第4章 不定积分

例：由分部积分

$$\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{x}\cdot x + \int x\frac{1}{x^2}dx$$
$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 1 \qquad ?$$

不定积分的性质：

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$
2. (1) 齐性：$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$

   (2) 加性：$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f + \int g$

计算不定积分的基本方法：

1. 观察法

例：$\int e^x dx = e^x + C$

例：$\int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx = e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x} + C$

例：$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int e^{2x} - e^x + 1\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

2. 第一代换法（凑微分法） $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$
3. 第二代换法 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$
4. 分部积分法. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

逐适： $\int e^{-x^2}dx \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad \int \sin x^2\, dx \quad \int \cos x^2\, dx$

$\int \frac{\sin x}{x^n}dx \quad \int \frac{\cos x}{x^n}dx \quad \int \frac{e^x}{x^n}dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ ， $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\, dx$ ， $\int \frac{dx}{(1+h^2\sin^2 x)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$

单摆周期.

$\int x^m (a+bx^n)^p dx$

（除 p， $\frac{m+1}{n}$ ， $\frac{m+1}{n}+p$ 为整数）

换元法：

P_{154}、3.(6) $I=\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

法一： $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x\, d(x^2+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = (-\cancel{2})\frac{1}{2}\int \ln x\, d(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

于是 令 $t=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$， $x=\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}$

$\Rightarrow \quad I = -\int \ln\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2}}\, dt$

$= \frac{1}{2}(2\ln t - \ln(t-1) - \ln(t+1))$

法二： 令 $t=\ln x$， $x=e^t$， $dx=e^t dt$

于是 $I = \int \frac{te^{2t}dt}{(e^{2t}+1)^{\frac{3}{2}}} = -\int t\, d(e^{2t}+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= -\frac{t}{\sqrt{e^{2t}+1}} + \int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$

对 $J=\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$， 令 $u=\sqrt{e^{2t}+1}$，则

$u^2-1=e^{2t}$， $u\,du = e^{2t}dt$

$J=\int \frac{u\,du}{u(u^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{du}{u-1} - \frac{du}{u+1}\right)$

P155

3.(11) $I=\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{1}{x^2}\,dx$

法一：令 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，则 $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，$dx=\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt$

$$\Rightarrow I = \int t\,\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt = 4\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}$$

$$= 4\int\frac{dt}{t^2+1} - 4\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

由分部，$\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{1+t^2} + \int\frac{2t^2\,dt}{(t^2+1)^2}$

$$= \frac{t}{1+t^2} + 2\int\frac{dt}{t^2+1} - 2\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + C$$

$$\Rightarrow I = 2\arctan t - \frac{2t}{1+t^2} + C$$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$

法二：令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则 $x=\sqrt{t^2+1}$，$dx=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$

$$I=\int\frac{(\sqrt{t^2+1}-1)\,dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{dt}{t^2+1} - \int\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

后者，由分部 $\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$$\Rightarrow \int\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

或令 $t=\tan\alpha$，则 $\int\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int\cos\alpha\,d\alpha = \sin\alpha = \sin(\arctan\sqrt{x^2-1})$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

法三：令 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$，或令 $t\pm x=\sqrt{x^2-1}$

均可实现有理化.

其他可换元法的题：

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

一般而言，$\sqrt{a^2-x^2}$ 可作代换 $x=a\cos t$ 或 $x=a\sin t$

$\sqrt{x^2+\alpha}$ 可作代换 $\begin{cases} x=a\cosh t,\ x=a\sec t,\ \alpha<0 \\ x=a\sinh t,\ x=a\tan t,\ \alpha>0. \end{cases}$

倒代换：$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$，令 $t=\frac{1}{x}$，则

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ I=\int t\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}\cdot\frac{-dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C$$

$$\Rightarrow\quad I=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$$

注意：$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ 在 $x=0$ 处无定义，严格来说应在 $x>0$ 和 $x<0$ 分别求积分，解决办法为先在 $x>0$ 求解，后令 $u=-x$ 而得到 $x<0$ 的情况。
例子：$\int\frac{dx}{x}$

$$\int\frac{dx}{A^2\sin^2x+B^2\cos^2x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}dx}{A^2\tan^2x+B^2}=\frac{1}{AB}\int\frac{d\frac{A}{B}\tan x}{\left(\frac{A}{B}\tan x\right)^2+1}=\frac{1}{AB}\arctan\left(\frac{A}{B}\tan x\right)+C$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{d\tan x}{\tan x}=\ln\left|\tan x\right|+C$$

注意：在 $x=\frac{1}{2}k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$ 处均无定义。注意到为周期函数，$T=\pi$，可通过令 $t=x+m\pi$

