第七次作业参考解答

3.3.2 由 $f(1)=f(2)=0$ 及罗尔定理知 $\exists\, \xi_1\in(1,2)$, st $F'(\xi_1)=0$

又 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x) \Rightarrow F'(1)=F'(\xi_1)=0$

再由罗尔定理得 $\exists\, \xi\in(1,\xi_1)\subset(1,2)$, st $F''(\xi)=0$

3.3.4 (1) 记 $F(x)=x^n$, 则 $F'(x)=nx^{n-1}$, 由拉格朗日中值定理知 $\exists\, \xi\in(b,a)$

st $\dfrac{F(a)-F(b)}{a-b}=F'(\xi)=n\xi^{n-1} \xrightarrow[b<\xi<a]{n>1} nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$

3.3.5 (1): 设 $\arctan x=\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则 $\tan\theta=x \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

故 $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\theta=\arctan x$ (Rmk: 也可求导 + 一点为0)

3.3.6: 记 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-1<0$

由介值定理知 $\exists\, x_0\in(0,1)$, st $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$.

若 $\exists\, x_1<x_2\subset(0,1)$, st $f(x_1)=x_1$, $f(x_2)=x_2$, 则 $g(x_1)=g(x_2)=0$

由罗尔定理知 $\exists\, \xi\in(x_1,x_2)$, st $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=1$, 矛盾!

综上可得, 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使 $f(x)=x$.

3.3.7: $\forall x\in[0,1]$, 要么 $x\in[0,\frac{1}{2}]$, 要么 $x\in[\frac{1}{2},1]$

Case 1、若 $x\in[0,\frac{1}{2}]$, 则 $|f(x)-f(0)| \xlongequal[\text{拉格朗日}]{\exists\xi\in(0,x)} |f'(\xi)||x| \cancel{\le \tfrac{1}{2}} < x$

Case 2、若 $x\in[\frac{1}{2},1]$, 则 $|f(1)-f(x)| \xlongequal[\text{拉格朗日}]{\exists\xi'\in(x,1)} |f'(\xi')|(1-x)\le\frac{1}{2}$

记 $A=f(0)=f(1)$, 则不论何种情形, 均有 $|f(x)-A|\le\frac{1}{2}$

且 $|f(\frac{1}{2})-f(x)| \xlongequal[\text{拉格朗日}]{\exists\xi'\in(x,\frac{1}{2})} |f'(\xi')|(\frac{1}{2}-x)<\frac{1}{2}-x$

故 $|\cancel{f(\frac{1}{2})}\,2f(x)-f(0)-f(\frac{1}{2})|\le|f(x)-f(0)|+|f(x)-f(\frac{1}{2})|<\frac{1}{2}$

Case 2: 若 $x\in[\frac{1}{2},1]$, 同理可得 $|2f(x)-f(1)-f(\frac{1}{2})|<\frac{1}{2}$

记 $A=f(0)=f(1)$, 不论何种 Case, 均有 $|f(x)-\frac{A+f(\frac{1}{2})}{2}|<\frac{1}{4}$

故 $|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-\frac{A+f(\frac{1}{2})}{2}|+|\frac{A+f(\frac{1}{2})}{2}-f(x_2)|<\frac{1}{2}$, $\forall x_1,x_2\in[0,1]$.

3.3.8：令 $g(x)=f(x)e^{-x}$，则 $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))\equiv 0 \Longrightarrow \exists$ 常数 C

st $g(x)\equiv C$，从而 $f(x)\equiv = Ce^{x}$.

