习题3.4

1. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+C_n^1 mx+C_n^2(mx)^2-[1+C_m^1 nx+C_m^2(nx)^2]+o(x^2)}{x^2}$

$=m^2\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}-n^2\cdot\dfrac{m(m-1)}{2}=\dfrac{mn(n-m)}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{1}{6}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\tan x}=0$ $\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$. 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}=0$

(12) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\ln(1-x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}$

$=0$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^3)^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2\cdot x^2}=2$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{x^2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$

$=\dfrac{2}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}2-\dfrac{x}{e^x-1}=2-1=1$. 故原极限 $=\frac{4}{3}\times 1=\frac{4}{3}$

2: 由 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$, $x_1\in(0,a)$ 可知 $0<x_2=f(x_1)<x_1<a$.
归纳可得, $0<x_{n+1}<x_n<a$. 也即 $\{x_n\}$ 单减有下界0. 故 $\{x_n\}$ 收敛
设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 则 $A=f(A)$. 必有 $A=0$. 也即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(2) 由(1)可知$\{\frac{1}{x_n}\}$单增趋于$+\infty$.

故$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{f(x_n)}-\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}$

由于$xf(x)=f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2)$, $x-f(x)=-f(0)+(1-f'(0))x-\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$

且$f(0)=0$. $f'(0)=1$. $f''(0)\neq 0$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)} = -\frac{2}{f''(0)}$. 综上, $\{nx_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = -\frac{2}{f''(0)}$

18: (1) $y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

单增区间: $(-\infty,0)$、$(1,+\infty)$ 单减区间: $(0,1)$

极大值点: $x=0$. 极大值: $y=0$

极小值点: $x=1$. 极小值: $y=-1$.

(6) $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}$

单增区间: $(-\infty,1)$. 单减区间: $(1,+\infty)$

极大值点: $x=1$. 极大值: $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

19: (1) $y'=4x^3-4x=4(x+1)x(x-1)$

单增区间: $[-1,0)$、$(1,2]$. 单减区间: $[-2,-1)$、$(0,1)$.

$f(-2)=13$. $f(-1)=4$. $f(0)=5$. $f(1)=4$. $f(2)=13$.

最大值$=13$. 最小值$=4$.

20. (3) 即证$\frac{\tan x_2}{x_2}>\frac{\tan x_1}{x_1}$

则$\frac{\tan x_2}{x_2}=\frac{\tan x_1+(\tan x_2-\tan x_1)}{x_1+(x_2-x_1)}$

由Cauchy中值定理$\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\cos^2\xi}$, $\xi\in(x_1,x_2)$

$\frac{\tan x_1}{x_1}=\frac{1}{\cos^2\eta}$, $\eta\in(0,x_1)$

故 $\frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1} > \frac{\tan x_1}{x_1}$.

由糖水不等式可得 $\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1}$

(4) 即证 $(1+x)\ln(1+x) > \arctan x$.

由 Lagrange 中值定理. 左边 $= 1 + \ln(1+\xi) > 1$. $\xi \in (0,x)$

右边 $= \frac{1}{1+\eta^2} < 1$, $\eta \in (0,x)$. 故不等式成立

(6) 即证 $f(x) = x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{1}{6}\sin 2x > 0$. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$f'(x) = 1 - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x$. $f''(x) = \frac{4}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin 2x$.

$= \frac{4}{3}\sin x\,(1-\cos x) > 0$. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

又因为 $f'(0) = 0$ 故 $f'(x) > 0$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 同理 $f(0) = 0$

可知 $f(x) > 0$. $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 原式得证. 而 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} + \frac{1}{3}\cos x = \frac{4}{3} \Rightarrow$ 不能换

2: 即证 $\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x \le \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)$

由于 $\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凹函数. 故根据 Jensen 不等式可知上式成立

4: 设 x_0 是区间 I 上的任一内点. 令 $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

由于 $f(x)$ 是凸函数. 故 $g(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上单增

且有上界 $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, 其中 x_1 是 I 中任意大于 x_0 的一点.

于是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$ 存在. 也即 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数存在. 故 $f(x)$ 左连续

同理. $f(x)$ 在 x_0 处右导数也存在. 故 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

综上. $f(x)$ 在任一内点处连续

5: $f'(x)$ 在 I 上严格单增. 故 $f(x)$ 在 I 上是严格凸的.

扫描全能王 创建

14. 假设 $\exists x_1 \neq x_2$. s.t. $f(x_1) \neq f(x_2)$.

不妨设 $x_1 < x_2$. $f(x_1) < f(x_2)$. 记 $k = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$.

由于 $f(x)$ 是凸函数. 故当 $x > x_2$ 时. 有: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \geq k$.

也即 $f(x) \geq k(x-x_1)+f(x_1)$.

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 与 $f(x)$ 有上界矛盾.

故假设不真. $f(x)$ 恒为常数