

Проект

Шипицына Алина, 716 группа

Постановка задачи

В данной работе я хочу решить численно уравнение переноса с периодическими граничными условиями,

$$u_t + u_x = 0$$
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{4\pi x}{L}, 0 \leq x \leq L\right)$$

используя различные способы и сравню результаты с аналитическим решением. Также я проведу исследование схемы на сходимость и покажу, что при сгущении сетки точность схем увеличивается в пределах, где схема сходится

Я рассмотрю 4 разностные схемы:

- схему с разностями против потока
- схему Лакса-Вендроффа
- схему Лакса
- схему с разностями по потоку

Сетка равномерная:

$$x_i = (i-1)h, i = 1, \dots, NX, h = \frac{L}{NX-1}$$
$$x_1 = 0, x_{NX} = L$$

В качестве входных параметров буду использовать числа Куранта CFL, а также размер области $L = 20$ (переменные в этой задаче безразмерные), время расчета $T = 18$. Расчеты проведу для следующих значений CFL: 0.25; 0.5; 1; 1.3. Эти значения числа Куранта соответствуют сгущению сетки в 2 раза. (1.3 взяла, потому что 2 слишком большое)

Примерная схема реализации программы имеет вид:

1. Задание начальных данных.
2. Генерация сетки.
3. Цикл по времени, в котором:


- а) проводится расчет y_i^{n+1} для $i = 2, \dots, NX$ в соответствии с используемым численным методом;
- б) рассчитывается значение y_1^{n+1} (учет граничных условий)
- в) инкрементирование времени $t + = \tau$;

Исследование на сходимост

Условия устойчивости:

- Левый уголок - всегда для нашей схемы
- Правый уголок - никогда для нашей схемы
- Лакса-Вендроффа - $CFL \leq 1$
- Лакса - $CFL \leq 1$

Ниже приведены подсчеты для подсчета порядка устойчивости используемых схем

①  Исходное уравнение $u_t' + u_x' = 0$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

$$u_m^n = u_m^n + h u_x' + \frac{h^2}{2} u_x'' + \frac{h^3}{6} u_x'''$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_t'' + \frac{\tau^3}{6} u_t'''$$

аналит. решение
↓
 $u_t' - u_x'$

$$\left\| \left(u + \frac{\tau}{2} u_t' + \frac{\tau^2}{2} u_t'' + \frac{\tau^3}{6} u_t''' - u + u - u + \frac{h}{2} u_x' - \frac{h^2}{2} u_x'' + \frac{h^3}{6} u_x''' \right) \right\| =$$

$$= \|r_m^n\| = u_t' + u_x' - u_t' - u_x' + \frac{\tau}{2} u_t'' + \frac{\tau^2}{6} u_t''' + \frac{h^2}{2} u_x'' \sim$$

$$\sim O(\tau, h) \leftarrow \text{порядок аппроксимации}$$

$a = 1 \geq 0 \Rightarrow$ Устойчивость схемы при $\frac{\tau}{h} \leq 1$

по Т. Лакса-Рундберга: аппрокс + уст \rightarrow сходимость

\Rightarrow Данная схема сходится к аналит. решению с $O(\tau, h)$.

2) L_0

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0, \quad a = 1$$

Опишем в Тейлора в окр $u_m^n \Rightarrow$

$$\|r_m^n\| = \|L_h[u]_h - f_h\| = \left(u + u'_t \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2} u''_t - u \right) + \cancel{u} + u'_x + u''_x \cdot \frac{h}{2} - \cancel{u} - u'_x - u'_t = \frac{\tau}{2} u''_t + u''_x \cdot \frac{h}{2} \sim O(\tau, h)$$

Данная схема устойчива только если $a \leq 1$
у нас $a = 1 \rightarrow$ схема не устойчива \Rightarrow
она и не сходится.

3) Схема Л-В.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \quad a = 1$$

$$\cancel{u} + u'_t + \frac{\tau}{2} u''_t + \frac{\tau^2}{6} u'''_t - u + \frac{1}{2} \left(+ 2u'_x + 2 \frac{h^2}{6} u'''_x \right) - \frac{a^2 \tau}{2h^2} \left[\cancel{u} 2hu'_x + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{2} u''_x - 2 \frac{h^3}{6} u'''_x \right] = \underbrace{u'_t + \frac{\tau}{2} u''_t + \frac{\tau^2}{6} u'''_t}_{=0} + \underbrace{u'_x + \frac{h^2}{6} u'''_x}_{=0} - \frac{\tau}{h} u'_x + \\ - \frac{\tau h}{6} u'''_x = \frac{\tau}{2} u''_t + \frac{\tau^2}{6} u'''_t$$

$$\frac{1}{\tau} \left(u + u'_t \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2} u''_t + \frac{\tau^3}{6} u'''_t - u \right) + \frac{1}{2h} \left(2u'_x \cdot h + 2 \frac{h^3}{6} u'''_x \right) - \\ - \frac{\tau}{2h^2} \left(2 \frac{h^2}{2} u''_x + 2 \frac{h^4}{24} u^{(4)}_x \right) = \underbrace{u'_t + \frac{\tau}{2} u''_t + u'_x + \frac{h^2}{6} u'''_x}_{=0} + \frac{\tau}{2} u''_x - \frac{\tau h^2}{24} u^{(4)}_x = \\ \Rightarrow r \sim O(\tau, h^2, h^2 \tau)^{(*)} \text{ — } n\text{-к сходимости (аннр)}$$

