引言

通俗地讲，随机过程就是一个或多个随机事件、随机系统或随机现象随时间发生演变的过程。如果说，概率论是研究“静态”随机现象的统计规律，那么随机过程论就是研究“动态”随机现象的统计规律。一般认为，随机过程的研究最早起源于对物理学的研究，如Gibbs, Boltzmann, Poincaré等人对统计力学的研究，以及后来Einstein, Wiener, Lévy 等人对布朗运动的研究。1907年前后，Markov 研究了有特定相依性的随机变量序列，后人称之为马尔可夫过程。随机过程一般理论的研究开始于20世纪30年代。1931年，Kolmogorov发表了《概率论的解析方法》，1934 年，Knintchine 发表了《平稳过程的相关理论》，这两篇著作奠定了马尔可夫过程与平稳过程的理论基础。1953年，Doob的《随机过程论》一书系统地叙述了随机过程的基本理论。可以说，Kolmogorov和Doob奠定了随机过程的理论基础。半个多世纪以来，随机过程的理论以其强大的生命力不断地丰富和发展，而它的应用也广泛渗透到自然界和人类社会的各个领域。随机过程的理论非常丰富，我们只能有所取舍、有所侧重地来介绍。本书着重介绍几类基本的随机过程及其理论和方法，主要包括：泊松过程，马尔可夫过程，布朗运动，鞅过程，随机微分方程以及平稳过程。此外，为了让读者更多地了解课堂教学之外的知识，我们在书中每章都加有“补充和注记”一节。本书力求做到以下几点：（1）着重阐明基本概念、模型和方法的来源和背景。（2）强调用概率思想和观点来阐述基本原理和方法。（3）着眼于理论联系实际，通过典型的应用实例学习和掌握理论和方法的要义。本书既可作为研究生和高年级本科生的入门教材，也可作为学生、教师、科研与工程技术人员的参考书。尽管本书的初稿曾在研究生和高年级本科生中使用过，但限于作者水平，书中的内容安排、陈述方式以及文字叙述恐有不妥，敬请读者批评指正。

作者

2012年12月

第一章　预备知识—概率论精要

§1.1　概率的公理化与概率空间

§1.1.1　概率的公理化

- 随机现象：在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象。

- 样本空间：随机现象的所有可能的基本结果（样本点）组成的空间，记为Ω。

- 随机事件：随机现象的某些基本结果组成的集合，或者说是样本空间的某些样本点组成的集合。

- 事件域(σ 代数): 称Ω 的某些子集所组成的集合类$\mathscr{F}$ 为事件域，如果它满足

$$\begin{cases} \Omega \in \mathscr{F} \\ A \in \mathscr{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{F} \\ A_k \in \mathscr{F} \Longrightarrow \bigcup A_k \in \mathscr{F} \end{cases}$$

所谓**概率**，通俗地讲就是一个随机事件发生的可能性大小的度量。上世纪30年代，Kolmogorov 在概率的频率极限定义、古典定义、几何定义的基础上给出了如下的概率的公理化定义。

- **概率的公理化定义**：设Ω 是一个样本空间，$\mathscr{F}$ 是Ω 的某些子集所组成的一个事件域。称定义在$\mathscr{F}$ 上的一个实值函数$P : \mathscr{F} \longrightarrow [0,1]$ 为概率，如果它满足:

$$\begin{cases} \text{(非负性公理)} \quad \forall A \in \mathscr{F}, P(A) \geq 0. \\ \text{(正则性公理)} \quad P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1. \\ \text{(可列可加性公理)} \quad \forall i \neq j, A_i \bigcap A_j = \emptyset, P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{cases}$$

§1.1.2　概率空间与概率模型

- **概率空间**：称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间。

例 1.1.1 掷一枚均匀的骰子$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,
$\mathscr{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}=\{\omega_1,...,\omega_6,(\omega_1,\omega_2),...,(\omega_5,\omega_6),...,(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6)\}$,
$|\mathscr{F}|=C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6$, 一般地，对有限的样本空间，$|\mathscr{F}|=2^{|\Omega|}$.

例 1.1.2 某电话机交换台在某一单位时间（小时，天，...）可能收到的呼叫次数为$0,1,2,...$。可取$\Omega=\{0,1,2,...\}$，$\mathscr{F}=\{\Omega$ 的所有子集$\}$。易验证$\mathscr{F}$ 为事件域且包含有不可数无穷多个集合。若呼叫次数服从$Poisson$ 分布，记$A_k=\{$ 呼叫次数为$k\}$，$B_k=\{$ 呼叫次数超过$k\}$, 则$P(A_k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$，$k\geq 0$.
而$P(B_k)=\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.

例 1.1.3 在直线段(a,b) 上投质点,它所有可能的落点的位置为$\Omega=(a,b)$ 的点，可取$\mathscr{F}=\mathscr{B}((a,b))=\mathscr{B}(\Omega)=\{(a,b)$ 上所有开子区间经过可列多次交、并及逆运算所形成的子集的全体$\}$. 设$(c,d)\in\mathscr{F}$, 则$P((c,d))=\frac{d-c}{b-a}$.

- 概率模型（古典概型–有限等概率，几何概型–无限等概率）：$P(A)=\frac{m(A)}{m()}$

§1.2 条件概率、独立性与概率计算

§1.2.1 条件概率与独立性

- **条件概率**：称$P(A|B)=P(BA)/P(B)$ $(P(B)>0)$ 为A 事件在已知B 事件发生的条件概率。
  若$P(B)>0,P(A)>0$, 则有$P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$.

- **独立**：若$P(BA)=P(B)P(A)$ 即$P(A)=P(A|B)$，则称事件A 与B 独立。

§1.2.2 概率计算

- $P(\bigcup A_i)=1-P(\bigcap\overline{A_i})$

- $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
  注：$A\bigcup B=(A-AB)+B$

- （加法公式）：$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)......+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n)$

  例 1.2.1 有N个考签，$n(n\geq N)$个学生有放回地抽取，问N个考签都被抽到的概率？

  解 设A_i:第i个考签被抽到, $B=A_1A_2...A_N$
  $P(B)=1-P(\overline{A_1A_2...A_N})=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i})$
  $P(\overline{A_i})=\frac{(N-1)^n}{N^n}$
  $P(\overline{A_i}\bigcap\overline{A_j})=\frac{(N-2)^n}{N^n}$
  $P(\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}...\bigcap\overline{A_n})=\frac{1}{N^n}$
  $$P(B)=1-\sum_{k=1}^{N}C_N^k(-1)^{k-1}\frac{(N-k)^n}{N^n}$$
  ■

- （次可加性）:$P(\bigcup A_i)\leq\sum P(A_i)$

- （乘法公式）:若$P(A_1A_2...A_n)>0$，则
  $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)...P(A_n|A_{n-1}...A_1)$

  例 1.2.2 有N 把钥匙，只有一把能开房门，随机地不放回开房门，求恰好第n 次$(n\leq N)$次打开房门的概率。

  解 $P(\overline{A_1}...\overline{A_{n-1}}...A_n)$
  $=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_2}\bigcap\overline{A_1})P(\overline{A_{n-1}}|\overline{A_{n-2}}\bigcap...\bigcap\overline{A_1})P(\overline{A_n}|\overline{A_{n-1}}\bigcap...\bigcap\overline{A_1})$
  $=\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N-1}...\frac{N-(n-1)}{N-(n-2)}\frac{1}{N-(n-1)}$
  $=\frac{1}{N}$
  $P=\frac{A_{N-1}^{n-1}}{A_N^n}=\frac{1}{N}$ ■

- （全概率公式）: 若$\bigcup B_i \supset A, \forall i \neq j, B_i \bigcap B_j = \emptyset, P(B_i) > 0$，则$P(A) = \sum P(B_i)P(A|B_i)$

例 1.2.3 设某一虫类能生产虫卵的个数服从*Poisson*分布，即$P(B_n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, n = 0, 1, 2, ..., B_n$ 有n 个虫卵，且n 个虫卵恰好蜕变成m 个幼虫的概率服从二项分布: $P(A_m) = C_n^m P^m(1-P)^{n-m}$，求此虫类下一代恰好产生有$k$个幼虫的概率。

解 $P(A_k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)P(A_k|B_n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}$
$$= \frac{e^{-\lambda}P^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-P)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda P)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-P))^m}{m!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda P)^k}{k!}e^{\lambda(1-P)} = \frac{e^{-\lambda P}(\lambda P)^k}{k!} \blacksquare$$

- （逆概率公式，贝叶斯公式）

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum P(B_k)P(A|B_k)}$$

全概率公式：原因$\longrightarrow$ 结果
逆概率公式（贝叶斯公式）：结果$\longrightarrow$ 原因.

§1.3 随机变量、分布函数与数字特征

(I) 随机变量(向量）

$X(\omega)$是定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的实值函数，若对于任意$x \in (-\infty, +\infty)$，有：$\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{F}$,则称$X$ 为$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个随机变量，而概率$F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$ 称为随机变量X 的分布函数。
随机向量：$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$若满足$\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, \omega : X_2(\omega) \leq x_2, ..., \omega : X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathscr{F}$，则称为随机向量，它具有n维分布函数。
注：如二维随机变量(X, Y)的边缘分布：$F(x, +\infty) = F_\xi(x), F(+\infty, y) = F_\eta(y)$

(II) 分布函数的性质

(1) $F(+\infty,+\infty,...+\infty)=1, F(x_1,...,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},...,x_n)=0$

(2) 单调增、右连左极

(3) 若$X_k, 1\le k\le n$, 相互独立，则$F(x_1,...,x_n)=F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n)$

离散型随机变量（向量）：取值至多可数：

- 0-1 分布: $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$
- 二项式分布: $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ 0\le k\le n.$
- 几何分布: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p,\ k\ge 1.$
- Poisson分布: $P(X=k)=e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k\ge 0.$

连续型随机变量（向量）：$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, F'(x)=f(x)$

$$F(x_1,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n$$

- 均匀分布:
$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le t\le b,\\ 0, & t<a, t>b\ .\end{cases}$$
- 指数分布:
$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\ .\end{cases}$$
- 正态分布: $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$
$f(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(t_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(t_1-\mu_1)(t_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(t_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]}$
$-\infty<t_1,t_2<+\infty$

随机变量函数的分布函数与密度：单调函数、加减乘除、顺序统计量。

- 顺序统计量的分布：随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$ 的顺序统计量可表示为$X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$

(1) 若随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立，记$F_k(x) = P(X_k \le x)$。则

$$F_{(n)}(x) = P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x, ..., X_n \le x) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x)$$

$$F_{(1)}(x) = P(X_{(1)} \le x) = 1 - P(X_1 > x, ..., X_n > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - F_k(x)]$$

(2) 若随机变量$X_1, X_2, ..., X_n$相互独立同分布于密度函数$f(x)$,则顺序统计量$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$ 的联合密度函数$f(y_1, y_2, ..., y_n)$为

$$f(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{cases} n! \prod_{k=1}^{n} f(y_k), & 0 < y_1 < y_2 < ... < y_n, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(III) 数字特征

(1)数学期望（均值）:

$$EX = \int x dF_X(x) = \begin{cases} \sum x_i P(X = x_i), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \end{cases}$$

$E(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i EX_i$

$E(g(X)) = \int g(x) dF_X(x)$

$E(g(X_1, ..., X_n)) = \int ... \int g(x_1, ..., x_n) dF_X(x)$

如$g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

(2)方差$D(X) = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$

(3)k阶矩：EX^k; k 阶中心矩：$E(X - EX)^k$

(4)协方差：$Cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY)$

(5) 相关系数：$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$. $\rho = 0 \Longleftrightarrow X, Y$ 不相关.

(6) 若$X_1, ...X_n$ 两两不相关，则

$D(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(c_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 DX_i$

(7) 施瓦茨(Schwarz)不等式

$(E(XY))^2 \leq EX^2EY^2$
$E((X-EX)(Y-EY))^2 \leq E(X-EX)^2E(Y-EY)^2$
证明: 由于$f(t)=t^2EX^2-2tEXY+EY^2=E(tX-Y)^2 \geq 0$ 恒成立，故$\Delta=4(EXY)^2-4EX^2EY^2 \leq 0$，即$(E(XY))^2 \leq EX^2EY^2$. 由此可得

$$|\rho(X,Y)|=|\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}| \leq 1.$$

若$(E(XY))^2=EX^2EY^2$, 令$t_0=\frac{EXY}{EX^2}, f(t_0)=0$, 则有

$$E(t_0X-Y)^2=0 \Longleftrightarrow P(t_0X-Y=0)=1$$

从而

$$\rho(X,Y)=\begin{cases} 1, & t_0X=Y, a.e. \\ -1, & -t_0X=Y, a.e. \end{cases}$$

§1.4 矩生成函数、特征函数与傅里叶变换

$$\psi_X(s)=E(s^X)=\sum_k s^kP(X=k)$$

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\begin{cases} \sum e^{itx_k}P(X=x_k) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}P_X(x)dx \end{cases}$$

$\varphi^{(k)}(0)=E(X^k)$
若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$\varphi(t)=e^{i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
重要性质：若$X_1,...,X^n$ 相互独立，则$X_1+...+X^n$ 的特征函数等于它们各自的乘积，即

$$\varphi_{X_1+...+X_n}(t)=\prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

随机向量的特征函数：$\varphi(t_1,...t_n)=E(e^{it_1X_1+...+it_nX_n})$

分布函数（密度）与特征函数可互为确定(傅里叶变换):

若$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_X(t)|dt<\infty$, 则

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

$$\varphi_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f_X(x)dx$$

例 1.4.1 $\{X_i\}$ 独立同分布，$EX_i=a, DX_i=b>0$

$T_n=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i-na}{\sqrt{nb}}\longrightarrow N(0,1)$

$F_n(y)=P(T_n<y)\longrightarrow\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$\varphi_{T_n}(t)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i-a}(\frac{t}{\sqrt{nb}})=(1-\frac{t^2b}{2nb}+o(t))^n\longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$

§1.5 条件分布与条件期望

条件分布函数与条件密度：

$$F(y|x)=P(Y\leq y|X=x)$$
$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f(x,y)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}$$

条件期望：

1.一个随机变量关于另一个随机变量给定值的数学期望

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}ydF(y|x)=\begin{cases}\sum y_iP(Y=y_i|X=x_i)\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y|x)dy\end{cases}$$

若X与Y独立，则$E(Y|X=x)=E(Y)$

2. 一个随机变量关于另一个随机变量的数学期望
$m(X)=E(Y|X=x), Z=m(X)=E(Y|X)$
性质：

- 若X与Y独立，则$E(Y|X)=E(Y)$
- $E(Y\varphi(X)|X)=\varphi(X)E(Y|X)a.s.$
- 全数学期望公式$Eg(Y)=E[E(g(Y)|X)]$

§1.6 随机变量序列的收敛性

- 几乎处处（依概率1）收敛: $P(\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X)=1, X_n\xrightarrow{a.s.}X$

$$\begin{cases} P(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}|X_n-X|<\frac{1}{k})=1 \\ P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}|X_n-X|\geq\frac{1}{k})=0, \\ \forall\varepsilon>0, P(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}|X_n-X|\geq\varepsilon)=0\ . \end{cases}$$

- 依概率收敛：$\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0, X_n\xrightarrow{P}X$
- 依分布收敛：$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$, x 为$F(x)$ 的连续点，$X_n\xrightarrow{W}X$
- p 阶矩收敛：$\lim\limits_{n\to\infty}E|X_n-X|^p=0,\ p>0$

几乎处处收敛或p 阶矩收敛$\Longrightarrow$ 依概率收敛$\Longrightarrow$ 依分布收敛。

§1.7 大数定律与中心极限定理

1.切比雪夫不等式：$P(|X-EX|\geq\varepsilon)\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$

2.Borel-Cantelli 引理：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)<\infty$，则$X_n\xrightarrow{a.s.}X$

强大数定律: 设$X_n, n \geq 1$ 相互独立同分布，$EX_i = \mu$, 则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} \mu$（利用切比雪夫不等式和Borel-Cantelli 引理）

中心极限定理: 设$X_n, n \geq 1$ 相互独立同分布，$EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2$,令

$$\xi_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n \leq y) = \Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

证明：设$Y_k = \frac{X_k}{\sigma^2}$, 则$EY_k = 0, DY_k = 1$,

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sqrt{n}}$$

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$\varphi_{S_n}(t) = E(e^{\frac{it}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k}) = [\varphi(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n = (1 - \frac{t^2}{2n})^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

例 1.7.1 证明 $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$

证明: 设$X_k \sim Poi(1)$, 则$P(X_k = n) = \frac{e^{-1}}{n!}, EX_n = 1, DX_n = 1$
且$S_n = X_1 + ... + X_n \sim Poi(n), P(S_n = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$
由中心极限定理可知
$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1),\ \ P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0) \longrightarrow \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = P(S_n \leq n) = P(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0) \longrightarrow \frac{1}{2}$$

§1.8 补充与注记

上节所述极限定理都假设随机变量都服从同样的分布，下面给出分布可以不同的独立随机变量序列的极限定理。

A. **一般的强大数定律** 设$X_n, n \geq 1$ 相互独立。若$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D(X_i}{i^a}, 1 \leq a \leq 2$, 则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) \xrightarrow{a.s.} 0$$

B. **一般的中心极限定理** 设$X_n, n \geq 1$ 相互独立。若对任意的$\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n} E((X_i - E(X_i))^2 I[|X_i - E(X_i)| \geq \varepsilon B_n]) = 0$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) \leq x) = \Phi(x).$$

其中，$B_n^2 = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$。

C. **大偏差极限定理** 设$X_n, n \geq 1$ 相互独立同分布。若$a > E(X_i)$ 且存在$q > 0$ 使得$h(q) = E(e^{qX_i}) < \infty$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq na) = -I(a)$$

其中，$I(a) = aq_a - \log h(q_a)$ 并且q_a 满足$a = h'(q_a)/h(q_a)$.

（关于A，B 可参见"Sums of Independent Random Variables", V.V. Petrov, 1975 年；关于C可参见"Probability：Theory and Examples", R. Durret, 2005 年）。

习 题

1.1 设$A, B, C \in \mathcal{F}$,且$P(A) = P(B) = 1, AB \subset C$.

(1) 试用概率的公理化定义及性质，求$P(A\overline{B}), P(AB), P(C)$;

(2) 证明：对任意$D\in\mathcal{F}, A, \overline{B}, D$相互独立；$AB, \overline{C}, D$相互独立.

1.2 设事件A, B, C 相互独立，证明$A\cup B, A-B$ 和AB 均与C 独立.

1.3 设随机变量X的分布函数$P(X\le x)=F(x)(\forall x\in\mathbb{R})$已知，试用$F(x)$来表示下列事件的概率：

(1) $P(a<X\le b)(b>a), P(X>a), P(X=a), P(X\ge a)$;

(2) $P(X<a), P(a\le X<b), P(a\le X\le b)$;

(3) 记$A_{2n}=(\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}], A_{2n+1}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}](n\ge 1)$,求$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k), P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k)$.

1.4 设X 及$\{X_n, n\ge 1\}$是$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量序列.试证明：

(1) $\{\omega:\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=X\}=\bigcap\limits_{m\ge 1}\bigcup\limits_{n\ge 1}\bigcap\limits_{k\ge n}\{\omega:|X_k-X|<\dfrac{1}{m}\}$;

(2) $\{\omega:\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=X\}=1\Leftrightarrow\forall m\ge 1, \lim\limits_{n\to+\infty}P\{\bigcup\limits_{k\ge n}(|X_k-X|\ge\dfrac{1}{m})\}=0$.

1.5 (1) 若X是一连续随机变量，其分布函数为$F(x)$.证明$Y=F(x)$是$[0,1]$上均匀分布的随机变量.

(2) 如果U是$[0,1]$上均匀分布的随机变量，$F(x)$是一给定的分布函数.则$Z=F^{-1}(U)$的分布函数为$F(x)$，其中F^{-1}为F的反函数.

1.6 设$X_1, X_2,\cdots X_n$ 独立同$0-1$分布,即$P(X_n=1)=p\ge 0, P(X_n=0)=q\ge 0, p+q=1$,令$A=\{X_1+X_2=0\}, B=\{X_2+X_3=2\}, C=\{X_2+X_3=1\}$.试问$A$与$B$是否相容？是否独立？$A$与$C$是否相容？说明理由，并求

$$P(\sum_{i=1}^{n}=k),\quad 0\le k\le n$$

.

1.7 设N为取值非负整数的随机变量，证明：

$$EN=\sum_{n=1}^{\infty}P(N\ge n)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N>n)$$

.设X是非负随机变量，具有分布函数$F(x)$,证明

$$EX=\int_0^\infty(1-F(x))dx,\quad E(X^n)=\int_0^\infty nx^{n-1}(1-F(x))dx\quad(n\geq 1)$$

.

1.8 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求X在$X\geq 0$下的条件概率密度函数，及当$\mu=2,\sigma=1$时的$E(X\mid X\geq 0)$.

1.9 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且X_i是$(0,t)$上的均匀分布，求其顺序统计量$X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$ 的联合概率密度.

1.10 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，$X_i(1\leq i\leq n)$是参数为λ_i 的指数分布，$X_{(1)}\leq\cdots\leq X_{(n)}$为相应的顺序统计量，求：

(1) $\lambda_i=\lambda$时，$(X_{(n)},X_{(1)})$的联合概率密度函数；

(2) $\lambda_i=\lambda$时，$X_{(i)}$的概率密度函数$(1\leq i\leq n)$;

(3) X_1+X_2的分布函数；

(4) $\forall t>0$,证明：$P(X_1<X_2\mid min(X_1,X_2)=t)=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$.

1.11 设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同$0-1$分布，且有$P(X_n=1)=p=1-P(X_n=0),0<p<1$,$N$是参数为$\lambda$的泊松分布，且与$\{X_n\}$独立.$\xi=X_1+X_2+\cdots+X_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$,求$\xi$的分布、$E\xi$及$D\xi$.

1.12 设N_1,N_2,N_3独立，N_i是参数为λ_i的泊松分布，$i=1,2,3$.

(1) 求$P(N_1+N_2=n),n\in N$;

(2) 求$P(N_1=k\mid N_1+N_2=n),0\leq k\leq n$;

(3) 证明N_1+N_2与N_3独立;

(4) 求$E(N_1\mid N_1+N_2)$及$E(N_1+N_2\mid N_1)$.

1.13 设X,Y独立同分布，均是参数为$\lambda=1$的指数分布，令$U=X+Y,V=X/Y$.试求(U,V)的联合概率密度及其边缘概率密度.

1.14 设X,Y独立，$X\sim B(n,p)$（即二项分布），$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$.试求$Z=X+Y$的概率密度函数.

1.15 设N_1,N_2,N_3相互独立，且$N_i\sim P(\lambda_i)$是参数为$\lambda_i(i=1,2,3)$的泊松分布.记$X=N_1+N_3,Y=N_2+N_3$.试求(X,Y)的联合分布律.

第二章　随机过程的基本概念

§2.1　随机过程的直观背景和定义

我们知道，概率论主要研究一个或有限多个随机变量，即使在大数定律和中心极限定理中考虑了无穷多个随机变量，但也要假设随机变量之间相互独立。而随机过程主要是研究无穷多个相依（不独立）的随机变量。通俗地说，概率论是研究随机现象“静态”（某个时刻）的统计规律，而随机过程是研究随机现象“动态”变化的统计规律。下面举例说明随机过程的实际背景。

例 2.1.1 我们在某时段(比如说某一天)对某一地区成人的身高和体重(X,Y)进行随机抽样，可得出

$Z=(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$

$\mu_1=EX,\mu_2=EY,\sigma_1^2=DX,\sigma_2^2=DY,Z(\omega)=(X(\omega),Y(\omega))$

这是某时段所考查随机变量的概率分布。假若每隔*10*年在同一地区做同样的随机抽样，得:

$Z(\omega,0)=(X(\omega,0),Y(\omega,0))\sim N(\mu_{01},\mu_{02},\rho_0,\sigma_{01}^2,\sigma_{02}^2)$

第*1*个*10*年*:*$Z(\omega,1)=(X(\omega,1),Y(\omega,1))\sim N(\mu_{11},\mu_{12},\rho_1,\sigma_{11}^2,\sigma_{12}^2)$

第*2*个*10*年*:*$Z(\omega,2)=(X(\omega,2),Y(\omega,2))\sim N(\mu_{21},\mu_{22},\rho_2,\sigma_{21}^2,\sigma_{22}^2)$

……

第t 个10 年*:*$Z(\omega,t)=(X(\omega,t),Y(\omega,t))\sim N(\mu_{t1},\mu_{t2},\rho_t,\sigma_{t1}^2,\sigma_{t2}^2),t=0,1,2...$

因此$\{(X(t),Y(t)):\ t\geq 0\}$ 表示身高和体重这两个随机变量在不同时段的情况。

例 2.1.2 研究某一电话交换台在$[0,t)$ 时间内收到的电话呼唤次数及其概率。显然，它是与t 有关的随机变量，而且是取正整数，记为$N(w,t)$，因而可用$\{N(t),t\geq 0\}$ 来描述这一随机事件发生发展的过程。

例 2.1.3 考察某一湖每年某种鱼类的数量，$X(\omega,n)$表示第n 年的数量。
这样，我们可用$\{X(n),n\geq 0\}$的随机过程来描述次鱼类数量在未来每年的随机变化的情况。

例 2.1.4 对随机相位正弦波，如一个振荡器的输出波形，其输出波形为
$X(\omega,t)=\xi(\omega)cos(\alpha t+\eta(\omega))$,
其中ξ是非负随机变量，表示振幅，α称为幅角，η为任意随机变量，则$\{X(t),t\geq 0\}$ 就描述了一个振荡器输出的随机波形。

例 2.1.5 我们可用$X(t),t\geq 0$, 来表示股票在t 时刻的价格，则$\{X(t),t\geq 0\}$ 就可描述股票价格随时间随机变机的变化。

下面就给出随机过程的严格定义

定义 2.1.6 设给定的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和时间参数$T\ (\subset R^+=[0,+\infty))$,若对每一个$t\in T$, 都有定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量$X(t,\omega),\omega\in\Omega$, 则称依赖于参数$t\in T$ 的随机变量簇$\{X(t,\omega),t\in T\}$ 为一个定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程，并称集合T为参数空间，$X(t),(t\in T)$ 的所有可能取值的集合为状态空间，常记为E 。实际上，E 就是随机变量簇$\{X(t)\}$ 的最大取值空间。
如取$E=R=(-\infty,\infty),E=R\times R$。我们也可以把随机过程看成二元函数:
$X(t,\omega),(t,\omega)\in T\times\Omega$。
对于每个固定的t，它是$X(t,\bullet)$,$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量;
对于每个固定的ω，它是$X(\bullet,\omega)$, t 的函数，常称为样本函数或样本轨道。

§2.2 随机过程的刻画

由概率论我们知道，有限个随机变量的概率可用其联合分布函数来完整刻画。因此，知道了随机过程的任意有限个不同时刻的联合分布函数—有限维分布函数族，实际上也就掌握了随机过程在任意有限个时刻的统计规律。反过来，如果给定一族有限维分布函数，能否存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和定义在其上的随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$，使其有限维联合分布函数正好就是给定的有限维分布函数？下述的Kolmogorov 定理回答了这个问题。

§2.2.1 有限维分布函数簇与随机过程的存在性

设有限维分布族$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,...,x_n),n\geq 1$, 满足对称性、相容性两条件:

对称性：$F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n) = F_{t_{i_1},...,t_{i_n}}(x_{i_1},...,x_{i_n})$

相容性：$F_{t_1,...,t_m,...,t_n}(x_1,...,x_m,+\infty,...,+\infty) = F_{t_1,...,t_m}(x_1,...,x_m)$

定理 2.2.1 (Kolmogorov定理（随机过程存在性定理）) 设$\{F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n)\}$是满足对称性和相容性的有限维分布函数族，必存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 和定义在其上的一个随机过程$\{X(t),\, t\in T\}$ 使得其任意有限维分布函数恰为$\{F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n)\}$，即对任意的$t_k\in T, 1\le k\le n$ 并且$t_1<t_2<...<t_n$, $x_k\in R, 1\le k\le n$, 我们有

$$P(X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2, ..., X(t_n)\le x_n) = F_{t_1,...,t_n}(x_1,...,x_n).$$

定理的证明可参见Bulinski A. V. 等人（李占柄译）所著的《随机过程论》。Kolmogorov 定理告诉我们，有限维分布函数族可以完整地刻画随机过程的统计规律。在实际问题中，要想得到随机过程的任意有限维分布函数是非常困难的。因此，我们退而求其次，考虑随机过程的数字特征。

§2.2.2 随机过程的数字特征

均值函数：$m_X(t) = EX(t), t\in T$
方差函数：$D_X(t) = DX(t)$
相关函数：$R_X(s,t) = EX(s)X(t)$
协方差函数：$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t)$
相关系数函数：$\rho(s,t) = \frac{Cov_X(X_s,X_t)}{\sqrt{D_X(s)D_X(t)}}$
互协方差函数：$C_{X,Y}(s,t) = E(X(s)-EX(s))(Y(t)-EY(t))$

例 2.2.2 设随机相位正弦波所形成的随机过程$X(t) = Acos(\theta t + X), t\ge 0$,$A$为振幅，$\theta$ 为角频率，
$X\sim U[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，对任意的$t\ge 0$
求: (1)$X(t)$ 的概率密度。(2)$X(t)$ 的数字特征。

解 (1)设$|x|\le A$,
$P(X(t)\le x)$

$= P(Acos(\theta t + X) \leq x)$

$= P(cos(\theta t + X) \leq \frac{x}{A})$

分区间讨论$cos(.)$ 的单调性，可得

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{A\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}, & |x| \leq A, \\ 0, & |x| > A\ . \end{cases}$$

$(2)EX(t) = \int_{-A}^{A} x\frac{1}{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{A^2-x^2}|_{-A}^{A} = 0$

直接求$EX(t) = A\int_{-\pi}^{\pi} cos(\theta t + x)\frac{dx}{2\pi} = \frac{A}{2\pi}\frac{sin(\theta t + x)}{\theta}|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$Cov(X(s), X(t)) = R_X(s,t) = E(X(s), X(t)) = A^2E(cos(\theta s + X)cos(\theta t + X))$

$= A^2\int_{-\pi}^{\pi} cos(\theta s + x)cos(\theta t + x)\frac{dx}{2\pi}$

$= \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(\theta(t-s)) + cos(\theta(t+s) + 2x)}{2}dx$

$= \frac{A^2}{2}cos(\theta(t-s))$

$DX(t) = R_X(t,t) = \frac{A^2}{2}$

$\rho(s,t) = \frac{\frac{A^2}{2}cos(\theta(t-s))}{\frac{A^2}{2}} = cos(\theta(t-s))$ ■

§2.3 随机过程的分类和几个重要的随机过程

我们知道随机过程有无穷多个，通常我们可按两种方式对其进行分类。第一种方式：按参数集T 和状态空间E 是离散的还是连续的可将随机过程分为四类：

- （1）参数集T 离散，状态空间E 离散的随机过程
- （2）参数集T 离散，状态空间E 连续的随机过程
- （3）参数集T 连续，状态空间E 离散的随机过程
- （4）参数集T 离散，状态空间E 连续的随机过程

通常将参数集T 离散的随机过程称为随机序列或时间序列。

第二种方式：按随机过程的概率结构进行分类

- (1) 独立增量过程：$X(t_2)-X(t_1),...,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立，其中$t_1 < t_2 < ... < t_n$
  如Poisson 过程，更新过程，Winer 过程（Brown运动）等。
- (2) 马尔可夫过程
- (3) Winer 过程（Brown运动）
- (4) 鞅过程
- (5) 平稳过程：严平稳过程，宽平稳过程
- (6) $\widehat{Ito}$ 随机微分方程的解过程（特殊的马尔可夫过程）
  ......

