第一次习题课讲义

2022 年 9 月 17 日

1 简要复习

1.1 定义与性质

1、定义: 对" $\varepsilon - N$" 语言的理解, 以及在一些证明、推导或叙述过程中的作用。这是基础, 往往当没有外力可借, 或很难说清楚问题的时候, 回到原始的定义会看得更清楚。

2、性质:
唯一性。极限的唯一性, 保证定义的合理性。
局部性：收敛性只与充分大以后的项有关（即改变有限项不影响收敛性）注意这里的“充分大” 含义是, $\exists N$, 对 $n > N \ldots\ldots$
有界性: 收敛必有界。
相容性: 极限运算与四则运算的相容性。
“保序性”：例如：$a_n \to a, a > 0 \Longrightarrow a_n > 0$ 对充分大的 n 成立。反之 $a_n > 0 \Longrightarrow a \geq 0$

1.2 理论

1、确界原理: 确界的表述（特别是类似" $\varepsilon - \delta$ " 语言的表述) 和存在性; 确界原理 $\Longrightarrow$ 单调有界必收敛 $\Longrightarrow$ 区间套定理。

2、列紧性：有界数列必有收敛子列（注意证明方法）。一个直接应用是判别极限不存在。例如, 如果有两个子列极限不一致, 或者一个子列发散，则数列发散。

3、Cauchy 收敛准则

1.3 计算

1、三明治（夹逼定理）：关键是估计不等式, 如何收和放, 原则是收放适度, 恰到好处。在估计数列不等式中“算术平均大于几何平均”会经常用到。

2、重要极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

一些数列极限的运算最终可以归为上述结果。

3、单调有界：证明单调增（或单调减）以及有上界（或有下界）

4、Stolz 定理：主要解决 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限问题。只要下列等式右边极限存在, 就能得到左边 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限。（逆命题不成立！）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \text{ (差商)}$$

2 补充例题

2.1 命题推理及推断

判断下列命题或推断是否成立, 并说明理由。

1 若 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

2 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$.

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

4 $\{a_n\}$ 中任两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 均有 $\lim_{n\to\infty}(a_{k_n}-a_{l_n}) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a\in\mathbb{R}$.

5 $a_n > 0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

6 若 $a_n \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

7 无界数列一定是无穷大量.

8 非负数列极限是非负数, 正项数列极限是正数.

9 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列, 则 $\{a_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ 有收敛子列.

10 若对任意 $n, p \in \mathbb{N}^*$, 均有 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{p}{n^2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

11 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, 则必有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 若假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

12 判断数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的敛散性:
(1) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散;
(2) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散.

2.2 参考答案

1 $\not\Rightarrow$ 反例: $a_n = \frac{1}{2^n}$; $\not\Leftarrow$. 反例: $a_n = 1$.

2 $\Longrightarrow$. 定义法证明即可;$\not\Leftarrow$ 反例: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

3 $\not\Rightarrow$. 反例: $a_n = (-1)^n$; $\Longleftarrow$. 截成两段再用定义证明即可, 或者运用 Stolz 定理.

4 $\Longrightarrow$. 利用反证法, 并把 $\{a_n\}$ 发散转化成 Cauchy 列形式; $\Longleftarrow$. 子列极限相同.

5 $\Longrightarrow$.$\exists q$ 满足 $l^{-1} < q < 1$ 及 $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Longrightarrow a_n < a_N \cdot q^{n-N} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

6 $\Longrightarrow$. 定义法证明即可; $\not\Leftarrow$ 反例: $a_n = n$.

7 错误. 反例: $a_n = n\left(1 - (-1)^n\right)$.

8 正确; 错误. 反例: $a_n = \frac{1}{n}$.

9 $\Longleftrightarrow$. 用定义证明即可.

10 正确. $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall p > 0$, 有

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

11 不成立. 构造数列:

$$a_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} = 0, 1, 0, 1, \cdots, \quad b_n = \frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = 1, 0, 1, 0, \cdots,$$

则 $a_n b_n = 0$, 自然有 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$; 但显然 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ 均不存在. 若假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则答案是肯定的.
(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a = 0$, 则结论自然成立;
(2) 若 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{0}{a} = 0$, 结论成立.

