数分第四至六章复习提纲及例题

积分的复习要点

掌握基本概念, 灵活使用方法.

一、原函数

1、**定义**: $F(x)$ 称为给定的函数 $f(x)$ 的原函数, 如果

$$F'(x)=f(x),\quad 或\quad \mathrm{d}F(x)=f(x)\,\mathrm{d}x$$

因此, $f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的导函数, $f(x)$ 称为 $f'(x)$ 的原函数.

2、**提醒**: 原函数不唯一, 不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示$f(x)$ 原函数的全体! 而不是一个函数, 两个原函数之间相差一个常数因子, 因此只要求出一个原函数, 再加一个任意常数（称为积分常数）就是 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

例

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=x\cdot\frac{1}{x}-\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=1+\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

等式两边都表示$\frac{1}{x}$ 原函数的全体, 不是一个函数. 因此不能由此推出 $0=1$.

（2）可以通过求导验证所的不定积分是否正确

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x,\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x).$$

3、**主要性质**: 连续函数必有原函数（但有原函数的函数未必连续）.虽然有些函数存在原函数, 但未必能够把原函数表示成初等函数.

4、**主要方法**: **换元法和分部积分法**. **注意: 积分方法要灵活使用.**

5、**主要类型**: 以下类型函数的原函数, 原则上都可以表示成初等函数:（1）有理式、（2）三角有理式、（3）其他可通过换元转化为有理式或三角有理式的类型.

6、关键点:

（1）通过因式分解（或待定系数法）把有理式分拆为基本有理式的积分.

（2）通过万能变换以及其他变换, 把三角有理式积分转化为有理式积分.

（3）通过换元去根号; 通过分部积分法解决被积函数中的对数函数问题.

（4）通过其他变换或分部求积分问题.

（5）**简单的积分是通过对微分的熟练掌握观察出来的.**

二、定积分

1、**定义**: 对任意分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 以及任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 如下列极限存在则可积

$$\lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注意：如果已知函数可积（例如连续函数），则可用特殊分割（例如等分分割）和取特殊点ξ_i（例如取分割的端点），从Riemann 和的极限计算积分.

2、**几何意义**：区间 $[a,b]$ 上被积函数 $f(x)$ “覆盖”下的面积.

3、**主要性质**: 可积必有界；被积函数的可加性；积分区间的可加性；保序性；绝对值的积分；积分中值定理（包括广义积分中值定理）.

4、**基本理论**: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 当且仅当（Darboux上下和可以不看）

$$\lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

这里 ω_i 是函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅.由此推出 **连续函数、有有限个间断点的函数、区间 $[a,b]$ 上单调函数** 一定可积, 同时给出一些性质的证明. **注意: 连续、有有限间断点、单调是函数可积的必要条件**.

5、**计算振幅**: 函数在区间$[a,b]$上的振幅为

$$\omega = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a,b]\}.$$

特别, 单调函数的振幅等于函数在左右端点值的差.

6、**变限积分（变上限或变下限）**: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

定义了$[a,b]$ 上一个函数. $\varphi(x)$ 有下列性质:

（1）$f(x)$ 可积 $\Longrightarrow$ $\varphi(x)$ 连续.

（2）$f(x)$ 连续 $\Longrightarrow$ $\varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi'(x) = f(x)$. **即 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 从而证明了连续函数必有原函数**. 类似下列导数是$\varphi(u)$ 与 $u = b(x)$ 复合函数的导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(b(x)) = \varphi'(x)b'(x) = f(b(x))b'(x)$$

7、Newton-Leibniz **公式**

若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在$[a,b]$ 上连续且$F'(x) = f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ ($f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续的原函数), 则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a) \quad x \in [a,b].$$

特别 $f(x)$ 可表示为它的导函数 $f'(x)$ 的变上限积分:

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad \text{或}\quad f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

8、**积分方法**: **换元、分部、 Newton-Leibniz 公式、利用奇偶性等对称性、利用被积函数可加性、积分区间可加性、配对法等**.

