13、取 $a_n=\frac{1}{2n\pi}$，$b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界，且在 $x\to0^+$ 时不是无穷大量

15：(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$

16：(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot x^3}=\frac{1}{2}$

同阶

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{x^2}=1$

同阶

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$

同阶

18：(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{\arctan x}=\frac{1}{n}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{[\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}]\sin^2x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{\sin 2x}=\frac{1}{4}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=1$

P60.

1: 不一定. 如 $f(x)=\begin{cases}1 & x=x_0\\ 0 & x\neq x_0\end{cases}$

4: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

而 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|<|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 故 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 处连续

(2) $M(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$

$m(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$

由(1)即得.

6: (3) $f(x)=[|\cos x|]=\begin{cases}1 & x=n\pi\\ 0 & x\neq n\pi\end{cases}$

故 $f(x)$ 的间断点是 $x=n\pi$. $n\in\mathbb{Z}$, 类型为可去间断点

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点

(6) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4=f(2)$. 无间断点

7: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a$ 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Leftrightarrow a=1$

9: 当 $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$.

当 $|x|>1$ 时. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+1^{2n}}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+(-1)}{1+(-1)^{2n}}=0$

故 $f(x)=\begin{cases}0 & x\leq-1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续 (跳跃间断点)

14: $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=f(\frac{x}{2})=\cdots=f(\frac{x}{2^n})=\cdots$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^n})=f(0)$. 故 $f(x)\equiv f(0)$

17. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{\sin 2x}=\frac{1}{4}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{10}\tan x\cdot\frac{1}{2}x}{2x\sin x}=\frac{1}{40}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{1-\cos x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\frac{1-\cos x}{2})^2}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(\sin^2\frac{x}{2})^2}{x^4}=\frac{1}{8}$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+100}+x)}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{(\sqrt{x^2+100}-x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}$

$=-50$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$

P70.

2: $f(0)=-b<0$. $f(a+b)=a-a\sin(a+b)\geq0$.

由介值定理可知 $\exists\,\xi\in(0,a+b]$ s.t. $f(\xi)=0$

4. 令 $g(x)=f(x)-x$. 则 $g(a)=f(a)-a\geq0$. $g(b)=f(b)-b\leq0$.

由介值定理知 $\exists\,x_0\in[a,b]$ s.t. $f(x_0)=x_0$.

7: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最小值 m, 最大值 M. 而 $m\leq\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\leq M$

由介值定理可知 $\exists\,\xi\in[a,b]$ s.t. $f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

8、设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$．则对于 $\varepsilon=1$，$\exists A>0$．s.t. $|f(x)-l|<1$，$\forall x>A$

而 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上有最大值和最小值．故 $\exists M_1$，s.t. $|f(x)|<M_1$，$x\in[a,A]$

取 $M=\max\{M_1,|l|+1\}$．则 $|f(x)|<M$，$\forall x\in[a,+\infty)$．

10、(1)(2)(3) 不存在．(存在最大小值和介值定理)．

(4) 如 $f(x)=\dfrac{1}{x}+1$