中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

数学分析B1期中复习

时间：2024.11.16，14:30—16:30

地点：---------

内容：前三章(微分学)

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈題
一九八八年五月

第一章　极限

1*. 实数理论

(1). 实数的构造

(2). 实数完备性的若干等价命题

完备性公理

确界原理

单调有界判别法

闭区间套定理

Bolzano-Weierstrass(聚点、列紧性)定理

Cauchy收敛准则

2、极限

- 数列极限　定义: ε-N（等）语言
- 函数极限　定义: ε-δ（等）语言

(1)数列极限与函数极限关系

$$\lim_{n\to\infty} a_n \longleftarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$ 、Heinie定理

(2)数列极限与函数极限的相似处：

(i) 极限的性质：几何意义、唯一性、保号性、(局部)有界性

(ii) 极限存在的判别法:

(1) 比较定理 (2)两边夹定理　(3) 单调有界判别法、
(4) Cauchy收敛准则.

(iii)极限的计算：四则运算、两边夹定理、

(iv) 无穷大量与无穷小量

(3) 极限的计算:

定义是基础，也是方法之一.

数列的极限：四则运算、两边夹定理、解方程(+单调有界判别法)、Stolz定理等

函数的极限：四则运算、两边夹定理、复合函数的极限(变元代换)、等量代换、典型重要极限、连续性、 L`Hospital法则、Taylor公式等

二、连续函数

1. 连续和连续函数的定义、间断点的分类.

2. 连续性：四则运算、复合、反函数；初等函数的连续性

3. 连续函数的性质：

(1) 局部有界 (2)局部保号 (3) 介值定理 (4) 最值定理(闭区间)

4. 一致连续性

(1) 定义 **(2) 基本定理**

闭区间、开区间、无穷区间上的一致连续性?

区间拆分、复合函数的一致连续性?

(3) 证明一致连续性.

三、单变元函数的微分学

1. 导数

定义(可导性判断)、几何意义、**计算**(包括高阶导数)

2. 微分

定义、几何意义、性质、微分公式、一阶微分的形式不变性.

3. 微分中值定理

Rolle、Lagrange、Cauchy三种中值定理的内容、条件、使用情况.

构造函数证明相关中值问题.

4. L`Hospital法则

计算函数(未定式)极限的一种方法.

5. 函数的单调性与凹凸性

函数的单调区间和极**(最)值**、凹凸区间和拐点;

利用单调性或最值证明 (函数)不等式;

凹凸函数的定义与性质、Jensen不等式 ;

平面曲线的曲率与计算.

6. Taylor公式

两种余项(Peano、Lagrange)的Taylor公式

几个基本的Taylor公式，初等函数的Taylor公式的计算

Taylor公式的应用:.

计算极限、计算高阶导数值、计算近似值、证明或计算某些中值问题(尤其是涉及到高阶导数）、函数不等式，等等.

考试主要题型

一. 数列和函数极限的计算

1. 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sin n}=\dfrac{1}{2}.$

2. 用极限定义证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n,b_n\}=c.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^k-n^k\right),\ 0<k<1.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e).$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x+x^2}-1}{\tan 2x}.$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$ $(a \neq k\pi, k$ 为正整数).

数列极限的存在性及证明：

7. 设 $\alpha > 1, x_1 > 0, x_{n+1} = \dfrac{\alpha(1+x_n)}{\alpha + x_n}(n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$$\boxed{x_{n+1} = f(x_n),\ \text{求}\ \lim_{n\to\infty} x_n.}$$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}(n \geq 1)$ 定义. 判断数列 $\left\{\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}\right\}$ 是否收敛. 若收敛，求其极限.

二、连续性和可导性判断、导数与微分的概念

1. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的连续性.

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\geq 0\\ a\sin x+b, & x<0\end{cases}$. 请问：当 a,b 分别满足什么条件时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续和可导？并在可导时，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的微分.

3. 求常数 a,b 使 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(ax)}{x}, & x>0\\ (2a-1)x+b, & x\leq 0\end{cases}$ 在定义域内可导.

4. 设函数 $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 一致连续，$\alpha\in(0,1]$. 求证: 函数 $g(x)=f^{\alpha}(x)$ 也在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三. 导数的计算 (反函数、复合函数、显式、隐式、参数方程表示的函数、分段函数等)

1. 设函数 $y = y(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且满足方程 $y + 2^y - x - \sin x = 1$, 求 $y'(0)$.

2. 设 $f(x)$ 具有连续二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x^3} + \dfrac{f(x)}{x^2}\right) = 0$, 求 $f(0), f'(0), f''(0)$.

3. 设函数 $y = f(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 确定，求导数值 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}$, $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

4. 求函数 $f(x) = x^2\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的n阶导数 $f^{(n)}(0), n \geq 3$.