9、**重要公式**:

(1) **广义积分中值定理**: 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Cauchy-Schwarz **不等式**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

10、**广义积分(无限区间上的积分、瑕积分)**:因此有限区间上有界函数积分称为**常义积分**.

(1)广义积分=常义积分+极限(区间趋于无穷或端点区域瑕点)

(2)通过换元, 两种广义积分之间, 广义积分与常义积分之间可以互换.

(3)对于无限区间中含有瑕点的积分可采取区间分段方法, 各个击破.

三、积分的应用: **(记住这些公式的最好办法, 是自己推导一遍)**.

设 $y=f(x)$ $(x\in[a,b])$, 或 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$

1、**弧长**:

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,\quad \text{或}\quad \mathrm{d}s=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

2、**旋转体体积**:

$$\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi y^2(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3、**旋转体侧面积**:

$$\mathrm{d}S=2\pi f(x)\,\mathrm{d}s=2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x=2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

积分的例题

一、一般用换元处理带根号的积分, 用分部积分处理带对数函数ln 的积分.

1. 计算 $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

解 $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$

其中 $u=\dfrac{1}{x}$ 解得 $I=-\arcsin u+C=\arcsin\dfrac{1}{x}+C.$

2. 计算 $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$

解 令 $x=t^2$, 则

$$I=\int \frac{\mathrm{d}t^2}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

3. 计算 $I=\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

解 分部积分:

$$I=-\frac{1}{2}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

其中

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}=\int\frac{1}{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\int \mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\Longrightarrow I=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$$

二、通过配对方法简化计算.

4. 计算 $I=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$. 令（配对） $J=\displaystyle\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$

$$\begin{aligned}I+J&=\int\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+3}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-x^{-1})\right)+C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{1-x^2}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{1-x^{-2}}{x^2+x^{-2}+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x+x^{-1})}{(x+x^{-1})^2-1}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C.\end{aligned}$$

由此解得 I.

5. 计算 $I=\int \dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x}$.　令（配对）$J=\int \dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x}$, 则

$$2I+3J=\int \mathrm{d}x=x+C$$

$$-3I+2J=\int \frac{(-3\sin x+2\cos x)\,\mathrm{d}x}{2\sin x+3\cos x}=\ln|2\sin x+3\cos x|+C$$

$$\Longrightarrow I=\frac{1}{13}\left(2x-3\ln|2\sin x+3\cos x|\right)+C$$

三、充分利用被积函数的周期性、在对称区间上奇偶性. 或关于积分区间中点的奇偶性简化积分.

6. 设a,b 不同时为零, 计算$I=\int_0^{\pi} \dfrac{\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x$.

解 作变换 $u=x-\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$I=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sqrt{a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u}}\,\mathrm{d}u.$$

在$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上, 被积函数是奇函数, 因此 $I=0$.

7. 计算$I=\int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.　作变换 $u=x-\dfrac{\pi}{2}$,

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(u+\frac{\pi}{2})\cos u}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos u}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}x$$

上式右边第一个积分的被积函数是奇函数, 因此在$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上积分为零. 第二个积分被积函数是偶函数, 因此在$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ 上积分是半区间上积分的2倍:

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1+\sin^2 u}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\sin u}{1+\sin^2 u}=\pi\arctan(\sin u)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}.$$

8. 计算下列积分 $\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

解　$x^3\cos^2 x$ 是奇函数, $\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{1}{8}(1-\cos 4x)$ 是周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 偶函数,

$$\Longrightarrow \int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{n\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{n\pi}{8}.$$

9. 对任意实数 a,计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}$. 作变换 $u=\frac{\pi}{2}-x$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-1}{1+\tan^a(\pi/2-u)}\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^a u}{1+\tan^a u}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\tan^a u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}-I.\\
&\Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

10. 设 $f(x)$ 连续, 证明 $\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\,\mathrm{d}x$.

证明 令$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\phi))\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} f(\sqrt{a^2+b^2}\cos x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

被积函数是周期2π 的函数, 因此在一个周期内积分与起点无关, 并由对称性积分等于半区间的2倍即可得结果.

