

מתמטיקה בדידה א תשע"ז - דף תרגיל 7 – קומבינטוריקה

תרגילים מומלצים – לפחות : 4, 6, 10, 14, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27-ב,ג,ה, 28, 29-ב,ד, 31, 32, 33, 36 .
להגשה: מתוך התרגילים המומלצים החל מ- 24.

1. אדם נכנס למכולת ומבקש לקנות חומוס. לבקשתו הוא נענה שיש במכולת חומוס של חמש חברות שונות, כאשר כל חברה משווקת את החומוס בקופסאות בשלוש מידות שונות (1ק"ג, 500 גרם ו-250 גרם) וכל קופסה ניתן לקבל עם סחוג ובלי סחוג.
 - א. כמה אפשרויות לקניית קופסת חומוס אחת עומדות בפניו?
 - ב. כמה אפשרויות לקניית שתי קופסאות חומוס – האחת עם סחוג והשניה בלי סחוג, עומדות בפניו?
 - ג. כמה אפשרויות לקניית שלוש קופסאות חומוס – האחת במשקל 1ק"ג, השניה במשקל 500 גרם והשלישית במשקל 250 גרם, עומדות בפניו?
2. נתונה קבוצה של שבעה צרפתים, עשרה איטלקים וחמשה אנגלים.
 - א. בכמה אופנים ניתן לבחור מהקבוצה שלשה אנשים מלאומים שונים?
 - ב. בכמה אופנים ניתן לבחור מהקבוצה שני אנשים בעלי לאום שונה?
 - ג. בכמה אופנים ניתן לבחור מהקבוצה שלשה אנשים בעלי לאום זהה?
 - ד. בכמה אופנים ניתן לבחור מהקבוצה שלשה אנשים באופן שיהיו ביניהם שנים בעלי לאום משותף והשלישי בעל לאום אחר?
3. בכמה אופנים ניתן להושיב עשרה אנשים ביניהם דן, גל, ורן על ספסל ובו עשרה מקומות –
 - א. ללא מגבלה?
 - ב. כאשר גל רוצה לשבת באחד הקצוות של הספסל?
 - ג. כאשר דן ורן רוצים לשבת דווקא בשני קצות הספסל?
 - ד. כאשר גל דן ורן רוצים ששניים מהם ישבו בשני קצות הספסל והשלישי ישב במקום הסמוך לאחד הקצוות?
 - ה. כאשר גל דן ורן רוצים לשבת בשלשה מקומות סמוכים?
 - ו. כאשר דן וגל אינם מוכנים לשבת במקומות סמוכים?
 - ז. כאשר אף זוג מבין דן גל ורן אינם מוכנים לשבת במקומות סמוכים? זהירות!!
 בכל הסעיפים התייחס/י למצב בו נכנעים לרצונות ולשיגעונות של כולם. – לא חינוכי!
4. (1) בבחינה ארבע שאלות באלגברה וארבע שאלות בהנדסה. בכמה אופנים ניתן לסדר את שמונה השאלות בדף המבחן –
 - א. כאשר נדרש שכל השאלות באלגברה תופענה לפני כל השאלות בהנדסה?
 - ב. כאשר נדרש שהשאלות באלגברה תופענה זו ליד זו, וכך גם השאלות בהנדסה?
 - ג. כאשר נדרש שהשאלות משני הנושאים – אלגברה והנדסה תופענה בסמיכות ולסירוגין?
 - ד. ללא הגבלות.
 (2) בבחינה חמש שאלות באלגברה, ארבע שאלות בהנדסה ושלוש שאלות בקומבינטוריקה. בכמה אופנים ניתן לסדר את 12 השאלות בדף המבחן –
 - א. כאשר נדרש שהשאלות בכל אחד מהנושאים תופענה ברצף (בלי ששאלה מנושא אחר תשתלב ביניהן)?
 - ב. כאשר נדרש שהשאלות באלגברה תופענה ברצף, וכך גם השאלות בהנדסה אך אין דרישה כזו מהשאלות בקומבינטוריקה?
 - ג. כאשר נדרש שהשאלות משני הנושאים – אלגברה והנדסה תופענה לסירוגין וללא שאלות בקומבינטוריקה ביניהן?
 - ד. ללא הגבלות.
5. בכד מונחים שבעה כדורים השונים זה מזה, מהם ארבעה ירוקים ושלושה צהובים. בכמה אופנים ניתן לבחור מהכד שלשה כדורים כך ש:
 - א. ביניהם יהיו בדיוק שנים ירוקים?
 - ב. לפחות אחד מהם יהיה צהוב?
 - ג. ביניהם יהיו כדורים משני הצבעים?
6. יחידה צבאית מורכבת מתשעה חיילים ושלושה קצינים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם צוות של ארבעה אנשים לסיוור –
 - א. בלי הגבלות.
 - ב. אם נדרש שבצוות ישתתף בדיוק קצין אחד?
 - ג. אם נדרש שבצוות ישתתף לפחות קצין אחד?

