מערכות לומדות תרגיל 1

שיר שבח 322407701

24 במרץ 2022

2. חלק תיאורטי

2.1 רקע מתמטי

2.1.1 אלגברה לינארית

.1

נשים לב כי מטריצה אורתוגונלית מקיימת את התכונה $\langle Av \mid Aw\rangle = \langle v \mid w\rangle$ לכל $v, w \in V$ (לינארית 2). לכן עבור $v \in V$ מתקיים:

$$\|Av\|^2 = \langle Av \mid Av\rangle = \langle v \mid v\rangle = \|v\|^2$$

לכן $\|Av\| = \|v\|$.

.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

כדי למצוא את V, אנו צריכים לחשב את הווקטורים העצמיים של $A^T A$.

$$W = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה שמצאנו. ז"א נחשב $(W - \lambda I)\, x = 0$ עבור $x \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} x = 0$$

נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה הזאת כדי למצוא את הערכים העצמיים.

$$\left|\begin{array}{ccc} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{array}\right| = (2-\lambda)\cdot\left|\begin{array}{cc} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{array}\right| + 2\cdot\left|\begin{array}{cc} 0 & 2-\lambda \\ 2 & -2 \end{array}\right|$$
$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(4-\lambda)-4\right) + 2\cdot\left(-2\cdot(2-\lambda)\right)$$
$$= (2-\lambda)^2(4-\lambda) - 8(2-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(4-\lambda)-8\right)$$
$$= (2-\lambda)\left(-6\lambda+\lambda^2\right)$$
$$= \lambda(2-\lambda)(\lambda-6)$$

לכן הערכים העצמיים הם: $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.
עבור כל ערך עצמי נמצא את הווקטור העצמי המתאים לו.
<u>עבור $\lambda_1=0$:</u>

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1+x_3=0$$
$$x_2-x_3=0$$

לכן

$$x_1=-x_3$$
$$x_2=x_3$$

לכן קיבלנו ווקטור עצמי $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$. ננרמל ונקבל: $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\right\}$.
<u>עבור $\lambda_2=2$:</u>

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 2 \\ 0 & 2-2 & -2 \\ 2 & -2 & 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן

$$x_3=0$$
$$x_1=x_2$$

לכן קיבלנו את הווקטור עצמי: $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$. ננרמל ונקבל: $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}\right\}$.

<u>עבור $\lambda_3 = 6$:</u>

$$\begin{bmatrix}2-6 & 0 & 2\\0 & 2-6 & -2\\2 & -2 & 4-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 0 & 2\\0 & -4 & -2\\2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

מחישוב מnumpy למציאת הבסיס למטריצה הנ"ל קיבלנו כי הווקטור עצמי: $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$.

לכן קיבלנו ווקטור עצמי: $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$. ננרמל ונקבל: $\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\right\}$.

קיבלנו כי $V = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$.

נשים לב שהערכים הסינגולריים של Σ הם שורש הערכים העצמיים של V.

לכן $\Sigma = \begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$.

נחפש את U ע"י השיוויון $AV = U\Sigma$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} = U\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\-\sqrt{6} & 0 & 0\end{bmatrix} = U\begin{bmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\0 & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = U$$

ואז קיבלנו כי:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6} & \\ & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

.3

נשים לב כי C_0 היא מטריצה ריבועית בעלת n ערכים עצמיים ו־n ווקטורים עצמיים מנורמלים (נתון). משום שיש לה n ערכים עצמיים שונים ניתן לכתוב $\lambda_1 > ... > \lambda_n$ (אי־שיוויון חזק).

לכל $b_0 \in V$, ניתן לכתוב אותו כצירוף לינארי של ווקטורי הבסיס :

$$b_0 = a_1 v_1 + ... + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

נכפול את שני הצדדים ב־C_0:

$$C_0 b_0 = a_1 C_0 v_1 + ... + a_n C_0 v_n$$

לפי תכונת ווקטורים עצמיים נקבל:

$$C_0 b_0 = a_1 \lambda_1 v_1 + ... + a_n \lambda_n v_n$$

נחזור על התהליך $(C_0)^k$:

$$\begin{aligned} C_0^k b_0 &= a_1 \lambda_1^k v_1 + ... + a_n \lambda_n^k v_n \\ &= \lambda_1^k \left(a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + ... + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right) \end{aligned}$$

משום שאמרנו כי λ_1 הוא הערך העצמי הגדול ביותר, נקבל שלכל i מ־1 ל־n: $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \to 0$ כאשר k שואף ל־ ∞.
לכן:

$$\begin{aligned} C_0^k b_0 &= \lambda_1^k \left(a_1 v_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + ... + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right) \\ &\xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda_1^k a_1 v_1 \end{aligned}$$

