



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## *ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5*

### *Методы численного решения интегральных уравнений*

### *Варианты 5, 16*

Студенты \_\_\_\_\_  
ФН2-61Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

И. П. Шаманов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

О. Д. Климов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2024 г.

## 1. Ответы на контрольные вопросы

**1. При выполнении каких условий интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет решение? В каком случае решение является единственным?**

Интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение следующего вида

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

где  $K$  этого уравнения задана в квадрате  $[a, b] \times [a, b]$  и называется ядром.

Отметим, что для данного уравнения можно поставить задачу Штурама-Лиувилля отыскания собственных функций  $\varphi_i$  и собственных значений  $\lambda_i$ . Если ядро вещественно и симметрично, т.е.  $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ , то существует по крайней мере одна собственная функция и одно собственное значение, причем все собственные значения такого оператора действительны, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Существование решения уравнения Фредгольма 2-го рода и его единственность зависят от параметра  $\lambda$ . Если  $\lambda \neq \lambda_i$  ( $\lambda_i$  - собственное число), то уравнение имеет единственное решение. Для симметричного ядра оно может быть представлено в виде разложения Шмидта по системе собственных функций  $\varphi_i$ .

Если  $\lambda = \lambda_i$ , т.е. параметр совпадает с одним из собственных значений, то при одних правых частях решение вообще не существует, а при других — существует и неединственно.

**2. Можно ли привести матрицу СЛАУ, получающуюся при использовании метода квадратур, к симметричному виду в случае, если ядро интегрального уравнения является симметричным, т. е.  $K(x, s) = K(s, x)$ ?**

При использовании метода квадратур, получаем СЛАУ в таком виде:

$$y_i - \lambda \sum_{k=0}^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f_i, \quad i = 0, \dots, N. \quad (2)$$

Так как ядро интегрального уравнения симметричное, то  $K(x_i, s_k) = K(s_k, x_i)$ . Если умножить каждое  $i$ -е уравнение системы на  $a_i^N$ :

$$a_i^N y_i - \lambda \sum_{k=0}^N a_i^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = a_i^N f_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (3)$$

то получаем систему с симметричной матрицей.

**3. Предложите способ контроля точности результата вычислений при использовании метода квадратур.**

Один из способов контроля точности - это дробление шага и сравнение нормы разности вычисленного значения интеграла с искомой точностью.

**4. Оцените возможность и эффективность применения методов квадратур, простой итерации и замены ядра при решении интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода.**

1) Метод квадратур

Возможно применение метода квадратур. Получаем СЛАУ

$$y_i - \sum_{k=0}^N a_k^N K(x_i, s_k) y_k = f_i$$

с треугольной матрицей, которая решается за один ход метода Гаусса. При этом решение существует и единственно для любого  $\lambda$ .

2) Простой итерации

Итерационные методы, в частности метод простой итерации, также применимы к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Достаточным условием сходимости метода простой итерации в норме  $\|\cdot\|_c$  является выполнение условия

$$|\lambda| \cdot \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, s)| ds \leq 1.$$

Недостатком метода простой итерации является необходимость приближенного вычисления большого количества интегралов, что может приводить к значительным затратам машинного времени.

3) Замена ядра

Ядро интегрального уравнения Фредгольма называется вырожденным, если оно представимо в виде

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \psi_i(s),$$

где  $\varphi_i(x), i = 1, \dots, m$  - система линейно независимых функций. А вот ядро уравнения Вольтерры вырожденным не бывает. Следовательно, метод замены ядра вырожденным для уравнения Вольтерры 2-го рода не применим.

**5. Что называют резольвентой ядра интегрального уравнения?**

Резольвентой интегрального уравнения (разрезающим ядром) называется такая функция  $R(x, \xi, \lambda)$ , что решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \quad (4)$$

причем  $\lambda$  не должна являться собственным числом исходного уравнения.

**6. Почему замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора?**

Полином Чебышева — полином наилучшего приближения функции в данном нормированном пространстве, который наилучшим образом аппроксимирует функцию на всем исследуемом отрезке. Формула Тейлора записывается в окрестности точки, соответственно, чем дальше находится точка, в которой вычисляется приближенное значение функции, тем больше погрешность аппроксимации. Соответственно, замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева.

В случае полиномиальной аппроксимации

$$\|f - L_n\|_C \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega\|_C \quad (5)$$

Поставив задачу

$$\min_{x_0, \dots, x_n} \|\omega\|_C \rightarrow \min, \quad \omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \quad (6)$$

Решением является полином Чебышева

$$T_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \cos \left( (n+1) \arccos \frac{2x - (b+a)}{b-a} \right) \quad (7)$$

Разложив ядро  $K(x, s) = \sum_{n=0}^m \varphi(x) T_n(s)$  получим

$$\alpha_{ij} = \int_a^b T_j(s) \varphi_i(s) ds \quad (8)$$

$$\beta_i = \int_a^b T_i(s) f(s) ds \quad (9)$$

Решая эти интегралы численно получим следующие оценки:

$$|\alpha_{ij} - I_{ij}| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\varphi_i\|_C \int_a^b |T_{j+1}| dx \quad (10)$$

**7. Какие вы можете предложить методы решения переопределенной системы (5.13), (5.17) помимо введения дополнительно переменной  $R$ ?**

Для решения переопределенной СЛАУ можно использовать метод наименьших квадратов.

