习题8.5

8.(6) $y=x+\sin x$, $y'=1+\cos x$, $y''=-\sin x$

当 $x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)$ 时, $y''<0$, 当 $x\in((2k+1)\pi, 2k\pi+2\pi)$ 时, $y''>0$

凸区间: $(2k\pi-\pi, 2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

凹区间: $(2k\pi, 2k\pi+\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

拐点: $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

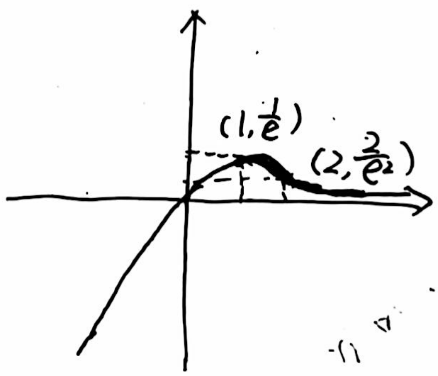
9: $y=ax^3+bx^2$, $y'=3ax^2+2bx$, $y'=6ax+2b$.

令 $\begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{9}{2} \end{cases}$

10.(4).

$y=xe^{-x}$, $y'=(1-x)e^{-x}$. $y''=(x-2)e^{-x}$

y'	>0	<0	<0
y''	<0	<0	>0
y	增,凹	减凹	减凸
	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$



13: $k(x)=\dfrac{f''(x)}{[1+f'(x)]^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. $\rho(x)=\dfrac{1}{|k(x)|}=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$.

$\rho'(x)=\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$. 当 $x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 时 $\rho'(x)<0$.

当 $x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 时 $\rho'(x)>0$.

故当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时曲率半径最小. 此时 $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

习题3.6

2: 令 $f(x)=e^{\sin x}$. 计算可得 $f(0)=1$, $f'(0)=1$. $f''(0)=1$, $f'''(0)=0$

故 $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.

4: $f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$

$=-1+(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4$

故 $f(-1)=143$. $f'(0)=-60$. $f''(1)=26$.

5.(2) $y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$

$f(x)=-1-(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(-1)^n(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{1}{\xi^{n+1}}(x+1)^{n+1}$

6.(3) $\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\cdot(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{\sin^4 x}$

$=-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{\sin x+x}{2}}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{\sin x-x}{2}}{\sin^3 x}=-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x+o(x)+x}{2}}{\sin x}\cdot\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x}{\sin^3 x}$

$=-2\times1\times(-\frac{1}{6})\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6}$

10: 当 $x\neq0$ 时. 由归纳法可知 $f^{n}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}(\frac{1}{x})$.

当 $x=0$ 时. 根据导数定义. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}\overset{L'Hospital}{=\!=}\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0$

即 $f'(0)=0$; 同理, 此时 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y\cdot P_3(y)}{e^{y^2}}\overset{L'Hospital}{=\!=}0$

也即 $f''(0)=0$. 归纳可知 $f^{(n)}(0)=0$, $\forall n\in N^+$

3: 令 $f(x)=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_nx$, 则 $f(0)=f(1)=0$.

故 $\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $f'(\xi)=a_0\xi^n+\cdots+a_n=0$.

9: 由 $f''(x)\le0$ 可知 $f(x)$ 是凹函数. 故 $f(x)\le f(a)+f'(a)(x-a)$

由 $f'(a)<0$ 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. 又因为 $f(a)>0$. 由连续函数的介值定理可知 $\exists\xi\in(a,+\infty)$ s.t. $f(\xi)=0$.

而 $f'(x)\le f'(a)<0$. 故 $f(x)$ 单减. 故零点唯一.

12: 即证 $\dfrac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}<\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1}$ (不妨设 $0<x_1\le x_2$).

由 Cauchy 中值定理知左边 $=f'(\xi)$, $\xi\in(x_2,x_1+x_2)$.

右边 $=f'(\eta)$. $\eta\in(0,x_1)$. 由 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 严格单减.

于是上式显然成立.

13: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)+f'(x_0)(-h)+\frac{f''(x_0)}{2}(-h)^2+o(h^2)}{h^2}$

$=f''(x_0)$

8: 假设 $\exists x_0\in[0,2]$ s.t. $|f'(x_0)|>2$.

则 $f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2$

$f(2)=f(x_0)+f'(x_0)(2-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x_0)^2$.

故 $f(0)-f(2)=2f'(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x_0)^2$

但 $|f(0)-f(2)|\le 2$.

$\left|\frac{f''(\xi)}{2}(0-x_0)^2+\frac{f''(\eta)}{2}(2-x_0)^2\right|\le\frac{x_0^2+(2-x_0)^2}{2}\le 2$.

与 $2<|f'(x_0)|$ 矛盾. 故假设不真. $f'(x)\le 0$, $\forall x\in[0,2]$.

9: 显然 $x\neq 0$ 时, $f(x)$ 不连续, 故不可导

根据定义 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\begin{cases}x^n & x为有理数\\ 0 & x为无理数\end{cases}=0$.

综上, $f'(0)=0$. $f''(0)$ 不存在.

15: 原式 $=e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})}$.

而 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$. $x\in(0,+\infty)$.

由两边夹原理. 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})=\frac{1}{2}$.

故原极限 $=e^{\frac{1}{2}}$

18: $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$.

将 $x=-1$, $x=1$ 分别代入相减可得: $\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$.

由 Darboux 定理可知 $\exists\xi\in(-1,1)$ s.t. $f'''(\xi)=3$

19: 否则 $\exists M>0$, s.t. $f'(x)\ge f(\alpha x)$, $\forall x\in[M,+\infty)$, 则 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 严格单增. 当 $x>\max\{M,\frac{1}{\alpha-1}\}$ 时, 有 $(\alpha-1)x>1$. 则 $f(\alpha x)-f(x)=f'(\xi)(\alpha x-x)\ge f(\alpha\xi)>f(\alpha x)\Rightarrow f(x)<0$. 矛盾. 假设不真