数学分析讲义 (第一册)
习题解答

PB21010383 于俊骜

2023 年秋季学期

前言

写这份答案的想法起源于通过了汪琥庭老师的《数学分析 (B1)》的助教申请，由于第一次担任助教，我担心自己学完数分太久，很多知识点已经遗忘。于是，我决定自己把《数学分析讲义》的课后题做一份答案，保证自己的知识水平足够为同学们答疑解惑。

众所周知，找不到答案的题没有任何做的必要。而课后习题又是最贴近教学内容和考试范围的精华，是帮助巩固知识、复习考试的重要资料，这便是我写这份答案的另一个主要动机。当作业长时间没有思路时，我认为看答案的提示、理解答案的思路，远比空着不写好。当然，为了避免规模性抄答案，这份答案将不会过早公布。

目前，七章的习题答案我已全部编写完成，并为一些思路不好理解或者有深远背景的题目写了注，希望能对同学们有所启发。完整答案初稿于 1 月 5 日在课程群中发布，其中有部分计算错误和笔误，在这里感谢大家的指正。

关于这份答案的使用方法：

- 本答案对应的教材版本是群内电子版，如果题号不对应，请与电子版对照。
- 复习的优先级：笔记 $>$ 作业题 $\geq$ 习题课讲义 $>$ 其他课后习题 $\gg$ 其他参考书
- 不要直接题目和答案对着看。先独立思考，如果长时间没有下一步的思路，可以顺着答案往下看几行，一旦得到关键的提示，再次独立思考。这样印象最为深刻，复习效果最好。
- 部分题目过难，想法过于巧妙，可以先跳过，有时间再回看，这些题多半不会成为成绩的拖累。毕竟考试中因为很难的题目做不出而扣的分，会在统一调分的作用下显得微不足道。
- 这份答案的存在并不意味着要刷完课后题。如果复习时间紧张，过量刷题会适得其反。事实上，一旦课堂内容和作业完全掌握，其他课后题就算出现在考场上，基本也能临场解决。
- 由于本人精力有限，编写过程中难免出错，请不要笃信其中的答案。比如常微分方程部分，求解的区间不同会导致解的形式不同，但不能称之为“错误”。如果这份答案与老师课堂上讲的内容或助教之前写每周作业答案有出入，请优先参考后者。如果发现本答案中不严谨的证明或错误的计算结果，欢迎与我讨论。
- 没有被布置成作业的课后题与这份答案可以讨论，但不要因为自己做得题多而表现出优越性，更不要卖弱。这会引发其他同学的不适，影响其他同学复习的计划和情绪。

目前，数学分析 (B1) 已经结课，但愿大家都能在这一极其重要的基础课中有所收获。作为助教，我有责任为同学们提供一切力所能及的帮助；从个人视角出发，我也希望多少能帮助大一新生们的学习少走一些弯路。由衷感谢大家一学期以来的支持和厚爱，下学期我将继续担任汪老师的 (B2) 助教，期待那时与各位再会。

希望各位同学使用本答案愉快，并预祝大家在本课程中拿到满意的成绩！

于俊骜
2024 年 2 月 5 日

目录

Chapter 1

极限

1.1　实数

1

证明. 假设 $c = b + a \in \mathbb{Q}$，则 $b = c - a \in \mathbb{Q}$，矛盾！

由于有理数域对加减乘除均封闭，其他三项同理。 $\square$

2

证明. 对于 $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b$，无理数 $c = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ 满足 $a < c < b$。 $\square$

3

证明. 假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 是有理数，$m, n \in \mathbb{N}_+$，则

$$
\begin{aligned}
& m^2 = 2n^2 && \implies 2\,|m && \implies m = 2m_1,\ m_1 \in \ltimes_+ \\
\implies & n^2 = 2m_1^2 && \implies 2\,|n && \implies n = 2n_1,\ n_1 \in \mathbb{N}_+ \\
\implies & m_1^2 = 2n_1^2 && \implies 2\,|m_1 && \implies m_1 = 2m_2,\ m_2 \in \mathbb{N}_+
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

于是可以得到一列正整数 $m_1 > m_2 > \cdots$，这是不可能的。故 $\sqrt{2}$ 是无理数。类似地，可得 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{2}$ 是无理数。

假设 $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$，则 $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$，矛盾！ $\square$

4

答案分别为：

$$\frac{1}{4} \quad \frac{125}{333} \quad \frac{122}{27}$$

5

(1)

证明. 若 $s=0$，则自然地有 $r=0$。

若 $s\neq 0$，则 $\sqrt{2}=-\frac{r}{s}$，矛盾！ □

(2)

证明. 若 $t=0$，则由 (1) 有 $r=s=0$。

若 $t\neq 0$，移项平方得 $(r^2+2s^2-3t^2)+(2rs)\sqrt{2}=0$。

由 (1) 知 $rs=0$，而

$$\begin{cases} s=0 \Longrightarrow \sqrt{3}=-\dfrac{r}{t} \\ r=0 \Longrightarrow \sqrt{6}=-\dfrac{2s}{t} \end{cases}$$

均矛盾！ □

6

证明. $n=1$ 结论平凡。

假设结论对 $n-1$ 成立，对于 n：

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n}(1+a_i) &= (1+a_n)\prod_{i=0}^{n-1}(1+a_i) \\ &\geq (1+a_n)\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right) \\ &= 1+\sum_{i=1}^{n}a_i+a_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right) \\ &\geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i \end{aligned}$$

□

7

证明.

$$\begin{aligned} &\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \\ \Longleftrightarrow\ &(a+b)^2<(1+ab)^2 \\ \Longleftrightarrow\ &0<(1+ab+a+b)(1+ab-a-b) \\ \Longleftrightarrow\ &0<(1+a)(1+b)(1-a)(1-b) \\ \Longleftrightarrow\ &0<\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right) \end{aligned}$$

成立！ □

1.2 数列极限

1

(1)

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \frac{5}{9\varepsilon}$，$n > N$ 时，

$$\left|\frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5}{15+9n}\right| < \left|\frac{5}{9n}\right| < \varepsilon$$

□

(2)

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \frac{1}{\varepsilon}$，$n > N$ 时，

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

□

(3)

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$，$n > N$ 时，

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| < \varepsilon$$

□

(4)

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = -\frac{2\ln\varepsilon}{\ln 2}$，$n > N$ 时，

$$\left|\frac{n!}{n^n}\right| < \left|\frac{n^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\left[\frac{n}{2}\right]^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^n}\right| = \frac{1}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} < \varepsilon$$

□

2

证明. $\forall \varepsilon > 0$，考虑它对应的 $\frac{\varepsilon}{M} > 0$，$\exists N > 0$，$n > N$ 时，

$$|a_n - a| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

这说明了 $\{a_n\}$ 的极限是 a。 □

注 1. 这说明用定义法证明收敛时，ε 前的系数不一定要是 1，可以是任何正常数。有时候凑 1 仅仅是为了形式上的美观。

3

证明.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n-a)=0\\
\Longleftrightarrow&\forall\varepsilon>0，\exists N>0，n>N\text{时}，|a_n-a|<0\\
\Longleftrightarrow&\lim_{n\to\infty}a_n=a
\end{aligned}
$$

□

4

证明. 由三角不等式 $||a_n|-|a||\le|a_n-a|$ 直接可得。

反例：$a_n=(-1)^n$

而 $a=0$ 时，$|a_n-0|<\varepsilon\Longleftrightarrow||a_n|-0|<\varepsilon$ □

5

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$n>N$ 时 $|a_n|<\varepsilon$。从而 $n>N$ 时有 $|a_nb_n|<M\varepsilon$。由 2 的结论知成立。 □

6

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，$n>N_1$ 时 $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，$n>N_2$ 时 $|a_{2n}-a|<\varepsilon$。

因此，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=2\max\{N_1,N_2\}$，$n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$。 □

7

(1)

证明.

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1\neq-1=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$$

□

(2)

证明.

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=6\neq4=\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}$$

□

8

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{4}{3}$$

(2)

注意到

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Longrightarrow a_n = 1 - \frac{1}{n}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(3)

注意到

$$\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \Longrightarrow a_n = \frac{n+2}{3n}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3} = \frac{1}{3}$$

(4)

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \Longrightarrow a_n = \frac{n+1}{2n}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

(5)

注意到

$$\begin{aligned}(1-q)\,a_n &= (1-q)\prod_{i=0}^{n}\left(1+q^{2^i}\right)\\ &= \left(1-q^2\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+q^{2^i}\right)\\ &= \cdots\cdots\\ &= 1-q^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

由 $|q|<1$ 知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$$

9

证明. 不一定。

若 $a \neq 0$，则由 $\{a_n\}$ 和 $\{a_{n+1}\}$ 极限均存在知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}} = 1$$

若 $a = 0$，此时存在反例

$$a_n = \frac{1}{2^n} \to 0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \Longrightarrow \frac{1}{2} \neq 1$$

□

10

证明. 不一定。

反例：$a_n = 1 + (-1)^n$，$b_n = 1 - (-1)^n$。

$\{a_n\}$ 收敛的条件下，结论一定成立。

$a = 0$ 时已得。

$a \neq 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 0$$

□

11

一收敛一发散的情形，可参考 **习题 1.1.1** 的思路证明 $\{a_n \pm b_n\}$ 发散。

对于 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$，有 $a_n b_n = 1$ 收敛；对于 $a_n = 1, b_n = n$，有 $a_n b_n = n$ 发散。

两发散的情形，则不一定。

	$a_n + b_n$	$a_n b_n$
收敛	$a_n = (-1)^n, b_n = -(-1)^n$	$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$
发散	$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$	$a_n = n, b_n = n$

12

(1) 正确。

(2) 错误，未对求和指标上的 n 取极限。正确答案是 1。

(3) 错误，未对指数上的 n 取极限。正确答案是 e。

注 2. “没有对求和指标取极限”是极限计算过程中很容易出现的错误。

13

证明. 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$，$\exists N > 0$，$n > N$ 时，$|a_n - a| < \varepsilon$，$|b_n - b| < \varepsilon$。

故 $a_n > a - \frac{a-b}{2} = b + \frac{a-b}{2} > b_n$。

假设 $a < b$，则从某一项开始，$a_n < b_n$，与条件矛盾！ □

注 3. 该性质称为**极限的保号性**，应用很广。

14

证明. $a = b$ 时结论平凡。

$a \neq b$ 时，不妨设 $a > b$。由 13 题结论，从某一项开始后，恒有 $c_n = a_n > b_n = d_n$，后面的推导是自然的。 □

15

(1)

$$0 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2} = 0$$

(2)

由

$$0 < (n+1)^k - n^k = n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) < n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = n^{k-1}$$

知

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^k - n^k = 0$$

(3)

由

$$\prod_{i=0}^{n} \sqrt[2^i]{2} = \frac{\sqrt[2^n]{2}}{\sqrt[2^n]{2}} \prod_{i=0}^{n} \sqrt[2^i]{2} = \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}}$$

知

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \sqrt[2^i]{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[2^n]{2}} = 2$$

(4)

取 n 充分大：

$$1 < \sqrt[n]{n^2-n+2} = e^{\frac{\ln(n^2-n+2)}{n}} < e^{\frac{2\ln n}{n}} < e^{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = 1$$

(5)

注意到

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} \cos^2 i} < \sqrt[n]{n}$$

由 (4) 的结论

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} \cos^2 i} = 1$$

16

证明. 不妨设 $a_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，则

$$a_1 \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_1 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_m}{a_1}\right)^n} \leq a_1 \sqrt[n]{n}$$

两边取极限知结论成立。 □

17

(1)

证明. a_n 单减且有下界 0。 □

(2)

证明. a_n 单增且有上界

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^i + 1} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3}$$

□

(3)

证明. 对任意正整数 p

$$\begin{aligned}
\left|a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_{n+p}q^{n+p}\right| &\leq |a_{n+1}|\left|q^{n+1}\right| + \cdots + |a_{n+p}|\left|q^{n+p}\right| \\
&\leq M(|q|^{n+1} + \cdots + |q|^{n+p}) \\
&= M|q|^{n+1}\frac{1-|q|^p}{1-|q|} \\
&< \frac{M}{1-|q|}|q|^n
\end{aligned}$$

n 趋于无穷时，上式任意小。由 Cauchy 准则知收敛。 □

(4)

证明. 对任意正整数 p

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right| \\
\leq&\left|(\frac{1}{(n+1)}-\frac{1}{(n+2)})+\cdots+\frac{1}{(n+p)}-\frac{1}{(n+p+1)})\right| \\
=&\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p+1}\right| \\
\leq&\frac{2}{n+1}
\end{aligned}$$

n 趋于无穷时，上式任意小。由 Cauchy 准则知收敛。 □

18

(1)

证明. 当 n 充分大时，$c^n > n^2$，故 $0 < a_n < \frac{1}{n}$，即 $a_n \to 0$。 □

(2)

证明. 注意到 $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} \geq \frac{c}{2}$，从而由 $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})}{2}$ 知 $a_{n+1} - a_n$ 与 $a_2 - a_1 = \frac{c^2}{8}$ 同为正，即 $\{a_n\}$ 单增。类似地，归纳可得 $a_n \leq c \leq 1$，由有界性知收敛，极限存在。递推式两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$$

□

(3)

证明. 由均值不等式，$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) \geq \sqrt{a}$。故 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{a_n} - a_n) \leq 0$。由上述两条件，知 a_n 收敛。两边取极限，知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$$

□

(4)

证明. 同理 (2) 知 $\{a_n\}$ 单增且 $1 \leq a_n \leq 2$，两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

□

(5)

证明. 注意到对于 $x \in [0,\pi]$，有 $0 \le \sin x \le x$。因此 $\{a_n\}$ 收敛，在递推式 $a_{n+1} = \sin a_n$ 两边取极限，有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

注 4. 先用单调有界说明极限存在、再两边取极限，是一个很常用的套路。

19

证明. 由 $a_n - b_n \le a_n - a \le 0$，两边取极限，只能有 $a_n \to a$，同理 $b_n \to a$。 □

20

证明. 对 $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$，$\exists N > 0$，$n \ge N$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}} \ge l - \epsilon > 1$。于是 $a_{N+p} \le \frac{a_N}{(l-\varepsilon)^p}$，令 $p \to \infty$ 即得。 □

21

证明. 注意到 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 是单减数列，且有下界 0，故 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 收敛。进一步，由 $a_n = b_n \frac{a_n}{b_n}$ 知 $\{a_n\}$ 收敛。 □

注 5. 该结论可用于证明第七章正项级数的 ***D'Alembert*** 判别法。

22

(1) 极限为 e。
(2) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n-2} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^3$，极限为 $\frac{1}{e}$。
(3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-2}$，极限为 $\frac{1}{e}$。
(4) $a_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right)^2$，极限为 e^2。

23

证明.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| \ge b \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

□

24

$\sqrt[n]{n!}$ 无界且趋于无穷大；$n \sin \frac{n\pi}{2}$ 无界但极限不存在。

注 6. 无界不意味着趋于无穷大，其绝对值也不一定趋于无穷大。

25

证明. 不难验证 $\{a_n\}$ 是正数列，且 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}>0$，$\{a_n\}$ 单增。假设 a_n 不趋于无穷大，则 $\{a_n\}$ 有界，两边取极限知矛盾！ □

注 7. 没说“极限存在”则不能直接两边取极限，但思考问题的时候可以先这么想。

26

证明. 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 的证明思路完全相同。 □

1.3 函数极限

1

(1)

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\log_a\varepsilon$，当 $x<M$ 时，$0<a^x<\varepsilon$。 □

(2)

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists M=\frac{2}{\varepsilon}+1$，当 $|x|>M$ 时，$\left|\frac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\frac{2}{x+1}\right|<\varepsilon$。 □

(3)

证明. $\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，当 $|x+1|<\delta$ 时，$\left|\frac{x^2-1}{x^2+x}-2\right|=\left|1+\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$。 □

(4)

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon^q$，当 $0<x<\delta$ 时，$\left|x^{\frac{1}{q}}\right|<\varepsilon$。 □

2

(1)

直接带入得

$$\lim_{x\to1}\left(x^2-5x+2+\frac{1}{x}\right)=-1$$

(2)

$$\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{n-1}\Longrightarrow\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x}=n$$

(3)

$$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{x+1}{2x+1}\Longrightarrow\lim_{x\to1}\frac{x2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3+\frac{1}{6})^{70}(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{90}}=\frac{3^{70}\cdot2^{60}}{5^{90}}$$

3

证明. (1) 分别取趋于 $+\infty$ 的数列 $a_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 和 $b_n=2n\pi-\frac{\pi}{2}$ 知极限不存在。

(2) 分别取趋于 0 的数列 $a_n=\frac{1}{n}$ 和 $b_n=-\frac{1}{n}$ 知极限不存在。 □

4

证明. 由题，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-l|<\varepsilon$。

因此，对这个 $\delta>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时 $|a_n-x_0|<\delta$，从而 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$。 □

注 8. 事实上，该条件是充要的，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}f(a_n),\ \forall\,a_n\to x_0$$

这被称为 ***Heine* 归结原理**。

5

(1) 左极限为 -1，右极限为 0，极限不存在。

(2) 左极限为 -1，右极限为 1，极限不存在。

(3) 极限为 1。

(4) 右极限不存在，极限不存在。

6

证明. 对于任意给定 x，多次使用二倍角公式，有

$$\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x}{2^i}=\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x}{2^i}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

令 $n\to\infty$，极限为 $\frac{\sin x}{x}$。 □

7

证明. 注意到 $\sin\frac{\alpha}{2n^2}\sin\frac{k\alpha}{n^2}=\frac{1}{2}(\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2n^2}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2n^2})$，于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}\sin\frac{\alpha}{2n^2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2n^2}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2n^2}}{2\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{(n+1)\alpha}{n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$

令 $n\to\infty$，即得结论。 □

8

证明. 由定义直接验证。 □

9

(1)

$$\frac{\tan 2x}{\sin 5x}\sim\frac{2x}{5x}\to\frac{2}{5}$$

(2)

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=4\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}=4\cos x\frac{\sin^2 x}{x^2}\sim 4\cos x\to 4$$

(3)

$$\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x=\frac{1}{2^x}\left(\left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{e}{2^x}\to 0$$

(4)

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\left(\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^2\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)\to e^2$$

10

(1)

$$\frac{\arctan x}{x}\sim\frac{\pi}{2x}\to 0$$

(2)

$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \le x^2 \to 0$$

(3)

$$\frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = x^2 \to 4$$

(4)

$$2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \to +\infty$$

11

(1)

$\forall M > 0$，$\exists N = a^M$，$x > N$ 时，$\log_a x > M$。

(2)

$\forall M > 0$，$\exists \delta = a^{-M}$，$0 < x < \delta$ 时，$\log_a x < -M$。

(3)

$\forall M > 0$，$\exists 0 < \delta < \frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{1}{2}$，$\cos x < \frac{1}{2M}$，故 $\tan x > M$。

(4)

$\forall M > 0$，$\exists \delta = \frac{1}{\ln M}$，$0 < x < \delta$ 时，$e^{\frac{1}{x}} > M$。

12

证明. 分别取趋于正无穷的点列 $a_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ 和 $b_n = 2n\pi$ 知原函数无界且极限不存在。 □

13

证明. 由 $y = t\cos t$ 在 $(1, +\infty)$ 无界且 $t \to \infty$ 时极限不存在，知 $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 无界且 $x \to 0^+$ 时极限不存在。 □

14 (2)

	垂直渐近线	水平渐近线	斜渐近线
$y = x\ln(e+\frac{1}{x})$	$x=-\frac{1}{e}$	无	$y = x+\frac{1}{e}$
$y=\frac{3x^2-2x+3}{x-1}$	$x=1$	无	$y=3x+1$

