第一次作业答案

2> $\forall\ a<b \quad a\in Q,\ b\in Q$

$\exists\ n\in N \quad s.t \quad n(b-a)>2$

$\therefore \exists\ m\in N \quad na<m<m+1<nb$

又$\because \quad m+(\sqrt{2}-1)\in(m,\ m+1)\subset(na,\ nb)$

$\therefore \quad \frac{m+(\sqrt{2}-1)}{n}\in(a,b)$ 且是无理数

3> 若 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}\in Q$ 则 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{p^2}{q^2}\in Q$

即 $5+2\sqrt{6}\in Q$ 即 $\sqrt{6}\in Q$

若 $\sqrt{6}=\frac{a}{b}$ a、$b\in N$ $(a,b)=1$

则 $a^2=6b^2$ $\therefore$ a为6的倍数 设 $a=6a_1$

$\therefore 36a_1^2=6b^2$ $\therefore b^2=6a_1^2$ $\therefore b$为6的倍数

与 $(a,b)=1$ 矛盾! $\therefore \sqrt{2}+\sqrt{3}\notin Q$

4> $0.24\dot{9}=\frac{1}{4}$ $\quad 0.\dot{3}7\dot{5}=\frac{375}{999}$

$4.\dot{5}1\dot{8}=4+\frac{518}{999}=\frac{122}{27}$

5> (1) 若 $s\neq0$ $\because r+s\sqrt{2}=0$ $\therefore \sqrt{2}=-\frac{r}{s}\in Q$

矛盾 $\therefore s=0$ $\therefore r=0$

(2) ~~若 s与t中有~~

(2) $s\cdot t=0$, 若 $s\cdot t\neq0$

则 $\because r=-(\sqrt{2}s+\sqrt{3}t)$

$r^2=2s^2+3t^2+2\sqrt{6}st$

$\therefore \sqrt{6}=\frac{r^2-2s^2-3t^2}{2st}\in Q$ 矛盾!

$\therefore s\cdot t=0$ 若 $s\neq0$ 且 $t=0$

则 $r+\sqrt{2}s=0$ $\therefore r=0$ $t=0$, $s=0$

$\therefore s=0$ 且 $t=0$ $\Rightarrow r=0$

习题 1.2

1. 证明：（1）$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5+3n}=\frac{1}{3}$；$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

解答：（1）$\forall\epsilon>0,\exists N=\left[\frac{5}{9\epsilon}\right]+1\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}|=|\frac{5}{15+9n}|<|\frac{5}{9n}|<\epsilon$;（2）$\forall\epsilon>0,\exists N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,|\frac{\sin n}{n}-0|=|\frac{\sin n}{n}|<|\frac{1}{n}|<\epsilon$.

2. 证明：若 $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,|a_n-a|<M\epsilon$，$M\in R$ 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

解答：取 $\epsilon_0=\frac{\epsilon}{M}$，这也是任意正数，则 $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,|a_n-a|<M\epsilon=\epsilon_0$，有 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 按定义知 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

4. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之不对. 但若 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

解答：（1）$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,||a_n|-|a||\leq|a_n-a|<\epsilon$，有 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$；（2）反之，取 $a_n=(-1)^n$，则 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$，但 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不存在；(3) $\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,||a_n|-0|=|a_n-0|<\epsilon$，则有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

5. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ 且 $|b_n|\leq M$，则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

解答：$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall n>N,|a_nb_n|<M\epsilon$，由习题 2 可知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

6. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$ 及 $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=a$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

解答：见学习指导 P8. 对奇数项，$\forall\epsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall k>N_1,|a_{2k+1}-a|<\epsilon$. 对偶数项和这个 ϵ，$\exists N_2\in\mathbf{N}^*,s.t.\forall k>N_2,|a_{2k}-a|<\epsilon$. 则 $N=2\max\{N_1,N_2\}+1$，$\forall n>N,|a_n-a|<\epsilon$.

7. (2) 证明：数列不收敛

$$a_n = 5\left(1-\frac{2}{n}\right)+(-1)^n$$

解答：注意到奇数列和偶数列分别有不同的极限

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} 5-\frac{10}{2n}+1=6$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 4-\frac{10}{2n+1}=4$$

8. (1) 求极限：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$$

解答：多项式分式求极限只需看最高次数和最高项系数

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}=\frac{4}{3}$$

(5) 求极限：

$$a_n=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2n}),\ (|q|<1)$$

解答：考虑利用 $(1-q)(1+q)=1-q^2$ 裂变

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2n})}{1-q} \\ &= \frac{(1-q^2)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2n})}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{2n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

再取极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{2n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$$

9. 若 $a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，能否断定 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$

解答：

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 可能不存在：比如取

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n = 2k+1 \\ \frac{1}{3^n}, & n = 2k \end{cases}$$

则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \begin{cases} \frac{3^{n+1}}{2^n} \to \infty, & n = 2k+1 \\ \frac{2^n}{3^{n+1}} \to 0, & n = 2k \end{cases}$$

不存在极限

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ 存在但不为 0：比如取 $a_n = \frac{1}{2^n}$，有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2$

10. 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$，是否必有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，回答同样的问题

解答：不一定. 考虑两个发散的数列

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

这样就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

但是 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 不存在再考虑 a_n 极限存在时，

(i) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

(ii) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 不确定

11. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散，则数列 $\{a_n \pm b_n\}$，$\{a_n \cdot b_n\}$ 收敛性如何？请举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都发散，重新考虑上面的问题.

解答：

(i) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 发散

  (a) $a_n \pm b_n$ 发散，比如 $a_n = 1$，$b_n = n$，则 $1 \pm n$ 发散

  (b) $a_n \cdot b_n$ 不确定，比如 $\frac{1}{n} \cdot \sin n$ 收敛，$\frac{1}{n} \cdot n^2$ 发散

(ii) 若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都发散

  (a) $a_n \pm b_n$ 不确定，比如 $-n + n$ 收敛，$n + n$ 发散

  (b) $a_n \cdot b_n$ 不确定，比如 $(-1)^n \cdot (-1)^n$ 收敛，$(-1)^n \cdot n$ 发散