§2.4 补充与注记

A. **无穷粒子Markov 过程.** 它起源于统计物理，主要用于描述和分析平衡态统计物理中平稳分布、相变等一系列问题。具体模型有Ising 模型，传染病模型，选举模型以及反应扩散粒子系统。（参见文献"Interacting particle systems"，T.M. Liggett，1985年，《无穷粒子马尔科夫过程引论》，严士健，1989年）。

B. **随机图（网络）过程.** 这是最近几年备受关注的一类随机过程，主要用于刻画和研究随机复杂网络的拓扑结构和统计特性。最典型的两个模型分别是Watts-Strogatz 的小世界网络模型和Barabasi-Albert的无标度网络模型。（参见" Networks: An Introduction", M.E.J. Newman, 2010年）。

习 题

2.1 利用掷均匀硬币定义如下的随机过程：

$$X(t)=\begin{cases} sin(\pi t), & t \text{ 时刻出现正面} \\ t, & t \text{ 时刻出现反面}. \end{cases}$$

求$t=1/2$, $t=1$ 时的概率分布函数。

2.2 设$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$独立同分布,$\varepsilon_n\sim N(0,\sigma^2), X_0=0, X_n=aX_{n-1}+\varepsilon_n(n\geqslant 1, |a|<1)$.试求：

(1) $DX_n, \rho_{nm}=\frac{\mathrm{cov}(X_n,X_m)}{\sqrt{DX_nDX_m}}(m\geqslant n)$或$\lim\limits_{n\to\infty} DX_n$.

(2) $E(X_n\mid X_1,X_2,\cdots,X_{n-1})$及$E(X_4\mid X_1,X_2)$.

2.3 设随机过程$\{X_i(t),t\geqslant 0\}$为

(1) $X_1(t)=Y_1+Y_2t$,其中Y_1,Y_2独立同分布，$Y_1\sim N(0,1)$;

(2) $X_2(t)=\xi\cos(\omega t+\phi)$,其中$\omega>0$为常数，$\xi,\phi$为独立随机变量，$\xi\sim N(0,\sigma^2),\phi\sim U[0,2\pi]$;

(3) $X_3(t)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_k e^{i\lambda_k t}$,其中$i=\sqrt{-1},\lambda_k>0$为常数，$\xi_k$为随机变量，且$E\xi_k=0, E\xi_k\xi_l=0(l\neq k), E\xi_k^2=\sigma_k^2>0$.求：

(1) $m_i(t)=EX_i(t), D_i(t)=\mathrm{var}X_i(t), R_i(t_1,t_2)=\mathrm{cov}(X_i(t_1),X_i(t_2)),(i=1,2,3)$;

(2) $X_1(t)$的一维与二维分布.

2.4 设随机过程$\{B(t),t\geqslant 0\}$是独立增量过程，且$\forall s,t\geqslant 0, B(s+t)-B(s)\sim N(0,t)$.

(1) 令$X_1(t)=tB(\frac{1}{t})I_{t>0}$.求证$\{X_1(t),t>0\}$为独立增量过程，并求它的一维与二维过程；

(2) 令$X_2(t)=I_{B(t)\geqslant x}(x\in\mathbb{R}^1$为给定常数),求$EX_2(t)$与$R(t_1,t_2)$.

2.5 在一维直线整数点上质点的随机游动模型或两人竞赛模型中，设$\{Y_n, n \geqslant 1\}$独立同分布，$P\{Y_n = 1\} = p \geqslant 0, P\{Y_n = 0\} = r \geqslant 0, P\{Y_n = -1\} = q \geqslant 0, p + r + q = 1$.令$Y_0 = X_0 = 0, X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_n, n \geqslant 1$. 记$T = \min\{n : n \geq 1, X_n = 1\}$. 试用矩生成函数的方法求$T$ 的分布律。

第三章　Poisson 过程

§3.1　背景及定义

观察某一时间段，某总机来到的电话呼叫次数，某商场来到的顾客数，某车站来到的候车人数，某路口通过的汽车数等等，它们都是随时间而变化的随机变量，可以用本章将要介绍的Poisson 过程来描述。Poisson过程是一个计数的随机过程，它是由法国人Poisson 最先引入的，故此得名。

下面我们来观察分析某总机在$[0,t]$ 时间内来到的电话呼叫次数$N(t)$的概率分布。显然, $N(t)$ 关于t 是单调不减的。我们可以假定在初始时刻$(t=0)$, 来到的电话呼叫次数为0，在相同的时间间隔来到的电话呼叫次数服从相同的概率分布；在不相交的两个时间间隔，其来到的电话呼叫次数相互无关；此外，在很短的时间内，至多来到1次电话呼叫。这些假定可用数学式子表示为：

(1) $N(0)=0$;

(2) $N(t)$ 具有平稳独立增量性；
平稳性（时齐性）：$N(t+s)-N(s)$与$N(t)-N(0)=N(t)$ 同分布；
独立增量性：$u>s>t$,$N(t)-N(s)$与$N(s)-N(u)$ 独立；

(3) 普适性：在充分小的时间间隔内，最多只来到一次呼叫，用概率表示如下:

$$P(N(\Delta t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \frac{P(N(\Delta t\geq 2))}{\Delta t}\longrightarrow 0$$

在上述假设下，可以证明

$$P(N(t)-N(s)=k)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

其中，$t>s$,$\lambda>0$为常数

证明　由$(1)-(3)$,只需证明

$$P(N(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ \ k\geq 0.$$

令$P_k(t)=P(N(t)=k)$

$$P_0(t)=P(N(t)=0)$$

$$\begin{aligned}P_0(t+\Delta t)&=P(N(t+\Delta t)=0)\\&=P(N(t)=0,N(t+\Delta t)-N(t)=0)\\&=P_0(t)P_0(\Delta t)\end{aligned}$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=P_0(t)\frac{[P_0(\Delta t)-1]}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned}P_0'(t)&=P_0(t)\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{-P(N(\Delta t)\geq 1)}{\Delta t}\\&=-\lambda P_0(t)\end{aligned}$$

从而

$$P(N(t)=0)=P_0(t)=e^{-\lambda t},t\geq 0.$$

又

$$\begin{aligned}P_k(t+\Delta t)&=P(N(t+\Delta t)=k)\\&=\Sigma_{l=0}^{k}P(N(t)=l,N(t+\Delta t)-N(t)=k-l)\\&=\Sigma_{l=0}^{k}P(N(t)=l,P(N(\Delta t)=k-l)\\&=\Sigma_{l=0}^{k-2}P(N(t)=l,P(N(\Delta t)=k-l)\\&+P(N(t)=k-1)P(N(\Delta t)=1)\\&+P(N(t)=k)P(N(\Delta t)=0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{P_k(t+\Delta t)-P_k(t)}{\Delta t}&=\frac{\sum_{j=0}^{k-2}P(N(t)=j)P(N(\Delta t)=k-j)}{\Delta t}\\&+\frac{P(N(t)=k-1)P(N(\Delta t)=1)}{\Delta t}\\&+P(N(t)=k)\frac{[P(N(\Delta t)=0)-1]}{\Delta t}\end{aligned}$$

$$P_k'(t)=\lambda P_{k-1}(t)-\lambda P_k(t)$$

$$(P_k(t)e^{\lambda t})'=\lambda P_{k-1}(t)e^{\lambda t}$$

$$P_k(t)e^{\lambda t}|_0^T = \lambda\int_0^T P_{k-1}(t)e^{\lambda t}dt$$

$$P_k(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t P_{k-1}(s)e^{\lambda s}ds$$

当$k = 1, 2$时，有

$$P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t ds = e^{-\lambda t}\frac{\lambda t}{1!}$$

$$P_2(t) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t sds = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!}$$

由数学归纳法，得

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k \geq 0.$$

■

事实上，满足上述三个假定的计数过程，就称为时间齐次（简称时齐）的Poisson 过程。为了应用方便，我们常使用如下的时齐Poisson过程的定义。一个随机过程称为**时齐Poisson 过程**，若

(1) 它是一个计数过程且$N(0) = 0$;

(2) 平稳独立增量过程；

(3) $0 < s < t$,增量$N(t) - N(s)$服从参数为$\lambda(t - s)$的Poisson分布，即

$$P(N(t)-N(s) = k) = P(N(t-s) = k) = e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t - s)]^k}{k!},\ k \geq 0.$$

易验证，此定义与前述的定义是等价的。

下面来计算Poisson 过程的数字特征

均值函数$E[N(t)] = \lambda t,\ \dfrac{E[N(t)]}{t} = \lambda$ 称为**强度**

方差函数$D[N(t)] = \lambda t.$

设$t > s$,

$$\begin{aligned} cov(N(s),N(t)) &= E[N(s)N(t)] - \lambda^2 st \\ &= E[N(s)(N(t)-N(s))] + E[N^2(s)] - \lambda^2 st \\ &= E[N(s)]E[(N(t)-N(s))] + \lambda s + \lambda^2 s^2 - \lambda^2 st \\ &= \lambda^2 s(t-s) + \lambda s + \lambda^2 s^2 - \lambda^2 st \\ &= \lambda s \end{aligned}$$

即

$$cov(N(t),N(s)) = \lambda \min\{s,t\}$$

$$R(s,t) = \lambda^2 st + \lambda \min\{s,t\}$$

§3.2 到达时间的分布

用$\tau_0 = 0, \tau_1, \cdots, \tau_n$ 记第$0, 1, \cdots, n$ 次事件到达的时间。
首先给出τ_n 的概率密度函数。

定理 3.2.1 设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ *Poisson*过程，则其到达时间τ_n 服从参数为n 和λ 的*Garmar*分布:

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-t}}{(n-t)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0\,. \end{cases}$$

证明

$$F_{\tau_n}(t) = P(\tau_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$f_{\tau_n}(t) = F'_{\tau_n}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

即

$$f_{\tau_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0\,. \end{cases}$$

■

对于到达时间$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ 的联合概率密度我们有如下定理。

定理 3.2.2 设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ *Poisson* 过程, 则到达时间$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ 的联合概率密度函数为:

$$f(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n}, & 0 < t_1 < t_2 < ... < t_n, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

证明 取充分小的$x > 0$ 使得

$$t_1 - \frac{x}{2} < t_1 < t_1 + \frac{x}{2} < t_2 - \frac{x}{2} < t_2 < t_2 + \frac{x}{2} < ... < t_n - \frac{x}{2} < t_n < t_n + \frac{x}{2}$$

利用Poisson 过程定义中的条件(2)和(3)可得

$$\begin{aligned} & P\Big(t_1 - \tfrac{x}{2} < \tau_1 < t_1 + \tfrac{x}{2} < t_2 - \tfrac{x}{2} < \tau_2 < t_2 + \tfrac{x}{2} < ... < t_n - \tfrac{x}{2} < \tau_n < t_n + \tfrac{x}{2}\Big) \\ = \; & P\Big(N(t_1 - \tfrac{x}{2}) = 0, N(t_1 + \tfrac{x}{2}) - N(t_1 - \tfrac{x}{2}) = 1, ..., N(t_n + \tfrac{x}{2}) - N(t_n - \tfrac{x}{2}) = 1\Big) + o(x^n) \\ = \; & \lambda^n e^{-\lambda(t_n + \frac{x}{2})} + o(x^n) \end{aligned}$$

两边同除x^n, 且令$x \to 0$ 即可得到定理的结论。■

在实际问题中，我们经常需要计算在已知$N(t) = n$ 的条件下，到达时间$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ 的联合概率密度函数.

定理 3.2.3 设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ 的*Poisson* 过程，则在已知$N(t) = n$ 的条件下，到达时间$\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ 的联合概率密度函数为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n | N(t) = n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t \\ 0, & \text{其它} . \end{cases}$$

证明 取$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t$ 且$t_i + h_i < t_{i+1}$，则有

$$\begin{aligned} & \frac{P(t_1 < \tau_1 \leq t_1 + h_1, \cdots, t_n < \tau_n \leq t_n + h_n | N(t) = n)}{h_1 \cdots h_n} \\ = \; & \frac{P(N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \leq i \leq n; N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 1 \leq j \leq n)}{P(N(t) = n) h_1 \cdots h_n} \\ = \; & \frac{n!}{t!} + o(1) \end{aligned}$$

■

事实上，它也是独立同分布于$(0,t)$ 上的均匀分布的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的顺序统计量$(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ 的联合概率密度函数.
下面，我们一般地给出顺序统计量的联合概率密度函数
设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的非负随机变量，其密度函数为$f(X)$,
记$(X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ 为$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的顺序统计量，即

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

由于

$$\begin{aligned}
&P(\cup_{i \neq j}\{X_i = X_j\}) = C_n^2 P(X_1 = X_2) \\
&= C_n^2[1 - P((X_1 < X_2) \cup (X_1 > X_2))] \\
&= C_n^2[1 - P(X_1 < X_2) - P(X_1 > X_2)] \\
&= C_n^2[1 - 2\int f(x_1)[1 - F(x_1)]dx_1] = C_n^2(1 + [1 - F(x_1)]^2|_0^\infty) = 0
\end{aligned}$$

只考虑$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$. 取$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 和充分小的h 使得$x_i + h < x_{i+1}, i = 1, \cdots, n-1$. 则

$$\begin{aligned}
& \{x_1 < X_{(1)} \leq x_1 + h, x_2 < X_{(2)} \leq x_2 + h, \cdots, x_n < X_{(n)} \leq x_n + h\} \\
= \ & \cup_{\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}}\{x_1 < X_{i_1} \leq x_1 + h, \cdots, x_n < X_{i_n} \leq x_n + h\}
\end{aligned}$$

注意到右边各事件互不相容，则

$$\begin{aligned}
& P(x_1 < X_{(1)} \leq x_1 + h, \cdots, x_n < X_{(n)} \leq x_n + h)/h^n \\
= \ & n!P(x_1 < X_{i_1} \leq x_1 + h, \cdots, x_n < X_{i_n} \leq x_n + h)/h^n \\
= \ & n![\prod_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_k+h} f(x)dx]/h^n
\end{aligned}$$

即有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} n!\prod_{k=1}^n f(x_k), & 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \\ 0, & \text{其它}\ . \end{cases}$$

特别的，当$X_i \sim U(0,t)$上的均匀分布，我们有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq t \\ 0, & \text{其它}\ . \end{cases}$$

例 3.2.4 设某火车站来到的乘客数服从强度为λ 的$Poisson$ 过程，火车t时刻离开车站.求在$[0,t]$ 到达车站的乘客等待时间总和的期望值。

解 所有到t时刻为止来到的顾客等待时间总和为

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}(t-\tau_k)$$

$$E[X(t)]=E[E[X(t)|N(t)]]$$

$$E[X(t)|N(t)=n]=E[\sum_{k=1}^{n}(t-\tau_k)|N(t)=n]$$

注意到在$N(t)=n$的条件下，$(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 的联合密度函数就是$[0,t]$上n个服从均匀分布随机变量$(U_1,\cdots,U_n)$ 的顺序统计量$(U_{(1)},\cdots,U_{(n)})$ 的联合概率密度函数。因此

$$\begin{aligned}&E[\sum_{k=1}^{n}(t-\tau_k)|N(t)=n]\\=\;&E[\sum_{k=1}^{n}(t-U_{(k)})]=tn-E[\sum_{k=1}^{n}U_{(k)}]\\=\;&tn-E[\sum_{k=1}^{n}U_k]=tn-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}\end{aligned}$$

$$E[X(t)|N(t)]=\frac{N(t)t}{2}$$

$$E[X(t)]=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{\lambda t^2}{2}$$

■

§3.3 到达时间间隔服从指数分布的充要条件

我们可用$T_n=\tau_n-\tau_{n-1},n=1,2,\cdots,$ 表示到达时间的间隔。显然，$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$. 关于到达时间间隔$\{T_n,\,n\geq 1\}$ 的概率分布, 我们有如下定理。

定理 3.3.1 *设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ Poisson 过程，则$\{T_n, n \geq 1\}$ 是相互独立同分布于参数为λ 指数分布的随机过程.*

证明 首先注意到$\{T_1 > t\}$ 等价于$\{N(t) = 0\}$, 从而

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

此表明T_1 服从参数为λ 的指数分布。对于T_2, 注意到在$(s, s+t)$ 内事件发生的次数与起点s 无关, 则有

$$\begin{aligned} P(T_2 > t | T_1 = s) &= P(N(s+t) - N(s) = 0 | T_1 = s) \\ &= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \\ &= P(T_2 > t) \end{aligned}$$

这不仅说明T_2 与T_1 独立，而且T_2 也服从参数为λ 的指数分布。重复同样的步骤，即可得定理的结论。■

既然Poisson 过程的到达时间间隔相互独立同分布于指数分布，那么一个计数过程如果其到达时间间隔相互独立同分布于指数分布，它是否是Poisson 过程？下面的定理给出肯定的回答。

定理 3.3.2 *计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为λ 的Poisson 过程的充要条件是: 其计数的时间间隔$\{T_n, n \geq 1\}$ 相互独立且同分布于参数为λ 的指数分布.*

定理的证明参见林元烈编著的《应用随机过程》。

§3.4 Poisson 过程的极限定理

对于强度为λ的Poisson过程，我们有$\frac{EN(t)}{t} = \lambda$. 那么$\frac{N(t)}{t}$ 是否几乎处处收敛于λ？

定理 3.4.1 *设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ 的Poisson 过程，则*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \lambda. \quad a.e.$$

证明 由于时间间隔$T_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, $k \geq 1$, 相互独立同分布，且$\tau_n = \sum_{k=1}^n T_k$, $E(T_k) = 1/\lambda$, 则根据强大数定律我们有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n T_k}{n} = \frac{1}{\lambda}, \quad a.e.$$

另一方面，易验证：

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} N(t) = \infty, \quad a.e.$$

注意到：$\tau_{N(t)} \leq t < \tau_{N(t)+1}$, 因此

$$\frac{1}{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \frac{\tau_{N(t)}}{N(t)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\tau_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{1}{\lambda}, \quad a.e.$$

■

推论 3.4.2 设$\{N(t), n \geq 0\}$ 为强度λ 的*Poisson* 过程，$\{X_k, k \geq 1\}$ 相互独立同分布，记$E(X_k) = \mu$。则有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k = \lambda\mu, \quad a.e.$$

例 3.4.3 设某保险公司t 时刻的盈余为

$$U(t) = u + \sum_{k=1}^{N_a(t)} X_k - \sum_{j=1}^{N_b(t)} Y_j$$

其中，u 是初始($t = 0$) 资本，$N_a(t)$ 和$N_b(t)$ 分别表示在$(0, t]$ 时间内交保险费和索赔的人数，且分别服从强度为λ 和β 的*Poisson* 过程；X_k 和Y_j 分别表示第k 人所交的保险费和第j 个人的索赔金额。假设$\{X_k, k \geq 1\}$ 与$\{Y_j, j \geq 1\}$ 都是相互独立同分布的随机变量序列，令$E(X_k) = \mu, E(Y_j) = \nu$. 则当$t$ 充分大时，保险公司的盈余可近似地表示为

$$U(t) \approx u + t(\lambda\mu - \beta\nu)$$

利用推论3.4.2即可得此结论。

§3.5 Poisson过程的推广

§3.5.1 复合Poisson过程

设$\{N(t),t\geq 0\}$为Poisson过程，$\{X_i,i\geq 1\}$独立同分布且与$\{N(t),t\geq 0\}$独立，定义

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}X_i$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为复合Poisson 过程.
容易计算

$$m(t)=E[X(t)]=E[X]E[N(t)]$$

$$cor(s,t)=E[X(s)X(t)]-(E[X])^2E[N(t)]E[N(s)],s>t$$

$$\begin{aligned}
& E[X(s)X(t)|N(t)]\\
= \ & E[(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k+\sum_{k=N(t)+1}^{N(s)}X_k)(\sum_{i=1}^{N(t)}X_i)|N(t)]\\
= \ & E[(\sum_{k=1}^{N(t)}X_k)^2|N(t)]+E[\sum_{k=N(t)+1}^{N(s)}X_k|N(t)]E[\sum_{k=1}^{N(t)}X_k|N(t)]\\
= \ & N(t)D(X)+N^2(t)E^2(X)+N(t)E(X)E[N(s)-N(t)]+N(t)E(X)
\end{aligned}$$

从而

$$E[X(s)X(t)]=D(X)E[N(t)]+E^2(X)E[N^2(t)]+E[N(t)]E(X)E[N(s-t)]+E[N(t)]E(X)$$

例 3.5.1 设某商场来到的顾客数服从强度为λ 的*Poisson* 过程，若来到商场的第i 个人消费金额为X_i, 并假设$\{X_i\}$ 相互独立.求此商场在t 时刻的平均销售额。

解

$$S(t)=\sum_{i=0}^{N(t)}X_i,X_0=0$$

$$E[S(t)]=E[E[S(t)|N(t)]]$$

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i | N(t) = n] = \sum_{i=1}^{n} EX_i$$

$$E[S(t)] = E[\sum_{i=1}^{N(t)} EX_i] = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} EX_i) P(N(t) = n)$$

■

§3.5.2 条件Poisson 过程

设$\{N(t), t \geq 0\}$ 是个计数过程，Λ 是取正值的且具有概率分布$F_\Lambda(.)$的随机变量。若在已知$\Lambda = \lambda$ 的条件下$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数λ 的Poisson过程，即

$$P(N((t+s) - N(s) = k | \Lambda = \lambda) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},\ k \geq 0$$

则称$\{N(t), t \geq 0\}$ 为条件Poisson过程。我们不难计算

$$P(N((t+s) - N(s) = k) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda),\ k \geq 0$$

并且

$$P(\Lambda \leq x | N(t) = k) = \frac{\int_0^x e^{-\lambda t} (\lambda t)^k dF_\Lambda(\lambda)}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k dF_\Lambda(\lambda)},\ x > 0,\ k \geq 0.$$

§3.5.3 非时齐Poisson过程

若某个计数过程满足

(1) $N(0) = 0$;

(2) $N(t)$ 是独立增量；

(3) $P(N(t + \Delta t) = 1) = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$
    $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$

则称它为具有强度函数$\{\lambda t; t \geq 0\}$ 的**非时齐**Poisson**过程**.
可类似证明：

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^k}{k!}$$

其中，

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds,$$

若$\lambda(s) \equiv \lambda$,则$m(t) = \lambda t$.

§3.5.4 空间Poisson过程

在天文学中常常把宇宙空间中星星的分布看成三维的Poisson 过程。因此，我们可将时间（正半直线）上的Poisson 过程推广到空间上。设$\mathfrak{A}$为n 维空间中的子集所组成的集合。称随机过程$\{N(A), A \in \mathfrak{A}\}$ 为强度λ的空间齐次Poisson 过程，如果

(1) $N(\phi) = 0$;

(2) 对任何$\mathfrak{A}$ 中不交的集合$A_1, A_2, ..., A_n$，随机变量$N(A_1), N(A_2), ..., N(A_n)$相互独立；

(3) 对每个A, $N(A)$ 服从参数为$\lambda|A|$ 的Poisson 分布，即

$$P(N(A) = k) = e^{-\lambda|A|} \frac{(\lambda|A|)^k}{k!},\ k \geq 0$$

.

§3.5.5 更新过程

定义 3.5.2 $\{X_k\}$ 为非负独立同分布随机变量序列，记$S_0 = 0, S_k = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 令

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

或

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{(S_n \leq t)}$$

称$\{N(t); t \geq 0\}$ 为更新过程.

由$P(\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu) = 1, E(X_i) = \mu$ 可证明：
基本更新定理：

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

其中，取$\frac{1}{\infty} = 0$. **证明** 先设$\mu < \infty$,由$S_{N(t)+1} > t$ 得$\mu(E[N(t)] + 1) > t$,从而

$$\liminf_{t\longrightarrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

为证明

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

设$\overline{X}_n = \min(X_n, M)$,其中, M 为任意给定的常数.
由$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{X}_n$,可定义$\overline{N}(t) = \sup\{n : n \geq 0, \overline{S}_n \leq t\}$.
再由$\overline{S}_{N(t)+1} \leq \overline{S}_{\overline{N}(t)+1} \leq t + M$ 可得

$$(E[N(t)] + 1)E[\overline{X}_1(M)] \leq t + M$$

从而

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \leq \frac{1}{E[\overline{X}_1(M)]}$$

由于$E[\overline{X}_1(M)] = \int_0^M [1 - F(x)]dx$,所以

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} E[\overline{X}_1(M)] = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx = E(X_1) = \mu$$

于是

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

再看$\mu = \infty$ 的情形:
由

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty}\frac{E[N(t)]}{t}\le\limsup_{t\longrightarrow\infty}\frac{E[\overline{N}(t)]}{t}=\frac{1}{E[X_1(M)]},$$

得

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty}\frac{E[N(t)]}{t}\le\lim_{M\longrightarrow\infty}\frac{1}{E[X_1(M)}=0$$

■

§3.6 补充与注记

A. Poisson 过程的检验. 给定一个计数过程$\{N(t),t\ge 0\}$, 要检验它是否是Poisson 过程，最常用的方法就是检验在$N(T)=n$ 的条件下，事件相继发生时刻$\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ 的条件分布是否与$[0,T]$上n 个独立均匀分布的顺序统计量的分布相同。具体检验方法如下。

原假设H_0: $\{N(t),t\ge 0\}$ 是Poisson 过程;

备择假设H_1: $\{N(t),t\ge 0\}$ 不是Poisson 过程。

设$X_k,1\le k\le n$, 相互独立同分布于$[0,T]$ 上的均匀分布，$X_{(k)},1\le k\le n$, 是其顺序统计量。在原假设下，根据定理3.2.3 我们有

$$\begin{array}{l}E(\sum_{k=1}^n\tau_k|N(T)=n)=E(\sum_{k=1}^n X_{(k)})=E(\sum_{k=1}^n X_k)=\frac{nT}{2}\\ D(\sum_{k=1}^n\tau_k|N(T)=n)=D(\sum_{k=1}^n X_{(k)})=D(\sum_{k=1}^n X_k)=\frac{nT^2}{12}\end{array}$$

再利用中心极限定理可得

$$\lim_{n\to\infty}P\Big(\frac{\sum_{k=1}^n\tau_k-nT/2}{T\sqrt{n/12}}\le x|N(T)=n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{k=1}^n X_k-nT/2}{T\sqrt{n/12}}\le x\Big)=\Phi(x)$$

其中，$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数。因而，当n 充分大时，

$$P\Big(\frac{\sum_{k=1}^n\tau_k}{T}\le\frac{1}{2}(n+x\sqrt{n/3})|N(T)=n\Big)\approx\Phi(x).$$

给定置信水平$\alpha=0.05$，若

$$\frac{\sum_{k=1}^n\tau_k}{T}\in[\frac{1}{2}(n-x\sqrt{n/3}),\ \ \frac{1}{2}(n+x\sqrt{n/3})],$$

则接受原假设H_0，否则就拒绝原假设H_0 或接受备择假设H_1。

B. 强度λ 的参数估计. 如果检验了一个计数过程是Poisson 过程，那么我们还需进一步确定它是什么样的Poisson 过程，这等价于确定它的强度参数λ. 通常的办法，就是利用数据强度参数λ 进行估计，这包括参数的点估计和区间估计。

对于复合Poisson 过程，我们有等式：$E(X(t)) = E(X_1)E(N(t))$, 这里假设$\{X_k, k \geq 1\}$ 与$N(t)$ 独立。事实上，不需要这个假设，也有类似的结论。这就是下述的Wald 等式。

C. Wald 等式. 设$\{X_k, k \geq 1\}$ 独立同分布且$E(X_1) < \infty$，T 是关于$\{X_k, k \geq 1\}$ 的停时(或称Markov 停时）且$E(T) < \infty$. 则有

$$E(\sum_{k=1}^{T} X_k) = E(X_1)E(T).$$

所谓T 为停时是指：T 为取非负整值的随机变量，且对任意的$n \geq 0$, 事件$\{T = n\}$ 仅依赖于$X_1, ..., X_n$, 而与$X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ 独立。

证明 设

$$I_k = \begin{cases} 0, & T < k, \\ 1, & T \geq k\ . \end{cases}$$

则

$$\sum_{k=1}^{T} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k I_k.$$

由于I_k 与X_k 独立，我们有

$$E(\sum_{k=1}^{T} X_k) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k)E(I_k) = E(X_1)\sum_{k=1}^{\infty} P(T \geq k) = E(X_1)E(T).$$

习 题

3.1 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$为泊松过程，任给$0 \leqslant s < t$, 求条件概率$P(N(s) = k|N(t) = n)$.

3.2 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$为泊松过程，参数为λ，求或证明：

(1) $EN(t)N(s+t)$；

(2) $E(N(t) \mid N(s+t))E(N(s+t) \mid N(s))$的分布律；

(3) 任给$0 \leqslant s \leqslant t$，有$PN(s) \leqslant N(t) = 1$；

(4) 任给$0 \leqslant s \leqslant t, \varepsilon > 0$，有$\lim\limits_{t \to s} P\{N(t) - N(s) > \varepsilon\} = 0$.

3.3 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为λ 的泊松过程，求：$E(S_k \mid N(t) = n)\,(k \leqslant n)$.

3.4 求在$N(t) = n$ 的条件下，$S_k(k < n)$ 的条件概率密度.

3.5 设在某公路上，汽车运输流构成一泊松流，其强度等于每分钟30 辆（强度即参数λ），试求n 辆汽车通过观察站的时间需要多于x秒的概率.

3.6 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$为条件泊松过程.

(1) $\{N(t) = n\}$给定条件下，求t时刻后首次事件发生的时间的条件分布；

(2) 计算$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P(N(h) \geqslant 1)}{h}$；

(3) 求$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P(N(t+h) - N(t) = 1 \mid N(t) = n)}{h}$.

3.7 考虑一个单服务员银行，顾客到达按照速率为λ的泊松过程，服务员为每一位顾客的服务时间是随机变量，分布函数为G，来客到达门口只是在当时服务员空闲时才准进来.求：

(1) 顾客进银行的速率是多少？

(2) 顾客进银行占多大比例？

(3) 服务员工作的时间占多大比例？

3.8 汽车到达大门，每辆汽车随机长度X，其分布为F，第一辆汽车到达，靠着大门停放.每一辆后来的汽车停在前一辆车后面, 其间距离Y 是一个$[0, 1]$上均匀分布的随机变量，N_x表示离大门距离x内停在一条线的车数，求:$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{EN_x}{x}$ (其中$F(y) = 1 - e^{-y}, y \geqslant 0$).

3.9 设$\{X(n), n \geqslant 1\}$独立同分布，X_n的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} \rho e^{\rho(x-\delta)}, & x > \delta, \\ 0, & x \leqslant \delta . \end{cases}$$

其中$\delta > 0$给定.求更新过程中的概率$P(N(t) \geqslant k)$.

3.10 求泊松过程中，全寿命$\beta_t = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$的分布.

3.11 考虑一个分布函数为F的更新过程，假设每一个事件以概率$1-q$被抹掉，以比例因子$\frac{1}{q}$扩大时间尺度.证明事件流构成一更新过程，其中事件之间的时间间隔分布函数是

$$F(x;q) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-q)^{n-1} q F_n(x/q),$$

其中F_n为F的n重卷积.

3.12 设n个零件的寿命$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同指数分布，参数为λ.该n个零件从$t=0$开始工作，记$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(r)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$为相继失效的时刻，试求$X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(r)}$的联合概率密度函数$(1 \leqslant r \leqslant n)$.

3.13 在上题中，如果令$Y_1 = X_{(1)}, Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, 2 \leqslant i \leqslant n$.试问$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$是否独立？是否同分布？并证明你的猜想.

3.14 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$为时齐泊松过程，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 为事件相继发生的时刻.

(1) 给定$N(t) = n$,试问$S_1, S_2 - S_1, \cdots, S_n - S_{n-1}$ 是否条件独立？是否同分布？试证明你的猜想.

(2) 求$E[S_1 \mid N(t)]$的分布律；

(3) 利用(1)及(2)，求$E[S_k \mid N(t)]$的分布律；

(4) 求在$N(t) = n$下S_i与$S_k(1 \leqslant i < k \leqslant n)$的条件联合概率密度.

