第六次作业参考解答

2.2.13. 依题设，$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, x' \in (a,b)$ 且 $|x-x'|<\delta$，则有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. 故 $\forall y, y' \in (a, a+\delta)$，$z, z' \in (b-\delta, b)$（不妨设 $\delta < b-a$）均有 $|f(y)-f(y')|<\varepsilon$，$|f(z)-f(z')|<\varepsilon$

结合 Cauchy 收敛原理知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在.

2.2.14 由 f 一致连续知 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x', x'' \in (0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 均有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 由 $\{a_n\}$ 为正收敛序列知 $\exists N>0, \forall m,n \geq N$，$a_m, a_n > 0$，$|a_m - a_n| < \delta \Rightarrow |f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon \xRightarrow{Cauchy} \{f(a_n)\}$ 收敛.

若 $f(x) = \sin\frac{1}{x} \in C((0,+\infty))$，$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}} & n=2k+1, k\in N \\ \frac{1}{2k\pi} & n=2k, k\in N^+ \end{cases}$ 为正收敛数列

但 $f(a_n) = \begin{cases} 1 & n=2k+1, k\in N \\ 0 & n=2k, k\in N^+ \end{cases}$ 不收敛.

综合题 7. Pf: 记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，分以下三种 Case

Case 1：若 $f(x)\equiv A$，$\forall x\in[a,+\infty)$，命题显然成立.

Case 2：若 $\exists x_0 \in [a,+\infty)$，st $f(x_0)>A$，则 $\exists X_0 > x_0$，st $\forall x \in (X_0, +\infty)$ 有 $f(x)<f(x_0)$. 由 $f(x)\in C([a,X_0])$ 知 $\exists x_1 \in [a, X_0]$，st $f(x_1) = \max\limits_{x\in[a,X_0]} f(x)$.

从而 $f(x_1) \geq f(x_0) > f(x)$，$\forall x \in (X_0, +\infty)$，即得 $f(x)$ 在 x_1 处取最大值.

Case 3：若 $\exists x_0 \in [a,+\infty)$，st $f(x_0)<A$，同理知 $f(x)$ 可在 $[a,+\infty)$ 上取最小值.

9. 由 $0 = 1-1 = x_n^n + g(x_n) - g(x_{n-1})$，其中 $g(x) = x^{n-1} + \cdots + x$ 单调递增.

（令 $f(x) = x^n + \cdots + x - 1$ 单调递增且 $f(0) = -1 < 0$，$f(1) = n-1 \geq 0$

从而题设方程有存在唯一正根 x_n）可知 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界

故可设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$x_0 < x_n \le x_2 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^n = 0$

在 $1 = x_n^n + \cdots + x_n = \frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}$ 两边令 $n\to+\infty$ 可得 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

3.1.1 (3) 由 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \ne 1$ 知 $f(x)$ 在 0 处不连续，也不可导

(4) 由 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \ne 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ 知 $f(x)$ 在 0 处不连续更不可导

(5) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^x}{x} = 1 \ne -1 = \lim_{x\to 0^-} \frac{-xe^x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

知 $f(x)$ 在 0 处不可导

3.1.2. $b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$，$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a$，$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

故当 $a=1$，$b=0$ 时，$f(x)$ 处处可导

3.1.3. Pf: $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a} = g(a)$.

3.1.4 Pf: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}\cdot\alpha + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{\beta h}\cdot\beta$

$= (\alpha+\beta) f'(x_0)$.

3.1.6 (3) $y' = 2x\log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x\ln 3}$ (4) $y' = \frac{(1-\cos x) - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(8) $y' = 3x^2 \cdot \tan x \cdot \ln x + \frac{x^3 \cdot \ln x}{\cos^2 x} + x^2 \cdot \tan x$

3.1.8. $f'(x^2) = 3t^2\big|_{x^2=t} = 3x^4$，$(f(x^2))' = (x^6)' = 6x^5$.

3.1.10. (3) $\frac{dy}{dx} = f'(e^x+x^e)(e^x + ex^{e-1})$

(6) $\frac{dy}{dx} = f'(e^x)e^{x+f(x)} + f(e^x)e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

3.1.12 (1) 当 $n=1$ 时，$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 极限不存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 0 处不可导

(2) 当 $n=2$ 时，$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

$f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} + x^n\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad (n=2,\ \forall x\neq 0)$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 不存在，即知 $f'(x)$ 在0处不连续

(3) 同(2)知 $f'(0)=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x} = 0 \quad (n\geq 3)$

即得 $f(x)$ 在0处可导且 $f'(x)$ 在0处连续.

3.1.14 (1) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x+2e^x}$ (2) $x = \frac{1}{\tan y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3.1.7 (2) $y' = \frac{1}{3}(1+\ln^2 x)^{-\frac{2}{3}}(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}$ (5) $y' = 3(\sin x^3)^2\cos x^3(3x^2)$

(10) $y' = \sqrt{1+x^2}\cdot\sin x + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\sin x + x\sqrt{1+x^2}\cdot\cos x$

(11) $y' = e^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (16) $y' = \ln 10\cdot 10^{x}(\sin x)^{\cos x} + 10^x(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\sin x\right)$

3.1.18 (3) $y' = 2x\arctan x + 1$, $y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{x^2+1}$.

3.1.21 (2) 原式 $= (x^2+1)\sin^{(n)}x + n(2x)\sin^{(n-1)}x + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\sin^{(n-2)}x$.

$= (x^2+1)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + (2nx)\sin\left[x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right] + n(n-1)\sin\left[x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right]$.

(3) 原式 $= \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$.

3.1.22. $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ 切线方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3.1.23. (x_0, y_0) 处的切线为 $y = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) + \frac{1}{x_0}$

令 $x=0$, $y = \frac{2}{x_0}$，令 $y=0$, $x = 2x_0 \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{x_0}\right|\cdot|2x_0| = 2$. 为定值.

3.2.2 (6) $y' = 2\tan(1+2x^2)\frac{4x}{\cos^2(1+2x^2)}$ (7) $y' = -e^{-x}\cos(3-x) + e^{-x}\sin(3-x)$

3.2.3 (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3}$

3.2.4 (1) $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos t}{-\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$，当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ 切线方程为 $y = -\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$.