לכן עכשיו נקבל כי

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|} = \frac{C_0^k b_0}{\|C_0^k b_0\|} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{\lambda_1^k a_1 v_1}{\|\lambda_1^k a_1 v_1\|} \\ &= \frac{\lambda_1^k a_1 v_1}{\left|\lambda_1^k\right| \cdot |a_1| \, \|v_1\|} \end{aligned}$$

$\|v_1\| = 1$ כי הוא ווקטור עצמי מנורמל. ונקבל כי:

$$\lim_{k \to \infty} b_k = \lim_{k \to \infty} b_{k+1} = \frac{\lambda_1^k a_1 v_1}{\left|\lambda_1^k\right| \cdot |a_1|} = \pm v_1$$

2.1.2 חשבון רב משתנים

4. יהא $x \in \mathbb{R}^n$ להיות וקטור מתוקן ו-$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ להיות מטריצה אורתוגונלית מתוקנת. חשבו את היעקוביאן של הפונקציה $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$f\left(\sigma\right)=U\cdot\mathbf{diag}\left(\sigma\right)U^{T}x$$

נפתח את $f\left(\sigma\right)$:

$$U\cdot\mathrm{diag}\left(\sigma\right)U^{T}x=\begin{bmatrix}| & | & |\\ u_{1} & \cdots & u_{n}\\ | & | & |\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{1}\\ & \ddots\\ & & \sigma_{n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cdots & u_{1}^{T} & \cdots\\ \cdots & | & \cdots\\ \cdots & u_{n}^{T} & \cdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{1}\\ |\\ x_{n}\end{bmatrix}$$

מתקיים:

$$\begin{bmatrix}\cdots & u_{1}^{T} & \cdots\\ \cdots & | & \cdots\\ \cdots & u_{n}^{T} & \cdots\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{1}\\ |\\ x_{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle \\ |\\ \left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{1}\\ & \ddots\\ & & \sigma_{n}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle \\ |\\ \left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{1}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle \\ |\\ \sigma_{n}\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}| & | & |\\ u_{1} & \cdots & u_{n}\\ | & | & |\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{1}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle \\ |\\ \sigma_{n}\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix} & =\begin{bmatrix}u_{11} & u_{1n}\\ \\ u_{n1} & u_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{1}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle \\ |\\ \sigma_{n}\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}\\ & =\begin{bmatrix}u_{11}\cdot\sigma_{1}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle +...+u_{1n}\cdot\sigma_{n}\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \\ \vdots\\ u_{n1}\cdot\sigma_{1}\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle +...+u_{nn}\cdot\sigma_{n}\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{1}\left(\sigma\right)\\ \vdots\\ f_{n}\left(\sigma\right)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

לכן בעצם נרצה למצוא את היעקוביאן של המטריצה הנ"ל.

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_{1}(x)}{\partial x_{1}} & \cdots & \frac{\partial f_{1}(x)}{\partial x_{n}}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_{n}(x)}{\partial x_{1}} & \ldots & \frac{\partial f_{n}(x)}{\partial x_{n}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}\cdot\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle & \cdots & u_{1n}\cdot\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \\ \vdots & & \vdots\\ u_{n1}\cdot\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle & \cdots & u_{nn}\cdot\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}| & \cdots & |\\ u_{1}^{T}\cdot\left\langle u_{1},x_{1}\right\rangle & & u_{n}^{T}\cdot\left\langle u_{n},x_{n}\right\rangle \\ | & \cdots & |\end{bmatrix}$$

5. השתמשו בכלל השרשרת כדי לחשב את הגרדיאנט של $h(\sigma) = \frac{1}{2}\|f(\sigma) - y\|^2$.

$$\begin{aligned} h'(\sigma) &= \frac{1}{2} \cdot 2(f(\sigma) - y) \cdot f'(\sigma) \\ &= (f(\sigma) - y) \cdot f'(\sigma) \end{aligned}$$

6. חשבו את היעקוביאן של ה softmax function $S : \mathbb{R}^k \to [0,1]^k$

$$S(x)_j = \frac{e^{x_j}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}}$$

עבור כל קורדינטה i, j במטריצת יעקוביאן נחשב:

במקרה בו $i = j$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \frac{e^{x_j}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}} &= \frac{e^{x_i}\left(\sum_k e^{x_k}\right) - \left(e^{x_i}\right)^2}{\left(\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}\right)^2} \\ &= \frac{e^{x_i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}} \cdot \frac{\left(\sum_k e^{x_k}\right) - e^{x_j}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}} \\ &= S_i(1 - S_i) \end{aligned}$$

במקרה בו $i \neq j$:

$$\frac{\partial S_i}{\partial x_j} \frac{e^{x_i}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}} = \frac{0 - e^{x_i} e^{x_j}}{\left(\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}\right)^2} = -(S_i) \cdot (S_j)$$

7. יהא $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **הפונקציה** $f(x, y) = x^3 - 5xy - y^5$. **חשבו את מטריצת ה־Hessian של** f.