3.15 设$\{N(t), t \geqslant 0\}$是参数为λ的时齐泊松过程，$S_0 = 0, S_n$为第n个事件发生的时刻.求：

(1) (S_2, S_5)的联合概率密度函数；

(2) $E(S_1 \mid N(t) \geqslant 1)$；

(3) (S_1, S_2)在$N(t) = 1$下的条件概率密度函数.

第四章　马尔可夫过程

实际中常常碰到具有下列性质的运动体系 Σ，如果已知它在 $t=n$ 时的状态，则关于它在 n 时以前所处的状态的补充知识，对预言 Σ 在 n 时以后所处的状态不起任何作用。或者说，在已知"现在"的条件下，"将来"与"过去"是独立的。这种性质，就是直观意义上的"马尔可夫性"（简称"马氏性"）或称"无后效性"。具有马氏性的随机过程称为马尔可夫过程。

马尔可夫过程在理论上和实际应用中都十分重要，在工程、统计、物理、生物学、数字计算方法、经济管理和市场预测等领域中都有十分重要的作用和广泛应用。

§4.1　马尔可夫过程定义和例子

马尔可夫（Markov）过程定义. 给定随机过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对于参数中任意 n 个时刻 t_i，$i=1,2,\ldots,n, t_1<t_2<\cdots<t_n$，有

$$\begin{aligned}&P\{X(t_n)<x_n|X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\ldots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}\\&=P\{X(t_n)<x_n|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$为马尔可夫过程或简称马氏过程。具有（1.1）式的性质称为具有马尔可夫性或无后效性。由定义可知, 对马氏过程来说, 条件概率起着关键作用,因此有: 给定马氏过程$\{X(t), t\in T\}$，条件概率$P(s,x;t,y)=P\{X(t)<y|X(s)=x\}$ 称为马氏过程的转移概率函数。

我们把马尔可夫过程$\{X(t), t\in T\}$ 中$X(t)$ 的取值 x 称为状态，而将过程所有取值的全体E 称为状态空间。

马尔可夫过程按参数集T 是离散的或连续的，可分为离散参数马氏过程与连续参数马氏过程；如果马氏过程的状态空间E 为离散的（只取有限个或可列个值），则称马氏过程为马氏链（马尔可夫链）。

例 4.1.1 独立过程$\{X(t), t \in T\}$是马氏过程。

证: 设$\{X(t), t \in T\}$为独立过程，即 $\forall s, t, X(s)$与$X(t)$独立。

从而 $\forall t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，有:

$P\{X(t_n) < x_n | x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \ldots, x(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$

$= P\{X(t_n) < x_n\}$

$= P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$

得证。

例 4.1.2 独立增量过程$\{X(t), t \geq 0\ X(0) = 0\}$为马氏过程。

证: 设$X(0) = 0, \{X(t), t \geq 0\}$为独立增量过程，即: $\forall t_1 < t_2 < t_3 < t_4$,

$X(t_4) - X(t_3)$与$X(t_2) - X(t_1)$相互独立。从而，

$P\{X(t_n) < x_n | X(t_1) = x_1, \ldots X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$

$= P\{X(t_n) - X(t_{n-1}) < x_n - x_{n-1} | X(t_1) - X(0) = x_1,$

$X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1, \ldots X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}) = x_{n-1} - x_{n-2}\}$

$= P\{X(t_n) - X(t_{n-1}) < x_n - x_{n-1}\}$

$= P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$

§4.2 离散参数马氏链

§4.2.1 离散参数马氏链的定义

状态空间E 和参数集T 都是离散的马尔可夫过程称为离散参数马氏链。**定义.** 设$\{X(n), n = 0, 1, 2 \ldots\}$为随机序列，状态空间为$E = \{0, 1, 2, \ldots\}$, 如果对于任意非负整数$k$ 及$n_1 < n_2 < \cdots < n_l < m$, 以及$i_{n_1}, i_{n_2}, \ldots i_{n_l}, i_m, i_{m+k} \in E$,有:

$$P\{X(m+k) = i_{m+k} | X(n_1) = i_1, \cdots, X(n_l) = i_l, X(m) = i_m\} = P\{X(m+k) = i_{m+k} | X(m) =$$

成立，则称$\{X(n), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 为离散参数马氏链。而称条件概率$p_{ij}^{(k)}(m) = P\{X(m+k) = j | X(m) = i\}$ 为马氏链m 时从i 出发的k 步转移概率。称

矩阵$P^{(k)}(m)=(p_{ij}^{(k)}(m))_{i,j\in E}$ 为k 步转移概率矩阵。它满足：

$$(1)\ \forall\ i,j,P_{ij}^{(k)}(m)\geq 0(2)\ \forall\ i,\sum_{j\in E}P_{ij}^{(k)}(m)=1$$

我们称 $P^{(k)}(m)$ 为随机矩阵。马氏链的 k 步转移概率之间的关系由以下给出:

定理 4.2.1 对$\{P_{ij}^{(k)}(m)\}_{i,k\in E}$,有 *Kolmogorov-Chapman* 方程成立:

$\forall k,l$ 有: $P_{ij}^{(k+l)}(m)=\sum_{r\in E}P_{ir}^{(k)}(m)P_{rj}^{(l)}(m+k)$

证明: $\sum_{r\in E}P_{ir}^{(k)}(m)P_{rj}^{(l)}(m+k)$

$$=\sum_{r\in E}P\{X(m+k)=r|X(m)=i\}P\{X(m+k+l)=j|X(m+k)=r\}$$

$$=\sum_{r\in E}\frac{P\{X(m+k)=r,X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}}\ \frac{P\{X(m+k+l)=j,X(m+k)=r,X(m)=i\}}{P\{X(m+k)=r,X(m)=i\}}$$

$$=\frac{\sum_{r\in E}P\{X(m+k+l)=j,X(m+k)=r,X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}}$$

$$=\frac{P\{X(m+k+l)=j,X(m)=i\}}{P\{X(m)=i\}}=P\{X(m+k+l)=j|X(m)=i\}$$

Kolmogorov-Chapman方程简称 C-K 方程. 称 $p_{ij}^{(1)}(m)=p_{ij}(m)$ 为一步转移概率。由 C-K 方程可得：

$$P_{ij}^{k+1}(m)=\sum_{j_1,\cdots,j_k\in E}P_{ij_1}(m)P_{j_1j_2}(m+1)\cdots P_{j_kj}(m+k)$$

即：k 步转移矩阵由1 步转移矩阵决定。

设$P\{X(0)=j\}=p_j,p_j\geq 0,\sum_{j\in I}p_j=1$，称$\{p_j\}_{j\in E}$为马氏链的初始分布。

称$p_j^{(n)}=P\{X(n)=j\}$为绝对概率，满足$p_j^{(n)}\geq 0,\sum_j p_j^(n)=1$

由$p_j^{(n+1)}=P\{X(n+1)=j\}=\sum_k P\{X(n+1)=j|X(0)=k\}P\{X(0)=k\}$

故： $p_j^{(n+1)}=\sum_{k\in E}p_kp_{kj}^{(n+1)}(0),$

即：绝对概率完全由初始分布及转移矩阵唯一决定。进一步对有限维联合概率分布有以下结果:

性质 4.2.2 $\forall j_1 < j_2 < \cdots < j_k$,
$P\{X(j_1)=i_1, X(j_2)=i_2, \cdots, X(j_k)=i_k\}$
$= p_{i_1}^{(j_1)} p_{i_1,i_2}^{(j_2-j_1)}(j_1) \cdots p_{i_{k-1}\ i_k}^{j_k-j_{k-1}}(j_{k-1})$
证明: 由马氏链的定义及乘法公式即得。

§4.2.2 齐次马尔可夫链

如果马氏链的转移概率与初始时间无关,称为时间齐次的,即: 如果马氏链的转移概率满足:

$P\{X(m+k)=j|X(m)=i\} = P\{X(k)=j|X(0)=i\}$

则称该马氏链为齐次马氏链。记:$P^{(k)} = (p_{ij}^{(k)})_{i,j\in E}$ 从而对齐次马氏链，由 C-K 方程，$P^{(k+l)} = P^{(k)}P^{(l)}$, 并且

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}P = \cdots = P^n$$

其中$P = P^{(1)}$. 以后若无特别声明，本章都假设马氏链为齐次的, 并且简记$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$。

例 4.2.3 随机游动: 假设有一质点在数轴上的整数点上运动，以概率 p 右移

一步，以 q 左移一步，且 $p+q=1$,若以 $X(n)$ 表示时刻 n 质点所处的

位置，因此$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$为一齐次马氏链。

1. 无限制 (自由) 随机游动 (徘徊)

状态空间$E = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

$p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = q$, $p_{ij} = 0$ 对$j \neq i-1, i+1$

$$P = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

当$p=q=\frac{1}{2}$时，就称为对称随机游动。

2. 有一个吸收壁的随机游动

如果$E=\{0,1,2,\cdots\}$，质点一旦到达 *0*，就永远停留在 *0* 状态，即$p_{00}=1$,就称 *0* 为吸收壁。转移矩阵为:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

3. 有一个弹性壁的随机游动。

如果$E=\{0,1,2,\cdots\}$.质点一旦进入 *0* 后，以 p 右移一步，以 q 停留在原处，即: $p_{00}=q$, $p_{01}=p$，就称 *0* 为弹性壁。

转移矩阵为:

$$P=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

4. 有一个反射壁的随机游动

如果在 "*3*" 中，质点一旦进入 *0* 后，就立刻以概率 *1* 反射到 *1*，即: $p_{00}=0,p_{01}=1$,就称 *0* 为反射壁。

5. 允许停留的随机游动

如果$p_{i,i+1}=p,p_{i,i-1}=q,p_{ii}=r$,而$p+q+r=1$,

则称为允许停留的随机游动。

例 4.2.4 *(M/G/1* 排队系统*)*假设顾客依照参数为λ的泊松过程来到只有一名服务员的服务站，来客若发现服务员空闲就会立刻得到服务，否则排队等待直到轮到他。设每名顾客接受服务的时间是独立的随机变量，有共同的分布 G，并且与来到过程独立。这个系统称为 *M/G/1* 排队系统，其中 M 表示顾客来到的间隔为指数分布， G 代表服务时间所服从

的分布，数字 *1* 表示只有一名服务员。以 X_n 表示第 n 个顾客走后，剩下的顾客数，$n \geq 1$;以 Y_n 表示第 $n+1$ 个顾客服务期间来到的顾客数。则:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n & \text{如 } X_n > 0 \\ Y_n & \text{如 } X_n = 0 \end{cases}$$

由于泊松过程为独立增量过程，所以 Y_n 相互独立，且

$$P\{Y_n = j\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t), \quad j = 0, 1, 2 \cdots$$

所以 Y_n 同分布。从而$\{X_n, n = 1, 2 \cdots\}$为马氏链，转移概率为:

$$\begin{aligned} &P_{0j} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dG(t), && j \geq 0 \\ &P_{ij} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dG(t), && j \geq i-1, i \geq 1 \\ &P_{ij} = 0 && \text{其他} \end{aligned}$$

即 X_n 为时齐马氏链。

§4.2.3 齐次马氏链状态的分类及性质

人们常说, 物以类聚,”进朱者赤,近墨者黑”. 对马氏链是否也有同类型的状态具有相同的性质? 在这节里,我们考虑这个问题. 如果存在某个 $n \geq 0$,使得 $P_{ij}(n) > 0, i, j \in E$,则称马氏链自状态 i 可达状态 j ，记为 $i \to j$;否则称状态 i 不能到达状态 j ，记为 $i \nrightarrow j$. 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$ ，则称状态 i 和 j 互通，记为$i \leftrightarrow j$。

定理 4.2.5 互通关系具有以下性质:

*(1)*自反性 $i \leftrightarrow i$;

*(2)*对称性 若 $i \leftrightarrow j$ ，则 $j \leftrightarrow i$;

*(3)*传递性 若 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$ ，则 $i \leftrightarrow j$。

证明: 只须征传递性。若 $i \to k, k \to j$，存在$m \geq 1$及$n \geq 1$,

使得$p_{ik}(m) > 0, p_{kj}(n) > 0$，由 *C-K* 方程，得:

$p_{ij}(m+n) \geq p_{ik}(m)p_{kj}(n) > 0$，故$i \to j$。

同理可证另一边。

自状态 i 出发经过 n 步首次到达状态 j 的概率$f_{ij}^{(n)}=$

$P\{X(n)=j, X(m)\neq j, m=1,2,\cdots n-1|X(0)=i\}$称为首达概率。 自状态 i 出发迟早到达状态 j 的概率定义为：$f_{ij}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$.
$f_{ii}^{(n)}$表示从状态 i 出发经过 n 步首次返回 i 的概率；f_{ii}表示从 i 出发迟早返回 i 的概率，规定$f_{ii}^{(0)}=0$。

性质 4.2.6 $\forall i,j\in E, n\geq 1$，有：$p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}$.

证明：$p_{ij}^{(n)}=P\{X(n)=j|X(0)=i\}$

$=\sum\limits_{l=1}^{n}P\{X(n)=j, X(l)=j, X(m)\neq j,$对 $m<l|X(0)=i\}$

$=\sum\limits_{l=1}^{n}P\{X(n)=j|X(l)=j, X(m)\neq j,$对 $m<l\}\times P\{X(l)=j, X(m)\neq j,$对 $m<l|X(0)=i\}$

$=\sum\limits_{l=1}^{n}p_{jj}^{(n-l)}f_{ij}^{(l)}$

推论 4.2.7 $f_{ij}>0\Leftrightarrow i\rightarrow j$

如果$f_{ii}=1$，称 i 为常返的，否则称为非常返。 如果 i 常返，定义 i 的平均返回时间为 $\mu_i=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$

如$\mu_i<\infty$，称 i 为正常返的，否则称为零常返。

在自然界中, 许多现象呈现出一定的周期性. 对马氏链来说有以下定义:
如果$\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}$的最大公约数为 t，称 i 的周期为 t。

如果 $t=1$，称为非周期。 如 j 为正常返且非周期，称j 为遍历态。
下面, 我们给出常返性的判别法则:

定理 4.2.8 以下条件等价

(1) i *为常返的;*

(2)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{ii}^{(n)}=1$;

(3)$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$;

证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = p_{ii}^{(0)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$

$= 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sum\limits_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)})$

$= 1 + \sum\limits_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(l)} \sum\limits_{n=l}^{+\infty} p_{ii}^{(n-l)}$

$= 1 + \sum\limits_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(l)} [\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(m)}]$

从而,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}.$$

所以,

$$f_{ii} = 1 \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$$

下面解释 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)}$ 的意义: 定义

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{如} X(n) = i \\ 0 & \text{如} X(n) \neq i \end{cases}$$

则$Y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$表示质点到达状态 i 的次数。

$E[Y|X(0)=i] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} E[Y(n)|X(0)=i] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$,

上式左边表示从 i 出发返回 i 的平均次数。因此由定理3.2.4可知，当 i 为常返时，返回 i 的平均次数为无穷多次。

对零常返及正常返,有以下结果:

定理 4.2.9 如 i 常返, 则 i 为零常返 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$

如 i 是周期为 t 的正常返态, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nt)} = \frac{t}{\mu_i}$

进而有

性质 4.2.10 若 $i \leftrightarrow j$，则它们属于相同的类。(要么同为常返或非常返，零常返或正常返)

证明：由 $i \leftrightarrow j$ 知存在$m \geq 1, n \geq 1$，使$p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$

对$k \geq 1$，有$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)}$，

$$p_{jj}^{(m+k+n)} \geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}$$

再由定理*3.2.4*及定理*3.2.5*可得证。

性质 4.2.11 若$i \leftrightarrow j$，则它们有相同的周期。

证明*:* 由$i \leftrightarrow j$，存在 m 及 $n \geq 1$ 使$p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$

所以$p_{ii}^{(m+n)} > 0$，设 i 的周期为 d，j 的周期为 t。

故 $d|m+n$。

取 $k > 0$，使$p_{jj}^{(k)} > 0$，则$p_{ii}^{(m+k+n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(k)} p_{ji}^{(n)} > 0$，

从而 $d|m+n+k$，从而 $d|k$

而 j 的周期为 t，t 为最大公约数，所以$d \leq t$。

同理：$t \leq d$，从而 $d = t$。

例 4.2.12 *(*直线上无限制的随机游动*)*已知$E = \{\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

$p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = q$

先求 $p_{ij}^{(n)}$：从 i 出发经 n 步转移到 $j \Leftrightarrow n$ 次转移中向右的次数 α 与

向左的次数 β 有以下关系：

$$\begin{cases} \alpha - \beta = j - i \\ \alpha + \beta = n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{n+j-i}{2} \\ \beta = \frac{n-j+i}{2} \end{cases}$$

$$\text{故 } p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}} & \text{当 } n\text{+}j\text{-}i \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{当 } n\text{+}j\text{-}i \text{ 为奇数} \end{cases}$$

所以所有状态都互通，只需要考虑 *0* 状态。

因为$p_{00}^{(2n)} = C_{2n}^n (pq)^n = \frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n$，

由 *Stirling* 公式，当 n 充分大时，$n! \approx (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$

故 $p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$， $p_{00}^{(2n+1)} = 0$

又因 $p+q=1$，故 $4pq \leq 1$ 且 $4pq = 1 \Leftrightarrow p = q = \frac{1}{2}$，

当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \infty$ 所以"0"常返;

当 $p \neq q$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} < \infty$， "0"为非常返。

所有状态的周期为2。

§4.2.4 齐次马氏链状态空间的分解

对状态进行分类后,我们就可以按等价类对状态空间进行分解. 称 E 的子集 C 为闭集，如果对任意的 $i \in C, j \notin C$，有 $p_{ij} =$

0，即$\forall i \in C, \sum\limits_{j\in C} p_{ij} = 1$

如果 E 不含真的闭子集，则马氏链称为不可约。

性质 4.2.13 C 是闭集 $\Leftrightarrow$ $\forall i \in C, j \notin C$ 都有 $p_{ij}^{(n)} = 0 \ \ \forall n \geq 1$。

证明: 充分性显然。下证必要性:

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k\in C} p_{ik}p_{kj} + \sum_{k\notin C} p_{ik}p_{kj} = 0$$

再由归纳法得证。

因此,由命题5 可知,如果 C 为闭集,则 $\forall i \in C, \sum\limits_{j\in C} p_{ij}^{(n)} = 1$.即: $\{p_{ij}^{(n)}\}_{i,j\in C}$为随机矩阵。从而我们可以将以 C 为状态空间，以$\{p_{ij}^{(n)}\}_{i,j\in C}$为转移矩阵的马氏链看作为原马氏链的子马氏链。
对由常返态出发的马氏链,有:

定理 4.2.14 已知 i 常返, 若 $i \to j$, 则 j 必常返且 $f_{ji} = 1$, 从而 $i \leftrightarrow j$。

证明: 略。

因此，自常返态出发只能到达常返态。从而对不可约马氏链来说，要么全是常返态，要么全是非常返态。
设 i_0 常返，令 $H=\{i\in E|i\leftrightarrow i_0\}$，则 $i_0\in H$，且从 H 中的状态出发，一定能经有限时间到达 i_0，永不可能到达 H 外的状态。即：一个马氏链一旦到达某个常返类，就必须永远停留在此常返类中，并且将跑遍此常返类中的全部状态。

将全体常返类记为$C_1,C_2,\cdots,C_n,\cdots$将全体非常返类合并为一类，记为 U，状态空间 E 可分解为

$$E=U+C_1+C_2+\cdots$$

例 4.2.15 设齐次马氏链的状态空间$E=\{1,2,3,4\}$，转移矩阵为:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

状态转移图为:

考虑"3"，$\forall n, f_{33}^{(n)}=0$，故$f_{33}=0$，所以"3"为非常返;

对于"4"，$f_{44}^{(1)}=\frac{2}{3}, f_{44}^{(n)}=0\ \ n\geq 2$，故$f_{44}=\frac{2}{3}<1$，所以"4"为非常返;

由于 $f_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}, f_{11}^{(n)}=0\ \ n\geq 3$，故 $f_{11}=1$

$\mu_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)}=\frac{3}{2}<\infty$，故"1"为正常返，由于"1"和"2"互通，所以"2"

也为正常返。因为$p_{11}=\frac{1}{2}>0$，所以"1"和"2"的周期为 1，即非周期，

从而为遍历态。E 可分解为

$$E=\{1,2\}+\{3,4\}$$

.

例 4.2.16 设齐次马氏链的状态空间$E=\{0,1,2\cdots\},p_{i,i+1}=\frac{1}{2},p_{i,0}=\frac{1}{2},i\in E,$

即可转移矩阵为:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ & \cdots & & \cdots & \end{bmatrix}$$

所有状态互通，所以马氏链不可约。因为$p_{00}=\frac{1}{2}>0$，所以为非周期。

$f_{00}^{(1)}=\frac{1}{2},f_{00}^{(2)}=(\frac{1}{2})^2,\cdots f_{00}^{(n)}=(\frac{1}{2})^n$,故 $f_{00}=1$,

$\mu_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^n=2<+\infty$，从而正常返，即遍历。

§4.2.5 极限分布与平稳分布

在本小节中,我们考虑当 $n\to\infty$时，$p_{ij}^{(n)}$的极限是否存在，若存在,是否与 i 有关? 有以下结果:

性质 4.2.17 如 j 非常返或零常返，则$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=0$

性质 4.2.18 如 j 正常返，周期为 t，则 $\forall i$ 及 $r=0,1,2,\cdots,t-1$,

有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(nt+r)}=f_{ij}^{(r)}\frac{t}{\mu_j}$。其中$f_{ij}^{(r)}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_{ij}^{(mt+r)}\quad r=0,1,2\cdots,t-1$

以上两个命题的证明比较繁，略去。设$\{X(n)\}$为齐次马氏链，如果对一切状态 i 和 j，存在与 i 无

关的极限： $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$

则称此马氏链具有遍历性。即当 n 充分大时,马氏链位于状态 j 的概率与初始的位置(状态)无关. 如果 $\pi_j > 0$ 且$\sum\limits_{j\in E} \pi_j = 1$，则称$\{\pi_j, j \in E\}$为齐次马氏链$\{X(n)\}$的极限分布，记为$\pi = \{\pi_j, j \in E\}$。

定理 4.2.19 设齐次马氏链的状态空间 $E = \{1, 2, \cdots N\}$有限，若存在正整数 n_0，使得对任意 $i, j \in E$，有 $p_{ij}^{(n_0)} > 0$，则此链是遍历的，且极限分布是方程组

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} \quad (j = 1, 2 \cdots N)$$

在条件 $\pi_j > 0, \sum\limits_{j=1}^{N} \pi_j = 1$ 下的唯一解。

证明略。

推论 4.2.20 设状态空间有限的齐次马氏链是遍历的，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(n) = \pi_j \quad (j \in E)$ 其中$p_j(n) = P(X_n = j)$

证明：由于$p_j(n) = \sum\limits_{i\in E} p_i p_{ij}(n)$，其中 $p_i = P(X(0) = i)$

所以

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \sum_{i\in E} p_i \times \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \sum_{i\in E} p_i \pi_j = \pi_j.$$

为了求极限分布,我们引入

定义 4.2.21 设马氏链的一步转移概率为 p_{ij}，如果存在$\{\nu_j, j \in E\}$满足下列条件:

(1) $\nu_j \geq 0 \quad j \in E$;

(2) $\sum\limits_{j\in E} \nu_j = 1$;

(3) $\nu_j = \sum\limits_{i\in E} \nu_i p_{ij}$.

则称$\{\nu_j, j \in E\}$为该马氏链的平稳分布。

记$V = \{\nu_j, j \in E\}$，则 $V = VP$，V 称为 P 的不变概率。

性质 4.2.22 设 V 为平稳分布，则 $V=VP^n$。

证明：因为 $\nu_j=\sum\limits_{i\in E}\nu_i p_{ij}=\sum\limits_{i\in E}[\sum\limits_{k\in E}\nu_k p_{ki}]p_{ij}$

$$=\sum_{k\in E}\nu_k\sum_{i\in E}p_{ki}p_{ij}=\sum_{k\in E}\nu_k p_{kj}^{(2)}$$

即： $V=VP^2$

从而由归纳法得证。

性质 4.2.23 如果马氏链的初始分布 $p_i=P(X(0)=i)$ 为平稳分布，则 $\{X(n)\}$为严平稳过程。

证明：由 $P\{X(n)=j\}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}P\{X(0)=i\}P\{X(n)=j|X(0)=i\}$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}p_i p_{ij}^{(n)}=p_j=P\{X(0)=j\}$$

及 $P\{X(n)=j_0,X(n+1)=j_1,\cdots X(n+m)=j_m\}$

$=P\{X(n)=j_0\}p_{j_0j_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{m-1}j_m}$

$=P\{X(0)=j_0,X(1)=j_1,\cdots X(m)=j_m\}$

知 $\{X(n)\}$ 严平稳。

性质 4.2.24 遍历的齐次马氏链的极限分布为平稳分布。

证明：只对状态空间有限情形证明。

由遍历性知： $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\pi_j$，从而 $\pi_j\geq 0$ 且 $\sum\limits_{j\in E}\pi_j=1$;

又由 $p_{ij}(n+1)=\sum\limits_{k\in E}p_{ir}(n)p_{rj}$，取极限得： $\pi_j=\sum\limits_{r\in E}\pi_r p_{rj}$，

得证。

例 4.2.25 在传递数字 *0* 和 *1* 的通讯系统中，每一传递数字必须经过若干级。设传递正确的概率为 p，*X(0)* 表示进入系统第一级的数字，*X(n)* 表示离开通讯系统第 n 级的数字。$\{X(n),n=0,1,2\cdots\}$是状态空间$E=\{0,1\}$的齐次马氏链。一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} p\ q \\ q\ p \end{bmatrix}$$

由于 $p_{ij}>0,\forall i,j$，故马氏链遍历，极限分布为平稳分布。

由 $\pi=\pi P$ 及$\pi_0+\pi_1=1$ 得：$(\pi_0,\pi_1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。

例 4.2.26 设齐次马氏链 *X(n)* 的状态空间为 $E=\{1,2,3\}$，初始分布为：

X(0)	*1*	*2*	*3*
P	*1/2*	*1/4*	*1/4*

，一步转移概率矩阵为： $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$

求：*(1)* $P\{X(0)=1,X(1)=1,X(2)=2\}$*;*

(2) $P\{X(2)=3\}$*;*

(3) 此链是否遍历，如遍历，求极限分布;

(4) $P\{X(2)=1,X(3)=2|X(1)=1\}$

解：*(1)* $P\{X(0)=1,X(1)=1,X(2)=2\}$

$=p_{12}\times p_{11}\times P(X(0)=1)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{32}$

$$(2)\ P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix}\frac{5}{16}&\frac{7}{16}&\frac{4}{16}\\ \frac{7}{36}&\frac{16}{36}&\frac{13}{36}\\ \frac{1}{12}&\frac{13}{48}&\frac{31}{48}\end{bmatrix}$$

$$P\{X(2)=3\}=\sum_{i=1}^{3}P\{X(2)=3|X(0)=i\}P\{X(0)=i\}$$

$=\frac{4}{16}\times\frac{1}{2}+\frac{13}{36}\times\frac{1}{4}+\frac{31}{48}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{217}{576}$

(3) 因为 $\forall\ i,j,p_{ij}^{(2)}>0$，所以马氏链遍历，极限分布即为平稳分布，

由 $\pi P=\pi$及 $\sum\limits_{i=1}^{3}\pi_i=1$，得：$\pi_1=\frac{4}{25},\pi_2=\frac{9}{25},\pi_3=\frac{13}{25}$

所以极限分布为：$(\frac{4}{25},\frac{9}{25},\frac{12}{25})$。

(4) $P\{X(2)=1,X(3)=2|X(1)=1\}$

$=p_{12}\times p_{11}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

§4.3 连续参数马氏链

§4.3.1 转移概率函数与速率矩阵

设参数集为 $T=[0,+\infty)$，连续参数马氏链的定义与离散参数类似，这里略去。对连续参数马氏链其相应的转移概率函数定义为:

定义 4.3.1 设$\{X(t),t\geq 0\}$为连续参数马氏链, 状态空间 $E=\{0,1,2\cdots\}$, 对任意的 $i,j\in E$, 任意的非负实数 $s.t.$ 条件概率 $p_{ij}(s,s+t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\}$称为马氏链的转移概率函数。

如果 $\forall s>0, p_{ij}(s,s+t)=p_{ij}(0,t)\doteq p_{ij}(t)$，称该马氏链为时齐的，以下只考虑时齐的马氏链。

转移函数$\{p_{ij}(t)\}_{i,j\in E}$满足:

(1) $0\leq p_{ij}(t)\leq 1 \quad \forall i,j\in E$;

(2) $\sum\limits_{j\in E} p_{ij}(t)=1$;

(3) C-K 方程成立: $p_{ij}(s+t)=\sum\limits_{r} p_{ir}(s)p_{rj}(t)$

约定 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如 } i=j\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

记 $p_i=P\{X(0)=i\}$为初始分布，$p_j(t)=P\{X(t)=j\}$为 t 时刻的绝对概率分布。

在离散参数马氏链中，n 步转移概率可以由一步转移概率算得，而一步转移概率可由直观方法求出。在连续参数马氏链中，如何求 $p_{ij}(t)$? 能否找到一个类似于一步转移概率矩阵的某矩阵, 使得转移函数可由它表出.为此，我们假设转移函数满足以下的连续性条件：

$$\lim_{t\to 0^+} p_{ij}(t)=\delta_{ij}$$

并称满足该连续性条件的过程为随机连续的马氏过程。

性质 4.3.2 对随机连续的连续参数马氏链, 有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=q_{ij}, \quad i,j\in E$

其中，当 $i \neq j$ 时，q_{ij} 存在且有限; q_{ii} 存在但可能为$-\infty$。

q_{ij} 称为该马氏链的速率，$Q=(q_{ij})_{i,j\in E}$称为转移矩阵 $P(t)=\{p_{ij}(t)\}_{i,j\in E}$的转移速率矩阵或简称为 Q 矩阵。具有性质：

(1) $0 \le q_{ij} < \infty,\ q_{ii} \le 0$; (2) $q_{ij} \le -q_{ii}$; (3) $\sum\limits_{j\neq i} q_{ij} + q_{ii} \le 0.$

一般来说, $P(t)$ 不能直接由测量得到，但 Q 却可通过实验手段测得。它们之间的关系由 Kolmogorov 向前与向后方程给出。

定理 4.3.3 *Kolmogorov*向前向后方程: $\forall i,j \in E=\{0,1,\cdots N\}$

$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum\limits_{k=0}^{N} p_{ik}(t)q_{kj}$，即: $P'(t)=P(t)Q$ 向前方程

$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum\limits_{k=0}^{N} q_{ik}p_{kj}(t)$，即: $P'(t)=QP(t)$ 向后方程

证明: 只证向前方程。

$$\frac{p_{ij}(t+\triangle t)-p_{ij}(t)}{\triangle t} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} p_{ik}(t)p_{kj}(\triangle t)-p_{ij}(t)}{\triangle t}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(\triangle t)-\delta_{kj}}{\triangle t},$$

令 $\triangle t \to 0$ 取极限得:

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t)q_{kj}.$$

注: 对于状态空间无限，前进方程与后退方程不一定成立，当满足保守条件: $\sum\limits_{j\in E} q_{ij}=0$, q_{ii} 有界时，后退方程一定成立。

推论 4.3.4 当向前方程成立时，绝对概率满足 *Fokker-Planck* 方程: $p_j'(t) = p_j(t)q_{jj} + \sum\limits_{k\neq j} p_k(t)q_{kj}$

证明: 由向前方程，两边同乘 $p_i = P(X(0)=i)$，对 i 求和得:

$$\sum_i p_{ij}'(t)p_i = \sum_i \sum_{k\in E} p_{ik}(t)q_{kj}p_i = \sum_{k\in E}\sum_i p_i p_{ik}(t)q_{kj},$$

即: $$p_j'(t) = \sum_{k\in E} p_k(t)q_{kj}$$

在实际问题中,我们需要对 Q 矩阵中的元素进行估计,因此,我们需要知道 Q 矩阵的概率意义. 这一点由下面给出:

定理 4.3.5 设 $X(t)$ 的轨迹右连续（即 $P\{\lim\limits_{t_0\to 0^+} X(t+t_0)=X(t)\}=1$），令 $\tau = inf\{t: t>0, X(t)\neq X(0)\}$，即 τ 为首次离开初始状态的时间，则:

(1) $P(\tau > t|X(0)=i) = e^{-q_i t}$ 其中 $q_i=-q_{ii}$，$E(\tau|X(0)=i)=\frac{1}{q_i}$

(2) $P\{\tau \le t, X(\tau)=j|X(0)=i\} = \frac{q_{ij}}{q_i}[1-e^{-q_i t}]$,

$P\{X(\tau)=j|X(0)=i\} = \frac{q_{ij}}{q_i}$;

即在 $X(0)=i$ 的条件下，τ 与 $X(\tau)$ 独立。

证明: 略

类似于离散参数马氏链，对于连续参数马氏链有：

定义 4.3.6 如果存在 $t\ge 0$,使得 $P_{ij}(t)>0, i,j\in E$,则称马氏链自状态 i 可达状态 j，记为 $i\to j$;否则称状态 i 不能到达状态 j，记为 $i \nrightarrow j$.

