说明

1、本提纲不是划定考试范围（也不会给大家划定范围）. 提纲中没有提到的内容并不表示考试不会涉及.

2、所举例题不一定具有代表性, 更不是考试的模拟试题.

3、希望同学们学会总结,在总结中提高. 充分理解概念和含义,关注不同内容的关联性,掌握分析、证明、推导和计算.

4、可能有笔误, 请谅解!

数分第一章复习提纲及例题

逻辑清晰，推导计算也就顺畅了

一、概念:

1、数列和函数极限的定义:

对"$\varepsilon - N$" 与 "$\varepsilon - \delta$" 语言理解, 以及不以a 为极限的表述.

2、函数极限的不同形式:

例如当 $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$, $x \to x_0$ （有限数）时函数极限的表述.

3、数列收敛与子列收敛的关系.

4、函数极限与左右极限的关系.

以上3,4两条在判别极限不存在时比较实用.

二、性质:

1、唯一性.（数列和函数）极限的唯一性,保证定义的合理性.

2、局部性:

数列: 收敛性只与充分大以后的项有关（即改变有限项不影响收敛性）

函数: 收敛性只与 x_0 附近、或充分靠近“$\infty, +\infty, -\infty$”的函数值有关.

注意这里的“充分大”含义是,$\exists N$,对 $n > N$ ....

“附近”是指: $\exists \delta > 0$ 对 $0 < |x - x_0| < \delta$ ......

“充分靠近”: $\exists X > 0$, 对 $|x| > X$ 或 $x > X$ 或 $x < -X$......

3、有界性: 收敛必有界（对函数极限来说是在 x_0 附近有界）

4、相容性: 极限运算与四则运算的相容性.对函数极限, 还有复合函数的极限

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = a, \lim_{x \to x_0} \phi(x) = y_0, \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(\phi(x)) = a$$

5、“保序性”:

$a_n \to a,\ a > 0 \Longrightarrow a_n > 0$ 对充分大的 n 成立.反之 $a_n > 0 \Longrightarrow a \geq 0$

$f(x) \to a, (x \to x_0),\ a > 0 \Longrightarrow$ 在 x_0 附近有 $f(x) > 0$. 反之在 x_0 附近有 $f(x) > 0 \Longrightarrow a \geq 0$.(注意正反之间些微的差别)

三、主要定理： 实数完备性不考

1、确界原理：确界的表述（特别是类似"$\varepsilon - \delta$" 语言的表述）和存在性；

确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界必收敛,$\Longrightarrow$ 区间套定理.

2、列紧性：有界数列必有收敛子列（注意证明方法）.

一个直接应用是判别极限不存在.例如,如果有两个子列极限不一致,或者一个子列发散,则数列发散（类似函数极限中利用左右极限是否相等的判别方法）.

3、Cauchy 收敛准则：数列以及函数或在一点或在无穷的收敛准则.

4、函数极限与数列极限的关系：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Longrightarrow \forall x_n \to x_0, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

这里 a 可以是有限数也可以是无穷.

该定理可用来判别函数极限不存在：只要找一个数列$x_n \to x_0$, 但数列 $f(x_n)$ 发散；或找两个数列$x_n \to x_0$ 和 $y_n \to x_0$ 使得数列 $f(x_n)$ 和 $f(y_n)$ 极限不相等即可.

四、计算：

1、三明治：关键是估计不等式,如何收和放,原则是**收放适度**,**恰到好处**.在估计数列不等式中"算术平均大于几何平均"会经常用到.

2、单调有界：首先要证明单调增（或单调减）以及有上界（或有下界）. 除了常规的方法外,可借助函数的单调增减给予证明.

3、两个重要极限的应用：以下是两个极限以及其他等价的表现形式

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

一些极限的计算最终可归结到上述极限形式.

4、Stolz 定理和L'Hospital法则：主要解决 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限问题. 其他不定式可以转化为这两种形式.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \quad \text{（差商）}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{（微商）}$$

只要右边极限存在.

5、无穷小和无穷小的替换和Taylor展开法: 理解什么是无穷小量, 掌握无穷小量的比较. 在取极限过程中, 用无穷小替换或Taylor展开, 可以减轻计算量.

五、例题

例 1 设 单调有界判别，然后设极限a，两边取极限

$$x_1=\sqrt{2},\ x_{n+1}=\sqrt{2}^{x_n}.$$

证明当 $n\to\infty$ 时, $\{x_n\}$ 的极限存在并求其值.

证明 显然 $x_n>1$. 由数学归纳法, $x_1=\sqrt{2}<2$, 若 $x_n<2$, 即 $x_n/2<1$, 那么 $x_{n+1}=2^{x_n/2}<2$. 所以 $\{x_n\}$ 有上界.

