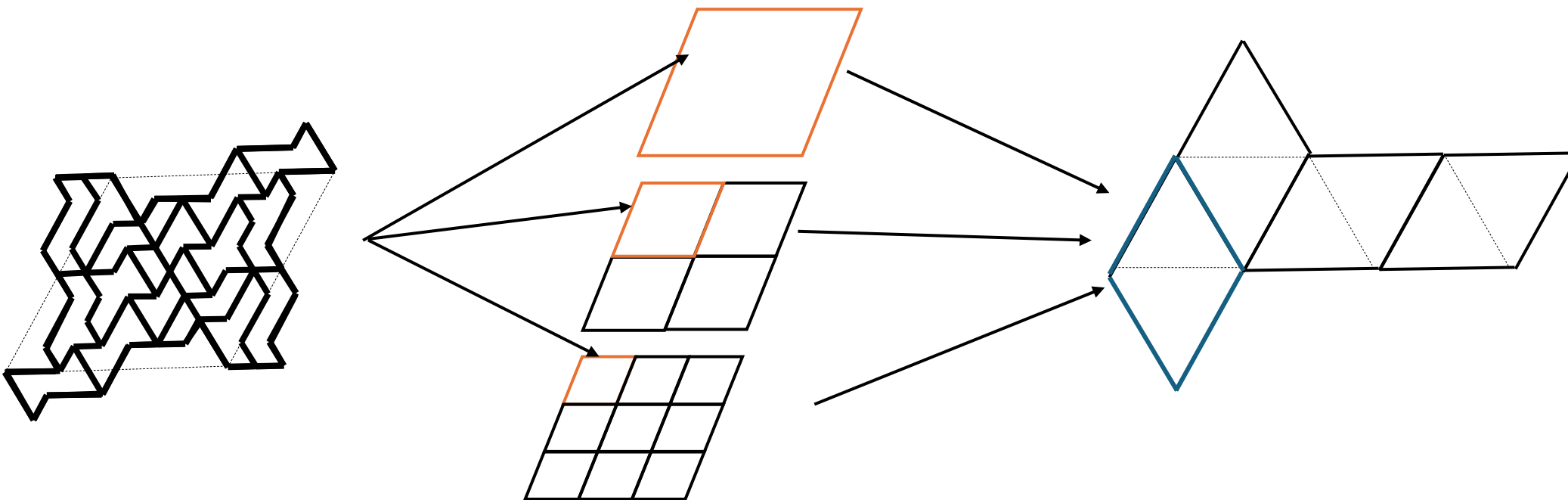
# Regular rep-octahedron は無限に存在する

[証明の方針(続き)]

ひし形を分割することを考える.

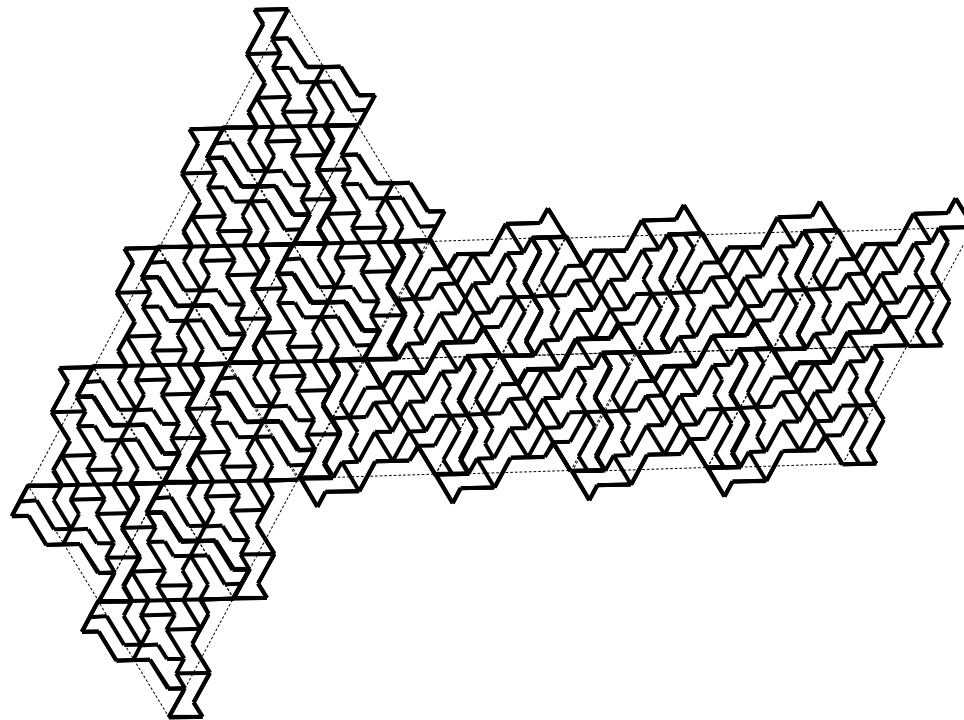
$pp$ は分割したひし形に埋め込むことができる. これを $pp'$ とする.

$pp'$ は正八面体の展開図に埋め込むことができ, 正八面体に折れる.



Regular rep-octahedron は無限に存在する

次数 $64i^2 (i = 2)$ の Regular rep-octahedron を示す.



# Uniform rep-octahedron の存在性

比較的小さい次数において **Uniform rep-octahedron** の存在性を明らかにする.