定义 4.3.7 如果 $i\to j$ 且 $j\to i$，则称状态 i 和 j 互通，记为$i\leftrightarrow j$。如果所有的状态都互通,称马氏链不可约.

定义 4.3.8 设马氏链的转移概率函数为 $p_{ij}(t)$，如果存在$\{\pi_j, j\in E\}$满足下列条件:

(1) $\pi_j \ge 0 \quad j\in E$;

(2) $\sum\limits_{j\in E}\pi_j = 1$;

(3) $\pi_j = \sum\limits_{i\in E}\pi_i p_{ij}(t)$对每个$t$.

则称$\{\pi_j, j\in E\}$为该马氏链的平稳分布。

性质 4.3.9 不可约连续参数马氏链存在极限分布，极限分布为平稳分布,由 $\pi Q=0$ 及 $\sum\limits_{i\in E}\pi_i=1$ 给出。

§4.3.2 生灭过程

定义 4.3.10 设$\{X(t), t \geq 0\}$是连续参数齐次马氏链， $E = \{0, 1, \cdots\}$如果 *X(t)* 的转移概率函数 $p_{ij}(t)$ 具有以下特点:

$$\begin{cases} p_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h) & \lambda_i > 0 \\ p_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h) & \mu_i > 0, \mu_0 = 0 \\ p_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & \\ \sum\limits_{|j-i|\geq 2} p_{ij}(h) = o(h) & \end{cases}$$

称 *X(t)* 为生灭过程， λ_i 称为生长率， μ_i 称为死亡率。

如 $\mu_i = 0 \quad i \geq 1$, 称为纯生过程; 如 $\lambda_i = 0 \quad i \geq 0$, 称为纯灭过程。

对生灭过程X(t)，其 Q 矩阵为：

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

显然该 Q 矩阵为保守的，对生灭过程Kolomogorov向前向后方程均成立。且存在极限分布为$\pi = \{\pi_j, j \in E\}$满足：$\pi Q = 0$

得：$\begin{cases} \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0 \\ \quad\vdots \\ \pi_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0 \\ \cdots \qquad \cdots \end{cases}$ ，再由$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$

得：$\pi_0 = (1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k})^{-1}$。

例 4.3.11 （泊松过程）*X(t)* 表示直到 t 时刻为止某电话交换台收到的呼唤数,

假设: *(1)* 在时间$(a, a+t]$内来到的呼唤数 $X(a+t) - X(a)$ 的概率分

布与 a 无关，其中$a \geq 0$;

(2) 在互不相交的时间区间内来到的呼唤数是独立的;

(3) 在很短的间隔长为 $\triangle t$ 时间内来到多于*1*次呼唤的概率为$o(\triangle t)$

设$X(0)=0, X(t)$为马氏链，且对 $j>i$有

$$P\{X(a+t)=j|X(a)=i\}=P\{X(a+t)-X(a)=j-i\}$$

只与 t 有关，与 a 无关，因此 *X(t)* 为时齐的。

令λ表示单位时间内来到的平均呼唤次数，则:

$$P\{X(t+\triangle t)-X(t)=1\}=\lambda\triangle t+o(\triangle t)$$

所以 $p_{ij}(\triangle t)=P\{X(t+\triangle t)=j|X(t)=i\}$

$$=\begin{cases} 0 & j<i \\ 1-\lambda\triangle t+o(\triangle t) & j=i \\ \lambda\triangle t+o(\triangle t) & j=i+1 \\ o(\triangle t) & j>i+1, \end{cases}$$

所以 $q_{ij}=\begin{cases} 0 & j<i\text{或}j>i+1 \\ -\lambda & j=i \\ \lambda & j=i+1 \end{cases}$

$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$ 满足保守条件，由向后方程得:

$$\begin{cases} \frac{dp_{ij}(t)}{dt}=-\lambda p_{ij}(t)+\lambda p_{i+1,j}(t) \quad j\geq i \\ \frac{dp_{ii}(t)}{dt}=-\lambda p_{ii}(t), \end{cases}$$

由初始条件: $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$

解得: $p_{ij}(t)=\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t} \qquad j=i,i+1,\cdots.$

例 4.3.12（线性纯生过程，*Yule* 过程）

考察一种初等生物群体的繁殖过程模型，假设每个生物体与其他生物体的繁殖相互独立地服从参数为λ的泊松过程，且每个生物体分别

地繁殖后代，且不会死亡（可以理解为转变为另一种形式保存下来）。记N_t表示 t 时刻群体中的总数目。由于泊松过程具有可加性，即 n 个相互独立的泊松过程之和仍为泊松过程，参数为它们的参数之和。状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，令:

$$p_n(t)=P\{N_t=n\}$$

则

$$p_n(t+h)=P\{N_{t+h}=n\}=p_n(t)(1-n\lambda h)+p_{n-1}(t)(n-1)\lambda h+o(h)$$

故

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=-n\lambda p_n(t)+(n-1)\lambda p_{n-1}(t)$$

设开始时有 n_0 个个体，即 $N_0=n_0$，则 $p_{n_0}(0)=1$，$p_n(0)=0\ \ (n\neq n_0)$
当$n<n_0$时，$\forall t\geq 0$，$p_n(t)=0$
当$n=n_0$时，由$\frac{d}{dt}p_{n_0}(t)=-n_0\lambda p_{n_0}(t)$，得: $p_{n_0}(t)=e^{-n_0\lambda t}$
当$n\geq n_0+1$时，由$p_n(t)$及$p_{n-1}(t)$的上述递推方程可得:

$$p_n(t)=\frac{(n-1)!}{(n-n_0)!(n_0-1)!}(e^{-\lambda t})^{n_0}(1-e^{-\lambda t})^{n-n_0}$$

。从而，N_t作为连续时间的马氏链具有转移概率函数为:

$$p_{ij}(t)=C_{j-1}^{i-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{j-i}\quad j\geq i.$$

另一方面，我们也可由Q矩阵推出$p_{ij}(t)$如下:

$$P\{N(t+\triangle t)-N(t)=1|N(t)=k\}=k\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$P\{N(t+\triangle t)-N(t)=0|N(t)=k\}=1-k\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$P\{N(t+\triangle t)-N(t)\geq 2|N(t)=k\}=o(\triangle t).$$

$$P\{N(t+\triangle t)-N(t)<0|N(t)=k\}=0$$

从而: $$p_{ij}(\triangle t)=\begin{cases} 0 & j<i \\ 1-i\lambda\triangle t+o(\triangle t) & j=i \\ i\lambda\triangle t+o(\triangle t) & j=i+1 \\ o(\triangle t) & j>i+1 \end{cases}$$

所以: $$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

满足保守条件, 由向前方程得:

$$\begin{cases} \frac{dp_{ij}(t)}{dt}=(j-1)\lambda p_{i,j-1}(t)-j\lambda p_{ij}(t) \quad j>i \\ \frac{dp_{ii}(t)}{dt}=-\lambda i p_{ii}(t) \end{cases}$$

满足初始条件: $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$,

由递推得: $p_{ij}(t)=C_{j-1}^{i-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{j-i} \quad j\geq i$。

§4.4 生灭过程在排队论中的应用

排队模型是非常复杂的概率模型。排队系统总是由输入过程、排队过程及输出过程构成，这三个过程的不同情况组合成许多个模型。我们只考虑几个最简单的排队模型以说明生灭过程的应用。

在本节中，只考虑 M/M 服务系统，第一个字母 M 表示顾客按泊松过程到达，即顾客到达的时间间隔独立同分布且服从参数为 λ 的指数分布；第二个字母 M 表示每个顾客接受服务的时间长度也独立同分布且服从参数为 μ 的指数分布，并且与到达过程相互独立；假定先到先服务。

§4.4.1 M/M/1损失制

在该模型中，只有1个服务员；服务规则是当顾客来到服务系统时，若服务台已被占用，顾客立即离开系统，所以是损失制。

设 X(t) 表示 t 时刻服务系统的顾客数，X(t) 为生灭过程，状态空间 $E=\{0,1\}$，由于服务时间服从参数为 μ 的指数分布，所以：
$P\{\triangle t\text{内服务完毕}\}=P\{\text{服务时间}<\triangle t\}$
$=1-e^{-\mu\triangle t}$
$=\mu\triangle t+o(\triangle t)$，
所以 $p_{00}(\triangle t)=1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)$, $p_{01}(\triangle t)=\lambda\triangle t+o(\triangle t)$,
$P_{10}(\triangle t)=\mu\triangle t+o(\triangle t)$, $p_{11}(\triangle t)=1-\mu\triangle t+o(\triangle t)$。
从而 $Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}$,
平稳分布为： $\pi_0=\frac{\mu}{\mu+\lambda}$, $\pi_1=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$，
服务台空台的概率为： $\pi_{\text{闲}}=\pi_0=\frac{\mu}{\mu+\lambda}$，
服务台被占用（顾客损失）的概率为： $\pi_{\text{损}}=\pi_1=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$

§4.4.2 M/M/n 损失制

该模型与上一模型的不同之处在于有 n 个服务员。X_t 表示时刻 t 服务系统的顾客数，状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots n\}$，X_t为生灭过程。

$p_{i,i-1}(\triangle t)=i[\mu\triangle t+o(\triangle t)]$, $p_{i,i+1}(\triangle t)=\lambda\triangle t+o(\triangle t)$，

$p_{ii}(\triangle t)=1-(\lambda+i\mu)\triangle t+o(\triangle t)$, $p_{nn}(\triangle t)=1-n\mu\triangle t+o(\triangle t)$，

$$\text{从而}\quad Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & n\mu & -n\mu\end{bmatrix}$$

平稳分布为：$\pi_k=\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k\pi_0$, $k=1,2,\cdots,n$;
由$\sum\limits_{k=0}^{n}\pi_k=1$ 得 $\pi_0=[1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu})^k]^{-1}$。

例 4.4.1 电话总机有*3*条中继线，设电话呼叫按泊松过程到达，平均每分钟 $\lambda = 1.5$ *(次)*，通话时间服从指数分布，平均每次通话 $\frac{1}{\mu} = 2$ *(分钟)*，通话与呼叫相互独立,顾客在线路占满时,不再等待而离去。设 $X(t)$ 表示 t 时刻占用的线路数，状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}$$

由 $\lambda = \frac{3}{2}$，$\mu = \frac{1}{2}$，得平稳分布为:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{9}{26}, \frac{9}{26})$$

。电话总机空闲的概率为: $\pi_0 = \frac{1}{13}$，系统的损失率为: $\pi_3 = \frac{9}{26}$，平均通话线路数为: $\sum\limits_{k=1}^{3} k\pi_k = \frac{51}{26} \approx 2$*(条)*。

§4.4.3 M/M/1 等待制，顾客总体为无限源

在该模型中，当顾客来到系统时，若服务台已被占用，顾客就排队等待。$X(t)$ 表示 t 时刻的系统中的人数，由于顾客总体为无限源，所以状态空间为 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$$p_{i,i-1}(\triangle t) = \mu\triangle t + o(\triangle t), \quad p_{i,i+1}(\triangle t) = \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

$$p_{ii}(\triangle t) = 1 - (\lambda+\mu)\triangle t + o(\triangle t), \quad p_{00}(\triangle t) = 1 - \lambda\triangle t + o(\triangle t)$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

平稳分布：$\begin{cases} \pi_0 = [\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^k]^{-1} = 1 - \rho, \quad (\rho = \frac{\lambda}{\mu}) \\ \pi_k = (\frac{\lambda}{\mu})^k \pi_0 = \rho^k (1-\rho), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$

ρ称为系统的负荷率。如果 $\rho > 1$，则$\lambda > \mu, \pi_0 = 0$。所以一般我们假定 $\rho < 1$。在实际应用中有几个重要的指标，为了给出它们，首先，先给出 Little 公式：

当系统达到统计平稳状态后，系统内顾客的平均数 L 和系统内顾客所花费时间的平均值 ω 之间有重要关系：

$L=\lambda_e\omega$ 或 $\omega=\frac{L}{\lambda_e}$，

其中 λ_e 表示单位时间内进入的顾客数。如果有一些顾客到达时，发现排队位置已满，就不再等候而立即离去，这部分顾客在系统内花费的时间为零，我们也把这些顾客计算在内，此时，$\lambda_e=\lambda$；否则，由于顾客到达服务系统时，以概率 p 不进入系统排队，而以概率 1-p 进入系统，此时 $\lambda_e=\lambda(1-p)$。

下面给出等待系统的几个有关运行指标：

(1)系统空闲的概率和系统忙期的概率

系统空闲的概率为：$\pi_{闲}=\pi_0=1-\rho$

系统忙期的概率为：$\pi_{忙}=1-\pi_{闲}=1-\pi_0=\rho$；

(2)顾客在系统逗留的平均数 L_s

顾客在系统的逗留数，包括等待服务和正在接受服务的人数，所以：

$$L_s=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k(1-\rho)=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda};$$

(3)顾客在系统内排队等待的平均数 L_q

$$L_q=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k=L_s-(1-\pi_0)=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)};$$

(4)顾客在系统中平均逗留时间 W_s

由 Little 公式知顾客在系统中平均逗留时间等于顾客在系统内平均逗留数 L_s 除以单位时间内进入的顾客数 λ，即：

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda};$$

(5)顾客在系统中平均等待时间 W_q

由 Little 公式知顾客在系统中平均等待时间等于顾客在系统中排队等待的平均数 L_q 除以单位时间内来到的顾客数 λ，即：

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

对于 $M/M/n$ 等待制类似，这里略去。

§4.4.4 M/M/1 等待制，顾客总体为有限源

该模型中，设顾客总数为 m，X(t) 表示系统内 t 时刻的顾客总数，状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots,m\}$，此时，顾客各自独立以平均率 λ 的速度来到系统。

$$p_{00}(\triangle t)=[1-\lambda\triangle t+o(\triangle t)]^m=1-m\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$p_{01}(\triangle t)=m[\lambda t+o(\triangle t)]=m\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$p_{i,i-1}(\triangle t)=\mu\triangle t+o(\triangle t),\quad p_{i,i+1}(\triangle t)=(m-i)\lambda\triangle t+o(\triangle t),$$

$$p_{i,i}(\triangle t)=1-[\mu+(m-i)\lambda]\triangle t+o(\triangle t),$$

$$p_{m,m-1}(\triangle t)=\mu\triangle t+o(\triangle t),\quad p_{m,m}(\triangle t)=1-\mu\triangle t+o(\triangle t);$$

从而

$$Q=\begin{bmatrix} -m\lambda & m\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \mu & -[\mu+(m-1)\lambda] & (m-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \mu & -[\mu+(m-2)\lambda] & (m-2)\lambda & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

同样，我们可以给出平稳分布及其他相关指标，这里就不再评述了。

另外，我们有时还会碰到有限等待空间排队系统，即系统中能容纳顾客排队的最大数为 N，当顾客来到系统时，若排队顾客已经等于 N，则自动离去，另求服务。对该模型，我们用一个具体例子加以说明。

例 4.4.2 某加油站只有一个加油泵，最多能停放 *4* 辆汽车（包括正在加油的一辆）。设汽车到达间隔和加油时间都服从指数分布，平均每 *2* 分钟到达一辆汽车，每辆汽车加油平均需要 *2* 分钟。

令 *X(t)* 表示 *t* 时刻加油站内的汽车总数，*X(t)*为一生灭过程，状态空间为 $E=\{0,1,2,3,4\}$，该模型为 *M/M/1* 有限等待空间系统。速率

矩阵为:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$\lambda=\frac{60}{2}=30$(辆/小时)， $\mu=30$(辆/小时)

平均分布为 $(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)=(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5})$,

则: (1)来加油的汽车到达加油站时能立即加油的概率为:

$$\pi_0=\frac{1}{5}$$

(2)加油站场地有空的概率为:

$$1-\pi_4=\frac{4}{5}$$

(3)实际加油的汽车在加油站逗留的平均数为:

$$L_s=\sum_{k=1}^{4}k\pi_k=2(\text{辆})$$

(4)实际加油的汽车在加油站平均逗留的时间为:

$$2\times 2=4(\text{分钟})$$

$$\text{或 } W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{2}{30}(\text{小时})=4(\text{分钟})。$$

习 题

1.设 $\{X(n),n=0,1,2\cdots\}$是马氏链，证明

$P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2,X(3)=x_3,\cdots,X(n)=x_n\}$

$=P\{X(1)=x_1|X(2)=x_2\}$

即马氏链的逆序也构成一个马氏链。

2.如果马氏链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

证明：此马氏链不是遍历的马氏链，但具有平稳分布。

3.若明日是否降雨仅与今日是否有雨有关，而与以往的天气无关。并设今日有雨而明日有雨的概率为 0.6，今日无雨明日有雨的概率为 0.3。设 X(0) 表示今日的天气状态，X(n) 表示第 n 日的天气状态。$\{X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个齐次马氏链。

(1)写出状态转移概率矩阵；

(2)求今日有雨而后日（第 2 日）仍有雨的概率；

(3)求今日有雨而大后日（第 3 日）无雨的概率。

4.四个人（标号为 1，2，3，4 ）把一个球相互之间传递，每次有球的人等可能地把球传给其他三个人之一。以 X(0) 表示最初有球的人，X(n) 表示传递 n 次后恰好有球的人。$\{X(n), n = 0, 1, 2\cdots\}$是一个齐次马氏链。

(1)写出状态转移矩阵；

(2)计算 2 步和 3 步转移矩阵；

(3)求经过 3 次传球后有球的人恰好是第 1 次传球后有球的人的概率；

(4)求经过 3 次传球后恰好是开始拿球的人的概率。

5.A、B、C三家公司决定在某一时间推销一种新产品，当时它们各拥有 $\frac{1}{3}$ 的市场份额。然而一年后，情况发生了如下的变化：

(1)A保住 40% 的顾客，而失去 30% 给B，失去 30% 给C；

(2)B保住 30% 的顾客，而失去 60% 给A，失去 10% 给C；细(3)C保住 30% 的顾客，而失去 60% 给A，失去 10% 给B。

如果这种趋势继续下去，试问第 2 年底各公司拥有多少份额的市场？从长远来看，情况又如何？

6.在传送数字 0 和 1 的通信系统中，每个传递的数字必须经过若干级，而每一级中数字正确传递的概率为 p。设 X(0) 表示进入系统的数字，X(n) 表示离开系统第 n 级的数字。$\{X(n), n = 0, 1, 2 \cdots\}$是齐次马氏链。

(1)写出状态转移矩阵；

(2)求出 n 步转移矩阵；

(3)求极限分布。

7.设齐次马氏链$\{X(n), n = 0, 1, 2 \cdots\}$的状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$，状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(1)讨论其遍历性；

(2)求平稳分布；

(3)计算下列概率：(a) $P\{X(4) = 3|X(1) = 1, X(2) = 1\}$；
(b) $P\{X(2) = 1, X(3) = 2|X(1) = 1\}$。

8.设齐次马氏链$\{X(n), n = 0, 1, 2, \cdots\}$的状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$，状态转移矩阵

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(1)讨论其遍历性；

(2)求平稳分布；

(3)求概率 $P = \{X(4) = 3|X(1) = 1, X(2) = 2\}$

(4)求 (a) $P\{X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3\}$；

(b) $X(2)$ 的分布律。

其中 X(1) 的分布列如右表所示。

X(1)	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

9.设齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，状态转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(1)讨论各状态性质；

(2)分解状态空间。

10.齐次马氏链$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为 $p_{00}=\frac{1}{2}, p_{i,i+1}=\frac{1}{2}, p_{i0}=\frac{1}{2}, i\in E$。试讨论该马氏链各状态的性质。

11.某电话总机有 2 条中继线。设电话呼叫按平均率为 λ 的泊松过程到达，平均每分钟有 2 次呼叫；通话时间服从参数为 μ 的指数分布，每次平均通话 3 分钟；呼叫和通话相互独立。若顾客发觉线路占满就不等待而离去。设 X(t) 表示时刻 t 时通话的线路数，X(t) 为一生灭过程。写出状态转移速度矩阵并求平稳分布。

12.一个电路供给 3 个电焊工，如果一个电焊工在 t 时刻正在用电，在 $(t, t+\triangle t)$ 内他将停止用电的概率为 $\mu\triangle t+o(\triangle t)$；如果一个电焊工在 t 时刻没有用电，在 $(t, t+\triangle t)$ 内他将需要电的概率是 $\lambda\triangle t+o(\triangle t)$。焊工们独立地工作，设 X(t) 表示 t 时刻用电的焊工数，X(t) 为一生灭过程。写出状态转移速度矩阵并求平稳分布。

13.假定有 3 台机器由一个工人修理，每台机器出故障是独立的，出故障的时间服从平均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布，只要一台机器出故障，修理工

就应开始修理它，除非他正忙于修理另外的机器，修理时间服从平均值为 $\frac{1}{\mu}$ 的指数分布。设 X(t) 表示时刻 t 出故障的机器数，X(t) 是一个生灭过程。写出状态转移速度矩阵并求平稳分布。

14.某医院的外科换药处有两位护士，换药者以泊松过程到达，平均每小时有 20 位病人来换药，换药时间服从指数分布，每位病人的换药时间平均为 5 分钟。设 X(t) 表示时刻 t 时来到外科换药处的换药者人数，X(t) 为一生灭过程，试求系统各运行指标。

15.设有三个盒子装有红白两种颜色球，装球情况如下：甲盒（90 个红球，10 个白球）；乙盒（红球与白球各 50 个）；丙盒（40 个红球，60 个白球）。对三个盒子分别反复地做如下的抽取：对甲盒，随机抽取一球，记下它的颜色，产然后重新放回一个与它不同颜色的球；对乙盒，随机抽取后记下颜色再放回；对丙盒，抽取后只记颜色不放回，然后放进一个红球。现在某人随机选中一盒，在此盒中按相应的方法得到了一个如下记录（红，红，红，红，白），则他最可能选取的是哪一盒?（隐马氏链用作模式识别）.

16. 证明对称随机游动在二维时是常返的，而在三维时却是非常返的。

第五章　鞅过程

§5.1　定义与举例

鞅过程创立于20世纪30年代末致50年代初Doob 和Levy 的工作，它是一类应用非常广泛的随机过程。下面通过一个例子引出鞅过程的定义。

例 5.1.1 设某人赌博，其初始赌资为Z_0 元，每局赌赢的概率为p, 赌输的概率为$q = 1 - p$, 且第k局下的赌注: A_k 根据前面$k-1$局的输赢情况来确定。问此人第n 局后的平均所得是多少？

设$Z_k = 1$ 表示第k局赢，$Z_k = 0$ 表示第k 局输，X_n 表示第n 局后的累积所得，则有

$$X_n = Z_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k Z_k = X_{n-1} + A_n Z_n$$

设$\mathfrak{F}_n = \sigma\{Z_k, 1 \le k \le n\}$. 因此，条件期望

$$E(X_n|\mathfrak{F}_{n-1}) = X_{n-1} + A_n E(Z_n|\mathfrak{F}_{n-1}) = X_{n-1} + A_n E(Z_n) = Y_{n-1} + (p-q)A_n$$

由此可知，当$p = q$ 时，$E(X_n|\mathfrak{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, 即，此人在任意$n$ 局赌博后，不赢不输。此种情况可称为公平赌博，这样的随机过程$\{X_n, n \ge 0\}$ 称为鞅过程。而当$p > q$ 或$p < q$, 分别对应于下鞅和上鞅过程。

下面给出鞅（上鞅、下鞅）过程的严格定义。

定义 5.1.2 设T 为一个有序整数或实数集合。称随机过程$\{X_t, t \in T\}$ 是关于$\{\mathfrak{F}_s, s \in T\}$ 的鞅(上鞅，下鞅) 过程，如果对任意$t > s, t, s \in T$ 有

$$\begin{aligned} &(1) \qquad E(|X_t|) < \infty \\ &(2) \qquad E(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s \ (\le X_s, \ge X_s). \end{aligned}$$

由定义可知, 对任意的$t > s, t, s \in T$ 有: $E(X_t) = E(X_s)$. 下面举几个鞅过程的例子。

例 5.1.3 独立随机变量的和

设$\{Z_k, k \geq 1\}$ 独立同分布，记$X_n = \sum_{k=1}^n (Z_k - E(Z_k)), Y_n = \sum_{k=1}^n [(Z_k - E(Z_k))^2 - D(Z_1)]$，则$\{X_n, n \geq 1\}$ 和$\{Y_n, n \geq 1\}$ 都是关于$\{\mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ 的鞅过程。

例 5.1.4 基于*Poisson* 过程的鞅过程

设$\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为λ 的Poisson 过程，则随机过程$X(t) = N(t) - \lambda t$, $t \geq 0$, 和$Y(t) = X(t)^2 - \lambda t$, $t \geq 0$, 以及$Z(t) = \exp\{-aX(t) + \lambda t(1 - e^{-a})\}$, $t \geq 0$ 都是关于$\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ 的鞅过程, 其中a 为任意给定的实数。

例 5.1.5 *Doob* 鞅过程

设随机变量X 满足$E(|X|) < \infty$, 则随机过程$X(t) = E(X|\mathfrak{F}_t)$, $t \geq 0$, 是关于$\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ 的鞅过程。此过程称为Doob 鞅过程。

例 5.1.6 由转移概率特征向量导出的鞅过程

设$P = (p_{ij})$ 是Markov 链$\{Z_k, k \geq 0\}$ 的转移概率矩阵，向量$F = (f(k), k \geq 0)$ 和实数$\lambda \neq 0$ 分别是P 的右特征向量和特征值，即

$$\lambda f(i) = \sum_{j \in E} p_{ij} f(j), \ \ i \in E,$$

且$\sum_{j \in E} |f(j)| < \infty, E(|f(Z_n)|) < \infty$。则随机过程$X_n = \lambda^{-n} f(Z_n), n \geq 0$, 是关于$\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ 的鞅过程。

例 5.1.7 *Wald* 鞅过程

设$\{Z_k, k \geq 1\}$ 独立同分布，$Z_0 = 0$, 且存在$\lambda \neq 0$ 使得矩生成函数$\phi(\lambda) = E(e^{\lambda Z_1})$ 有限。则随机过程$X_n = \phi^{-n} \exp\{\sum_{k=1}^n Z_k\}, n \geq 1, X_0 = 1$, 是关于$\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ 的鞅过程。这类过程称为Wald 鞅过程。

§5.2 离散时间参数的上（下）鞅分解定理

定理 5.2.1 对于任何下鞅(或上鞅)过程$\{X_k, k \geq 1\}$, 必存在鞅过程$M_n, n \geq 1$ 和单调增过程$Z_n, n \geq 1$, 使得

$$X_n = M_n + Z_n \,(X_n = M_n - Z_n),\ n \geq 1$$

成立, 且此分解式唯一, 其中Z_n 是关于$\{\mathfrak{F}_{n-1}$可测的, 且$Z_1 = 0, E(Z_n) < \infty$。

证明 令

$$M_n = X_n - \sum_{k=1}^{n}[E(X_k - X_{k-1}|\mathfrak{F}_{k-1})],\ n \geq 1.$$

则容易验证$M_n, n \geq 1$, 是个鞅过程，$Z_n = \sum_{k=1}^{n}[E(X_k - X_{k-1}|\mathfrak{F}_{k-1})], n \geq 1$, 是个单调增过程，从而$X_n = M_n + Z_n \,(X_n = M_n - Z_n)$。

下证唯一性。设有另一满足定理要求的分解$X_n = M_n' + Z_n'$. 令$\Delta_n = M_n' - M_n = Z_n - Z_n'$, 则有

$$E(\Delta_n|\mathfrak{F}_{n-1}) = \Delta_{n-1},\ E(\Delta_n|\mathfrak{F}_{n-1}) = \Delta_n$$

从而$\Delta_n = \Delta_{n-1} = ... = \Delta_0 = Z_1' - Z_1 = 0.$ ■

§5.3 鞅定时定理

首先给出停时的定义。

定义 5.3.1 若τ 是一个关于$\mathfrak{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ 可测的非负随机变量, 即, $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$, 则称$\tau$ 是关于$\{X_s, s \geq 0\}$ 的停时。

定理 5.3.2 设$\{X_t, t \geq 0\}$ 是个鞅过程, τ 是停时。若$P(\tau < \infty) = 1$ 且$E(\sup_{t\geq 0}|X_{\tau\wedge t}|) < \infty$, 则有$E(X_\tau) = E(X_0)$.

