1.

P200. 3. 注意到：$\Omega_i = \sup\{\, \big||f(x)|-|f(y)|\big| \mid x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$

$w_i = \sup\{\, |f(x)-f(y)| \mid x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$

则对相同的分割，必有 $\Omega_i \le w_i$

（这是因为 $\big||f(x)|-|f(y)|\big| \le |f(x)-f(y)| \le w_i$）

$\Rightarrow \lim\limits_{\|T\|\to 0} \Omega_i \Delta x_i = 0$

P200. 4. 记 $w_i = \sup\{\, |f(x)-f(y)| \mid x,y\in[x_{i-1},x_i]\}$

$\Omega_i = w_i\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \sup\left\{\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| \;\middle|\; x,y\in[x_{i-1},x_i]\right\} \le \frac{w_i}{c^2}$

$\lim\limits_{\|T\|\to 0} w_i\Delta x_i = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\|T\|\to 0} \Omega_i\Delta x_i = 0$

P218. 2. (1) $B(n,m) = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$，令 $t=1-x$，则

$= \int_1^0 (1-t)^n t^m\, d(1-t) = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = B(m,n)$

(2) $B(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^n\, d\,x^{m+1}$

$= \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1} = \frac{n}{m+1} B(m+1,n-1)$

$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\frac{1}{m+n}\, B(m+n,0)$

$= \frac{n!\,m!}{(m+n)!}\int_0^1 x^{m+n}dx = \frac{n!\,m!}{(m+n+1)!}$

P219. 3. (2) $\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|\,dx \overset{t=x-k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(t+k\pi)\sin t\,dt$

$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(-t\cos t + \sin t - k\pi\cos t\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \sum_{k=0}^{n-1}(\pi + k\pi + k\pi) = \pi\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\pi}{2}(1+2n-1)n$

$= n^2\pi$

P219. 6. (1) 取 $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$，$F(x)$ 为 $f$ 的原函数，满足

$\left.\begin{array}{l} F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = -\int_0^x f(t)\,dt = -F(x) \\ F(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow F(x)$ 为奇函数

或 取 $F(x)$ 为任一原函数，那么 $F'(x)=f(x)$，则

$\big((F(x)-F(0)) + (F(-x)-F(0))\big)' = F'(x) - F'(-x) = f(x)-f(x)=0 \Rightarrow F(x)-F(0)+F(-x)-F(0)=c$，取 $c=$

2

P210. 1.(1) $S = 2\int_0^a \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{1+4y^2}\,dx =$

$= a\sqrt{4a^2+1} + \frac{1}{2}\ln(2a + \sqrt{4a^2+1})$

P210. 2.(2) $A = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,dt = 3\pi$，若用书中公式，积分区间应为 $\int_{2\pi}^{0}$.

P210. 3.(3) $V = \pi\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\,dt = 5\pi^2$

P210. 4. $V = \pi\int_0^h (R^2 - (R-h+y)^2)\,dy = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$

P219. 3.(3) $f(x) = \int_x^{x+2\pi} (1+e^{\sin t} - e^{-\sin t})\,dt + \frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$

注意到 $g(t) = 1+e^{\sin t} - e^{-\sin t}$ 满足

$g(t) = g(t+2\pi)$

由 P191 第21题，

$\int_x^{x+2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} g(t)\,dt$

进一步，注意到 $\int_0^{2\pi} e^{\sin t} - e^{-\sin t}\,dt$ 令 $u = 2\pi - t$，

$= \int_0^{\pi} e^{\sin t} - e^{-\sin t}\,dt + \underline{\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t} - e^{-\sin t}\,dt}$

$= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t})\,dt + \int_0^{\pi} e^{-\sin u} - e^{\sin u}\,du$

$= 0.$

$\Rightarrow f(x) = 2\pi + \frac{1}{1+x}\int_0^1 f(t)\,dt$，两边在 $[0,1]$ 上积分，

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = 2\pi + \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dy = \frac{2\pi}{1-\ln 2}$

P219. 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \overset{t=\tan x}{=\!=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

$\frac{1}{2n+2} \le \frac{1}{2}\int_0^1 t^n\,dt \le \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \frac{1}{2n}$