同样由归纳法, $x_1=\sqrt{2}>1$, 所以$x_2=\sqrt{2}^{x_1}>\sqrt{2}=x_1$, 若 $x_n>x_{n-1}$, 那么

$$\ln x_{n+1}-\ln x_n=\frac{\ln 2}{2}(x_n-x_{n-1})>0$$

利用 $\ln x$ 的单调性推得 $x_{n+1}>x_n$. 所以$\{x_n\}$ 严格单调增.

综上 $\{x_n\}$ 有极限, 设 $x_n\to x$, 根据 $\sqrt{2}^x$ 的连续性得

$$x=\sqrt{2}^x \text{ 或 } \ln x=x\ln\sqrt{2}.$$

令

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}-\ln\sqrt{2}\ (a\ge 0),$$

则 $f(x)$ 有一个零点 $x=2$. 又因为

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

推得 $x=\mathrm{e}$ 是驻点. 当 $1<x<\mathrm{e}$ 时 $f'(x)>0$ 因此 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上严格单调增. 因此至多只有一个零点.该零点 $x=2$ 就是极限.

例 2 设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 证明下列极限存在并求出极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

证明 设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}>S_n$ 严格单调增. 分两种情况:

(1) 若 S_n 无界, 则根据 “单调增无界的数列的极限一定是 $+\infty$” 可知 $S_n\to+\infty\ (n\to\infty)$, 就有

$$0<\frac{a_n}{S_n}\le MS_n\to 0\ (n\to\infty).$$

这里 M 是 $\{a_n\}$ 的上界.

(2) 若 S_n 有界, 根据单调增有界数列一定收敛, 可设 $S_n \to S\ (n \to \infty)$, 显然 $S \geq S_n > a_1 > 0$. 另一方面

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0\ (n \to \infty)$$

$$\Longrightarrow 0 < \frac{a_n}{S_n} \to \frac{0}{S} = 0\ (n \to \infty).$$

如果S->0，可以用 Stolz
如果S不趋零那么肯定是0

不管哪种情况, 原式的极限为 0.

例 3 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a 和 b 的值.

解 当 $x \to +\infty$ 时,

$$\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b = x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}{\frac{1}{x}}$$

极限为零表明分子是 $\frac{1}{x}$ 的高阶无穷小. 利用 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-1 \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x}$ 得

不是乘法也可以用无穷小？**可以的，**这里是脱离原式的等价无穷小

$$\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+a+\frac{b}{x} \sim (a+1)+\frac{3/2+b}{x}+\frac{2}{x^2},$$

真正发挥作用的是2/x^2，代回去之后原式变为2/x，**极限就是**0**了**

因此要使得极限为零, 必须 $a+1=0, b+3/2=0$.

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

解 该题是$\frac{0}{0}$ 型未定式, 可以直接用罗必塔法则. 但是如果用无穷小替换的方法, 下列方法是**错误的**

错解 因 $\sin x \sim x, \tan x \sim x\ (x \to 0)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0$$

正解

$$\frac{\sin x-\tan x}{x^3} = \frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}$$

因为 $\sin x \sim x, \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2, \cos x \sim 1,\ (x \to 0)$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{1\cdot x^3} = -\frac{1}{2}$$

例 5 求下列极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x}.$$

解 该题是比较经典的用无穷小量替换的题目. 首先将分子化为

$$\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)^{\sin x}-1=e^{\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}-1,$$

注意到

$$\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)\sim 0\ (x\to 0),$$

利用 $e^x-1\sim x;\ \ln(1+x)\sim x;\sin x\sim x;\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$, 得

$$e^{\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}-1\sim\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)=\sin x\ln\left(1+\frac{e^{2x}-1}{2}\right)$$
$$\sim x\frac{e^{2x}-1}{2}\sim x^2\ (x\to 0).$$

这样比较容易判断出该题是 $\frac{0}{0}$ 型的极限问题. 分子分母用等价无穷小量替换, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{e^{2x}-1}{2}\right)^{\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{2}\right)}-1}{1-\cos x}=2$$

例 6 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

解法一 通过和差化积得

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

所以

$$|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|\to 0$$

解法二 借助Largrange 中值公式. 令 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 存在 $x<\xi<x+1$ 使得

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=f(x+1)-f(x)=f'(\xi)=\frac{\cos\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}}\to 0\ (x\to+\infty)$$

例 7 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$$

解 因为

$$\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}=\frac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=e^{x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

而不是等价为 1/x

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$$

这里利用了$\ln(1+\frac{1}{x})$ 的Taylor展开. 最后得原式极限为 $\sqrt{e}$.

例 8 设 $0<x_1<1$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$, 求证

单调有界

$$\lim_{n\to\infty} nx_n=1,\ \text{即}\ x_n\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty).$$

证明 易见 $0<x_n<1$ $(n=1,2,\cdots)$, 且

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n,\ n=1,2,\cdots,$$

所以x_n 单调减有界, 因而收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, 则 $x=x(1-x)$, 解得 $x=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 所以 x_n 是无穷小量. 下面要证明 x_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小.