证明 下面只给出离散时间情形的证明，连续时间参数的情形可类似地证

明。由$I_{\{\tau<n\}}+I_{\{\tau\geq n\}}=1$, 可得

$$\begin{aligned} E(X_{\tau\wedge n}) &= E(X_{\tau\wedge n}(\sum_{k=0}^{n-1} I_{\tau=k}+I_{\tau\geq n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E(X_{\tau\wedge n}I_{\tau=k}+E(X_{\tau\wedge n}I_{\tau\geq n\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E(X_k I_{\tau=k}+E(X_n I_{\tau\geq n\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E(X_n I_{\tau=k}+E(X_n I_{\tau\geq n\})=E(X_n).} \end{aligned}$$

另一方面，

$$E(|X_\tau|)=E(|\sum_{k=0}^{\infty} X_{\tau\wedge k}I_{\tau=k}|)\leq E(\sup_{t\geq 0}|X_{\tau\wedge t}|)<\infty$$

并且

$$|E(X_{\tau\wedge n})-E(X_\tau)|=|E(X_{\tau\wedge n}-X_\tau)I_{\tau>n}|\leq 2E(\sup_{t\geq 0}|X_{\tau\wedge t}|I_{\tau>n}).$$

再由控制收敛定理可知$\lim_{n\to\infty}E(|X_\tau|I_{\tau>n})=0$. 因此，

$$E(X_0)=E(X_n)=\lim_{n\to\infty}E(X_n)=\lim_{n\to\infty}E(X_{\tau\wedge n})=E(X_\tau).$$

■

下面介绍一个应用停时定理的例子。

例 5.3.3 设甲乙两人赌博，每局各下赌注*1*元。已知甲有资金a 元，乙有资金b 元。用$Z_k=1$ 或-1 分别表示甲第k 局赢*1* 元或输*1* 元，$X_n=\sum_{k=1}^n Z_k$ 表示第n 局后甲赢得或输掉的资金，这里假设: $Z_0=0, X_0=0$。记$P(Z_k=1)=p, P(Z_k=-1)=q=1-p$, $k\geq 1$. 问甲先输光的概率是多少？甲乙任何一方输光所需的平均时间是多少？

设P_a 表示甲先输光的概率，T 表示甲乙任何一方输光所需的时间，即

$$T=\min\{n: X_n=-a\ \text{或} X_n=b\}.$$

现考虑两种情形。

（1）设$p=q$. 此时$X_n, n\ge 0$, 是个鞅过程。由停时定理可得

$$0=E(X_0)=E(X_T)=-aP_a+b(1-P_a)$$

从而，

$$P_a=\frac{b}{a+b}.$$

由于$(X_n)^2-n, n\ge 0$, 也是鞅过程，于是

$$0=E(X_0)^2-0=E(X_T)^2-E(T),\quad E(T)=E(X_T)^2=a^2P_a+b^2(1-P_a)=ab.$$

(2) 设$p\neq q$, 不妨设$p>q$. 此时$X_n-(p-q)n, n\ge 1$, 是个鞅过程。由停时定理可得

$$0=E(X_0)-0=E(X_T)-(p-q)E(T),\quad E(T)=E(X_T)/(p-q)=(b-(a+b)P_a)/(p-q).$$

下面求P_a. 设$W_n=(\frac{q}{p})^{X_n}$, 可以验证$W_n, n\ge 0$, 是个鞅过程。因此, 由停时定理可得

$$1=E(W_0)=E(W_T)=(\frac{q}{p})^aP_a+(\frac{q}{p})^b(1-P_a)$$

从而

$$P_a=\frac{1-(\frac{q}{p})^b}{(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^b}$$

并且

$$E(T)=\frac{b}{p-q}-\frac{a+b}{p-q}\frac{[1-(\frac{q}{p})^b]}{[(\frac{q}{p})^a-(\frac{q}{p})^b]}.$$

§5.4 鞅收敛定理

对于一个鞅过程$\{X_t, t\ge 0\}$, 当$t\to\infty$ 时，X_t 的极限在什么意义下存在？为了给出鞅收敛定理，下面我们先介绍Doob 上穿不等式。

引理 5.4.1 *(上穿不等式）*设$\{X_n, n\ge 0\}$ 是个鞅或下鞅过程，$C^{(n)}(a,b)$ 表示$\{X_k, 0\le k\le n\}$ 上穿区间(a,b) 的次数，则有

$$E(C^{(n)}(a,b))\le\frac{E(X_n^+)+|a|}{b-a}$$

证明 设

$$\alpha_{2k-1} = \min\{n : n \geq \alpha_{2k-2}, X_n \leq a\}, \ \ \alpha_{2k} = \min\{n : n \geq \alpha_{2k-1}, X_n \geq b\}.$$

并定义新的随机变量序列$\{Y_k, k \geq 1\}$, 其满足

$$\{Y_k = 1\} = \cup_{i=1}^{\infty}\{\alpha_{2i-1} < k \leq \alpha_{2i}\}, \quad \{Y_k = 0\} = \cup_{i=0}^{\infty}\{\alpha_{2i} < k \leq \alpha_{2i+1}\}$$

并且$\{Y_k = 1\} \in \mathfrak{F}_{k-1}$. 记$\tilde{X}_k = (X_k - a)^+$. 由于$\tilde{X}_{2k-1} \leq 0$, $\tilde{X}_{\beta_{2k}} \geq (b-a)$, 从而

$$\begin{aligned}
&E(X_n^+) + |a| \geq E(\tilde{X}_n - \tilde{X}_0) = \sum_{k=1}^{n} E(\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} E(E(\tilde{X}_k|\mathfrak{F}_{k-1}) - \tilde{X}_{k-1}) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} E(Y_k[E(\tilde{X}_k|\mathfrak{F}_{k-1}) - \tilde{X}_{k-1}]) = \sum_{k=1}^{n} E(E[(\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1})Y_k|\mathfrak{F}_{k-1}]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[(\tilde{X}_k - \tilde{X}_{k-1})Y_k] = E[\sum_{m=1}^{C^{(n)}(a,b)} (\tilde{X}_{\beta_{2m}} - \tilde{X}_{\beta_{2m-1}})] \geq (b-a)E(C^{(n)}(a,b)).
\end{aligned}$$

■

定理 5.4.2 设$\{X_t, t \geq 0\}$ 是个鞅或下鞅过程，$\sup_{t\geq 0} E|X_t| < \infty$. 则存在一随机变量$X_\infty$, 使得

$$P(\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty) = 1$$

且$E|X_\infty| < \infty$.

证明 任取定$0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < ..., \lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. 由于

$$E(C(a,b)) = \lim_{n\to\infty} E(C^{(t_n)}(a,b)) < \infty$$

因此，$P(C(a,b) < \infty) = 1$. 从而

$$\begin{aligned}
& P(\underline{\lim}_{n\to\infty} X_{t_n} < \overline{\lim}_{n\to\infty} X_{t_n}) \\
= \ & P(\bigcup_{a<b,\text{且为有理数}} \underline{\lim}_{n\to\infty} X_{t_n} < a < b < \overline{\lim}_{n\to\infty} X_{t_n}) \\
= \ & P(\bigcup_{a<b,\text{且为有理数}} C(a,b) = \infty) \leq \sum_{a<b,\text{且为有理数}} P(C(a,b) = \infty) = 0.
\end{aligned}$$

此说明X_{t_n} 的极限几乎处处存在，设其极限为X_∞. 再由控制收敛定理即可得

$$E(|X_\infty|)=\lim_{n\to\infty}E(|X_{t_n}|)\le\sup_{t\ge 0}E|X_t|<\infty$$

由$\{t_k,k\ge 1\}$ 的任意性，定理的结论对连续时间参数也成立。特列是，当$\{X_t,t\ge 0\}$ 为鞅过程时，我们有$E(X_\infty)=E(X_0)$. ■

§5.5 鞅的尾部不等式

下面将介绍鞅的尾部不等式，也就是Azuma-Hoeffding 不等式。它在很多学科领域都有应用。

定理 5.5.1 *(Azumma-Hoeffding 不等式)* 设$\{X_n,n\ge 0\}$ 是一个鞅过程。若$|X_k-X_{k-1}|\le c_k$, 则对所有的$n\ge 0$ 和任意的$\lambda>0$, 有

$$P(|X_n-X_0|\ge\lambda)\le 2e^{-\lambda^2/(2\sum_{k=1}^n c_k^2)}.$$

证明 令$Y_k=X_k-X_{k-1}$. 由于

$$Y_k=-c_k\frac{1-Y_k/c_k}{2}+c_k\frac{1+Y_k/c_k}{2}$$

再由$e^{\alpha Y_k}$ 的凸性可得

$$e^{\alpha Y_k}\le e^{-\alpha c_k}\frac{1-Y_k/c_k}{2}+e^{\alpha c_k}\frac{1+Y_k/c_k}{2}=\frac{e^{-\alpha c_k}+e^{\alpha c_k}}{2}+\frac{Y_k}{2c_k}(e^{\alpha c_k}-e^{-\alpha c_k})$$

注意到$\frac{e^{-\alpha c_k}+e^{\alpha c_k}}{2}\le e^{(\alpha c_k)^2/2}$ 而且$E(Y_k|X_{k-1},X_{k-2},...,X_0)=0$, 于是

$$E(e^{\alpha Y_k}|X_{k-1},X_{k-2},...,X_0)\le e^{(\alpha c_k)^2/2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}E(e^{\alpha(X_n-X_0)}) &= E(\prod_{k=1}^n e^{\alpha Y_k})=E(E(\prod_{k=1}^n e^{\alpha Y_k}|X_{n-1},X_{n-2},...,X_0))\\ &\le e^{(\alpha c_n)^2/2}E(\prod_{k=1}^{n-1}e^{\alpha Y_k})\le e^{\alpha^2\sum_{k=1}^n c_k^2/2}\end{aligned}$$

再由切比雪夫不等式，我们有

$$P(X_n - X_0 \geq \lambda) \leq e^{-\lambda\alpha} E(e^{\alpha(X_n - X_0)}) = e^{\alpha^2 \sum_{k=1}^n c_k^2/2 - \lambda\alpha}$$

最后只要取$\alpha = \lambda/(\sum_{k=1}^n c_k^2)$, 即可得

$$P(X_n - X_0 \geq \lambda) \leq e^{-\lambda^2/(2\sum_{k=1}^n c_k^2)}.$$

类似的证明(只需将X_k 换成$-X_k$ ）可给出$P(X_n - X_0 \leq -\lambda)$ 的、且与上述相同的上界。■

下面举一个应用Azuma-Hoeffding 不等式的例子。

例 5.5.2 *(Albter-Barabasi 无标度随机演化网络模型)* 设$X_n = (x_{ij}(n))$ 表示n 时刻*Albter-Barabasi* 网络，其中$(x_{ij}(n))$ 是邻接矩阵，$x_{ij}(n) = 1$ 表示节点i 与节点j 有一条连边，否则没有连边。设初始时刻$(n = 0)$ 网络X_0 由两个点（分别标号为1 和2 ）和一条连边组成。$n(n \geq 1)$ 时刻的网络X_n 是由$n-1$ 时刻的网络X_{n-1} 通过增加一个点和一条边演变而来，其演化规则是: n 时刻增加一个标号为$n+2$ 的新节点，并以概率$d_i(n-1)/\sum_{k=1}^{n+1} d_k(n-1)$ 连一条边到网络X_{n-1} 中的节点i ，其中，$d_i(n-1)$ 表示网络X_{n-1} 中节点i 的度，即连接节点i 的边数。这是一个随机增长的演化网络，也可把它看成是一个网络随机过程，即，$\{X_n, n \geq 0\}$. 问，当$n \to \infty$ 时，这个网络的度分布（度的概率分布）是多少？即，$\lim_{n\to\infty} N_k(n)/(n+2) =?$, 其中$N_k(n)$ 表示网络X_n 中度为k 的点的总数。

首先由

$$E(N_1(n+1) - N_1(n)) = 1 - \frac{N_1(n)}{2(n+1)}$$
$$E(N_k(n+1) - N_k(n)) = \frac{(k-1)N_{k-1}(n)}{2(n+1)} - \frac{kN_k(n)}{2(n+1)}$$

可递推得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(N_k(n))}{n+1} = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 1.$$

另一方面，令$Z_m(k,n) = E(N_k(n)|\mathfrak{F}_m)$, 则对每个$k$ $(1 \leq k \leq n)$, $Z_m(k,n), 0 \leq m \leq n$, 是个Doob 鞅，并且可验证

$$\begin{aligned} Z_m(k,n) - Z_{m-1}(k,n) &= (1 - \frac{k}{2n})[Z_m(k,n-1) - Z_{m-1}(k,n-1)] \\ &+ \frac{k-1}{2n}[Z_m(k-1,n-1) - Z_{m-1}(k-1,n-1)] \end{aligned}$$

其中，$\mathfrak{F}_m = \sigma\{X_j, 0 \le j \le m\}$. 由此可递推得: 对每个$k$ 和n $(1 \le k \le n)$,

$$|Z_m(k,n) - Z_{m-1}(k,n)| \le 1, \quad 0 \le m \le n.$$

再利用Azuma-Hoeffding 不等式，对任意的$\varepsilon > 0$, 我们有

$$P(|N_k(n) - E(N_k(n))| \ge \varepsilon n) = P(|Z_n(k,n) - Z_0(k,n)| \ge \varepsilon n) \le 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2}}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{N_k(n)}{n} - \frac{E(N_k(n))}{n}| \ge \varepsilon) < \infty.$$

此说明

$$P(\lim_{n\to\infty}[\frac{N_k(n)}{n} - \frac{E(N_k(n))}{n}] = 0) = 1$$

即有

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{N_k(n)}{n} = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}) = 1$$

令

$$P_k = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \ge 1$$

注意到$\sum_{k=1}^{\infty} P_k = 1$, 因此$P_k, k \ge 1$ 就是我们要求的Albter-Barabasi 无标度随机演化网络的度分布。

习 题

5.1 设$Y_0 = 0, \{Y_n, n \geqslant 1\}$独立同分布.

(1) 若$EY_n = 0, EY_n^2 = \sigma^2$.令

$$X_0 = 0, X_n = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 - n\sigma^2.$$

证明$\{X_n, n \geqslant 0\}$关于$\{Y_n, n \geqslant 0\}$是鞅.

(2) 若$Y_n \sim N(0,\sigma^2), X_n = \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n} Y_k - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\}, n \geqslant 1, X_0 = 0$.证明$\{X_n, n \geqslant 0\}$关于$\{Y_n, n \geqslant 0\}$是鞅.

5.2 设随机变量序列$\{X_n, n \geqslant 0\}$,满足$E|X_n| < \infty$,且

$$E[X_{n+1} \mid X_0, X_1, \cdots, X_n] = \alpha X_n + \beta X_{n-1}, n > 0, \beta, \alpha > 0, \alpha + \beta = 1.$$

令$Y_n a X_n + X_{n-1}, n \geqslant 1, Y_0 = X_0$.试选择合适的$a$使得$\{Y_n, n \geqslant 0\}$关于$\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是鞅.

5.3 设$\{X_n, n \geqslant 0\}$关于$\{X_n, n \geqslant 0\}$是鞅.证明对任何整数集$k \leqslant l < m, X_m - X_l$与$X_k$不相关，即$E[(X_m - X_l)X_k] = 0$.

5.4 设$\{X_n, n \geqslant 0\}$是鞅，而$\{\xi_i, i \geqslant 0\}$由下式部分和确定，$X_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$. 试证$\forall j \neq i, E(\xi_i \xi_j) = 0$.

5.5 设$\{X_n, n \geqslant 0\}$关于$\{Y_n, n \geqslant 0\}$是鞅，c是任意常数.

(1) 若$E|X_n \vee c| < \infty$,则$\{X_n \vee c, n \geqslant 0\}$是下鞅;

(2) 若$EX_n^+ < \infty$,则$\{X_n^+, n \geqslant 0\}$是下鞅.

5.6 设Y_0服从$(0,1)$上的均匀分布，且给定Y_n时，Y_{n+1}是$(1 - Y_n, 1]$ 上的均匀分布.令$X_0 = Y_0$,

$$X_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{1 - Y_k}{Y_{k-1}} \right], \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证明$\{X_n, n \geqslant 0\}$关于$\{Y_n, n \geqslant 0\}$是鞅.

5.7 设$\{X_n, n \geqslant 0\}$为马尔可夫链，$S = \{0, 1, 2, \cdots\}, p_{ij} = 1/[e(j - i)!], i \in S, j \geqslant i$.试证$\{Y_n = X_n - n, n \geqslant 0\}, \{U_n = Y_n^2 - n, n \geqslant 0\}$及$\{V_n = \exp(X_n - n(e - 1)), n \geqslant 0\}$ 是鞅.

5.8 设$\{U_n\}, \{V_n\}$关于$\{Y_n\}$是鞅，$U_0 = V_0 = 0, EU_n^2 < \infty$.证明：

$$E(U_n V_n) = \sum_{k=1}^{n} E[(U_k - U_{k-1})(V_k - V_{k-1})],$$

$$EU_n^2 = \sum_{k=1}^{n} E[(U_k - U_{k-1})^2].$$

5.9 设$\{X_n\}$对于固定的$\lambda > 0$,满足

$$\forall n \geqslant 1, E\{\exp(\lambda X_{n+1}) \mid X_1, \cdots, X_n\} \leqslant 1.$$

令$S_0=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.证明：

$$P(\sup_{n\geqslant 0}(x+S_n)>l)\leqslant e^{-\lambda(l-x)}, x\leqslant l.$$

（提示：对非负上鞅$\{\exp(-\lambda(l-x-S_n))\}$利用停时定理.

第六章 布朗运动

Brown运动首先由英国生物学家R.Brown于1827年根据观察花粉微粒在液面上作”无规则运动“的物理现象而提出的，Einstein于1905年首次对这一现象的物理规律给出了一种数学描述，1918年，Wiener对这一现象在理论上给出了精确的数学描述，并进一步研究了Brown运动轨道的性质，提出了在Brown运动空间上定义测度和积分。

§6.1 随机游动与Brown运动的定义

例 6.1.1 (随机游动) 经过Δt时间，随机的以概率$p = frac12$向右移动$\Delta x > 0$，以概率$q = frac12$向左移$\Delta x > 0$，且每次移动相互独立。记

$$X_i = \begin{cases} 1, & 第i次质点向右移动 \\ -1, & 第i次质点向左移动 \end{cases}$$

则有$X(t) = \Delta x X_1 + \Delta x X_2 + \cdots + \Delta x X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor}$
$EX_i = 0$，$DX_i = E{X_i}^2 = 1$
因而$EX(t) = 0$，$D(X(t)) = (\Delta x)^2 \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$

若取$\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$，$D(X(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} c^2 \Delta t \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor = c^2 t$

$$\lim_{\Delta t \to 0} P(\frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor} \Delta x X_i - 0}{\sqrt{c^2 t}} \leq x) = \Phi(x)$$

等价于

$$\lim_{\Delta t \to 0} P(\frac{X(t)}{\sqrt{c^2 t}} \leq x) = \Phi(x)$$

当$\Delta t \to 0$时，$X(t) \sim N(0, c^2 t)$

定义 6.1.2 若一个随机过程$\{X(t), t \geq 0\}$，满足

- $X(t)$是独立增量过程;

- $\forall s,t>0, X(s+t)-X(s)\sim N(0,c^2t)$，即$X(t+s)-X(s)$是期望为$0$，方差为$c^2t$的正态分布;
- $X(t)$关于t是连续函数。

则称$\{X(t),\, t\geq 0\}$是$Brown$运动或$Wiener$过程。当$c=1$ 时，称$\{X(t),\, t\geq 0\}$是标准的$Brown$运动。

§6.2 布朗运动的基本性质

下面讨论的$\{B(t),\, t\geq 0\}$为标准Brown运动，且$B(0)=0$，

§6.2.1 Brown运动的联合概率密度

定理 6.2.1 令$x_0=0, t_0=0$,则对$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(B(t_1),\cdots,B(t_n))$的联合概率密度函数，

$$\begin{aligned} g(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) &= \prod_{i=1}^n p(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} exp(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}) \end{aligned}$$

证明 令$Y_1=B(t_1), Y_i=B(t_i)-B(t_{i-1}), 1\leq i\leq n$. 由于Brown运动的独立增量性得$Y_1,\cdots,Y_n$独立，且$Y_i\sim N(0,t_i-t_{i-1})$,则其联合密度函数为

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} e^{-\frac{y_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}}$$

由于$B(t_i)=\sum_{k=1}^i Y_k$，则$(B(t_1),\cdots,B(t_n))$的联合概率密度函数为

$$g(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_n)=f(y_1,\cdots,y_n)|J|,$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |J|=1.$$

故

$$\begin{aligned} g(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) &= \prod_{i=1}^n p(x_i-x_{i-1},t_i-t_{i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} exp(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}) \end{aligned}$$

■

§6.2.2 Brown运动与时齐马氏过程

$B(t_n)$在给定$B(t_1),\cdots,B(t_n)$条件下的条件密度为

$$\begin{aligned} g(x_n|x_1,\cdots,x_{n-1}) &= \frac{g(x_1,\cdots,x_n)}{g(x_1,\cdots,x_{n-1})} = P(x_n-x_{n-1},t_n-t_{n-1}) \\ &= g(x_n|x_{n-1}) = \frac{g(x_{n-1},x_n)}{g(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

此说明Brown运动是时齐的马氏过程，并且其转移概率函数$P(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-x^2}{2t}}$满足如下的偏微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2 P}{2\partial x^2}$$

§6.2.3 Brown运动与正态过程

定义 6.2.2 (正态过程) 如果随机过程$\{X(t),t\in T\}$对$t_i\in T(i=1,2,\cdots,n)$，$X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的联合分布为$n$维正态分布，则称$\{X(t),t\in T\}$为正态过程。

定理 6.2.3 设$\{B(t),\, t\geq o\}$为正态过程，轨道连续,$B(0)=0$。则$\{B(t),\, t\geq o\}$是$Brown$运动的充要条件为$\forall s,t>0,\ E(B(s)B(t))=t\bigwedge s, E(B(t))=0$

证明 由正态过程和$E(B(s)B(t))=t\bigwedge s, E(B(t)=0$知

$$E[B(t)-B(s)]=E(B(t))-E(B(s))=0$$

$$E(B(t)-B(s))^2=|t-s|$$

$$E[(B(t_1)-B(s_1))(B(t_2)-B(s_2))]=0\,(t_2>s_2\geq t_1>s_1)$$

再由不相关与独立性等价得，$B(t)$为独立增量过程，且

$$B(t)-B(s)\sim N(0,|t-s|).$$

■

定理 6.2.4 设$\{B(t), t \geq 0\}$是$Brown$运动，则

(1) $\{B(t+\tau)-B(\tau), t \geq 0\}, \forall \tau \geq 0;$

(2) $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B(\lambda t), t \geq 0\}, \lambda > 0;$

(3) $\{tB(\frac{1}{t}), t \geq 0\}, tB(\frac{1}{t})|_{t=0} \triangleq 0;$

(4) $\{B(t_0+s)-b(t_0), 0 \leq s \leq t_0\}, t_0 > 0.$

仍为$Brown$运动

§6.2.4 Brown运动的鞅性

定理 6.2.5 设$\{B(t), t \geq 0\}$是$Brown$运动,则

$$\{B(t),\, t \geq 0\}, \quad \{B^2(t)-t,\, t \geq 0\}$$

$$\{e^{\lambda B(t)-\frac{1}{2}\lambda^2 t},\, t \geq 0\}, \quad \{e^{i\lambda B(t)+\frac{1}{2}\lambda^2 t},\, t \geq 0\}$$

都是鞅。

§6.2.5 布朗运动的σ-域流

设$B=\{B_t;\ t \geq 0\}$ 为标准的布朗运动，令

$$\mathscr{F}_t^B := \sigma\{B_s;\ s \leq t\},$$

$\mathbb{F}^B=\{\mathscr{F}_t^B;\ t \geq 0\}$为右连续、单增的$\sigma$一代数流。我们称$\mathbb{F}^B$为**布朗运动$B$产生的自然$\sigma$-流**，简称**布朗流**。易知

性质 6.2.6 设$B=\{B_t;\ t \geq 0\}$ 为布朗运动，$\mathbb{F}^B$是相应的布朗流，则

1) B关于$\mathbb{F}^B$适应：对任意时刻t，B_t关于$\mathscr{F}_t^B$-可测;

2) B关于$\mathbb{F}$为鞅：任意给定$0<s<t<\infty$, $E[B_t|\mathscr{F}_s^B]=B_s;$

3) 任意给定$0<s<t<\infty$, $E[(B_t-B_s)^2|\mathscr{F}_s^B]=t-s$.

定义 6.2.7 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t;\ t \geq 0\}$为一个右连续单增的$\sigma$-域流，$B=\{B_t;\ t \geq 0\}$为关于$\mathbb{F}$-适应的过程。$B$称为**关于$(P,\mathbb{F})$的标准布朗运动**，如果$B$满足$B_0=0$，对任意$0 \leq s < t$，$B_t-B_s$与$\mathscr{F}_s$独立且$B_t-B_s \sim N(0, t-s)$。

定理 6.2.8 (Lévy) 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t;\ t \geq 0\}$为一个右连续单增的$\sigma$-域流，$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$为满足$B_0 = 0$的、连续的平方可积鞅，则$B$关于$(P, \mathbb{F})$的布朗运动的充要条件是对任意$0 \leq s < t$有

$$E[(B_t - B_s)^2 | \mathscr{F}_s] = (t-s)^2 \ .$$

推论 6.2.9 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t;\ t \geq 0\}$为一个右连续单增的$\sigma$-域流，$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$关于$(P, \mathbb{F})$的布朗运动，则$\{B_t^2 - t;\ t \geq 0\}$关于$(P, \mathbb{F})$为鞅。

§6.3 反射原理与首达时的分布

设$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$为标准布朗运动，a为任意实数，则称

$$\tau_a := \inf t :\ t > 0, B_t = a$$

为布朗运动B首次达到a的**首达时**。这一节，我们主要讨论τ_a的分布。

利用布朗运动的对称性，我们有如下反射原理（如图）

引理 6.3.1 (反射原理) 设$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$为标准布朗运动，$a > 0$，则

$$P(B_t \geq a | \tau_a \leq t) = P(B_t < a | \tau_a \leq t) = \frac{1}{2}.$$

我们现在来求τ_a的分布。由$\{B_t \geq a\} \subset \{\tau_a \leq t\}$知$P(B_t \geq a | \tau_a > t) = 0$，由反射原理有

$$\begin{aligned} P(B_t \geq a) \ &= P(\tau_a \leq t) P(B_t \geq a | \tau_a \leq t) + P(\tau_a > t) P(B_t \geq a | \tau_a > t) \\ &= \frac{1}{2} P(\tau_a \leq t), \end{aligned}$$

从而，

$$P(\tau_a \leq t) = 2P(B_t \geq a) = 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

对于$a < 0$，利用布朗运动的对称性知，$P(\tau_a \leq t) = P(\tau_{-a} \leq t)$, 于是我们得到如下性质：

性质 6.3.2 设$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$为标准布朗运动，a为任意常数，则τ_a的分布函数$F_{\tau_a}(t)$为

$$F_{\tau_a}(t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right),$$

密度函数为

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}}.$$

推论 6.3.3 设$B = \{B_t;\ t \geq 0\}$为标准布朗运动，任意固定$t > 0$，令$B_t^* = \max\limits_{u \in [0,t]} B_u$，则$B_t^*$的分布为

$$F_{B_t^*}(a) = \begin{cases} 1 - 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right), & a > 0, \\ 0, & a \leq 0\,. \end{cases}$$

证明 易知$B_t^* \geq 0$，当$a > 0$时，易知

$$\{\tau_a \leq t\} = \{B_t^* \geq a\},$$

由性质**??**知命题成立。■

§6.4 布朗运动的轨道性质

在这一节中，我们用Δ表示区间$[0,t]$的一个划分：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$; 记$|\Delta| = \sup\limits_i |t_{i+1} - t_i|$为划分$\Delta$的模。我们考虑如下和式

$$S_t^\Delta = \sum_i \left| A_{t_{i+1}} - A_{t_i} \right| \ .$$

定义 6.4.1 设$A = \{A_t;\ t \geq 0\}$一个函数（或随机过程）,令

$$S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta,$$

如果$\lim_{t\to\infty} S_t < +\infty,\ a.s.$，则称$A$为是**有界变差**函数（或过程）。称函数（或过程）$\{S_t;\ t \geq 0\}$为A的**一阶变差**。

例 6.4.2 任何C^1-函数为有界变差函数。

例 6.4.3 任何有界单调函数为有界变差函数。

性质 6.4.4 任何有界变差函数一定为两个单增函数之差。

定义 6.4.5 设$X=\{X_t;\ t\geq 0\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程，令

$$T_t^{\Delta}=\sum_i (X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2.$$

我们称X为**二阶变差过程**, 如果存在一个有界变差过程$\langle X,X\rangle$使得对任意t及$[0,t]$的任意划分列$\{\Delta_n\}$，若满足$\lim_{n\to+\infty}|\Delta_n|=0$，有

$$P\text{-}\lim_n T_t^{\Delta_n}=\langle X,X\rangle_t\ ,$$

(P-$\lim$表示依概率收敛)。过程$\langle X,X\rangle$称为X的**二阶变差**。

定理 6.4.6 设$B=\{B_t;\ t\geq 0\}$为标准的布朗运动，则B为二阶变差过程且$\langle B,B\rangle_t=t$。

证明 设Δ为$[0,t]$的任意划分，由$B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\sim N(0,t_{i+1}-t_i)$知$E\left[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right]=t_{i+1}-t_i$ 且$E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^4]=3(t_{i+1}-t_i)^2$。由于$B_{t_{i+1}}-B_{t_i};i=0,\cdots,n-1$相互独立，我们有

$$\begin{aligned}
E(T_t^{\Delta_n}-t)^2 &= E\left[\left(\sum_i\{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-(t_{i+1}-t_i)\}\right)^2\right]\\
&=\sum_i E\left[\left\{(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2-(t_{i+1}-t_i)\right\}^2\right]\\
&=\sum_i\left\{E\left[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^4\right]-(t_{i+1}-t_i)^2\right\}\\
&=2\sum_i(t_{i+1}-t_i)^2\\
&\leq 2|\Delta_n|t\longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

由切比雪夫不等式易知$P\text{-}\lim_n T_t^{\Delta_n}=t$, 从而$\langle B,B\rangle_t=0$. ■

推论 6.4.7 设$B=\{B_t;\ t\geq 0\}$为标准的布朗运动, 设$\{\Delta_n\}$为$[0,t]$的满足$\lim\limits_{n\to+\infty}|\Delta_n|=0$任意划分列，则

$$(m.s.)\lim_n\ T_t^{\Delta_n}=t\ ,$$

其中$m.s.$表示均方收敛。

推论 6.4.8 设$B=\{B_t;\ t\geq 0\}$为标准的布朗运动，则B在任意区间上的一阶变差为$+\infty$。

证明 设$[p,q]$为$[0,\infty)$的任意子区间，由于B在$[p,q]$上的二阶变差为$q-p$（依概率收敛），故存在$[p,q]$的满足$\lim\limits_{n\to+\infty}|\Delta_n|=0$的划分列$\{\Delta_n\}$ 及$\Omega_0\subset\Omega$满足$P(\Omega_0)=1$, 使得$\forall\omega\in\Omega_0$都有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\in\Delta_n}\left(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\right)^2=q-p.$$

另一方面，令$V(\omega)$表示$t\to B_t(\omega)$在$[p,q]$上的变差，则

$$\sum_{t_i\in\Delta_n}\left(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\right)^2\leq\sup_{t_i\in\Delta_n}\left|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\right|V(\omega).$$

由布朗运动轨道的连续性，知如果$V(\omega)$有限，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\in\Delta_n}\left(B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\right)^2\leq\left\{\lim_{n\to\infty}\sup_{t_i\in\Delta_n}\left|B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\right|\right\}V(\omega)\longrightarrow 0,$$

会有$q-p\leq 0$的矛盾，故$V(\Omega)=\infty$. ■

思考 我们类似地可以定义3阶变差、4阶变差及一般的p阶变差，问布朗运动的p阶变差是多少？

引理 6.4.9 设$B=\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动, 则对任意固定的$t\in[0,\infty)$及$h>0$有

$$\begin{aligned}P\left\{\overline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=+\infty\right\}&=1,\\ P\left\{\underline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=-\infty\right\}&=1\ .\end{aligned}$$

证明 先证第一个式子。对$\forall t\geq 0$和$0<h<\delta$，有

$$\sup_{0<h<\delta}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}\geq\frac{1}{\delta}\sup_{0<h<\delta}\left(B_{t+h}-B_t\right),$$

故对$\forall x>0$，

$$\left\{\frac{1}{\delta}\sup_{0<h<\delta}\left(B_{t+h}-B_t\right)>x\right\}\subset\left\{\sup_{0<h<\delta}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}>x\right\}$$

从而

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{0<h<\delta}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}>x\right\} &\geq P\left\{\frac{1}{\delta}\sup_{0<h<\delta}(B_{t+h}-B_t)>x\right\} \\ &= P\left\{\sup_{0<h<\delta}B_h>\delta x\right\} \\ &= 2(1-\Phi(\sqrt{\delta}x)) \qquad (\text{由推论??}) \\ &\xrightarrow{\delta\to 0} 1. \end{aligned}$$

故有

$$P\left\{\overline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=-\infty\right\}=1\ .$$

再利用布朗运动的对称性可知

$$P\left\{\underline{\lim}_{h\searrow 0}\frac{B_{t+h}-B_t}{h}=+\infty\right\}=1\ .$$

■

推论 6.4.10 设$B=\{B_t;t\geq 0\}$为布朗运动，任意固定$t\in[0,\infty]$，则B几乎所有的轨道在t处都没有有限的导数。

习 题

6.1 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，求

(a) 求$\mathrm{cov}(B_s,B_t)$;

(b) 给定$B_s=x$，求B_{s+t}的条件概率密度；

(c) 对任意$0\leq s<t\leq u$，给定$B_s=x$，$B_u=y$，求B_t的条件概率密度，进而求$E[B_t|B_s,B_u]$.

