习题 5.2

1：由于有理数与无理数均在实轴上稠密，

故 $\overline{I}=1$，$\underline{I}=0$

3：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

只要 $\|T\|<\delta$，就有 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$。

由于 $\big||f(\alpha)|-|f(\beta)|\big|<|f(\alpha)-f(\beta)|$，故 $|f(x)|$ 在任一区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅 $\tilde{\omega}_i$ 都不超过 ω_i，于是 $\sum_{i=1}^{n}\tilde{\omega}_i\Delta x_i<\varepsilon$ 对任意 $\|T\|<\delta$ 的划分都成立，也即 $|f(x)|$ 可积。

于是 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(a+\frac{k}{n})\right|$。

$$\int_a^b|f(x)|dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left|f(a+\frac{k}{n})\right|$$

由极限的保序性可知 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$。

4：设 T 是 $[a,b]$ 上的一个划分，ω_i 和 $\tilde{\omega}_i$ 分别是 $f(x)$，$\frac{1}{f(x)}$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅，由于 $\left|\frac{1}{f(\alpha)}-\frac{1}{f(\beta)}\right|=\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{f(\alpha)f(\beta)}\right|\le\frac{\omega_i}{C^2}$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $\|T\|<\delta$，就有 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<C^2\varepsilon$，此时有 $\sum_{i=1}^{n}\tilde{\omega}_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{C^2}\Delta x_i<\varepsilon$

也即 $\frac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积。

1：(2) $ds=\sqrt{[3a\cos^2t\cdot(-\sin t)]^2+[3a\sin^2t\cdot\cos t]^2}\,dt=\frac{3a}{2}|\sin 2t|dt$

$l=\int_0^{2\pi}\frac{3a}{2}|\sin 2t|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt=6a$

(3) $ds=\sqrt{(a\theta)^2+a^2}\,d\theta=a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta$

$l=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\frac{1}{2}a\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}+\ln(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]\Big|_0^{2\pi}=a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$

2: (1) 由对称性可得 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\, d\theta=4\times\frac{a^2}{4}=a^2$

(2) $x'(t)=1-\cos t$, $y'(t)=\sin t$

$$S=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt$$
$$=3\pi$$

(3) $S=\int_0^1 e^x-e^{-x}\,dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=e+e^{-1}-2$

3: (1) 绕 x 轴: $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{2}$

绕 y 轴: $V=\pi\int_0^1[(\pi-\arcsin y)^2-\arcsin y]\,dy$
$$=\pi\int_0^1\pi^2-2\pi\arcsin y\,dy$$
$$=2\pi^2$$

(3) $V=\pi\int_0^{2\pi}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot(1-\cos t)\,dt$
$$=\pi\int_0^{2\pi}1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\,dt$$
$$=5\pi^2$$

4: $V=\pi\int_{R-h}^{R}y^2\,dx=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{R-h}^{R}$
$$=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$$

5: (4) $S=2\pi\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$
$$=-2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\cos\theta=\frac{32}{5}\pi a^2$$

6: 以球心为原点, x 轴垂直于水平面并过球心, 方向向上

任取 $[x,x+dx]\subset[-R,R]$ 对应的小薄片, 其重量为 $\pi(R^2-x^2)\,dx$

当其在水中时, 浮力等于重力, 无需做功, 出水之后的位移为 $R+x$

因此，将球从水中取出需要做的功为：

$$W=\int_{-R}^{R}\pi(R+x)(R^2-x^2)g\,dx=\pi\int_{-R}^{R}gR(R^2-x^2)dx$$

$$=\frac{4}{3}g\pi R^4$$

7：设两杆分别位于x轴上 $[0,l]$ 和 $[2l,3l]$ 的位置.

取右杆上一小段 $[x,x+dx]$，将其视为质点.

由例5.3.2，左杆对该质点的引力为 $G\frac{m^2}{lx(x-l)}dx$

于是两杆之间的引力 $F=\int_{2l}^{3l}\frac{Gm^2}{lx(x-l)}dx=G\frac{m^2}{l^2}\ln\frac{4}{3}$.

补：5(2)

$$S=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}\,d\theta$$

$$\overset{t=\sin\theta}{=\!=}2\pi a\int_{-1}^{1}\sqrt{(a^2-b^2)t^2+b^2}\,dt$$

$$=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$