第 11 周作业参考答案

2022 年 11 月 14 日

周一作业

P155 **第** 7 **题** (3)(8)

(3)

$$I=\int\frac{dx}{x^4+x^6}=\int\frac{dx}{x^4(x^2+1)}$$

先设

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{1+x^2}$$

其中,A,B,C,D,E,F 为待定常数. 在上式两端乘以 x^4 并令 $x\to 0$ 得到 $D=1$. 再作减法

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)}-\frac{1}{x^4}=-\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}$$

于是得到

$$\begin{aligned}I&=\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx\\&=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C\end{aligned}$$

(8) 利用第一类换元法,

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{(1+\tan x)\sin^2 x}dx\\&=-\int\frac{d\cot x}{1+\tan x}\\&=-\int\frac{\cot x}{\cot x+1}d\cot x\\&=-\int d\cot x+\int\frac{d(\cot x+1)}{\cot x+1}\\&=-\cot x+\ln|\cot x+1|+C\end{aligned}$$

P163 第 1 题 (2)(7)

(2) 被积函数为有理假分式, 将其表示为多项式和有理真分式的和

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) + 1}{x^2+1}dx \\
&= \int (x^2-1)dx + \int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C
\end{aligned}
$$

(7) 虽然可以根据定理 4.6 指出的方法进行分解计算, 但是计算量较大. 下面使用一定技巧, 将被积函数分子分母同除以 x^4 则可以利用第一类换元法

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x - 1/x^3}{x^4 + 1/x^4}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1/x^2)}{(x^2+1/x^2)^2 - 2}
\end{aligned}
$$

利用

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2 - a^2} &= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dt}{t-a} - \int \frac{dt}{t+a}\right) \\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C
\end{aligned}
$$

得到

$$
I = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1}\right| + C
$$

P163 第 2 题 (1)(4)(10)

(1) • 直接使用万能变换, 令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1 + \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2})}\frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{t^2+2t+1}{2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int (t + 2 + \frac{1}{t})dt \\
&= \frac{1}{4}t^2 + t + \frac{1}{2}\ln|t| + C \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

• 也可以不使用万能变换, 使用三角恒等式进行处理, 但计算量稍大些许. 下面提供一种可供参考的思路.

$$
I = \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} + \int \frac{dx}{1+\cos x} = I_1 + I_2
$$

对 I_1, 可对分子分母同乘以 $\sin x$ 得到

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d(-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos^2 x)} \\ &= \int \frac{d\cos x}{(\cos x+1)^2(\cos x-1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{4}\frac{1}{\cos x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{\cos x+1} - \frac{1}{2(\cos x+1)^2}\right) d\cos x \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cos x} + C_1 \end{aligned}$$

对 I_2, 可以利用二倍角公式得到

$$I_2 = \int \frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \int \sec^2(x/2)d(x/2) = \tan\frac{x}{2} + C_2$$

将 I_1 和 I_2 相加得到

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cos x} + \tan\frac{x}{2} + C$$

容易验证, 这和用万能变换计算出的结果相同.

(4) 使用万能变换后发现形式较为复杂, 考虑使用其他办法进行计算.

- 利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 得到

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2 x\cos x}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)} dx \\ &= \int \frac{\tan^2 x}{\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1} dx \end{aligned}$$

令 $t = \tan x$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{4(t+1)} - \frac{t-1}{4(t^2+1)} + \frac{t-1}{2(t^2+1)^2}\right) dt \end{aligned}$$

而

$$I_1 = \int \frac{dt}{4(t+1)} = \frac{1}{4}\ln|t+1| + C_1$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{t-1}{4(t^2+1)} dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{tdt}{t^2+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= \frac{1}{8}\ln|t^2+1| - \frac{1}{4}\arctan t + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{t-1}{2(t^2+1)^2} dt \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{t+1}{t^2+1} + \arctan t\right) + C_3 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}I &= I_1 - I_2 + I_3 \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(t+1)^2}{t^2+1}\right| - \frac{1}{4}\frac{t+1}{t^2+1} + C \\ &= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(\tan x+1)^2}{\tan^2 x+1}\right| - \frac{1}{4}\frac{\tan x+1}{\tan^2 x+1} + C \\ &= \frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x) + C\end{aligned}$$

- 利用分子分母同乘 $\cos x - \sin x$, 得到

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x - \sin^3 x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx \\ &= \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx - \int \frac{\sin^3 x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx - \int \frac{\sin^3 x}{1-2\sin^2 x}d\sin x\end{aligned}$$

第一项由 $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ 可以化为

$$\frac{1}{8}\int \frac{d(2x)}{\cos(2x)} - \frac{1}{8}\int \cos(2x)d(2x)$$

第二项即为求不定积分

$$\int \frac{t^3}{1-2t^2}dt$$

讨论积分

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x}$$

和

$$I_2 = \int \frac{t^3}{1-2t^2}dt$$

. 对 I_1, 给出两种方法以供参考.