15

证明. 由定义直接验证。 □

注 9. 这说明“等价无穷小”是一个等价关系。

16

(1) $\frac{\tan x-\sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x} \sim \frac{1}{2\cos x} \to \frac{1}{2}$，同阶。

(2) $\frac{x^3+x^2}{\sin^2 x} \sim \frac{x^3+x^2}{x^2} = x+1 \to 1$，等价。

(3) $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 x}{x^2} \to \frac{1}{2}$，同阶。

17

(1) $m=n \Rightarrow$ 同阶；$m\neq n \Rightarrow P_{\max\{m,n\}}$ 是比 $P_{\min\{m,n\}}$ 高阶的无穷大。

(2) $\alpha=\beta \Rightarrow$ 同阶；$\alpha\neq\beta \Rightarrow x^{\max\{\alpha,\beta\}}$ 是比 $x^{\min\{\alpha,\beta\}}$ 高阶的无穷大。

(3) $a=b \Rightarrow$ 同阶；$a\neq b \Rightarrow \max\{a,b\}^x$ 是比 $\min\{a,b\}^x$ 高阶的无穷大。

18

(1) $\frac{\sin mx}{\sin nx} \sim \frac{mx}{nx} \to \frac{m}{n}$。

(2) $\frac{\tan ax}{x} \sim \frac{ax}{x} \to a$。

(3) $\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x} \sim \frac{\frac{1}{n}\sin x}{x} \to \frac{1}{n}$。

(4) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} \sim \frac{1}{2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} \to \frac{1}{4\sqrt{2}}$。

(5) $\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \frac{x(x+1)}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin x\cos x} \sim \frac{x+1}{2(\sqrt{1+x+x^2}+1)\cos x} \to \frac{1}{4}$。

(6) $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \frac{x^2}{2(\sqrt{1+x^2}+1)\sin^2\frac{x}{2}} \sim \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+1} \to 1$。

1.4 第 1 章综合习题

1

(1)

我们归纳证明结论 $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$。

$n=1$ 时平凡。假设结论对 n 成立，则

$$a_n = \frac{2n-1}{2n}a_{n-1} \leq \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

因此结论成立，$a_n \to 0$。

(2)

注意到 $\frac{n+9}{2n-1} < \frac{n+10}{2n+1}$，故 $n > 10$ 时，$a_n = C\,\frac{20}{21}\cdots\frac{n+9}{2n-1} \le C\,(\frac{20}{21})^{n-10}$。故 $a_n \to 0$。

注 10. 前面几项很大无所谓，直接扔掉看后面的就行。

(3)

不难验证 $a_n > 0$。故 $a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n-1)^2}{a_n} \le 0$，$\{a_n\}$ 单减有界，极限存在。
两边取极限知，$a_n \to 1$。

(4)

不难验证 $a_n > 0$。注意到

$$a_{n+1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{a_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{a_n+1}$$
$$a_{n+1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{a_n + \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{a_n+1}$$

得到递推关系

$$\frac{a_{n+1} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{a_{n+1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\frac{a_n + \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{a_n + \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

进一步

$$a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}})^{n-1}\frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} - 1} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

注 11. 该方法称为**不动点法**，可用于求分式线性递推数列的极限。具体做法将 a_n 和 a_{n+1} 都视为 a，解方程得到两根，等式两边减去根然后作商，可以得到一个等比数列。

2

证明. 假设存在 n_0，使得 $a_{n_0} > a$，则存在 $\varepsilon_0 = a_n > 0$，当 $n > n_0$ 时，恒有 $|a_n - a| = a_n - a \ge a_{n_0} - a > \varepsilon_0$。矛盾！ □

3

(1) $\{a_n\}$ 单增且 $a_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n} < n$，故收敛。

(2) $\{a_n\}$ 单增且 $\ln a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2^i}) \le \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} < 1$，故收敛。

4

调和数列 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 满足要求。

注 12. 这也是为什么 *Cauchy* 准则要求任意的 m, n。

5

证明. (1) $\{A_n\}$ 单增且有界，故收敛。

(2) 假设 $\{a_n\}$ 发散，由 Cauchy 准则，$\exists \varepsilon_0 > 0$，使得 $\forall N > 0$，$m > n > N$ 时，$|a_m - a_n| > \varepsilon$。记 $k = \left[\frac{M}{\varepsilon_0}\right] + 1$。此时，对于 $n_0 = 1$，存在 $n_1 > n_2$，使得 $|a_{n_1} - a_{n_0}| > \varepsilon$，进一步，对于 n_1，存在 $n_2 > n_1$，使得 $|a_{n_2} - a_{n_1}| > \varepsilon$。于是我们可以得到一列单增正整数 $n_0, n_1, \cdots, n_k$。此时

$$M < k\frac{M}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \left|a_{n_i} - a_{n_{i-1}}\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}| \leq M$$

矛盾！故 $\{a_n\}$ 收敛。 □

6

证明. $\{a_n\}$ 单增，且存在 $M > 0$，使得 $0 < a_{n+1} - a_n \leq M$。

若 $\{a_n\}$ 无界，则

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = +\infty$$

于是，我们得到

$$a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} = a_n^{\alpha}\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\alpha} - 1\right) \leq a_n^{\alpha}\left(\left(1 + \frac{M}{a_n}\right)^{\alpha} - 1\right) \sim \frac{\alpha M}{a_n^{1-\alpha}} \to 0$$

若 $\{a_n\}$ 有界，则 $\{a_n\}$ 有极限 $a > 0$，进而

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha}) = a^{\alpha} - a^{\alpha} = 0$$

另一方面，考虑 $b_n = n\ln n$，则有

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) < e + \ln(n+1)$$

于是，对充分大的 n，有 $a_{n+1} - a_n < 2\ln n$

$$b_{n+1}^{\alpha} - b_n^{\alpha} < (b_n + 2\ln n)^{\alpha} - b_n^{\alpha} = ((n+2)^{\alpha} - n^{\alpha})\ln^{\alpha} n \sim \frac{\ln^{\alpha} n}{n^{1-\alpha}} \to 0,\ n \to \infty$$

但是 $b_{n+1} - b_n > (n+1)\ln n - n\ln n = \ln n \to \infty$。 □

注 13. n 充分大时

$$\ln n < n^{\alpha},\ \forall \alpha > 0$$

这个结论在一些构造或放缩中很好用。

7

证明. 直接使用 Stolz 定理。 □

8

证明. 两边取对数，再使用 Stolz 定理。 □

9

证明. 对 $\ln a_n$ 使用**第 7 题**结论。 □

10

(1) 由 Stolz 定理，结果为 1。

(2) 由**第 9 题**结论

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

注 14. 核心想法是将级数拆成两部分：前一部分偏差大但项数有限，好处理；后一部分无穷多项但偏差小，便于放缩。

11

证明. 直接使用 Stolz 定理。 □

12

证明. (1) 只考虑 $b_1+\cdots+b_n\to b<+\infty$ 的情形，发散的情形在 (2) 中证明。此时

$$b_n=\sum_{i=1}^{n}b_i-\sum_{i=1}^{n-1}b_i\to 0$$

由课本 1.2 节例题的结论，知 $\{c_n\}$ 收敛。

(2) 不妨设 $a=0$。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，$n>N_1$ 时，$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$。对于上述 ε,N_1，存在 $N_2>0$，$n>N_2$ 时

$$B_n>\frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N_1}a_ib_i$$

于是当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时

$$\left|\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{b_1+\cdots+b_n}\right|\le\left|\frac{a_1b_1+\cdots+a_Nb_N}{b_1+\cdots+b_n}\right|+\left|\frac{a_{N+1}b_{N+1}+\cdots+a_nb_n}{b_1+\cdots+b_n}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left|\frac{b_{N+1}+\cdots+b_n}{b_1+\cdots+b_n}\right|<\varepsilon$$

即 $c_n\to 0$。 □

13

证明. $p=1$ 平凡。

$p<1$ 时

$$\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x \geq \left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{[x]} > 1+\frac{[x]}{x^p} \sim 1+x^{1-p} \to +\infty$$

$p>1$ 时

$$\begin{aligned}
1 < \left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x &\leq \left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{[x]+1} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{[x]+1} \frac{([x]+1)\cdots([x]+2-k)}{k!}\frac{1}{x^{kp}} \\
&< 1+\frac{[x]+1}{x^p}+\frac{[x]([x]+1)}{2x^{2p}}+\sum_{k=3}^{[x]+1}\frac{[x]^k}{k!}\frac{1}{x^{kp}} \\
&< 1+\frac{x+1}{x^p}+\frac{x+1}{2x^{2p-1}}+\sum_{k=3}^{[x]+1}\frac{1}{k!}\frac{1}{x^{k(p-1)}} \\
&< 1+\frac{x+1}{x^p}+\frac{x+1}{2x^{2p-1}}+\sum_{k=3}^{[x]+1}\frac{1}{k!}\frac{1}{x^{k(p-1)}} \\
&< 1+\frac{1}{x^{p-1}}+\frac{1}{x^p}+\frac{1}{2x^{2p-2}}+\frac{1}{2x^{2p-1}}+\frac{2}{x^{3(p-1)}} \to 1
\end{aligned}$$

□

注 15. 这里的做法是硬放缩，本题也可以构造类似 e 的定义式来求解。

14

证明. 设 $f(x)$ 的周期为 T。假设存在 x_0 使得 $f(x_0)\neq 0$，则 $\exists \varepsilon_0=|f(x_0)|$，$\forall N>0$，$\exists k\in\mathbb{N}_+$，使得 $x_0+kT>N$，且 $|f(x_0+kT)|\geq\varepsilon_0$，矛盾！ □

注 16. 如果能取非零值，无论多远都会鼓起来一下，极限就不能为 0 了。

15

证明. 只证 (1)，(2) 同理。

$\Longrightarrow$: 任取 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\to x_0^-$。$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<x_0-x<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$；对上述 $\delta>0$，$\exists N>0$，$n>N$ 时，$0<x_0-a_n<\delta$。这说明 $f(a_n)\to A$。

$\Longleftarrow$: 假设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq A$，记 $a_0=1$。则 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$\exists a_n$，满足 $0<x_0-a_n<\min\{\frac{1}{n},a_{n-1}\}$，但是 $|f(x)-A|>\varepsilon_0$。数列 $\{a_n\}$ 与条件矛盾！ □

16

证明. 不难得到

$$p_1 + q_1\xi = p_2 + q_2\xi \Longleftrightarrow p_1 = p_2, q_1 = q_2$$

据此，我们先证一个引理：$\{p+q\xi|p,q\in\mathbb{Z}\}$ 中存在一列正数趋于 0。

我们先考虑 $A = \{p+q\xi|p,q \in \mathbb{Z}\} \cap [0,1]$。$\forall q \in \mathbb{Z}$，$\exists p \in \mathbb{Z}$，使得 $p+q\xi \in [0,1]$。记 $x_q = p+q\xi \in [0,1]$，因此 $x_q \in A, \forall q \in \mathbb{Z}$。$\{x_n\}$ 有界，故存在收敛子列 $\{y_n\}$，设其极限为 y。从而 $\forall k \in \mathbb{N}^+$，$\exists N > 0$，$n > N$ 时，$|y_n - y| < \frac{1}{2k}$。因此取 $n_1, n_2 > N$，则有 $\frac{1}{k} > |y_{n_1} - y_{n_2}| \in A$。引理得证。

回到原题，假设存在区间 (a,b)，使得 $(a,b)\cap\{p+q\xi|p,q\in\mathbb{Z}\} = \varnothing$。考虑 $p > b, q = 0$ 的情形，知 $B = [b,+\infty)\cap\{p+q\xi|p,q\in\mathbb{Z}\} \neq \varnothing$。令 $c = \inf B$，则 $(a,c)\cap\{p+q\xi|p,q\in\mathbb{Z}\} = \varnothing$。进一步，取正整数 $n_0 > \frac{1}{c-a}$，由引理，$\exists x \in A$，使得 $0 < x < \frac{1}{n_0}$。

但是根据 c 的定义，存在 $\{z_n\} \subset B$，使得 $z_n \to c$，则 $z_n - x \to c - x \in (a,c)$。当 n 充分大时，$z_n - x \in (a,c)\cap\{p+q\xi|p,q\in\mathbb{Z}\}$。这与空集的假设矛盾！ □

注 17. 本题是一个重要定理，但与数学分析的主线无关，可以直接忽略。

Chapter 2

单变量函数的连续性

2.1 连续函数的基本概念

1

否。例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

在 0 处满足条件但不连续。

2

证明. 对 $\forall x_0 \in (a,b)$，$\exists \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{x-a}{2}, \frac{b-x}{2}\right\}$，$f(x)$ 在 $[a+\varepsilon_0, b-\varepsilon]$ 连续，故在 x_0 连续。 □

注 18. "连续"是点态性质，只要对每个点，都能取出一个小邻域满足定义就行。

3

证明. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，若 $g(x)$ 在 x_0 间断，移项易知 $f(x) \pm g(x)$ 在 x_0 不连续。

另一方面,对于 $f(x) = x - x_0, g(x) = \frac{1}{x-x_0}$,有 $f(x)g(x) = 1$ 在 x_0 连续;对于 $f(x) = g(x) = \frac{1}{x-x_0}$，有 $f(x)g(x) = \frac{1}{(x-x_0)^2}$ 在 x_0 间断。

若 $f(x), g(x)$ 均在 x_0 不连续，则可能有以下情形：

	$f(x)+g(x)$	$f(x)g(x)$
在 x_0 连续	$f(x) = \frac{1}{x-x_0}, g(x) = -\frac{1}{x-x_0}$	$f(x) = u(x), g(x) = 1 - u(x)$
在 x_0 间断	$f(x) = \frac{1}{x-x_0}, g(x) = \frac{1}{x-x_0}$	$f(x) = \frac{1}{x-x_0}, g(x) = \frac{1}{x-x_0}$

其中

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ 0, & x \geq x_0 \end{cases}$$

□

4

(1)

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。对上述 ε，注意到

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \le |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

这说明 $|f(x)|$ 在 x_0 连续。 □

(2)

证明. 由 $f(x), g(x)$ 在 x_0 连续，根据 (1) 知

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

在 x_0 连续。同理，

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

在 x_0 连续。 □

注 19. 更直接的想法来自几何直观，可以就 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处的大小关系分类讨论，最终都会得到 x_0 处的连续性。

5

证明. $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$ 在 $(0, 1)$ 无处连续，但 $|f(x)| = \frac{1}{2}$ 在 $(0, 1)$ 处处连续。 □

6

(1) $x = 2$ 是第二类间断点。
(2) $x = 0$ 是跳跃点。
(3) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 是跳跃点。
(4) $x = 0$ 是跳跃点。
(5) $x = -7$ 是第二类间断点；$x = 1$ 是跳跃点。
(6) 无间断点。

7

$$1 = \lim_{x \to 0^-} e^x = \lim_{x \to 0^+} a + x = a \to a = 1$$

8

证明.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$

故右连续但不左连续。 □

9

逐点求极限，得到

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1\\ \frac{1}{2}(1+x), & |x|=1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

它在 $x=1$ 处间断，其余点处连续。

注 20. “连续性”具有“刚性”，会被逐点极限破坏掉。但第七章会学到，它可以在一致的极限下保持。

10

证明. 根据定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上 $f(x)\in(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$，有界。 □

11

证明. 与上题同理，取 $\varepsilon=\frac{|f(x_0)|}{2}$ 即可。 □

12

证明. $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，$|y-a|<\delta_1$ 时，恒有 $|f(y)-f(a)|<\varepsilon$；对于上述 $\delta_1>0$，$\exists\delta_2>0$，$|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有 $|g(x)-a|<\delta_2$。因此，只要 $|x-x_0|<\delta_2$，就有 $|f(y)-f(a)|<\varepsilon$，题中等式成立。 □

注 21. 连续的本质是极限和函数可换序。

13

由上题，$u(x),v(x)$ 连续 $\Rightarrow v(x)\ln u(x)$ 连续 $\Rightarrow u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ 连续。

14

证明. 假设存在 $x \neq y$ 使得 $|f(x)-f(y)|=d>0$。由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续知，$\forall \varepsilon$，$\exists \delta>0$，当 $|a|<\delta$ 时，恒有 $|f(a)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $\varepsilon=d>0$。取充分大的正整数 m,n，使得

$$\left|\frac{x}{2^m}\right|<\delta \Longrightarrow \left|f\left(\frac{x}{2^m}\right)-f(0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\left|\frac{y}{2^n}\right|<\delta \Longrightarrow \left|f\left(\frac{y}{2^n}\right)-f(0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

此时

$$d=|f(x)-f(y)|=\left|f\left(\frac{x}{2^m}\right)-f\left(\frac{y}{2^n}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{x}{2^m}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{y}{2^m}\right)-f(0)\right|<\varepsilon=d$$

矛盾！ □

注 22. $2x$ 和 x 差得有点大，所以将它们都往 0 靠，自变量的差值任意缩小，就可以利用连续性得到结论。

15

证明. 先取特殊值，令 k 为正整数：

$$x=y=0 \Longrightarrow f(0)=0$$
$$y=-x \Longrightarrow f(-x)=-f(x)$$
$$y=(k-1)x \Longrightarrow f(kx)=kf(x)$$

对于正有理数 $\frac{p}{q}$：

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)$$

进一步，正实数 x 可以由一列正有理数 $\{x_n\}$ 逼近，结合连续性：

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n f(1)=xf(1) \tag{2.1}$$

最后，$f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$。 □

注 23. 函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

称为 ***Cauchy*** **方程**。

16

证明. 取 $|x|$ 充分小，分别换元 $x=\arcsin t$，$x=\arctan t$，$x=e^t-1$。由**第 12 题**结论，$x\to 0$ 等价于 $t\to 0$，即得到结论。 □

17

(1)

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\frac{x+x^2}{\sin 2x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}\sim\frac{1+x}{2\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}\to\frac{1}{4}$$

(2)

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}\sim\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+1}\to 1$$

(3)

$$\frac{\left(\sqrt[10]{1+\tan x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{2x\sin x}=\frac{\left(\sqrt[10]{1+\tan x}-1\right)}{2\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin x}=\frac{\frac{1}{10}\tan x}{2\left(\sqrt{1+x}+1\right)\sin x}\to\frac{1}{40}$$

(4)

$$\frac{x\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}=\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\to 2$$

(5)

$$\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\frac{2\sin^2(\sin^2\frac{x}{2})}{x^4}\sim\frac{2(\sin^2\frac{x}{2})^2}{x^4}\sim\frac{2(\frac{x}{2})^4}{x^4}=\frac{1}{8}$$

(6)

$$x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)=\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1}\to -50$$

(7)

$$\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|=2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\right|\le\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|\to 0$$

证明. 加减的极限不好算，但乘除好算，所以和差化积。 □

(8)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2}$$

18

证明. 性质的验证是平凡的。 □

2.2 闭区间上连续函数的性质 & 一致连续性

1

证明. 令 $f(x)=x\cdot 2^x-1$，$f(x)\in C[0,1]$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=1>0$。故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有零点。 □

2

证明. 令 $f(x)=x-a\sin x-b$，$f(x)\in C(0,+\infty)$，$f(0)=-b<0$，$f(a+b)=a(1-\sin(a+b))\geq 0$。故 $f(x)$ 在 $(0,a+b]$ 有零点。

另一方面，$x>a+b$ 时，有

$$|f(x)|\geq |x|-|a\sin x+b|\geq |x|-a-b>0$$

故 $f(x)$ 在 $(a+b,+\infty)$ 无零点。 □

3

证明. 令 $f(x)=x-\sin(x+1)$，$f(x)\in C(\mathbb{R})$，$f(0)=-\sin 1<0$，$f(1)=1-\sin 2>0$。故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有零点。 □

4

证明. 令 $g(x)=f(x)-x$，$g(x)\in C[a,b]$，$g(a)=f(a)-a\geq 0$，$g(b)=f(b)-b\leq 0$。故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 有零点，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有不动点。 □