借助 Stolz 定理, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{-1}}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^{-1}-x_n^{-1}}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x_n}=1.\end{aligned}$$

因此就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{nx_n}=1$, 也就得到结论.

例 9 试证 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理: 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 收敛于 0, $\{b_n\}$ 严格单调减. 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

注意Stolz定理只能左推右！
所以构造的时候就不会疑问……

证明 根据条件, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时有

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此得

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n),$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式从 n 加到 $m-1$, 有

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_m-b_n)<a_m-a_n<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_m-b_n),$$

或

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_m-a_n}{b_m-b_n}<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

令 $m\to\infty$, 并利用 $a_m\to0, b_m\to0$ $(n\to\infty)$ 就有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

对任何 $n>N$ 成立.

第二章复习提纲及例题

概念不清，任何技巧都失去了根基

一、概念：

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, $x_0\in I$, 记 $y_0=f(x_0)$.

$f(x)$ 在一点 x_0 连续可从三个方面理解：

(1) $y=f(x)$ 在 x_0 有有限极限, 且极限值等于函数在这点的函数值：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

(2) 当自变量 $x\to x_0$ 时,因变量 $y-y_0=f(x)-f(x_0)$是无穷小.

以上刻画都是依靠自变量和因变量的距离.

(3) 对 $y_0=f(x_0)$ 的任意一个邻域 $(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$, 存在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 使得

$$f:\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\longrightarrow(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon)$$

$$\text{或}\quad f((x_0-\delta,\ x_0+\delta))\subset(y_0-\varepsilon,\ y_0+\varepsilon).$$

这里的观点是今后从拓扑的角度对连续性的理解.

二、性质：

1、**左右连续的概念以及左右连续等价于连续**.

2、**三类间断点（可去、跳跃以及第二类间断点）**.

3、**连续函数的四则运算以及复合函数的连续性**. 特别是复合函数的连续性

$$\lim_{y\to y_0} f(y)=f(y_0),\ \lim_{x\to x_0}\phi(x)=\phi(x_0)\Longrightarrow\lim_{x\to x_0} f(\phi(x))=f(\phi(x_0))$$

只要 $y_0=\phi(x_0)$. 因此有时候也表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(\phi(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}\phi(x)\right)=f(\phi(x_0))$$

例如: 因为 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 连续, 若 $x_n\to x_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{x_n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\mathrm{e}^{x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0}\sin(\mathrm{e}^x)=\sin\left(\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^x\right)$$

4、**连续函数反函数的存在性以及连续性**. 一般函数只要自变量和因变量一一对应,就有反函数.但连续函数存在反函数充分必要条件是严格单调.

5、**所有初等函数在其定义域中连续**.

例 1 设 $f(x)$ 连续, 若 $f(x_0)>0$, 则在x_0 的邻域内恒大于零. 即存在 $\delta>0$ 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)>0$（一点大于零, 周边大于零）.

证明 上述结果是函数极限保序性在连续函数上的推广. 因

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0,$$

取 $\varepsilon=\dfrac{f(x_0)}{2}>0$, 存在$\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时有

$$0<\frac{f(x_0)}{2}=f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon,$$

例 2 对$[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$, 设 $E=\{x\mid x\in[a,b],\ f(x)=0\}$（$f(x)$ 零点的集合）, 记 $\alpha=\inf E$, 则 $f(\alpha)=0$, 上确界也是如此.

证明 因为 $E\subset[a,b]$, 所以 $\alpha\in[a,b]$.

若 $f(\alpha)\neq0$, 不妨设 $f(\alpha)>0$, 根据例 1, 存在 $\delta>0$ 使得 $f(x)>0$ $x\in(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset[a,b]$, 因此 $\inf E\geq\alpha+\delta$, 矛盾.

三、闭区间上连续函数（这部分内容环环相扣）.

1、**闭区间上连续函数的介值性（含零点定理）**.

2、**闭区间上连续函数的有界性**.

3、**闭区间上连续函数在区间内一定能够达到最大、最小值**.

4、**闭区间上连续函数的值域是一个闭区间**.

关键：灵活运用.特别是上述性质对闭区间中任意两点 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$ 也成立.

四、一致连续：

1、**把握连续与一致连续的区别**.

函数$f(x)$**在定义域**I**中连续**是逐点定义的. 即

针对$x_0\in I$：对任意的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 这里的 δ 因 x_0 的不同而不同.