分部积分法的题目：

$\int \sin^n x\,dx$ $\int \cos^n x\,dx$ ~~$\int \tan^n x\,dx$~~

$\int \frac{dx}{\sin^n x}$ $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $\int \sin^\mu x \cos^\nu x\,dx$

$\int p(x) e^{ax} dx$ $\int p(x) \sin \alpha x\,dx$ $\int p(x) \cos \alpha x\,dx$

$\int x^k \ln^m x\,dx$ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}$

$\int e^{ax} \cos\beta x\,dx$ $\int e^{\alpha x} \sin\beta x\,dx$

讨论：$\int \sin^n x\,dx$

$n=1$ ✓

$n=2$ ✓

$n=3$ ✓

$n \geq 4$ 较难

$n=3$ 和 $n=4$ 的区别，于是

若 $n=2k+1$，都是容易的，这是因为

$$\int (1-\cos^2 x)^k d(-\cos x) = -\int \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \cos^{2j} x \; d\cos x$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\cos^{2j+1} x}{2j+1} (-1)^{j+1}$$

若 n 为偶数，不如上述容易。

考虑由分部积分得出递推关系：

$$I_n = \int \sin^n x\,dy = -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow \quad n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

类似，对 $\int \tan^n x dx$ $\quad n=1$ ✓ $\quad n=2$ ✓ $\quad n=3$ ✓ $\quad n=4$ × 6

若 $n=2m+1$，则

$$\int \tan^{2m+1} x dx = \int \frac{\tan^{2m} x}{\sec x} \tan x \sec x dx = \int \frac{(\sec^2 x-1)^m}{\sec x} d\sec x$$

$$= \int \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \sec^{2k-1} x \, d\sec x + \int \frac{(-1)^m}{\sec x} d\sec x$$

$$= (-1)^m \ln|\sec x| + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \frac{\sec^{2k} x}{2k}$$

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

对 $\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ 法一（换元）

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{d\cos x}{1-\cos x} + \frac{d\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C$$

$\int \frac{dx}{\cos x}$ 类似．或令 $t = \pm x \pm \frac{\pi}{2}$（取 $x = t - \frac{\pi}{2}$）

对 $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \sec^n x dx$．若 $n=2m$．易！

一般地，$\int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x \, d\tan x =$

$$= \tan x \sec^{n-2} x - \int (n-2) \tan^2 x \sec^{n-2} x \, dx$$

$$I_n = \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) I_n + (n-2) I_{n-2}$$

对 $\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x \, dx = I(\mu, \nu)$

$$\int \sin^{\mu-1} x \cos^{\nu} x \, d(-\cos x) \longleftrightarrow I(\mu-2, \nu)$$

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu-1} x \, d\sin x \longleftrightarrow I(\mu, \nu-2)$$

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu+2} x \, d\tan x \longleftrightarrow I(\mu+2, \nu)$$

$$I(\mu, \nu+2)$$

$$\int \sin^{\mu+2} x \cos^{\nu} x \, d\cot x \longleftrightarrow I(\mu+2, \nu)$$

$$I(\mu, \nu+2)$$

对 $\int p(x) e^{ax} dx$ 讨论 $\int x^n e^{ax} dx$

$$I_n = \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int x^n de^{ax} = \frac{x^n e^{ax}}{a} - n\int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - n\int x^{n-1} e^{ax} dx$$

类似地，

$$\int x^n \cos\alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha} x^n \sin\alpha x - n\int x^{n-1} \sin\alpha x \, dx$$

$$\int x^k \ln^m x \, dx = \frac{1}{k+1}\int \ln^m x \, dx^{k+1} = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x - \frac{m}{k+1}\int x^k \ln^{m-1} x \, dx$$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 为书上例题，不再介绍。$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}$ 与之类似。除了利用变换元法，也可建立递推公式。

$\int e^{\alpha x} \cos\beta x \, dx$ 与 $\int e^{\alpha x} \sin\beta x \, dx$，无论将 $e^{\alpha x}$ 还是三角函数放入"d"下，均可建立二元一次方程组，见书中例题，不再赘述。介绍另一方法。

$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$，$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \, dx = \int \mathrm{Re}\, e^{\alpha x} e^{i\beta x} dx$

定义：$\int (u(x) + i v(x)) dx = \int u(x) dx + i\int v(x) dx$

与 $\frac{d}{dx}(u(x) + i v(x)) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}$

则 Re、Im 可与积分运算交换顺序。

于是 $\int e^{\alpha x} \cos\beta x \, dx = \mathrm{Re}\int e^{(\alpha+i\beta)x} dx$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}\right) = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2} e^{\alpha x} + C$$

在得到 $I=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$ 与 $J=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$ 后，顺便推出，形如

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx \quad 与 \quad \int x^n e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$$

形状的积分也可以求出.