5

证明. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，$h(x)\in C[a,b]$，$h(a)=f(a)-g(a)>0$，$h(b)=f(b)-g(b)<0$。故 $h(x)$ 在 (a,b) 有零点。 □

6

证明. $g(x)=f(x+a)-f(x)\in C[0,a]$ 满足 $g(0)g(a)\leq 0$，$g(x)$ 在 $[0,a]$ 上必有零点。 □

7

证明. 只需证更一般的结论。

不妨设 $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots \leq f(x_n)$。令

$$g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i (f(x) - f(x_i))$$

则 $g(x_1) \leq 0, g(x_n) \geq 0$。若 $x_1 \leq x_n$，则 $g(x)$ 在 $[x_1, x_n] \subseteq [a, b]$ 上必有零点 ξ。反之结论类似。 □

8

证明. $\exists A \in \mathbb{R}$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists b > a, x > b$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$。令 $\varepsilon = |A|+1$，再设 $|f(x)| < M, \forall x \in [a, b]$。则在 $[a, +\infty)$ 上恒有 $|f(x)| < \max\{M, 2|A| + 1\}$。 □

注 24. 有限的部分跑不了太高，无限的部分又被极限压住了。

9

证明. 注意到：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界 $\Leftrightarrow g(t) = \frac{1+t}{1-t+t^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 有界。根据上题结论，以及

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 0$$

知 $g(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有界。 □

10

先证明一个引理：$f(x)$ 是连续函数 $\Leftrightarrow$ 开集在 $f(x)$ 下的原像是开集。

证明. $\Longrightarrow$：设 $f(A) = B$，其中 B 是开集，则 $\forall x_0 \in A$，$\exists \varepsilon_0 > 0$，使得 $(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0) \subset B$。根据连续性，对上述 $\varepsilon_0 > 0$，$\exists \delta > 0$，只要 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，就有 $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$。故 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$，$A$ 是开集。

$\Longleftarrow$：对于定义域中的 x_0，$\forall \varepsilon > 0$，设 $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ 的原像是开集 A。由 $x_0 \in A$ 知 $\exists \delta > 0$，使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$。于是 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。说明连续。 □

下面回到原题。

(1)

不存在，不符合引理。

(2)

不存在，不符合引理。

(3)

不存在，不符合介值定理。

(4)

存在，如 $f(x) = \frac{1}{x} + 1$。

注 25. 该引理是连续函数更广、更好的一个定义方式。

事实上，连续函数的值域有界性、最值性来自“连续函数将紧集映到紧集”；介值定理来自“连续函数将连通集映到连通集合”。

11

$f(x) = \tan\frac{\pi}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$。

12

证明. 只要证明 $f(I) = (f(a), f(b))$。

由单调性，$\forall x \in I$，有 $f(x) \in (f(a), f(b))$。另一方面，由介值定理，$\forall y \in (f(a), f(b))$，$\exists x \in I$，使得 $f(x) = y$，从而结论得证。 □

13

证明. 只证 b 处左极限存在，a 处同理。

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (a, b)$，只要 $|x - y| < \delta$，就有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$。取定一列 $\{x_n\} \subset (a, b)$ 满足 $x_n \to b$。对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $x_n \in (b - \delta, b)$。从而 $\forall m > n > N$，有 $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$。这说明 $\{f(x_n)\}$ 是 Cauchy 列，从而收敛，有极限 B。

另一方面，任取一列 $\{y_n\} \subset (a, b)$ 满足 $y_n \to b$。$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in (a, b)$，只要 $|x - y| < \delta$，就有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$。同时，$\exists N_1 > 0$，$n > N_1$ 时，恒有 $|f(x_n) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$；$\exists N_2 > 0$，$n > N_2$ 时，恒有 $y_n \in (b - \varepsilon, b)$。因此 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时

$$|f(y_n) - B| \leq |f(y_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

说明 $f(y_n) \to B$。由 $\{y_n\}$ 的任意性知

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = B$$

□

注 26. 先想办法把那个极限表示出来，再去证明确实是它。

14

证明. $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，$\forall x,y\in(0,+\infty)$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。由 $\{a_n\}$ 收敛知，对于上述 $\delta>0$，$\exists N>0$，只要 $m>n>N$，就有 $|a_m-a_n|<\delta$，从而 $|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$。由 Cauchy 准则，$\{f(a_n)\}$ 收敛。

若 $f(x)$ 连续而不一致连续，考虑 $f(x)=\frac{1}{x}$ 和 $a_n=\frac{1}{n}$，则 $\{a_n\}$ 收敛，但 $\{f(a_n)\}$ 发散。 □

15

证明. 由 $\{a_n\}$ 收敛，知 $\exists M>0$，使得 $|a_n|<M$, $\forall n$。由于 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 一致连续，类似上题可得 $\{f(a_n)\}$ 收敛。 □

16

对于 $f(x)=\sin x^2$, 令 $x_n=\sqrt{n\pi}, y_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2(\sqrt{n\pi}+\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}})}=0$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=1$$

说明不一致连续。

注 27. 直观上理解，越往无穷走，函数振得越快，“连续的程度”越差，从而是“不一致”的。

2.3 第 2 章综合习题

1

证明. $x=0$ 时，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $|x|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le|x|<\varepsilon$。

$x\neq 0$ 为有理数时，任取一列无理数 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x$，且 $|x_n|>\frac{|x|}{2}$。则 $\exists\varepsilon_0=\frac{|x|}{2}$，满足 $|f(x_n)-f(x)|=|x_n|>\varepsilon$，知不连续。 □

$x\neq 0$ 为无理数时，类似地去一列无理数可证。

2

注意到

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_n\\ f(1)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_n)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow f(0)+f(1)=1$$

故 $f(0) \geq \frac{1}{2}$ 或 $f(1) \geq \frac{1}{2}$。另一方面

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{2} - x_n\right| \leq \frac{1}{2}$$

故 $f(x) - \frac{1}{2}$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 或 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上有零点。

3

证明. 取 $x_1 = \lambda_1 + \frac{a_1}{M}$，其中 $M > \frac{2a_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{2a_1}{\lambda_3 - \lambda_2}$，则 $f(x_1) > 0$ 且 $x_1 \in (\lambda_1, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2})$。同理可以求出 $x_2 \in (\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \lambda_2)$，使得 $f(x_2) < 0$。从而 $f(x)$ 在 (λ_1, λ_2) 上有零点，结合严格单减，知零点唯一。

类似地，$f(x)$ 在 (λ_2, λ_3) 上有唯一零点。 □

4

证明. 不妨设 $f(x)$ 非常数。则

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| = +\infty$$

故 $\exists M > 0$，当 $|x| > M$ 时，$|f(x)| > |f(0)|$。

结合 $|f(x)| \in C[-M, M]$，知 $|f(x)|$ 在 $[-M, M]$ 可以取到最小值。由前面假设，知它也是 $|f(x)|$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最小值。 □

5

证明. 令 $g_n(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(n)$，则

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

于是 $\exists 0 \leq i \neq j \leq n-1$，使得 $g(\frac{i}{n}) \leq 0, g(\frac{j}{n} \geq 0)$。不妨设 $i < j$，则连续函数 $g(x)$ 在 $[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}] \subseteq [0, 1-\frac{1}{n}]$ 上存在零点。 □

6

证明. 由 $1 + x^2 + \sin^2 x \geq 1 > 0$，知 $f(x) = x^5 - 72 + \frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}$ 连续。结合 $f(0) = -71 < 0$，$f(3) = 171 - \frac{\cos 3}{10+\sin^2 3} > 170 > 0$，知 $f(x)$ 有实零点。 □

7

证明. $f(x)$ 为常数时结论平凡。$f(x)$ 不为常数时，令

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

设 $x_0 \geq a$ 满足 $f(x_0) \neq A$，不妨设 $f(x_0) > A$。则对于 $\varepsilon = \frac{f(x_0)-A}{2}$，$\exists M > a$，$x > M$ 时，$f(x) < A + \varepsilon < f(x_0)$。由连续性，$f(x)$ 在 $[a, M]$ 上能取到最大值，它也是 $[a, +\infty)$ 上的最大值。 □

8

(1)

证明. $g(x)=f(x)-x\in C[a,b]$，$g(a)\geq 0$，$g(b)\leq 0$，知 $g(x)$ 存在零点 x_0。假设还有零点 x_0'，则

$$0=|g(x_0)-g(x_0')|=|f(x_0)-f(x_0')|-|x_0-x_0'|\leq (k-1)\,|x_0-x_0'|<0$$

矛盾！ □

(2)

证明. 注意到对于任意 $p\in\mathbb{N}_+$

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &\leq \sum_{i=1}^{p}|x_{n+i}-x_{n+i-1}|<\sum_{i=1}^{p}|f(x_{n+i-1})-f(x_{n+i-2})|\\ &<k\sum_{i=1}^{p}|x_{n+i-1}-x_{n+i-2}|<\cdots<k^{n-1}\sum_{i=1}^{p}|x_{i+1}-x_i|\\ &<k^{n-1}|x_2-x_1|\sum_{i=1}^{p}k^{i-1}<\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|\to 0,\ n\to\infty\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则，$\{x_n\}$ 手链。

进一步，由连续性

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$$

□

(3)

$$f(x)=\begin{cases}2, & x\leq 1\\ x+\frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$$

注 28. 满足题目中的条件

$$|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|,\ \forall\, x,y\in\mathbb{R},0<k<1$$

的函数 $f(x)$ 称为**压缩映射**。事实上，***Banach*** 证明了在任何完备空间（*Cauchy* 列收敛的空间）中，压缩映射的不动点存在唯一。

进一步，若 k 推广为任意一个正的常数，则该条件称为 ***Lipschitz* 条件**。在数学分析的框架下，它能推出连续，但推不出可导。

9

证明. 令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $x\geq 1$ 时，有 $f_n(x)\geq n-1\geq 0$。不难发现 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 严格单增，且 $f_n(0)=-1<0$。故 $f_n(x)$ 有且仅有一个正根 x_n，并且 $x_n\in(0,1)$。

进一步，$f_n(x_n)=0\Rightarrow x_n^{n+1}-2x_n+1=0$。令 $n\to\infty$，知 $x_n\to\frac{1}{2}$。

□

10

证明. 考虑集合

$$B = \{x \in [a,b] \mid f(x) > f(a)\} \neq \varnothing$$

假设 $b > b_0 = \sup B$，则存在一列 $\{x_n\} \subset B$，使得 $x_n \to b_0$。由连续性知

$$f(b_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) > f(a) \Longrightarrow b_0 \in B$$

此时不存在 $y \in (b_0, b)$ 使得 $f(y) > f(b_0)$，矛盾！

因此 $b_0 = b$，$f(b) = f(b_0) > f(a)$。 □

注 29. 该思路在证明**有限覆盖定理**中首次用到，在数学分析 B 系列课程中很少用到，了解即可。

Chapter 3

单变量函数的微分学

3.1 导数

1

(1)

不可导。$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$。

(2)

不可导。$f'_-(0) = 0 \neq 1 = f'_+(0)$。

(3)

不可导，因为不连续。

(4)

不可导，因为不连续。

(5)

不可导。$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$。

(6)

可导。$f'_-(0) = 0 = f'_+(0)$。

注 30. 判断可导时往往先判断连续，这里很容易把“导数的左右极限”误认为是“左右导数”，从而将一些甚至不连续的点判断为可导。

2

(1)

分别由连续性和可导性

$$
\begin{aligned}
a+b &= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\
a &= f'_-(1) = f'_+(1) = 2
\end{aligned}
$$

知 $a=2, b=-1$。

(2)

分别由连续性和可导性

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = b \\
1 &= f'_-(0) = f'_+(0) = a
\end{aligned}
$$

知 $a=1, b=0$。

3

证明. 根据 $g(x)$ 的连续性

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} \frac{(x-a)g(x)}{x-a} = g(a)$$

□

4

证明. 由可导知

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h} = \alpha \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h} + \beta \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{\beta h} = (\alpha+\beta) f'(x_0)$$

□

5

证明. 若 $f(a)\neq 0$，不妨设 $f(a)>0$。由连续性知，取 $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$，$\exists \delta>0$，在 $(x-\delta, x+\delta)$ 上恒有 $f(x) > f(a) - \varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$。因此

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

故 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导。

若 $f(a)=0$，则结论不一定成立，可见本节 1(1) 和 1(6)。 □

6

(1)

$$y' = \left(\frac{3}{5}x + \frac{21}{25} - \frac{218}{25}\frac{1}{5x+8}\right)' = \frac{3}{5} - \frac{218}{5}\frac{1}{(5x+8)^2}$$

(2)

$$y' = \cos x \tan x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\ln 3}(x^2 \ln x)' = \frac{2x\ln x + x}{\ln 3}$$

(4)

$$y' = \frac{1 - \cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

(5)

$$y' = \left(\frac{2}{1-\ln x} - 1\right)' = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}$$

(6)

$$y' = \frac{(2x\ln x + \frac{1}{x} + x)(\sin x + \cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(7)

$$y' = 2x(3x-1)(1-x^3) + 3(x^2+1)(1-x^3) - 3x^2(x^2+1)(3x-1)$$

(8)

$$y' = 3x^2 \tan x \ln x + \frac{x^3 \ln x}{\cos^2 x} + x^2 \tan x$$

7

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2)

$$y' = \frac{2\ln x}{3x(1+\ln^2 x)^{\frac{2}{3}}}$$

(3)

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$$

(4)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin^3(x+\frac{\pi}{4}))' = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

(5)

$$y' = 9x^2\cos x^3(\sin^2 x^3)$$

(6)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

(7)

$$y' = (\cos\sin\sin x)(\cos\sin x)\cos x$$

(8)

$$y' = -\frac{15x^2}{1+x^6}(\cos\cos^5\arctan x^3)(\cos^4\arctan x^3)(\sin\arctan x^3)$$

(9)

$$y' = 3\left(\frac{x^3-1}{x^4+1}\right)^2 \frac{3x^2(x^4+1)-4x^3(x^3-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{3x^2(x^3-1)^2(3+4x-x^4)}{(x^4+1)^4}$$

(10)

$$y' = \sqrt{1+x^2}\sin x + \frac{x^2\sin x}{\sqrt{1+x^2}} + x\sqrt{1+x^2}\cos x$$

(11)

$$y' = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

(12)

$$y' = \frac{2}{x\ln x(\ln\ln x)}$$

(13)

$$y' = ((x^x + x^x\ln x)\ln x + x^{x-1})x^{x^x} + (1+\ln x)x^x + \left(\frac{2^x}{x} + 2^x\ln x\ln 2\right)x^{2^x}$$

(14)

$$y' = e^x(\ln x)^{e^x}(\ln\ln x + \frac{1}{x\ln x})$$

(15)

$$y' = \frac{1-\ln\tan x}{\sin^2 x}(\tan x)^{\cot x}$$

(16)

$$y' = 10^x\ln 10(\sin x)^{\cos x} + 10^x(\sin x)^{\cos x}(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\sin x)$$

(17)

$$\begin{aligned}y' =&\frac{\left(2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}(x+5)^2(x-4)^{-\frac{2}{3}}\right)(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^{10}(x+4)}\\&-\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{3}}\left(5(x+2)^4(x+4)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x+2)^5(x+4)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(x+2)^{10}(x+4)}\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}y' =&\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x}\frac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+1}}\\=&\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+x+1}}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{x-1}\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+1}}\end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}f'(x)=3x^2 &\Longrightarrow f'(x^2)=3x^4\\ f(x^2)=x^6 &\Longrightarrow \left(f(x^2)\right)'=6x^5\end{aligned}$$

9

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Longrightarrow f'\left(g(x)\right)=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$$

$$f\left(g(x)\right)=\ln(e^{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}})\Longrightarrow \left(f\left(g(x)\right)\right)'=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}+\frac{2xe^{2\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}}{e^{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$$

10

(1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2f'(x^3)$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\sin x\cos x\left(f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right)$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (e^x + ex^{e-1})f'(e^x + x^e)$$

(4)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\left(f\left(\sin f(x)\right)\right) f'\left(\sin f(x)\right)\left(\cos f(x)\right) f'(x)$$

(5)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'\left(f\left(f(\sin x + \cos x)\right)\right) f'\left(f(\sin x + \cos x)\right) f'(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$$

(6)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{f(x)}\left(e^x f'(e^x) + f(e^x)f'(x)\right)$$

11

(1)

$x_0 \neq 0$ 时

$$f'(x_0) = \left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \frac{(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}})(1+e^{\frac{1}{x}}) + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}\Bigg|_{x=x_0} = \frac{x_0 e^{\frac{2}{x_0}} + (x_0 - 1)e^{\frac{1}{x_0}}}{x_0(1+e^{\frac{1}{x_0}})^2}$$

$x_0 = 0$ 时

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x}$$

不存在。

(2)

不难注意到，$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处不可导。因此

$$f'(x) = \begin{cases} -2\sin x + (1-2x)\cos x, & x < \frac{1}{2} \\ 2\sin x + (2x-1)\cos x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

12

(1)

证明. 注意到，极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$
不存在，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导。 □

(2)

证明. 由定义
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$
但 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$。当 $x\to 0$ 时，$f'(x)$ 极限不存在。 □

(3)

证明. 由定义
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=0$$
且 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$。当 $x\to 0$ 时，$f'(x)\to 0$，从而连续。 □

13

与上题类似可得
$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
其中 $2x\sin\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 有界，$\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 无界。因此 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 无界。

14

(1)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x+1)e^x\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{(x+1)e^x}=\frac{1}{y+e^x}$$

(2)

反函数为 $x=\frac{1}{\tan y}$，因此
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{\tan^2 y}\frac{1}{\cos^2 y}=-\frac{1}{\sin^2 y}$$

(3)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2(1+\ln x)}{x^x} + 2e^{-2x} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{-\frac{2(1+\ln x)}{x^x} + 2e^{-2x}} = \frac{x^x}{2x^x e^{-2x} - 2\ln x - 2}$$

(4)

注意到 $e^x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x} = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$$

注 31. 反函数求导，多数情况下无法右侧无法化成单一变量，带着即可。

15

令 $y = -x$，则

$$f'(-x_0) = \lim_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} = -\lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{-y + x_0} = -f'(x_0)$$

奇函数类似。

16

令 $y = x - T$，则

$$f'(x_0+T) = \lim_{x \to x_0+T} \frac{f(x) - f(x_0+T)}{x - (x_0+T)} = \lim_{x \to x_0+T} \frac{f(x-T) - f(x_0)}{x - (x_0+T)} = \lim_{y \to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = f'(x_0)$$

17

(1)

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)' \\ &= \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - (x^{n+1} - x)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(2)

注意到

$$\begin{aligned} (1-x)Q_n &= -n^2 x^n + \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) x^k = -n^2 x^n + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) x^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) \\ &= 2\left(\frac{x^{n+1} - x}{x-1}\right)' - \frac{x^n - 1}{x-1} - n^2 x^n \\ &= \frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2}{(x-1)^2} - \frac{x^n - 1}{x-1} - n^2 x^n \end{aligned}$$

故

$$Q_n = -\frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2}{(x-1)^3} + \frac{x^n - 1}{(x-1)^2} + \frac{n^2x^n}{x-1}$$

(3)

$$\begin{aligned}
R_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos kx &= \left(\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right)' = \left(\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)' \\
&= \frac{(2n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\cos\frac{2n+1}{2}x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{2 - 2\cos x}
\end{aligned}$$

注 32. 这里的求和技巧在第七章，计算幂级数的和函数时也很常用。

18

(1)

$$y' = -2xe^{-x^2} \qquad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

(2)

$$y' = x2^{x+1} + x^2 2^x \ln 2 \qquad y'' = 2^{x+1} + x2^{x+2}\ln 2 + x^2 2^x \ln^2 2$$

