第 8 周作业参考答案

2022 年 10 月 31 日

周一作业

P106 **第** 4 **题** (1)(2)(3)

(1) 对函数 $f(x)=x^n, x>0, n>1$, 当 $a>b>0$ 时, 在区间 $[b,a]$ 上,$f(x)$ 满足 Lagrange 中值定理的条件, 所以 $\exists\xi\in(b,a)$, 使得

$$a^n-b^n=f'(\xi)(a-b)=n\xi^{n-1}(a-b)$$

又有 $nb^{n-1}<n\xi^{n-1}<na^{n-1}$ 所以

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$$

(2) 对函数 $f(t)=\ln(1+t), t>-1$, 当 $x>0$ 时, 在区间 $[0,x]$ 上 $f(t)$ 满足中值定理的条件, 所以 $\exists\xi\in(0,x)$, 使得

$$\ln(1+x)-\ln(1)=f'(\xi)(x-0)=\frac{x}{1+\xi}$$

又有 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$ 所以

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

(3) 对函数 $f(x)=x\ln x, x>0$, 当 $0<a<b$ 时, 在区间 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 和区间 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上分别满足中值定理的条件, 所以 $\exists\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$, 使得

$$f(\frac{a+b}{2})-f(a)=f'(\xi_1)(\frac{a+b}{2}-a)\implies\frac{a+b}{2}\ln(\frac{a+b}{2})-a\ln a=\frac{b-a}{2}(\ln\xi_1+1)$$

以及 $\exists\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$, 使得

$$f(b)-f(\frac{a+b}{2})=f'(\xi_2)(b-\frac{a+b}{2})\implies b\ln b-\frac{a+b}{2}\ln(\frac{a+b}{2})=\frac{b-a}{2}(\ln\xi_2+1)$$

又有 $\xi_1<\frac{a+b}{2}<\xi_2\implies\ln\xi_1<\ln\xi_2$, 所以

$$\frac{a+b}{2}\ln(\frac{a+b}{2})-a\ln a<b\ln b-\frac{a+b}{2}\ln(\frac{a+b}{2})\implies(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$$

P106 第 5 题 (1)

记

$$f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \left(\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x) \equiv f(0) = 0$ 为常值函数, 故

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

P106 第 6 题

令 $g(x) = x - f(x)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$g(0) = -f(0) < 0$,$g(1) = 1 - f(1) > 0 \implies g(0)g(1) < 0$, 由零点定理知 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $g(\xi) = \xi - f(\xi) = 0$, 即存在 $x \in (0,1)$, 使得 $x = f(x)$. 若存在 $y \neq x$, 同样满足 $y = f(y)$, 不妨设 $y > x$, 则在区间 $[x,y]$ 函数 f 满足中值定理的条件, 存在一点 $\xi \in (x,y)$ 使得 $y - x = f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x)$, 但对 $\forall \xi, f'(\xi) \neq 1$, 即 $y - x \neq y - x$, 矛盾! 所以满足条件的点 x 唯一. 唯一性部分也可以通过证明 $g(x)$ 的单调性来说明.

P106 第 7 题

不妨设 $0 \le x_1 < x_2 \le 1$.

(1) 若 $0 < x_2 - x_1 \le \frac{1}{2}$, 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微,$f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足中值定理的条件, 所以存在 $\xi_0 \in (x_1, x_2)$, 使得

$$| f(x_1) - f(x_2) | = | f'(\xi_0)(x_1 - x_2) | = |f'(\xi_0)|(x_2 - x_1) < \frac{1}{2}$$

(2) 若 $\frac{1}{2} < x_2 - x_1 \le 1$, 则 $0 \le 1 - x_2 + x_1 < \frac{1}{2}$, 此时

$$| f(x_1) - f(x_2) | = | f(1) - f(x_2) + f(x_1) - f(0) | \le | f(1) - f(x_2) | + | f(x_1) - f(0) |$$

又 $f(x)$ 在 $[0, x_1]$ 和 $[x_2, 1]$ 上分别满足中值定理的条件, 故 $\exists \xi_1 \in (0, x_1)$, 使得

$$f(x_1) - f(0) = f'(\xi_1)(x_1 - 0)$$

$\exists \xi_2 \in (x_2, 1)$, 使得 $f(1) - f(x_2) = f'(\xi_2)(1 - x_2)$, 所以

$$| f(x_1) - f(x_2) | \le | f'(\xi_2) | (1 - x_2) + | f'(\xi_1) | x_1 \le 1 - x_2 + x_1 < \frac{1}{2}$$

