



# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026  
电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

## 第十五周作业参考答案.

### 习题 6.2

1(2)  $y'' \sin x = 2y$ ,  $y_1 = \cot x$

$$y_2 = \cot x - \int \tan^2 x \, dx = 1 - x \cot x$$

通解:  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cot x + C_2 (1 - x \cot x)$

1(3)  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y_1 = x$

$$p(x) = \frac{2x}{x^2-1} \quad Q(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} y_2^{(3)} &= y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(t) dt} dx \\ &= -\frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + 1 \end{aligned}$$

通解:  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + C_2 \left( -\frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + 1 \right)$

2(1)  $y_1 = x$  为特解

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} \cdot e^{-\int p(t) dt} dx \quad P(x) = -\frac{2}{x} \\ &= x \cdot \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{2 \ln x} dx \\ &= x^2 \end{aligned}$$

通解:  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 x + C_2 x^2$



# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026  
电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

3. 考虑齐次方程:  $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$

$$\text{令 } t = y' \quad (1+x^2)t' + 2xt = 0 \Rightarrow \frac{t'}{t} = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dt}{t} = -\frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\Rightarrow t = y' = \frac{1}{1+x^2} \text{ 或 } \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\text{方程通解: } y = C_1 \arctan x + x^2 + C_2$$

$$\text{代入初值: } C_1 = 4 \quad C_2 = \pi - 1$$

$$\Rightarrow y = 4 \arctan x + x^2 + \pi - 1$$

$$4(2) \text{ 特征方程: } \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$$

$$\Rightarrow \text{通解为: } y = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$5(1) \text{ 设特解为: } y^* = A \cos \frac{x}{2} + B \sin \frac{x}{2} \text{ 代入原方程.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{8}{3} \end{cases} \quad y_* = \frac{8}{3} \sin \frac{x}{2}$$

$$7(2) \text{ 特征方程: } \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$$

$$\Rightarrow \text{通解为: } y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$



# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

## 习题 8.1

3. (1)  $\times$   $\vec{a} \perp \vec{b}$
- (2)  $\times$   $\vec{b} \parallel \vec{c}$  即可
- (3)  $\times$  显然
- (4)  $\times$   $\vec{a}, \vec{c}$  不共线时
- (5)  $\times$   $\vec{a} \perp \vec{b}$ ,  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$
- (6)  $\times$  LHS = 0 RHS =  $2\vec{a} \times \vec{b}$  不一定为 0

5. pf:  $\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{MA} + \vec{OM} + \vec{MB})$   
 $= \vec{OM}$

6.  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -1$

同理:  $\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -1$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} = -1$

相加  $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{3}{2}$

7.  $\begin{cases} (\vec{a} + 3\vec{b})(7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0 \\ (\vec{a} - 4\vec{b})(7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7|\vec{a}|^2 - 15|\vec{b}|^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad ① \\ 7|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad ② \end{cases}$

$② - ① \Rightarrow 23|\vec{b}|^2 - 46\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 7|\vec{a}|^2 - 14\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$   
 $\downarrow$   
 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}$

$\Rightarrow \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$





# 中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

地址: 中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026

电话: 0551-63602184 传真: 0551-63631760 [Http://www.ustc.edu.cn](http://www.ustc.edu.cn)

8. (1)  $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = 24$

(2)  $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = 60$