3.(1) 令 $x_n=2n\pi$, $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0\neq 1=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

7. 由积差化积公式可知 $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

$(x\neq 2k\pi)$, 故 $\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2n^2}\alpha\sin\frac{n}{2n^2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$

$(\alpha\neq 0)$. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2})=\frac{\alpha}{2}$.

而当 $\alpha=0$ 时. 显然极限为 0

8. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists A>0$. 只要 $|x|>A$. 就有 $|f(x)-l|<\varepsilon$

取 $\delta=\frac{1}{A}$, 那么当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时 就有 $|\frac{1}{x}|>A$

于是 $|f(\frac{1}{x})-l|<\varepsilon$. 也即 $\lim\limits_{x\to 0}f(\frac{1}{x})=l$

反之同理.

9. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4$.

(3) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}$. 可知 $\exists A>0$. 当 $x>A$ 时.

有 $\frac{1}{3}<\frac{x+1}{2x-1}<\frac{2}{3}$. 故 $(\frac{1}{3})^x<(\frac{x+1}{2x-1})^x<(\frac{2}{3})^x$

由两边夹原理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+1}{2x-1})^x=0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln(1+\frac{2}{x^2-1})}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(1+\frac{2}{x^2-1})}=e^2$

P53. 9: 令 $a_0=1$, $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. 则 $a_n=b_1b_2\cdots b_n$.

由 8 立得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

11. 由Stolz定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2}=\frac{a}{2}$$

12: 记 $A_n=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$. $B_n=b_1+\cdots+b_n$，则 $C_n=\frac{A_n}{B_n}$

由于 $\{b_n\}$ 是正数列 故 B_n 严格单增.

Case 1: 若 B_n 有上界. 则 B_n 收敛. 此时只需证 A_n 收敛.

由 $\{a_n\}$ 收敛知其有界. 设 $|a_n|<M$.

因为 B_n 收敛, 故 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N$ 只要 $n>m>N$. 就有 $|B_n-B_m|<\frac{\varepsilon}{M}$

也即 $b_{m+1}+\cdots+b_n<\frac{\varepsilon}{M}$. 则 $|a_{m+1}b_{m+1}+\cdots+a_nb_n|<$

$|a_{m+1}|b_{m+1}+\cdots+|a_n|b_n<M(b_{m+1}+\cdots+b_n)<\varepsilon$.

故 A_n 是Cauchy列. 综上. 此时 $C_n=\frac{A_n}{B_n}$ 收敛.

Case 2: 若 B_n 无上界. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=+\infty$

由Stolz定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{b_{n+1}}=a$.

14: 反证法. 若 $\exists x_0$ s.t. $f(x_0)\neq0$. 设 $T>0$ 是 f 的一个周期.

令 $a_n=nT+x_0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)\neq0$. 矛盾. 故假设不真. $f(x)\equiv0$

扫描全能王 创建