P217. 1 (3) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_2^{+\infty} \Rightarrow$ 不收敛

(8) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi$

(11) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n!$

(12) 令 $t = -\ln x$，则 $\int = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (-1)^n n!$

P218. 3. (2) $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$

当 $\alpha \le 0$ 时，$\int_1^{+\infty}$ 发散

当 $0 < \alpha < 1$ 时，$\int_1^{+\infty}$ 发散

当 $\alpha > 1$ 时，$\int_0^1$ 发散

当 $\alpha = 1$ 时，$\int_0^1$，$\int_1^{+\infty}$ 均发散

P218. (4.11) $\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x^2+x-2} = \int_{-1}^{4} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} + \int_1^4 \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$

$= \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \Big|_1^4$

不收敛.

P230. 16. 证明：设 $f(x_0) = M$，由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow M - \varepsilon < f(x) < M$

于是

$\sqrt[n]{2\delta}(M-\varepsilon) \le \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} \le M(b-a)^{\frac{1}{n}}$

当 $n \to +\infty$，有

$M - \varepsilon \le \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} \le M$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$

关于 210 页第 (2) 题, 答案中相当于利用面积微元

$$dA = ydx = (1 - \cos t)d(t - \sin t) = (1 - \cos t)^2 dt$$

来进行计算. 那么对应的参数的变化范围为从 0 到 $2\pi$. 部分同学使用书上 205 页公式

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b (\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t))dt$$

计算. 若仍取参数变化范围为从 0 到 $2\pi$, 则计算结果为负数. 这是因为: 书中该公式的导出利用了极坐标下的面积计算公式. 在由极坐标换为该公式时, 要求参数从 a 变化到 b 的过程中, 对应的曲线上的点和原点的连线应逆时针转动. 即书中 205 页倒数第二行文字所提到的" 若极角 $\theta$(按逆时针方向) 从 $\alpha$ 变到 $\beta$, 对应参数 t 从 a 变到 b". 按照此处约定, 本题的参数变化范围应取 $2\pi$ 到 0. 具体的推导可参考教材 204 页第 5.3.2 小节.

对本题所给参数方程足够熟悉的同学会看出是摆线, 可以对应一个半径为 1, 质心速度为 1 的作无滑滚动的车轮上初始和原点重合的一点在 t 时刻所处的位置. 作出其大致图像如下. 从图可以更容易看出若参数从 0 变动至 $2\pi$, 对应顺时针转动 (指曲线上点和原点的连线而非车轮的转动), 参数从 $2\pi$ 变动至 0 则对应所要求的逆时针转动.

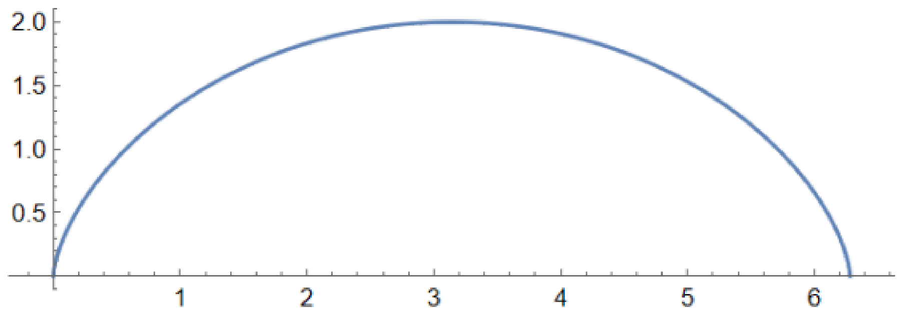


图 1: 摆线

关于 217 页第 1 题 (11), 此即著名的 $\Gamma$ 函数, 属于数学分析 B2 的内容, 在最初写答案时直接利用了结果. 下面用 B1 的知识重新给出. 记

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^{(n+1)-1} e^{-x} dx$$

由分部积分, 有

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= -\int_0^{+\infty} x^n d(e^{-x}) \\ &= -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n\Gamma(n)\end{aligned}$$

根据上面建立的递推公式, 得到

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1)$$

而

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

于是得到

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$