含有 e^{x}，$\ln x$，arc___，通常都可以用分部积分来得到解决. 含 $e^{\alpha x}$ 的积分（形式）在 Fourier 变换、Laplace 变换中出现 （$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$，

$F(p)=\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$）

在量子力学中，动量本征函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

虽然都有更简便的方法来写出积分结果，但作为基本的方法，其重要性不容忽视.

例三 一维运动粒子的波函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}(2\lambda)^{\frac{3}{2}}x e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \qquad (\lambda>0)$$

求粒子动量的分布的概率幅

$$c(p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\psi(x)\,dx$$

$$=\frac{(2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{0}^{+\infty}x e^{-(\lambda+\frac{ip}{\hbar})x}\,dx$$

$$=\frac{(2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{1}{(\lambda+ip/\hbar)^2}$$

特殊技巧：

配对法：例：(1) $\int \frac{\alpha\sin x+\beta\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$

对 $I=\int \frac{a\sin x+b\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$ 与 $J=\int \frac{a\cos x-b\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx$

容易积出，于是，若 $\exists$ A, B, s.t.

$\begin{cases} aA-bB=\alpha \\ bA+aB=\beta \end{cases}$ 有解，问题即得到解决

(2) 例：$\int \frac{12x^{11}+4x^3}{x^{16}+7x^8+1}dx$

在 $x\neq 0$ 时，$\int \frac{12x^3+4\frac{1}{x^5}}{x^8+\frac{1}{x^8}+7}dx$

考虑 $\int \frac{d(x^4+\frac{1}{x^4})}{(x^4+\frac{1}{x^4})^2+5} = \int \frac{4x^3-\frac{4}{x^5}}{(x^4+\frac{1}{x^4})^2+5}dx$

与 $\int \frac{d(x^4-\frac{1}{x^4})}{(x^4-\frac{1}{x^4})^2+9} = \int \frac{4x^3+\frac{4}{x^5}}{(x^4-\frac{1}{x^4})^2+9}dx$

§4.2 有理函数的积分.

有理函数一定能~~积~~有初等原函数.

一般步骤：1. 将有理函数作多项式带余除法，整理成多项式函数和有理真分式之和.

$$R_0(x)=P_n(x)+R(x)$$

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\deg P<\deg Q$$

2. 将 $Q(x)$ 分解成 $(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}$

和 $(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}(x^2+\beta_2x+\gamma_2)^{s_2}\cdots$

的形状.

实际上就是求出根，并按实、复分类。
并注意考虑次数。

3. ~~用待定系数~~ 将 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成：

(1) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ (2) $\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$

的和的形式。

4. 求出不定积分。

$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k}$ 容易求出

$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx$ 稍显复杂，但事实上只需

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+\beta x+\gamma)}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} + \underline{\frac{2C-\beta B}{2}\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^k} = \int \frac{d(x+\frac{\beta}{2})}{\left((x+\frac{\beta}{2})^2+(\gamma-\frac{\beta^2}{4})\right)^k} \quad (\beta^2-4\gamma<0)$$

例：$\int \frac{dx}{x^4+x^6} = \int \frac{dx}{x^4(x^2+1)}$

$$\frac{1}{x^4(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex+F}{1+x^2}$$

同乘 x^4 并令 $x\to 0$，得到 $D=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^4(x^2+1)} - \frac{1}{x^4} = -\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}.$$

含有三角函数的有理式的积分

原则上，对于 $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ 的积分，总可以令

$$t = \tan\frac{x}{2},$$

从而 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

于是 $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$

变有有理函数. 从而 $R(\sin x, \cos x)$ 一定有初等原函数. 但在计算中，考虑 $R(u,v)$

(1) 若 $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$

则 $R(\sin x, \cos x) = R_0(\sin^2 x, \cos x)\sin x$ 　　令 $t = \cos x$

$$\Rightarrow \int R(\sin x, \cos x)dx = -\int R_0(1-\cos^2 x, \cos x)\, d\cos x$$

(2) 若 $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$

则 $R(\sin x, \cos x) = R_0(\sin x, \cos^2 x)\cos x$ 　　令 $t = \sin x$

(3) 若 $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$

则 $R = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cos x, \cos x\right) = \tilde{R}(\tan x, \cos x)$

