P36. 15.(2)

$$0\le (n+1)^k-n^k = n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right) \le n^k\cdot\frac{1}{n} = n^{k-1} \to 0$$

P53. 6. $a_n>0$, $a_n\uparrow$. 求证：若 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 有界，则 $\forall\alpha\in(0,1)$. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha\right)=0$

$a_{n+1}-a_n\le M$

$$a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha = a_n^\alpha\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha-1\right)\le a_n^\alpha\left(\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)\le a_n^{\alpha-1}M$$

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界，则可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha\right)=0$$

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界，则由 $0\le a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha\le\frac{M}{a_n^{1-\alpha}}\to0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha\right)=0$$

P36. 15.(5) $\sqrt[n]{\cos^2 1}\le\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}\le\sqrt[n]{n}$

P37. 16. 注意只有 $a_1,a_2,\cdots,a_m$.

设 $a_k=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

$$\sqrt[n]{a_k^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le\sqrt[n]{m}\,a_k$$

P52. 1. (2) $a_n=\frac{(n+9)!}{9!\,(2n-1)!!}$

$$\frac{(n+1)\cdots(n+9)}{9!}\frac{1}{2^n}\frac{2n!!}{2n!!}\le a_n\le\frac{n(n+1)\cdots(n+9)}{9!}\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(2n-2)!!}{(2n-2)!!}$$

P37. 24. $0\le\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n}\to0$

P37. 17. (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}} < 1 \Rightarrow a_n \downarrow$ $\Bigg\} \Rightarrow$ 收敛

$a_n \geq 0$

P52. 1. (2) $\forall n > 11$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+10}{2n+1} < 1 \Rightarrow a_n \downarrow$ $\Bigg\} \Rightarrow$ 收敛

$a_n \geq 0$

与 $a_{n+1} = \frac{n+10}{2n+1} \cdot a_n$ 两边取极限 $\Rightarrow a = \frac{1}{2} a \Rightarrow a = 0$

P52. 3. (2) 先证 $a_n \uparrow$，再均值不等式证明有上界.

补充题目： 1. 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{E}{n+1}$ 可见当 $n > [E]+1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

可修改前 $[E]+1$ 项，使其到单调 $\downarrow$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$a_n \geq 0$

$\Rightarrow \{a_n\}$ 收敛，设收敛到 a，

$a_{n+1} = \frac{E}{n+1} a_n$ 两边取极限 $\Rightarrow a = 0$

该极限意味着，对 $\varepsilon = 1$，$\exists N_E$，当 $n > N_E$ 时，

$\left|\frac{E^n}{n!}\right| = \frac{E^n}{n!} < 1$

$\Rightarrow \forall E > 1$，$\exists N_E$，当 $n > N_E$ 时，

$\sqrt[n]{n!} > E$

2. $c_{n+1}-c_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0 \Rightarrow c_n \downarrow$

$c_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \{c_n\}$收敛

P27. 17.(4) 注意到 $\cos k$ 有界，分母形式可裂项.

补充: 1. $a_n=\ln n$ ，$|a_{n+1}-a_n|=|\ln(1+\frac{1}{n})|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

$a_n=\sqrt{n}$ ，$|a_{n+1}-a_n|=\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$

2. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ，$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|<\frac{p}{n}$

3. $$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=|a_{n+p}-a_{n+p-1}+a_{n+p-1}-a_{n+p-2}+\cdots+a_{n+1}-a_n|\\&\le|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&<\frac{1}{(n+p-1)^2}+\frac{1}{(n+p-2)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<\frac{1}{(n+p-1)(n+p-2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&\le\frac{1}{n-1}<\varepsilon\end{aligned}$$

P53. 7. 直接利用 Stolz 定理即可 （找 $b_n=n$ ）

P53. 8. 利用 $\ln x$ 和 e^x 的连续性，取对数后用 Stolz 定理.
或利用均值不等式和二明逼定理.
注意需考虑 $a=0$.

P53. 9. 取 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$，并补充定义 $a_0 = 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，

$b_n > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

P53. 10.(2) $b_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$，取 $a_n = \frac{n^n}{n!}$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

P27. 18.(2) ① 解出可能的收敛值 $a = 1-\sqrt{1-c}$ 或 $1+\sqrt{1-c}$ (舍)

② 数学归纳法 证 $|a_n| < 1-\sqrt{1-c}$，有界

③ 数学归纳法 证 $a_n \uparrow$

(3) ① 解出可能的收敛值 为 $\sqrt{a}$

② 证明 $a_n \geq \sqrt{a}$，有下界

③ 证明 $a_n \searrow$

(5) ① 解出可能的收敛值为 0

② 证明 a_n 有界

③ 证明 $a_n \searrow$

P25. 7.(2) 找到两个收敛到不同极限的子列即可

P25. 8.(3) 分析通项后化简得 $a_n = \frac{n+2}{3n}$

(5) 分析通项后注意到 $(1-q)a_n = 1-q^{2^{n+1}}$

P26. 9. 注意 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$ 和 $a_n=\frac{1}{2n}$ 都满足 $a_n\neq 0$，但极限 0.

P26. 12.(1) 对等式取极限前必须先证两边极限存在

(2) 极限与无穷求和不能换序

(3) 注意极限中的未定式：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，1^{∞}

P26. 14. 可分类讨论，见群文件.

也可利用 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

和 $\max\{a_n, b_n\} = \frac{a_n+b_n}{2} + \frac{|a_n-b_n|}{2}$

$\min\{a_n, b_n\} = \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{|a_n-b_n|}{2}$

P27. 20. 注意熟悉极限定义和实数域的完备性公理

P27. 22. 对通项进行恰当变形，以利用 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

P27. 23. 注意"发散到无穷大的数列"其定义为：

$\forall M>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有

$|a_n| > M$

函数极限部分习题解答可见群文件.