11. 设 $f(x)$ 连续, 证明 $I=\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

证明 作变换 $u=\pi-x$:

$$
\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\int_{\pi}^{0}(\pi-u)f(\sin(\pi-u))\,\mathrm{d}u=\pi\int_0^{\pi} f(\sin u)\,\mathrm{d}u-\int_0^{\pi} uf(\sin u)\,\mathrm{d}u
$$

由此易得结果(定积分中, 积分变量是"哑" 变量).

12. 已知 $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 求值. **解** 利用积分在变换 $u=\frac{1}{x}$ 下对称性, 有

$$
\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^{0}\frac{-\frac{1}{u}\ln u}{(1+(\frac{1}{u})^2)^2}\,\mathrm{d}\frac{1}{u}=-\int_0^{+\infty}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u
$$

所以积分为零. **注意** 如果用分部积分消去对数函数,

$$
I=\int_0^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{2(1+x^2)}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x(1+x^2)}
$$

则上式右边第一项在代入下限 $x=0$ 时不收敛, 因此不可以(见“五”中讨论). .

四、在定积分换元时, 要保证积分区间的对应; 或在利用Newton-Leibniz 公式计算定积分时, 要确保原函数是定义在积分区间内的原函数.

13. 计算 $\int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}$. **解:** 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$, 积分区间是$[0,\pi]$, 包含在变换允许区域范围内.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2(1+t^2)}{3t^4-2t^2+3}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{3t^2+3\frac{1}{t^2}-2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{3\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+4}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{3u^2+4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}u\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

注意1: 如果要求被积函数$\frac{1}{2+\cos 2x}$ 在$(0,\pi)$ 上原函数, 需要通过

$$
u=t-\frac{1}{t},\ t=\tan\frac{x}{2}\ (-\pi<x<\pi)
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}\cot x + C,\quad x\in(0,\pi)
\end{aligned}
$$

即$F(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\cot x)$ 是被积函数在$(0,\pi)$ 上原函数,因此定积分为

$$
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = F(\pi^-)-F(0^+) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
$$

这里 $F(\pi^-)$ 和 $F(0^+)$ 分别表示当 $x\to\pi^-$ 和 $x\to 0^+$ 时 $F(x)$ 的极限.

注意2: 如果先作变换 $u=2x$, 再作 $t=\tan\frac{u}{2}(-\pi<u<\pi)$

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{2+\cos u} = \int \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)+C.
$$

因为 $-\pi<u<\pi$, 推出 $x=\frac{u}{2}$ 的取值范围是 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, 所以 $F_1(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{3}}\right)$ 只是被积函数$\frac{1}{2+\cos 2x}$在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 中的原函数. 不是在

$(0,\pi)$ 上的原函数, 因此在$[0,\pi]$ 上的定积分不能使用$F_1(x)$. 不难验证公共区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上, $F'(x)-F_1'(x)=0$.

五、在用分部积分计算定积分时,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x),$$

只有当上式右端第一项 $f(x)g(x)$ 在两个端点的值（或极限）存在有限, 以及右端积分存在,才能给出左端的积分.

14. 计算 $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$. **分析** 因为

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln\sin x=\lim_{x\to0^+}x\frac{\sin x}{x}\ln\left(x\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

所以该积分不是瑕积分. 如果采用分部积分

$$I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}\cos x=-\cos x\ln\sin x\Big|_{0^+}^{\pi/2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

右边第一项下限代入后不收敛, 无法解决问题. 克服这个困难的方法是先算出 $\sin x\ln\sin x$ 在$(0,\pi/2)$ 上的原函数, 再利用N-L公式. 因此先求不定积分

$$\int\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}\cos x=-\cos x\ln\sin x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos^2 x\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}\cos x\\&=-\int\left(1-\frac{1}{1-\cos^2 x}\right)\mathrm{d}\cos x=\cos x+\frac12\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C\end{aligned}$$

所以在$(0,\pi/2)$ 上的原函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=-\cos x\ln\sin x+\cos x+\frac12\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\\&=(1-\cos x)\ln\sin x+\cos x-\ln(1+\cos x).\end{aligned}$$

且在端点极限都收敛: $\begin{cases}F(\frac{\pi}{2})&=0,\\F(0^+)&=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=1-\ln2.\end{cases}$

最后的积分 $I=F(\frac{\pi}{2})-F(0^+)=\ln 2-1$.