四、中值定理

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 , 在 (a,b) 内可导, 且

$$f(a)\cdot f(b)>0,\quad f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0.$$

证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0)=0$ 和 $|f'(x)|\le|f(x)|, x\in[0,1]$. 证明:

在 $[0,1]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, $f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=0.$

证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3.$

五、函数最值与不等式

1. 证明: 在区间 $(0,1]$ 上不等式 $\sin^2 x < \sin x^2$ 成立.

2. 求函数 $f(x) = \sin 2x - x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导且满足 $|f'(x)| \le 1$ 和 $f(0) = f(1) = 1$. 证明: 在 $[0,1]$ 上 $f(x) > \dfrac{1}{2}$.

六、Taylor展开与应用

1. 计算 $f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$ 在 $x=0$ 处的直到 x^5 的Taylor公式.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\left|f''(\xi)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$, $\left|f''(x)\right|\leq 2(\forall x\in[0,1])$. 求证: $\left|f'(x)\right|\leq 1$.

4. $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h), 0<\theta<1$. $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}$.

七、一般重要考点

一致连续性

单调性与凹凸区间、拐点

平面曲线的曲率

其它(压缩映射不动点、Newton迭代法等)

例. 设$f(x)$在$[a,b]$二阶连续可导. $f(x)=0$有解x^*，且$f'(x^*)\neq 0$.

证明: 存在$\delta>0$, 使得对任意初值$x_0\in \mathrm{B}(x^*,\delta)$, 由迭代格式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ 构造的迭代序列$\{x_n\}$收敛于x^*.

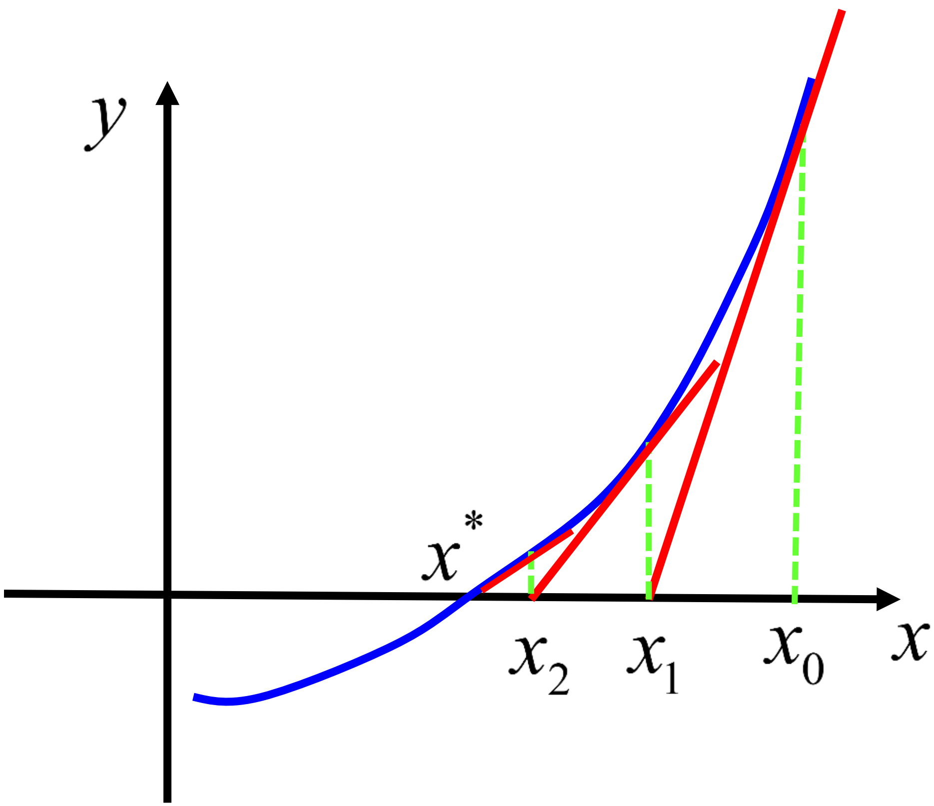
Newton迭代法

问题： 解方程$f(x)=0$.

解法: 取初值x_0，由 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 构造迭代序列$\{x_n\}$，若它收敛，则收敛于$f(x)=0$的解.

Newton迭代法

$$\text{选}\, x_0 \longrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow \{x_n\} \longrightarrow x^*$$



1. Newton迭代法也称**切线法**.

2. $f(x)=0 \approx f'(x_k)+f(x_k)(x-x_k)$.

3. $f(x)=0 \overset{\sim}{\Leftrightarrow} x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

4. Newton迭代法可能失败.

5. 可以推广到多变量方程组.

关于考试的几点看法

1.作业很重要、课本要精读

2. 功夫在积累、考试看发挥

3. 眼界要高远、心态要超然

祝大家考试顺利！