7. בכמה אופנים ניתן לחלק שלשה פרסים לשלשה מבין עשרים תלמידים מצטיינים -
- א. כשלושת הפרסים הם שלושה עותקים של ספר מתמטיקה?
 - ב. כשלושת הפרסים הם שלושה ספרי מתמטיקה שונים?
8. במוסד למחקר עובדים עשרים אנשים כולל מנהל המוסד, סגנו והמהנדס הראשי. ממוסד זה יש לשלוח להשתלמות חמשה אנשים, בתנאי שלפחות אחד משלושת האנשים (המנהל, סגנו ומהנדס) יישאר במוסד. בכמה אופנים אפשר לבחור את האנשים שיצאו להשתלמות?
9. בכתה 15 בנות ו-12 בנים. בכמה אופנים ניתן לבחור ועד כיתה ב' חמשה תלמידים -
- א. כשנדרש שיהיו בועד בדיוק שתי בנות?
 - ב. כשנדרש שרוב חברי הועד תהיינה בנות?
 - ג. ללא מגבלה?
 - ד. ענה /י שנית על הסעיפים א, ב, ג, כאשר בועד יש חמשה תפקידים שונים וכל אחד מחברי הועד מקבל תפקיד אחד.
 - ה. ענה/י שנית על סעיף ד' כאשר שניים מהתפקידים הם יו"ר הועד וסגן ואסור ששניהם יהיו בני אותו מין.
 - ו. ענה/י בשלישית על הסעיפים א, ב, ג, כאשר בועד יש אחד שתפקידו יהיה גזבר, אחד שתפקידו יהיה "דובר" ואחד שתפקידו יהיה "מזכיר הועד" ואסור שלחבר ועד יהיה יותר מתפקיד אחד.
10. כמה מילים שונות בנות שבע אותיות שונות ניתן ליצור מהאותיות א, ב, ג, ד, ה, ו, ז כך ש:
- א. האות "ב" תהיה האות האמצעית?
 - ב. "א" ו- "ב" תהיינה סמוכות זו לזו?
 - ג. "א" תופיע במילה לפני "ב" (לאו דווקא במקומות סמוכים)?
 - ד. המילה תסתיים ב- "ג" או "ד"?
 - ה. המילה תתחיל ב- "א" או "ב" או "ג"?
 - ו. כאשר יתקיימו התנאים שבסעיפים ד ו-ה יחדיו?
11. בכמה דרכים ניתן לסדר 10 ילדים ו-3 מדריכים בטור, אם בראש הטור צריך לעמוד מדריך?
12. יש לסדר על מדף תשעה ספרים שונים מהם ארבעה ספרי מתמטיקה, שלשה ספרי פיסיקה ושני ספרי כימיה.
- א. בכמה סידורים ניתן לסדר את הספרים אם נדרש שספרים מאותו תחום יעמדו בסמיכות זה לזה?
 - ב. כמה סידורים שונים ישנם אם אין דרישה כי ספרים מאותו תחום יעמדו זה ליד זה?
 - ג. כמה סידורים שונים ישנם אם נדרש שספרים מאותו תחום יעמדו זה ליד זה והספרים בכל מקצוע הם זהים (בניגוד לנאמר לעיל)?
13. ידוע שבמספרי טלפון יש שבע ספרות והספרה הראשונה איננה 0 או 1.
- א. פרופסור מפוזר זוכר כי במספר הטלפון שלו ישנן 7 ספרות שונות וביניהן 0. כדי לזהות את המספר הוא מתכנן להתקשר אל עצמו ממכשיר אחר. מהו מספר הניסיונות המרבי שיידרשו לו עד שיזהה את מספרו בהנחה שהוא אינו מתקשר למספר אחד פעמיים?
 - ב. פרופסור עוד יותר מפוזר שכח את מספר הטלפון שלו והוא רק זוכר שהספרות 2 ו-5 מופיעות בו ברצף ואין ספרה המופיעה פעמיים. כמה ניסיונות חיוג יידרשו ממנו (בדומה לקודמו) עד שיזהה את מספרו?
14. כמה מספרים בעלי 6 ספרות שונות הרשומים בעזרת הספרות 1,2,5,6,7,9 הם:
- א. אי זוגיים?
 - ב. קטנים מ-500,000?
 - ג. מתחלקים ב-5 וגדולים מ-423,156?
 - ד. בעלי ספרות בקצוות שאף אחת מהן אינה מתחלקת ב-3 (ללא שארית)?
 - ה. ענה/י על סעיפים א, ב, ג, ד, כאשר הספרות במספר אינן בהכרח שונות זו מזו.
15. כמה מספרים 5 – ספרתיים קיימים (שים לב שהספרה המובילה אינה יכולה להיות 0):
- א. בסה"כ?
 - ב. בעלי ספרות שונות זו מזו?
 - ג. בעלי ספרות שונות זו מזו וזוגיים?
 - ד. בעלי ספרות שונות זו מזו וגדולים מ-72,000?

