1.1节.

3. 求证 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数

① 若$\sqrt{2}$有理数 $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. $p.q$互质

则 $2=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2$ 则 p^2是2的倍数, 则p也是2的倍数

令 $p=2k$ 则 $q^2=2k^2$. q^2是2的倍数. q也是2的倍数, 与$p.q$互质矛盾

② 若$\sqrt{3}$有理. $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$. $p.q$互质

则 $p^2=3q^2$. 则 p是3的倍数. $p=3k$. 则 $q^2=3k^2$. 则q是3倍数, 与$p.q$互质矛盾

③. 证 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 无理

法①: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}$ 若$\sqrt{2}+\sqrt{3}$有理. 则 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}$ 同理可证明$\sqrt{6}$无理. 右边有理

矛盾!

②: 若$\sqrt{2}+\sqrt{3}$有理. 则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{2}=\frac{p}{q}-\sqrt{3} \Rightarrow 2=(\frac{p}{q})^2-2\sqrt{3}\frac{p}{q}+3$, $\sqrt{3}$无理. 其它有理 矛盾!

$\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{p}{q}-\sqrt{2} \Rightarrow 3=(\frac{p}{q})^2-2\sqrt{2}\frac{p}{q}+2$, $\sqrt{2}$无理. 其余有理矛盾!

5.(2): 若 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0$. 则 $s=r=t=0$

解. 若 $r, s. t$ 均不为零.

则 $r=-s\sqrt{2}-t\sqrt{3}$. 左边有理. 右边无理. 矛盾! 所以 r不能为零.

若 $s.t$ 有一个不为零. 不妨设为 s.

则 $s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0 \Rightarrow$

7. 设 $a.b$ 实数. 且 $|a|<1$. $|b|<1$ 证明: $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$

解法①: $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1 \overset{(1+ab)^2>0}{\Leftrightarrow} a^2+2ab+b^2<1+2ab+a^2b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2<1+a^2b^2$

移项 $\Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1)>0$.

解法②: $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{a+b}{1+ab}<1 \overset{1+ab>0}{\Leftrightarrow} -1-ab<a+b<1+ab \overset{移项}{\Leftrightarrow} \begin{cases}(a-1)(b-1)>0\\(a+1)(b+1)>0.\end{cases}$

1.2节.

①(1) $\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3n-5-3n}{3(5+3n)}\right|=\left|\frac{-5}{3(5+3n)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{3(5+3n)}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{5}{9\varepsilon}-\frac{5}{3}$.

$\forall\varepsilon$. $\exists N=\left[\frac{5}{9\varepsilon}-\frac{5}{3}\right]+1$. 当 $n>N$ 时. $\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$. （其它对 $\square$ 放缩后的结果也行）

(3): $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$.

$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}-1$

故 $\forall\varepsilon$. $\exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]$. 当 $n>N$ 时. $\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|<\varepsilon$. □

②. 证明若 $\{a_n\}$ 满足 $\forall\varepsilon$, $\exists N$. s.t $n>N$ 时. 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$. 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

解: $\forall\varepsilon$. 取 $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{M}$. 根据条件有. 对于 ε', $\exists N$. s.t $n>N$ 时. 有 $|a_n-a|<M\varepsilon'=\varepsilon$.

这也就用定义说明了 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

④ 证明: 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 则 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之不一定成立. 但若 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$.

①: 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$. 则 $\forall\varepsilon$. $\exists N$. s.t 当 $n>N$ 时. 有 $\underline{||a_n|-|a||<|a_n-a|<\varepsilon}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

②: 反例 $a_n=(-1)^n$. 有 $|a_n|=1$ 即 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$ 但 a_n 没有极限.

（说明）: 很多人都举了一个 $a_n=-1$. 常数列. 然后说 $\lim_{n\to\infty}|-1|=|1|$. $\lim_{n\to\infty}-1=-1$

也就是说他们认为一个是 $a=1$. 一个是 $a=-1$. 但我也 $|1|=|-1|$ 不就可以了.

③: 当 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ 则 $\forall\varepsilon$. $\exists N$. s.t $n>N$ 时 $||a_n|-0|<\varepsilon \Rightarrow |a_n-0|<\varepsilon$.