也可以通过下面的办法避免分类讨论. 下面的推导中省略了对中值定理条件的验证.

$$\begin{aligned}
2|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)+f(x_1)-f(x_2)| \\
&\le |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(x_2)| \\
&= |f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_1)| \\
&< |x_1-0|+|1-x_2|+|x_2-x_1| = x_1+1-x_2+x_2-x_1 = 1 \\
\Longrightarrow |f(x_1)-f(x_2)| &< \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

P106 第 9 题

由于 $f(x)$ 不恒为常数, 故一定存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) \neq f(a)$. 若 $f(x_0) > f(a)$, 在区间 $[a,x_0]$ 上函数满足中值定理的条件, 故存在 $\xi_1 \in (a,x_0)$, 使得 $f(x_0)-f(a) = f'(\xi_1)(x_0-a) \implies f'(\xi_1) > 0$. 若 $f(x_0) < f(a) = f(b)$, 在区间 $[x_0,b]$ 上函数满足中值定理的条件, 故存在 $\xi_2 \in (x_0,b)$, 使得 $f(b)-f(x_0) = f'(\xi_2)(b-x_0) \implies f'(\xi_2) > 0$.

P106 第 10 题

(1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 可知,$\forall\varepsilon > 0, \exists X_0 > 0$ 且 $X_0 > a$, 使得 $x > X_0$ 时,$|f'(x)| < \varepsilon$.
对此 $\varepsilon > 0, \exists X = X_0$, 使得当 $x > X$ 时, 由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微知, 函数 f 在区间 $[x,x+1]$ 上满足中值定理的条件, 故存在 $\xi \in (x,x+1)$ 且 $\xi > X = X_0$, 使得

$$|f(x+1)-f(x)| = |f'(\xi)| < \varepsilon$$

由定义,$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = 0$

(2) $f(x)$ 和 x 都在 $[a,+\infty)$ 上可微,$\frac{d}{dx}x = 1 \neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \infty$. 又极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$

存在. 故满足 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则的条件, 于是得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

周三作业

证明 P117 定理 3.25

只证明对极大值点, 极小值点的证明类似.
x_0 是极大值点是指,$f(x)$ 在 x_0 附近有定义,$\exists\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 都有 $f(x_0) \ge f(x)$.
$f(x)$ 在 x_0 有二阶导数 $f''(x_0) < 0$ 是指极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

存在且其值小于 0. 由极限的保序性可知,$\exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \implies (f'(x) - f'(x_0))(x - x_0) < 0$$

又 x_0 是 $f(x)$ 的驻点, 即 $f'(x_0) = 0$, 于是在 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$f'(x)(x - x_0) < 0$$

这意味着, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,$f'(x) > 0$; 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,$f'(x) < 0$.

在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上, 对 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$,$f$ 在区间 $[x, x_0]$ 上满足中值定理的条件, 故 $\exists\xi \in (x, x_0)$ 使得

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) > 0 \implies f(x_0) > f(x)$$

对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 成立. 同理在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上有 $f(x_0) > f(x)$ 对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 成立. 由极大值的定义,x_0 为函数 $f(x)$ 的一个极大值点.

注意, 由于只知道 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数, 故不能两次使用微分中值定理得到 $f(x) - f(x_0) = f''(\xi')(\xi - x_0)(x - x_0)$ 来证明.

P107 第 15 题

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x}$$

对 $\forall x \in (0, +\infty)$, 函数 f 在区间 $[0, x]$ 上满足中值定理的条件, 故 $\exists\xi \in (0, x)$, 使得 $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$, 又 f' 严格单调递增 $\implies f'(\xi) < f'(x)$, 所以

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x} > 0$$

于是 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增.

P107 第 18 题 (3)

对函数求导得到

$$f'(x) = 2x(1 + x)(1 - x)e^{-x^2}$$

由导函数的正负可判断 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1), (0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(-1, 0), (1, +\infty)$ 上单调递减. 由 $f'(x) = 0 \implies x = -1$或$0$或$1$, 结合单调性可判断 $f(x)$ 在 $x = -1$ 和 $x = 1$ 处取得极大值为 $f(-1) = e^{-1}, f(1) = e^{-1}$, 在 $x = 0$ 处取得极小值为 $f(0) = 0$.