3.3.10 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) \xlongequal[\text{拉格朗日}]{\exists \xi\in(x,x+1)} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\xi)\cdot 1 = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \xlongequal{\text{洛必达}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{1}=0$

事实上，我们可加强命题：若 $f\in C[a,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$

Pf：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$ 知 $\forall \varepsilon>0$，$\exists X_0>\max\{a,0\}$，st $\forall x\geqslant X_0$

均有 $|f(x+1)-f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 由 $f\in C[X_0,X_0+1]$ 得 $\exists M$，st $|f(x)|\leq M$，$\forall x\in[X_0,X_0+1]$

取 $X_1>X_0$，st $\dfrac{M}{x}<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$\dfrac{(X_0+1)A}{x}<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$\forall x>X_1$

故当 $x>X_1$ 时，总存在 $N_x\in N^+$，使得 $x-N_x\in[X_0,X_0+1]$

从而 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|=\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{N_x}[(f(x-i+1)-f(x-i)]-A]}{x}+\dfrac{f(x-N_x)}{x}+\dfrac{N_x-x}{x}\cdot A\right|$

$<\dfrac{N_x}{x}\cdot\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{M}{x}+\dfrac{(X_0+1)A}{x}<\varepsilon \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

3.3.12. $\forall x_0\in R$ 固定，令 $y=x_0$，可得 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leq M|x-x_0|$，$\forall x\neq x_0$

故 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0 \xlongequal{x_0\text{任意性}} f'(x)\equiv 0 \Longrightarrow f(x)$ 恒为常数

3.3.15. 由拉格朗日中值定理，$f(x)=f(x)-f(0) \xlongequal{\exists\xi\in(0,x)} f'(\xi)x<f'(x)\cdot x$，$\forall x>0$

故 $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}>0$，$\forall x>0$，从而 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增.

3.3.17. 【令 $F(x)=(f'(x))^2-f^2(x)$，则 $F'(x)=2f'(x)(f''(x)-f(x))$

注意到 $\dfrac{F(1)-F(0)}{f(1)-f(0)}=\dfrac{(f'(1))^2-(f'(0))^2+f^2(0)-f^2(1)}{f(1)-f(0)}=$ 】 $f(1)=f(0)$ 就得分类

令 $F(x)=e^{x}(f'(x)-f(x))$，则 $F(1)=F(0)=0$. 由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,1)$，st $F'(\xi)=e^{\xi}(f''(\xi)-f(\xi))=0 \Longrightarrow f''(\xi)=f(\xi)$.

3.3.22. $b_2-b_1=\frac{b_1}{1-e^{-b_1}}-1=\frac{b_1+e^{-b_1}-1}{1-e^{-b_1}}\underset{e^x\geq x+1}{\geq}\frac{(b_1-1)+(1-b_1)}{1-e^{-b_1}}=0$

而 $b_{n+1}-b_n=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-\frac{b_{n-1}}{1-e^{-b_{n-1}}}=f(b_n)-f(b_{n-1})$ (其中 $f(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}$)

注意到 $f'(x)=\frac{1-e^{-x}-xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}=\frac{1-(x+1)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\geq 0$, ~~$\forall x\geq 0$~~ (利用 $e^{-x}(x+1)\leq 1$)

不难由归纳法可得 $\{b_n\}$ 单调递增.

若 $\{b_n\}$ 有上界, 则可设 $\lim_{n\to\infty}b_n=A\geq b_1>0$, 在 $b_{n+1}=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a$

两边令 $n\to+\infty$ 可得 $A=\frac{A}{1-e^{-A}}-a$., 即 A 为 $f(x)=ae^x-x-a$ 的正零点、

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上递减, $[x_0,+\infty)$ 上递增 (x_0 满足 $e^{-x_0}=a$)

由 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ 知 $f(x)$ 存在唯一正零点 λ, 且 $f(0)=0$.

又 $f(1-a)=ae^{1-a}-(1-a)-a=ae^{1-a}-1\leq 0$ (由 $e^{a-1}\geq a$) $\Rightarrow b_1=1-a<\lambda$.

由 $b_n\leq\lambda$ 知 $b_{n+1}=f(b_n)-a\leq f(\lambda)-a=\lambda$ 结合数学归纳法不难

得到 $b_n\leq\lambda$, $n\in N^+$, 进而有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lambda$ (λ 为 $g(x)$ 唯一正零点)

3.3.25 由 Cauchy 中值定理可得 $\exists\,\xi\in(a,b)$, st $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$

即得 $2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

3.3.26. 由 Cauchy 中值定理可得 $\exists\,\xi\in(a,b)$, st

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\left.\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}=\frac{\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

故 $\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.