Эта схема устойчива при $\frac{a \cdot \tau}{h} = \frac{\tau}{h} \leq 1$

\rightarrow схема сходится с n -м $(*)$ при $\frac{\tau}{h} \leq 1$

④ Лакса

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(y_{m+1}^n + y_{m-1}^n)}{\tau} + \frac{a}{2h} \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{\tau} = 0.$$

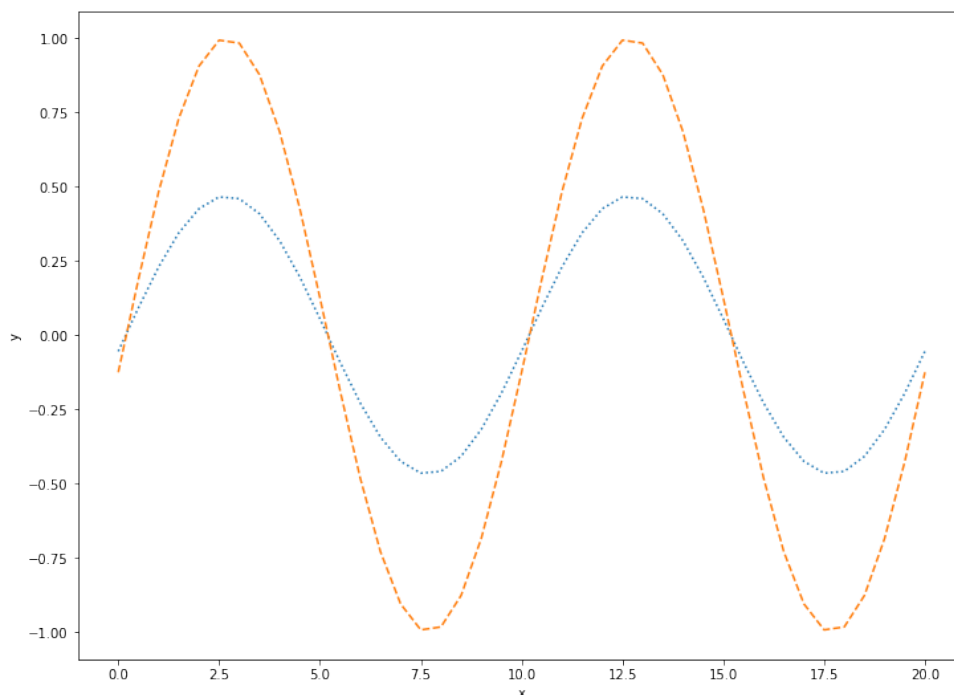
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \left(u + \tau u'_t + \frac{\tau^2}{2} u''_t - \frac{1}{2} \left(2u + 2\frac{h^2}{2} u''_x \right) \right) + \frac{a}{2h} \left(2u'_x h + 2u'''_x \frac{h^3}{6} \right) = \\ & = \underbrace{u'_t + \frac{\tau}{2} u''_t - \frac{h^2}{2\tau} u''_x + u'_x + \frac{h^2}{6} u'''_x}_{\sim 0} \Rightarrow \\ & \|r_m^n\| \sim O(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau}) (*) \end{aligned}$$

Эта схема тоже устойчива при $\frac{\tau}{h} \leq 1$

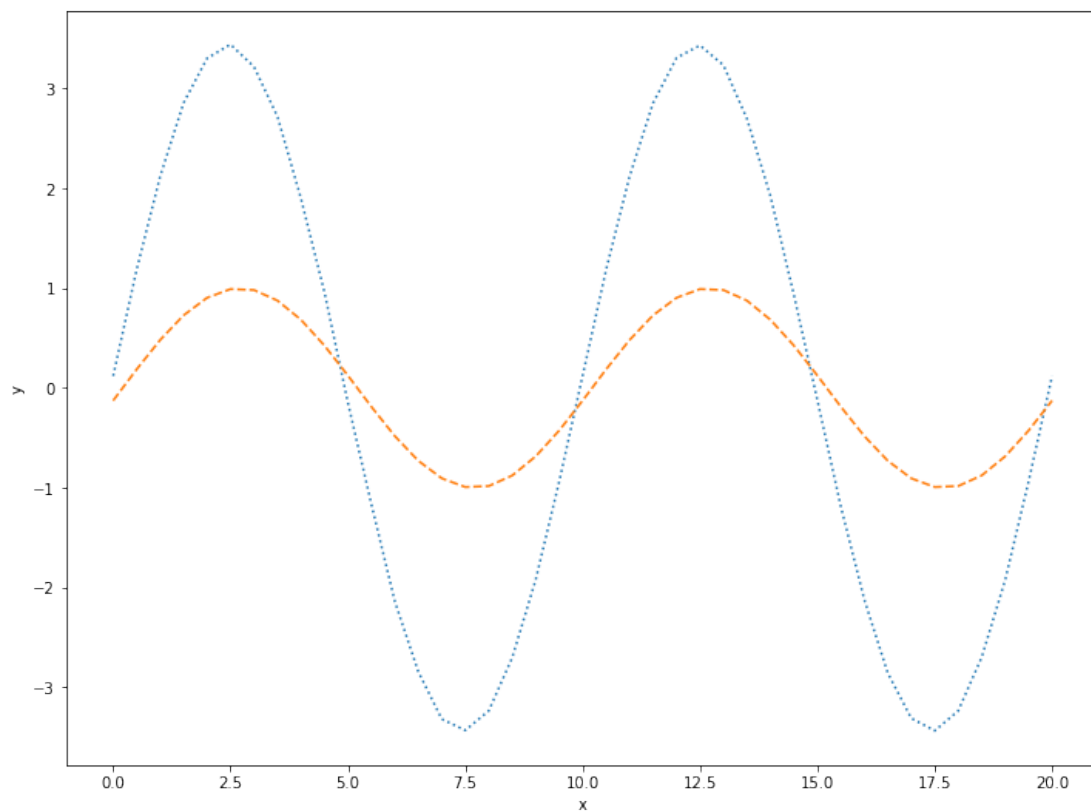
\Rightarrow сходится при $\frac{\tau}{h} \leq 1$ с порядком (*)

