第四周参考解答

1.2.18 (2) 用数学归纳法证明 $\frac{c}{2} \le a_n \le 1-\sqrt{1-c}$ ㊟

当 $n=1$ 时，结论显然成立，假设 $n=k$ 时结论成立

则当 $n=k+1$ 时，$\frac{c}{2} \le \frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2} \le \frac{c}{2}+(1-\sqrt{1-c})^2\cdot\frac{1}{2} = 1-\sqrt{1-c}$

故 $n=k+1$ 时结论仍成立，即㊟得证！

又 $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2}(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$ 与 a_n-a_{n-1} 同号

结合 $a_2 \ge \frac{c}{2} = a_1$ 知 $\{a_n\}$ 单调递增，进而极限存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \le 1-\sqrt{1-c}$，在 $a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$ 中令 $n\to+\infty$ 可得

$A=\frac{c}{2}+\frac{A^2}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1-\sqrt{1-c}$.

(4) 由归纳法不难得到 $1\le a_n \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

又 $a_{n+1}-a_n = \frac{a_n}{a_n+1}-\frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$ 与 a_n-a_{n-1} 同号（利用 $\frac{x}{1+x}$ 递增）

结合 $a_1 \ge a_0$ 知 $\{a_n\}$ 单调递增，进而可设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

在 $a_n = 1+\frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$ 中令 $n\to+\infty$ 即得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

22. (2) $a_n = \left(1+\frac{1}{2-n}\right)^{2-n\cdot\frac{n+1}{2-n}} \longrightarrow e^{-1}$.

(3) $a_n = \left[1+\frac{1}{-(2+n)}\right]^{-(2+n)\cdot\frac{n}{-(2+n)}} \longrightarrow e^{-1}$.

ppt P64: 7. 易用归纳法得到 $a_n \ge \sqrt{n}$，对递推式平方知

$\frac{1}{a_{n+1}^2}+a_{n+1}^2 = a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+4 \Longrightarrow a_{n+1}^2 = a_1^2+\frac{1}{a_1^2}+4n-\frac{1}{a_{n+1}^2} \in [4n+\lambda-1, 4n+\lambda]$

（其中 $\lambda = a_1^2+\frac{1}{a_1^2}$）$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n} = 4 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = 2$.

由 Stolz Thm 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{a_{n+1}} = 1$.

1.3.1 (1) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M_\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，当 $x < \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ 时

$$|a^x - 0| = a^x = e^{x\ln a} < e^{\ln\varepsilon} = \varepsilon \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\varepsilon = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$，当 $|x+1| \in (0, \delta_\varepsilon)$ 时，$|x| > \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2+x} - 2\right| = \frac{|x+1|}{|x|} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{1}{2}} = \varepsilon \Longrightarrow \lim_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2.$$

1.3.2 (2) 原式 $= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1) = n$. < $n=0$ 时 原式 $=0$.

(4) 原式 $= \lim_{x\to\infty} \frac{(3+\frac{6}{x})^{70}(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{90}} = \frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}$

(此时不能沿用之前的变形，从逻辑上要单独处理)

1.3.3 (2) $\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x} = 1$，而 $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{x} = -1$ 故 $\lim_{x\to0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.

1.3.5 (3) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 2^x = 1 = \lim_{x\to0^-}(1+x^2) = \lim_{x\to0^-} f(x)$ 故 $\lim_{x\to0} f(x) = 1$

(4) 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0^+$，$y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \longrightarrow 0^+$ $(n\to+\infty)$

则 $\lim_{n\to+\infty} \cos x_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} \cos y_n = -1$，从而 $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \cos\frac{1}{x}$ 极限不存在

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极限

14 (ii) ($\Longrightarrow$) 由渐近线定义知 若存在 $(x, f(x))$ 当 $d_0^2 = x^2 + f^2(x) \longrightarrow +\infty$ 时，$|f(x) - b| \longrightarrow 0$.

从而 $f(x) \to b$，$x \longrightarrow +\infty$ 或 $-\infty$，故 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

($\Longleftarrow$) 不论何种情形，总存在 $(x, f(x))$，使得 $d_0^2 = x^2 + f^2(x) \longrightarrow +\infty$ 且 $\lim_{d_0^2\to+\infty} |f(x) - b| = 0$，从而 $y = b$ 为曲线 C 渐近线。

ppt P26.2：$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{B\cdot\ln A} = A^B$

(利用了 $\ln x$ 的连续性、复合运算与四则运算)