第 4 周作业参考答案

2022 年 9 月 30 日

周一作业

P27 第 23 题

Proof. $\forall M > 0$, 令 $M' = \frac{M}{b}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,$\exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n| > M'$$

$$\implies |a_nb_n| \geq |a_n|b > M'b = M$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \infty$ □

P27 第 24 题

对 $\sqrt[n]{n!}$, 先考虑数列 $\{\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\}$, 一方面

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq 0$$

对任意 n 成立. 另一方面, 由均值不等式

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}} \leq \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}$$

而根据 Stolz 定理, 数列 $\{n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$, 又有

$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(n+1)-n} = \frac{1}{n+1}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n} = 0$$

故根据三明治定理可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

重新翻译这一极限.$\forall M > 0$, 令 $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$,$\exists N$, 当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \sqrt[n]{n!} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

$\therefore$ 当 $n \to \infty$ 时,$\sqrt[n]{n!}$ 无界, 趋于无穷大.

对数列 $\{n \sin \frac{n\pi}{2}\}$,$\forall M > 0$, 都能找到一个 $n_0 = 2[M] + 1$, 使得

$$\left| n_0 \sin \frac{n_0 \pi}{2} \right| = 2[M] + 1 > M$$

故数列 $\{n \sin \frac{n\pi}{2}\}$ 无界. 但存在 $M = 1 > 0$, 对任意的 N, 当 $n > N$ 时, 总存在 $n' = 2N$, 使得

$$|n' \sin \frac{n'\pi}{2}| = 0 \le M$$

故数列 $\{n \sin \frac{n\pi}{2}\}$ 不趋于无穷大.

P27 第 25 题

Proof. 反证.

先由 $a_1 = 1$ 和递推关系 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ 容易看出 $\forall n, a_n > 0$, 且数列单调递增. 因而数列要么发散到无穷大, 要么收敛到某个正数. 所以反证时只需假设数列收敛到 a. 由 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 可知,a 必为大于 1 的正数. 由假设, 对递推关系两边取极限可以得到

$$a = a + \frac{1}{a}$$

这对任何有限的正数 a 都不可能成立, 矛盾!

所以数列只能发散到无穷大. □

周三作业

P52 第 1 题 (2)

解: 对充分大的 n, 取

$$b_n = \frac{10}{2} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{12}{6} \cdots \frac{n+9}{2n}$$
$$c_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{4} \cdots \frac{n+9}{2n-2}$$

则有

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{12}{6} \cdots \frac{n+9}{2n} \le \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdots \frac{n+9}{2n-1} \le \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{12}{4} \cdots \frac{n+9}{2n-2}$$

或记为 $b_n \le a_n \le c_n$. 利用记号 $(2n)!!$ 表示前 n 个偶数的连续乘积, 即有

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$$

以及其与 $n!$ 之间存在关系

$$\begin{aligned}(2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n) \\ &= n! \times 2^n\end{aligned}$$

于是左边

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{10}{2} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{12}{6} \cdots \frac{n+9}{2n} \\ &= \frac{1}{9!} \times \frac{(n+9)!}{(2n)!!} \times \frac{2^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{9!} \times \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+9)}{2^n} \times \frac{n! \times 2^n}{(2n)!!} \\ &= \frac{1}{9!} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+9)}{2^n} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

右边类似可以得到 $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 根据三明治定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

也可以通过修改数列的前几项, 使得数列总体上严格单调递减, 又有下界为 0 故数列收敛. 对递推公式 $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+10}{2n+1}$ 两边取极限算出 $a = \frac{1}{2}a \implies a = 0$.

P25 第 1 题 (4)

分析: 根据经验, 试图证明数列单调有界从而收敛, 由此可设极限存在且为 a, 则在递推公式两边取极限可以得到 $a = \frac{1}{1+a} \implies a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 但列出数列的前几项

a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_3
3	1/4=0.25	4/5=0.80	5/9≈ 0.56	9/14≈0.64	14/23≈0.61

发现数列并不单调. 不过仔细观察会发现, 如果将上表重新整理为

a_1	3	a_2	1/4=0.25
a_3	4/5=0.80	a_4	5/9≈0.56
a_5	9/14≈0.64	a_6	14/23≈0.61

仅从前 6 项能看到, 奇数子列单调递减, 偶数子列单调递增. 所以试图求出偶数子列与奇数子列各自的递推关系 (实际上是一样的), 然后证明二者各自单调有界而收敛, 且收敛于于同一极限. 据此解答.

解: 对奇数子列, 由 $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, 可以得到

$$a_{n+2} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$$

下面证明奇数子列有下界 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(1) $a_1 = 3 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 成立;

(2) 假设当 n=k 时结论成立, 则当 n=k+2 时

$$
\begin{aligned}
a_{k+2} = \frac{1+a_k}{2+a_k} &= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+a_k}} \\
&\geq \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}
\end{aligned}
$$

成立.

$\therefore$ 由 (1)(2) 归纳得, 数列的奇数子列有下界 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
下面说明奇数子列单调递减. 考虑奇数子列中前后两项的差

$$
a_{n+2} - a_n = \frac{1-a_n-a_n^2}{a_n+2} = \frac{\left(a_n + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - a_n\right)}{a_n+2} \leq 0
$$

这就证明奇数子列单调递减, 且有下界, 故奇数子列收敛. 设其收敛到 a_j, 则在递推公式两边取极限可以得到 $a_j = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 同理可以证明偶数子列单调递增且有上界 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 设收敛到 a_o, 同样得到 $a_o = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以, 原数列收敛, 收敛到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

P52 第 3 题 (2)

Proof.