6.2 设$p(t;x,y)$为标准布朗运动$\{B_t;t\geq 0\}$的转移概率密度，即$p(t;x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$，试验证

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\quad 与\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\ .$$

6.3 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，则$\{B_t+\mu t;t\geq 0\}$仍为马氏过程，并求其转移概率密度。

6.4 设$\{B_t;t\geq 0\}$为关于$(P,\mathbb{F})$标准布朗运动，令$X_t=B_t^2-t$，证明$\{X_t;t\geq 0\}$关于$(P,\mathbb{F})$为鞅。

6.5 $\{B_t;t\geq 0\}$为关于标准布朗运动，当仅当$e^{i\lambda B_t-\frac{1}{2}\lambda^2 t}$关于$\mathbb{F}^B=\{\mathscr{F}_t^B:=\sigma(B_u,u\leq t);t\geq 0\}$是鞅，其中$i$为纯虚数。

6.6 设$B=\{B_t;t\geq 0\}$为关于$(P,\mathbb{F})$标准布朗运动，令$\eta_t=e^{B_t}$，试求

$$\begin{aligned}\alpha(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{E[\eta_{t+h}-\eta_t|\eta_t=x]}{h},\\ \beta(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{E[(\eta_{t+h}-\eta_t)^2|\eta_t=x]}{h}\ .\end{aligned}$$

6.7 设$\{B_t;t\in[0,1]\}$为$[0,1]$上的标准布朗运动，令$\tilde{B}_t=B_{1-t}-B_1$仍为$[0,1]$上的标准布朗运动。

6.8 设$p(t;x,y)$为标准布朗运动$\{B_t;t\geq 0\}$的转移概率密度，试证：

(1) 若$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续，则 $\lim\limits_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t;x,y)f(y)dy=f(x)$;

(2) 若$f(x)$在$\mathbb{R}$上一致连续，且具有一致连续的二阶导数，则

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t;x,y)\{f(y)-f(x)\}dy=\frac{1}{2}f''(x).$$

6.9 设$\{B_t;t\in[0,1]\}$为$[0,1]$上的标准布朗运动，$n\geq 1$，$0\leq k\leq 2^n$，记$\Delta_{nk}=B_{\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k-1}{2^n}}$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{2^n}\Delta_{nk}^2$，证明: $E(S_{n+1}|S_n)=\frac{1}{2}(S_n+1)$。

第七章　随机分析基础

§7.1　L^2空间和均方极限

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是一个概率空间，我们考虑$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的复数值随机变量:

$$X = X_1 + iX_2,$$

其中X_1、X_2为实数值随机变量，$i = \sqrt{-1}$。我们规定

$$\begin{aligned} E(X) &= EX_1 + iEX_2 \\ E|X|^2 &= E(X\bar{X}). \end{aligned}$$

我们称两个随机变量X、Y**相等**，如果X和Y几乎处处相等，即$P(X = Y) = 1$。记

$$L^2 := \left\{ X \middle| X\text{为满足}E|X| < \infty\text{的复值随机变量} \right\}$$

对任意$X, Y \in L^2$，由Schwarz不等式知

$$|E(X\bar{Y})|^2 \le E\left[|X|^2\right] E\left[|Y|^2\right] < \infty,$$

从而

$$E\left[|X+Y|^2\right] \le E\left[|X|^2\right] + 2\left|E[X\bar{Y}]\right| + E\left[|Y|^2\right] < \infty \Longrightarrow X + Y \in L^2 \ .$$

易知L^2对“普通加法”满足交换律、结合律，关于L^2中的随机变量与复数域$\mathbb{C}$(或实数域$\mathbb{R}$)中的数的“数乘运算”构成线性空间。我们有如下定理：

定理 7.1.1 *L^2是复数域$\mathbb{C}$上的赋范线性空间，且*

1. *$\forall X, Y \in L^2$，规定$(X, Y) := E(X\bar{Y})$，则(X, Y)为L^2上的内积;*
2. *$\forall X \in L^2$，规定$\|X\|_2 := (X, X)^{1/2} = \sqrt{E\left[|X|^2\right]}$，则$\|\cdot\|_2$为$L^2$上的范数;*
3. *$\forall X, Y \in L^2$，规定$d(X, Y) := \|X - Y\|_2$，则$d(X, Y)$为L^2上的距离。*

定义 7.1.2 *设$X_n \in L^2$, $n = 1, 2, \cdots$及$X \in L^2$。*

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty} d(X_n,X)=\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-X\|_2=0$, 则称$X_n$**均方收敛于**$X$, 或$X$**是**$X_n$**的均方极限**，记为

$$\begin{aligned} X &= (m.s.)\lim_{n\to\infty} X_n \\ \text{或:} &= (L^2)\lim_{n\to\infty} X_n; \end{aligned}$$

2. 若$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} d(X_m,X_n)=0$，则称$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$**为**$L^2$**的**$Cauchy$**列**。

定理 7.1.3 设$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$为L^2中的$Cauchy$列，则存在随机变量$X\in L^2$使得

$$X=(L^2)\lim_{n\to\infty} X_n\ .$$

换句话说，$(L^2,\|\cdot\|)$是一个完备的赋范空间（即$Banach$空间），$(L^2,(\cdot,\cdot))$是一个$Hilbert$空间。

§7.1.1 均方极限的性质

性质 7.1.4 设$\{X_n\}\subset L^2$, $\{Y_n\}\subset L^2$, 且$(L^2)\lim_{n\to\infty} X_n=X$, $(L^2)\lim_{n\to\infty} Y_n=Y$, 则

1) $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n]=E[X]$;

2) $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(X_m,X_n)=(X,Y)$; 特别地，$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n|^2\right]=E[|X|^2]$;

3) $\lim_{n\to\infty}(\alpha X_n+\beta Y_n)=\alpha X+\beta Y$，其中$\alpha$、$\beta$为任意常数。

证明 1)由Schwarz不等式知

$$0\le|EX_n-EX|\le E|X_n-X|\le\|X_n-X\|_2\to0,\quad n\to\infty,$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n]=E[X]$。

2) 易知

$$\begin{aligned} |(X_m,Y_n)-(X,Y)| &= |(X,Y_n-Y)+(X_m-X,Y)+(X_m-X,Y_n-Y)| \\ &\le |(X,Y_n-Y)|+|(X_m-X,Y)|+|(X_m-X,Y_n-Y)|, \end{aligned}$$

再由Schwarz不等式知

$$\begin{aligned} |(X_m,Y_n)-(X,Y)| &\le \|X\|_2\|Y_n-Y)\|_2+|X_m-X\|_2\|Y\|_2+\|X_m-X\|_2\|Y_n-Y|_2 \\ &\to 0,\quad m,n\to\infty, \end{aligned}$$

即$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}(X_m, Y_n) = (X, Y)$。特别地，当$m = n$且$X_n = Y_n$时，即有$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n|^2\right] = E[|X|^2]$。

3)显然。■

由性质??的2）知若$(L_2)\lim_{n\to\infty} X_n = X$，有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}} E[X_m\bar{X}_n] = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}}(X_m, X_n) = \|X\|_2^2,$$

我们不仅要反过来问：如果二元数列$\{E[X_m\bar{X}_n]; m = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots\}$收敛，随机序列$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$是否均方收敛呢？为此，我们有如下均方收敛准则：

定理 7.1.5 (均方收敛准则) 设$\{X_n; n\in\mathbb{N}\}\subset L^2$，$X\in L^2$，则

1) $\{X_n; n\in\mathbb{N}\}$*均方收敛当仅当极限*$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}} E[X_m\bar{X}_n]$*存在;*

2) $(L^2)\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ *当仅当*$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}} E[X_m\bar{X}_n] = E[|X|^2]$。

证明 1) 必要性由性质??的2）易得，我们仅证充分性。设

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}} E[X_m\bar{X}_n] = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\to\infty}}(X_m, X_n) = c,$$

则

$$\begin{aligned}
\|X_m - X_n\|_2^2 &= (X_m - X_n, X_m - X_n)\\
&= (X_m, X_m) - (X_m, X_n) - (X_n, X_m) + (X_n, X_n)\\
&\to 0, \quad \text{当}m\to\infty, n\to\infty\text{时，}
\end{aligned}$$

从而$\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$为$L^2$中的Cauchy列。由定理??知，存在随机变量$X\in L^2$使得$(L^2)\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$。类似可证2)成立。■

定理 7.1.6 设$\{X_n; n\in\mathbb{N}\}\subset L^2$，*若*$(L_2)\lim_{n\to\infty} X_n = X$，*则*$X_n$*依概率收敛于*$X$*:*

$$(P)\lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

从而，X_n*依发布弱收敛于*X*，即若*$F_n(x)$*为*X_n*的分布函数且*$F(x)$*为*X*的分布函数，则*$F_n(x)$*在*$F(x)$*的连续点处收敛于*$F(x)$。

证明 由切比雪夫不等式知$\forall\epsilon>0$,

$$P(|X_n-X|\geq\epsilon)\leq\frac{E\{|X_n-X|^2\}}{\epsilon^2}\to 0,\quad n\to\infty,$$

故$\forall\epsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|<\epsilon)=1$，即$(P)\lim_{n\to\infty}X_n=X$. ■

定理 7.1.7 设$\{X_n;n\in\mathbb{N}\}\subset L^2$，$X\in L^2$，$f(\cdot)$为通常的函数使$f(X_n)\in L^2$，$\forall n\in\mathbb{N}$，且满足*Lipschitz*条件:$|f(x_2)-f(x_1)|\leq k|x_2-x_1|$，则

$$(L^2)\lim_{n\to\infty}f(X_n)=f(X).$$

证明 由条件$|f(X_n)-f(X)|^2\leq k^2|X_n-X|^2$，两边取数学期望得

$$\|f(X_n)-f(X)\|_2^2\leq k^2\|X_n-X\|_2^2\to 0,\quad \text{当}n\to\infty.$$

■

§7.2 均方分析

对于任意时间集$\mathbb{T}\subset\mathbb{R}^+$，随机过程$X_{\mathbb{T}}=\{X_t;t\in\mathbb{T}\}$称为**二阶矩过程**，如果对任意$t\in\mathbb{T}$都有$X_t\in L^2$。对于二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}=\{X_t;t\in\mathbb{T}\}$，有两个重要的数值特征：均值函数$m(t)=E[X_t]$和协方差函数$\Gamma(s,t)=E[(X_s-m(s))\overline{(X_t-m(t))}]$。为了简便起见，以下我们记$R(s,t):=E(X_s\bar{X}_t)=(X_s,X_t)$，易知

$$\Gamma(s,t)=R(s,t)-m(s)\overline{m(t)},$$

若$m(t)=0$, $\forall t\in\mathbb{T}$，有$\Gamma(s,t)=R(s,t)$。本节我们研究连续时间$\mathbb{T}=[a,b]$（$a\geq 0$，b可取$+\infty$ ）的二阶矩过程$X=\{X_t;t\in[a,b]\}$，我们将讨论X的均方连续性、均方可微性及均方可积性。

§7.2.1 均方连续性

定义 7.2.1 设$X_{\mathbb{T}}=\{X_t;t\in\mathbb{T}\}$为连续时间的二阶矩过程，$t_0\in\mathbb{T}$，若$(L^2)\lim\limits_{t\to t_0}X_t=X_{t_0}$，则称过程$X_{\mathbb{T}}$在$t_0$处**均方连续**。

若过程$X_{\mathbb{T}}$在任意$t\in\mathbb{T}$都均方连续，则称过程$X_{\mathbb{T}}$在$\mathbb{T}$上均方连续。

定理 7.2.2 (均方连续准则) 二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}=\{X_t;t\in\mathbb{T}\}$在$t_0$处均方连续的充要条件是函数$R(s,t)$在$(t_0,t_0)$处连续。

证明 由均方收敛准则可知：

$$(L^2)\lim_{t\to t_0}X_t=X_{t_0}\quad \text{当仅当}\quad \lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}E(X_s\bar{X}_t)=E(X_{t_0}\bar{X}_{t_0}),$$

即 $\lim_{\substack{s\to t_0\\ t\to t_0}}R(s,t)=R(t_0,t_0)$，从而命题成立。■

推论 7.2.3 二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}=\{X_t;t\in\mathbb{T}\}$在$\mathbb{T}$上均方连续充要条件是二元函数$R(s,t)$
在$\{(t,t);t\in\mathbb{T}\}$处二元连续。

推论 7.2.4 若二元函数$R(s,t)$在$\{(t,t);t\in\mathbb{T}\}$处二元连续，则$R(s,t)$在$\mathbb{T}\times\mathbb{T}$上连续。

例 7.2.5 设$B=\{B_t;t\geq 0\}$为标准的布朗运动，易知$R_B(s,t)=s\wedge t$在$\{(t,t);t\geq 0\}$上的所有点处二元连续，从而B在$[0,\infty)$上均方连续。

例 7.2.6 (Poisson过程的均方连续性) 设$X=\{X_t;t\geq 0\}$是满足$X_0=0$的$Poisson$过程，则对任意$t>s$，$X_t-X_s\sim\pi(\lambda(t-s))$，即

$$P\{X_t-X_s=j\}=\frac{(\lambda(t-s))^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)},\ j=1,2,\cdots$$

易知$E[X_t]=D[X_t^2]=\lambda t$。当$s<t$时，

$$\begin{aligned}R(s,t)&=E[X_sX_t]\\&=E[X_s(X_t-X_s+X_s)]\\&=E[X_s(X_t-X_s)]+E[X_s^2]\\&=\lambda s\lambda(t-s)+\lambda s+(\lambda s)^2\\&=\lambda s+\lambda^2 st,\end{aligned}$$

右边的，我们有$R(s,t)=\lambda s\wedge t+\lambda^2 st$。易知$R(s,t)$在$\{(t,t);t\geq 0\}$上二元连续，从而$X$在$[0,\infty)$上均方连续。

§7.2.2 均方可微性

定义 7.2.7 二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}=\{X(t);t\in\mathbb{T}\}$称为在$t_0\in\mathbb{T}$处**均方可微**，如果

$$(L^2)\lim_{h\to 0}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}$$

存在，并把此极限记作$X'(t_0)$或$\frac{dX_t}{dt}\Big|_{t=t_0}$，称为$X_{\mathbb{T}}$在$t_0$处的**均方导数**。如果过程$X_{\mathbb{T}}$在$\mathbb{T}$上的每一点都均方可微，则称$X_{\mathbb{T}}$在$\mathbb{T}$上均方可微。

注． 如果二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}$在$\mathbb{T}$上均方可微，则其均方导数过程$X'_{\mathbb{T}}=\{X'(t);t\in\mathbb{T}\}$仍为二阶矩过程。

定理 7.2.8 (均方可微准则) 二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}=\{X(t);t\in\mathbb{T}\}$在$t_0\in\mathbb{T}$处均方可微的充要条件是$R(s,t)$在$(t_0,t_0)$处广义二次可微，即极限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{R(t_0+h,t_0+h')-R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0+h')+R(t_0,t_0)}{hh'}$$

存在。

证明 由均方收敛准则，知$X(t)$在t_0处均方可微，即$(L^2)\lim_{h\to 0}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}$存在的充要条件是

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}E\left[\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}\overline{\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}}\right]$$

存在，展开即得

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{R(t_0+h,t_0+h')-R(t_0+h,t_0)-R(t_0,t_0+h')+R(t_0,t_0)}{hh'}$$

存在，从而$R(s,t)$在(t_0,t_0)处广义二次可微。■

推论 7.2.9 如果二阶矩过程$X_{\mathbb{T}}$在$\mathbb{T}$上均方可微的充要条件是$R(s,t)$在一切$\{(t,t);t\in\mathbb{T}\}$上广义二次可微。

例 7.2.10 设$B=\{B_t;t\in[0,T]\}$为标准布朗运动，试考查其均方可微性。

解 由于$R(s,t)=s\wedge t$在$\{(t,t);t\ge 0\}$的任意点处都不广义二次可微，从而B处处不均方可微。■

性质 7.2.11 如果$R(s,t)$在$\{(t,t);t\in\mathbb{T}\}$上广义二次可微，则$\frac{\partial}{\partial s}R(s,t)$, $\frac{\partial}{\partial t}R(s,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(s,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(s,t)$在$\mathbb{T}\times\mathbb{T}$上都存在，且

$$E\left[X'(s)\overline{X(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial s}R(s,t), \tag{7.1}$$

$$E\left[X(s)\overline{X'(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}R(s,t), \tag{7.2}$$

$$E\left[X'(s)\overline{X'(t)}\right] = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}R(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}R(s,t). \tag{7.3}$$

证明 由推论**??**知，$X'(t),t\in\mathbb{T}$存在，由性质**??**有

$$\begin{aligned}
E\left[X'(s)\overline{X(t)}\right] &= E\left[(L^2)\lim_{h\to 0}\frac{X(s+h)-X(s)}{h}\overline{X(t)}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}E\left[\frac{X(s+h)-X(s)}{h}\overline{X(t)}\right]\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{R(s+h,t)-R(s,t)}{h}\\
&=\frac{\partial}{\partial s}R(s,t),
\end{aligned}$$

此即(**??**)。同理，我们可证(**??**)与(**??**)。■

性质 7.2.12 若$X=\{X(t);t\in\mathbb{T}\}$, $X_i=\{X_i(t);t\in\mathbb{T}\}$, $i=1,2$在$\mathbb{T}$上均方可微，$f(t)$为确定性函数，且在$\mathbb{T}$可微，则

1) 过程X在$\mathbb{T}$上均方连续;

2) 对$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $c_1X_1+c_2X_2=\{c_1X_1(t)+c_2X_2(t);t\in\mathbb{T}\}$在$\mathbb{T}$上均方可微，且

$$(c_1X_1(t)+c_2X_2(t))'=c_1X_1'(t)+c_2X_2'(t);$$

3) $\frac{d}{t}(f(t)X(t))=\frac{df(t)}{dt}X(t)+f(t)\frac{dX(t)}{dt}$.

证明 由均方可微的定义易得。■

§7.2.3 均方可积性

定义 7.2.13 设$X=\{X(t),t\in[a,b]\}$为二阶矩过程，$f(t),t\in[a,b]$为确定性的函数。任取分点$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$。令$\lambda_n=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_k$，任取$u_k\in[t_{k-1},t_k)$，作部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)X(u_k)\Delta t_k,$$

若$(L^2)\lim\limits_{\lambda_n\to 0}S_n$存在，则称$f(t)X(t)$在$[a,b]$上**均方可积**，称

$$\int_a^b f(u)X(u)du=(L^2)\lim_{\lambda_n\to 0}S_n$$

为$f(t)X(t)$在$[a,b]$上的**均方积分**。

定理 7.2.14 (均方可积准则) 如果普通二重积分$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$存在，则$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积。

证明 由均方收敛准则知，$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充要条件是

$$\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to\infty}}E[S_m\bar{S}_n]$$

存在。又由

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to 0}}E[S_m\bar{S}_n]&=\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to 0}}E\left\{\left[\sum_{i=1}^{m}f(u_i)X(u_i)\Delta t_i\right]\overline{\left[\sum_{j=1}^{n}f(u_j')X(u_j')\Delta t_j'\right]}\right\}\\&=\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to 0}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(u_i)\overline{f(u_j')}E\big\{X(u_i)\overline{X(u_j')}\big\}\Delta t_i\Delta t_j'\\&=\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to 0}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(u_i)\overline{f(u_j')}R(u_i,u_j')\Delta t_i\Delta t_j'\end{aligned}$$

知当普通二重积分$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt$存在时，

$$\lim_{\substack{\lambda_m\to 0\\ \lambda_n\to\infty}}E[S_m\bar{S}_n]$$

存在，即$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积。■

性质 7.2.15 设$f(t)X(t)$, $f_i(t)X_i(t)$, $i=1,2$在$[a,b]$上均方可积，则

1) $E\int_a^b f(t)X(t)dt=\int_a^b f(t)EX(t)dt$,

$$\begin{aligned} E\Big(\|\int_a^b f(t)X(t)dt\|_2^2\Big) &= E\Big(\int_a^b f(s)X(s)ds\int_a^b \overline{f(t)}\,\overline{X(t)}dt\Big) \\ &= \int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R(s,t)dsdt; \end{aligned}$$

2) 对任意$c_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$，有

$$\int_a^b\big\{c_1f_1(t)X_1(t)+c_2f_2(t)X_2(t)\big\}dt=c_1\int_a^b f_1(t)X_1(t)dt+c_2\int_a^b f_2(t)X_2(t)dt,$$

3) 对任意$a<c<b$，有$\int_a^b f(t)X(t)dt=\int_a^c f(t)X(t)dt+\int_c^b f(t)X(t)dt.$

定理 7.2.16 设$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，则

1) $X(t)$在$[a,b]$上均方可积，即$\int_a^b X(t)dt$存在;

2) 设$f(t)$为使$f(t)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的确定性函数，则

$$\|\int_a^b f(t)X(t)dt\|_2\le\int_a^b |f(t)|\|X(t)\|_2dt;$$

3) 记$Y(t)=\int_a^t X(u)du$，则$Y=\{Y(t);t\in[a,b]\}$也为二阶矩过程，在$[a,b]$上均方连续、均方可微，且$Y'(t)=X(t)$。

证明 1) $X(t)$在$[a,b]$上均方连续，由均方连续准则的推论知，$R(s,t)$在$[a,b]\times[a,b]$ 上连续，从而$\int_a^b\int_a^b R(s,t)dsdt$存在，故$X(t)$在$[a,b]$ 上均方可积。

2）任取分点$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$使得$\lambda_n=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta t_k\to 0$, 有

$$\begin{aligned} \|\int_a^b f(t)X(t)dt\|_2 &= \Big\|(L^2)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)\Delta t_k\Big\|_2 \\ &= \lim_{\lambda_n\to 0}\Big\|\sum_{k=1}^n f(u_k)X(u_k)\Delta t_k\Big\|_2 \\ &\le \lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=1}^n |f(u_k)|\,\big\|X(u_k)\big\|_2\Delta t_k \\ &= \int_a^b |f(t)|\|X(t)\|_2dt. \end{aligned}$$

3）显然，Y在$[a,b]$ 上为二阶矩过程，且均方连续，我们只需证明其均方可微性：

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{Y(t+h)-Y(t)}{h}-X(t)\Big\|_2 &= \Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}X(u)du-X(t)\Big\|_2\\ &= \Big\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\{X(u)-X(t)\}du\Big\|_2\\ &\le \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\big\|X(u)-X(t)\big\|_2du\\ &\le \max_{|u-t|\le h}\big\|X(u)-X(t)\big\|_2\to 0,\quad 当h\to 0,\end{aligned}$$

从而$(L^2)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Y(t+h)-Y(t)}{h}=X(t)$，$Y$在$[a,b]$上均方可微，且$Y'(t)=X(t)$。■

推论 7.2.17 设$X(t)$在$[a,b]$上均方可微，且$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，则

$$\int_a^t X'(u)du=X(t)-X(a),t\in[a,b].$$

例 7.2.18 设$B=\{B(t);t\ge 0\}$是标准布朗运动，给定$T>0$，则$tB(t)$在$[0,T]$上均方可积，并求过程$Y_t:=\int_0^t uB(u)du$的均值函数与协方差函数。

解 由B在$[0,T]$上均方连续，知$tB(t)$ 在$[0,T]$上均方连续，从而$tB(t)$ 在$[0,T]$上均方可积。Y的均值函数为$m_Y(t)=EY(t)=\int_0^t uEB(u)du=0$。下面求协方差函数：

$$\begin{aligned}R_Y(s,t)=E[Y(s)Y(t)] &= E\Big[\int_0^s uB(u)du\int_0^t vB(v)dv\Big]\\ &= \int_0^s\int_0^t uv\min\{u,v\}dudv\\ &= \begin{cases}\dfrac{s^3t^2}{6}-\dfrac{s^5}{30} & 当s\le t;\\[2ex] \dfrac{t^3s^2}{6}-\dfrac{t^5}{30} & 当s>t.\end{cases}\end{aligned}$$

■

§7.3 Itô积分

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t; t \in [0,T]\}$为一个满足通常条件的$\sigma$-域流，即$\mathbb{F}$为$\mathscr{F}$的一族单增右连续的子$\sigma$-域。设$B = \{B_t; t \in [0,T]\}$是关于$(P, \mathbb{F})$的标准布朗运动（见定义??）。本节我们主要考虑一般的实值随机过程关于布朗运动B的Ito随机积分。

假设 7.3.1 设实值随机过程$g = \{g(t,\omega); t \in [0,T]\}$，$T > 0$，满足以下条件:

(1) $g(t,\omega)$关于$([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}[0,T] \otimes \mathscr{F})$可测;

(2) g关于$\mathbb{F}$-适应，即$\forall t \in [0,T]$，$g(t,\omega)$关于$\mathscr{F}_t$可测;

(3) $E\int_0^T g(t,\omega)^2 dt < \infty$。

满足假设**??**的随机过程的全体记为$\mathscr{L}^2$。

对任意$g \in \mathscr{L}^2$，本节我们将研究如下形式的随机积分

$$\int_0^T g(t,\omega) dB(t,\omega).$$

问题的关键在于布朗运动B的轨道几乎处处不可微，并且g是一个随机过程，其轨道并不一定连续或均方连续，所以我们不能象定义均方积分或关于正交增量过程那样定义这种积分。日本数学家Itô最先给出了这种积分的一种定义，我们称之为Itô积分。

§7.3.1 简单随机过程的随机积分

定义 7.3.2 过程$g = \{g(t,\omega); t \geq 0\}$称为**简单随机过程**，如果$[0,T]$的有限划分$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$及随机变量$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$满足$\xi_j \in L^2$为$\mathscr{F}_{t_j}$-可测，使得

$$g(t,\omega) = \xi_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j(\omega)\mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t), \quad t \geq 0, \omega \in \Omega. \tag{7.4}$$

所有的简单随机过程的全体记为$\mathscr{E}$.

注. 易知每个简单过程都属于$\mathscr{L}^2$，即$\mathscr{E} \subset \mathscr{L}^2$.

定义 7.3.3 设$g=\{g(t,\omega);t\geq 0\}$为形为*(??)*简单随机过程，$B=\{B_t;t\geq 0\}$为关于$(P,\mathbb{F})$的标准布朗运动，令

$$\begin{aligned} I_t(g) &:= \sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\{B_{t\wedge t_{j+1}}(\omega)-B_{t\wedge t_j}(\omega)\} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\{B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)\}+\xi_n(\omega)(B_t(\omega)-B_{t_n}(\omega)), \end{aligned}$$

其中n满足为满足$t_n\leq t<t_{n+1}$的整数，则称过程$I(g)=\{I_t(g);t\geq 0\}$为g关于B的**随机积分**过程，记为

$$I_t(g)=\int_0^t g(u)dB_u\ .$$

我们规定：$\displaystyle\int_s^t g(u)dB_u=\int_0^t g(u)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)dB_u$。

易知对任意t, $I_t(g)$为$\mathscr{F}_t$-可测，故$I(g)$为$\mathbb{F}$-适应过程。关于简单随机过程的随机积分，我们有如下性质：

性质 7.3.4 设$g=\{g(u);u\geq 0\}$和$g_i=\{g_i(u);u\geq 0\}$，$i=1,2$为简单随机过程，则对任意$s<t$有

1) $I_t(ag_1+bg_2)=aI_t(g_1)+bI_t(g_2)$，其中$a,b$为常数;

2) $\displaystyle\int_0^t g(u)dB_u=\int_0^s g(u)dB_u+\int_s^t g(u)dB_u$，其中$0\leq s<t\leq T$*;*

3) $I(g)=\{I_t(g);t\in[0,T]\}$为连续鞅;

4) $\displaystyle E[\int_0^t g_1(u)dB_u\int_0^t g_2(u)dB_u]=\int_0^t E(g_1(u)g_2(u))du.$

证明 设$g_i(u)$为两个简单过程，存在$[0,T]$的有限划分$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$及随机变量$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$与$\xi_0',\xi_1',\cdots,\xi_{n-1}'$使得

$$g_1(t,\omega) = \xi_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j(\omega)\mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t), \tag{7.5}$$

$$g_2(t,\omega) = \xi_0'(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\xi_j'(\omega)\mathbb{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t)\ . \tag{7.6}$$

1) 由简单随机过程的随机积分的定义知

$$\begin{aligned}I_t(ag_1+bg_2)&=\sum_{j=0}^{\infty}\{a\xi_j+b\xi_j'\}\{B_{t\wedge t_{j+1}}(\omega)-B_{t\wedge t_j}(\omega)\}\\&=a\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\{B_{t\wedge t_{j+1}}(\omega)-B_{t\wedge t_j}(\omega)\}+b\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j'\{B_{t\wedge t_{j+1}}(\omega)-B_{t\wedge t_j}(\omega)\}\\&=aI_t(g_1)+bI_t(g_2).\end{aligned}$$

2) 对任意简单过程$g\in\mathscr{E}$及任意$0\le s<t\le T$，$g(u,\omega)\mathbb{1}_{(0,t]}(u)=g(u,\omega)\mathbb{1}_{(0,s]}(u)+g(u,\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)$，由1)易得。

3) 由于布朗运动的轨道连续，$I(g)$的轨道连续。对任意$0\le s<t\le T$，由2)知$I_t(g)=I_s(g)+\displaystyle\int_s^t g(u,\omega)dB_t(\omega)$。存在$(s,t]$的划分$s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$及随机变量$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$满足$\xi_j\in L^2$为$\mathscr{F}_{t_j}$-可测的，使得

$$\int_s^t g(u,\omega)dB_t(\omega)=\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\{B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)\}.$$

由于B为关于$(P,\mathbb{F})$的布朗运动，增量$B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}$与$\mathscr{F}_{t_j}$独立，从而

$$\begin{aligned}E\Big[\int_s^t g(u,\omega)dB_t(\omega)|\mathscr{F}_s\Big]&=\sum_{j=0}^{n-1}E\left[\xi_j\{B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)\}\middle|\mathscr{F}_s\right]\\&=\sum_{j=0}^{n-1}E\left\{\xi_jE[B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)|\mathscr{F}_{t_j}]\middle|\mathscr{F}_s\right\}\\&=0,\end{aligned}$$

故$E[I_t(g)|\mathscr{F}_s]=I_s(g)+E[\int_s^t g(u,\omega)dB_t(\omega)|\mathscr{F}_s]=I_s(g)$，从而$I(g)$为鞅。

4)设$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$为$[0,T]$的满足(2.2)与(2.3)的有限划分，设n满足为满足$t_n\le t<t_{n+1}$的整数，由于B为布朗运动，$E[B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\mathscr{F}_{t_i}]=$

0，$E[(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2|\mathscr{F}_{t_i}]=t_{i+1}-t_i$，从而

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\int_0^t g_1(u)dB_u\int_0^t g_2(u)dB_u]\\
&=E\Big\{\Big[\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\{B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\}+\xi_n(\omega)(B_t(\omega)-B_{t_n}(\omega))\Big]\\
&\qquad\times\Big[\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j'\{B_{t_{j+1}}(\omega)-B_{t_j}(\omega)\}+\xi_n'(\omega)(B_t(\omega)-B_{t_n}(\omega))\Big]\Big\}\\
&=E\Big\{\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\xi_i'E\left[\{B_{t_{i+1}}(\omega)-B_{t_i}(\omega)\}^2\middle|\mathscr{F}_i\right]\\
&\qquad+\xi_n(\omega)\xi_n'E\left[(B_t(\omega)-B_{t_n}(\omega))^2|\mathscr{F}_{t_n}\right]\Big\}\\
&=E\Big\{\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\xi_i'(t_{i+1}-t_i)+\xi_n(\omega)\xi_n'(t-t_n)\Big\}\\
&=E\Big\{\int_0^t g_1(u,\omega)g_2(u,\omega)du\Big\}
\end{aligned}
$$

■

§7.3.2 随机积分

对任意$g\in\mathscr{L}^2$，我们来看如何随机积分$\int_0^T g(t,\omega)dB(t,\omega)$。我们需要如下引理：

引理 7.3.5 对任意$g\in\mathscr{L}^2$，存在一列简单随机过程g_n, $n=1,2,\cdots$,使得

$$E\big[\int_0^T|g_n(u)-g(u)|^2du\big]\to 0,\quad n\to\infty. \tag{7.7}$$

证明 详见Liptser and Shriyaev(1977)引理4.4。■

对任意$g\in\mathscr{L}^2$，存在一列简单随机过程g_n, $n=1,2,\cdots$满足(**??**)，易知

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}E\big[\int_0^T|g_m(u)-g_n(u)|^2du\big]\\
&=\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}E\big[\int_0^T|(g_m(u)-g(u))-(g_n(u)-g(u))|^2du\big]\\
&\le\lim_{m\to\infty}2E\big[\int_0^T|g_m(u)-g(u)|^2du\big]+\lim_{n\to\infty}2E\big[\int_0^T|g_n(u)-g(u)|^2du\big]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

根据性质??，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} E\Big[\Big\{\int_0^T g_m(u)dB_u - \int_0^T g_n(u)dB_u\Big\}^2\Big] \\
&\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} E\Big[\Big\{\int_0^T \{g_m(u)-g_n(u)\}dB_u\Big\}^2\Big] \\
&\quad= \lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} E\big[\int_0^T |g_m(u)-g_n(u)|^2du\big] \\
&\quad= 0,
\end{aligned}$$

从而$\Big\{\int_0^T g_n(u)dB_u; n=1,2,\cdots\Big\}$为$L^2$的Cauchy列，根据定理??知，存在一个随机变量$I_T(g)$使得

$$I_T(g) = (L^2)\lim_{n\to\infty}\int_0^T g_n(u)dB_u, \tag{7.8}$$

我们称$I_T(g)$为**过程g关于布朗运动B的Itô随机积分**(简称Itô**积分**)，记为

$$I_T(g) := \int_0^T g(u)dB_u\ ,$$

并记$\int_s^t g(u)dB_u = \int_0^T g(u)I_{(s,t]}(u)dB_u$。

引理 7.3.6 对任意$g\in\mathscr{L}^2$, (??)定义的随机积分是唯一的。

注. 由Itô积分的定义可知，如果$f,g\in\mathscr{L}^2$满足$f(u)=g(u)$, a.s., $\forall u\in[0,T]$，则

$$\int_0^T f(u)dB_u = \int_0^T g(u)dB_u, \quad \text{a.s.}$$

性质 7.3.7 设$g=\{g(u);u\ge 0\}\in\mathscr{L}^2$为左连续的随机过程，对任意$t\in[0,T]$，设$\{\Delta_n\}$，$\Delta_n=\{t_1^n,\cdots,t_n^n\}$为$[0,t]$的满足$\lim_{n\to+\infty}|\Delta_n|=0$的任意划分列，则

$$\int_0^t g(u)dB_u = P\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{t_j^n\in\Delta_n} g(t_j^n)(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n})\ .$$

性质 7.3.8 设$g=\{g(u);u\ge 0\}\in\mathscr{L}^2$，则对任意$t\in[0,T]$，$I_t(g)$可以$\mathscr{F}_t$可测，且$I(g)=\{I_t(g);t\in[0,T]\}$是一个连续过程。

我们可以把性质??推广到一般的被积过程$g \in \mathscr{L}_T^2$:

性质 7.3.9 设$g = \{g(u); u \geq 0\} \in \mathscr{L}^2$和$g_i = \{g_i(u); u \geq 0\} \in \mathscr{L}_T^2$，$i = 1, 2$，则对任意$s < t$有

1) $I_t(ag_1 + bg_2) = aI_t(g_1) + bI_t(g_2)$，其中$a, b$为常数;

2) $\int_0^t g(u)dB_u = \int_0^s g(u)dB_u + \int_s^t g(u)dB_u$，其中$0 \leq s < t \leq T$;

3) $I(g) = \{I_t(g); t \in [0, T]\}$为关于$(P, \mathbb{F})$为鞅，即对任意$0 \leq s < t \leq T$，有$E[I_t(g)|\mathscr{F}_s] = I_s(g)$;

4) $E[\int_0^t g_1(u)dB_u \int_0^t g_2(u)dB_u] = E[\int_0^t g_1(u)g_2(u)du]$.