六、变上（下）限积分给出的是函数，因此可以按照函数的规则讨论极限、连续、求导和积分.

15. 设 $F(x)=\int\limits_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$，求 $F'(0)$.

解： 被积函数$\sin\frac{1}{t}$有界，只是在$t=0$ 不连续，因此可积. 但 $F'(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 有第二类间断点，所以无法利用导函数在 $x=0$ 的极限计算 $F'(0)$，只能按定义来计算. 显然 $F(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，分部积分得

$$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t^2=x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}\\&=-\lim_{x\to 0}2x\cos\frac{1}{x}=0.\end{aligned}$$

16. 设 $f(x)=\int\limits_x^{x^2}|\sin t|\,\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$：利用复合函数求导有

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^2}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x}|\sin t|\,\mathrm{d}t\right)=2x|\sin x^2|-|\sin x|$$

17. 求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u}{(1-\cos x)\ln(1+x)}.$$

解 分子中$\int\limits_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t$ 是变上限积分给出的 u 的函数. 再做变上限积分得到 x 的函数. 当 $x\to 0$ 时，分子是无穷小量. 利用 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{3x}=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

18. 求函数 $f(x)=\int\limits_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

解 注意到 $f(x)$ 是偶函数, 因此只要在$[0,+\infty)$ 上考虑极值问题即可.
求导并求驻点 $f'(x)=(2-x)\mathrm{e}^{-x}\cdot 2x=0$ 解得唯一驻点: $x_0=\sqrt{2}$.
当 $0<x<\sqrt{2}$ 时, $f'(x)>0,\Longrightarrow f(x)$ 单调增;
当 $\sqrt{2}<x<+\infty$ 时, $f'(x)<0,\Longrightarrow f(x)$ 单调减;
因此 $x_0=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的极大值点. 极大值为:

$$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^2\,\mathrm{d}(t-1)\mathrm{e}^{-t}=(t-1)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^2=\mathrm{e}^{-2}+1.$$

在左边界点 $f(0)=0$, 又边界点:

$$\begin{aligned}f(+\infty)&=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^2}\mathrm{d}(t-1)\mathrm{e}^{-t}\\&=\lim_{x\to+\infty}(t-1)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{x^2}=1.\end{aligned}$$

比较得 $f_{\min}=f(0)$, $f_{\max}=f(\sqrt{2})=\mathrm{e}^{-2}+1$.

七、一些积分不等式的证明.

19. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 在 $[0,\pi/2]$ 中, 有$\sin x\le x$, $\cos x\ge 1-\dfrac{1}{2}x^2$, 因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x.=1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\,\mathrm{d}x\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{8}>1.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, $f(0)=0, f(1)=1$, 试证

$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\ge\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

证明 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$, 则 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))$, 因此

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^1F'(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{1}{\mathrm{e}},$$

在 $[0,1]$ 上, $|\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))| \leq |f'(x)-f(x)|$, 因此有

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |\mathrm{e}^{-x}(f'(x)-f(x))|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, 且 $f(a)=0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

证明 根据 Newton-Leibniz 公式, 有

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

所以应用 Cauchy 积分不等式, 可得

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &= \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_a^x 1^2\,\mathrm{d}t \int_a^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \\ &= (x-a)\int_a^x |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t \quad x \in [a,b]. \end{aligned}$$

两边在 $[a,b]$ 上积分即得所证.

22. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数. 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $f(x) \equiv 0$.
证明 （反证）若存在 $x_0 \in (a,b)$ (x_0 是端点的情况可类似讨论) 使得 $f(x_0) > 0$, 由于 $f(x)$ 连续, 所以存在 $\delta > 0$ 使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$. 并且当 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$.

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \delta f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

这与条件矛盾. 因此 $f(x) \equiv 0$.

23. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调递增的连续函数. 求证

$$\int_a^b xf(x)\,dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 将不等式两边相减并将b 换成变量 t, 令

$$F(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\ (a\le t\le b).$$

$$\begin{aligned}F'(t)&=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)\\&=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}(t-a)f(t)=0.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 因为 $F(a)=0$, 所以 $F(b)\geqslant 0$.

24. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $1\le f(x)\le 3$, 证明

$$1\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$$

证明 首先, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$1=\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

另一方面考虑函数 $g(u)=\dfrac{u}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{u}$ 在区间 $[1,3]$ 上的最大值, 有

$$\max_{1\le u\le 3}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{u}\right)=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\le\frac{1}{4}\left(\int_0^1\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x\right)^2=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

八、利用积分求极限.

25. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{2}{n\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{n}{n\sqrt{n^2+n^2}}\right]$$

解 原式可表示为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{2}{n\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{n}{n\sqrt{n^2+n^2}}\\=&\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}\frac{1}{n}+\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}\frac{1}{n}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\frac{1}{n},\end{aligned}$$

因此是可积函数$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$在$[0,1]$ 的等分分割 $x_i=\frac{i}{n},\ i=0,1,\cdots,n$以及$\xi_i=\frac{i}{n}$的Riemann 和, 所以极限是

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1.$$

26. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}$$

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2020}+2^{2020}+\cdots+n^{2020}\right)}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2020\ln n+\ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020}+\left(\frac{2}{n}\right)^{2020}+\cdots+1\right)}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2021\ln n+\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}\right)}\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2020}\to\int_0^1x^{2020}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}$$

有界,所以原式的极限为 $\frac{1}{2021}$.

微分方程的复习要点

求解即积分, 检验靠微分 .

一、一般概念：微分方程是含有未知函数及其导数的方程, 求出该未知函数就称为微分方程的解.解有如下形式：通解、特解、全部解.

（1）一般而言, n 阶的微分方程的通解包含 n 个任意常数（称为积分常数）.

（2）通解并不一定是全部解, 有些情况通解之外还有“例外”解. 因此如果题意要求求出全部解, 不但要求出通解, 还要分析有无例外解.

（3）如果要求解满足已定初始（或边界）条件的解, 一般来说就是在通解中, 通过初始（或边界）条件, 确定出积分常数.

二、方法：分离变量法、降阶法（两种不同形式的降阶法）、常数变易法（一阶或二阶线性方程）、待定系数法、观察法等等 .

三、二阶线性方程（$p(x), q(x), f(x)$ 是已知函数）：

$$\begin{cases} (**) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (\text{非齐次情形}) \\ (*) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (\text{齐次情形}) \end{cases}$$

1、**对解的存在唯一性的理解（无需证明）**

初始（或称为边界）条件决定了解的存在唯一.

2、**齐次二阶线性方程**

（1）基本解组的存在性以及线性无关的相关性质.

（2）基本解组的解法：已知其一可求其二.

（3）“其一”的求法应本着具体问题具体对待, 对常系数二阶线性方程有系统方法（见下文）

（4）解的结构：$(*)$ 的通解=基本解组的线性组合（包含两个积分常数）.

3、**非齐次二阶线性方程**：

（1）解的结构：$(**)$ 的通解=$(**)$ 的特解+ $(*)$ 的通解.

（2）求解非齐次通解的步骤：

第一步：求出$(*)$ 的基本解组（见上述第2条）.

第二步：求出$(**)$ 一个特解. 理论上$(**)$ 的特解可通过常数变易法得到.但也可通过特殊方法求出特解.

4、**二阶常系数线性方程**.

是二阶线性方程的特殊形式（p,q 是已知常数, $f(x)$ 是已知函数）.

$$\begin{cases}(**) & y''+py'+qy=f(x) \quad (\text{非齐次情形}) \\ (*) & y''+p(x)y'+q(x)=0 \quad (\text{齐次情形})\end{cases}$$

（1）对$(*)$，可通过求解特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根直接给出基本解组.

（2）对$(**)$, 关键是求解一个特解. 除一般理论外, 可针对特殊的$f(x)$, 采取特殊的方法求出特解.