はじめに実験手法の概略を説明し, 次に結果の詳細を示す.

計算機実験は整数計画ソルバーの**SCIP 8.0.3**を使用した.

実験の環境を表に示す.

使用ツール	SCIP version 8.0.3
CPU	11th Gen Intel(R) Core(TM) i5-1135G7 @ 2.40GHz 2.42 GHz
RAM	8.00GB
OS	Windows 11 Education

## 整数計画ソルバーを使った実験

タイル張り問題の解法を用いた.

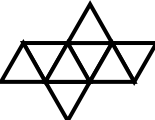
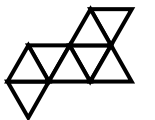
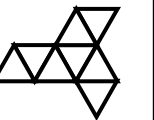
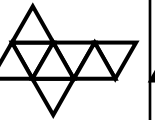
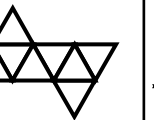
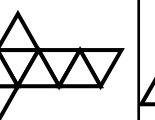
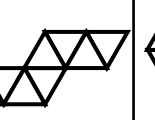
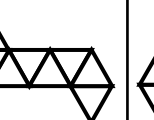
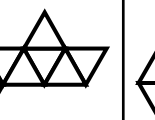
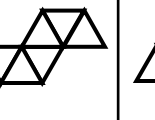
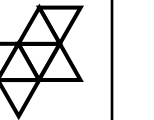
タイル張り問題とは, 特定の形状の多角形を用いて隙間と重なりなく, 与えられた平面を敷き詰める問題である.

1辺の長さが1の展開図 $k$ 枚用いて, 1辺の長さが $\sqrt{k}$ の正八面体の表面上で敷き詰めができるか検証した.

# 次数 $k$ の Uniform rep-octahedron の存在性

## 定理 3






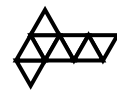

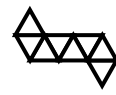



11種類の正八面体の辺展開図それぞれに対して、それをもとにして次数  $k \leq 9$  と  $k = 16$  の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かは表の通り.

											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

# 次数 $k$ の Uniform rep-octahedron の存在性

## 定理 3

11種類の正八面体の辺展開図それぞれに対して、それをもとにして次数 $k \leq 9$ と $k = 16$ の Uniform rep-octahedron を構成できるか否かは表の通り.

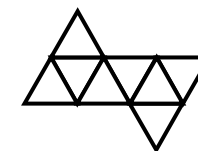
											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×
12						○					
13											
16	×	×	×	×	×	○	×	×	×	○	×

### 観察

次数7の Uniform rep-octahedron は存在しない.

### 予想

下の辺展開図をもとにしてできる Uniform rep-octahedron は存在しない.



# まとめ

## Rep-cubeの性質と比較する

Rep-cube  
 $k = 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 18, 25, 36, 50, 64$  のそれぞれについて, 次数 $k$ の Regular rep-cube が存在する.



Rep-octahedron  
 $k = 3, 4, 7, 9, 12, 16, 64$  のそれぞれについて, 次数 $k$ の Regular rep-octahedronが存在する.

# まとめ

## 続き

### Rep-cube

次数 $k$ の

Regular rep-cubeが存在する必要条件是、 $k$ が集合  $\{x | \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2\}$  に含まれることである。



### Rep-octahedron

次数 $k$ の Regular

rep-octahedronが存在する必要条件是、 $k$ が集合  $\{x | \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, a > 0, b \geq 0, x = a^2 + b^2 + ab\}$  に含まれることである。



# まとめ

## 続き

### Rep-cube

非同型な **Regular(Uniform) rep-cube** は無限に存在する.

$i$  をある正整数とすると次数  $18i^2$  の **Regular(Uniform) rep-octahedron** が存在する.



### Rep-octahedron

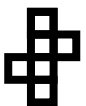
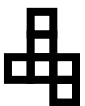
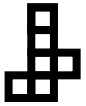
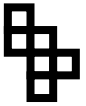
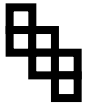
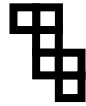
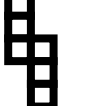
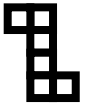
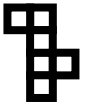
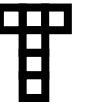
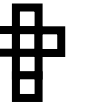
非同型な **Regular rep-octahedron** は無限に存在する.









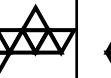


$i$  をある正整数とすると次数  $64i^2$  の **Regular rep-octahedron** が存在する.

非同型な **Uniform rep-octahedron** が無限に存在するかは現時点で不明である.

# まとめ

## 続き

											
2	×	○	○	×	×	×	○	×	×	○	×
4	○	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	×	○	×	×	○	×	○
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

											
3	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○	○
4	×	○	○	○	×	○	○	○	○	○	○
7	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	×	○	×	×	○	○	×

11種類の辺展開図それぞれに対して、それをもとにして、比較的小さい次数の **Uniform rep-cube** と **Uniform rep-octahedron** を構成できるか否かを示す。

- 立方体のすべての辺展開図で **Uniform rep-cube** は構成可能だが、正八面体は **Uniform rep-octahedron** を構成できない辺展開図があると予想できる。
- 2つの表に共通点は見られない。そのため立方体と正八面体の間の双対関係は **Rep-cube** と **Rep-octahedron** の性質に関係していないと言える。