作业讲评：2.2.13、(2.2.14)、综合题7
3.1.21、3.3.7、3.3.10、3.3.15、3.3.17

备选题：(先讲 Q_2、Q_3)

Q_1. 设 $\alpha > 1$，求证：不存在 $[0,+\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) \geq f^{\alpha}(x)$，$\forall x \in [0,+\infty)$.

Q_2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，$f^{(n)}(0)=0$ $(\forall n \geq 0)$，且存在 $C>0$ 使得 $\forall x \in [0,1]$ 有 $|x f'(x)| \leq C|f(x)|$

证明：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$ $(\forall n \geq 0)$

(2) $f(x)\equiv 0$, $\forall x\in[0,1]$

Hint: $f^{(n)}(0)$有定义知$f^{(n-1)}(x)$在0^+附近有定义，从而$f^{(n-2)}(x)$在$x=0$处右连续.

Q3 设$f(x)$在R上有2阶导函数，$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$均大于0. 假设存在正数a，b，使得$f''(x)\le af(x)+bf'(x)$，$\forall x\in R$.

(1) 求证：$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$

(2) 求证：$\exists$常数c，st $f'(x)\le cf(x)$.

并求出满足上式的最小常数C.

Q4. 设 $a>1$, $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 为可微函数，求证：存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得 $f'(x_n)<f(ax_n)$.

Hint: 考虑 $f(ax)-f(x)$