מטריצת ה־Hessian מוגדרת להיות:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_d} \end{bmatrix}$$

במטריצת הנ"ל, $d = 2$. לכן זו מטריצה 2×2.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -5 \\ -5 & -20y^3 \end{bmatrix}$$

2.2 תורת האומדן

8. יהיו $x_1, x_2, \ldots \sim_{iid} P$ דגימות אינסופיות ב"ת בעלות התפלגות P בעלות תוחלת ושונות סופיים. הראו כי אומד הנראות המחושב עבור $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum x_i$ הדגימות הראשונות הוא אומד נראות עקבי. n

נרצה להראות כי עבור n הראשונים, ולכל $\varepsilon > 0$, מתקיים כי:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon\right) = 0$$

כאשר μ הוא הערך האומד האמיתי של תוחלת הדגימות.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\hat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum x_i - \mu\right| > \varepsilon\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\sum x_i - n\mu\right| > n\varepsilon\right) \\
&\underset{\text{Chebyshev}}{<} \frac{Var\left(\sum x_i\right)}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\sum Var\left(x_i\right)}{(n\varepsilon)^2} \\
&= \frac{n\cdot\sigma^2}{(n\varepsilon)^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

.9

נחשב עבור כל שורה במטריצה:

$$\begin{aligned}
\text{log_likelihood}\left(\mu,\Sigma \mid x^{(i)}\right) &= \log\prod_{i=1}^{m} f_{X^{(i)}}\left(x^{(i)} \mid \mu,\Sigma\right) \\
&= \log\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^{(i)}-\mu\right)^T\Sigma^{-1}\left(x^{(i)}-\mu\right)\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(-\frac{p}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\left(x^{(i)}-\mu\right)^T\Sigma^{-1}\left(x^{(i)}-\mu\right)\right)
\end{aligned}$$

לכן קיבלנו כי כל המטריצה היא:

$$\text{log\_likelihood}(\mu,\Sigma) = -\frac{mp}{2}\log(2\pi) - \frac{m}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(x^{(i)}-\mu\right)^T\Sigma^{-1}\left(x^{(i)}-\mu\right)$$

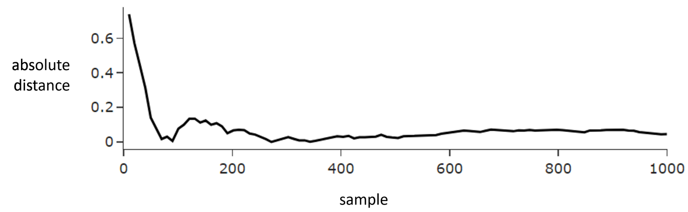
3. חלק מעשי

.1

$$(\text{mu\_}, \text{var\_}) = (9.955, 0.975)$$

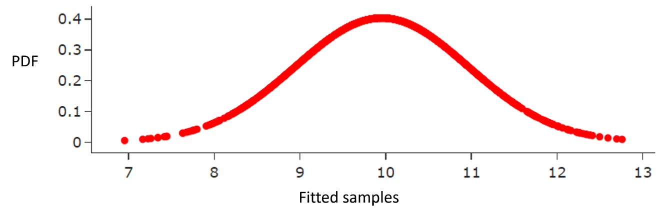
.2

Question 2 - absolute distance between the estimated- and true value of the expectation



.3

Question 3 - empirical PDF of the Univariate Gaussian

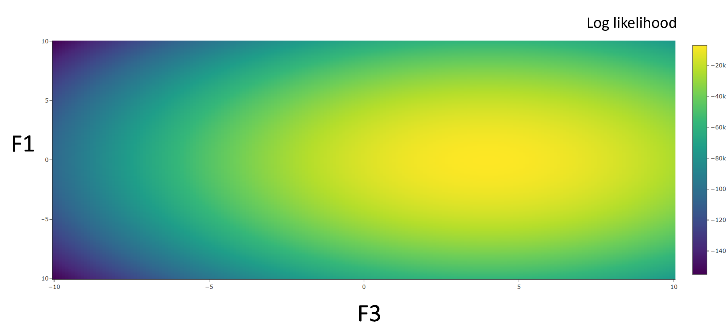


.4

```
[-0.02282878 -0.04313959  3.9932571  -0.02038981]
[[ 0.91667608  0.16634444 -0.03027563  0.46288271]
 [ 0.16634444  1.9741828  -0.00587789  0.04557631]
 [-0.03027563 -0.00587789  0.97960271 -0.02036686]
 [ 0.46288271  0.04557631 -0.02036686  0.9725373 ]]
```

.5

Question 4 – log likelihood of multivariate gaussian



.6

$$F1 = -0.05$$
$$F2 = 3.97$$