16. בכמה אופנים שונים ניתן לסדר בשורה ששה מבוגרים ושני ילדים באופן ש:
- שני הילדים יעמדו זה ליד זה?
 - בין שני הילדים יעמוד לפחות מבוגר אחד?
 - בין שני הילדים יעמוד בדיוק מבוגר אחד?
17. בכמה אופנים יכולים ששה אנשים בעלי גבהים שונים להסתדר בטור כך ש:
- האדם הגבוה ביותר לא יעמוד סמוך לאדם הנמוך ביותר?
 - האדם הנמוך ביותר יעמוד לפני האדם הגבוה ביותר (לאו דווקא בסמיכות)?
 - שני התנאים הנ"ל יתקיימו ביחד?
18. שמונה בני משפחה רוצים להתיישב מסביב לשלחן. אין הבדל בין המקומות השונים וההבחנה היחידה שניתן לעשות בין אפשרויות הישיבה השונות היא המיקום היחסי בין היושבים. בכמה אופנים הם יכולים לשבת-
- אם השולחן הוא עגול?
 - ענה/י שנית על הסעיף הקודם אם אחד הכיסאות אדום והיתר ירוקים.
19. במשפחה אב, אם ו-5 ילדים. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב את בני המשפחה סביב שולחן עגול במקרים הבאים:
- בתנאי שלאב וגם לאם מקומות קבועים?
 - בתנאי שהאב והאם חייבים לשבת זה ליד זה אבל אין להם מקום קבוע?
 - בתנאי שלאם מקום קבוע והילד הצעיר חייב לשבת לידה, ולאב אין מקום קבוע והילד המבוגר חייב לשבת לידו?
20. מזכירה רשלנית מכניסה חמשה מכתבים (המיועדים לאנשים שונים) לחמש מעטפות (הממוענות לאנשים הנ"ל) בצורה אקראית כך שלכל מעטפה מוכנס מכתב אחד בדיוק.
- כמה אפשרויות שונות יש להגעת חמשת המכתבים בסה"כ?
 - כמה אפשרויות שונות יש בהן בדיוק ארבעה מתוך חמשת המכתבים מגיעים ליעדם?
21. עד בתאונת "פגע וברח" סיפר כי בלוחית הזיהוי של הרכב הפוגע היו שבעה תווים שונים. שלשת הימניים היו האותיות: R, M, F וארבעת השמאליים היו ספרות אך לא הספרות 8,4,2.
- כמה רכבים על המשטרה יהיה לבדוק על מנת לאתר את הרכב הפוגע?
 - מה תהיה תשובתך לסעיף א אם האותיות הימניות אינן ידועות? (אך ידוע שהן אותיות לטיניות)?
 - מה תהיה תשובתך לסעיף א אם לא היה ידוע שהתווים הם שונים (מלבד האותיות שהן ידועות)?
22. באולימפיאדה בסין תולים בשורה 5 דגלי ישראל, 6 דגלי ערב הסעודית, ו 4 דגלי טנזניה. בכמה אפשרויות ניתן לתלות את הדגלים -
- ללא הגבלה.
 - אם ערב הסעודית דורשת שדגליה יהיו סמוכים זה לזה.
 - דגלי ישראל סמוכים זה לזה, דגלי ערב הסעודית סמוכים זה לזה אבל דגלי ישראל וערב הסעודית אינם סמוכים זה לזה.
23. ארבעה זוגות נשואים קנו כרטיסים לשמונה מקומות ישיבה סמוכים בשורה אחת באולם קונצרטים. בכמה אופנים הם יכולים להתיישב במקומותיהם -
- כאשר כל זוג רוצה לשבת ביחד?
 - כאשר כל הגברים רוצים לשבת יחד?
 - כאשר כל הגברים רוצים לשבת יחד לימין כל הנשים?
24. בכמה אופנים ניתן לחלק עשרים אנשים לארבע קבוצות כדור-סל? מהי התשובה לשאלה אם הקבוצות לובשות חולצות קבוצתיות בצבעים שונים לכל אחת מהקבוצות?
25. במסעדה מסוימת ישנם ארבעה סוגי מרק.
- אדם רעב מאד נכנס למסעדה ומעוניין להזמין שבע מנות מרק לעצמו. כמה אפשרויות הזמנה עומדות בפניו?
 - שבעה אנשים נכנסים למסעדה ומעוניינים להזמין מנת מרק אחת לכל אחד. כמה אפשרויות עומדות בפניהם?
26. יש לזרוק עשר שקיות זבל (שונות) ונתונים שבעה פחי אשפה. בכמה אופנים ניתן לחלק את השקיות בין הפחים?

