第二次习题课

2022 年 10 月 11 日

1 数列极限

计算数列极限的办法很多, 本次主要涉及三明治定理, 单调有界必收敛定理,*Cauchy* 收敛准则,Stolz 定理, 以及迭代生成的数列的极限计算.

1.1 三明治定理

P26 第 15 题 (2)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k - n^k]$
注意本题与 P53 第 6 题联系.

P26 第 15 题 (5)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}$

P27 第 16 题

设 $a_1, a_2, \cdots a_m$ 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots a_m\}$$

P52 第 1 题 (2)

求极限 $a_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$

P27 第 24 题

判断 $n\to\infty$ 时,$\sqrt[n]{n!}$ 是否趋于无穷大 (判断 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ 是否为无穷小).

1.2 单调有界必收敛

P27 第 17 题 (1)

证明数列收敛

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

P52 第 1 题 (2)

求极限 $a_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{12}{5}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$

P52 第 3 题 (2)

证明数列收敛:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

补充题目

1. 求极限 $a_n = \frac{E^n}{n!}$,$E > 1$. 并利用该极限说明 P27 第 24 题.
2. 利用不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

证明数列收敛:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1.3 Cauchy 收敛准则

P27 第 17 题 (4)

证明数列收敛

$$a_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$$

补充题目

1. 试找出数列 $\{a_n\}$, 使得 $\{a_n\}$ 发散, 但 $\{a_n\}$ 满足:$\forall\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.
2. 试找出数列 $\{a_n\}$, 使得 $\{a_n\}$ 发散, 但 $\{a_n\}$ 满足:$|a_{n+p} - a_n| < \frac{p}{n}$ 对 $\forall p, n \in \mathbb{N}^+$ 成立.
3. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足:$|a_{n+p} - a_n| < \frac{p}{n^2}$ 对 $\forall p, n \in \mathbb{N}^+$ 成立, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

1.4 Stolz 定理

P53 第 7 题

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$, 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a$

P53 第 8 题

证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = a$
注意: 利用本题可证明下面第 9 题. 利用第 9 题可以证明第 10 题第 (2) 问.

1.5 迭代生成的数列

P27 第 18 题 (2)(3)(5)

证明下列数列收敛并求出其极限.

(2) $a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} (0 \le c \le 1)$

(3) $a > 0, a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$

(5) $a_n = \sin\sin\cdots\sin 1$(n 个 sin)

P27 第 25 题

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} (n \ge 1)$, 证明:$a_n \to +\infty (n \to \infty)$

P52 第 1 题 (4)

$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

补充习题:P71 第 8 题

1.6 附加说明及其他题目

1. 注意区分以下概念的定义: 数列极限, 发散到无穷大的数列, 函数在无穷大处的极限, 函数在一点处的极限.
2. 如何用定义说明数列不以 l 为极限?
3. 如果用定义说明数列不是基本列?
4. 判断数列发散的办法:
   (1) 定义 (说明数列不以某个数 l 为极限);
   (2) 证明数列无界.
   (3) 找到收敛于不同极限的子列;
   (4) 找到不收敛的子列;
   (5) 证明不是基本列;

P25 第 7 题 (2)

P25 第 8 题 (3)

P25 第 8 题 (5)

P26 第 9 题

P26 第 12 题

P26 第 14 题

P27 第 20 题

P27 第 22 题 (2)(3)(重要极限)

P27 第 23 题 (发散到无穷大的数列的定义)

2 函数极限

中学阶段遇到的函数大多是初等函数, 它们在定义域内连续, 具有很好的性质, 这导致一种错觉: 研究函数极限是多余的, 函数在一点的极限总等于其在该点的函数值. 但函数的连续性并不是函数的“与生俱来”的性质, 而必须通过定义来判断. 连续性的定义就需要考察函数在一点处的极限.

注意区分”函数在无穷大处的极限”和”函数在一点处的极限”. 通过类比数列极限, 给出了前者的定义, 但除了关心函数在无穷大处的趋势, 还希望关心函数在靠近定义域内某一有限的点时表现出的趋势, 给出了后者的定义. 在”函数在一点 x_0 处的极限”定义中, 并没有要求函数在 x_0 这一点有定义, 而只关心该点附近.

函数极限的性质以及计算方法都与数列极限相类似, 除此以外还可以利用“变量代换”, 两个重要极限, 等价无穷小、无穷大替换. 尤其注意在利用等价无穷小、无穷大进行替换时, 不能对以加、减连接的项进行替换.

两个重要极限:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

习题 1.3

P50 第 1 题 (2)(4)

P50 第 2 题 (2)(3)

P50 第 3 题 (2)

P50 第 4 题

P50 第 5 题 (1)(4)

P50 第 6 题

P51 第 9 题 (1)(4)

P51 第 11 题 (1)

P52 第 12 题

P52 第 13 题

3 函数连续性

1. 定义

   (1) 函数在一点的极限值等于该点的函数值;

   (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

   局部性质, 在区间上连续是指在区间内部每一点连续, 在闭区间的端点处有相应的单侧连续性.

2. 左 (右) 连续与间断点的分类;

3. 四则运算, 复合;

4. 连续函数反函数的存在性及连续性;

5. 初等函数的连续性;

6. 若是闭区间上的连续函数, 有性质:

   (1) 零点定理和介质定理;

   (2) 有界性和最大最小值定理;

   (3) 一致连续性 (整体性质), 比连续性的条件要更” 强”.

3.1 习题 2.1

P61 第 1 题

P61 第 4 题

P62 第 7 题

P62 第 9 题

P62 第 13 题

P62 第 17 题

3.2 习题 2.2

P70 第 2 题

P70 第 4 题

P70 第 6 题

P70 第 7 题

P70 第 11 题

P70 第 13 题

P70 第 15 题

P70 第 16 题

补充命题

若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 和区间 $[b,c)$ 上分别一致连续, 证明:$f(x)$ 在 (a,c) 上一致连续.