(3)

$$y' = 1 + 2x\arctan x \qquad y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{x^2+1}$$

(4)

$$y' = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \qquad y'' = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

19

(1)

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) \qquad y''' = 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$$

(2)

$$y''=e^xf'(e^x+x)+(e^x+1)^2f''(e^x+x)\qquad y'''=e^xf'(e^x+x)+3e^x(e^x+1)f''(e^x+x)+(e^x+1)^3f'''(e^x+x)$$

20

归纳可知，$x\le n$ 时，$f^{(k)}(x)=C_kx^{n-k}|x|$。其中 C_k 是与 x 无关的常数。因此 $f^{(n)}(x)=C_n|x|$，它在 $x=0$ 不可导。

21

只需归纳证明：$k\le r$ 时，$P_n^k(x)=(x-x_0)^{r-k}R_k(x)$，其中 $R_k(x_0)\neq 0$。

$k=0,1$ 平凡。假设结论对 $k-1$ 成立，则

$$P^k(x)=\left((x-x_0)^{r-k+1}R_{k-1}(x)\right)'=(x-x_0)^{r-k}\left((r-k+1)R_{k-1}(x)+(x-x_0)R'_{k-1}(x)\right)$$

令 $R_k(x)=(r-k+1)R_{k-1}(x)+(x-x_0)R'_{k-1}(x)$，则 $R_k(x_0)=(r-k+1)R_{k-1}(x_0)\neq 0$。

结论成立！

注 33. 这是多项式理论中的一个重要定理。

22

(1)

设 $(x^2e^x)^{(n)}=(a_nx^2+b_nx+c_n)e^x$，结合初值 $(a_0,b_0,c_0)=(1,0,0)$，求导可得

$$\begin{cases}a_{n+1}=a_n\\ b_{n+1}=2a_n+b_n\\ c_{n+1}=b_n+c_n\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_n=1\\ b_n=2n\\ c_n=n(n-1)\end{cases}$$

于是 $(x^2e^x)^{(n)}=(x^2+2nx+n(n-1))e^x$。

(2)

根据 Leibniz 公式

$$\begin{aligned}\left((x^2+1)\sin x\right)^{(n)}&=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(x^2-1)^{(i)}(\sin x)^{(n-i)}=(x^2-1)(\sin x)^{(n)}+2nx(\sin x)^{(n-1)}+n(n-1)(\sin x)^{n-2}\\&=(x^2-n^2+n-1)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

(3)

$$\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n(n-1)!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$$

(4)

$$(\sin x\cos x)^{(n)} = \frac{1}{2}(\sin 2x)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

23

$$y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

故切线方程为

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{2}\pi}{8}$$

24

只考虑第一象限，设 $x_0 > 0$，则

$$y|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \qquad y'|_{x=x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

故切线方程为

$$y = -\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) + \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}$$

它的横纵截距分别为 $2x_0, \frac{2}{x_0}$，围成的三角形面积恒为 2。

25

题目表述不清楚，暂且认为尖儿朝下。

水面的当前高度 H 满足

$$\frac{1}{3}SH = at$$

其中

$$S = \pi\left(\frac{Hr}{h}\right)^2$$

则水面上升速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt[3]{\frac{3ah^2}{\pi r^2}t}\right) = \sqrt[3]{\frac{ah^2}{9\pi r^2 t^2}}$$

26

根据上题

$$v_{\text{锥}} = \frac{ah^2}{\pi r^2 H^2}$$

代入数据得 $v_{\text{柱}} = \frac{a}{S} = \frac{16}{25}$ cm/min。

3.2 微分

1

Δx	10	1	0.1	0.01
Δy	130	4	0.31	0.0301
$\Delta y - \mathrm{d}y$	$130 - 3\,\mathrm{d}x$	$4 - 3\,\mathrm{d}x$	$0.31 - 3\,\mathrm{d}x$	$0.0301 - 3\,\mathrm{d}x$

2

(1)

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{x - 2\pi}\,\mathrm{d}x$$

(2)

$$\mathrm{d}y = x \sin x\,\mathrm{d}x$$

(3)

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x$$

(4)

$$\mathrm{d}y = \frac{2}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$$

(5)

$$\mathrm{d}y = \frac{x \ln 5}{(x^4 + 1)\sqrt{\arctan x^2}}\,5^{\sqrt{\arctan x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(6)

$$\mathrm{d}y = \frac{8x \tan(1 + 2x^2)}{\cos^2(1 + 2x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(7)

$$\mathrm{d}y = e^{-x}\left(\sin(3 - x) - \cos(3 - x)\right)\mathrm{d}x$$

(8)

$$\mathrm{d}y = \left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}x$$

3

(1)

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \dfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t}{2} \Longrightarrow \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1+t^2}{4t}$$

(2)

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (1-\cos t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = \sin t\,\mathrm{d}t \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \Longrightarrow \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

(3)

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\varphi^2+2}{(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\varphi^2+2}{(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^3}$$

(4)

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -3\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 3\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}t \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\tan\varphi \Longrightarrow \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{1}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{3\sin\varphi\cos^4\varphi}$$

注 34. 一定要分清楚每一步是对 t 还是 x 求导。

4

(1)

$$(x,y)|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\tan t} \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{\tan t}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1$$

故切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Longleftrightarrow y=-x+\sqrt{2}$$

(2)

$$(x,y)|_{t=2}=\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2t}{1-t^2}\Longrightarrow\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{t=2}=\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)\bigg|_{t=2}=-\frac{4}{3}$$

故切线方程为

$$y-\frac{12}{5}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{6}{5}\right)\Longleftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+4$$

3.3 微分中值定理

1

根据 Rolle 定理，$f'(x)$ 在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 上分别至少有一个零点 x_1,x_2,x_3。而 $f'(x)$ 恰为 3 次多项式，故至多 3 个零点，故 x_1,x_2,x_3 是其全部零点。

2

证明.

$$\begin{aligned}&F(1)=F(2)=0\Longrightarrow\exists\zeta\in(1,2),\text{s.t. }F'(\zeta)=0\\&F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)\Longrightarrow F'(1)=0\Longrightarrow\exists\xi\in(1,\zeta),\text{s.t. }F''(\xi)=0\end{aligned}$$

□

3

证明. 取 $f(x)=x^3,\xi=0$，则对 $\forall c\le d$，有 $f(c)\le0,f(d)\ge0$。根据 $\frac{f(c)-f(d)}{c-d}=0\Rightarrow f(c)=f(d)\Rightarrow c=d$，矛盾！故逆命题不成立。 □

4

(1)

证明.

$$\begin{aligned}&nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)\\\Longleftrightarrow\ &nb^{n-1}<\frac{a^n-b^n}{a-b}<na^{n-1}\\\Longleftrightarrow\ &nb^{n-1}<\sum_{i=0}^{n-1}a^ib^{n-1-i}<na^{n-1}\end{aligned}$$

由 $a>b>0$ 知上式成立。 □

(2)

证明. 右侧不等号平凡，只证左侧。令 $f(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{x+1} - 1$，则 $f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0$。故 $f(x) > f(0) = 0$ □

(3)

证明. 令 $f(x) = a\ln a + x\ln x - (a+x)\ln\frac{a+x}{2}$, $x > a$。则 $f'(x) = \ln x - \ln\frac{a+x}{2}$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} = \frac{a}{x(x+a)} > 0$$

从而 $f'(x) > f(a) = 0 \Rightarrow f(x) > f(a) = 0$，取 $x = b$ 即可。 □

(4)

证明. 注意到对于 $f(x) = \tan x$，$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单增。

另一方面，根据 Lagrange 中值定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$，s.t. $\frac{1}{\cos^2\xi} = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta - \alpha}$。

结合

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} < \frac{1}{\cos^2\xi} < \frac{1}{\cos^2\beta}$$

知结论成立。 □

5

(1)

证明. 存在 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，使得 $x = \tan t$，带入即得。 □

(2)

证明. 注意到

$$\tan\left(f(x)\right) = \tan\left(\arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x\frac{1-x}{1+x}} = 1$$

结合 $\arctan y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，知 $f(x) \in (-\pi, \pi)$。于是只能有 $f(x) = \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$。

特别地，$x > -1$ 时，

$$\left.\begin{aligned} \arctan x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \\ \arctan\frac{1-x}{1+x} \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$x < -1$ 时同理。 □

注 35. 也可以求导证明是常数，再带入特殊值。

6

证明. 令 $g(x) = f(x) - x$，则 $g'(x) \neq 0$。由 Darboux 介质定理，$g'(x)$ 在 $[a, b]$ 不变号。

不妨设 $g'(x) > 0$，则 $g(0) > 0, g(1) < 0$，知，存在唯一 $x \in [a, b]$，使得 $g(x) = 0$。 □

7

证明. 对任意 $x_1 > x_2$，若 $x_1 - x_2 < \frac{1}{2}$，则 $\exists \xi > 0$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| < |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}$$

否则

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(x_2) - f(0)| + |f(1) - f(x_1)| = |f'(\xi_1)||x_2| + |f'(\xi_2)||1 - x_1| < x_2 + 1 - x_1 < \frac{1}{2}$$

□

8

证明. 令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 则

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$$

故 $g(x) = C$，C 为常数，进而 $f(x) = Ce^x$。 □

9

证明. 不妨设 $f(a) = f(b) = 0$，由 $f(x)$ 不为常数知，存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) \neq 0$。不妨设 $f(c) > 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(c) - f(a) = f'(\xi)(c - a) > 0$，故 $f'(\xi) > 0$。 □

10

(1)

证明. 由 Lagrange 中值定理，对每个 x，$\exists \xi(x) \in (x, x+1)$，使得 $f(x+1) - f(x) = f'(\xi(x))$。从而

$$\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(\xi(x)) = \lim_{x \to +\infty} f'(\xi(x)) = \lim_{\xi(x) \to +\infty} f'(\xi(x)) = 0$$

□

(2)

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$，使得 $x > M$ 时，$|f'(x)| < \varepsilon$。

因此我们取 $x > \max\{\frac{2f(M)}{\varepsilon}, 2M\}$，得到

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(M)}{x} + \frac{f(M)}{x} = f'(\xi)\left(1 - \frac{M}{x}\right) + \frac{f(M)}{x} < \varepsilon$$

结论得证。 □

11

证明. 设 $|f'(x)|<M$。对 $\forall x\in(a,b)$，由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi\in(\frac{a+b}{2},x)$，使得

$$\left|f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = |f'(\xi)|\left|x-\frac{a+b}{2}\right| < \frac{m(b-a)}{2}$$

这说明

$$|f(x)| < \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{m(b-a)}{2}$$

有界。

改为无穷区间不成立，如

$$f(x)=x,\ x\in(0,+\infty)$$

逆命题不成立，如

$$f(x)=\sin\frac{1}{x-a}$$

它是一个有界函数，但在 a 附近导数无界。 □

12

证明. 对任意的 $x_0\in\mathbb{R}$，有

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le \lim_{x\to x_0} M\,|x-x_0| = 0$$

因此 $f(x)$ 处处可导，导数处处为 0，从而恒为常数。 □

13

证明. 注意到

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$$

其中 $\xi\in(x_0,x)$。 □

注 36. 本题给出了右导数等于导数右极限的一个充分条件。

14

(1)

证明. 假设可导，则

$$f'_+(x)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$
$$f'_-(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=-\infty$$

与假设矛盾！ □

(2)

证明. 假设 $x=1$ 处有左导数，则

$$(\arcsin(x))'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$$
$$(\arccos(x))'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$$

均出现矛盾。$x=-1$ 处同理。 □

15

证明. 假设 x_0 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点，则 x_0 处的一个单侧极限存在且不为 $f'(x_0)$，不妨设

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=A<f'(x_0)$$

则对于 $\varepsilon=\frac{f'(x_0)-A}{2}>0$，存在 $\delta>0$，使得 $0<x-x_0<\delta$ 时

$$f'(x)<A+\varepsilon=\frac{f'(x_0)+A}{2}<f'(x_0)$$

此时不存在 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 使得 $f'(x)\in(\frac{f'(x_0)+A}{2},f'(x_0))$，这与 Darboux 定理矛盾！ □

16

证明. 由对称性，只证 $f'(x)$ 在 I 中除 k 个点外恒正的情形。

设 $f(x)$ 在 $I\backslash\{x_1,\cdots,x_k\}$ 可导，其中 $x_1<x_2<\cdots<x_k$。则由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_i\in(x_i,x_{i+1})$，使得

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=f'(\xi)(x_{i+1}-x_i)>0\Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)<\cdots<f(x_k)$$

则对于 $m<n$，若 (m,n) 上所有点导数为正，则类似上面讨论知 $f(m)<f(n)$。否则，不妨设 $m\in[x_i,x_{i+1}),n\in(x_j,x_{j+1}]$，则

$$f(n)-f(m)=(f(n)-f(x_j))+\cdots+(f(x_i)-f(m))=f'(\xi_n)(n-x_j)+\cdots+f'(\xi_m)(x_{i+1}-m)>0$$

综上，$f(x)$ 在 I 上严格单增。 □

注 37. 该结论很好用，但不能推广到可数，更不用说“几乎处处”。这是因为一旦无限，则可能出现聚点，上面的证明过程无法进行。

17

证明. 对 $f(x)-g(x)$ 应用 16 题结论即可。 □

18

证明. 由题，$\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，有 Lagrange 中值定理，$\forall x>0$，$\xi\in(0,x)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}$$

因此

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>\frac{f'(\xi)-\frac{f(x)}{x}}{x}=0$$

由 16 题结论，知 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单增 $\square$

19

证明. 由对称性，只需证 $f''(x_0)>0$ 的情形。

事实上，对 $\varepsilon=\frac{f''(x_0)}{2}>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$f''(x)>f''(x_0)-\varepsilon>0$。

由 Lagrange 中值定理，$\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta)$，$\exists\xi\in(x_0,x)$，使得

$$0<f''(\xi)=\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\frac{f'(x)}{x-x_0}$$

即 $f'(x)>0$。同理 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$。

因此 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点。

对满足 $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$ 的 x_0，假设 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists x\in(x_0,x_0+\frac{1}{n})$ 使得 $f(x)>x_0$，则由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(x_0,x)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

进一步，存在 $\zeta\in(x,\xi)$，使得

$$f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}\geq 0$$

令 $n\to\infty$，则 $\zeta\to x_0$ 得到 $f(x_0)\geq 0$，矛盾！

因此，$\exists\,\delta_1>0$，使得 $\forall\,x\in(x_0,x_0+\delta_1)$，都有 $f(x)<f(x_0)$。同理，$\exists\,\delta_2>0$，使得 $\forall\,x\in(x_0-\delta_2,x_0)$，都有 $f(x)<f(x_0)$。于是 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点。

$f''(x_0)>0$ 的情形同理。

考虑函数 $f_1(x)=x^3$ 和 $f_2(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，他们在 $x=0$ 处一、二阶导数均为 0。但 0 不是 $f_1(x)$ 的极值点；0 是 $f_2(x)$ 的极小值点，$-f_2(x)$ 的极大值点。 $\square$

20

证明. 令 $g(x)=(f(x)-f'(x))e^x$，则 $g(0)=g(1)=0$，于是存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$0=g(1)-g(0)=g'(\xi)=(f(\xi)-f''(\xi))e^x$$

即 $f(\xi)=f''(\xi)$ $\square$

21

(1)

$$y = 2x^3 - 3x^2 \qquad y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	> 0	0	< 0	0	> 0
y	单增	取极大值 0	单减	取极小值 -1	单增

(2)

$$y = x^{\frac{2}{3}} \qquad y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	< 0	无意义	> 0
y	单减	无意义	单增

(3)

$$y = x^2 e^{-x^2} \qquad y' = (2x - 2x^3)e^{-x^2} = -2x(x-1)(x+1)e^{-x^2}$$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	> 0	0	< 0	0	> 0	0	< 0
y	单增	取极大值 $\frac{1}{e}$	单减	取极小值 0	单增	取极大值 $\frac{1}{e}$	单减

(4)

$$y = x^{\frac{1}{x}} \qquad y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} x^{\frac{1}{x}}$$

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
y'	> 0	0	< 0
y	单增	取极大值 $e^{\frac{1}{e}}$	单减

(5)

$$y = \frac{\ln^2 x}{x} \qquad y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

x	$(0,1)$	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	< 0	0	> 0	0	< 0
y	单减	取极小值 0	单增	取极大值 $\frac{4}{e^2}$	单减

(6)

$$y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) \qquad y'=\frac{1}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{1-x}{x^2+1}$$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	>0	0	<0
y	单增	取极大值 $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	单减

22

(1)

对于偶函数 $y=x^4-2x^2+5$，我们有

$$y'=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)=0\Longrightarrow x=0,\pm 1$$

于是

$$\max_{x\in[-2,2]} y=\max\{y|_{x=0},y|_{x=1},y|_{x=2}\}=\max\{5,4,13\}=13$$

$$\min_{x\in[-2,2]} y=\min\{y|_{x=0},y|_{x=1},y|_{x=2}\}=\max\{5,4,13\}=4$$

(2)

对于 $y=\sin 2x-x$，我们有

$$y'=2\cos 2x-1=0\Longrightarrow x=0,\pm\frac{\pi}{6}$$

于是由

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$

知

$$\max_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}=\max\left\{y|_{x=-\frac{\pi}{2}},y|_{x=-\frac{\pi}{6}},y|_{x=0},y|_{x=\frac{\pi}{6}},y|_{x=\frac{\pi}{2}}\right\}=\frac{\pi}{2}$$

$$\min_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}=\min\left\{y|_{x=-\frac{\pi}{2}},y|_{x=-\frac{\pi}{6}},y|_{x=0},y|_{x=\frac{\pi}{6}},y|_{x=\frac{\pi}{2}}\right\}=-\frac{\pi}{2}$$

(3)

对于 $y=\arctan\frac{1-x}{1+x}$，我们有

$$y'=-\frac{1}{(\frac{1-x}{1+x})^2+1}\frac{2}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x^2+1}<0$$

于是

$$\max_{x\in[0,1]} y=\frac{\pi}{4} \qquad \min_{x\in[0,1]} y=0$$

(4)

对于 $y = x\ln x$，根据 $y' = \ln x + 1$ 知 y 在 $(0,1)$ 单减，在 $(1,+\infty)$ 单增。于是

$$\min_{x\in(0,+\infty)} y = -\frac{1}{e}$$

最大值不存在。

23

证明. 均移到等式一边求导即可。特别地，(3) 可利用函数 $\frac{\tan x}{x}$ 的单调性解出。 □

24

(1)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10 \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

x	$-\infty$	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$	$+\infty$
$f'(x)$		>0	0	<0	0	>0	
$f(x)$	$-\infty$	单增	取极大值 -6	单减	取极小值 -10	单增	$+\infty$

结合 $f(4) = -6, f(5) = 10$ 故 $f(x)$ 在 $(4,5)$ 由唯一实零点。

(2)

$$f(x) = ax - \ln x \qquad f'(x) = a - \frac{1}{x}$$

$a \le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单减，结合 $f(0^+) = +\infty, f(+\infty) = -\infty$ 知 $f(x)$ 恰一个实零点。
$a > 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 单减，$(\frac{1}{a},+\infty)$ 单增，且 $f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$，故

- $a \le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一实零点；
- $a < \frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 和 $(\frac{1}{e},+\infty)$ 各有一个实零点；
- $a = \frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有唯一实零点 e；
- $a > \frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 无实零点。

25

证明. 根据 $e^{-x} \ge -x + 1$，我们有

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a \ge 1 - a > 0$$

等号成立当且仅当 $b_n = 0$，故上式取严格不等号。下面判断单调性。

考虑

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a - b_n$$

令

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} - x - a,\ x > 1 - a$$

求导得

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - 1 = \frac{e^{-x}(1 - x - e^{-x})}{(1 - e^{-x})^2} < 0$$