四、如何求解满足给定初始（边界）条件的解：

（1）基本方法：求出方程的全部解（大多数情况给出通解），代入到初始（边界）条件确定通解中的任意常数.

（2）可在求解过程中, 充分考虑初始（边界）条件, 简化求解过程.

解方程的例题

一、通过自变量或因变量变换, 把方程转化为熟知类型的方程.

1. 求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$ 该方程不是书上§6.1.2 所定义的齐次方程, 主要是分子分母都出现了常数项. 要消除这个常数项, 可从线性方程组

$$\begin{cases}2y-x-5 &=0\\ 2x-y+4 &=0\end{cases}$$

求出一对非零解 $x_0=-1,\ y_0=2$, 再作变换

$$u=y-y_0=y-2,\ t=x-x_0=x+1,$$

则关于 $y=y(x)$ 的原方程, 就变化换成 $u=u(t)$ 的齐次方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2(u+2)-(t-1)-5}{2(t-1)-(u+2)+4}=\frac{2u-t}{2t-u}.$$

令 $v=\dfrac{u}{t}$ 或 $u=tv$, 得关于$v=v(t)$ 的方程

$$v+t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2v-1}{2-v},\quad \text{或}\quad t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2-1}{2-v}.$$

当 $v=\pm1$, 时, $u=\pm t,\Longrightarrow y=x+3$ 和 $y=1-x$ 是原方程的解.

当 $v\neq\pm1$ 时, 利用分离变量法

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1}-\frac{3}{v+1}\right)\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$v-1=C(v+1)^3t^2,\quad \text{或}\quad u-t=C(u+t)^3.$$

因此原方程的通解$y=y(x)$ 是隐函数的形式, 满足:

$$y-x-3=C(x+y-1)^3.$$

显然解 $y=x+3$ 包含在通解中（对应 $C=0$）, 但 $y=1-x$ 是例外解.

2. 求解 $2yy''=(y')^2+1$. 令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

原方程化为 $p=p(y)$ 的方程（可分离变量）

$$2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}.$$

解得 $y=C(1+p^2)$ $(C\neq 0)$. 将 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 代入的关于 $y=y(x)$ 的一阶微分方程

$$y=C\left(1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{C_1y-1}\quad (C_1=\frac{1}{C})$$

积分得

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}=x+C_2$$

所以原方程的解

$$y=\frac{C_1^2(x+C_2))^2}{4}+\frac{1}{C_1}\quad (C_1\neq 0)$$

3. 求解 $y'=\frac{1}{xy\sin(xy^2)}-\frac{y}{2x}$.

解 令 $u=u(x)=xy^2(x)$, 代入方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y^2+2xyy'=\frac{2}{\sin^2 u},$$

$$\Longrightarrow \sin^2 u\,\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x,\Longrightarrow (1-\cos 2u)\,\mathrm{d}u=4\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow u-\frac{1}{2}\sin 2u-4x=C,$$

因此方程的解$y=y(x)$ 由下列方程给出的隐函数:

$$xy^2-\frac{1}{2}\sin(xy^2)-4x=C$$

二、通过求导, 把积分方程化为微分方程.

4. 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 内连续可导, 且满足

$$x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

试求: $f(x)$.

解 $f(x)$ 满足的是一个积分方程, 但等式两边对x 求导后得

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)xf(x)$$

$$\text{或}\qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)$$

继续对 x 求导得

$$f(x)=xf(x)+2xf(x)+x^2f'(x)$$

因此得到关于 $y=f(x)$ 的可分离变量的一阶微分方程

$$f'(x)=\frac{f(x)(1-3x)}{x^2},$$

解得 $f(x)=\dfrac{C}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

5. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}x=0$$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 证明当 $x\geq 0$ 时, 有$\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$.连

解 (1) 在方程中令 $x=0$, 则由 $f(0)=1$ 推出 $f'(0)=-1$.
虽然条件仅假设 $f(x)$ 可导, 但由方程可以看出 $f'(x)$ 也可导, 也就是 $f(x)$ 二阶可导. 因此对 x 求导得

$$f''(x)+f'(x)-\frac{1}{x+1}f(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$\Longrightarrow f''(x)+\frac{x+2}{x+1}f'(x)=0.$$

解得

$$f'(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}.$$

代入条件 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$，所以

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}.$$

(2) 当 $x \geq 0$ 时, 因 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调下降, 所以

$$f(x) \leq f(0) = 1.$$

又因为 $\varphi(x) = f(x) - \mathrm{e}^{-x}$ 满足 $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{-x} \geq 0 \ (x \geq 0)$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $x \geq 0$ 上单调增, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 即有 $f(x) \geq \mathrm{e}^{-x}$.