法一 试图利用三角恒等式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 考虑将分母利用二倍角公式变为二次式从而实现凑微分

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \frac{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2}{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}dx \\ &=2\int \frac{\sec^2 x/2}{1-\tan^2 x/2}d\frac{x}{2} \\ &= \int \left(\frac{1}{1-\tan x/2} + \frac{1}{1+\tan x/2}\right)d(\tan x/2) \\ &= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C\end{aligned}$$

法二. 利用 $dsinx = cosxdx$ 凑微分

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{d \sin x}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \end{aligned}$$

I_2 为有理函数的积分,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\frac{t}{2}(2t^2-1)+\frac{t}{2}}{1-2t^2} dt \\ &= -\int \frac{t}{2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{t}{1-2t^2} dt \\ &= -\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} \ln\left|1-2t^2\right| + C \end{aligned}$$

最终得到,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{\cos 2x} d(2x) - \frac{1}{8} \int \cos 2x d2x - \int \frac{\sin^3 x}{1-2\sin^2 x} d \sin x \\ &= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \right| - \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{8} \ln\left|1-2\sin^2 x\right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{4} \sin x(\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

可以自行验证, 两种方法得到的结果是一致的.

(10) 讨论更一般的形式. 考虑积分

$$S = \int \frac{\alpha \sin x + \beta \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

的计算方法. 观察到另外两个容易计算出的积分

$$I = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

和

$$J = \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x}$$

若存在 A, B 为常数, 使得 $S = AI + BJ$, 则 S 容易计算出. 而 A, B 满足方程组

$$\begin{cases} aA - bB = \alpha \\ bA + aB = \beta \end{cases} \tag{1}$$

当 $a^2 + b^2 \neq 0$ 时, 上述方程组有唯一解

$$A = \frac{a\alpha + b\beta}{a^2+b^2}, B = \frac{a\beta - b\alpha}{a^2+b^2} \tag{2}$$

于是可得

$$\begin{aligned} S &= AI + BJ \\ &= A \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} \\ &= Ax + B \ln|a \sin x + b \cos x| + C \end{aligned}$$

其中, 常数 A, B 由式 (2) 给出,C 为任意常数.

针对本题, 不必记住 A, B 的表达式, 而去考虑方程组 (1) 即可得到

$$A = \frac{b}{a^2+b^2}, B = \frac{a}{a^2+b^2}$$

于是

$$\int \frac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}dx = \frac{b}{a^2+b^2}x + \frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\sin x + b\cos x| + C$$

周三作业

周三无作业

周五作业

P189 第 1 题 (2)

可积函数必有界, 而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 附近无界, 故在 $[0, 1]$ 上不可积.

P189 第 4 题

(1) $f(c) > 0 \implies$ 取定一个$\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in [c-\delta, c+\delta], f(x) > \varepsilon \implies \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geq \delta\varepsilon > 0$ 这里只取 $\delta\varepsilon$ 而非 $2\delta\varepsilon$ 是考虑到 c 可能位于区间端点的情况. 而 $f(x) \geq 0 \implies \int_a^{c-\delta} f(x)dx \geq 0, \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \geq 0,$ 于是

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \geq \delta\varepsilon > 0$$

(2) 由条件知 $\exists c \in [a, b], f(c) > 0$, 则化为 (1) 中情况.

(3) 考虑

$$J(x) = \begin{cases} 1, & x = c \\ 0, & x \neq c \end{cases}$$

其中 $c \in [a, b]$.

P189 第 5 题

$f(x)$ 单调递增 $\implies \forall x \in [a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

$$\implies \int_a^b f(a)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(b)dx$$

$$\implies (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(b)$$

当 $f(x)$ 单调递减时, 成立

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a)$$

P189 第 6 题 (2)

记 $f(x)=x^m(1-x)^n$, 则 $f'(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$. 由此可判断 f 在区间 $[0,1]$ 上最大值为 $f(\frac{m}{m+n})$, 所以

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx \le \int_0^1 f(\frac{m}{m+n})dx = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

P189 第 7 题 (2)

考虑

$$f(x)=\begin{cases}1, x=0\\ x, x\neq 0\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上的积分 $\int_{-1}^1 f(x)dx=0$, 但 $\nexists\xi\in[-1,1]$ 使得 $f(\xi)=0$

P189 第 8 题

反证. 假设没有零点, 则由连续函数的性质可知 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上恒正或恒负, 由第 4 题可得矛盾.