于是 $f(x)$ 严格单减，进而

$$f(x) > \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x + a)e^{-x} - a}{1 - e^{-x}} = 0$$

我们得到 $b_{n+1} - b_n \geq 0$，即 $\{b_n\}$ 单增。于是可设 $b_n \to b$，其中 b 为正实数或 $+\infty$。

此时，递推式两边取极限，得到

$$a = \frac{b}{e^b - 1}$$

假设 $b = +\infty$，则只能有 $a = 0$，矛盾！结合函数

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1},\ x > 0$$

单减，以及

$$g(0) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

知对于 $a \in (0, 1)$，存在唯一正实数 b 使得 $g(b) = a$。这个 b 即是 $\{b_n\}$ 的极限。 □

注 38. 表达式复杂，用离散的方法无法解决时，可以引入分析工具，如求导。

3.4 未定式的极限

1

考虑参数方程

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

该曲线上存在 (a, b) 中一点 ξ，其切线与过 a, b 两点的的割线斜率相等，即

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - f(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2

存在 $x_0 = 0$，使得 $g'(x_0) = 0$，与条件矛盾！

3

证明. 对于 $g(x)=x^2,\ x\in(a,b)$，由 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

整理即得。 □

4

证明. 不妨设 $b>a>0$，并令

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{x}\qquad f_2(x)=\frac{1}{x}$$

易知它们在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微。由 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=-\frac{\frac{f(\xi)-\xi f'(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

□

注 39. 和上一题一样，如此复杂的式子，*Lagrange* 多半无法解决，所以要观察形式构造 *Cauchy* 中值。

5

(1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\alpha}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1-m}{m}}-\frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1-n}{n}}\right)=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}&=mn\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^{n-1}-(1+nx)^{m-1}}{2x}\\&=mn\lim_{x\to0}\frac{m(n-1)(1+mx)^{n-2}-n(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2}\\&=\frac{1}{2}mn(n-m)\end{aligned}$$

(3)

$m,n\geq2$ 时

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=-4$$

$m=1$ 或 $n=1$ 时，不难验证该式仍成立。

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{3x^2\cos x\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\cos x(1-x^2+\sqrt{1-x^2})}=-\frac{1}{6}$$

(5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$$

(6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\alpha$$

(7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t}=0$$

(8)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x})(a+x)^x-(\ln a)a^x}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\left((\ln(a+x)+\frac{x}{a+x})^2+\frac{1}{a+x}+\frac{a}{(a+x)^2}\right)(a+x)^x-(\ln a)^2a^x\right)\\&=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

(9)

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin t}{t}=0$$

(10)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\cos t}{t}=0$$

(11)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{\tan^2 t}\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t - t^2\cos^2 t}{t^2\sin^2 t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos t - t\cos^2 t + t^2\sin t\cos t}{t\sin^2 t + t^2\sin t\cos t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t\cos t - t^2\sin t}{t\sin^2 t + t^2\sin t\cos t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t - t^2}{\sin^2 t + t\sin t\cos t}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin^2 t + t\sin t\cos t}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\cos t}\\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(12)

$$
\lim_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x} = -\lim_{x\to 1^-}(\ln^2 x + 2\ln x) = 0
$$

(13)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln(\tan x)^{2x-\pi} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{2}{\sin 2x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}\\
&= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{\sin(2x-\pi)} = 0\\
&\Longrightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi} = 1
\end{aligned}
$$

(14)

$$
\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2(x+1)} = -\frac{1}{2}
$$

$$
\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}
$$

(15)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)-\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sin^2\pi x}{\pi}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\sin 2\pi x+2\sin^2\frac{\pi}{2}x\right)=2$$

(16)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{2(\sin^2\frac{x}{2})x^2\tan^2 x}=2$$

(17)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x(1+x)\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x+1+\frac{x}{\ln(1+x)}}\\&=-\infty\\&\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=0\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\left(2-\frac{x}{e^x-1}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3\cos x-x\sin x}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(19)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{a^x\ln a}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-[k])}{a^x(\ln a)^k x^{[k]+1-k}}=0$$

(20)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{kx^k}=0$$

6

(1)

证明. 注意到 $0 < f(x_n) = x_{n+1} < x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调递减有下界，所以收敛，设极限为 x_0。结合 $f(x)$ 的连续性，两边取极限得到

$$x_0 = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(x_0)$$

于是只能有 $x_0 = 0$。 □

(2)

证明. 由 Stolz 定理和 L'hospital 法则，并结合 (1)，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{xf(x)}{x - f(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)} = -\frac{2}{f''(0)}\end{aligned}$$

□

注 40. *不要因为最开始形式不好看而不敢用 Stolz。*

3.5 函数的单调性和凸性

1

证明. $n = 2$ 时，由凸函数的定义可得。

对于一般的 n，假设结论对 $n-1$ 成立，则根据凸函数的定义，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le (1-\alpha_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} x_i\right) + \alpha_n f(x_n) \le \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(x_i) + \alpha_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

□

2

证明. 令 $f(x) = -\ln x$，则

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \qquad f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 凸。

原式两边取对数，由 (1) 中结论得证。 □

3

证明. 只证左边不等式。

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} &\Longleftrightarrow a(b+d) \le b(a+c) \\ &\Longleftrightarrow ad \le bc \\ &\Longleftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}\end{aligned}$$

成立。 □

4

证明. 本题只要证开区间上的凸函数连续。

任意固定 $x_0 \in I$，取 $\delta > 0$ 使得 $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset I$。

由凸函数的三点判别法，对 $\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$，我们有

$$m = \frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta} \le \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta} = M$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le \max\{|m|,|M|\} \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| \le \max\{|m|,|M|\}|x-x_0| = C|x-x_0|$$

其中 C 是与 x 无关的常数。

因此，$x \to x_0$ 时，只能有 $f(x) \to f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 x_0 处连续。进而由 x_0 的任意性知 $f(x)$ 在 I 上连续。 □

注 41. 这里其实证明了一个更强的结论：**开区间上的凸函数是 *Lipschitz* 的**。

5

证明. 断言：$f'(x)$ 在 I 上单增。

则对于 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ 和 $\xi_2 \in (x_2, x_3)$，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

由三点判别法，知 $f(x)$ 在 I 上严格凸。

接下来只要证明断言。设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 是所有二阶导数非正的点。不难证明 $f'(x)$ 在 (x_k, x_{k+1}) 单增，$\forall k$。

假设存在 $b \in (x_k, x_{k+1})$ 使得 $f'(b) < f'(x_k)$，由 Darboux 介值定理，存在 $c \in (x_k, b)$ 使得 $f'(c) > f'(b)$，这与 $f'(x)$ 在 (x_k, x_{k+1}) 单增矛盾！对 x_{k+1} 进行同样的讨论，可得

$$f'(x_k) \le f'(x) \le f'(x_{k+1}), \forall x \in (x_k, x_{k+1})$$

这说明 $f'(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 单增，从而在 I 单增。 □

注 42. 很类似**习题 *3.3.16***，但要着重处理条件有差异的部分。

6

证明. 假设 $f''(x_0) \neq 0$，不妨设 $f''(x_0) > 0$。

由 $f''(x)$ 连续知，对于 $\varepsilon = \frac{f''(x_0)}{2}$，$\exists \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$f''(x) > f''(x_0) - \varepsilon = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

由**第 5 题**的结论，$f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上恒凸，这与 x_0 是扭转点矛盾！ □

7

证明. 由对称性，不妨设 $f'''(x_0) > 0$。

对于 $\varepsilon = \frac{f'''(x_0)}{2} > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$\frac{f''(x)}{x - x_0} = \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > f'''(x_0) - \varepsilon = \frac{f'''(x_0)}{2} > 0$$

从而

$$\begin{cases} f''(x) > 0, \ x_0 < x < x_0 + \delta \\ f''(x) < 0, \ x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

即 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 凹，在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 凸。故 x_0 是拐点。 □

8

(1)

由

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25 \\ y' = 6x^2 - 6x - 36 \\ y'' = 12x - 6 \end{cases}$$

知 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 为凸区间，$(-\infty, \frac{1}{2})$ 为凹区间；扭转点为 $x = \frac{1}{2}$。

(2)

由

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{x} \\ y' = 1 - \dfrac{1}{x^2} \\ y'' = \dfrac{2}{x^3} \end{cases}$$

知 $(0, +\infty)$ 为凸区间，$(-\infty, 0)$ 为凹区间；扭转点为 $x = 0$。

(3)

由

$$\begin{cases} y = x^{\frac{5}{3}} \\ y' = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \\ y'' = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

知 $(0, +\infty)$ 为凸区间，$(-\infty, 0)$ 为凹区间；扭转点为 $x = 0$。

(4)

由

$$\begin{cases} y = (1 + x^2)e^x \\ y' = (x^2 + 2x + 1)e^x \\ y'' = (x^2 + 4x + 3)e^x \end{cases}$$

知 $(-\infty, -3), (-1, +\infty)$ 为凸区间，$(-3, -1)$ 为凹区间；扭转点为 $x = -3, -1$。

(5)

由

$$\begin{cases} y = x^4 \\ y' = 4x^3 \\ y'' = 12x^2 \end{cases}$$

知 $(-\infty, +\infty)$ 为凸区间，无凹区间；无扭转点。

(6)

由

$$\begin{cases} y = x + \sin x \\ y' = 1 + \cos x \\ y'' = -\sin x \end{cases}$$

知 $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ 为凸区间，$(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 为凹区间；扭转点为 $x = k\pi$。其中 $k \in \mathbb{Z}$。

9

由 $y = ax^3 + bx^2$ 的光滑性，知

$$\begin{cases} y|_{x=1} = a + b = 3 \\ y''|_{x=1} = 6a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

10

(1)

$$y' = 3x^2 + 12x - 15 \qquad y'' = 6x + 12$$

单调性：

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	> 0	0	< 0	0	> 0
单调性	增	极大值点	减	极小值点	增

凸凹性：

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
y''	< 0	0	> 0
凸凹性	凹	拐点	凸

(2)

$$y' = \frac{x^3 + 3x^2}{2(1+x)^3} \qquad y'' = \frac{3x}{(1+x)^4}$$

单调性：

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	> 0	0	< 0	无意义	> 0	0	> 0
单调性	增	极大值点	减	无意义	增	非极值点的驻点	增

凸凹性：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	< 0	0	> 0
凸凹性	凹	拐点	凸

(3)

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \qquad y'' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

单调性：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	> 0	0	< 0	0	> 0
单调性	增	极大值点	减	极小值点	增

凸凹性：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	< 0	0	> 0
凸凹性	凹	拐点	凸

(4)

$$y' = -(x-1)e^{-x} \qquad y'' = (x-2)e^{-x}$$

单调性：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	>0	0	<0
单调性	增	极大值点	减

凸凹性：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	<0	0	>0
凸凹性	凹	拐点	凸

11

(1)

计算可得

$$\kappa(1,1) = \left.\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\rho = \frac{1}{|\kappa(1,1)|} = \sqrt{2}$$

设曲率中心为 (x_0,y_0)，结合凸性有

$$\begin{cases}(x_0-1)^2+(y_0-1)^2=2\\ x_0-1=y_0-1\\ y_0>1\end{cases}$$

得到 $(x_0,y_0)=(2,2)$。

(2)

计算可得

$$\kappa(0,1) = \left.\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_{x=0} = -2$$
$$\rho = \frac{1}{|\kappa(0,1)|} = \frac{1}{2}$$

设曲率中心为 (x_0, y_0)，结合凹性有

$$\begin{cases} x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = \dfrac{1}{4} \\ x_0 = 0 \\ y_0 < 1 \end{cases}$$

得到 $(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{2})$。

12

(1)

直接求导得

$$x'(t) = 6t \qquad x''(t) = 6 \qquad y'(t) = 3 - 3t^2 \qquad y''(t) = -6t$$

于是

$$\kappa(1) = \left.\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=1} = -\sqrt{6}$$

(2)

直接求导得

$$x'(t) = t\cos t \qquad x''(t) = \cos t - t\sin t \qquad y'(t) = t\sin t \qquad y''(t) = \sin t + t\cos t$$

于是

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

13

直接计算得

$$\kappa(x) = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}},\ x > 0$$

于是

$$\rho(x) = \frac{1}{|\kappa(x)|} = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{x},\ x > 0$$

求导得

$$\rho'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 - 1)}{x^2},\ x > 0$$

故曲率在 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 曲率半径最小，为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

14

证明. 假设 $f(x)$ 不是常值函数，则存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $f(a) \neq f(b)$。

若 $f(b) > f(a)$，取 $x > b$，由三点判别法知

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \Longrightarrow f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right) = +\infty$$

与上有界矛盾！

若 $f(b) < f(a)$，取 $x < b$，同理可得

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

同样矛盾！

因此 $f(x)$ 只能为常值函数。 □

注 43. 直观上可以理解，如果不是常数，早晚要拐到天上去。凸函数的值可以用支撑线控制。

3.6 Taylor 展开

1

(1)

$$y = \frac{x^3+2x-1}{x-1} = x^2+x+3+\frac{2}{x-1} = 1-x-x^2-\sum_{i=3}^{n} 2x^i + o(x^n)$$

(2)

$$y = \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(2x)^{2i}}{(2i)!}+o(x^{2n}) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(-4x^2)^i}{(2i)!}+o(x^{2n})$$

2

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^3 x)\\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o(x^3)\\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+o(x^3)\right)+\frac{1}{6}\left(x^3+o(x^3)\right)+o(x^3)\\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}\ln\cos x &= \ln\left(1-(1-\cos x)\right)\\ &= -(1-\cos x) - \frac{(1-\cos x)^2}{2} - \frac{(1-\cos x)^3}{3} + o\left((1-\cos x)^3\right)\\ &= -\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^6}{8} + o(x^6)\right) + o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)\end{aligned}$$

4

对 $f(x)$ 在 $x=2$ 进行 Taylor 展开，结合 $\deg f = 4$，知

$$\begin{aligned}f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{6}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{24}(x-2)^4\\ &= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4\\ &= x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 35\end{aligned}$$

于是

$$f(-1) = 143 \qquad f'(0) = -60 \qquad f''(1) = 26$$

5

(1)

根据

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\tan x)'' = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} \qquad (\tan x)''' = \frac{2}{\cos^4 x}(2\sin^2 x + 1)$$

我们有

$$y = \tan x = \tan x|_{x=0} + (\tan x)'|_{x=0}\, x + \frac{1}{2}(\tan x)''|_{x=0}\, x^2 + \frac{1}{6}(\tan x)'''|_{x=\xi}\, x^3 = x + \frac{2\sin^2\xi - 1}{3\cos^4\xi}x^3$$

(2)

$$y = \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-(x+1)} = -\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x+1)^i + \frac{(-1)^{n+1}}{(\xi+1)^{n+1}}(x+1)^{n+1}$$

6

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^4 x}{24}+o(\sin^4 x)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^2)\right)}{x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)}{x^4}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

7

证明. 考虑带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，有

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

于是

$$f^{(n+1)}(x)=0,\forall x\Longleftrightarrow f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i,\forall x\Longleftrightarrow \deg f\le n$$

□

8

证明. 分别考虑 $f(x)$ 在 x 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，并带入 $0,2$ 的值，得到

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\theta_1)}{2}x^2\\f(2)&=f(x)-f'(x)(x-2)+\frac{f''(\theta_2)}{2}(x-2)^2\end{aligned}$$

作差得

$$f(2)-f(0)=2f'(x)+\frac{f''(\theta_2)(x-2)^2-f''(\theta_1)x^2}{2}$$

因此

$$
\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left| \frac{f(2)-f(0)}{2} + \frac{f''(\theta_1)x^2 - f''(\theta_2)(x-2)^2}{4} \right| \\
&\le \frac{|f(2)|+|f(0)|}{2} + \frac{|f''(\theta_1)|x^2 + |f''(\theta_2)|(x-2)^2}{4} \\
&\le 1 + \frac{x^2-2x+2}{2} \\
&\le 2
\end{aligned}
$$

□

注 44. 这类题的固有套路就是“反其道而行之”。*Taylor* 展开常常在特殊点展开，展开式中的 x 任意；这里在任意 x 处展开，在特殊点取值。

9

证明. 注意到

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} \right| \le \left| \frac{x^{n+1}}{x} \right| = |x|^n$$

令 $x \to 0$，知 $f'(0)$ 存在且为 0。

但是，对于 $\forall x_0 \neq 0$，$f(x)$ 在 x_0 处不连续，进而不可导。因此 $f''(0)$ 不存在。 □

10

证明. 我们归纳证明

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

其中 $P_{3n}(t)$ 是一个 $3n$ 次多项式。

事实上，$n=0$ 时结论平凡。假设结论对 $n-1$ 成立，则考虑 n 的情况。对于 $x \neq 0$ 有

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n-3}(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) P'_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

而对于 $x \neq 0$，可直接求导，得

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} P'_{3n-3}\left(\frac{1}{x}\right)$$

令

$$P_{3n}(t) = 2t^3 P_{3n-3}(t) - t^2 P'_{3n-3}(t)$$

即可。

因此，$f(x)$ 在 0 处的任意阶导数存在且为 0。 □

注 45. 本题说明光滑函数（C^∞ 函数）不一定是实解析函数（C^ω 函数）。当然，我们在数学分析中碰到的绝大多数光滑函数都是解析的。

11

(1)

证明. 方便起见，不妨设 $x_0 = 0$。

将 $f(x)$ 在 0 处 Taylor 展开，得到

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + o(x^n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

进而

$$f'(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

即

$$\frac{f'(x)}{x^{n-1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} + o(1)$$

若 $f^{(n)}(0) > 0$，则 $\exists \delta > 0$，当 $|x| < \delta$ 时，有

$$\left|\frac{f'(x)}{x^{n-1}}\right| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} + o(1)\right| > 0$$

于是 $\forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$，有 $f'(x) > 0$。

若 $f^{(n)}(0) < 0$，同理可得，$\forall x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$，有 $f'(x) > 0$。因此 $x = 0$ 不是极值点。 □

(2)

证明. 类似 (1) 中讨论可知，n 为偶数时，若 $f^{(n)}(0) > 0$ 时，$x = 0$ 是极大值点；若 $f^{(n)}(0) < 0$ 时，$x = 0$ 是极小值点。 □

3.7 第 3 章综合习题

1

$$f'(0) = \left.\left(\prod_{i=1}^{n}(x+i)\right)\right|_{x=0} + x\left.\left(\prod_{i=1}^{n}(x+i)\right)'\right|_{x=0} = n!$$

2

(1)

由 $f(x)$ 是奇函数，知 $f(0) = 0$，由 L'hospital 法则

$$a = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

(2)

证明. 只要证 $g(x)$ 在 0 处连续可导。

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

说明 $g(x)$ 在 $x=0$ 可导。

进一步，$x\neq 0$ 时 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，于是

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}=g'(0)$$

这说明 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导。 □

3

证明. 对于 $x\in(0,1)$，令

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}$$

不难看到 $g(0)=g(1)=0$，且

$$g'(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x)$$

由 Rolle 中值定理，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得

$$f(x_0)=g'(x_0)=0$$

这个 x_0 即为所求。 □

4

证明. 令 $g(x)=e^xf(x)$，则

$$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$$

根据 $g(a)=g(b)=0$，结合 Rolle 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$g'(\xi)=0\Longrightarrow f'(\xi)+f(\xi)=0$$

□

5

证明. 我们先归纳证明一个结论：

$$f\left(\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2\right)\leq\frac{k}{2^n}f(x_1)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x_2),\ \forall x_1,x_2\in I,\ \forall k\in\{0,1,\cdots,2^n\}$$