При помощи этого метода коэффициенты аппроксимирующей функции вычисляются таким образом, чтобы среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от найденной аппроксимирующей функции было наименьшим:

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min$$

Рассмотрим  $A \cdot X = B$ . Добавим в уравнение вектор погрешности:

$$A \cdot X = B + \varepsilon$$

Соответственно, задача сводится к минимизации квадрата нормы вектора  $\varepsilon$ :

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \|\varepsilon\|^2 = \varepsilon^T \cdot \varepsilon \rightarrow \min$$

$$\varepsilon^T \cdot \varepsilon = (A \cdot X - B)^T (A \cdot X - B) = A^T \cdot X^T \cdot A \cdot X - 2A^T \cdot X^T \cdot B + B^T \cdot B$$

Для нахождения минимума вычислим частную производную по  $X$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{\partial \varepsilon^T \cdot \varepsilon}{\partial X} = 2A^T \cdot A \cdot X - 2A^T \cdot B = 0$$

$$X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Таким образом, метод наименьших квадратов сводится к нахождению обратной матрицы.

## 2. Дополнительные вопросы

**8. Метод квадратур.** Какие квадратуры Вы использовали в данной лабораторной работе? Какую точность они имеют (порядок, ведущий член погрешности)? Подтвердите расчетами, что такая же точность достигается в Вашей реализации квадратурных формул.

В лабораторной работе была использована квадратурная формула трапеций:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h, \quad h = x_{i+1} - x_i,$$

которая имеет оценку локальной погрешности

$$|\psi_{h,i}| \leq \frac{1}{12} M_2 h^3.$$

Отсюда получаем оценку погрешности квадратурной формулы трапеций

$$|\psi_h| \leq \frac{1}{12} M_2 h^3 n = \frac{1}{12} M_2 h^3 \frac{b-a}{h} = \frac{1}{12} M_2 (b-a) h^2 = O(h^2).$$

Для проверки точности будем использовать следующее интегральное уравнение:

$$u(x) - e \int_1^e \frac{\ln s}{x} u(s) ds = \ln x,$$

имеющее решение вида

$$u(x) = \ln x - \frac{2e}{x}.$$

Для него  $f(s) = \frac{e \ln s}{x} (\ln s - \frac{2e}{s})$ . Следовательно,

$$f''(s) = \frac{2e(3e + s - (2e + s) \ln s)}{s^3 x}.$$

Тогда  $M_2 = \max_{1 \leq s \leq e} \frac{1}{x} \cdot 2e(1 + 3e) = 2e(1 + 3e)$  и достигается при  $s = 1$ . При  $N = 10$   $h = \frac{e-1}{10}$  и

$$\frac{1}{12} M_2 (b-a) h^2 = \frac{1}{600} (e-1)^3 (1 + 3e) \approx 0.210415.$$

В реальности абсолютная ошибка равна: 0.120743.

**9. Критерий останова.** Какой критерий останова использовался для метода простой итерации? Вычислите априорную оценку погрешности (приведена в методическом пособии), содержащую множитель  $q$ . Проверьте, действительно ли достигаемая погрешность меньше оцениваемой?

Для метода простой итерации в качестве критериев останова было выбрано условие, что норма разности между последними приближениями меньше некоторого заданного  $\varepsilon$ :

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \leq \varepsilon.$$

В качестве тестового примера возьмем уравнение

$$u(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin u(s) ds = \cos x, \quad x \in [0, \pi],$$

точное решение которого имеет вид  $u(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \sin x$ . Для этого примера

$$q = \frac{1}{2\pi} \max_{0 \leq x \leq \pi} \int_0^\pi |\sin x| ds = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \pi^2 \max_{0 \leq x \leq \pi} \sin x = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398 < 1.$$

Было взято 50 узлов.

Для методов типа простой итерации существуют следующие оценки:

$$\|u^{(k)} - u_*\| \leq q^k \|u^{(0)} - u_*\|, \quad \|u^{(k)} - u_*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|u^{(0)} - u^{(1)}\|,$$

где  $u_*$  - точное решение задачи,  $k$  - номер итерации. Будем использовать первую оценку. В качестве начального приближения примем правую часть уравнения  $\cos(x)$ . Тогда

$$\|u^{(0)} - u_*\| = \left\| \frac{2}{\pi} \sin x \right\| = \frac{2}{\pi}.$$

Таблица 1. Погрешность метода простой итерации

Число итераций	Достигнутая точность	Теоретическая погрешность
1	0.318205	0.5
2	0.15905	0.392699
3	0.079489	0.308276
4	0.039764	0.242237
5	0.0198616	0.190292
6	0.00992754	0.149424
7	0.0049627	0.117205
8	0.0024818	0.0918678
9	0.0012409	0.072004
10	0.000619629	0.056853

10. Замена ядра вырожденным. Как меняется погрешность решения с увеличением числа слагаемых в разложении ядра по формуле? Составьте таблицу вида «число слагаемых — достигнутая точность».

11. Сингулярные уравнения. Установить расчетным путем наименьшее количество точек разбиения окружности, необходимое для получения точного решения сингулярного интегрального уравнения (точное решение можно получить из правой части заменой тригонометрической

функции  $\sin, \cos$  и умножением на  $\pm 2$ ). Какое количество узлов потребовалось для передачи качественного характера решения?

12. *Регуляризация.* Для решения сингулярного интегрального уравнения в методическом пособии предлагается вводить дополнительную неизвестную. Постройте таблицу, содержащую зависимость величины от числа узлов сетки.



## Список использованных источников

1. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 592 с.