函数$f(x)$**在定义域**I**中一致连续**是指对任意的 $\varepsilon>0$, 不管 x_0 是I 中的哪一点, 一定存在统一的 $\delta>0$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

通俗地讲, 就是对 $\varepsilon>0$, 存在统一的尺子$\delta>0$, 只要 I 中两点x,x_0 满足 $|x-x_0|<\delta$, 就能保证 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 因此书上给出一个等价的定义, 用$x',x''$ 代替 x,x_0, 只要x',x'' 的差小于δ,就有函数值 $f(x'),f(x'')$ 的差小于ε.

2、**闭区间**$[a,b]$**上连续函数一定一致连续**, 因此, 连续与一致连续的区别都集中在非闭的有限区间或无限区间上的函数.

五、例题：

例 1 证明不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数使得

$$f(f(x)) = \mathrm{e}^{-x}$$

证明 若存在连续函数使得上式成立. 对任意的 $x_1 \neq x_2$, 若 $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Longrightarrow \mathrm{e}^{-x_1} = \mathrm{e}^{-x_2}$ 矛盾.

所以$f(x)$ 是单射,$\Longrightarrow$ 存在反函数 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 严格单调.

$$\begin{cases} f(x) \nearrow \ (\text{严格}) : \forall x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \\ f(x) \searrow (\text{严格}) : \forall x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)). \end{cases}$$

$\Longrightarrow \mathrm{e}^{-x_1} < \mathrm{e}^{-x_2}$, 矛盾, 所以这样的函数不存在.

例 2 证明：函数

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a, \ x \in (0, +\infty)$$

在 $(0, +\infty)$ 上有零点.

证明 因为(以下极限可以用L'Hopital法则)

$$g(0+0) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 - a > 0, \lim_{x \to +\infty} g(x) = -a < 0$$

根据极限的性质,一定存在靠近 0 的一点$x_1 > 0$ 以及充分大的一点 x_2 分别满足 $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$ 因此在 $[x_1, x_2]$ 有零点也就是在 $(0, +\infty)$ 内有零点.

例 3 证明： $f\Big|_{[a,+\infty)}$ 连续且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l \Longrightarrow f\Big|_{[a,+\infty)}$ 一致连续.

证明: (1): $\forall \varepsilon > 0$ 由条件 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$, 并利用Cauchy 收敛准则得 $\exists M > 0$ 对于满足 $x, x' > M$ 的点, 有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

在区间 $[a, M+1]$ 上,函数连续因此一致连续,所以存在 $\delta' > 0$ 使得对于 $x, x' \in [a, M+1]$ 中的两点 x, x', 只要 $|x - x'| < \delta'$, 就有 $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$

取 $\delta = \min\{\delta', 1\}$ 则对于任意的 $x, x' \in [a, +\infty)$ 只要 $|x - x'| < \delta$, 要么 $x, x' \in [a, M+1]$ 要么 $x, x' > M$, 因此都有

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

这里为了防止出现 $x < M < x'$ 时无法判断的问题,做了上述技术处理.一般来说如果考虑有接点的情况,上述处理是常用的,避免出现在跨界处无法说清楚的现象出现.

例 4 证明： $f\Big|_{[a,b)}$ 连续但 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty \Longrightarrow f\Big|_{[a,b)}$ 不一致连续.

证明：（反证法）假设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致连续, 则

对任意的 $\varepsilon>0$, 一定存在 $\delta'>0$, 只要 $|x'-x''|<\delta'$ $x',x''\in[a,b)$, 就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{\delta'}{2}$, 对任意的 $x',x''\in[a,b)$, 只要 $|x'-b|<\delta$, $|x''-b|<\delta$, 就有

$$|x'-x''|\leq|x'-b|+|x''-b|<2\delta=\delta'$$

推得

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

根据Cauchy 收敛准则, $f(x)$ 当 $x\to b^-$ 时收敛, 这与条件矛盾, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上不一致连续.

例 5 证明：若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界. 本题含义是若$f(x)$ 一致连续, 则 $|f(x)|=O(x)(x\to+\infty)$, 而 $f(x)=x^2$ 不满足 $|f(x)|=O(x)(x\to+\infty)$,所以不一致连续.

证明：对 $\varepsilon=1$, 一定存在 $\delta'>0$, 使得对任意的 $x>0,y>0$,有

$$|x-y|<\delta' \implies |f(x)-f(y)|<1$$

取

$$\delta<\delta' \quad M=\max_{x\in[0,\delta]}|f(x)|,$$

对任意的 $x>1$, 一定存在正整数 n, 使得

$$n\delta<x<(n+1)\delta, \quad \text{或} \quad 0<x-n\delta<\delta,$$

这样 $f(x)$ 就可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}[f(x-(k-1)\delta)-f(x-k\delta)]+f(x-n\delta)$$

其中 $0<x-n\delta<1$. 所以当 $x>1$ 时

$$|f(x)|\leq\sum_{k=1}^{n}|f(x-(k-1)\delta)-f(x-k\delta)|+|f(x-n\delta)|\leq n+M$$

$$\implies\frac{|f(x)|}{|x|}\leq\frac{n}{x}+\frac{M}{x}\leq\frac{1}{\delta}+M$$

例 6 设 $f(x)$, $g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续, $xg(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$, 试证 $f(x)g(x)$ 一致连续.