$n=1$ 即为题中条件。假设结论对 $n-1$ 成立，下面考虑 n 的情形。

若 k 为偶数，则对 $\frac{k}{2}$ 用归纳假设即可。下设 k 为奇数，由 x_1, x_2 的对称性，可不妨设 $k > 2^{n-1}$。此时

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2\right) &= f\left(\frac{k-1}{2^n}(x_1+x_2) + \frac{1}{2^n}x_1 + \left(1-\frac{2k-1}{2^n}\right)x_2\right) \\
&\le \frac{1}{2}f\left(\frac{k-1}{2^{n-1}}(x_1+x_2)\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^{n-1}}x_1 + \left(2-\frac{2k-1}{2^{n-1}}\right)x_2\right) \\
&\le \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + \frac{1}{2}f\left(\frac{k-2^{n-1}}{2^{n-1}}x_1 + \left(1-\frac{k}{2^{n-1}}\right)x_2\right) \\
&\le \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) + \frac{k-2^{n-1}}{2^n}f(x_1) + \left(\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\right)f(x_2) \\
&= \frac{k}{2^n}f(x_1) + \left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(x_2)
\end{aligned}$$

结论成立！

回到原题，对于固定的 $t \in [0,1]$，考虑其二进制表示

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},\ a_n \in \{0,1\}$$

则可取 t_n 为其二进制表示的前 n 位，即

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}$$

于是 $t_n \to t$。

因此，结合 $f(x)$ 的连续性，我们有

$$\begin{aligned}
f(tx_1 + (1-t)x_2) &= f\left(\lim_{n\to+\infty}(t_n x_1 + (1-t_n)x_2)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} f(t_n x_1 + (1-t_n)x_2) \\
&\le \lim_{n\to\infty} t_n f(x_1) + (1-t_n)f(x_2) \\
&= tf(x_1) + (1-t)f(x_2)
\end{aligned}$$

□

注 46. 该性质称为**中点凸**。如果去掉连续性条件，则不能推出凸性。

6

证明. 对于 $f(x)$，由 Rolle 中值定理，存在 $\zeta \in (0,1)$，满足

$$f'(\zeta) = 0$$

令 $g(x) = (x-1)^2 f'(x)$，则 $g(0) = g(1) = 0$，且

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x) + (x-1)^2 f''(x)$$

根据 $g(\zeta)=g(1)=0$，进一步由 Rolle 定理得，存在 $\xi\in(\zeta,1)$，使得

$$g'(\xi)=2(\xi-1)f'(\xi)+(\xi-1)^2f''(\xi)=0\Longrightarrow f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

□

7

证明. 不妨设 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)>0$。

对于 $\varepsilon=\frac{f'(a)}{2}>0$，存在 $\delta_a\in(0,b-a)$，当 $x\in(a,a+\delta_a)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>f'(a)-\varepsilon=\frac{f'(a)}{2}>0\Longrightarrow f(x)>\frac{f'(a)}{2}(x-a)>0$$

因此，对于 $a+\frac{\delta_a}{2}\in(a,\frac{a+b}{2})$，有 $f(a+\frac{\delta_a}{2})>0$。

同理，存在 $\delta_b\in(0,b-a)$，使得 $b-\frac{\delta_b}{2}\in(\frac{a+b}{2},b)$，且 $f(b-\frac{\delta_b}{2})<0$。根据

$$f(a+\frac{\delta_a}{2})f(b-\frac{\delta_b}{2})<0$$

由零点定理，知 $f(x)$ 在 (a,b) 上有解。 □

注 47. 零点处导数取正，则函数值必然在它右侧的一个小区间上也取正。

8

证明. 若 $f(x)$ 无零点，考虑 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$。则 $g(0)=1,g(1)=2$。由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$-\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=g'(\xi)=g(1)-g(0)=1\Longrightarrow f'(\xi)+f^2(\xi)=0$$

若 $f(x)$ 有零点 $x_0\in(0,1)$ 但非负，它是区间内点且是最小值点，从而是极小值点，于是只能有 $f'(x_0)=0$。此时取 $\xi=x_0$ 即可。

若 $f(x)$ 可以取负值，设 $f(x)$ 的零点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。注意到 $f(x)$ 是闭区间上的连续函数，从而有界，故 $g(x)$ 在定义域内无法取到 0。此时设 $g(c)<0,x_i<x_{i+1}$，则 $\forall x\in(x_i,x_{i+1})$，必有 $g(x)<0$。进一步

$$\lim_{x\to x_i^-}g(x)=\lim_{x\to x_i^+}g(x)=-\infty$$

于是取 $M=-g(c)+(x_{i+1}-x_i)>0$，则存在 $\delta\in(0,\min\{\frac{x_{i+1}-x_i}{2},c-x_i\})$，只要 $x\in(x_i,x_i+\delta)$，就有 $g(x)<-M$。由连续函数介值定理，存在 $a\in[x_i+\delta,c)$，使得 $g(a)=-M$。由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$ 使得

$$g'(\xi_1)=\frac{g(c)-g(a)}{c-a}=\frac{x_{i+1}-x_i}{c-a}>1$$

同理可得，存在 $\xi_2\in(c,x_{i+1})$，使得 $g'(\xi_2)<-1$。由 Darboux 介值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g'(\xi)=1$。 □

注 48. 本题的思路很直接，构造也不难。主要难点在于如何处理取倒数导致的间断点。

9

证明. 任取 $x_0 > a$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi \in (a, x_0)$，使得

$$f'(x_0) - f'(a) = f''(\xi)(x_0 - a) \leq 0 \Longrightarrow f'(x_0) \leq f'(a) < 0$$

由 x_0 的任意性，知 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 严格单减。

另一方面，取

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

则由 Lagrange 中值定理，存在 $\eta \in (a, b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a) \leq f'(a)\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) = -f(a) \Longrightarrow f(b) \leq 0$$

结合 $f(a) > 0$，知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在零点，它也是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上唯一的零点。 □

10

证明. 由 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 单增知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 凸。

对任意 $x \in (a, b)$，有

$$f(x) = f\left(\frac{b - x}{b - a}a + \frac{x - a}{b - a}b\right) \leq \frac{b - x}{b - a}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b) = \lambda$$

□

11

证明. 假设

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = A \neq 0$$

不妨设大于 $A > 0$。

对于 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$，存在 $M > 0$，当 $x > M$ 时，$f'(x) > A - \varepsilon > \frac{A}{2} > 0$。

有 Lagrange 中值定理，对任意 $n \in \mathbb{N}_+$，存在 $\xi \in (M, M + n)$，使得

$$\frac{A}{2} < f'(\xi) = \frac{f(M + n) - f(M)}{n} \Longrightarrow f(M + n) > f(M) + \frac{An}{2}$$

令 $n \to \infty$，知 $f(M + n) \to +\infty$，矛盾！ □

12

证明. 令 $g(x) = f(x) + f(x_1) - f(x + x_1)$，其中 x_1 为任意固定正数。

由 Lagrange 中值定理，对于任意正数 $x > 0$，存在 $\xi \in (x, x + x_1)$，使得

$$g'(x) = f'(x) - f'(x + x_1) = -x_1 f''(\xi) > 0$$

因此

$$g(x_2) > g(0) = 0,\ \forall x_2 > 0$$

再由 x_1 的任意性知结论成立。 □

13

证明. 考虑 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶 Taylor 展开。

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

分别带入 $x_0 - h$ 和 $x_0 + h$ 并相加，得到

$$f(x_0 - h) + f(x_0 + h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

于是

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(x_0)$$

□

注 49. 这里不能直接用中值定理，因为相当于要求两次导，中值定理的 ξ 会导致一种模糊性。

14

(1)

证明. 考虑 e^x 在 $x = 0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，两边作差得

$$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) = \frac{e^\xi}{24}x^4 \geq 0$$

□

(2)

证明. 考虑 $\ln(1 + x)$ 在 $x = 0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，两边作差得

$$\ln(1 + x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{3(1 + \xi)^3}x^3 \geq 0$$

另一侧同理。 □

(3)

证明. 考虑 $\sin x$ 在 $x = 0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，两边作差得

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = -\frac{\sin^5 \xi}{120}x^5$$

由 $x, \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 知结论成立。

另一侧同理。 □

(4)

证明. 注意到

$$(e^x)'' = e^x > 0$$

即 e^x 在 $\mathbb{R}$ 上是凸函数，从而由 Jensen 不等式，结论成立。 □

注 50. 在证明不等式时，*Peano* 余项远不如 *Lagrange* 余项好用。

15

取对数得

$$\ln \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}+o\left(\frac{i}{n^2}\right)\right) = \frac{n+1}{2n}+o\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{n+1}{2n}+o(1)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right) = \sqrt{e}$$

16

考虑 $f(x)=\sqrt[x]{x},\ x\ge 1$，易知 $f(x)$ 非负。求导得

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\sqrt[x]{x}$$

即 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 单增，在 $(e,+\infty)$ 单减。

因此，根据 $f(3)>f(4)=f(2)$ 知

$$\max_{n\in\mathbb{N}_+}\{\sqrt[n]{n}\} = \max_{n\in\mathbb{N}_+}\{f(n)\} = \max\{f(2),f(3)\} = \sqrt[3]{3}$$

17

将 $f(x)=x\cos x$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开，得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n+1} = x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)$$

且同理 14 题，容易验证

$$f(x) \le x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24} = g(x)$$

下面考察 $g(x)$。由

$$g'(x) = \frac{5}{24}x^4-\frac{3}{2}x^2+1 = \frac{1}{24}(5x^4-36x^2+24) = \frac{5}{24}\left(x^2-\frac{18}{5}\right)^2-\frac{17}{10}$$

知

$$f(x) \le g(x) \le g\left(\sqrt{\frac{18}{5}-\frac{2}{5}\sqrt{51}}\right) = \frac{2-8\sqrt{51}}{25}\sqrt{\frac{18}{5}-\frac{2}{5}\sqrt{51}} = 0.562\cdots$$

18

证明. 考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\theta)}{6}$$

分别代入 $x=\pm 1$，得到

$$\begin{aligned} f(1)&=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\theta_1)}{6}\\ f(-1)&=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\theta_2)}{6} \end{aligned}$$

作差得

$$1=\frac{f'''(\theta_1)}{6}+\frac{f'''(\theta_2)}{6}\Longrightarrow f'''(\theta_1)+f'''(\theta_2)=6$$

若 $f'''(\theta_1)=f'''(\theta_2)$，则取 $\xi=\theta_1$ 即可。

若 $f'''(\theta_1)\neq f'''(\theta_2)$，不妨设 $\theta_1<\theta_2$。由 $f'''(x)$ 连续知，存在 $\xi\in(\theta_1,\theta_2)$，使得 $f'''(\xi)=3$。 □

19

证明. 假设结论不成立，则 $\exists M>0$，当 $x>M$ 时，恒有

$$f'(x)\geq f(ax)>0$$

则 $f(x)$ 在 $(M,+\infty)$ 严格单增。

由 Lagrange 中值定理，对 $\forall x>M$，$\exists\xi\in(x,ax)$，使得

$$f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x\geq f(a\xi)(a-1)x>f(ax)(a-1)x$$

整理得

$$f(ax)\,(1-(a-1)x)>f(x)>0$$

取 $x>\max\left\{M,\frac{1}{a-1}\right\}$，出现矛盾！ □

注 51. 要在函数和它的导数之间建立起联系，首选的就是中值定理。

20

证明. 令 $f(x)=x^p$。注意到

$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$$

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 凸，值域为 $(0,+\infty)$。

由凸函数定义，任意 $a,b>0$，有

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

令

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_i^p \qquad B=\sum_{i=1}^{n}b_i^q$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}}\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{A}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{B}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

□

Chapter 4

不定积分

4.1 不定积分及其基本计算方法

1

(1)

$$\int x(x-1)^3\,\mathrm{d}x = \int (x^4-3x^3+3x^2-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

(2)

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int e^{2x} - e^x + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$$

(3)

$$\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 4}4^x + \frac{2}{\ln 6}6^x + \frac{1}{\ln 9}9^x + C$$

(4)

令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \arctan t + C = \tan x - x + C$$

(5)

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + C$$

(6)

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan x + C$$

2

(1)

令 $t = 2x-1$，则 $x = \frac{1+t}{2}$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int t^{100}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{202}t^{101} + C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101} + C$$

(2)

令 $t = \frac{1}{x}$，则 $x = \frac{1}{t}$，进而 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int \sin t\,\mathrm{d}t = \cos t + C = \cos\frac{1}{x} + C$$

(3)

令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$。此时 $x = 2\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-t^2-2t}{1+t^2+2t+1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{-t^2-2t+1}{(1+t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln(1+t) - \ln(1+t^2) + C \\
&= \ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

(4)

令 $t = \arctan x$，则 $\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C$$

(5)

令 $x = \cos t$，则 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \sin^2 t\cos t\,\mathrm{d}t = -\int \sin^2 t\,\mathrm{d}(\sin t) = -\frac{1}{3}\sin^3 t + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(6)

令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，进而 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$$

(7)

注意到 $\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$，于是由 (3) 知

$$\int\frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\pi}{2(1+x^2)}-\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2x+C$$

(8)

令 $t=1+x\ln x$，则 $\mathrm{d}t=(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln t+C=\ln(1+x\ln x)+C$$

(9)

$$\int\sin^2x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x-\frac{\sin 2x}{4}+C$$

(10)

令 $t=\sin x$，则 $\mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int\sin^5x\cos x\,\mathrm{d}x=\int t^5\,\mathrm{d}t=\frac{1}{6}t^6+C=\frac{1}{6}\sin^6x+C$$

3

(1)

令 $t=\sqrt{e^x-2}$，则 $x=\ln(t^2+2)$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{e^x-2}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2t^2}{t^2+2}\,\mathrm{d}t=\int\left(2-\frac{4}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t\\&=2t-2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C\\&=2\sqrt{e^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^x}{2}-1}+C\end{aligned}$$

(2)

令 $x=a\sinh t$，则 $t=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a$，进而 $\mathrm{d}x=a\cosh t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x&=a^2\int\cosh^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sinh t\cosh t+C\\&=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+C\end{aligned}$$

(3)

令 $x=\frac{a}{\sin t}$，则 $t=\arcsin\frac{a}{x}$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{a^2}\int\frac{\tan^3 t\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{-\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{a^2\cos t}+C=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C\end{aligned}$$

(4)

令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=a^2\int\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2\sin t\cos t}{2}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C$$

(5)

令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，进而 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\&=2t-2\ln(1+t)+C=2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C\end{aligned}$$

(6)

令 $t=x^2$，则 $\mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{\ln t}{(1+t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t=-\frac{\ln t}{2\sqrt{1+t}}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$$

再令 $s=\sqrt{t+1}$，则 $t=s^2-1$，进而 $\mathrm{d}t=2s\,\mathrm{d}s$，于是

$$\int\frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{s^2-1}\,\mathrm{d}t=-\ln|1+s|+\ln|1-s|+C=-\ln(1+\sqrt{t+1})+\ln(\sqrt{t+1}-1)+C$$

带回原式得

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=-\frac{\ln t}{2\sqrt{1+t}}-\ln\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}+C=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}{x^2}+C$$

(7)

令 $t=\frac{\ln x}{x}$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-t}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C$$

(8)

令 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin t\tan t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

(9)

令 $t=\sqrt[3]{2x+1}$，则 $x=\frac{t^3-1}{2}$ $\mathrm{d}x=\frac{3}{2}t^2\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{3t^4+9t}{4}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{20}t^5+\frac{9}{8}t^2+C=\frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{8}(2x+1)^{\frac{2}{3}}+C$$

(10)

令 $t=x^{\frac{1}{14}}$，则 $x=t^{14}$，进而 $\mathrm{d}x=14t^{13}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}+x^{\frac{1}{14}}}\,\mathrm{d}x=14\int\frac{t^{15}+t^{20}}{t^{16}+t}\,\mathrm{d}t=14\int\frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+t}\,\mathrm{d}t$$

进一步令 $u=t^5=x^{\frac{5}{14}}$，则 $\mathrm{d}u=5t^4\,\mathrm{d}t$，此时

$$\int\frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\int\frac{u^2}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{5}u+\frac{1}{5}\int\frac{u-1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$$

再令 $v=u-\frac{1}{2}=x^{\frac{5}{14}}-\frac{1}{2}$，则

$$\int\frac{u-1}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u=\int\frac{v}{v^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\ln\left(v^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}v+C$$

综上

$$\int\frac{x^{\frac{1}{7}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}}+x^{\frac{1}{14}}}\,\mathrm{d}x=\frac{14}{5}x^{\frac{5}{14}}+\frac{7}{5}\ln\left(x^{\frac{5}{7}}-x^{\frac{5}{14}}+1\right)+\frac{14}{5\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x^{\frac{5}{14}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

注 52. 本题主打一个“走一步看一步”。可以出成题的积分一定是可解的，关键是有没有算下去的勇气。

(11)

令 $x=\frac{1}{\cos t}$，则 $t=\arccos\frac{1}{x}$，于是 $\mathrm{d}x=-\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=\int(\cos t-1)\,\mathrm{d}t=\sin t-t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\arccos\frac{1}{x}+C$$

(12)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^8(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \arctan x + C\end{aligned}$$

4

(1)

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geq 0 \\ \int -x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0 \end{cases}$$

(2)

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C, & |x| \geq 1 \\ \int \mathrm{d}x = x + C, & |x| < 1 \end{cases}$$

5

(1)

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$$

(2)

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

(3)

$$\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x + \int \sin\ln x\,\mathrm{d}x = x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,\mathrm{d}x$$

故

$$\int \cos\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\cos\ln x + \frac{1}{2}x\sin\ln x + C$$

(4)

$$\begin{aligned}\int x^2\cos 5x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}x^2\sin 5x-\frac{2}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{5}x^2\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x-\frac{2}{25}\int\cos 5x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{5}x^2\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x-\frac{2}{125}\sin 5x+C\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \int\sec x\,\mathrm{d}\tan x\\ &= \sec x\tan x-\int\sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \sec x\tan x-\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x+\int\sec x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又因为对于 $t=\cos x$ 有

$$\begin{aligned}\int\sec x\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int\sec^3 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\int\sec x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,\mathrm{d}x &= x^2e^x-2\int xe^x\,\mathrm{d}x\\ &= x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\,\mathrm{d}x\\ &= x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\end{aligned}$$

(7)

令 $x=\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\int(1-\cos2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta+C\\ &= \frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x-\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x-\int\arctan x\,\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x+\frac{1}{2}\arctan^2 x-x\arctan x+\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan^2 x+\frac{1}{2}\arctan^2 x-x\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\end{aligned}$$

(9)

令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x &= \int t^2\cos t\,\mathrm{d}t=t^2\sin t-2\int t\sin t\,\mathrm{d}t=t^2\sin t+2t\cos t-2\int\cos t\,\mathrm{d}t\\ &= t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C=x\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C\end{aligned}$$

(10)

令 $t=x^2$，则

$$\begin{aligned}\int\ln(x+\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int\frac{x(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\int\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t\\ &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C\end{aligned}$$

6

(1)

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \, \mathrm{d}x \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}
$$

其中 $n \geq 2$。因此

$$
I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x
$$

(2)

$$
J_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n J_{n-1}
$$

7

(1)

令 $t = e^x > 0$，则 $x = \ln t$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{1}{t} \mathrm{d}t$，于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t(1+t)} \, \mathrm{d}t &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \ln \frac{t}{1+t} + C = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C
\end{aligned}
$$

(2)

令 $t = x + \frac{1}{x}$，则 $\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x^2}$，于是

$$
\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2 - 1} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + C
$$

(3)

$$
\int \frac{1}{x^4 + x^6} = \int \left(\frac{-x^2 + 1}{x^4} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \arctan x + C
$$

(4)

令 $t = \sqrt{x-2}$，则 $x = t^2 + 2$，进而 $\mathrm{d}x = 2t \, \mathrm{d}t$，于是

$$
\int x\sqrt{x-2} \, \mathrm{d}x = \int 2t^2(t^2+2) \, \mathrm{d}t = \frac{2}{5} t^5 + \frac{4}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} + C
$$