P61. 1.否. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可以没有定义. $f(x)=x \quad (x\neq x_0)$

P61. 4. 利用连续性定义.

P62. 7. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a$. $f(0)=a$

$\Rightarrow a=1$

P62. 9. 当 $x=0$ 时, 极限存在且为 1

当 $0<|x|<1$ 时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在, 且 $f(x)=1+x$

当 $|x|=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1 \Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在且为 $\frac{1+x}{2}$

当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=0 \Rightarrow f(x)=0$

$$\therefore \quad f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ \frac{1}{2}(1+x), & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, $(-1,1)$ 上连续.

下面考虑点 $x=1$ 和 $x=-1$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2 \Rightarrow$ 在 $x=1$ 处不连续

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$, $f(-1)=0 \Rightarrow$ 在 $x=-1$ 处连续

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$ 上连续

P62. 13. $u^v = e^{v\ln u}$

由 e^x 在 $(-\infty,+\infty)$、$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 的连续性

和复合函数、函数乘积的连续性可得.

P62. 17. (1) 利用 $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x \quad (x\to 0)$

也可分子分母同乘 $(\sqrt{1+x+x^2}+1)$ 进行化简.

(5) 利用 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x\to 0)$

(8) 利用 $(2-\frac{\sin x}{x}) \subseteq (0,+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{\sin x}{x}) = 2$ 和 $\sqrt{x}$ 在 $x=2$ 处连续

P70. 2. 注意说明"有点不超过 $a+b$"

P70. 4. 注意到值域 $[a,b]$, 构造 $g(x)=x-f(x)$.

还需讨论端点处的值.

P70. 6. 构造 $g(x)=f(x)-f(x+a)$. 同样讨论端点

P70. 7. 利用闭区间上连续函数的值域是闭区间 $[f(x_1), f(x_2)]$

P70. 11. $f(x)=\frac{1}{x}$, 在 $(0,1)$

$f(x)=\tan x$, 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

P70. 13. $f(x)$ 在 a 点处的连续性未知，在 a 点的右极限同样未知。考虑用 Cauchy 判别准则。

$\forall \varepsilon>0$，由一致连续性，$\exists \delta>0$，对 $x,y\in(a,b)$，$|x-y|<\delta$，
$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

即 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<x-a<\delta$，$0<y-a<\delta$，
$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

$\therefore$ 由 Cauchy 判别准则，a 点右极限存在

P70. 15. 设 $a_n\to l$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续 $\Rightarrow f$ 在 $x=l$ 处连续，

即有 $\forall \delta>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-l|<\delta$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta$，当 $|x-l|<\delta$ 时，$|f(x)-f(l)|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-l|<\delta$，
$$|f(a_n)-f(l)|<\varepsilon$$

$\therefore$ $\{f(a_n)\}$ 也收敛 $\square$

P70. 16. $f(x)=\sin x^2$，有界，连续。

但取 $x_1=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$x_2=\sqrt{n\pi}$

可证不一致连续。

P71 第 8 题

(1) 先证明函数的连续性. 利用条件,$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, 当 $x, y \in [a, b]$ 且 $| x - y |< \delta$ 时, 就有 $| f(x) - f(y) |\le k | x - y |< \varepsilon$, 故函数在 $[a, b]$ 上一致连续, 自然也在 $[a, b]$ 上连续. 构造 $g(x) = x - f(x)$, 容易证明函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在零点 x_0. 下证唯一性. 假设存在 x_0, x_0' 均满足条件, 就有 $x_0 = f(x_0)$ 和 $x_0' = f(x_0')$. 而

$$| x_0 - x_0' |=| f(x_0) - f(x_0') |\le k | x_0 - x_0' |<| x_0 - x_0' |$$

矛盾! 所以 x_0 唯一.

(2) 从定义说明该数列的收敛性. 计算

$$| x_n - x_0 |=| f(x_{n-1}) - f(x_0) |\le k|x_{n-1} - x_0| = k|f(x_{n-2}) - f(x_0)| \le k^2|x_{n-2} - x_0| \le \cdots \le k^{n-1}|x_1 - x_0|$$

这就可以说明数列 $\{x_n\}$ 收敛到 x_0. 其中, 初始点 $x_1 \in [a, b]$ 以及函数 f 的值域包含于 $[a, b]$ 保证了每一步的不等式都是成立的.

(3) 可以考虑 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

用定义说明数列不以 l 为极限

先写出数列 $\{a_n\}$ 极限为 l 的定义:$\forall\varepsilon > 0, \exists N$, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|a_n - l| < \varepsilon$ 否定上述命题即可说明数列不以 l 为极限:$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall N$, 都 $\exists n > N$, 使得 $|a_n - l| \ge \varepsilon$

用定义说明一个数列不是基本列

同样先写出数列是基本列的定义:$\forall\varepsilon > 0, \exists N$, 使得当 $n, m > N$ 时就有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 否定上述命题即得到:$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall N$, 都能找到大于 N 的两个数 n, m 使得 $|a_m - a_n| \ge \varepsilon$

使用了小技巧的题目

P25 第 8 题 (5)

考察 $(1 - q)a_n$. 但是注意 $P27$ 第 17 题 (1) 和 $P52$ 第 3 题 (2) 不能使用该技巧.

P50 第 6 题

在 $x \ne 0$ 时, 考虑 $\sin(\frac{x}{2^n}) \times a_n$

P61 第 4 题

可以利用

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$
$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$