证明 因为
$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot xg(x)\to 0\ (x\to+\infty)$$
所以 $f(x)g(x)$ 一致连续.

例7 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0)=f(1)$. 求证: 对任意自然数 n, 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 中存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

证明 考察函数 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$. 显然在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上连续. 只需证明 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上有零点.

若 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上无零点, 则由介值定理知, $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上不变号. 不妨设 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为正, 则有
$$g\left(\frac{j}{n}\right)=f\left(\frac{j}{n}\right)-f\left(\frac{j+1}{n}\right)>0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$
将上式对 $j=0,1,\cdots,n-1$ 求和, 得到
$$f(0)>f(1).$$
这与条件矛盾!

例8 求证对任意自然数 n, 方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$存在唯一的正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明 设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, 则函数在 $[0,+\infty)$ 严格单调增, 连续, 因此如果有正根, 一定唯一. 另一方面当 $n\geq 2$ 时
$$f(0)=-1,\quad f(1)=n-1>0,$$
因严格单调, 故在区间 $(0,1)$内存在唯一正根, 记为 x_n, 满足$0<x_n<1$ 和方程
$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1,\ n=2,3,\cdots,$$
假如 $x_n\leqslant x_{n+1}$, 则
$$1=x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+\cdots+x_{n+1}\geqslant x_{n+1}^{n+1}+(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n)=x_{n+1}^{n+1}+1$$
推得 $x_{n+1}\leq 0$, 矛盾. 因此必有 $x_n>x_{n+1}$. 即, 数列 $\{x_n\}$ 严格单调减的正数列. 于是它是收敛的. 设 $\lim x_n=d$.

因为x_n 满足方程可化为 $x_n(1-x_n^n)=1-x_n$. 而 $x_n<x_2<1\quad(n>2)$ 所以 $0<x_n^n<x_2^n\to 0$. 令 $n\to+\infty$ 得
$$d=1-d,\implies d=\frac{1}{2}.$$

数分第三章复习提纲及例题

掌握求导，导出一片新天地 QAQ

一、导数:

1、定义：差商 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ 的极限

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

2、几何意义：差商是割线的斜率, 极限 $f'(x_0)$ 是切线的斜率. 因此 $f(x)$ 在 x_0 的**切线方程**为

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (f'(x_0) = \tan\alpha)$$

3、计算：导数是特殊函数（差商）的极限, 根据差商性质和函数极限性质有：
四则运算、复合函数、反函数的求导规则和微分规则
初等函数在其定义域内可导（可微）
高阶导数的计算
隐函数的求导（微分）
参数方程表示函数的求导（微分）（特别注意参数方程表示的二阶导数）.

二、理论:

1、微分: “以直代曲”

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \ \ (x \to x_0),$$

并引进记号

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x \text{ (因此 } f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \text{ 称为微商)}$$

微分的运算与导数运算类似. 例如若 $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, 则

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x, \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t, \Longrightarrow \mathrm{d}y = f'(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = (f(\varphi(t))'\mathrm{d}t$$

2、微分中值定理：

极值点导数为0

两个函数的Lagrange中值定理

Fermat 和 Rolle 定理; Lagrange 中值定理; Cauchy 中值定理.

特殊情况的Lagrange中值定理

Lagrange 中值定理: 若 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上连续, (a, b) 上可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

设 $x, x_0 \in [a,b]$, 则在x, x_0 之间存在ξ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$$

可与微分$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ 比较.

3、导函数的介值性：设$f(x)$ 在I 上可导, 即导函数 $f'(x)$ 在I 上有定义.

(1) 导函数$f'(x)$ 在$x_0 \in I$ 左右极限存在,推出$f(x)$ 左右导数存在, 且

$$f'_{\pm}(x_0) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x).$$

从而推出$f'(x)$的间断点不能够有第一类间断.

(2) 介值性：$f'(x)$ 能取到介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的任何值. 无论是否连续

三、利用导数研究函数:

1、确定 $f(x)$ 的单调区间：

$f'(x) \geq 0 \Longrightarrow f(x) \nearrow$; $f'(x) \leq 0 \Longrightarrow f(x) \searrow$; $f'(x) = 0 \Longrightarrow$ 驻点

2、确定驻点是否是极值点： 设 $f'(x_0) = 0$

若在 x_0 左侧 $f' \geq 0$, 右侧 $f' \leq 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 是极大值.

若在 x_0 左侧 $f' \leq 0$, 右侧 $f' \geq 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 是极小值.

