1.3节

6. $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

原式 $= \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}} \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cdots\cos\frac{x}{2}$

$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot \cancel{\xrightarrow{as\ n\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{x}}$ □

$\sin x \xlongequal{as\ n\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\sin x = \frac{\sin x}{x}$ □

16.(1).

$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x\frac{1}{\cos x}(1-\cos x) = \frac{x}{1}\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}$

$= 2x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{2}$ x^3.

综合习题1.

(3) 单调有界

例. $a_1 = 3$.
$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$, $n=1,2.$

解: $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = 1+\frac{1}{2+a_{n-1}}$

假设 $a_{n-1} > \frac{\sqrt5-1}{2}$. 则 $a_{n+1} > \frac{\sqrt5-1}{2}$

假设 $a_{n-1} < \frac{\sqrt5-1}{2}$. 则 $a_{n+1} < \frac{\sqrt5-1}{2}$

又有 对 $a_{n-1} > \frac{\sqrt5-1}{2}$, $a_{n+1} - a_{n-1} = \frac{-a_{n-1}^2 - a_{n-1}+1}{2+a_{n-1}} < 0$.

对 $a_{n-1} < \frac{\sqrt5-1}{2}$, $a_{n+1} - a_{n-1} > 0$.

~~故~~ 而我们有 $a_1 = 3$. $a_2 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$

所有 $\{a_{2k}\}$ 单增有上界 $\to$ 收敛

$\{a_{2k-1}\}$ 单减有下界 $\to$ 收敛.

对 $a_{n+1} = 1+\frac{1}{2+a_{n-1}}$ 两边取极限. 排除负解可得

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt5-1}{2}$ □

(注意: 不能直接代 $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$ 得极限. 因为奇偶数列可能极限不同!)

2.1 节

1. $f(x)$ 在 x_0 附近有定义. 且 $\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$, $f(x)$ 是否在 x_0 附近连续?

$f(x)$ 在 x_0 处为可去间断点, 不连续!

3. 都不一定. 可连续; 可不连续!

6. (1) 第二类间断点 $x=2$ 处

☆(3) $f(x)=\begin{cases}0. & x\neq n\pi.\\ 1. & x=n\pi.\end{cases}$ ⇒ 可去间断点 $x=n\pi$. n 为整数

☆(5) $\begin{cases}\lim_{x\to -7^-} f(x)=\infty \\ \lim_{x\to -7^+} f(x)=-7\end{cases}$ $x=-7$ 第二类间断点

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$ ← 注意: 有右极限存在

所以 $x=1$ 跳跃点!

11. 局部保号性.

取 $\epsilon<f(x_0)$. $\exists\,\delta$. s.t 当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. $f(x)>0$. ~~具体地~~

具体地 $\exists\,\gamma=f(x_0)-\epsilon$. s.t $f(x)\geqslant\gamma$ □

15. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调. 且 $\forall x, y$. $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 求证 $f(x)=cx$.

证: 由 $\forall x, y$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$ ⇒ $\begin{cases}f(nx)=nf(x)\\ f(\frac{x}{n})=\frac{f(x)}{n}\end{cases}$ m, n 为整数 ⇒ ~~$f(qx)=qf(x)$~~. $\forall q\in\mathbb{Q}$.
$f(q)=qf(1)$

~~由有理数稠密性可知~~ $\boxed{f(0)=0}$

不妨设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单增. 则 $f(1)>0$.

对于 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. 若 $f(x)\neq xf(1)$.

① $f(x)<xf(1)$. 可取 $q\in\mathbb{Q}$. 则有 $f(x)<f(q)=qf(1)<xf(1)$ 可得 $x<q<x$ 矛盾!

② $f(x)>xf(1)$. 可取 $q\in\mathbb{Q}$. 有 $f(x)>f(q)=qf(1)>xf(1)$ 可得 $x>q>x$ 矛盾!

故 $f(x)=cx$ $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立.

(这种方法看起来最清楚. 直接用到单调的条件; 其它有的用单调推连续. 再利用有理数稠密, 就在说 $f(x)$ 是连续过程中. 要考虑一类间断点. 比较麻烦不推荐)

17. 1).(3)(5) 略.

(7). $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| = \left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0$. 则 $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| \to 0$ as $x\to+\infty$

2-2 节.

2. 3. 5: 均为直接使用零点定理即可!

6. 令 $g(x) = f(x) - f(x+a)$ 则 $g(0)=f(0)-f(a)$. $g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0)$

注意一下当 $f(a)-f(0)=0$ 时. 自动满足

当 $f(a)-f(0)\neq 0$ 时. 有 $g(0)\cdot g(a)<0$ ⇒ 满足根据零点定理.

8. $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. Pf: $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

证. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

则 ~~对于~~ 存在 $x_0>a$. s.t $x>x_0$ 时 $|f(x)| \le 2a$. ⇒ $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有界

而由于 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续 ⇒ $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 连续 ⇒ $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上有界.

⇒ $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

13. 一致连续 ⇒ $f(x)$ 有左右极限

Pf: 由一致连续 ⇒ $\forall\epsilon$. $\exists\delta$. s.t $\forall x,y$ 满足 $|x-y|<\delta$ ⇒ $|f(x-y)|<\epsilon$

~~取一个以ε为极限的~~

由函数的Cauchy收敛准则可知 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+)$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b^-)$ 。

14. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致连续 + $\{a_n\}$ 正收敛数列 ⇒ $\{f(a_n)\}$ 收敛.

Pf: 一致连续 ⇒ $\forall\varepsilon$. $\exists\delta(\varepsilon)$ 当 $|x-y|<\delta$ 时. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

取对于 δ. δ 只与 ϵ 有关. $\exists N$. s.t 当 $n,m>N$ 时. $|a_n-a_m|<\delta$

则 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$. 即 $\{f(a_n)\}$ 是柯西列 ⇒ $\{f(a_n)\}$ 收敛.

若只要求连续. 可取 $f(x)=\frac{1}{x}$. 对于 $\{a_n\}$. $a_n = n$. $f(a_n)\to\infty$.

解释: 如果只要求连续. 则有 δ 与 x 有关. 这样在 $|a_n-a_m|<\delta$ 就不能这样表示了!

16. $\sin x^2$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$ 一致收敛的!

3.1 节

1.(3). 不连续 $\Rightarrow$ 不可导!

6.(3). $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \frac{1}{x\ln 3}$

7.(3). $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arccos x \Rightarrow x=\cos y \Rightarrow 1=-\sin y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(9). 略.

9. $f'(x)=\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 则 $f'(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x+1}}}}$ □

$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

13. $x=0$ 时 $f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x^2}=0$

$x\neq 0$ 时, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ 无界 □

14. (1). (3). $\frac{dx}{dy}=1\Big/\frac{dy}{dx}$ 即 反函数导数就是导数的倒数.

20. $f(x)=\begin{cases} x^{n+1} \\ -x^{n+1}\end{cases}$ $f^{(n+1)}(0^+)=(n+1)!\neq-(n+1)!=f^{(n+1)}(0^-)$

21(2): 由 Leibniz 公式

$$((x^2+1)\sin x)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^2+1)^{(i)}\sin^{(n-i)}x=\sin^{(n)}x+n\cdot 2x\sin^{(n-1)}x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\sin^{(n-2)}x.$$

而 $\sin^{(n)}x=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ 则 原式 $=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\pi\right)$ □