(5)

令 $t=\sqrt{x-1}$，则 $x=t^2+1$，进而 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x&=2\int\frac{t^2\arctan t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=2\int\arctan t\,\mathrm{d}t-\int\frac{\arctan t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=2t\arctan t-\arctan^2 t-2\int\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\&=2t\arctan t-\ln(t^2+1)-\arctan^2 t+C\\&=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-\arctan^2\sqrt{x-1}+C\end{aligned}$$

(6)

令 $t=\sqrt{e^x-2}$，则 $x=\ln(t^2+2)$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}\,\mathrm{d}x&=2\int\ln(t^2+2)\,\mathrm{d}t\\&=2t\ln(t^2+2)-4\int\frac{t^2}{t^2+2}\,\mathrm{d}t\\&=2t\ln(t^2+2)-4t+8\int\frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t\\&=2t\ln(t^2+2)-4t+4\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}t+C\\&=2(x-2)\sqrt{e^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{e^2}{2}-1}+C\end{aligned}$$

(7)

$$\int xe^x\sin x\,\mathrm{d}x=-xe^x\cos x+\int(x+1)e^x\cos x\,\mathrm{d}x=-xe^x\cos x+(x+1)e^x\sin x-\int(x+2)e^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

其中

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$$

因此

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}e^x\cos x+\frac{1}{2}e^x\sin x+C$$

带回原式有

$$\int xe^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}xe^x\cos x+\frac{x+1}{2}e^x\sin x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{x-1}{2}e^x\cos x+\frac{x}{2}e^x\sin x+C$$

(8)

设 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+\tan x)\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\tan^2 x+1}{(1+\tan x)\tan^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{(1+t)t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln|t+1|-\ln|t|-\frac{1}{t}+C \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{\tan x}\right)-\frac{1}{\tan x}+C
\end{aligned}$$

(9)

设 $x=\cos^2\theta$，则 $\mathrm{d}x=-2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= -2\int \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -4\int \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -4\int \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -4\frac{1}{2}\int \left(\cos\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -2\sin\theta-\theta-\sin\theta\cos\theta+C \\
&= -2\sqrt{1-x}-\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C
\end{aligned}$$

(10)

令 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，则 $x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{2}{t^2+1}-\frac{4}{(t^2+1)^2}\right)\mathrm{d}t = 2\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

(11)

令 $x=\tan\theta$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}
\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{\theta\tan\theta}{(1+\tan^2\theta)^3\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\theta\cos^4\theta+\frac{1}{4}\int\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\theta\cos^4\theta+\frac{1}{4}\int\left(\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta+1\right)\mathrm{d}\theta\\
&= -\frac{1}{4}\theta\cos^4\theta+\frac{3}{32}\theta+\frac{1}{32}\sin 4\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta+C\\
&= \frac{\arctan x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{32}\arctan x+\frac{3x^3+5x}{8(x^2+1)}+C
\end{aligned}$$

(12)

$$\int\frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x}{2\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x$$

注意到

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\tan x}+C$$

于是

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{x}{2\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{x}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}+\int\frac{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{x}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}+2\ln\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\\
&= -\frac{x(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}+2\ln\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|+C
\end{aligned}$$

(13)

令 $t=\arcsin\sqrt{x}$，则 $x=\sin^2 t$，进而 $\mathrm{d}x=2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}
\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \int t\sin 2t\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t+C\\
&= \frac{1}{2}(2x-1)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{x+\sin x}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= (x+\sin x)\tan\frac{x}{2} - \int (1+\cos x)\tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= (x+\sin x)\tan\frac{x}{2} - \int \sin x\,\mathrm{d}x\\ &= (x+\sin x)\tan\frac{x}{2} + \cos x + C\end{aligned}$$

(15)

$$\int x\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (x - x\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$$

(16)

令 $t = x^2+1$，则 $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{x^2+1} + C$$

(17)

令 $x = \tan\theta$，则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\theta}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int \frac{\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{\theta\cos^2\theta}{\tan\theta} + \int \frac{\cos^2\theta - 2\theta\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{\theta\cos^2\theta}{\tan\theta} + \int \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta - 2\int \theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{\theta\cos^2\theta}{\tan\theta} + \int \frac{(1-\sin^2\theta)\cos\theta}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta - \int \theta(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= -\frac{\theta\cos^2\theta}{\tan\theta} + \ln\sin\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}\theta\sin 2\theta - \frac{1}{4}\\ &= -\frac{\arctan x}{x+x^3} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x - \frac{x\arctan x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(18)

令 $t = e^x$，则 $x = \ln t$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\arctan t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\arctan t}{t} + \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\arctan t}{t} + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\arctan t}{t} + \ln t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C \\ &= -\frac{\arctan e^x}{e^x} + x - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}\int e^{2x}(1+\tan x)^2\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{e^{2x}}{\cos^2 x} + 2e^{2x}\tan x\right)\mathrm{d}x \\ &= e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x\,\mathrm{d}xx + \int 2e^{2x}\tan x\,\mathrm{d} \\ &= e^{2x}\tan x + C\end{aligned}$$

(20)

$$\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{(x\sin x+\cos x)\cos x} + \tan x + C$$

(21)

$$\begin{aligned}\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\cos 4x\cos 2x + \cos^2 2x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int (\cos 6x + \cos 2x + \cos 4x + 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}x + C\end{aligned}$$

(22)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(23)

令 $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}$，则 $x=(t^2-1)^2$，进而 $\mathrm{d}x=4t(t^2-1)\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,\mathrm{d}x=4\int\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t=\frac{4}{3}t^3-4t+C=\frac{4}{3}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{3}{2}}-4\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

(24)

令 $t=x\sqrt{x}$，则 $x=t^{\frac{2}{3}}$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{3\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t=-\frac{2}{3}\sqrt{1-t}+C=-2\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C$$

(25)

$$\begin{aligned}\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x&=\int e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}-x\sqrt{\sin x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x-\int e^{-\frac{x^2}{2}}x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x\\&=\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x+e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x}-\int e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x\\&=e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x}\end{aligned}$$

注 53. 这题出题的时候必定是硬凑出来的，如果猜出结果大致长什么样就好做了。这种硬凑的积分往往可以通过分部积分的方式，得到两项完全相同的积分作差，最终算出一个较简洁的结果。

(26)

$$\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{e^x}{x+1}-\frac{e^x}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\int\frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{e^x}{x+1}-\int\frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{e^x}{x+1}+C$$

4.2 有理函数的不定积分

1

(1)

$$\int\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C$$

(2)

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$$

(3)

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = x+\ln|x-1|-\ln|x|+C$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x+2}{x^2+x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \left(-\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C\end{aligned}$$

(5)

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x+1}+C$$

(6)

令 $t=x-\frac{1}{x}$，则 $\mathrm{d}t=1+\frac{1}{x^2}$，于是

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

(7)

令 $t=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $\mathrm{d}t=2(x-\frac{1}{x^3})\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-\frac{1}{x^3}}{x^4+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}+C$$

(8)

令 $t=x^8$，则 $\mathrm{d}t=8x^7\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{8(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\ln(x^8+1)+\frac{1}{8()}+C$$

2

(1)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1+\sin x}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$，且 $\mathrm{d}x=\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})^2}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{t^4+2t^2+1}{t}\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+1}{t}\,\mathrm{d}t + t \\
&= \frac{1}{4}t^2 + t + \frac{1}{2}\ln t + C \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\tan\frac{x}{2} + C
\end{aligned}
$$

注 54. 对于三角积分，实在化不出什么好积的形式的时候，可以尝试万能公式。算起来麻烦，但多半奏效。

(2)

令 $t=\cos x$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\,\mathrm{d}x$，于是

$$
\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{(1-t^2)^2}{t}\,\mathrm{d}t = -\int \left(t^3-2t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \cos^2 x - \ln|\cos x| + C
$$

(3)

令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$，于是

$$
\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^2+1)^2}{t^4}\,\mathrm{d}t = \int \left(1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \tan x - \frac{2}{\tan x} - \frac{1}{3\tan^3 x} + C
$$

(4)

令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t-1}{t^2+1}+\frac{2t-2}{(t^2+1)^2}\right)\\&=\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{8}\ln(t^2+1)+\frac{1}{4}\arctan t-\frac{1}{4(t^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中

$$\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2t^3+2t}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t=\frac{t}{2t^2+2}+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{8}\ln(t^2+1)-\frac{t+1}{4(t^2+1)}+C\\&=\frac{1}{8}\ln\left|1+\frac{2\tan x}{\tan^2 x+1}\right|+\frac{\tan x+1}{4(\tan^2 x+1)}+C\\&=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C\end{aligned}$$

(5)

令 $t=\sin^2 x$，则 $\mathrm{d}t=2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan t+C=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$$

(6)

令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{2t^2+1}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2t^2+1}\right)\mathrm{d}t=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C$$

(7)

令 $t=\cos(x+\frac{\pi}{4})$，则 $x=\arccos t-\frac{\pi}{4}$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2(\sin x+\cos x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\sin x+\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{1-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C\end{aligned}$$

(8)

令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(t^2+1)^3}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int \left(t^4+3t^2+3+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{1}{3}\tan^3 x+3-\frac{1}{\tan x}+C$$

(9)

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \frac{t^2+1}{t^3}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{8\tan^2\frac{x}{2}}+C$$

(10)

令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$。

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a^2+b^2}\int \left(\frac{a^2}{at+b}-\frac{at-b}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}\ln(at+b)-\frac{a}{2(a^2+b^2)}\ln(t^2+1)+\frac{b}{a^2+b^2}\arctan t+C \\ &= \frac{a}{a^2+b^2}\ln(a\tan x+b)-\frac{a}{2(a^2+b^2)}\ln(\tan^2 x+1)+\frac{b}{a^2+b^2}x+C\end{aligned}$$

Chapter 5

单变量函数的积分学

5.1 积分

1

(1)

$f(x) \in C[0,1] \Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积。

(2)

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 无界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积。

(3)

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积。事实上

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

注 55. 这说明无穷多个间断点不意味着不可积。事实上，函数 *Riemann* 可积当且仅当函数有界且几乎处处连续，即间断点集是**零测集**（可以被总长度任意小的一些区间覆盖住）。另外，结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

需要用 *B2* 的 ***Fourier* 级数**相关知识才能证明。

2

证明. 假设 $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $[0,1]$，可积，则对于任意分割

$$\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

对于 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

当

$$\max_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}| \to 0$$

时，若取 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \cap \mathbb{Q}, \forall 1 \le i \le n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1$$

若取 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \backslash \mathbb{Q}, \forall 1 \le i \le n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

因此该 Riemann 和的极限不存在，即 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 不可积。 □

3

$f(x) = 2D(x) - 1$ 在 $[0,1]$ 不可积，但 $|f(x)| = 1$ 在 $[0,1]$ 可积，积分值为 1。

4

(1)

证明. 由题，对 $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$，$\exists \delta \in (0, \min\{c-a, b-c\})$，当 $|x-c| < \delta$ 时，$f(x) > f(c) - \varepsilon = \frac{f(c)}{2}$。结合 $f(x) \ge 0$，知

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x \ge f(c)\delta > 0$$

□

(2)

证明. 这是 (1) 的平凡推论。 □

(3)

函数

$$f(x) = \chi_{\{\frac{a+b}{2}\}} = \begin{cases} 1, & x = \frac{a+b}{2} \\ 0, & x \ne \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

满足要求。

5

证明. 由题，$f(a) \le f(x) \le f(b)$，于是

$$f(a)(b-a) = \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(b)\,\mathrm{d}x = f(b)(b-a)$$

若把“单调递增”改为“单调递减”，则结论改为

$$f(a)(b-a) \ge \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge f(b)(b-a)$$

□

6

(1)

注意到

$$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}|\sin(x+\theta)| \le \sqrt{a^2+b^2}$$

因此

$$\int_0^{2\pi} |a\cos x + b\sin x|\,\mathrm{d}x \le \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

(2)

令 $f(x) = x^m(1-x)^n$，则

$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(m-(m+n)x\right)$$

因此

$$f(x) \le f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

进而

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

7

(1)

若 ξ 可以取在边界，则不妨设 ξ 可取为 a，即

$$f(a)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

假设不存在 $\zeta \in (a,b)$，使得 $f(\zeta) = f(a)$，则 $f(x) - f(a)$ 在 (a,b) 上恒正或恒负，由**第 4 题**知积分不为 0。因此

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f(a)(b-a) = \int_a^b (f(x)-f(a))\,\mathrm{d}x \ne 0$$

矛盾！因此 ζ 一定可以取在内部。

(2)

考虑定义在 $[-1,1]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

但是不存在 $\xi\in[-1,1]$，使得 $f(\xi)=0$，因此积分中值定理不成立。

8

证明. 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 无零点，则 $f(x)$ 在 (a,b) 恒正或恒负，否则与连续函数介值原理矛盾。结合**第 4 题**结论，$f(x)$ 在 (a,b) 上的积分不为 0，矛盾！ □

9

(1)

证明. 不妨设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 非负可积，且积分值不为 0。否则由 $f(x)$ 的有界性知

$$0\le\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\le\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\int_a^b|g(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

即结论成立且 ξ 可以任取。

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则

$$\begin{aligned}
&m\le f(x)\le M\\
\Longrightarrow & mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)\\
\Longrightarrow & m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\
\Longrightarrow & m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\
\Longrightarrow & m\le\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}\le M
\end{aligned}$$

由连续函数介值原理，存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{-1}$$

即

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

□

(2)

证明. 取 $f(x)=g(x)=x$，$[a,b]=[-1,1]$ 则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\neq 0=f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$$

此时结论不成立。 □

注 56. 本题的结论是积分第一中值定理的一个更常用形式。

10

证明. 考虑函数

$$\chi_{\{c\}}(x)=\begin{cases}1, & x=c\\ 0, & x\neq c\end{cases}$$

它在 $x=c$ 处不连续，但

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,\ \forall x$$

此时 $f(x)$ 在 $x=c$ 处不连续，但其变上限积分在 $x=c$ 可导。 □

11

(1)

$$f'(x)=2x\sin x^4$$

(2)

$$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2+\cos^2 x}$$

(3)

$$f'(x)=2xe^{-x^4}-e^{-x^2}$$

(4)

$$f'(x)=\sin\left(\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)\cos\left(\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)$$

12

(1)

$$f'(x) = 1 + \sin(\sin x) \Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0) = 1$$

(2)

$$f'(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow f'(1) = \frac{1}{e} \Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0) = e$$

注 57. 一定要注意，反函数的导数在 0 处的取值，是在 $y = 0$ 而非 $x = 0$ 处取值。

13

$$F'(x) = \left(x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)$$

14

证明. 由 $f(x)$ 连续知 $G(x)$ 可导，于是

$$G'(x) = \frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} = \frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2} \geq 0$$

即 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增。 □

15

(1)

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = (-\cos x)|_0^\pi = 2$$

(2)

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

(3)

$$\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

(4)

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2+3x-2}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{2}{5(2x-1)} - \frac{1}{5(x+2)}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{5}\ln(2x-1) - \frac{1}{5}\ln(x+2)\right)\Big|_2^3 = \frac{2\ln 2 - \ln 3}{5}$$

16

直接计算可得

$$F(x) = \begin{cases} -x-1, & -1 \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

它在 $[-1,0)\cup(0,1]$ 上可微，在 $x=0$ 处不可微。

17

(1)

注意到两条曲线相交于 $x=0$ 和 $x=1$ 处，因此

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

(2)

根据对称性

$$S = 2\int_0^1 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

18

(1)

对 $\sin t^3$ 进行 Taylor 展开

$$\sin t^3 = t^3 + o(t^3)$$

由 **7.3 节结论**，Taylor 级数在 $[-|x|,|x|]$ 一致收敛，可以逐项积分，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^3\,\mathrm{d}t}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (t^3 + o(t^3))\,\mathrm{d}t}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{4}$$

注 58. 本题也可以用 *L'Hospital* 法则快速得到结论。

(2)

由 L'hospital 法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\arcsin\tan^2 x}{3x^2\cos^2 x}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\arcsin\tan^2 x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{3x\cos^2 x\sqrt{1-\tan^4 x}}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$$

注 59. 由积分的定义式（*Riemann* 和）将以上两问中的极限化为积分。

19

(1)

注意到 $e^{-nx^2}\le e^{-na^2}$，所以

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\right| \le (b-a)\lim_{n\to\infty}e^{-na^2} = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2} = 0$$

(2)

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \le \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$$

注 60. 不能直接使用积分第一中值定理，这是因为 ξ 与 n 有关，最后可能趋向 0。

(3)

由积分第一中值定理，存在 $\xi_n \in (n, n+a)$，使得

$$\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = a\frac{\sin \xi_n}{\xi_n}$$

注意到 $n \to \infty$ 时 $\xi_n \to +\infty$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = a\lim_{n\to\infty}\frac{\sin \xi_n}{\xi_n} = 0$$

20

(1)

证明.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} -f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

□

(2)

证明.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

21

证明. 直接计算得

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_T^{a+T} f(t-T)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

□

22

(1)

$$\int_0^{2\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 4$$

(2)

$$\int_{-3}^{4}[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{j=-3}^{3}\int_{j}^{j+1}[x]\,\mathrm{d}x=\sum_{j=-3}^{3}j\,\mathrm{d}x=0$$

(3)

由

$$\left|\int_0^1\cos x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x\right|\leq-\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=\left.((1-x)\ln(1-x)+x)\right|_0^1=1<+\infty$$

知该积分收敛，于是由奇函数性质

$$\int_{-1}^{1}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{0}\cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\,\mathrm{d}x=0$$

(4)

令 $t=-x$，注意到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^x+1}\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^{-t}+1}\cos^3 t\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^t}{e^t+1}\cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^x+1}\cos^3 x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{e^x+1}\cos^3 x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{e^x+1}\cos^3 x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(5)

令 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$，则 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(6)

令 $x=\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x&=\left.\frac{1}{2}x^2\arcsin x\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3e^x\,\mathrm{d}x &= x^3e^x|_0^1 - 3\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x\\ &= e-3\left(x^2e^x|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -2e+6\left(xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= 6-2e\end{aligned}$$

(8)

令 $x = a\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$$

再令 $t = \tan\theta$，则 $\theta = \arctan t$，进而 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\left(2\ln(t+1) - \ln(t^2+1) + 2\arctan t\right)\Big|_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{2t}{t^2+1}\right) + 2\arctan t\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(9)

令 $t = \sqrt{\tan x}$，则 $x = \arctan t^2$，进而 $\mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t$$

分别令 $u = t+\frac{1}{t}, v = t-\frac{1}{t}$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int_{+\infty}^2 \frac{1}{u^2-2}\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{v^2+2}\,\mathrm{d}v\\ &= -\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_2^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^0\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(10)

令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x+b^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2t^2+b^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{ab}\arctan\frac{at}{b}\bigg|_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{2ab}\end{aligned}$$

(11)

令 $x=-\cos\theta$，则 $\mathrm{d}x=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\cos^4\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{3\pi}{8}-\frac{5\pi}{16}=\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

(12)

$$\int_0^{2\pi}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\,\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{8}$$

(13)

令 $t=e^x$，则 $x=\ln t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$。再令 $s=t^2$，于是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{|x|}\arctan e^x\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} e^{-x}\arctan e^x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 e^x\arctan e^x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t^2}\arctan t\,\mathrm{d}t+\int_1^e\arctan t\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{t}\arctan t\bigg|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t+t\arctan t|_1^e-\int_1^e\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{2}(e-1)+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\bigg|_1^e\\ &= \frac{\pi}{2}(e-1)-\frac{1}{2}\ln(e^2+1)+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s}{s+1}\right)\bigg|_{\frac{1}{e^2}}^{1}\\ &= \frac{\pi}{2}(e-1)\end{aligned}$$