$f''(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 极大； $f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x_0)$ 极小.

3、确定凸凹性和拐点：

$f'' > 0 \Longrightarrow f$ 凸,$f'' < 0 \Longrightarrow f$ 凹.$f''(x_0) = 0$,拐点.

4、凸性：定义及其等价的不等式.在等价的不等式中

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

记

5、曲率：

(1) $y = f(x), x \in [a,b]$, $\kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

(2) 由参数方程表示的曲线

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \kappa(t) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$$

四、Taylor 展开:

1、唯一性 若 n 次多项式 $T_n(x)$ （不管用什么方式得到）满足

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad (x \to x_0)$$

则$T_n(x)$ 一定是Taylor 多项式

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\quad (x\to x_0)$$

2、余项

Peano余项是（x-x0)^n 的高阶无穷小

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$$

$$\Longrightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1$$

3、利用Taylor公式计算极限和近似值.

五、例题:

例1 求常数 a,b, 使得下面函数在$|x|<\infty$ 可导. 连续，**左右极限相等**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\le 0.\end{cases}$$

解 关键看 $x=0$ 处的导数. 欲在 $x=0$ 可导, 首先在 $x=0$ 连续: 因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2(ax)}{x}=0,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=b,$$

所以 $b=0$. 在此基础上,欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 则

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2(ax)}{x^2}=a^2.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(2a-1)x}{x}=2a-1.$$

因此必须有 $a^2=2a-1$ 即 $a=1$. 因此当 $a=1,b=0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

例2 设 $f\big|_{[a,b]}$ 连续, $f\big|_{(a,b)}$ 二阶可导.记 $M_1(a,f(a))$, $M_2(b,f(b))$ 若线段 $\overline{M_1M_2}$ 与 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 在 (a,b) 内有交点,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$ **两次**Lagrange，**一次**Rolle

证明：设交点为 $M(c,f(c))$, $c\in(a,b)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\exists\xi_1\in(a,c), f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a},\\ \exists\xi_2\in(c,b), f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}\end{cases}$$

因为 M 在 $\overline{M_1M_2}$ 上,所以线段 $\overline{M_1M}$ 与线段 $\overline{MM_2}$ 的斜率相等,所以

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2)$$

$$\Longrightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b), \quad 使得 \quad f''(\xi) = 0.$$

例3 证明在 (a,b) 上无界的可微函数,其导函数在 (a,b) 上也一定无界.

证明: 由于 $f\Big|_{(a,b)}$ 无界,因此对任意的正整数 n, 一定存在 $x_n \in (a,b)$ 使得 $|f(x_n)| \geq n$, 即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty.$$

假如导函数有界: $|f'(x)| \leq M, \ x \in (a,b)$, 则任取 $x_0 \in (a,b)$ 有 妙

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f'(\xi)(x_n - x_0)| \leq M(b-a)$$

$$\Longrightarrow |f(x_n)| \leq M(b-a) + |f(x_0)|$$

矛盾.

例4 讨论 e^x 与 $x^a, a > 0$ 在 $x > 0$ 的交点.

解: 所谓交点即求 $e^x - x^a = 0$ 的根,等价于讨论

$$f(x) = e^{\frac{x}{a}} - x$$

在$x > 0$ 的零点问题. 显然

$$f(0) = 1 > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (两端大于零)$$

$$f'(x) = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - 1,$$

当 $0 < a < 1$ 时, 在 $x > 0$, 有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, $f(x) > f(0) = 1 > 0$, 没有零点.

当 $a \geq 1$ 时, 得唯一驻点 $x_0 = a\ln a$, 又因为

$$f''(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 e^{\frac{x}{a}} > 0,$$

所以x_0 是最小值点, $f(x_0) = a(1-\ln a)$ 是最小值.

当 $a > e$ 时,$f(x_0) = a(1-\ln a) < 0$, 因此$f(x)$ 分别在 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, +\infty)$ 各有一个零点,共两个零点. 当 $a = e$ 时, $f(x_0) = 0$ 一个零点. 当 $1 < a < e$ 时, $f(x) \geq f(x_0) > 0$ 没有零点.

例5 设 $f(x)$ 二阶可导, $2f(x) + f''(x) = -xf'(x)$,证明 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界

分析: 要证 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 有界最简单想法是证 $f^2(x) + f'^2(x)$ 有界,因此求导 $2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$. 但与条件比还差一点系数,于是考虑

$$g(x) = f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x)$$ 这原函数也不好找啊

的有界性,求导得

$$g'(x) = (2f(x) + f''(x))f'(x) = -xf'^2(x) \begin{cases} \leq 0 & 当 \quad x > 0, \\ = 0 & 当 \quad x = 0, \\ \geq 0 & 当 \quad x < 0. \end{cases}$$

因此 $g(x)$ 在 $x = 0$ 取到最大值: $f^2(x) + \frac{1}{2}f'^2(x) \leq f^2(0) + \frac{1}{2}f'^2(0)$, 即 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 都有界.