$\Rightarrow \quad = \tilde{R}(\tan x, -\cos x) = R_0(\tan x, \cos^2 x)$

于是 $R(\sin x, \cos x) = R_0\left(\tan x, \frac{1}{1+\tan^2 x}\right) = R^*(\tan x)$

令 $t = \tan x$.

$$R(u,v) = \frac{R(u,v) - R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v) - R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v) + R(u,v)}{2}$$

$R_1(u,v) = -R_1(-u,v)$ 　　$R_2(u,v) = -R_2(u,-v)$ 　　$R_3(u,v) = R_3(-u,-v)$

还必须指出，针对具体问题，灵活运用三角恒等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sec^2 x - \tan^2 x = 1,$$

倍角公式，降幂公式，和差化积，积化和差等，

可能更容易得出计算结果.

例二： $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

答案中第一种方法通过凑分母为 $(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x)$ 实现，现在观察到

法一： $$\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x} = \frac{(-\sin x)^2(-\cos x)}{(-\sin x)+(-\cos x)}$$

直接令 $t=\tan x$，则

$$I=\int \frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2}$$

$$\frac{t^2}{(1+t)(1+t^2)^2} = \frac14\frac{1}{t+1} - \frac14\frac{t-1}{1+t^2} + \frac12\frac{t-1}{(t^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac14 \ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac14\frac{1+t}{1+t^2}+C$$

$$=\frac14\ln|\sin x+\cos x| - \frac14\cos x(\sin x+\cos x)+C$$

法二、~~乘~~ 利用二倍角公式，分子分母同乘 $\cos x-\sin x$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x-\sin^2x}dx - \int\frac{\sin^3x\cos x}{\cos^2x-\sin^2x}dx$$

$$=\frac14\int\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx - \int\frac{\sin^3x}{1-2\sin^2x}d\sin x$$

$$=\frac14\ln|\sin x+\cos x| + \frac14\sin x(\sin x-\cos x)+C$$

法三： 注意到 $\sin^2x\cos x = \frac12\sin x(\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x-1)$

$$=\frac12\sin x(\sin x+\cos x)^2-\frac12\sin x$$

于是 $I=\frac12\int(\sin^2x+\sin x\cos x)dx - \frac12\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\frac14\int(1-\cos2x)dx+\frac14\int\sin2x\,dx$$

$$-\frac14\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx + \frac14\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$$

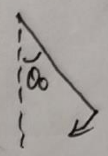
$$=\frac14\ln|\sin x+\cos x| - \frac18(\sin2x+\cos2x)+C$$

对于含根式的积分，通过三角代换（双曲正余弦代换） 15.

$\sqrt{x+a}$ ，$\sqrt{a^2-x^2}$ ，

或是试利用 ~~[illegible]~~ [illegible]，将其化为有理函数.

例：~~[illegible]~~ m小球，绳长为 l，从 θ_0 处，$v_0=0$ 释放，求运动周期. 不计阻力.



$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}, \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

定积分部分.

~~虽然不是所有的函数之原函数都能得到~~

性质：(1) 积分区间具有可加性

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

(2) 线性性：① 加性：$\int f+g = \int f + \int g$

② 齐性：$\int \alpha f = \alpha \int f$

(3) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(4) $f \le g$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

(5) f 可积，$m \le f \le M$，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

f 连续，$\exists \xi$，s.t.

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)$$

f 可积，$m \le f \le M$，g 可积，非负

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f g\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

即使有些函数

$$\int e^{-x^2}dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}dx$$

不存在初等原函数，但可能通过换元，分部等方法，求出值．例如：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\alpha} x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^{\alpha} x} = \frac{\pi}{4}$$

对后者，令 $\cancel{x=}$ $t=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

注意：

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}dx \quad (b>a>0.$

$\int_a^b e^{-nb^2}dx \le \int \le \int_a^b e^{-na^2}dx$

$\to 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \to 0$

$\int_a^b e^{-nx^2}dx = e^{-n\xi^2}(b-a) \to 0.$

$\xi \ge a > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \frac{\xi^n}{1+\xi} \to 0.$

$(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

$= \frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0.$

例：26. 见解答.

例：f在$[0,a]$上可积，$f(x)+f(a-x)=g(x)$. 则

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} g(x)dx$$

Pf. $\int_0^a = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \underline{\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx}$

令 $t=a-x$，则 $\int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t)dt$

$\Rightarrow \int_0^a = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)+f(a-x)dx$

$= \int_0^{\frac{a}{2}} g(x)dx$

特别地，对 $\int_0^\pi xf(\sin x)dx$，

$xf(\sin x)+(\pi-x)f(\sin(\pi-x)) = \pi f(\sin x)$