习题 1.3

1. (2) (4) 按定义自行 check

2. (2) n (4) $3^{70}\cdot 8^{20}/5^{90}$

3. 利用 thm1.32 逆否命题，我们只需找出两列数列但其函数值极限不同即可

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ $f(x)=\sin x$

取 $a_n=n\pi$ $a_n\to\infty$ $f(a_n)=0$.

取 $b_n=n\pi+\frac{\pi}{2}$ $b_n\to\infty$ $|f(b_n)|=1$.

(2) 考虑左右极限， $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=-1$ ， $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1$ 无极限.

4. pf: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists M>0$, s.t. $\forall x>M$, $|f(x)-l|<\varepsilon$ ①

$a_n\to+\infty$，故对上述 M，$\exists N_+$, s.t. $\forall n>N$，$a_n>M$。此时，我们有

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$, s.t. $\forall n>N$, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$ （此时由于 $a_n>M$，故满足①式）

故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$

5. (3) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$ 极限在0处为1

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\frac{1}{x}$ 极限不存在！，说明方法同 3(1)

6. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}=\sin x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sin x}{x}$$

7. pf: 和差化积 原式 $= \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{n+1}{2n^2}\alpha \cdot \sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}} = \dfrac{\alpha}{2}$

Here is another solution: $n^2 \cdot \dfrac{\sin\frac{\alpha}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n\alpha}{n^2}}{n^2} \xlongequal[n\to\infty]{\text{Stolz}} n^2 \cdot \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{n^2}}{n^2-(n-1)^2}$

$= n^2 \cdot \dfrac{\alpha/n}{2n-1} = \dfrac{\alpha}{2}$

?

10. (1) 0 (2) 0

(3) 4 (4) ∞