Анализ полученных результатов ¶

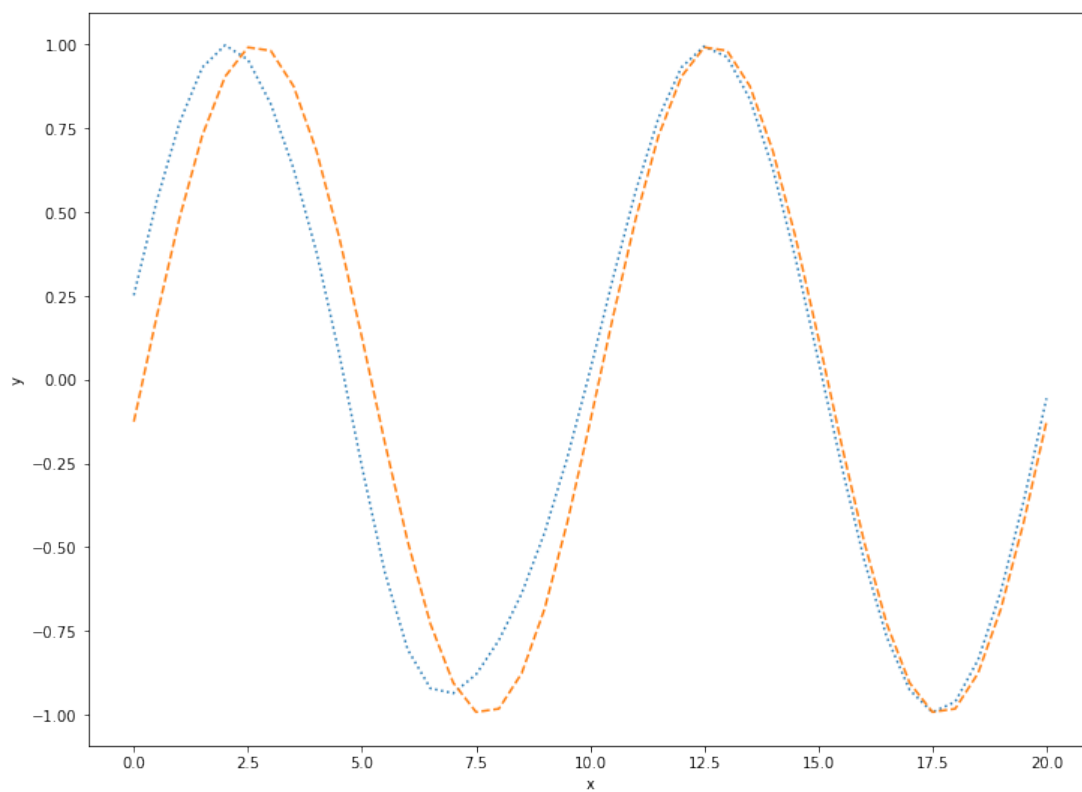
- CFL = 0.25



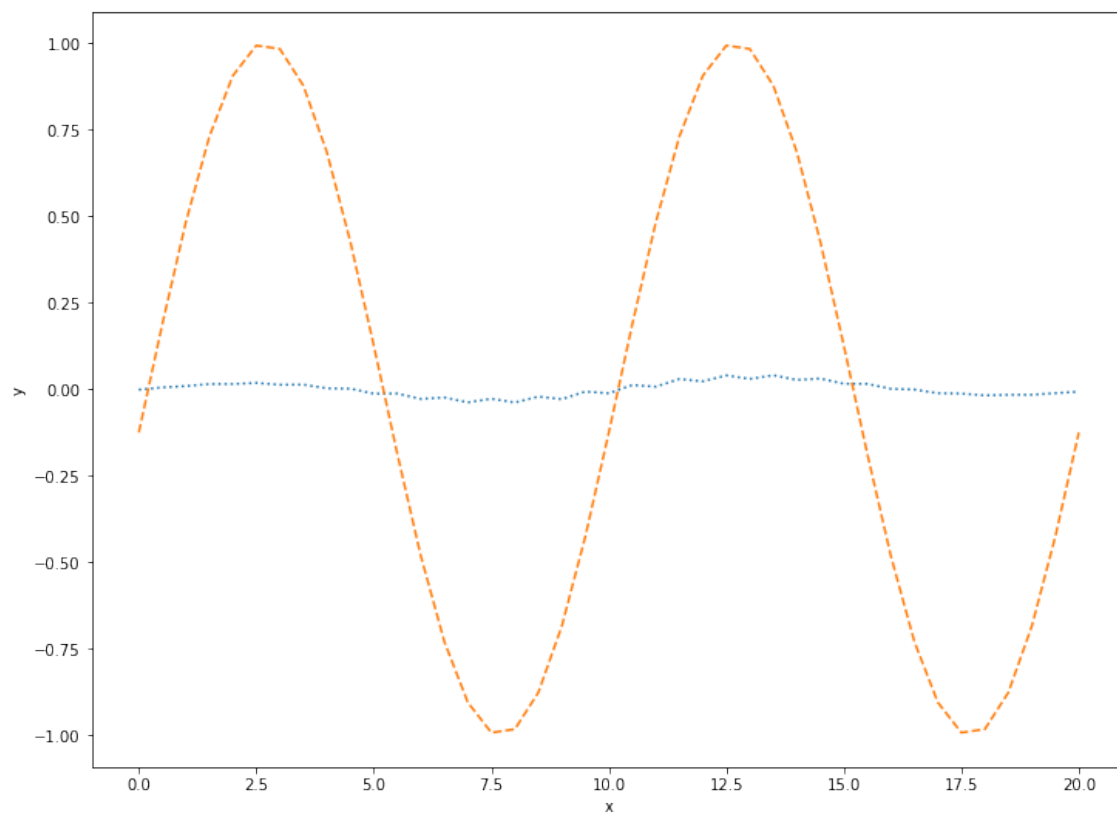
ЛЕВЫЙ УГОЛОК



ПРАВЫЙ УГОЛОК

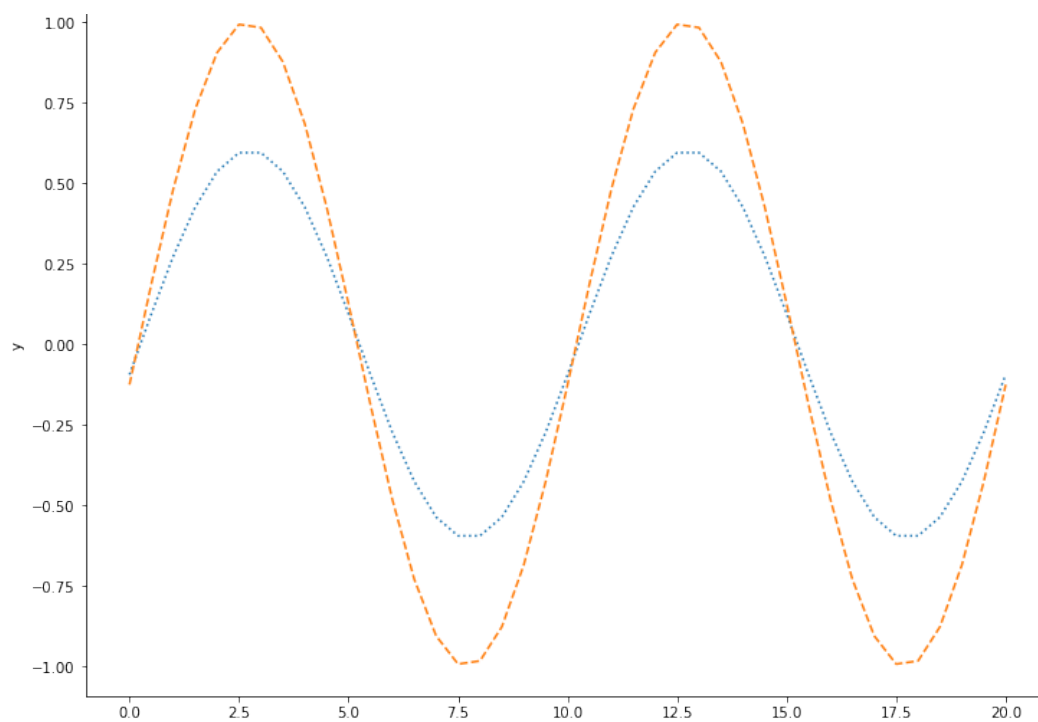


ЛАКСА-ВЕНДРОФФА

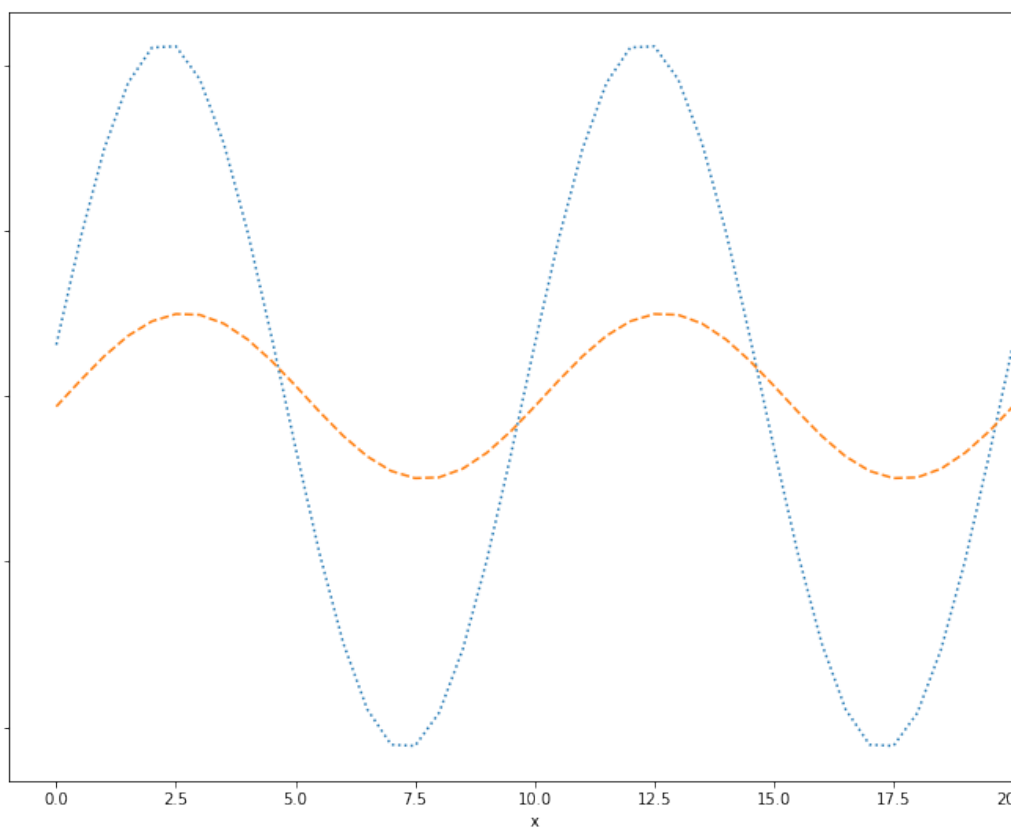


ЛАКСА

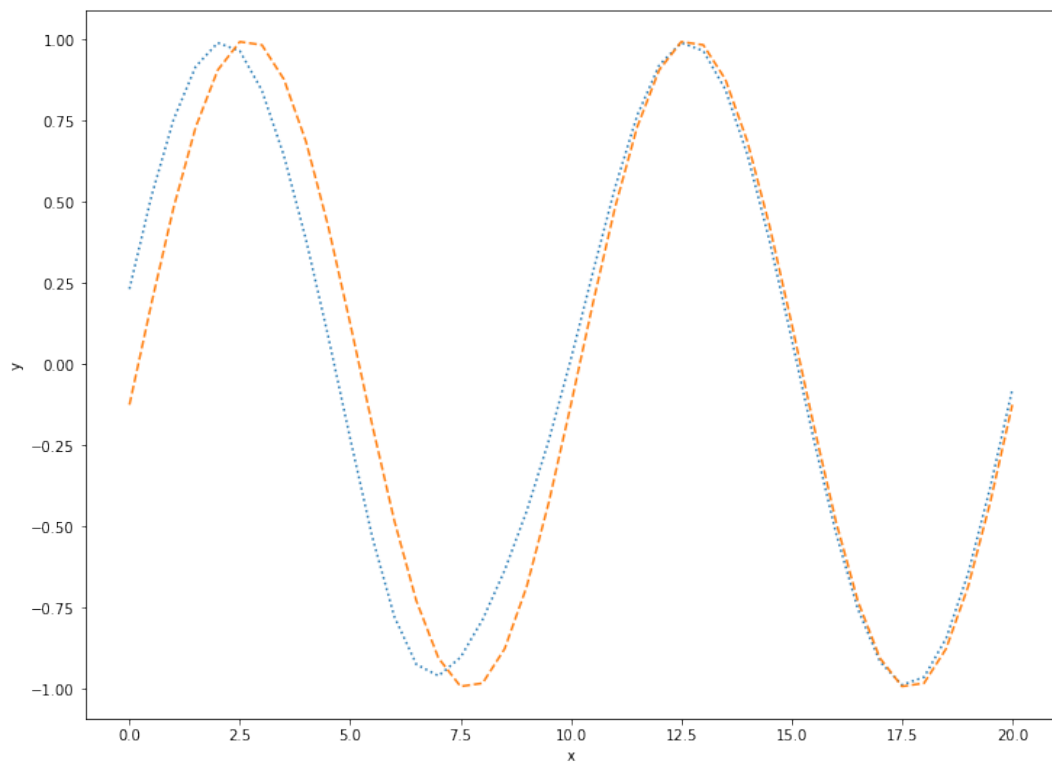
- CFL = 0.5



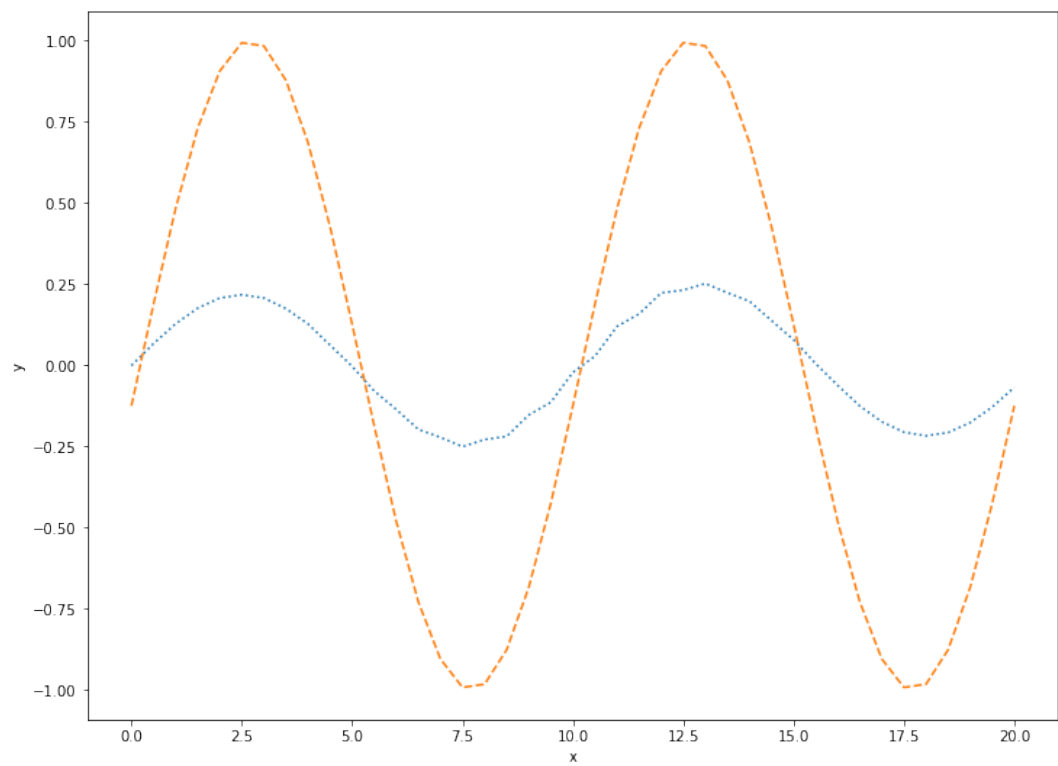
ЛЕВЫЙ УГОЛОК



ПРАВЫЙ УГОЛОК

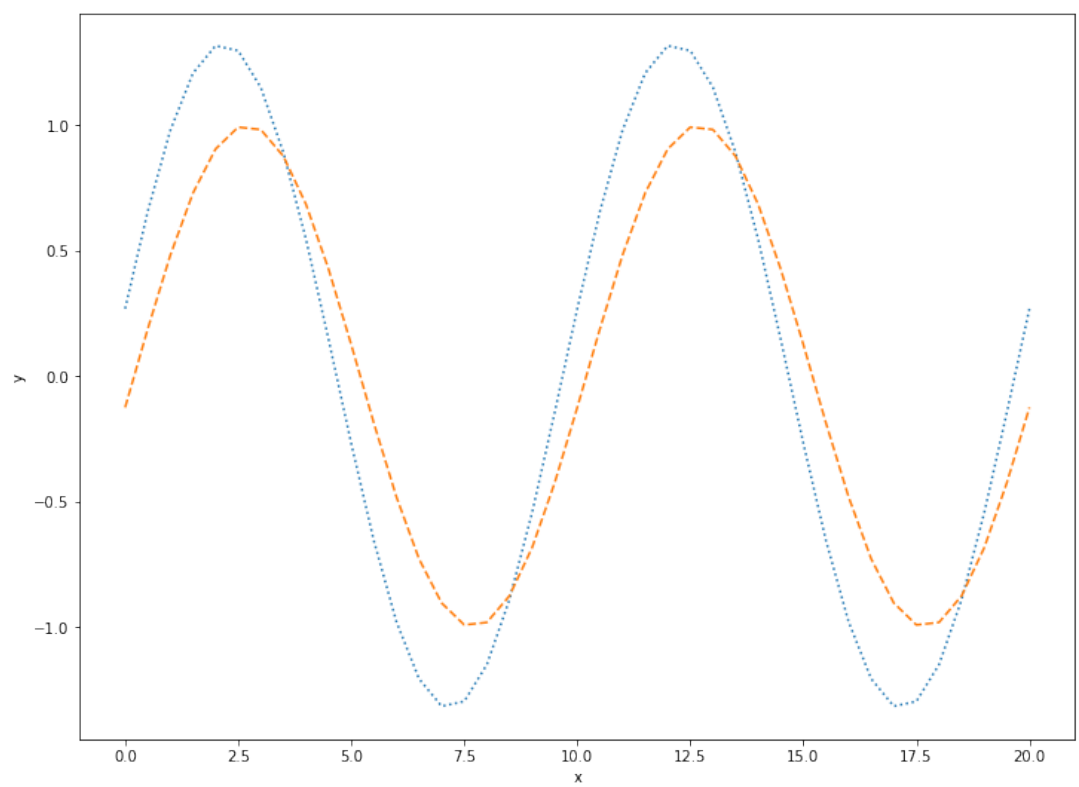


ЛАКСА - ВЕНДРОФФА

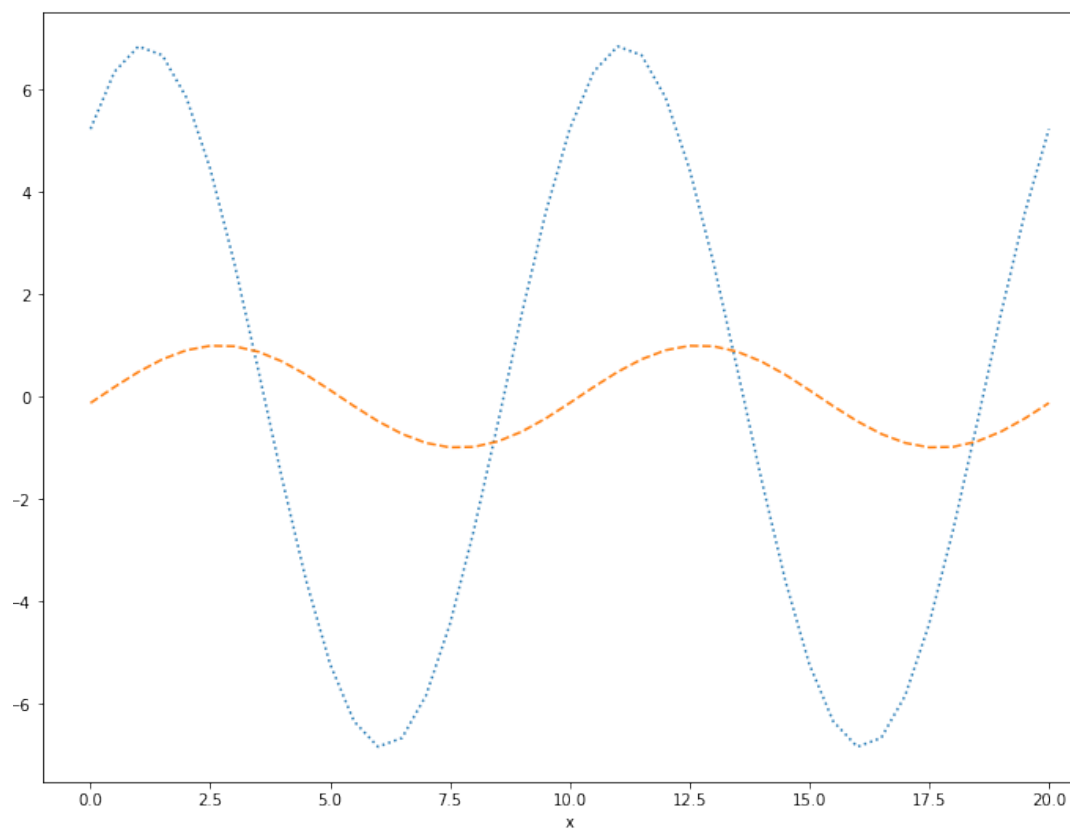


ЛАКСА

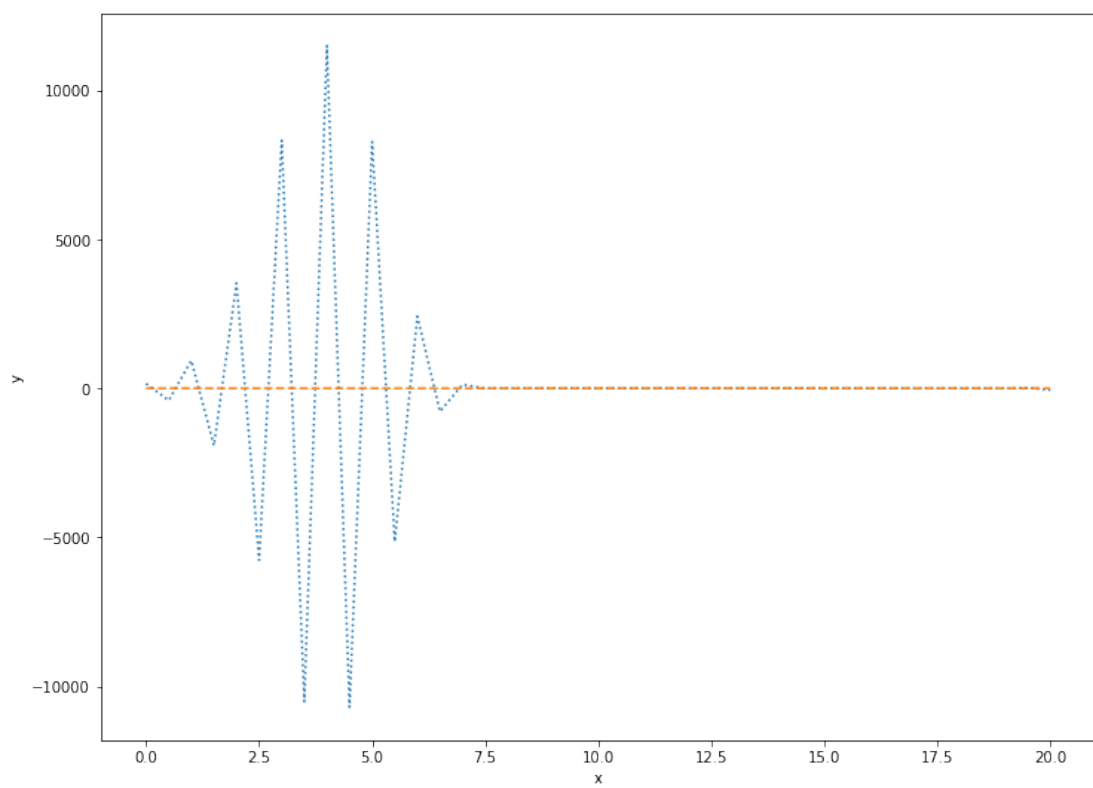
- **CFL = 1.3**



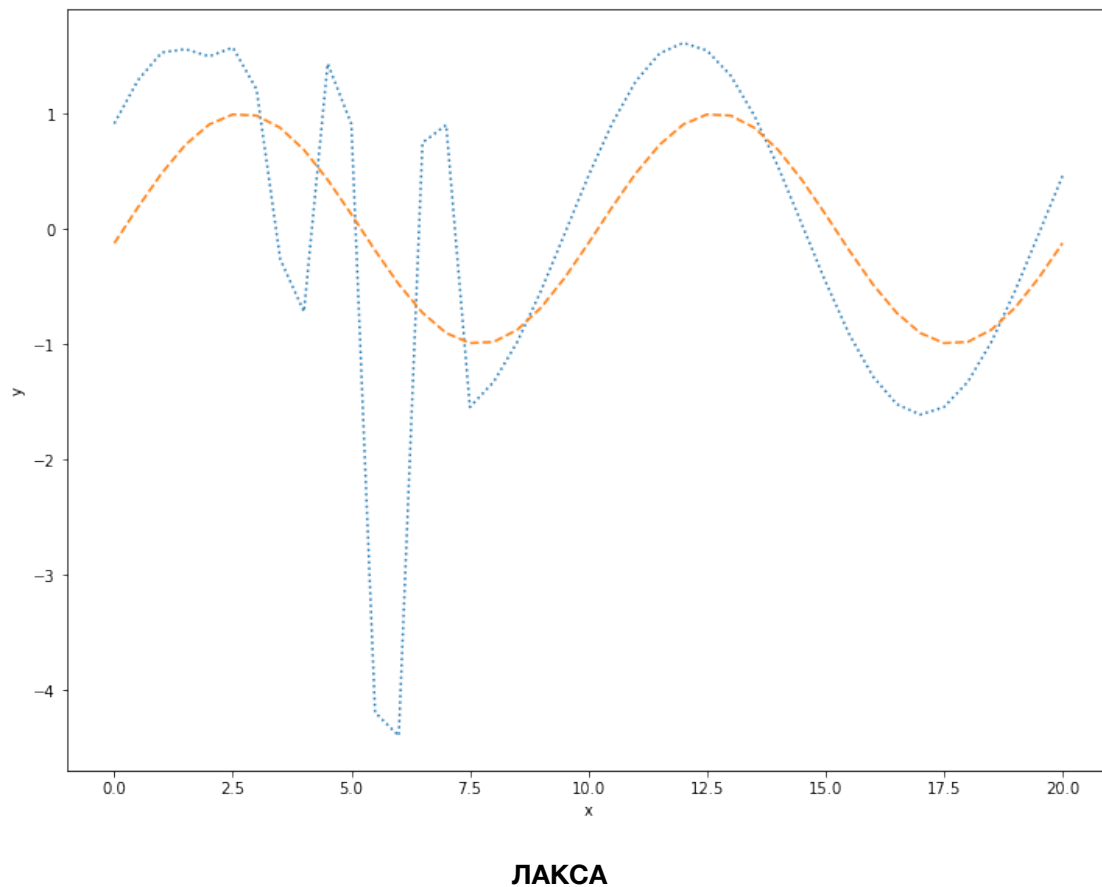
ЛЕВЫЙ УГОЛОК



ПРАВЫЙ УГОЛОК