ב. בכמה אופנים ניתן לחלק עשר סוכריות זהות בין שבעה ילדים?

27. יש ליצור קוד בעל 20 ספרות כאשר כל ספרה (מלבד הימנית) קטנה או שווה מזו של ימניה. מה מספר הקודים שניתן ליצור כך ש-
א. הספרה "2" מופיעה בקוד?
ב. הספרה "3" מופיעה בקוד בדיוק 5 פעמים?
ג. הספרה "3" מופיעה בקוד לכל היותר 4 פעמים?
ד. הספרה "7" מופיעה בקוד לפחות פעמיים והספרה "3" מופיעה לכל היותר 4 פעמים?
ה. ענה/י שנית על סעיפים ב ו-ג כאשר נדרש שהקוד יהיה בעל 20 ספרות לכל היותר.

רמז: כיון שנתון שכל קוד חוקי מסודר לפי סדר עולה, המשמעות של זה היא ששני קודים (לאו דווקא חוקיים) ששונים זה מזה אך ורק בסדר הספרות, תורמים רק קוד חוקי אחד. למשל (בהנחה, רק לצורך הדוגמא שאורך הקוד הוא 7), 1230011 ו 0011123, שניהם קודים אבל רק השני הוא חוקי. לכן, זה כאילו שהיינו מבקשים את מספר הקודים כאשר אין חשיבות לסדר. אם נסמן ב x_i ($i \in \{0, \dots, 9\}$) את מספר הפעמים שהספרה i מופיעה בקוד, צריך להתקיים $x_0 + x_1 + \dots + x_9 = 20$. המשיכו מכאן בעצמכם.

28. נתונות שתי קבוצות: A, B אשר עוצמותיהן: $|A| = n, |B| = m$.

- א. חשבי את מספר הפונקציות מ A ל B .
ב. חשבי את מספר הפונקציות מ A ל B שהן חד-חד ערכיות.
ג. חשבי את מספר הפונקציות מ A ל B שהן על בהנחה ש $n=5, m=2$.

29. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $a + b + c + d + e = 15$ כאשר:

- א. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים?
ב. כל הנעלמים הם מספרים שלמים וכן $a \geq 4, b \geq 2, c \geq -3, d \geq 0, e \geq 0$ ובנוסף לכך a הוא מספר זוגי?
ג. כל הנעלמים הם מספרים שלמים וחייבים (גדולים ממש מ 0) ובנוסף לכך a הוא מספר זוגי?
ד. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים וכן a, b, c אי זוגיים, d, e זוגיים?
ה. כל הנעלמים הם מספרים שלמים אי שלילים וכן a, b, c זוגיים, d, e אי זוגיים?