即 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

⑤ 证明. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 且 $|b_n|<M$. 则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

证: 由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. $\forall\frac{\varepsilon}{M}$, $\exists N$. s.t 当 $n>N$ 时. 有 $|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. $\Rightarrow |a_nb_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$

⑦ 1) 证明 $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$ 不收敛

解: 取 $n=2k$. $a_{2k}=\frac{2k}{2k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}a_{2k}=1$

取 $n=2k+1$ $a_{2k+1}=-\frac{2k+1}{2k+2} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=-1$

$\Rightarrow$ $\exists$ 两个子列不收敛到同个数 $\Rightarrow$ 原数列不收敛.

8 (1). $a_n=\dfrac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$

解. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{3}$

(3). $a_n=(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{6})\cdots(1-\dfrac{1}{n(n+1)/2})$

解: $a_n=\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\times\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\times\cdots\times\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

$=\dfrac{n+2}{3n}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}}{3}=\dfrac{1}{3}$

(5). $a_n=(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n}),\ |q|<1$

$\boxed{\text{不是 } 4^n}$

法一: $(1-q)a_n=(1-q)(1+q)(1+q^2)\sim(1+q^{2^n})=1-q^{2^{n+1}}$

$\implies a_n=\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1-q}\Leftarrow$ 由于 $|q|<1$. $\lim\limits_{n\to\infty} q^{2^{n+1}}=0$.

法二: 直接展开:

$a_n=(1+q+q^2+q^3)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})$

$=(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7)(1+q^8)\cdots(1+q^{2^n})$

$=\sum\limits_{k=0}^{2^{n+1}-1}q^k=\dfrac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{1}{1-q}$ □

14 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. 记 $c_n=\max\{a_n,b_n\}$. $d_n=\min\{a_n,b_n\}$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\max\{a,b\}$. $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\min\{a,b\}$.

法一证: ~~不妨设~~ 若 $a=b$. 则显然 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a=b=\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. □

若 $a\neq b$. 不妨设 $a>b$. 则根据 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$.

我们有对 $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$. $\exists N$. s.t 当 $n>N$ 时. 有 $|a_n-a|<\frac{a-b}{2}$. $|b_n-b|<\frac{a-b}{2}$

即 $b_n<\frac{a+b}{2}<a_n$.

则 $c_n=a_n$. $d_n=b_n$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a=\max\{a,b\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b=\min\{a,b\}$.

法二:

$\max\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|$ $\min\{a,b\}=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}|a-b|$ 自行验证正确性!

~~$c_n=\max\{a_n,b_n\}$~~

极限的四则运算

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}|a_n-b_n|=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|=\max\{a,b\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+b_n)-\frac{1}{2}|a_n-b_n|=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}|a-b|=\min\{a,b\}$

15.(1). $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

解： $\frac{n}{n^2} \le$ 原式 $\le \frac{n}{(2n)^2}$

即 $\frac{1}{n} \le$ 原式 $\le \frac{1}{4n}$ 又 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 故根据夹逼定理. $\lim_{n\to\infty}$ 原式 $=0$.

(3). $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$ 无穷数列极限不能单独算极限！

解：$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-(\frac{1}{2})^n} = 2$.

(5). $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$

解：$\sqrt[n]{\cos^2 1} \le \sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n} \le \sqrt[n]{\underbrace{1+\cdots+1}_{n个}} = \sqrt[n]{n}$

下面证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

① 令 $\sqrt[n]{n} = 1+\lambda_n$ ($\sqrt[n]{n}>1$ 即 $\lambda_n>0$) $\Rightarrow$ $n=(1+\lambda_n)^n \ge 1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$ $\Rightarrow$ $\lambda_n \le \sqrt{\frac{2}{n}}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

②: $n>\frac{1}{\cos^2 1}>1$. $\Rightarrow$ $1<\sqrt[n]{\frac{1}{\cos^2 1}}<\sqrt[n]{n}$ 根据夹逼定理. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\cos^2 1}}=1$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1}=1$ □

16. $a_1,\cdots a_m$ 为m个正数. 证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = \max\{a_1,\cdots a_m\}$

法一：不妨令 $a_k = \max\{a_1,\cdots a_m\}$

则有 $a_k \le \sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n} \le \sqrt[n]{m a_k^n}$

$\lim_{n\to\infty}$ 右边 $= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m a_k^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}\cdot a_k = a_k$. ← $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}$ 根据上一题结果.

故根据夹逼定理. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n} = a_k = \max\{a_1,\cdots a_m\}$ □

证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

使用函数. $f(x)=\sqrt[x]{x}$ $\ln f = \ln\sqrt[x]{x} = \frac{\ln x}{x} \overset{\text{LHopital}}{=} \frac{1}{x} \to 0$ 当 $x\to\infty$ 时.