ЛАКСА - ВЕНДРОФФА



- Для $CFL = 1$ графики приведены в приложенном ноутбуке. Также проверить полученные графики, приведенные выше, можно в том же ноутбуке, меняя число CFL

Анализ результатов при варьировании числа Куранта

В нашем случае, пока идет сгущение сетки, т.е. увеличивается коэффициент CFL , и в то же время выполняется условие устойчивости схемы, точность найденного решения повышается, что и видно из полученных результатов

Если условия устойчивости не выполняются, то и видно, как и решение становится плохим

В таблице ниже приведены ошибки при вычислениях разными схемами.

CFL (число куранта)	0,25	0,5	1	1,3
Левый уголок	0,33	0,24	0,08	0,317
Правый уголок	1,53	2,08	3,325	4,08
Лакса-Вендроффа	0,14	0,13	0,08	1720
Лакса	0,61	0,48	0,08	0,8

Выделенные серым цветом ячейки иллюстрируют, в каких случаях схемы неустойчивы, а значит и не сходятся и это видно по получающимся ошибкам. Это видно также из графиков, схемы ведут себя очень непонятно при этих значениях.

Если мы берем большой шаг, то есть маленький CFL, то проявляется такое явление как аппроксимационная вязкость. Это параметр ошибки, который всегда присутствует. Если сетка достаточно мелкая, то влияние этого эффекта пренебрежимо мало. Однако если брать сетку достаточно крупную, то эта вязкость сглаживает решение и это решение уменьшается по амплитуде.

