Introduction

教材中讲了级数收敛性的判别法（比较判别法、Cauchy 判别法，d'Alembert 判别法、积分判别法…）我们想要确定级数更精确的渐近行为.

$\begin{cases}\text{发散：以什么样的速度发散？} x^\alpha \text{次方 or } e^x \text{ or } \log x \cdots \\ \text{收敛：以什么样的速度趋于这个极限？}\end{cases}$

例如：$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\log n+\gamma+o(1)$，$\gamma$ 欧拉常数.

但更精确的呢？

有 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\log n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

再例如：$2^2\log 2+2^3\log 3+\cdots+2^n\log n \sim 2^{n+1}\log n$

与 $1^1+2^2+\cdots+n^n \sim n^n$

回忆教材中比较判别法：

Cor 7.8. 设 Σa_n，Σb_n 正项，且 $\lim \frac{a_n}{b_n}=A$. 则若 $A\in(0,\infty)$. 则 Σa_n 与 Σb_n 同敛散

我们将证明更强的：

Prop 1 设 Σa_n，Σb_n 正项. 且 $a_n \sim b_n$ $(\lim\frac{a_n}{b_n}=1)$，则 Σa_n 与 Σb_n 同敛散

a). 若收敛. 则 $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \overset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{\infty} b_k$

b). 若发散. 则 $\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$

证明：(a). $\forall \epsilon>0$. $(\epsilon<1)$. 取 N s.t. $(1-\epsilon)b_n \le a_n \le (1+\epsilon)b_n$，$\forall n>N$.

则 $\forall n>N$，$(1-\epsilon)\sum_{k=n+1}^{m} b_k \le \sum_{k=n+1}^{m} a_k \le (1+\epsilon)\sum_{k=n+1}^{m} b_k$. 令 $m\to\infty$.

有 $(1-\epsilon)\sum_{k\ge n+1} b_k \le \sum_{k\ge n+1} a_k \le (1+\epsilon)\sum_{k\ge n+1} b_k$ ////

Exercise 1. 证明 Prop 1. (b).

作为应用. 令 $\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ $(n\ge 1)$. 则我们已知 $\sigma_n\to\gamma$.（因为 $\sigma_n-\sigma_{n-1}=\frac{1}{n}-\log n+\log(n-1)=\frac{1}{n}+\log(1-\frac{1}{n})<0$，即 σ_n 递减. 且 $\sigma_n>0$. $\forall n$. $\Rightarrow \sigma_n$ 有在极限，记为 γ）设 $u_n=\sigma_n-\sigma_{n-1}=\frac{1}{n}+\log(1-\frac{1}{n})\sim-\frac{1}{2n^2}$

由 Prop 1，并注意到 $\Sigma\frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \overset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \overset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$

$\Rightarrow \gamma-\sigma_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim -\frac{1}{2n} \Rightarrow \sigma_n=\gamma+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$

Exercise 2. (a) 证明：$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sim\frac{1}{n}$

(b) 证明更精确的：$\sigma_n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

[提示：令 $\tau_n = \sigma_n - \gamma - \frac{1}{2n}$，$\nu_n = \tau_n - \tau_{n-1}$，往证 $\nu_n \sim \frac{1}{6n^3}$，

由此推出：$\tau_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-\nu_k) \sim -\frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sim -\frac{1}{12n^2}$]

理论上我们可以一直做下去……

下面是对积分比较法的补充：

Thm 7.11. 若 $f(x)$ 非负且递减，则 $\sum f(n)$ 与 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

更强的：若同时发散，则 $\sum_{k=1}^{n} f(k) \overset{n\to\infty}{\sim} \int_1^n f(x)\,dx$. (*)

证明：记 $\Delta_n = (\sum_{k=1}^{n} u_k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx$. 我们将证明 Δ_n 递增且收敛. 由此推出 (*).

设 $v_k = u_k - \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\,dx \le \int_k^{k+1} (f(k) - f(k+1))\,dx = u_k - u_{k+1}$

由于 $\sum_{k\ge 0} (u_k - u_{k+1})$ 收敛（极限 $u_0 - L$，$L = \lim_{x\to\infty} f(x)$）$\Rightarrow \Delta_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ 收敛. ////

注：1. 若 f 不递减，则结论不对. 例：$f(x) = \sin^2 n\pi x$. 则 $\sum f(n) = 0$ 但 $\int f$ 发散.

2. 若 $f > 0$，递减，且 $\int f(x)\,dx$ 收敛，则不一定有 $\sum_{p\ge n} f(p) \sim \int_n^{\infty} f(x)\,dx$. 见 Prop 2.

Prop 2. 设 $f: \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 连续可导，且 $\exists \mu \ne 0$，s.t. $\frac{f'}{f} \to \mu$.

a). 若 $\int_0^{\infty} f$ 收敛，则 $\sum_{p\ge n+1} f(p) \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_n^{\infty} f(t)\,dt$.

b). 若 $\int_0^{\infty} f$ 发散，则 $\sum_{p=0}^{n} f(p) \sim \frac{\mu}{1-e^{-\mu}} \int_0^{n} f(t)\,dt$.