例6

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一阶可导, $f(0) = 1$, $f'(x) < f(x)$, 证明当 $x > 0$ 时, $f(x) < \mathrm{e}^x$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 二阶可导, $f(0) = 1$, $f'(0) \leq 1$, $f''(x) < f(x)$, 证明当 $x > 0$ 时, $f(x) < \mathrm{e}^x$.

证明 对于 (1), 令 $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x}$, 因此

$$g'(x) = (f'(x) - f(x))\mathrm{e}^{-x} < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $x > 0$ 严格单调减, 即当 $x > 0$ 时, 有

$$g(x) < g(0) = 1, \Longrightarrow f(x) < \mathrm{e}^x.$$

对于 (2), 令 $g(x) = (f'(x) - f(x))\mathrm{e}^x$, 因此

$$g'(x) = (f''(x) - f'(x) + f'(x) - f(x))\mathrm{e}^x = (f''(x) - f(x))\mathrm{e}^x < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $x > 0$ 严格单调减, 即当 $x > 0$ 时, 有

$$g(x) < g(0) = f'(0) - f(0) \leq 0, \Longrightarrow f'(x) < f(x).$$

由 (1) 得 $f(x) < \mathrm{e}^x$.

例7 （P142, 第8题）设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 1, f(1) = \dfrac{1}{2}$. 求证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0$$

证明 1、若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无零点：令

$$F(x) = x - \frac{1}{f(x)}, \quad x \in [0, 1]$$

$$\Longrightarrow F(0) = F(1) = -1, \ F'(x) = 1 + \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

根据 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 也就是

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

2、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的一个零点 ξ：显然 $\xi \in (0,1)$,且是最小值点,所以

$$f(\xi)=0,\ f'(\xi)=0$$

显然有$f^2(\xi)+f'(\xi)=0$.

3、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有两个及以上的零点：记

$$E=\{x \mid x\in[0,1], f(x)=0\}$$

因为 $f(0)=1,\ f(1)=\dfrac{1}{2}$, 所以 $E\subset(0,1)$. 分别记 $a=\inf E,\ b=\sup E$.

第一步 证明 a,b 也是零点.这是因为 a 是 E 的下确界, 因此,对任意的 $\dfrac{1}{n}$, $a+\dfrac{1}{n}$ 不是E 下确界,也就是存在零点 $x_n\in E$, 使得

$$a<x_n<a+\frac{1}{n},\quad f(x_n)=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad 0=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$$

这里用到了函数的连续性. 同理可证 b 也是 $f(x)$ 的零点.

第二步 要证明在区间 $[0,a)$ 和 $(b,1]$ 上,有$f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$. 这是因为在 $[0,a)$ 上 $f(x)>0$, 在 $(b,1]$ 上 $f(x)>0$. 所以

$$f'(a)=f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}\le 0$$

同理可证 $f'(b)\ge 0$.

如果 $f'(a)\le 0,\ f'(b)\ge 0$ 中有一个等号成立,那么 $f^2(a)+f'(a)=0$ 或 $f^2(b)+f'(b)=0$. 结果自然成立. 否则有 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$.

第三步 因为 $f'(a)<0$, 由

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}=f'_+(a)=f'(a)<0$$

得,存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<0,\ a<x<a+\delta$$

记

$$\bar{a}=\inf\{x \mid f(x)=0,\ a+\delta<x<b\},$$

那么在 $a<x<\bar{a}$ 中,$f(x)<0$ 令

$$F(x)=x-\frac{1}{f(x)},\ x\in(a,\bar{a})$$

那么

$$\lim_{x\to a^+}F(x)=\lim_{x\to\bar{a}^-}F(x)=-\infty$$

所以 $F(x)$ 在 $(a,\bar{a})$ 中有最大值点 $\xi\in(a,\bar{a})$, 所以

$$F'(\xi)=0,\ \text{即}\ f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

说明 也可以借助原函数: 在第二步中设 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$, 令 $g(x)=f^2(x)+f'(x)$,则 $g(a)<0,\ g(b)>0$.因为 $f^2(x)$ 连续, 所以有原函数$F(x),\ F'(x)=f^2(x)$, 因此 $g(x)=F'(x)+f'(x)=(F(x)+f(x))'$ 是 $F(x)+f(x)$ 的导函数,利用导函数的介值性.直接得到存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g(\xi)=0$.

例8 (P142 综合习题第19题.)

