第二周作业参考答案

2022 年 9 月 16 日

1 周三作业

1. 证明：对 $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$ 能被 6 整除 (数学归纳法)

证明：

- 当 $n = 1$ 时，$f(1) = 6$ 命题成立
- 假设 $n = k$ 时，$f(k) = k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k$ 能被 6 整除
- 当 $n = k+1$ 时，$f(k+1) = k^4 + 6k^3 + 14k^2 + 15k + 6 = f(k) + 6(2k^2+1) + 2k(2k^2+7)$
  只要证：$k(2k^2+7)|3$
  再进行一次数学归纳法或者讨论 $k = 3m, 3m+1, 3m+2; m \in \mathbb{N}$ 即可

2. 求证：任意两个不同的有理数之间一定有无理数
证明：$\forall a < b, a, b \in \mathbb{Q}$，令 $c = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$，则 $a < c < b$，反证法证明 c 为无理数即可

3. 设 $\mathbb{F} = \left\{ r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\}$ 证明：

- 若 $r + s\sqrt{2} = 0$，则 $r = s = 0$
  证明：若 $s \neq 0$，则有 $\sqrt{2} = -\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$，矛盾，故 $s = 0$，从而 $r = 0$

- $\mathbb{F}$ 是域
  验证对加减乘除封闭，说明零元和单位元，说明加法、乘法的交换律、结合律、分配律

- $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{F} \subsetneqq \mathbb{R}$

– 验证 $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{F}$
令 $s=0$，可得 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$，而 $\sqrt{2} \in \mathbb{F}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

– 验证 $\mathbb{F} \subsetneqq \mathbb{R}$
$\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ 显然，下面验证 $\sqrt{3} \notin \mathbb{F}$
假设存在 $r, s \in \mathbb{Q}$，使得 $r + s\sqrt{2} = \sqrt{3}$，则有 $r^2 + 2s^2 + 2\sqrt{2}rs = 3$
则有 $\sqrt{2} = \frac{3-r^2-2s^2}{2rs} \in \mathbb{Q}$ （rs=0 需要单独讨论一下），矛盾

2 P25 习题 1.2

1. 用定义证明下面的结论:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3}$
  证明：$\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{5}{9\epsilon}] + 1$，当 $n > N$ 时，$|\frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3}| = \frac{5}{15+9n} < \frac{5}{9n} < \epsilon$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$
  证明：$\forall \epsilon > 0$，取 $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$，当 $n > N$ 时，$|\frac{\sin n}{n} - 0| = |\frac{\sin n}{n}| \leqslant \frac{1}{n} < \epsilon$

2. 若数列 $\{a_n\}\,(n \geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

证明：$\forall \epsilon > 0$，令 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M}$，由条件，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < M\epsilon_1 = \epsilon$，由数列极限定义知：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

4. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- 注意到：$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$ 即可
- 反例：取 $a_n = \frac{n}{3n+1}, a = -\frac{1}{3}$
- 注意到：$|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$ 即可

5. 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明：（M=0 单独讨论）$\forall \epsilon > 0$，令 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{M}$，存在自然数 N，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - 0| < \epsilon_1$，$|a_n b_n - 0| = |b_n||a_n| \leqslant M|a_n| < M\epsilon_1 = \epsilon$，由数列极限定义：$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

6. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

证明：$\forall \epsilon > 0$，存在自然数 N_1，使得当 $k > N_1$ 时，$|a_{2k+1} - a| < \epsilon$，存在自然数 N_2，使得当 $k > N_2$ 时，$|a_{2k} - a| < \epsilon$，取 $N = 2\, max\{N_1, N_2\} + 1$，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \epsilon$，由数列极限定义：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$