证明 1)由于$g_1, g_2 \in \mathscr{L}_T^2$，由引理??知，存在简单随机过程列$\{g_1^n; n \in \mathbb{N}\}$与$\{g_2^n; n \in \mathbb{N}\}$使得

$$E\int_0^T (g_i(u) - g_i^n(u))^2\, du \to 0, \quad n \to \infty, \quad i = 1, 2,$$

由于$ag_1^n + bg_2^n$为简单过程，由性质??的1）知，

$$I_t(ag_1^n + bg_2^n) = aI_t(g_1^n) + bI_t(g_2^n),$$

从而

$$\begin{aligned}
&E\left[\left|I_t(ag_1 + bg_2) - aI_t(g_1) - bI_t(g_2)\right|^2\right] \\
&\quad = E\left[(L^2)\lim_{n\to\infty}\left|I_t(ag_1^n + bg_2^n) - aI_t(g_1^n) - bI_t(g_2^n)\right|^2\right] \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} E\left[\left|I_t(ag_1^n + bg_2^n) - aI_t(g_1^n) - bI_t(g_2^n)\right|^2\right] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$

从而$I_t(ag_1 + bg_2) = aI_t(g_1) + bI_t(g_2)$, $a.s.$，即1）成立。类似可证2）成立。

3) 易知存在简单随机过程列$\{g^n; n \in \mathbb{N}\}$使得$E\int_0^T (g(u) - g^n(u))^2\, du \to 0$，$n \to \infty$。对任意$A \in \mathscr{F}_s$，$\{g^n(u, \omega)\mathbb{1}_A(\omega)I_{(s,t]}(u); u \in [0, T]\}$仍为简单过程，利用性质??的3）知，

$$E[\mathbb{1}_A \int_s^t g^n(u)dB_u] = E[\int_0^T g^n(u, \omega)\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)dB_u] = 0,$$

从而，

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A\{I_t(g)-I_s(g)\}] &= E\big[\mathbb{1}_A \int_s^t g(u)dB_u\big] \\ &= E\big[(L^2)\lim_{n\to\infty}\mathbb{1}_A \int_s^t g^n(u)dB_u\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\big[\mathbb{1}_A \int_s^t g^n(u)dB_u\big] \\ &= 0, \end{aligned}$$

由条件期望的定义知$E[I_t(g)|\mathscr{F}_s] = I_s(g)$，此即3）。4）由性质**??**的2）和性质**??**的4)易得。■

我们可以把性质**??**的4）作如下推广

推论 7.3.10 对任意$g_1, g_2 \in \mathscr{L}^2$及$0 \le s < t \le T$，有

$$E\Big[\int_s^t g_1(u)dB_u \int_s^t g_2(u)dB_u\Big|\mathscr{F}_s\Big] = E\Big[\int_s^t g_1(u)g_2(u)du\Big|\mathscr{F}_s\Big].$$

证明 $\forall A \in \mathscr{F}_s$，$g_1\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(s,t]} \in \mathscr{L}^2$，利用性质**??**的4）有

$$\begin{aligned} E[\int_0^t g_1(u)\mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)dB_u \int_0^t g_2(u)dB_u] &= E[\int_0^t g_1(u)\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{(s,t]}(u)g_2(u)du] \\ &= E[\mathbb{1}_A \int_s^t g_1(u)g_2(u)du], \end{aligned}$$

从而结论成立。■

例 7.3.11 设$B = \{B_t; t \in [0,T]\}$为标准布朗运动，证明$B \in \mathscr{L}^2$并求$\int_0^t B_u dB_u$。

证明 由$E\int_0^T B_u^2 du = \int_0^T E(B_u^2)du = \int_0^T u du = \frac{T^2}{2} < \infty$，知$B \in \mathscr{L}^2$。由于$B$轨道连续，我们可以利用性质**??**。对任意$t \in [0,T]$，设$\{\Delta_n\}$，$\Delta_n = \{t_0^n, \cdots, t_n^n; 0 = t_0^n < \cdots < t_n^n = t\}$为$[0,t]$的满足$\lim_{n\to+\infty}|\Delta_n| = 0$的任意划分列。由

$$B_{t_j^n}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) = \frac{1}{2}\left\{B_{t_{j+1}^n}^2 - B_{t_j^n}^2 - (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2\right\}$$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{t_j^n\in\Delta_n} B_{t_j^n}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\{B_{t_{j+1}^n}^2 - B_{t_j^n}^2\} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 \\ &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2. \end{aligned}$$

由推论??知$P\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{n-1}(B_{t^n_{j+1}}-B_{t^n_j})^2=t$，从而

$$\begin{aligned}\int_0^t B_u dB_u &= P\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{t^n_j\in\Delta_n} B_{t^n_j}(B_{t^n_{j+1}}-B_{t^n_j})\\ &=\frac{1}{2}B_t^2-\frac{1}{2}P\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(B_{t^n_{j+1}}-B_{t^n_j})^2\\ &=\frac{1}{2}B_t^2-\frac{1}{2}t\ .\end{aligned}$$

■

§7.3.3 一般的适应过程关于B的Itô积分

为了应用的需要，我们需要将被积过程进一步推广。令

$$\mathscr{L}^2_{\text{loc}}:=\left\{g;g\text{为}\mathbb{F}\text{-适应并满足}P\Big\{\int_0^T g(u,\omega)^2du<\infty\Big\}=1\text{的可测过程}\right\},$$

易知$\mathscr{L}^2\subset\mathscr{L}^2_{\text{loc}}$. 设$g\in\mathscr{L}^2_{\text{loc}}$，我们需要考虑随机积分$\displaystyle\int_0^t g(u)dB_u$。为此我们引入：

$$\tau_n=\begin{cases}\inf\left\{t\in[0,T];\ \int_0^t g(u,\omega)^2du\ge n\right\},\\ T,\qquad \text{如果}\int_0^T g(u,\omega)^2du<n,\end{cases}$$

则易知τ_n为满足$\lim_{n\to\infty}\tau_n=T$，a.s.的单增停时列，且$g_n(u,\omega)=g(u,\omega)\mathbb{1}_{\{u\le\tau_n\}}$满足

$$\int_0^T g_n(u,\omega)^2du\le n\Longrightarrow g_n\in\mathscr{L}^2\ ,$$

因而$I(g_n)$是有定义的。令

$$I_t(g)=I_t(g_1)\mathbb{1}_{0\le t<\tau_1}+\sum_{n=1}^{\infty}I_t(g_{n+1})\mathbb{1}_{\tau_n\le t<\tau_{n+1}},\tag{7.9}$$

我们称$I_t(g)$为g**关于布朗运动B的Itô积分**，记为$I_t(g)=\int_0^t g(u)dB_u$。

性质 7.3.12 对任意$g\in\mathscr{L}^2_{loc}$，则由*(??)*定义的*Itô*积分满足

$$I_{t\wedge\tau_n}(g)=I_{t\wedge\tau_n}(g_n),$$

从而$I(g)$是连续的局部鞅。

证明 由性质??对3）知，积分过程$I(g_n)$为鞅。对任意$\tau_i \leq \tau_n$，$\mathbb{1}_{u\leq\tau_i} = \mathbb{1}_{u\leq\tau_i}\mathbb{1}_{u\leq\tau_n}$，由鞅的停时定理知

$$E(I_T(g_n)|\mathscr{F}_{\tau_i}) = I_{\tau_i}(g_n) = \int_0^{\tau_i} g(u)\mathbb{1}_{u\leq\tau_n}dB_u = \int_0^T g(u)\mathbb{1}_{u\leq\tau_i}dB_u,$$

从而在$\{t<\tau_i\}$上

$$\begin{aligned}
E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{t<\tau_i} &= E[E(I_T(g_n)|\mathscr{F}_{\tau_i})|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{t<\tau_i} \\
&= E[\int_0^T g(u,\omega)\mathbb{1}_{u\leq\tau_i}dB_u|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{t<\tau_i} \\
&= E[I_T(g_i)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{t<\tau_i}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I_{t\wedge\tau_n}(g_n) &= E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t] \\
&= E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{0\leq t<\tau_1} + \sum_{i=1}^{n-1} E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{\tau_i\leq t<\tau_{i+1}} \\
&\quad + E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{\tau_n\leq t} \\
&= E[I_T(g_1)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{0\leq t<\tau_1} + \sum_{i=1}^{n-1} E[I_T(g_{i+1})|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{\tau_i\leq t<\tau_{i+1}} \\
&\quad + E[I_T(g_n)|\mathscr{F}_t]\mathbb{1}_{\tau_n\leq t} \\
&= I_t(g_1)\mathbb{1}_{0\leq t<\tau_1} + \sum_{i=1}^{n-1} I_t(g_{i+1})\mathbb{1}_{\tau_i\leq t<\tau_{i+1}} + I_{\tau_n}(g_n)\mathbb{1}_{\tau_n\leq t} \\
&= I_{t\wedge\tau_n}(g)\ .
\end{aligned}$$

■

这样，我们就对任意$g\in\mathscr{L}^2_{\text{loc}}$建立起了Itô随机积分。我们需要指出一切右连续的适应过程都属于$\mathscr{L}^2_{\text{loc}}$，这说明$\mathscr{L}^2_{\text{loc}}$对我们已经够用了。

§7.3.4 积分过程的二次变差

引理 7.3.13 *设$g\in\mathscr{E}$为简单过程，则$I(g)=\{I_t(g);t\in[0,T]\}$为二阶变差过程，其二阶变差为*

$$\langle I(g)\rangle_t = \int_0^t g(u)^2du.$$

证明 由$g \in \mathscr{E}$，对任意$t \in [0,T]$，存在$[0,t]$的有限划分$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$及随机变量$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$满足$\xi_i \in L^2$为$\mathscr{F}_{t_i}$-可测，使得

$$\begin{aligned} g(u,\omega) &= \xi_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(u) + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(\omega)\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(u), \quad u \geq 0, \omega \in \Omega, \\ I_t(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\}. \end{aligned}$$

对于$(t_i, t_{i+1}]$的划分$t_i = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{i+1}$，令$\lambda_m := \max_j(s_{j+1} - s_j)$，由于布朗运动$B$的二次变差为$t$，从而

$$(L^2) \lim_{\lambda_m \to 0} \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 = t_{i+1} - t_i,$$

故

$$\begin{aligned} (L^2) \lim_{\lambda_m \to 0} \sum_{j=0}^{m-1} [I_{s_{j+1}}(g) - I_{s_j}(g)]^2 &= (L^2) \lim_{\lambda_m \to 0} \sum_{j=0}^{m-1} [g(t_i)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})]^2 \\ &= (L^2) \lim_{\lambda_m \to 0} g(t_i)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \\ &= g(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} (L^2) \lim_{\lambda_m \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} [I_{s_{j+1}}(g) - I_{s_j}(g)]^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^t g(u)^2 du. \end{aligned}$$

从而$I(g)$的二阶变差为$\langle I(g) \rangle_t = \displaystyle\int_0^t g(u)^2 du$。■

推论 7.3.14 *对任意$g \in L^2_{loc}$，$I(g)$的二阶变差为*

$$\langle I(g), I(g) \rangle_t = \int_0^t g(u)^2 du.$$

注. 由推论**??**易知，当$g \in L^2_{\text{loc}}$，有

$$d\langle I(g), I(g) \rangle_t = g(t)^2 dt.$$

由于$\langle I(g),I(g)\rangle_t=(P)\lim_{\lambda_n\to0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\{I_{t_{i+1}}(g)-I_{t_i}(g)\}^2$，故可理解为

$$\begin{aligned} d\langle I(g),I(g)\rangle_t=dI_t(g)dI_t(g) &= \underbrace{g(t)dB_t}\times\underbrace{g(t)dB_t} \\ &= g(t)^2dB_tdB_t \\ &= g(t)^2dt\ . \end{aligned}$$

§7.4 Itô过程与Itô公式

从上一节Itô随机积分的定义可以看出，要直接利用定义计算Itô积分还是比较麻烦的，那么怎么计算Itô积分呢？本节我们将介绍Itô公式，并利用Itô公式计算Itô积分。设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t;t\in[0,T]\}$为一个满足通常条件的$\sigma$-域流，$B=\{B_t;t\in[0,T]\}$为关于$(P,\mathbb{F})$的标准布朗运动。

定义 7.4.1 一个连续的$\mathbb{F}$-适应过程$\xi=\{\xi_t;t\in[0,T]\}$称为*Itô*过程，如果存在两个可测的适应过程$a=\{a_t;t\in[0,T]\}$和$b=\{b_t;t\in[0,T]\}$满足

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^T|a_u|du<\infty\right\} &= 1, \\ P\left\{\int_0^T b_u^2du<\infty\right\} &= 1 \end{aligned}$$

且使得对任意$t\in[0,T]$

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t a_u(\omega)du+\int_0^t b_u(\omega)dB_u,\quad a.s. \tag{7.10}$$

为了方便起见，我们常常把(**??**)写成如下“微分形式”：

$$d\xi_t=a_t(\omega)dt+b_t(\omega)dB_t\ , \tag{7.11}$$

我们需要强调（**??**）仅仅是形式记号，因为布朗运动不可微，dB_t没有意义。

定义 7.4.2 一个*Itô*过程$\xi=\{\xi_t;t\in[0,T]\}$被称为**扩散过程**，如果存在确定的连续函数$a(u,x)$与$b(u,x)$满足对任意$t\in[0,,T]$

$$\xi_t=\xi_0+\int_0^t a(u,\xi_u)du+\int_0^t b(u,\xi_u)dB_u,\quad a.s.,$$

或者说ξ是*Itô*随机微分方程$d\xi_t=a(t,\xi_t)dt+b(t,\xi_t)dB_t$ 的初值为ξ_0的解。

引理 7.4.3 设$\xi=\{\xi_t;t\in[0,T]\}$为具有*(??)*形式的*Itô*过程，则ξ的二阶变差为

$$\langle\xi,\xi\rangle_t=\int_0^t b_u(\omega)^2du.$$

证明 令$I_t:=\int_0^t b_u(\omega)dB_u$, $R_t:=\int_0^t a_u(\omega)du$，易知$\xi_t=I(t)+R(t)$，对任意$[0,t]$的划分$\Delta_n=\{t_0,t_1,\cdots,t_n;0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t\}$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_{t_i+1}-\xi_{t_i}\right)^2 &=\sum_{i=0}^{n-1}\left(I_{t_i+1}-I_{t_i}\right)^2+\sum_{i=0}^{n-1}\left(R_{t_i+1}-R_{t_i}\right)^2\\ &\quad+2\sum_{i=0}^{n-1}\left(I_{t_i+1}-I_{t_i}\right)\left(R_{t_i+1}-R_{t_i}\right).\end{aligned}$$

由于R_t与I_t在闭区间$[0,t]$上连续，当$\lambda_n=\max_i\left(t_{i+1}-t_i\right)\to 0$时，

$$\begin{aligned}\max_i\left|I_{t_i+1}-I_{t_i}\right| &\to 0,\quad a.s.,\\ \max_i\left|R_{t_i+1}-R_{t_i}\right| &\to 0,\quad a.s.\end{aligned}$$

又因为

$$P\left\{\int_0^T b_u^2du<\infty\right\}=1,$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\left(R_{t_i+1}-R_{t_i}\right)^2 &\le\max_i\left|R_{t_i+1}-R_{t_i}\right|\times\sum_{i=0}^{n-1}\left|R_{t_i+1}-R_{t_i}\right|\\ &\le\max_i\left|R_{t_i+1}-R_{t_i}\right|\times\int_0^t|a_u(\omega)|du\to 0,\quad a.s.,\\ \sum_{i=0}^{n-1}\left(I_{t_i+1}-I_{t_i}\right)\left(R_{t_i+1}-R_{t_i}\right) &\le\max_i\left|I_{t_i+1}-I_{t_i}\right|\times\sum_{i=0}^{n-1}\left|R_{t_i+1}-R_{t_i}\right|\\ &\le\max_i\left|I_{t_i+1}-I_{t_i}\right|\times\int_0^t|a_u(\omega)|du\to 0,\quad a.s.\end{aligned}$$

由推论**??**知

$$(P)\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\xi_{t_i+1}-\xi_{t_i}\right)^2=\int_0^t b_u(\omega)^2du.$$

■

注. 由于$dtdt=o(dt)$与$dtdB_t=o(dt)$，引理??可理解为

$$\begin{aligned} d\xi_t d\xi_t &= \left\{a_t(\omega)dt+b_t(\omega)dB_t\right\}\times\{a_t(\omega)dt+b_t(\omega)dB_t\} \\ &= a_t(\omega)^2 dtdt+2a_t(\omega)b_t(\omega)dtdB_t+b_t(\omega)^2 dB_t dB_t \\ &= b_t(\omega)^2 dt\ . \end{aligned}$$

定理 7.4.4 (Itô公式) 设$\xi=\{\xi_t;t\in[0,T]\}$为具有如下随机微分

$$d\xi_t=a(t,\omega)dt+b(t,\omega)dB_t\ ,$$

的$It\hat{o}$过程，$f(t,x)$是一个连续的二元函数，且具有连续偏导数$f'_t(t,x)$，$f'_x(t,x)$，$f''_{xx}(t,x)$。令$Y_t=f(t,\xi_t)$，则$Y=\{Y_t;t\in[0,T]\}$也是$It\hat{o}$过程，且对任意$0\le t_0<t$，Y可以表示为

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t_0}+\int_{t_0}^t\left\{f'_t(u,\xi_u)+f'_x(u,\xi_u)a(u,\omega)+\frac{1}{2}f''_{xx}(u,\xi_u)b(u,\omega)^2\right\}du \\ &\quad+\int_{t_0}^t f'_x(u,\xi_u)b(u,\omega)dB_u, \end{aligned}$$

或等价的$It\hat{o}$微分形式

$$dY_t=\left\{f'_t(t,\xi_t)+f'_x(t,\xi_t)a(t,\omega)+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,\xi_t)b(t,\omega)^2\right\}dt+f'_x(t,\xi_t)b(t,\omega)dB_t.$$

证明 略。■

例 7.4.5 设$B=\{B_t;t\in[0,T]\}$为标准布朗运动，求$\int_0^t B_u dB_u$。

解 令$\xi_t=B_t$，易知$d\xi_t=0dt+1dB_t$，令

$$f(t,x)=x^2\Longrightarrow f'_t(t,x)=0,f'_x(t,x)=2x,f''_{xx}(t,x)=2,$$

由Itô公式知，

$$\begin{aligned} Y_t=B_t^2 &= \int_0^t\left\{f'_t(u,\xi_u)+f'_x(u,\xi_u)a(u,\omega)+\frac{1}{2}f''_{xx}(u,\xi_u)b(u,\omega)^2\right\}du \\ &\quad+\int_0^t f'_x(u,\xi_u)b(u,\omega)dB_u \\ &= \int_0^t\frac{1}{2}2du+\int_{t_0}^t 2B_u dB_u \\ &= t+2\int_0^t B_u dB_u, \end{aligned}$$

从而$\int_{t_0}^t B_u dB_u = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}$。■

例 7.4.6 设$\xi = \{\xi_t; t \in [0,T]\}$为*Itô*过程，且具有*Itô*微分形式: $\xi_t = a_t(\omega)dt + b_t(\omega)dB_t$，$\alpha$为确定的常数，求$Y_t = e^{-\alpha\xi_t}$的*Itô*微分形式。

解 令$f(t,x) = e^{-\alpha x}$，易知

$$f_t'(t,x) = 0, \quad f_x'(t,x) = -\alpha e^{-\alpha x}, \quad f_{xx}''(t,x) = \alpha^2 e^{-\alpha x},$$

从而

$$\begin{aligned}
Y_t &= e^{-\alpha\xi_0} + \int_0^t \left\{ f_t'(u,\xi_u) + f_x'(u,\xi_u)a_u(\omega) + \frac{1}{2}f_{xx}''(u,\xi_u)b_u(\omega)^2 \right\} du \\
&\quad + \int_0^t f_x'(u,\xi_u)b_u(\omega)dB_u \\
&= e^{-\alpha\xi_0} + \int_0^t \left\{ -\alpha e^{-\alpha\xi_u}a_u(\omega) + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha\xi_u}b_u(\omega)^2 \right\} du \\
&\quad - \int_0^t \alpha e^{-\alpha\xi_u}b_u(\omega)dB_u \\
&= Y_0 + \int_0^t Y_u \left\{ -\alpha a_u(\omega) + \frac{1}{2}\alpha^2 b_u(\omega)^2 \right\} du - \int_0^t Y_u \alpha b_u(\omega)dB_u,
\end{aligned}$$

故Y_t的Itô微分形式为：$dY_t = Y_t\left\{ -\alpha a_t(\omega) + \frac{1}{2}\alpha^2 b_t(\omega)^2 \right\} dt - Y_t\alpha b_t(\omega)dB_t$.
■

定义 7.4.7 如果$B_i = \{B_i(t); t \in [0,T]\}$, $i = 1,2,\cdots,m$为m个关于$(P,\mathbb{F})$的相互独立的标准布朗运动，则称$\boldsymbol{B}(t) = (B_1(t),\cdots,B_m(t))^T$为**关于$(P,\mathbb{F})$的$m$维标准布朗运动**。

给定n维过程$\mathbf{a}(t,\omega) = (a_1(t,\omega),\cdots,a_n(t,\omega))^T$，其中$\{a_i(t,\omega); t \in [0,T]\}$, $i = 1,\cdots,n$为$\mathbb{F}$-适应的可测过程，我们要求

$$P\left\{ \int_0^T |a_i(u,\omega)|du < \infty \right\} = 1, \quad i = 1,\cdots,n.$$

再给定$n \times m$矩阵值过程

$$\mathbf{b}(t,\omega) = (b_{ij}(t,\omega))_{n\times m} = \begin{pmatrix} b_{11}(t,\omega) & \cdots & b_{11}(t,\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t,\omega) & \cdots & b_{nm}(t,\omega), \end{pmatrix}$$

其中$\{b_{ij}(t,\omega);t\in[0,T]\}$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$为$\mathbb{F}$-适应的可测过程，我们要求

$$P\left\{\int_0^T b_{ij}(u,\omega)^2du<\infty\right\}=1,\quad i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m.$$

如果n维过程$\xi=\left\{\left(\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t)\right)^T,t\in[0,T]\right\}$满足

$$d\xi_i(t)=a_i(t,\omega)dt+\sum_{j=1}^m b_{ij}(t,\omega)dB_j(t),\quad i=1,\cdots,n, \tag{7.12}$$

或写成向量形式

$$d\xi(t)=\mathbf{a}(t,\omega)dt+\mathbf{b}(t,\omega)d\mathbf{B}(t),$$

则称ξ为n维Itô过程。

定理 7.4.8 (多元Itô公式) 设ξ为由(??)定义的n维$It\hat{o}$过程, 而$f(t,x_1,\cdots,x_n)$为连续函数，且具有连续偏导数f'_t，f'_{x_i}，$f''_{x_ix_j}$。则过程$f(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))$仍为$It\hat{o}$过程，且具有如下$It\hat{o}$微分形式

$$\begin{aligned}
&df(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))\\
&\quad=\left\{f'_t(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))+\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))a_i(t,\omega)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n f''_{x_ix_j}(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))\sum_{k=1}^m b_{ik}(t,\omega)b_{jk}(t,\omega)\right\}dt\\
&\qquad+\sum_{j=1}^n\left\{\sum_{i=1}^n f'_{x_i}(t,\xi_1(t),\cdots,\xi_n(t))b_{ij}(t,\omega)\right\}dB_j(t)\ .
\end{aligned}$$

例 7.4.9 设$\{(B_1(t),B_2(t))^T;t\in[0,T]\}$为二维标准布朗运动, 二维$It\hat{o}$过程$\xi=\left\{(\xi_1(t),\xi_2(t))^T;t\in[0,T]\right\}$具有如下$It\hat{o}$微分形式

$$\begin{cases} d\xi_1(t) & =a_1(t,\omega)dt+b_{11}(t,\omega)dB_1(t)\\ d\xi_2(t) & =a_2(t,\omega)dt+b_{21}(t,\omega)dB_1(t)+b_{21}(t,\omega)dB_1(t),\end{cases}$$

则$\{\xi_1(t)\xi_2(t);t\in[0,T]\}$也为$It\hat{o}$过程，我们求其$It\hat{o}$微分形式。

解 令$f(x_1,x_2)=x_1x_2$，则

$$
\begin{aligned}
&f'_{x_1}(x_1,x_2)=x_2, \quad f'_{x_2}(x_1,x_2)=x_1,\\
&f''_{x_1x_1}(x_1,x_2)=f''_{x_1x_1}(x_1,x_2)=0, \quad f''_{x_1x_2}(x_1,x_2)=1,
\end{aligned}
$$

由Ito公式知

$$
\begin{aligned}
df(\xi_1(t),\xi_2(t))=&\Big\{\xi_2(t)a_1(t,\omega)+\xi_1(t)a_2(t,\omega)\\
&+\frac{1}{2}\Big[f''_{x_1x_2}(t,\xi_1(t),\xi_2(t))\Big(b_{11}(t,\omega)b_{21}(t,\omega)+b_{12}(t,\omega)b_{22}(t,\omega)\Big)\\
&\quad+f''_{x_2x_1}(t,\xi_1(t),\xi_2(t))\Big(b_{21}(t,\omega)b_{11}(t,\omega)+b_{22}(t,\omega)b_{12}(t,\omega)\Big)\Big]\Big\}dt\\
&+\Big\{\xi_2(t)b_{11}(t,\omega)+\xi_1(t)b_{21}(t,\omega)\Big\}dB_1(t)\\
&+\Big\{\xi_2(t)b_{12}(t,\omega)+\xi_1(t)b_{22}(t,\omega)\Big\}dB_2(t)\\
=&\Big\{\xi_2(t)a_1(t,\omega)+\xi_1(t)a_2(t,\omega)+b_{11}(t,\omega)b_{21}(t,\omega)\Big\}dt\\
&+\Big\{\xi_2(t)b_{11}(t,\omega)+\xi_1(t)b_{21}(t,\omega)\Big\}dB_1(t)\\
&+\Big\{\xi_2(t)b_{12}(t,\omega)+\xi_1(t)b_{22}(t,\omega)\Big\}dB_2(t)\ .
\end{aligned}
$$

■

§7.5 Itô随机微分方程

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一个完备的概率空间，$\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_t;t\in[0,T]\}$为一个满足通常条件的$\sigma$-域流，$B=\{B_t;t\in[0,T]\}$为关于$(P,\mathbb{F})$的标准布朗运动。设$a(t,x)$与$b(t,x)$为两个满足关于$t,x$的可测函数，给定一个$\mathscr{F}_0$-可测的随机变量$\eta$，我们考虑如下随机微分方程

$$
\begin{cases}
dX_t &= a(t,X_t)dt+b(t,X_t)dB_t,\\
X_0 &= \eta.
\end{cases}
\tag{7.13}
$$

§7.5.1 存在唯一性定理

定义 7.5.1 设$X=\{X_t;t\in[0,T]\}$是一个轨道连续的$\mathbb{F}$-适应过程，我们称ξ是随机微分方程（??）的**强解**，如果X满足

$$\begin{aligned} P\left\{\int_0^T |a(u,X_u)|du<\infty\right\} &= 1, \\ P\left\{\int_0^T b(u,X_u)^2 du<\infty\right\} &= 1 \end{aligned}$$

且对任意$t\in[0,T]$，

$$X_t=\eta+\int_0^t a(u,X_u)du+\int_0^t b(u,X_u)dB_u,\quad a.s. \tag{7.14}$$

当然，对任意的函数$a(t,x)$与$b(t,x)$，对任意对$\mathscr{F}_0$-可测对随机变量η，随机微分方程(??)不一定有强解。我们关心对是当$a(t,x)$、$b(t,x)$及η满足什么条件时，随机微分方程(??)存在唯一的强解。