> 回忆：Stolz 定理：
> 若 $(a_n) \to 0$，$(b_n) \to 0$
> 且 (b_n) 严格递减，则
> $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to \ell\right) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \to \ell\right)$

证明：a). 若 $\int_0^{\infty} f$ 收敛 $\Rightarrow \mu < 0 \Rightarrow f$ 在 x 充分大后单调减

$\overset{\text{Thm 7.11}}{\Rightarrow} \int f$ 与 $\sum f(n)$ 敛散性相同. $\Rightarrow \sum_{p\ge n+1} f(p) \overset{n\to\infty}{\to} 0$

故由 Stolz：$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p\ge n+1} f(p)}{\int_n^{\infty} f(t)\,dt} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{\int_n^{n+1} f(t)\,dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{\int_x^{x+1} f(t)\,dt} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x+1)}{f(x+1) - f(x)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f'(x+1)}{f(x+1)}}{1 - \frac{f(x)}{f(x+1)}} = \frac{\mu}{1 - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}}$$

设 $F(x) = \ln f(x)$. 则 $F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$，$\frac{f(x)}{f(x+1)} = e^{F(x) - F(x+1)} = e^{-F'(\theta)}$ for some $\theta \in (x, x+1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = e^{-\mu}$

注：若 $\int_0^{\infty} f$ 发散，且 f 递减，则不可能有 $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \mu$ $(\mu < 0)$. 故 Thm 3.11 与 Prop 2 不矛盾.

事实上，假设 $\frac{f'}{f} \to \mu$. 则 $\frac{f(n)}{f(n+1)} = e^{F(n) - F(n+1)} = e^{-F'(\xi_n)} \to e^{-\mu} > 1 + \epsilon \Rightarrow \sum f(n)$ 收敛 $\overset{\text{Thm 3.11}}{\Rightarrow} \int f$ 收敛.

$(\xi_n \in (n, n+1))$

Exercice 3. a) 证明 Prop 2. (b).

b). 沿用以上记号. 若 $\mu=0$. 证明：若 $\int f$ 发散. 则 $\sum_{k=0}^{n} f(k) \overset{n\to\infty}{\sim} \int_0^n f(x)dx$.

若 $\int f$ 收敛. 则 $\sum_{p\geq n+1} f(p) \sim \int_n^{\infty} f(x)dx$

c). 若 f 递增. 且 $\frac{f'}{f}\to\infty$. 则 $\sum_{p=1}^{n} f(p) \sim f(n)$

d). 作为应用. 证明：$2^2\log 2 + 2^3\log 3 + \cdots + 2^n \log n \sim 2^{n+1}\log n$

与 $1^1+2^2+\cdots+n^n \sim n^n$

注：1. 当 $\frac{f'}{f}\to 0$ 时、有 $\int_n^{n+1} f(x)dx \sim f(n)$，由此可应用 Prop 1 结论

事实上，$\frac{\int_n^{n+1} f(x)dx}{f(n)} = \int_n^{n+1}\frac{f(x)}{f(n)}dx = \int_n^{n+1} e^{F(x)-F(n)}dx$ （$F(x)=\ln f(x)$）

而当 n 充分大后：$|e^{F(x)-F(n)}-1| = |e^{(x-n)F'(\xi_n)}-1| \leq e^{\epsilon}-1 \leq 2\epsilon$

（$\forall\epsilon$，取 n s.t. $|F'(x)|<\epsilon$, $\forall x\geq n$） ϵ 较小时.

$\Rightarrow \left|\int_n^{n+1} e^{F(x)-F(n)}dx - 1\right| \leq \int_n^{n+1}|e^{F(x)-F(n)}-1|dx \leq 2\epsilon$

$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x)dx \,/\, f(n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

本题也可仿照 Prop 2 用 Stolz 定理. 但是一定要注意定理应用条件

[Stolz 定理有两种形式：$\frac{\cdot}{\infty}$ 型 与 $\frac{0}{0}$ 型. 这里 $\frac{f'}{f}\to 0$，f 无单调性条件.
因此不能直接得到 $\sum f(n)$ 和 $\int f$ 同敛散，适用 $\frac{0}{0}$ 型时，还需另外说明 $\sum f(n)$ 收敛]

注意！！

不能直接在 $\frac{\mu}{1-e^{-\mu}}$ 中令 $\mu\to 0$. 因为极限和积分/级数交换并不是平凡的！

3. c)的我的做法：

- 证明 $\frac{f(n-1)}{f(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
- 设 θ_n, u_n 正序列. 且 $u_n=\theta_n(u_{n-1}+1)$. 则 $(\theta_n\to 0)\Rightarrow(u_n\to 0)$
- 令 $\theta_n=\frac{f(n-1)}{f(n)}$，$u_n=\frac{S_{n-1}}{f(n)}$. 其中 $S_{n-1}=\sum_{p=0}^{n-1} f(n)$，得出结论.