12 (1) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 发散, 数列 $\{a_n b_n\}$ 的敛散性不确定.

(a) 假设数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} b_n = \mp(\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) - \lim_{n\to\infty} a_n)$, 则数列 $\{b_n\}$ 收敛, 予盾. 故数列 $\{a_n \pm b_n\}$ 发散.

(b) 取 $a_n = 0$, 则 $a_n b_n = 0$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛;

(c) 取 $a_n = 1$, 则 $a_n b_n = b_n$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 发散.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n b_n\}$ 的敛散性皆不确定.

(a) 取数列

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1},$$

则 $a_n + b_n = 0$, 数列 $\{a_n + b_n\}$ 收敛; $a_n - b_n = 2\cdot(-1)^n$, 数列 $\{a_n - b_n\}$ 发散; $a_n b_n = (-1)^{2n+1} = -1$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛;

(b) 取数列

$$a_n = b_n = (-1)^n,$$

则 $a_n + b_n = 2\cdot(-1)^n$, 数列 $\{a_n + b_n\}$ 发散; $a_n - b_n = 0$, 数列 $\{a_n - b_n\}$ 收敛; $a_n b_n = 1$, 数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛.

2.3 数列极限例题

例题 1 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^k}{n^n}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

解 $k = 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0; k \geqslant 2$ 时, 注意到 $\frac{(n!)^2}{n^n} \leqslant \frac{(n!)^k}{n^n}$, 而

$$\frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{\prod_{k=2}^{n-1} k(n+1-k)}{n^{n-2}} \geqslant \frac{(2n-2)^{n-2}}{n^{n-2}} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

由夹逼原理知 $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^k}{n^n} = +\infty$.

例题 2 求 $\lim_{n\to\infty} \left(\ln^2(n+1) - \ln^2 n\right)$.

解 我们有

$$\begin{aligned} 0 < \ln^2(n+1) - \ln^2 n &= (\ln(n+1) - \ln n)(\ln(n+1) + \ln n) \\ &< 2\ln(n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{2\ln(n+1)}{n}, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(n+1)}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 0.$$

由夹逼原理知, $\lim_{n\to\infty} \left(\ln^2(n+1) - \ln^2 n\right) = 0$.

例题 3 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=1$. 证明: 极限 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在.

利用 Cauchy 收敛准则即可

例题 4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $0<a_n<1$, 且有不等式 $(1-a_n)a_{n+1}>\frac{1}{4}(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

利用 $(1-a_n)a_n\leqslant\frac{1}{4}$ **可得**$a_{n+1}\geqslant a_n$**，再利用单调有界原理即可.**

例题 5 设数列 $\{x_n\}$ 是一个非负数列, 满足 $x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}(n\in\mathbb{N}^*)$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

由 $x_{n+1}\leqslant x_n+\frac{1}{n^2}\leqslant x_n+\frac{1}{n(n-1)}(n\geqslant 2)$ **知，**$x_{n+1}+\frac{1}{n}\leqslant x_n+\frac{1}{n-1}$**. 而** $\{x_n\}$ **非负，故** $\left\{x_n+\frac{1}{n-1}\right\}$ **有界. 再利用单调有界原理即可.**

例题 6 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$, 证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$.

证明：对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|<n\varepsilon$. 设 $M>\max_{1\leqslant k\leqslant N}\{a_k\}(M>0)$. 取 $N_0=\max\left\{\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]+1,N\right\}$, 当 $n>N_0$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}\right|<\left|\frac{\max\{M,n\varepsilon\}}{n}\right|\leqslant\varepsilon.$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{a_k\}=0$.

最后，感谢各位同学来听习题课！本习题课讲义部分内容由跟我同届的宗语轩、余启帆同学整理，感谢两位认真热心的前数分助教！