设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在数列 $\{x_n\},\ x_n>0,\ x_n\to+\infty$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n).$$

证明 采取反证法.假如不存在题目所示的数列, 那么存在 $x_0\geq 0$, 使得

$$f'(x)\geq f(ax),\ x\geq x_0.$$

推得 $f'(x)>0\ (x\geq x_0)$, 即函数在$x\geq x_0$ 严格单调增.因为 $a>1$, 所以只要取充分大的 $x>\dfrac{1}{a-1}$, 就有 $ax>x+1$. 那么利用微分中值公式知存在 $x<\xi<x+1$ 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\geq f(ax)>f(x+1),$$

推得 $f(x)<0$,矛盾.

例9 (P106, 第25题). 设 $a\in(0,1)$,

$$b_1=1-a,\ b_{n+1}=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a,$$

问 b_n 是否收敛?

分析: 欲证其收敛, **第一步**: 讨论数列的单调性. 欲证单调,借助函数

$$f(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}-a,\ x>0$$

对于 $x>0$, 存在 $0<\xi<x$, 使得 竟然如此丝滑……**逆用Lagrange！**

$$f(x)=-\frac{0-x}{e^{-0}-e^{-x}}-a=e^{\xi}-a>1-a>0$$

利用不等式 $e^x>1+x$ 或 $(1+x)e^{-x}<1$ 有

$$f'(x)=\frac{1-(1+x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}>0$$

因此 $f(x)>1-a>0,\ f(x)\nearrow$.

因为 $b_1=1-a>0,\ b_2=f(b_1)>1-a=b_1$.（归纳）如果 $b_1<b_2<\cdots b_n$ 则

$$b_{n+1}-b_n=f(b_n)-f(b_{n-1})=f'(\xi)(b_n-b_{n-1})>0$$

所以 $\{b_n\}\nearrow$

第二步：讨论数列的有界性. 如果 b_n 有上界, 则有极限 $b_n\to b$ 并且 $b_n\le b$. 在 $b_{n+1}=f(b_n)$ 两边取极限得 $f(b)=b$.

这样, 要证 b_n 有上界, **首先**要证 $f(x)-x=0$ 有唯一解.为此设

$$g(x)=f(x)-x=\frac{x}{e^x-1}-a$$

显然

$$g(0+0)=\lim_{x\to 0^+}g(x)=1-a>0,\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=-a<0$$

在$(1+x)e^{-x}<1$ 中令 $x\to -x$ 得 $e^{-x}>1-x,\Longrightarrow(1-x)e^x<1$, 所以

$$g'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}<0$$

由零点定理以及 $g(x)\searrow$, 推得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中有唯一解,记为 b.

其次要证明 b 是b_n 的上界, 因为 $b>0$, 所以

$$b=f(b)>1-a=b_1,$$

（归纳）如果 $b>b_n$, 利用 $f(x)\nearrow$,则 $b=f(b)>f(b_n)=b_{n+1}$,所以 b 是b_n 的上界.

这样就证明了 b_n 单调增有上界 b,其中 b 是 $f(x)-x=0$ 唯一零点.因此 $b_n\to b$.

例10 设$f(x)\Big|_{[a,b]}$ 二阶可导,证明,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}f''(\xi)(b-a)^2$$

妙

证明 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 展开,并在展开式中分别取 $x=a, x=b$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$
$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

两式相加得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$$

因为 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$ 介于 $f''(\xi_1)$ 和 $f''(\xi_2)$ 之间,由导函数的介值性可知,存在 ξ 介于 ξ_1 和ξ_2 之间,使得

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$

例11 书上第139页,第17题.是给出 $f(x)=x\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上尽可能小的上界.

按照常规做法,对 $f(x)$ 求导

$$f'(x)=\cos x-x\sin x,\ \ f''(x)=-(2\sin x+x\cos x)<0, f''(0)=0,$$

因此在驻点 $f'(x_0)=0$ 处取到极大. 因为 $f(x)>0, 0<x<\frac{\pi}{2}, f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$,所以极大值点也是最大值点.函数值就是最小的上界.

但是从 $f'(x)=\cos x-x\sin x=0$ 难以解出具体极值点,更难以计算极值.为此利用Taylor展开计算近似值.因为二阶导数是负的,所以

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\\&\le f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ (x\in[0,\frac{\pi}{2}])\end{aligned}$$

为求一个具体的上界,不妨分别选择在 $x_0=0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}$ 处展开.

在 $x_0=0:\ f(x)\le 0+x\le\frac{\pi}{2},$

在$x_0=\frac{\pi}{4}:\ f(x)\le f(\frac{\pi}{4})+f'(\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+(1-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\right).$

在$x_0=\frac{\pi}{3}:\ f(x)\le\frac{\pi}{6}+(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}})(x-\frac{\pi}{3})\le\frac{\pi}{6}+(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2})\frac{\pi}{3}$

在$x_0=\frac{\pi}{2}:\ f(x)\le-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})\le\frac{\pi^2}{4}$

比较几个上界，选择最小一个即可.