注意, 在证明 (2) 时, 如果在$f'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$ 继续积分困难很大, 所以可通过导函数 $f'(x)$ 的性态, 给出 $f(x)$ 满足的不等式, 而无需将 $f(x)$ 具体求出来.

三、求解常系数非齐次二阶线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

的关键, 是求解非齐次的特解. 对一些特殊的非齐次项 $f(x)$, 可采取待定系数法, 求出非齐次的特解, 无需套用公式.

6. 求 $y'' - 3y' + 2y = (x+1)\mathrm{e}^{3x}$ 的通解.

解 齐次的特征方程 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ 的根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 因此齐次方程通解为 $y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x}$.

注意到非齐次项 $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{3x}$, 其中 $\lambda = 3$ 不是特征方程的根. 因此可设非齐次方程的特解为

$$y_0 = (Ax + B)\mathrm{e}^{3x},$$

代入非齐次方程得

$$3A + 2(Ax + B) = x + 1, \Longrightarrow A = \frac{1}{2}. \ B = -\frac{1}{4}.$$

因此特解为 $y_0 = \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{3x}$, 原方程的通解为

$$y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{3x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{2x}.$$

7. 求 $y'' - 3y' + 2y = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

解 本题与上一题的区别是 $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$, 其中指数上的 2 正好是特征方程的一个根, 此时提高次数, 设特解为

$$y_0 = x(Ax + B)\mathrm{e}^{2x},$$

代入并待定系数: $A=\frac{1}{2},\ B=0$, 所以特解为 $y_0=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}$, 通解为

$$y=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{2x}++c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}.$$

8. 求 $y''-3y'+2y=10\sin x$ 的通解.

解 由齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 得到齐次方程的通解 $y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}$.

对非齐次方程, 因 $f(x)=10\sin x$,所以设特解有如下形式

$$y_0(x)=a\sin x+b\cos x$$

其中 a,b 待定. 代入方程并比较 $\sin x,\ \cos x$ 的系数得

$$a+3b=10,\ b-3a=0$$

解得 $a=1,b=3$. 所以原方程的特解为 $y_0(x)=\sin x+3\cos x$, 通解为

$$y(x)=\sin x+3\cos x+c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{2x}.$$

9. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中$f(x)$ 是连续函数, 求$f(x)$.

解 原方程为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

因右边可导, 所以左边 $f(x)$ 也可导, 求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

同理上式右边可导, 所以左边仍然可导, 再求导得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

这是一个关于 $y=f(x)$ 的常系数非齐次二阶线性微分方程. 并且满足边界条件

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,$$

解得齐次通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$. 设非齐次的特解为 $y_0=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入非齐次方程解得

$$A=\frac{1}{2},\ B=0.$$

因此原方程的通解为

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

在通解中, 利用边界条件确定任意常数:$c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}$. 最终所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x.$$

四、根据题意,将应用题化为微分方程.

10. 设平面曲线 L 上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到原点的距离, 恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 试求该曲线的函数表示.

解 设曲线的函数表示为 $y = y(x)$, 在$P(x, y)(x > 0)$ 处切线方程是

$$Y - y = y'(X - x),$$

令 $X = 0$ 得切线在y 轴上截距为 $Y_0 = y - xy'$. 由题意知y 满足的微分方程:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Y_0 = y - xy'$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

解得 $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\ln|x| + c_1$ 或 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = c$. 由于 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 所以 $c = \frac{1}{2}$. 因此 y 满足

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}, \Longrightarrow y = \frac{1}{4} - x^2.$$