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1
$$

$\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ 单调递增.

由均值不等式

$$
\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^3})\cdots(1+\frac{1}{2^n}) \\
&\leq \left(\frac{n+(1-\frac{1}{2^n})}{n}\right)^n \\
&\leq (1+\frac{1}{n})^n \leq e
\end{aligned}
$$

数列 $\{a_n\}$ 有上界 e. 又其单调递增, 故收敛. □

P53 第 7 题

Proof. 取数列 $b_n = n$, 则 $\{b_n\}$ 严格单调递增趋于正无穷. 有

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = a
$$

由 Stolz 定理

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a
$$

□

P53 第 8 题

Proof. 1. 若 a=0, 则由

$$0 \le \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0 \implies \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a=0$.

2. 若 a>0, 考虑数列 $\{\ln a_n\}$, 根据对数函数 $\ln x$ 的连续性,$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$. 由 Stolz 定理可得到

$$\lim_{n\to\infty}\ln(\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln a_{n+1}=\ln a$$

再利用指数函数 e^x 的连续性即可得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

由 1. 和 2. 可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$. □

周五作业

P50 第 1 题 (2)

证明: 函数定义域 $x\in(-\infty,-1)\bigcup(-1,+\infty)$.

$\forall\varepsilon>0,\exists X=1+\frac{2}{\varepsilon}>0$, 当 $|x|>X$ 时,$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\frac{2}{|x+1|}<\varepsilon$

P50 第 1 题 (4)

证明: 函数定义域 $x\in[0,+\infty)$.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\varepsilon^p>0$, 当 $0<x<\delta$ 时,$\left|x^{\frac{1}{q}}\right|<\delta^{\frac{1}{q}}=\varepsilon$

P50 第 2 题 (2)

解: 定义域 $x\in(-\infty,1)\bigcup(1,+\infty)$.

利用

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$$

得到

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\sum_{k=0}^{n-1}x^k=n$$

P50 第 2 题 (3)

解: 定义域 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\bigcup(-\frac{1}{2},1)\bigcup(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$$

P50 第 3 题 (2)

函数定义在 $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$. 在 $x = 0$ 左侧, 函数的左极限为 $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, 而在 $x = 0$ 右侧, 函数的右极限为 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$. 因此函数在 x 趋近于 0 时, 左、右极限均存在但不相等, 故极限不存在.

P50 第 4 题

Proof. $\forall \varepsilon > 0, \exists X$, 当 $x > X$ 时,

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

对此 $X > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,$|a_n| = a_n > X$

$$\implies |f(a_n) - l| < \varepsilon$$

即 $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = l$

特别地, 当数列为 $\{n\}$ 时, 可以看出对此 $X, \exists N = [X]$, 当 $n > N$ 时,$|f(a_n) - l| < \varepsilon$. □

P50 第 5 题 (1)

解: 在 $x = 0$ 左侧附近,$-1 < x < 0 \implies [x] = -1$, 故左极限 $\lim_{x \to 0-} f(x) = -1$. 在 $x = 0$ 右侧附近,$0 < x < 1 \implies [x] = 0$, 故右极限 $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$.$f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左右极限均存在但不相等, 故在 $x = 0$ 处极限不存在.

P50 第 5 题 (4)

解: 在 $x = 0$ 左侧附近, 左极限 $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x = 0$. 取 $a_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ 和 $b_n = \frac{1}{2n\pi}$ 可知函数 $\cos \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处极限不存在, 而 $\cos \frac{1}{x}$ 是偶函数, 因此其左右极限均不存在. 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处左极限值为 0, 右极限不存在.

P50 第 6 题

解: 定义域 $x \in \mathbb{R}$. 注意到 $f(x) \doteq \lim_{n \to \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ 为偶函数, 可以先只考虑 $x \geq 0$ 的情况. 下面分类讨论.

1. 若 x=0, 该数列的极限为 1.

2. 若 x≥ 0, 则可作变形

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} &= \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \cdot 2^n \sin \frac{x}{2^n}}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}}$$
$$= \frac{\sin x}{x}$$

综上,

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

P51 第 9 题 (1)

解: 若要避开当时还未学习的等价无穷小量的替换, 可以利用三明治定理, 考虑 $x = 0$ 右侧附近, 成立

$$\frac{2x}{\sin 5x} \le \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \frac{\sin 2x}{\sin(5x)\cos(2x)} \le \frac{2x}{\sin 5x}\frac{1}{\cos 2x}$$

利用

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{5}\frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$$

和

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\cos 2x} = 1$$

即可得到

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$$

再注意到函数为偶函数即可得出极限值为 $\frac{2}{5}$.

在学习等价无穷小量的替换后, 可以利用

$$\tan x \sim x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

更容易的得出结果.

P51 第 9 题 (4)

解:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{2\cdot\frac{x^2-1}{2}+1} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{t\to+\infty} \left[(1+\frac{1}{t})^t\right]^2 \cdot \lim_{t\to+\infty} (1+\frac{1}{t}) = e^2$$