30. מהו מספר הפתרונות של אי השוויון $a + b + c + d + e \leq 15$ כאשר כל הנעלמים הם שלמים אי שלילים?

31.

- א. בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים זהים ל 3 תאים שונים כך שבתא הראשון יהיו – (1 לפחות 10 כדורים? 2) לכל היותר 10 כדורים?
ב. בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל 3 תאים שונים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ 180 כדורים?

32. נתונים ארבעה תאים ממוספרים. יש להכניס לתאים שלושה כדורים שונים.

- א. בכמה אופנים ניתן להכניסם כאשר אין מגבלות נוספות?
ב. בכמה אופנים ניתן להכניסם כאשר נדרש שכל תא יכיל לכל היותר כדור אחד?

33. מטילים עשר קוביות זהות יחדיו. שימו לב, תוצאה טיפוסית כאן היא רב קבוצה* של המספרים שהתקבלו בקוביות ולא סדרה. למשל $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$. שימו לב שאין חשיבות לסדר הופעת המספרים.

- א. כמה תוצאות אפשריות יש?
ב. בכמה מהתוצאות האפשריות יש לפחות ספרה אחת שלא הופיעה כלל?

34. במשפחתון של ליאת יש חמשה ילדים חמודים ו 30 משחקים שונים. בכמה אפשרויות ניתן לחלק את המשחקים בין הילדים כך ש:

- א. ללא מגבלה.
ב. שני ילדים יקבלו 9 משחקים כל אחד והיתר יקבלו 4 כל אחד.
ג. כל ילד יקבל 6 משחקים.
ד. כל ילד יקבל 4 משחקים ויתר המשחקים יישארו לליאת.
ה. ענה על הסעיפים הקודמים בהנחה שהמשחקים זהים.

35. יש להכניס k כדורים לתאים כאשר יש n תאים ממוספרים. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת –
א. הכדורים שונים ובכל תא ייתכן יותר מכדור אחד?

- ב. הכדורים שונים ובכל תא ייתכן לכל היותר כדור אחד?
 ג. הכדורים זהים ובכל תא ייתכן יותר מכדור אחד?
 ד. הכדורים זהים ובכל תא ייתכן לכל היותר כדור אחד?

36. נתונים n "1"-ים ו m "0"-ים.

הוכח/י שמספר הדרכים לסדר אותם בשורה כך שלא יהיו שני "1"-ים סמוכים הוא $\binom{m+1}{n}$.

37. בכמה דרכים ניתן לבחור r מספרים שונים מתוך $\{1, \dots, n\}$ כך שלא יהיו שני מספרים עוקבים? הדרכה: העזרי בשאלה הקודמת.

תשובות (לשאלות 1-21)

1. א. 30 ב. 225 ג. 1000
2. א. 350 ב. 155 ג. 165 ד. 1025
3. א. 3,268,800 ב. 725,760 ג. 80,640 ד. 60,480 ה. 241,920 ו. 2,903,040 ז. 1,693,440
4. א. 576 ב. 1152 ג. 1152 , 40320 (2 א. 103,680 ב. 345,600 ג. 69,120 ד. 479,001,600
5. א. 18 ב. 31 ג. 30
6. א. 495 ב. 252 ג. 369
7. א. 1140 ב. 6840
8. 15,368
9. א. 23100 ב. 49,413 ג. 80,730 ד. 2,772,000 5,929,560 9,687,600
- ה. 1,663,200 2,948,400 4,968,000 ו. 1,386,000 2,964,780 4,843,800
10. א. 720 ב. 1440 ג. 2520 ד. 1440 ה. 2160 ו. 600
11. 1,437,004,800
12. א. 1728 ב. 362,880 ג. 6
13. א. 322,560 ב. 63,840
14. א. 480 ב. 240 ג. 72 ד. 288 ה. 31,104 15,552 5184 20,736
15. א. 90,000 ב. 27,216 ג. 13,776 ד. 8400
16. א. 10,080 ב. 30,240 ג. 8640
17. א. 480 ב. 360 ג. 240
18. א. 5040 ב. 10,080 ג. 20,160 ד. 40,320
19. א. 120 ב. 240 ג. 96
20. א. 120 ב. 0
21. א. 5040 ב. 13,104,000 ג. 14,406

(*) רב קבוצה (multiset) היא קבוצה שבה כל איבר יכול להופיע יותר מפעם אחת.