Правило рунге

Правило Рунге:

Пусть u - аналитическое решение данного уравнения, u_h - решение, полученное с шагом h , $u_{\frac{h}{2}}$ - решение, полученное с шагом $h/2$, и так далее

Решим систему:

$$u - u_h = ch^k$$

$$u - u_{\frac{h}{2}} = c\left(\frac{h}{2}\right)^k$$

Из нее находим значения c_1, k_1

Затем решаем систему:

$$u - u_{\frac{h}{2}} = c \left(\frac{h}{2} \right)^k$$

$$u - u_{\frac{h}{4}} = c \left(\frac{h}{4} \right)^k$$

Из нее находим другие c_2, k_2

Если c_1 и c_2 различаются больше, чем на 10%, то повторяем аналогичные действия, пока не достигнем нужной точности.

Полученные числа c^*, k^* - будут определять точность нашего решения с шагом h как $(c^* \cdot h^{k^*})$

Проведем измерения для схемы левый уголок:

Значение ошибки схемы при разных шагах

$h = 0,5$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{8}$
0.3	0.1	0.08	0.04

Первая система:

$$0,3 = ch^k$$

$$0,1 = c \left(\frac{h}{2} \right)^k$$

Отсюда имеем $c_1 = 0.9, k_1 = 1.6$

Вторая система:

$$0,1 = c \left(\frac{h}{2} \right)^k$$

$$0,08 = c \left(\frac{h}{4} \right)^k$$

Отсюда имеем $c_2 = 0.57, k_2 = 1.25$. Отличаются больше, чем на 10%

Третья система:

$$0,08 = c \left(\frac{h}{4} \right)^k$$

$$0,03 = c \left(\frac{h}{8} \right)^k$$

Имеем $c_3 = 0,56, k_3 = 1$. Видно, что c_2 и c_3 различаются меньше, чем на 10%

Значит, схема левый уголок имеет ошибку $0.56 \cdot 0.5 = 0.28$

Проведем аналогичные измерения для схемы Лакса-Вендроффа

$h = 0,5$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$
0.017	0.0095	0.006

Первая система:

$$0,017 = ch^k$$

$$0,0095 = c\left(\frac{h}{2}\right)^k$$

Отсюда $c_1 = 0,03$, $k_1 = 0.85$.

Вторая система:

$$0,0095 = c\left(\frac{h}{2}\right)^k$$

$$0,006 = c\left(\frac{h}{4}\right)^k$$

Отсюда $c_2 = 0,024$, $k_2 = 0.66$

Значит, схема Лакса-Вендроффа имеет ошибку 0.015