P107 第 19 题 (2)

函数在区间上的最值可能在区间端点和区间内部的极值点处取到. 对于有限个点, 验证区间端点和驻点处的值即可.$f'(x) = 2\cos 2x - 1 = 0 \implies x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$或$\frac{\pi}{6} + k\pi$. 可以得到

$$f(-\frac{\pi}{2}) > 1 > f(\frac{\pi}{6}) > 0 > f(-\frac{\pi}{6}) > -1 > f(\frac{\pi}{2})$$

所以最大值为 $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, 最小值为 $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$

P107 第 20 题

(2) 对 $f(x)=\tan x - x + \frac{x^3}{3}, x\in(0,\pi/2)$ 求导得 $f'(x)=\tan^2 x + x^2 > 0 \implies$ f(x) 在 $(0,\pi/2)$ 上严格单调递增, 于是 $f(x)>f(0) \implies \tan x > x - \frac{x^3}{3}$ 对 $\forall x\in(0,\pi/2)$ 成立.

(4) 对 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x, x>0$ 求导得 $f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}>0 \implies f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增, 于是 $f(x)>f(0) \implies \ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$

(7) 注意到

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}$$

而当 $x>1$ 时, 有

$$0<\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x-1}<1 \quad 和 \quad 0<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}<4$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}<4$$

也可以通过对原本的函数取对数转化, 然后通过讨论取对数后函数的单调性给出.

P115 第 1/5 题

(2) 由于 m,n 是交换反对称的, 所以若 $m=n$, 则极限为 0, 可以先讨论 $n>m\geq 2$ 的情况. 这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{nm\left((1+mx)^{n-1}-(1+nx)^{m-1}\right)}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{nm\left[m(n-1)(1+mx)^{n-2}-n(m-1)(1+nx)^{m-2}\right]}{2}\\&=\frac{nm(n-m)}{2}\end{aligned}$$

中间过程的极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 最后极限存在保证了结果的合理性. 若 $m=1$, 结果同样可以表示为 $\frac{nm(n-m)}{2}$. 若 $n<m$ 结果不变.

(8) 这是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)-a^x\ln a}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x\left[(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x})^2+\frac{2a+x}{(a+x)^2}\right]-a^x(\ln a)^2}{2}\\&=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

中间过程的极限仍然为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 最后极限存在保证了结果的合理性. 上述办法思路简单, 但计算

量稍大, 也可以使用等价量替换的方法, 利用 $x \to 0$ 时 $e^x - 1 \sim x$ 和 $\ln(1+x) \sim x$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{a})^x - 1}{x^2}\cdot a^x \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+\frac{x}{a})} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+\frac{x}{a})}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{a}\frac{\ln(1+\frac{x}{a})}{\frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{a}\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2\arctan^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\arctan^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x - \frac{2\arctan x}{1+x^2}}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x(1+x^2) - 2\arctan x}{4x^3}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2+6x^2 - \frac{2}{1+x^2}}{12x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{8x^2+6x^4}{12x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x) &= \lim_{y\to 0+}\ln(1-y)\ln y \\ &= \lim_{y\to 0+}(y\ln y)\cdot\frac{\ln(1-y)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0+}-\frac{\ln y}{\frac{1}{y}} \\ &= \lim_{y\to 0+}-\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

(13) 原极限为 ∞^0 型未定式, 取对数转化为求

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} \\ &= \lim_{t\to 0^+}-\frac{4t^2}{2\sin t\cos t} = 0\end{aligned}$$

于是原极限为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\exp((2x-\pi)\ln\tan x) = 1$$

周五作业

P130 第 3 题

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \implies ad \le cb \implies \begin{cases} ad+ab \le cb+ab & (1) \\ ad+dc \le cb+dc & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \implies \frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \\ (2) \implies \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d} \end{cases} \implies \frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$$

P130 第 4 题

由 f(x) 在区间 I 上是凸函数, 考虑区间一点 x_0, 证明在该点附近成立极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

取区间内部两点 x_1, x, 满足 $x_1 < x_0 < x$, 由凸函数的定义, 得到

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \implies f(x) \ge f(x_0) + \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}(x-x_0)$$

再取一点 x_2, 满足 $x_0 < x < x_2$, 同样由定义, 得到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \implies f(x) \le f(x_0) + \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x-x_0)$$

所以

$$f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_0-x_1}(f(x_0)-f(x_1)) \le f(x) \le f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0}(f(x_2)-f(x_0))$$

当 $x \to x_0+$ 时, 上式两端有极限为 $f(x_0)$, 由三明治定理, $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$. 对左极限可以类似得到 $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)$. 所以函数 $f(x)$ 在区间 I 的内点是连续的.

P130 第 5 题

由于 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 此时 $f(x)$ 在 I 上是凸函数等价于其导函数 $f'(x)$ 是单调递增的. 下面用反证法证明这一点.

若导函数不是单调递增的, 则 $\exists x_1, x_2 \in I$, 满足 $x_1 < x_2$ 但 $f'(x_1) > f'(x_2)$. 此时一定存在 $x_1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < x_2$, 使得 $f'(x)$ 在点 $a_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 上不满足 $f''(a_j) > 0$. 但由区间 $(x_1, a_1), (a_1, a_2), \cdots (a_n, x_2)$ 内部任意点处 $f''(x) > 0$ 可知, $f'(x)$ 在每一个区间 $(x_1, a_1), (a_1, a_2), \cdots (a_n, x_2)$ 内部都是单调递增的, 所以在 $x_1 < x_2$ 但 $f'(x_1) > f'(x_2)$ 的假定下, 只可能在这些分界点 a_j 附近破坏了导函数的单调性, 其必要条件是存在一个点 a_k, 在该点附近不满足单调递增条件, 所以不妨设在区间 (x_1, x_2) 内只有一个点 x_0 处不满足 $f''(x_0) > 0$.

由 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 可导, 满足达布定理的条件, 所以对于 α 满足 $f'(x_1) > \alpha > f'(x_2)$, 一定存在 $\xi \in [x_1, x_2]$, 使得 $f'(\xi) = \alpha$. 但对 $\forall x \in [x_1, x_0)$, 由区间内部每一点处二阶导大于 0, 导函数在该区间上单调递增, 有 $f'(x) \ge f'(x_1) > \alpha$, 所以 $\xi \notin [x_1, x_0)$, 对 $\forall x \in (x_0, x_2]$, 导函数同样单调递增, 有 $f'(x) \le f'(x_2) < \alpha$, 于是只可能 $\xi = x_0$. 但再考虑 β 满足 $f'(x_1) > \beta > f'(x_2)$ 且 $\beta \ne \alpha$, 存在 $\eta \in [x_1, x_2]$ 且 $\eta \ne \xi$, 使得 $f'(\eta) = \beta$. 再由同样的步骤得到只可能 $\eta = x_0$, 矛盾. 所以导函数单调递增.

P130 第 7 题

不妨设 $f'''(x_0) > 0$, 即极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}$$

存在且其值大于 0. 由极限的保序性可知, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} > 0$. 又 $f''(x_0) = 0$, 所以这意味着在 x_0 附近, 成立 $f''(x)(x - x_0) > 0 \implies$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta), f''(x) > 0, f$ 是凸的, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) < 0$, 函数是凹的, 所以 x_0 是函数的拐点.

P130 第 8 题

(4) 计算一阶、二阶导数得到

$$y' = e^x(x+1)^2$$
$$y'' = e^x(x+1)(x+3)$$

由二阶导的正负可以判断函数在区间 $(-\infty, -3), (-1, +\infty)$ 上是凸的, 在区间 $(-3, -1)$ 上是凹的, 拐点为 -3 和 -1

(6) 计算一阶、二阶导数得到

$$y' = 1 + \cos x$$
$$y'' = -\sin x$$

由二阶导的正负可判断函数在区间 $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ 上是凸的, 在区间 $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ 上是凹的, 拐点为 $k\pi.(k \in \mathbb{Z})$

P130 第 9 题

由点在曲线上和点为拐点的必要条件 $f''(1) = 0$ 可得到方程组

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{9}{2} \end{cases}$$

可以验证此时 $(1, 3)$ 确实是曲线的拐点.

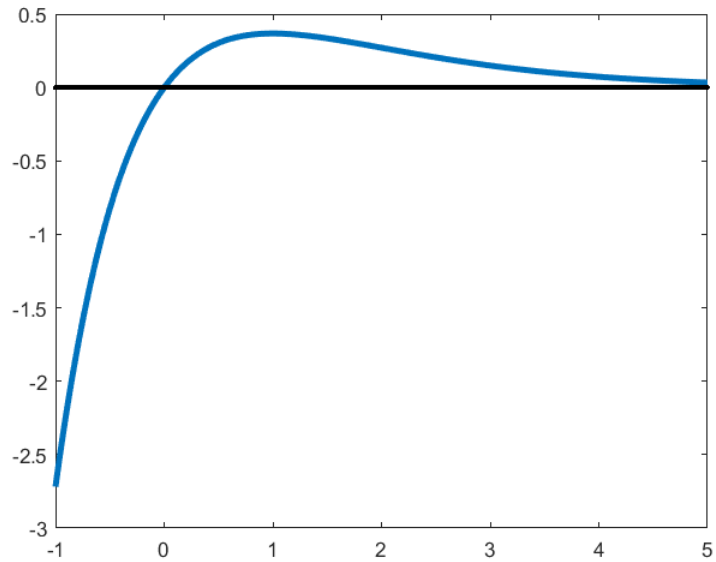
P130 第 10 题 (4)

函数定义域为整个实数轴, 且在定义域内连续, 二阶可导, 由于没有对称性, 直接考虑其单调性和凹凸性. 计算其一阶、二阶导数得到

$$y' = (1-x)e^{-x}$$
$$y'' = (x-2)e^{-x}$$

由一阶导的正负判断函数在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,$(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $x = 1$ 处有极大值. 由二阶导的正负判断函数在 $(-\infty, 2)$ 上是凹的,$(2, +\infty)$ 上是凸的, 在 $x = 2$ 处有拐点. 再简单分析其渐近行为. 当

$x \to -\infty$ 时,$f(x) \to -\infty$, 当 $x \to +\infty$ 时,$f(x) \to 0$. 据此作出函数的大致图像如下图, 其中蓝色线条为函数的图像, 黑色直线为 x 轴.



P108 第 22 题

设 $f(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}-a$, 则迭代格式表为 $b_{n+1}=f(b_n)$.

先考察该数列是否具有单调性.

(1) 当 $n=1$ 时,$b_2-b_1=\frac{b_1}{1-e^{-b_1}}-a-b_1=\frac{b_1}{1-e^{-b_1}}-1>0$. 其中利用了不等式 $1-e^{-b_1}\le b_1$.

(2) 假设当 $n=k\ge 1$ 时, 有 $b_{k+1}-b_k>0$, 则当 $n=k+1$ 时, 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导, 可知在区间 $[b_k,b_{k+1}]$ 上满足中值定理条件, 有

$$b_{k+2}-b_{k+1}=f(b_{k+1})-f(b_k)=f'(\xi_k)(b_{k+1}-b_k)$$

而在区间 $(0,+\infty)$ 上

$$f'(x)=\frac{1-(x+1)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

其分母恒正, 又 e^{-x} 单调递减, 从而分子 $1-(x+1)e^{-x}$ 单调递增 $\implies 1-(x+1)e^{-x}>0$, 于是 $f'(x)>0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 成立. 所以

$$b_{k+2}-b_{k+1}=f'(\xi_k)(b_{k+1}-b_k)>0$$

由 (1)(2) 归纳得, 数列 $\{b_n\}$ 单调递增.

下面试图说明方程 $x=f(x)$ 的解是数列 $\{b_n\}$ 的一个上界.

为说明方程有解, 令

$$g(x)=\begin{cases}x-f(x) & x>0\\ a-1 & x=0\end{cases}$$

则由 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=a-1=g(0)$ 可知 $g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续.$g(0)=a-1<0$, 当 x 充分大时,$g(x)$ 趋近于 $a>0$, 由此可知存在 $x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $g(x_0)=0$. 考虑该解是否具有唯一性, 由

$$g'(x)=\frac{1+(x-1)e^{x}}{(1-e^{-x})^2}$$

分母恒正, 分子单调递增, 得到 $1+(x-1)e^x>0$, 于是 $g'(x)>0$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立, 故 $g(x)$ 单调, 这就说明了解 x_0 的唯一性. 因此, 若 $b_{n+1}=f(b_n)$ 收敛, 其只能收敛到 x_0. 下面开始证明 x_0 是 $\{b_n\}$ 的上界.

(1) 当 $n=1$ 时, 利用 x_0 是方程 $x-\frac{x}{1-e^{-x}}+a=0$ 的根以及不等式 $x_0>1-e^{-x_0}$, 得到

$$x_0+a=\frac{x_0}{1-e^{-x_0}}>1\implies b_1=1-a<x_0$$

(2) 当 $n=k\ge 1$ 时, 假设 $b_k<x_0$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时, 利用微分中值定理

$$b_{k+1}-x_0=f(x_k)-f(x_0)=f'(\xi)(b_k-x_0)$$

前已说明 $f'(\xi)>0$, 由假设有 $b_k-x_0<0$, 于是

$$b_{k+1}-x_0<0$$

也成立.

由 (1)(2) 归纳得,x_0 是 $\{b_n\}$ 的上界.

数列 $\{b_n\}$ 单调递增, 又有上界, 故其收敛. 设收敛到 β, 则在递推关系 $b_{n+1} = f(b_n)$ 两边取极限得到 (利用了 $f(x)$ 的连续性)

$$\beta = f(\beta) \implies \beta - \frac{\beta}{1 - e^{-\beta}} + a = 0$$

上述超越方程难以解析求解, 但其根即为数列 $\{b_n\}$ 的极限.