定理 7.5.2 如果可测函数$a(t,x)$与$b(t,x)$满足

*(1) Lipschtiz*条件：存在常数k，满足对$\forall t\in[0,T]$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$$|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|\le k|x-y|\ ;$$

(2) 线性增长条件：存在常数$c>0$使得 $|a(t,x)|+|b(t,x)|\le c(1+|x|)$,

如果$P(|\eta|<\infty)=1$，则随机微分方程*(??)*存在唯一的强解$\{X_t;t\in[0,T]\}$。更进一步，如果$E\left(\eta^{2m}\right)<\infty$，其中$m\le 1$，则存在常数$c_m$使得

$$E(X_t^{2m})\le\left\{1+E(\eta^{2m})\right\}e^{c_m t}-1\ .$$

证明从略。

§7.5.2 线性随机微分方程的显示解

本节我们将给出几个能求出显示解的例子。

例 7.5.3 (O-U过程) 设$X=\{X_t;t\in[0,T]\}$满足如下*Ornstein-Uhlenbeck*方程

$$\begin{cases} dX_t &= -\mu X_t dt+\sigma dB_t \\ X_0 &= \eta \end{cases}$$

其中μ,σ为常数，η满足$P\{|\eta|<\infty\}=1$，试给出其显示解。

解 对$e^{\mu t}X_t$运用Itô公式易知

$$\begin{aligned} d(e^{\mu t}X_t) &= X_t\mu e^{\mu t}dt + e^{\mu t}dX_t \\ &= e^{\mu t}\{X_t\mu dt + dX_t\} \\ &= e^{\mu t}\sigma dB_t, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & e^{\mu t}X_t = \eta + \int_0^t e^{\mu u}\sigma dB_u \\ \Longrightarrow\ & X_t = \eta e^{-\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-u)}\sigma dB_u \end{aligned}$$

■

例 7.5.4 (几何布朗运动) 设S_t为t时刻某种股票对价格，它满足如下随机微分方程

$$\begin{cases} dS_t &= S_t\mu dt + S_t\sigma dB_t \\ S_0 &= s_0 \end{cases}$$

其中μ,σ为常数（μ称为收益率，σ称为波动率），试给出其显示解。

解 对$\ln(S_t)$运用Itô公式，有

$$\begin{aligned} d\ln(S_t) &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}S_t^2\sigma^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\}dt + \sigma dB_t, \end{aligned}$$

从而$\ln(S_t) = \ln s_0 + \{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\}t + \sigma B_t$，故

$$S_t = s_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right\}.$$

■

例 7.5.5 (一般的线性方程) 设$X = \{X_t; t\in[0,T]\}$是如下随机微分方程

$$\begin{cases} dX_t &= \{a_1(t)X_t + a_2(t)\}dt + \{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

其中$a_1(t)$, $a_2(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$是t的有界的可测函数，求其显示解。

解 首先设Φ_t是如下随机微分方程

$$\begin{cases} d\Phi_t = \Phi_t a_1(t)dt + \Phi_t b_1(t)dB_t, \\ \Phi_0 = 1, \end{cases}$$

与例??类似的方法可得

$$\Phi_t = \exp\Big\{\int_0^t \{a_1(u) - \frac{1}{2}b_1(u)^2\}du + \int_0^t b_1(u)dB_u\Big\}.$$

对Φ_t^{-1}运用Itô公式，我们有

$$\begin{aligned} d\Phi_t^{-1} &= -\Phi_t^{-2}d\Phi_t + \frac{1}{2}2\Phi_t^{-3}\Phi_t^2 b_1(t)^2 dt \\ &= \Phi_t^{-1}\{-a_1(t) + b_1(t)^2\}dt - \Phi_t^{-1}b_1(t)dB_t\ . \end{aligned}$$

再对$\Phi_t^{-1}X_t$运用Itô公式，有

$$\begin{aligned} & d(\Phi_t^{-1}X_t) = \Phi_t^{-1}dX_t + X_t d\Phi_t^{-1} - \Phi_t^{-1}b_1(t)\{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dt \\ &= \Phi_t^{-1}\Big\{\{a_1(t)X_t + a_2(t)\}dt + \{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dB_t\Big\} \\ &\quad + X_t\Big\{\Phi_t^{-1}\{-a_1(t) + b_1(t)^2\}dt - \Phi_t^{-1}b_1(t)dB_t\Big\} \\ &\quad - \Phi_t^{-1}b_1(t)\{b_1(t)X_t + b_2(t)\}dt \\ &= \{a_1(t)\Phi_t^{-1}X_t + a_2(t)\Phi_t^{-1}\}dt + \{b_1(t)\Phi_t^{-1}X_t + b_2(t)\Phi_t^{-1}\}dB_t \\ &\quad + \Phi_t^{-1}X_t\{-a_1(t) + b_1(t)^2\}dt - \Phi_t^{-1}X_t b_1(t)dB_t \\ &\quad - \{\Phi_t^{-1}X_t b_1(t)^2 + \Phi_t^{-1}b_1(t)b_2(t)\}dt \\ &= \Phi_t^{-1}\{a_2(t) - b_1(t)b_2(t)\}dt + \Phi_t^{-1}b_2(t)dB_t\ , \end{aligned}$$

从而

$$\Phi_t^{-1}X_t = x + \int_0^t \Phi_u^{-1}\{a_2(u) - b_1(u)b_2(u)\}du + \int_0^t \Phi_u^{-1}b_2(u)dB_u\ ,$$

故

$$X_t = \Phi_t\Big\{x + \int_0^t \Phi_u^{-1}\{a_2(u) - b_1(u)b_2(u)\}du + \int_0^t \Phi_u^{-1}b_2(u)dB_u\Big\}\ .$$

■

§7.5.3 解的基本特性

性质 7.5.6 设$a(t,x)$, $b(t,x)$与η满足定理**??**的条件，则随机微分方程*(**??**)*的唯一强解是*Markov*过程。

证明 对$0 \le s < t$，我们只需证明在X_s已知的条件下，X_t与$\{X_u; 0 \le u < s\}$独立。实际上，由性质**??**的2)知

$$X_t = X_s + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u,$$

这说明X_t只依赖于X_s, $\{X_u; u \in [s,t]\}$和$\{\Delta B_u; u \in [s,t]\}$，这里$\Delta B_u = B_{u+\Delta u} - B_u$是$B_u$的增量。而$\{X_u; u \in [s,t]\}$也只是依赖于$X_s$和$\{\Delta B_u; u \in [s,t]\}$的，因此$X_t$, $t > s$只依赖于X_s和$\{\Delta B_u; u \in [s,t]\}$。同样地，由

$$X_u = \eta + \int_0^u a(l, X_l)dl + \int_0^u b(l, X_l)dB_l,$$

可知X_u, $0 \le u < s$只依赖于η和$\{\Delta B_l; l \in [0,s)\}$。由于$B$为$(P,\mathbb{F})$布朗运动，$\{\Delta B_u; u \in [s,t]\}$与$\mathscr{F}_s$独立，从而$\{\Delta B_u; u \in [s,t]\}$与$\{\eta, \Delta B_l; l \in [0,s)\}$独立，这说明在$X_s$已知的条件下，$X_t$与$\{X_u; 0 \le u < s\}$独立。■

既然随机微分方程(**??**)的解是一个Markov过程，我们能否求出其转移概率密度函数呢？我们先来看一个例子。

例 7.5.7 设$a(t)$, $b(t)$为确定性的关于t的连续函数，x_0为确定的数，试求

$$\begin{cases} dX_t &= a(t)dt + b(t)dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{cases}$$

的解过程的转移密度$f(s,t;x,y)$。

解 对$0 \le s < t \le T$，我们求已知$X_s = x$的条件下X_t的分布。由

$$\begin{aligned} X_t &= X_s + \int_s^t a(u)du + \int_s^t b(u)dB_u \\ &= x + \int_s^t a(u)du + \int_s^t b(u)dB_u, \end{aligned}$$

由于$a(t)$, $b(t)$为确定性的关于t的连续函数，故已知$X_s = x$的条件下X_t为正态分布，且

$$\begin{aligned} E(X_t|X_s = x) &= x + \int_s^t a(u)du \\ D(X_t|X_s = x) &= \int_s^t b(u)^2 du, \end{aligned}$$

从而$(X_t|X_s = x) \sim N(x+\int_s^t a(u)du, \int_s^t b(u)^2du)$，故解过程的转移密度$f(s,t;x,y)$

$$f(s,t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\int_s^t b(u)^2du)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{\left(y-x-\int_s^t a(u)du\right)^2}{\int_s^t b(u)^2du} \right\}$$

■

一般地，我们有如下性质

性质 7.5.8 设$X = \{X_t; t \in [0,T]\}$是如下随机微分方程的强解

$$\begin{cases} dX_t &= a(X_t)dt + b(X_t)dB_t \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

其中$a(x)$, $b(x)$为满足定理??的条件（不显含t），则$X = \{X_t; t \in [0,T]\}$为齐次$Markov$过程，其转移概率密度$p(t;x,y)$满足如下方程

$$\begin{cases} \text{后退方程:} & \dfrac{\partial p}{\partial t} = a(x)\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{2}b(x)^2\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \text{前进方程:} & \dfrac{\partial p}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(y)p(t;x,y)\big) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\big(b(y)^2 p(t;x,y)\big) \end{cases}$$

下面定理反映了随机微分方程的解的扩散性质：

定理 7.5.9 设$X = \{X_t; t \in [0,T]\}$满足如下随机微分方程的强解

$$\begin{cases} dX_t &= a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t, \\ X_0 &= \eta \end{cases}$$

其中$B = \{B_t; t \in [0,T]\}$为标准布朗运动，$a(t,x)$, $b(t,x)$满足定理??的条件的二元连续函数，η满足$E|\eta|^2 < \infty$，则

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E\left[(X_{t+h}-x)\middle|X_t = x\right] &= a(t,x), \\ \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E\left[(X_{t+h}-x)^2\middle|X_t = x\right] &= b(t,x)^2\ . \end{aligned}$$

证明略。

习 题

7.1 已知随机变量X_n的分布为

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{n} & 0 & \sqrt{n} \\ \dfrac{1}{n^k} & 1-\dfrac{2}{n^k} & \dfrac{1}{n^k} \end{pmatrix}.$$

求 (a)当k为何值时，X_n几乎处处收敛于0;

(b)当k为何值时，X_n均方收敛于0.

7.2 设$(X,Y)\sim N(0,\sigma_1^2;0,\sigma_2^2;\rho)$，令$X(t)=X+tY$，$Y(t)=\displaystyle\int_0^t X(u)du$。对任意$0\le s\le t$

(a) 求$EX(t)$, $\mathrm{cov}(X(s),X(t))$;

(b) 求$EY(t)$, $\mathrm{cov}(Y(s),Y(t))$;

(c) 证明$X(t)$在$t>0$上均方连续、均方可微；

(d) 求$Y(t)$的均方导数。

7.3 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y服从参数为的几何分布，即$P(Y=k)=p(1-p)^{k-1}$ (其中$k=1,2,\cdots,p\in(0,1)$)，X与Y独立。令$X(t)=X+e^tY$，$Y(t)=\displaystyle\int_0^t X(u)du$。对任意$0\le s\le t$

(a) 求$X(t)$在$t>0$的概率分布；

(b) 求$EX(t)$, $\mathrm{cov}(X(s),X(t))$;

(c) $EY(t)$, $\mathrm{cov}(Y(s),Y(t))$。

7.4 设$\{B_t;t\ge 0\}$为标准布朗运动，$t>0$，取$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$，$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$，$\delta_n=\max_{0\le k\le n}\Delta t_k$，已知$E(B_t^4)=3t^2$。证明

(a) $(L^2)\displaystyle\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}}\left\{B_{t_k}-B_{t_{k-1}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{B_t^2-t\right\}$；

(b) $(L^2)\displaystyle\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n B_{t_k}\left\{B_{t_k}-B_{t_{k-1}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{B_t^2+t\right\}$；

(c) $(L^2)\displaystyle\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}+\theta\Delta t_k}\left\{B_{t_k}-B_{t_{k-1}}\right\}=\frac{1}{2}\left\{B_t^2-(1-2\theta)t\right\}$。

7.5 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，设$h(u)$是一般的连续函数，$u\geq 0$，记$Y(t)=\int_0^t h(u)dB_u$。证明$\{Y(t);t\geq 0\}$是鞅。

7.6 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，利用Itô积分的定义证明

$$\int_0^t udB_u = tB_t - \int_0^t B_u du.$$

7.7 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，求下列过程的Itô微分形式：

(1) $X_t=(B_t)^n$，n为正整数;

(2) $X_t=a+bt+te^{B_t}$;

(3) $X_t=e^{\mu t+\alpha B_t}$;

(4) $X_t=e^{0.5t}\cos B_t$.

7.8 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，x_0为常数，求解下列随机微分方程：

(1) $dX_t=\mu X_tdt+\sigma dB_t$, $X_0=x_0$, 其中μ, $\sigma>0$为常数（此方程的解称为Ornstein-Uhlenbeck方程）；

(2) $dX_t=-X_tdt+e^{-t}dB_t$, $X_0=x_0$;

(3) $dX_t=(e^{-t}+X_t)dt+\sigma X_tdB_t$, $X_0=x_0$, 其中μ, $\sigma>0$为常数

7.9 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，$\{X_t;t\geq 0\}$为如下随机微分方程的解：

$$\begin{cases} dX_t &= (\alpha_t-\beta_tX_t)dt+\gamma_tdB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{cases}$$

其中α_t, β_t, γ_t 为（确定的）连续函数，求

(a) 求解该随机微分方程；

(b) 求EX_t与DX_t;

(c) 求X_t的转移概率密度函数$p(s,t;x,y)$。

7.10 设$\{B_t;t\geq 0\}$为标准布朗运动，固定$a,b\in\mathbb{R}$，考查如下随机微分方程：

$$\begin{cases} dY_t &= \dfrac{b-Y_t}{1-t}dt+dB_t, \\ Y_0 &= a, \quad t\in[0,1] \end{cases}$$

1) 求解此随机微分方程；

2) 证明$Y_1 = b$。

7.11 设$\{B_t; t \geq 0\}$为标准布朗运动，$\{X_t; t \geq 0\}$为如下随机微分方程的解：

$$\begin{cases} dX_t & = \alpha_t X_t dt + \beta_t X_t dB_t, \\ X_0 & = x_0, \end{cases}$$

其中α_t, β_t为（确定的）连续函数，令$Y_t = (X_t)^n$，求

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E\left[(Y_{t+h} - Y_t) \middle| Y_t = y \right],$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} E\left[(Y_{t+h} - Y_t)^2 \middle| Y_t = y \right] .$$

第八章　平稳过程

§8.1　平稳过程的定义和性质

直观背景：所谓平稳过程，粗略地说，就是指它的概率特征不随时间推移而变化的随机过程。

严（强）平稳过程(联合概率与时间的起点无关):

$$\{X(t);t\in T\},\{T=\{\pm1,\pm2,...\},T=(-\infty,+\infty)\}$$

$t_1<t_2<...<t_n$

$$P(X(t_1)\in A,...X(t_n)\in A)=P(X(t_1+h)\in A,...X(t_n+h)\in A)$$

宽（弱）平稳过程(协方差与时间的起点无关):

$$EX(t)=m,cov(X(t),X(s)=R(s-t),cov(X(t),X(t+h)=R(h).$$

由上述定义可知，二阶矩有限的严平稳过程一定是宽平稳过程。

本章主要介绍宽平稳过程的一些重要结果。下面所提到的平稳过程都是指宽平稳过程。

例 8.1.1 *(1)*设$\xi=\{\xi_n,n\in\mathbb{Z}\}$为实的*(*或复的*)*随机序列,且$E\xi_n=0,E|\xi_n^2|=\sigma^2<\infty,E\xi_n\xi_m=\delta_{nm}\sigma^2$其中

$$\delta_{nm}=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

可见$\xi=\{\xi_n,n\in\mathbb{Z}\}$是平稳过程,人们常称$\xi=\{\xi_n,n\in\mathbb{Z}\}$为**白噪声**.

*(2)*设

$$X_n=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\xi_{n-k},$$

其中$\xi=\{\xi_n,n\in\mathbb{Z}\}$为白噪声，

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2<\infty.$$

为了说明X_n是宽平稳过程，先来证明

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\xi_{n-k}$$

是有意义的.

令

$$X_n^N = \sum_{k=-N}^{+N} a_k\xi_{n-k},$$

则对$\forall n, (X_n^N, N \geq 0)$均方收敛.这是因为$\forall n \in \mathbb{Z}$固定，当$N > M$时

$$E|X_n^N - X_n^M|^2 = E|\sum_{M\leq|k|\leq N} a_k\xi_{n-k}|^2 = \sigma^2 \sum_{M\leq|k|\leq N} |a_k|^2 \to 0(N, M \to \infty),$$

即$\{X_n^N, N \geq 0\}$关于N是柯西序列，所以

$$\exists X_n = (m.s.) \lim_{N\to\infty} X_n^N = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\xi_{n-k}$$

现在来考察X_n的概率特征.显然$EX_n = 0$而

$$\begin{aligned} R(n, n+r) \quad &= E(X_n)\overline{X_{n+r}} \\ &= E[(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\xi_{n-k})\overline{(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l\xi_{n+r-l})}] \\ &= (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\overline{a_{k+r}}) \triangleq R(r). \end{aligned}$$

上式只与时间差r有关，所以$X_T = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$为宽平稳过程（序列）.

例 8.1.2

$$Z(t) = \sigma\cos(tX + Y),$$

其中，随机变量X 服从$\sim [0, \frac{1}{2}]$ 上的均匀分布，Y 服从$\sim [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上的均匀分布且与X独立. 可以验证$Z(t)$ 不是平稳过程。但如果Y 服从$\sim [0, 2\pi]$ 上的均匀分布且与X独立，则$Z(t)$ 是一个平稳过程。

性质 8.1.3 *1)* $R(0) = D(t)$;

2) $|R(t)| \leqslant R(0)$;

3) $R(t) = \overline{R(-t)}$;

4) $R(t)$是t的非负定函数.

§8.2 ARMA模型

最常用的一类宽（弱）平稳过程是自回归滑动和过程(Autoregressive Moving Average Process). 它的定义如下：

称$\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 是(p,q)阶自回归滑动和过程，简称ARMA(p,q)过程或ARMA(p,q)模型，如果它是满足如下方程的宽平稳过程：

$$\sum_{k=0}^{p} a_k X_{n-k} = \sum_{j=0} b_j \xi_{n-j}$$

其中，$a_0 = 1, a_k, b_j$ 均为常数且$\sum_{k=0}^{p} a_k z^k = 0, \sum_{j=0} b_j z^j = 0$ 的根(关于变量z)都在单位圆之外。

一阶自回归模型AR(1):

$$\begin{cases} X_n = aX_{n-1} + \xi_n, & |a| < 1; \\ X_{-\infty} = 0, \ . \end{cases}$$

由此可推出

$$X_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \xi_{n-k}$$

若定义推移算子B ：

$$B^0 = I, BX_n = X_{n-1}, B^k X_n = X_{n-k}$$

一般地, 令$\alpha(B) = \sum_{k=0}^{p} a_k B^k$, $AR(p)$ 模型可表示为$\alpha(B)X_n = \xi_n$.

当$p = 2$时，令

$$\alpha(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 = 0$$

若

$$(1 - \mu_1 z)(1 - \mu_2 z) = 0, |\mu_1| < 1, |\mu_2| < 1, \mu_1 \neq \mu_2$$

则有

$$\begin{aligned} X_n &= \alpha(B)^{-1}\xi_n = \tfrac{1}{(1-\mu_1 B)(1-\mu_2 B)}\xi_n = \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}(\tfrac{\mu_1}{I-\mu_1 B} - \tfrac{\mu_2}{I-\mu_2 B})\xi_n \\ &= \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2}[\mu_1 \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \mu_1^k B^k - \mu_2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu_2^k B^k]\xi_n = \tfrac{1}{\mu_1-\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mu_1^{k+1} - \mu_2^{k+1}]\xi_{n-k} \end{aligned}$$

同理可以验证，$AR(p)$ 中的X_n 可表示成n时刻及之前的白噪声的线性组合。

§8.3 相关函数的谱分解

令$\rho(r)=R(r)/R(0)$. 由于$\rho(r)$ 表示X_t 和X_{t+r} 之间的相关系数，我们称$\rho(r)$ 为相关函数。下面的定理给出了相关函数的谱分解。

定理 8.3.1 设$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2,...\}$ 是平稳序列，则

$$\rho(r)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{irx}dF(x),$$

其中，$F(x)$ 是$[-\pi,\pi]$ 上的分布函数，通常也称$F(x)$ 为$\rho(r)$ 的功率谱函数。若$\sum_{r=-\infty}^{\infty}|\rho(r)|<\infty$, 则$F(x)'=f(x)$ 存在，称$f(x)$ 为功率谱密度函数，且有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\rho(r)e^{-ixr},\ \ \rho(r)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{irx}f(x)dx.$$

定理 8.3.2 设$\{X(t), -\infty<t<\infty$ 是平稳过程，则

$$\rho(r)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{irx}dF(x),$$

其中，$F(x)$ 是$(-\infty,\infty)$ 上的分布函数，也称是$\rho(r)$ 的功率谱函数。若$\int_{-\infty}^{\infty}|\rho(r)|dr<\infty$, 则$F(x)'=f(x)$ 存在，称$f(x)$ 为功率谱密度函数，且有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(r)e^{-ixr}dr,\ \ \rho(r)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{irx}f(x)dx.$$

例 8.3.3 设平稳序列的协方差函数为$R(n)=a^{|n|}/2\pi, n=0,\pm1,\pm2,....$ 求谱密度函数。由定理可得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-ixn}a^{|n|}\frac{1}{2\pi}(\frac{1}{1-ae^{-ix}}+\frac{1}{1-ae^{ix}}-1)=\frac{1-a^2}{2\pi(1-2acosx+a^2)}$$

§8.4 平稳过程的遍历性

由强大数定理我们知道：相互独立同分布的随机变量序列，$X_n, n\geq 1$，其时间的平均$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n$ 等于空间（或统计)平均$E(X_1)=m$, 即

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n=E(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x),\ \ a.e.$$

其中，$F(x)$ 是X_n 的分布函数。那么，平稳过程（序列）是否也有类似的结果？所谓平稳过程的遍历性问题就是指：在什么条件下，平稳过程时间的平均等于空间的平均，而这里遍历性是指$X_1(\omega), X_2(\omega), ...$ 可遍历（或历经）所有可能的状态。

若下述极限在均方收敛意义下存在，则

$$\overline{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} X_n, \ \left(或 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt\right)$$

称为$\{X_n\}$ (或$\{X(t)\}$) 的均值的时间平均，而

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} (X_n X_{n+\tau} - m^2), \ \left(或 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (X(t)X(t+\tau) - m^2)dt\right)$$

称为$\{X_n\}$ (或$\{X(t)\}$) 的协方差的时间平均。

若均值的时间平均几乎处处等于均值的空间平均，即，$\bar{X} = E(X_1) = m$ a.e., 则称$\{X_n\}$ (或$\{X(t)\}$) 具有**均值遍历性**；若$\overline{R(\tau)} = R(\tau)$ a.e., 则称$\{X_n\}$ (或$\{X(t)\}$) 具有**协方差遍历性**。

例 8.4.1 设X 是服从$[0, \pi]$ 上均匀分布的随机变量, 则随机过程$X(t) = cos(t + X), -\infty < t < +\infty$, 是平稳过程, 并且它同时具有均值遍历性和协方差遍历性。

事实上，易验证：$E(X(t)) = 0$, $R(\tau) = \frac{1}{2}cos(\tau)$，即$X(t)$ 是平稳过程. 另一方面，

$$\bar{X} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [cos(t)cos(X) - sin(t)sin(X)]dt = 0$$

且

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} cos(t + X)cos(t + \tau + X)dt = \frac{1}{2}cos(\tau)$$

此说明，它同时具有均值遍历性和协方差遍历性。

很多平稳过程不满足均值遍历性，如随机过程$X(t) \equiv X$ 是一个平稳过程, 但它不是均值遍历的，其中X 是不为常数的随机变量。

下面给出判定满足均值遍历和协方差遍历的条件。

定理 8.4.2 *(均值遍历性)*

*(i)*平稳序列$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2...\}$ 满足均值遍历性的充要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N}(1-\frac{n}{2N})R(n)=0$$

(ii) 平稳过程$\{X(t), -\infty<t+\infty\}$ 满足均值遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau=0$$

证明　下面只给出连续时间情形的证明，离散情形可类似证明。令

$$X_T=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

显然，$E(X_T)=m=E(X(t)$. 进一步地，我们有

$$D(X_T)=E(X_T-m)^2=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R(t-s)dtds=\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})R(\tau)d\tau$$

由此可知定理(ii)的结论成立。■

例 8.4.3 设$\{X(t), t\geq 0\}$ 是均值为0, 协方差为$R(\tau)=e^{-2a|\tau|}(a>0)$ 的平稳过程，试讨论其均值遍历性。

由于

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}(1-\frac{\tau}{T})R(\tau)d\tau=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2aT}(1-\frac{1}{2aT})(1-e^{-2aT})=0$$

因此，$X(t)$ 是均值遍历的。

定理 8.4.4 *(协方差遍历性)*

(i) 平稳序列$\{X_n, n=0,\pm1,\pm2...\}$ 满足协方差遍历性的充要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{2N}(1-\frac{n}{2N})[R_m(n)-R(m)^2]=0$$

(ii) 平稳过程$\{X(t), -\infty<t+\infty\}$ 满足协方差遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})[R_t(\tau)-R(t)^2]d\tau=0$$

其中，$R_m(n)=E(X_kX_{k+m}X_{k+n}X_{k+n+m}), R_t(\tau)=E(X(s)X(s+\tau)X(s+t)X(s+t+\tau))$.

习 题

8.1 设随机电报信号过程$\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$只取+1和−1 两个状态，且$\forall t\in\mathbb{R}, P(X(t)=1)=PX(t)=-1)=1/2$.记$X(t)$在$(s, s+t]$ 上符号改变的次数为$N(s+t)-N(s)=\triangle N(s, s+t)$,设它是参数为$\mu t$的泊松分布.试证：$\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$是宽平稳过程，并求出其相关系数$\rho(\tau)$及其功率谱密度.

8.2 设$\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$为宽平稳过程，$EX(t)=0, \rho_X(\tau)$为其相关函数,令

$$Y(t)=\begin{cases}1, & X(t)\geqslant 0,\\ -1, & X(t)\leqslant 0\ .\end{cases}$$

试证$\{Y(t), t\in\mathbb{R}\}$为宽平稳过程，求其相关函数$\rho_Y(\tau)$.

8.3 试求平稳序列$\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$的相关系数$\rho(\tau)$及谱密度$f_X(\lambda)$,若X满足：

(1) $AR(1): X_n+\alpha X_{n-1}=\xi_n, \quad |\alpha|<1$;

(2) $AR(2): X_n+\alpha_1X_{n-1}+\alpha_2X_{n-2}=\xi_n$,其中,$\alpha(z)=1+\alpha_1z+\alpha_2z^2$的根在单位圆外；

(3) $ARMA(1,1): X_n+\alpha X_{n-1}=\xi_n+b_1\xi_{n-1}, \quad |\alpha|<1, |b|<1$.

8.4 设$AR(2)$模型为$X_n-2aX_{n-1}+a^2X_{n-2}=\xi_n$,其中$|a|<1$.

(1) 试证X_n的显示表达式（传递形式）为

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a^k\xi_{n-k}.$$

(2) 试求$X_n-1.2X_{n-1}+0.36X_{n-2}=\xi_n$的$\rho_X(r)$.

（提示：当$r>0$时，$\rho(r)$是差分方程$\rho(r)-1.2\rho(r-1)+0.36\rho(r-2)=0$的解，其一般解为$\rho(r)=C_1 0.6^r+C_2r(0.6)^r$,再利用$\rho(0)=1, \rho(1)=\rho(-1)$定出系数$C_1, C_2$.）

8.5 设$\{X_n, n\geqslant 0\}$为宽平稳序列，$EX_n=0$,及协方差$R(r)$已知.

(1) 若取$\widehat{X}_{n+1}(1)=aX_n$作为$X_{n+1}$的估计（或预测），试求最佳线性均方估计，并求相应的均方误差$\triangle_n=E(X_{n+1}-\widehat{X}_{n+1})^2$.

(2) 若取$\widehat{X}_{n+1}(2)=bX_n+cX_{n-1}$作为$X_{n+1}$的估计，试确定$b, c$使$\widehat{X}_{n+1}(2)$是$X_{n+1}$的最佳均方估计.

8.6 设$\{X_i(t), -\infty < t < +\infty\}(1 \leqslant i \leqslant 3)$为宽平稳过程，其协方差函数分别为

(1) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + |\tau|), \quad \alpha > 0, \sigma > 0;$

(2) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta t, \quad \alpha > 0, \beta > 0$为常数;

(3) $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| + (\alpha\tau)^2/3), \quad \alpha > 0.$

试分别求其功率谱密度函数.

8.7 设$\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$是满足方程$AR(1): X_n - aX_{n-1} = \xi^n$的平稳解（其中$|a| < 1, \{\xi_n n \in \mathbb{Z}\}$为白噪声序列）.试用$X_n, X_{n-1}$的线性函数作为$X_{n-1}$的估计，试求其最佳线性均方预测.

8.8 设X_0的概率密度函数是$f(x) = 2xI_{(x \geqslant 0)}$,对$n \geqslant 1, X_0, \cdots, X_n, X_{n+1}$是$(1 - X_n, 1]$ 上的均匀分布.试证$X_n, n \geqslant 0$是满足均值遍历的平稳过程.

8.9 设$X_0 = Z \sim U[0, 1), X_{n+1} = 2X_n \cdot I_{(X_n < 1/2)} + (2X_n - 1) \cdot I_{(X_n \geqslant 1/2)}$.

(1) 试证：$\{X_n, n \geqslant 0\}$是平稳序列.

(2) 若Z用二进制小数表示，即$Z = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_k = 0.Z_0Z_1Z_2\cdots$,其中$Z_k$取值0或1，试证$X_n = 0.Z_nZ_{n+1}\cdots$;

(3) 利用遍历性定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \{2^k Z\} = \frac{1}{2} \quad (a.s),$$

其中$\{x\}$表x的小数部分，即$\{x\} = x - [x], [x]$表不超过x的最大整数.

8.10 设$\xi(t) = X\cos(\eta t + \theta)$,其中$\theta \sim U[0, 2\pi]$,$X$与$\theta$相互独立取值为正，且$EX^2 < \infty, \eta > 0$为常数.试证$\xi(t), -\infty < t < +\infty$ 为宽平稳过程，并讨论$X(t)$ 是否有均值遍历性.

8.11 随机过程

$$X(t) = A\sin t + B\cos t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

其中，A, B是均值为0且不相关的随机变量，且$EA^2 = EB^2$.试讨论$X(t)$的遍历性.

8.12 设平稳过程$X(t), -\infty < t < +\infty, EX(t) = 0, R(\tau) = Ae^{-a|\tau|} \times (1 + a|\tau|)$,其中，$A, a$是正常数. 试问$X(t)$ 是否有均值遍历性.

参考文献

[1] 林元烈,《应用随机过程》，清华出版社（2002）。

[2] 刘嘉昆,《应用随机过程》，科学出版社（2002）。

[3] Liptser, R.S. and Shiryaev, A.N.(1977). *Statistics of Random Processes. Vol I: General Theory.* Springer-Verlag, New York.

[4] Karatzas, I. and Shreve, S.E.(1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.

[5] Revuz, D. and Yor, M.(1991,1994,1998): *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg.