习题5.1

18. (1) $\frac{1}{4}$ L'Hospital

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \frac{\pi}{2}$

22. (2) $=(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3 = 0$

(4) $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x-\frac{e^x}{1+e^x}\cos^3x\,dx = \frac{2}{3}$

(6) $=\int_0^1\arcsin x\,d(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{1}{2}x^2\,d(\arcsin x)$

$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin t} \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt = \frac{\pi}{8}$

(8) $\xlongequal{x=a\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin s}{\sin s+\cos s}ds$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}dt = \frac{\pi}{4}$

(10) $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{a^2\tan^2x+b^2} = \frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2ab}$

(12) $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \xlongequal[W=x-\frac{3\pi}{2}]{u=x-\frac{\pi}{2},\ v=x-\pi}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6u\,du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6v\,dv+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6w\,dw$

$=4\times\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$

(14) $=\int_0^{\pi}\frac{d\tan x}{2+\tan^2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

23. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x)\,dx \xlongequal{x=\pi-y} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi-y) f(\sin(\pi-y))\,d(\pi-y)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-y) f(\sin y)\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-x) f(\sin x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(\sin x)\,dx$$

移项即得!

取 $f(x)=\frac{x}{2-x^2}$ 则 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$= \pi(-\arctan(\cos x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

27. (1) (2) 由 $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha x)\,dx$ 即得

可积

《谢惠民》

P.319

命题 10.4.2 (定积分的换元积分法) 设 $f \in R[a,b]$, $x=g(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调增加, $g'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且满足 $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

注 1 如果 $f \in C[a,b]$, 则 g 的单调性条件可换为较弱的条件 $g([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. 两种情况的证明均可见 [41] 等教科书.

可也用定义证明.

28. (1) $G(t) = \int_a^t |f(x)|\,dx - \frac{M}{2}(t-a)^2$

$G'(t) = |f(t)| - M(t-a)$

$g(t) = f(t)+Mt$, $h(t) = f(t)-Mt$

结合 $f(a)=0$, $|f'(x)|\le M$ 可证 $G'(t)\le 0$

$\therefore G(t) \le G(a) = 0$

不要用 $G''(t)$!

(2) 由(1) $\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|dx \le \frac{M}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$

同理 $\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|f(x)|dx \le \frac{M}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$

相加即证!

习题 5.2

3. 注意用 $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \le |f(x)-f(y)|$

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$

4. 注意用 $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| \le \frac{|f(x)-f(y)|}{c^2}$

第5章综合习题

2. (1) $B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx \xlongequal{t=1-x} \int_1^0 (1-t)^m t^n d(1-t)$

$=\int_0^1 (1-t)^m t^n dt = B(n,m)$

(2) $B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^n d x^{m+1}$

$=\frac{1}{m+1}\left((1-x)^n x^{m+1}\Big|_0^1-\int_0^1 x^{m+1} d(1-x)^n\right)$

$=\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$

$=\frac{n}{m+1}B(m+1,n-1)$

$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}B(m+2,n-2)$

$=\cdots=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}B(m+n,0)$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n}\,dx$$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} \cdot \frac{1}{m+n+1}$$

$$= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

15. 《谢惠民》 P.310 311

例题 10.2.4 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0.$

由于本题的积分是定积分的重要结果 (见例题 10.4.9), 因此可将本题变为普通的数列极限问题, 而且还可以引用 2.3.2 小节的练习题 8. 但这种方法过分地依赖于定积分计算, 积不出怎么办? 所以我们下面要介绍新的方法.

首先是从几何上作观察. 在图 10.3 中作出了 $n = 4, 20, 100, 500$ 时的函数 $\sin^n x$ 的几何图像.

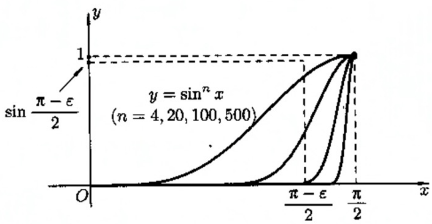

图 10.3

从图中可以看出, 由于 $\sin^n \frac{\pi}{2} = 1$, 因此对每个 n, 函数 $\sin^n x$ 在该点充分邻近的值一定接近 1. 另一方面, 对于固定的 x 值, 只要 x 小于 $\frac{\pi}{2}$, 则当 n 增加时函数值 $\sin^n x$ 就很快趋于 0. 这就是下面的 "分而治之" 方法的几何背景.

证 按照数列极限的 ε–N 定义写出证明.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < \pi$, 可以将积分分拆如下 (参看图 10.3):

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{(\pi-\varepsilon)/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x + \int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.8}$$

由 $0 < \sin\frac{\pi-\varepsilon}{2} < 1$, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} = 0$. 从而对上述 ε, $\exists N$, 使 $n > N$ 时, 成立

$$0 < \frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此 $n > N$时, 就有 $0 \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. □