(14)

令 $t=\tan x$，则 $\mathrm{d}t=\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

23

证明. 取 $x=\pi-t$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x &= -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f\left(\sin(\pi-t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}(\pi-t)f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t\\ &= \pi\int_0^{\pi} f\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t\\ &= \pi\int_0^{\pi} f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

结合 $\sin x$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，移项知原式成立。

记 $f(x)=\frac{1}{2-x^2}$，并令 $t=-\cos x$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

24

对 $\sin x^2$ 在 $x=0$ 处 Taylor 展开，得到

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{6}+\frac{\cos\theta}{120}x^{10}$$

其中 $\theta\in(0,x)$。

于是对 $x\in[0,1]$，有

$$x^2-\frac{x^6}{6}\leq\sin x^2\leq x^2$$

这里等号只能在 $x=0$ 取到，因此积分可得

$$\frac{1}{6}<\frac{13}{42}=\int_0^1\left(x^2-\frac{x^6}{6}\right)\mathrm{d}x<\int_0^1\sin x^2\,\mathrm{d}x<\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

25

(1)

对于 $f(x) = x$

区间	最大值	最小值	平均值
$[0,1]$	1	0	$\frac{1}{2}$
$[0,10^5]$	10^5	0	5×10^4

(2)

对于 $f(x) = e^{-x}$

区间	最大值	最小值	平均值
$[0,1]$	1	$\frac{1}{e}$	$1-\frac{1}{e}$
$[0,10^5]$	1	e^{-10^5}	$\frac{1-e^{-10^5}}{10^5}$

(3)

对于 $f(x) = xe^{-x}$

区间	最大值	最小值	平均值
$[0,1]$	$\frac{1}{e}$	0	$1-\frac{2}{e}$
$[0,10^5]$	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{e^{10^5}-(10^5+1)}{10^5 e^{10^5}}$

26

(1)

由于 $x \in [0,100]$ 时 $\frac{1}{x+100} \in [\frac{1}{200}, \frac{1}{100}]$，我们有

$$\frac{1-e^{-100}}{200} = \frac{1}{200}\int_0^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{100}\int_0^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e^{-100}}{100} < \frac{1}{100}$$

(2)

由积分第一中值定理，存在 $\xi \in (0,100)$，使得

$$\begin{aligned}
\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-100}}{200} + \frac{1}{100} - \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{(x+100)^2} \\
&= \frac{2-e^{-100}}{200} - \frac{1}{(\xi+100)^2}\int_0^{100} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2-e^{-100}}{200} - \frac{1-e^{-100}}{(\xi+100)^2} \in (0.0099, 0.009975)
\end{aligned}$$

27

(1)

证明.
$$\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t \ge \alpha\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$
□

(2)

证明. 考虑 $[0,1]$ 的分割
$$\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$
其中 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$，则
$$\pi' : 0 = \alpha x_0 < \alpha x_1 < \cdots < \alpha x_n = \alpha$$
是 $[0,\alpha]$ 的分割。

因此
$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\|\pi'\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\alpha\xi_i)(\alpha x_i - \alpha x_{i-1})\\ &= \alpha\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\alpha\xi_i)(x_i - x_{i-1})\\ &\ge \alpha\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\\ &= \alpha\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
□

注 61. 这说明了 *Riemann* 积分换元不需要被积函数连续，只是教材上没有提到。也就是说，*(2)* 完全可以用 *(1)* 的方法做。

28

(1)

证明. 由积分第一中值定理知
$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le (x-a)\max_{t\in[a,x]}|f'(t)| = M(x-a)$$
因此
$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le M\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(b-a)^2$$
□

(2)

证明. 由 (1) 的结论知

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2 + \frac{M}{2}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{M}{4}(b-a)^2$$

□

29

证明. 由 $u=\sin x$ 知 $x=\arcsin u$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$，带回得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}$$

□

30

证明. 由 $f(x)$ 的光滑性，我们有

$$\begin{aligned}
f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t &= \left(f'(t)(t-x)\right)\Big|_{t=a}^{x} - (t-x)\int_a^x f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -f'(a)(a-x) - (t-x)\int_a^x f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x (t-x)f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f'(a)(x-a) - \left(\frac{1}{2}f''(t)(t-x)^2\right)\Bigg|_{t=a}^{x} + \frac{1}{2}(t-x)^2\int_a^x f''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x (t-x)^2 f'''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x (t-x)^n f^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

31

证明.

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= \int_0^x (f(t+y)-f(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x f(t+y)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_y^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^y f(t+x)\,\mathrm{d}t - \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^y (f(t+x)-f(t))\,\mathrm{d}t = g(y,x)
\end{aligned}
$$

□

注 62. 某种意义下的积分换序。

5.2 函数的可积性

1

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n (x_i-x_{i-1}) = 1 \\
\underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n 0\cdot(x_i-x_{i-1}) = 0
\end{aligned}
$$

2

Darboux 上和是给定分割下，能盖住线下面积的最小 Riemann 和；Darboux 下和是给定分割下，能被线下面积盖住的最大 Riemann 和。

3

证明.

$$
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \lim_{\|\pi\|\to 0}\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right| \le \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|(x_i-x_{i-1}) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x
$$

□

4

证明. 设 ξ_i 和 ζ_i 分别满足

$$f(\xi_i) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad f(\zeta_i) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

由 $f(x)$ 的非负性知

$$\begin{aligned}\overline{S} - \underline{S} &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{f(\zeta_i)} - \frac{1}{f(\xi_i)}\right)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i) - f(\zeta_i)}{f(\xi_i)f(\zeta_i)}(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{c^2} \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(\zeta_i)\right)(x_i - x_{i-1}) \to 0\end{aligned}$$

□

注 63. 若仅假设 $f(x)$ 非负，无法得到该结论。

5.3 积分的应用

1

(1)

根据

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

可令 $x = \frac{1}{2}\tan\theta$，此时 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\arctan 2a}^{\arctan 2a} \frac{1}{2\cos^3\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\arctan 2a}^{\arctan 2a} \frac{\cos\theta}{2(1-\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\sin\arctan 2a}^{\sin\arctan 2a} \frac{\cos\theta}{2(1-\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\ln\left(2a + \sqrt{1+4a^2}\right) + a\sqrt{1+4a^2}\end{aligned}$$

(2)

根据

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x &= -3a\sin t\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= 3a\cos t\sin^2 t\,\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = 3a|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t$$

我们有

$$L = 3a\int_0^{2\pi} |\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t = 6a$$

(3)

根据

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = a\sqrt{\theta^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta$$

可令 $\theta = \tan t$，此时 $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}t$

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = a\int_0^{\arctan 2\pi} \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a\left(\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right) + 2\pi\sqrt{1+4\pi^2}\right)$$

2

(1)

由对称性

$$S = a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2$$

(2)

$$S = \int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\mathrm{d}t = 3\pi$$

(3)

$$S = \int_0^1 e^x - e^{-x}\,\mathrm{d}x = e + \frac{1}{e} - 2$$

3

(1)

绕 x 轴旋转一周时

$$V_x = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$$

绕 y 轴旋转一周时

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = -2\pi x\cos x|_0^{\pi} + 2\pi\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x = 2\pi^2$$

(2)

$$V = 2\pi\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi(e-1)$$

(3)

根据

$$\mathrm{d}x = (1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$$

我们有

$$V = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\,\mathrm{d}t = 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 16\pi \int_0^{\pi} \sin^6 t\,\mathrm{d}t = 5\pi^2$$

4

证明. 考虑

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},\ x \in [-R, -R + h]$$

于是

$$V = \pi \int_{-R}^{-R+h} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$

□

5

(1)

只取 $y \geq 0$ 的部分，其参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos\theta \\ y(\theta) = r\sin\theta \end{cases}$$

其中 $\theta \in [0, \pi]$。于是

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \sqrt{(-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\pi r^2$$

(2)

只取 $x \geq 0$ 的部分，其参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases}$$

其中 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。于是

$$S = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2\theta + b^2}\,\mathrm{d}\theta$$

令 $t=\sin\theta$，则

$$\begin{aligned}S&=2\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\theta+b^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=2\pi a\int_{-1}^{1}\sqrt{(a^2-b^2)t^2+b^2}\,\mathrm{d}t\\&=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\end{aligned}$$

(3)

令 $t=\sinh x$，则

$$\begin{aligned}S&=2\pi a\int_0^a\cosh x\sqrt{1+a^2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x=2\pi a\int_0^{\sinh a}\sqrt{1+a^2t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\pi a\sinh a\sqrt{a^2\sinh^2 a+1}+\pi\arcsin\left(a\sinh a\right)\end{aligned}$$

(4)

令 $t=1+\cos\theta$，则 $\mathrm{d}t=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$S=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta(1+\cos\theta)\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^2 t\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{32\pi a^2}{5}$$

5.4 广义积分

1

(1)

收敛。

事实上，令 $t=x^2$，则

$$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

(2)

发散。

这是因为数列

$$I_n=\int_0^{n\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$$

满足

$$|I_{n+1}-I_n|=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x\right|=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}x|\sin x|\,\mathrm{d}x\geq n\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=2n\pi$$

这说明 $\{I_n\}$ 不是 Cauchy 列，从而不收敛，因此极限

$$\int_0^{+\infty} x\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,\mathrm{d}x$$

不存在。

(3)

发散。

这是因为

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^e\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int_2^e\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_e^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

(4)

发散。

这是因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

(5)

收敛。

事实上

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x &= -e^{-x}\cos x|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= 1 - e^{-x}\sin x|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

(6)

收敛。

事实上

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

(7)

收敛。

事实上

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$$

(8)

收敛。

事实上

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x|_{-1}^{1} = \pi$$

(9)

收敛。

事实上，令 $t = x^2$，则

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

再令 $s = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$，此时 $t = 1 - \frac{1}{s^2}$，且 $\mathrm{d}s = \frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} (\ln(s+1)+\ln(s-1)-2\ln s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\left((s+1)\ln(s+1)+(s-1)\ln(s-1)-2s\ln s\right)|_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{s\to+\infty}\left(s\ln\left(1-\frac{1}{s^2}\right)+\ln\frac{s+1}{s-1}\right) \\
&- \frac{1}{2}\lim_{s\to 1^+}\left((s+1)\ln(s+1)+(s-1)\ln(s-1)-2s\ln s\right) \\
&= -\ln 2
\end{aligned}$$

注 64. 本题对积分和极限计算的熟练度要求很高。后面的极限可拆是因为算出来发现确实都收敛，如果担心“双发散”而不敢拆，计算难度会大大增加。毕竟，不拆开算算怎么知道呢？

(10)

收敛。

事实上

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \ln(1-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\
&= ((1-x)\ln(1-x)+x)|_0^1 - ((1+x)\ln(1+x)-x)|_0^1 \\
&= 2-2\ln 2
\end{aligned}$$

(11)

收敛。

事实上

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^n e^{-x}\big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

递推可得

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \cdots = n!\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$$

(12)

收敛。

事实上

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = x(\ln x)^n\big|_0^1 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

递推可得

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^n n!\int_0^1 \mathrm{d}x = (-1)^n n!$$

2

(1)

注意到 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数，于是

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

收敛。

(2)

注意到 $f(x)=\frac{|x|}{1+x^2}$ 是偶函数，于是

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$$

发散。

3

(1)

证明. 令 $t=\sqrt{x-1}$，则 $x=t^2+1$，进而 $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t\big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

另一方面

$$\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\arctan t\big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

因此

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \pi$$

□

(2)

证明. $\alpha \neq 1$ 时

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}x^{\alpha+1}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}$$

不难验证，无论 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < 1$，该积分值均为 $+\infty$，即发散。

$\alpha = 1$ 时

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \ln x\big|_0^{+\infty} = +\infty$$

同样发散。 □

4

(1)

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^4 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\ln 6$$

注意到该积分发散。

(2)

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\bigg|_{-1}^0 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\bigg|_0^1 = 0$$

5.5 第 5 章综合习题

1

(1)

证明.

$$\int_0^{2\pi} \sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)\,\mathrm{d}x = 0$$

□

(2)

证明.

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(m+n)x-\cos(m-n)x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

□

2

(1)

证明. 令 $t=1-x$，则

$$B(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=-\int_1^0(1-t)^m t^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^n(1-t)^m\,\mathrm{d}t=B(n,m)$$

□

(2)

证明. 分部积分得

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n}{m+1}B(m+1,n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}B(m+2,n-2)\\&=\cdots\\&=\frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}B(m+n,0)\\&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_0^1 x^{m+n}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\end{aligned}$$

□

3

(1)

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}&=\int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\\
&=xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

(2)

注意到

$$
\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x=(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x=(-1)^{k}x\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}+(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\cos x\,\mathrm{d}x=(2k-1)\pi
$$

因此

$$
\int_{0}^{n\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} x|\sin x|\,\mathrm{d}x=n^2\pi
$$

(3)

由题

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{x+2\pi}\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t=\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right)\Big|_{x}^{x+2\pi}=0
$$

故该变限积分是常数。由奇函数积分性质，取 $x=-\pi$，则

$$
\int_{x}^{x+2\pi}\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+e^{\sin t}-e^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t=2\pi
$$

因此

$$
f(x)=2\pi+\frac{1}{1+x}\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t
$$

两边对 x 积分，有

$$
\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=2\pi+\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t
$$

即

$$
\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{1-\ln 2}
$$

4

证明. 令 $t=\tan x$，则 $x=\arctan t$，进而 $\mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$
\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t
$$

注意到不等式

$$2t \leq 1 + t^2 \leq 2$$

两边的等号分别只能在 0 和 1 处取到。放缩可得

$$\frac{1}{2n} = \int_0^1 \frac{t^n}{2}\,\mathrm{d}t < \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \int_0^1 \frac{t^n}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n-2}$$

□

5

证明. 假设任意 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$，存在 $c \in [\alpha,\beta]$，使得 $f(c) \leq 0$，则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i \in [x_{i-1},x_i]} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0$$

矛盾！ □

6

(1)

证明. 考虑 $f(x)$ 的原函数

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

令 $s = -t$，则

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = -F_0(x)$$

即 $F_0(x)$ 是奇函数。 □

(2)

证明. $f(x)$ 的任一原函数可表示为

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$$

令 $s = -t$，则

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + C = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s + C = F(x)$$

即无论 C 的大小，$F(x)$ 均是偶函数。 □

7

证明. 考虑 $f(x) = \sin x + 2$，设 $F(x)$ 是它的一个原函数。则对任意 $x_1 < x_2$，都有

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(x_2 - x_1) > 0$$

即 $F(x)$ 是严格增函数，从而不是周期函数。 □

8

证明. 令 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，则对于 C^1 函数

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_n$$

我们有 $F(0) = F(1) = 0$。由 Rolle 中值定理，知 $f(x) = F'(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 有解。 □

9

证明. 假设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则由连续性知 $f(x)$ 恒正或恒负。则 $f(x)\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上恒正或恒负，矛盾！因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有零点 x_0。

假设 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有唯一零点 x_0，则不妨设 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上负，在 (x_0,π) 正。则直接计算可得

$$0 = \int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \cos x_0 \int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x - \sin x_0 \int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)\,\mathrm{d}x > 0$$

矛盾！因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少两个零点。 □

注 65. 别想着一下把两个零点都找出来，先找出一个，再利用剩余条件找另一个。

10

令 $t = xy$，则

$$F(x) = \int_0^1 f(xy)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

由 $f(x)$ 的连续性知 $F(x)$ 在 $x \neq 0$ 时可导。另一方面，由 L'hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x} = \frac{f'(0)}{2}$$

知 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。

综上

$$F'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}f(x), & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

11

(1)

$|x| < 1$ 时，由 $f(x)$ 的连续性知 $F(x)$ 可导。

$|x| > 1$ 时，由对称性，不妨设 $x > 1$，此时

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

可导。

$|x|=1$ 时，由对称性，只需考虑 $x=1$ 的情形。此时，由积分第一中值定理，存在 $\xi\in(1,x)$，使得

$$F'_+(1)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x-1}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to1+}f(\xi)=1$$

另一方面，同理可得

$$F'_-(1)=\lim_{x\to1-}f(\xi')=\frac{1}{e}\neq F'_+(1)$$

综上，$F(x)$ 的可导点集为 $\mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$。

(2)

证明. 分部积分可得

$$\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-t^2\sin\frac{1}{t}\bigg|_0^x+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

结合 L'hospital 法则，得到

$$\begin{aligned}
f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x}\\
&=0
\end{aligned}$$

□

12

证明. 由积分第一中值定理

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^b(f(x+h)-f(x))\,\mathrm{d}x&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{a+h}f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(f(\xi_b)h-f(\xi_a)h\right)\\
&=\lim_{h\to0}\left(f(\xi_b)-f(\xi_a)\right)\\
&=f(b)-f(a)
\end{aligned}$$

□

注 66. 极限和极限（包括但不限于一般极限、求导、积分）换序是一件极其不平凡的事（虽然物理上经常直接换），**实分析**的理论表明换序需要被积函数有一定较好的性质。当然，换序理论是助力而非阻碍，一些问题做不出来时，可能一换序就很快解决了。

13

证明. $\lambda \to \infty$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| &= \left|-\frac{\cos\lambda x}{\lambda}f(x)\Big|_{x=a}^{b} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\frac{f(a)\cos\lambda a - f(b)\cos\lambda b}{\lambda}\right| + \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\right) \\ &\to 0\end{aligned}$$

□

注 67. 该结论称为 ***Riemann-Lebesgue*** **引理**，可以直观理解为“振得够快，就可以把函数值中和掉”。

14

证明. 由 $|\sin x|$ 的周期性，对于满足 $n\pi \le x < n+1\pi$ 的 x，我们有

$$2n = n\int_0^{\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi}|\sin x| \le \int_0^{x}|\sin x|\,\mathrm{d}x \le \int_0^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x = 2(n+1)$$

□

因此

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{1}{x}\int_0^x|\sin x|\,\mathrm{d}x \le \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

$x \to +\infty$ 时 $n \to \infty$，由夹逼准则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

15

证明. 结合 $\sin x \le 1$ 知，$\forall\, 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$$

对于这个 ε，注意到

$$\sin x \le \sin\frac{\pi-\varepsilon}{2} < 1,\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right]$$

因此存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，

$$\sin^n x \le \sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{\pi},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right]$$

综上，$\forall 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，$\exists N>0$，$n>N$ 时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

结合该积分的非负性和 ε 的任意性，知

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x = 0$$

□

注 68. 将积分分为“好 + 小”两部分，用不同的技巧分别处理。事实上，本题可以用实分析中的**单调收敛定理**直接换序瞬间得证。

16

证明. 由 $f(x)$ 的连续性，设 $f(x_0)=M$，$\forall \varepsilon>0, \exists 0<\delta<1$，$x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时，恒有

$$f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$$

因此

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{\max\{a,x_0-\delta\}}^{\min\{b,x_0+\delta\}} f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\delta\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \delta^{\frac{1}{n}}\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

注意到对于上述 $\varepsilon>0$，可取 n 充分大，使得

$$\delta^{\frac{1}{n}} > \frac{M-\varepsilon}{M-\frac{\varepsilon}{2}}$$

此时

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq M-\varepsilon \to M$$

另一方面，

$$\left(\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = (b-a)^{\frac{1}{n}}M \to M$$

由夹逼准则知极限为 M。 □

注 69. 如果将左式的 $f(x)$ 加上绝对值号，积分改为 *Lebesgue* 积分，则它称为 $f(x)$ 的 $\mathbf{L^n}$ **范数**（习惯上一般将 n 改为 p）；右边则是 $f(x)$ 的 $\mathbf{L^\infty}$ **范数**，即 $|f(x)|$ 的**本性上确界**（除去一个零测集后的最大值）。范数是距离的推广，函数的范数描述了它与零函数 $g(x)=0$ 的“距离”。本题结论即是：L^p 范数的极限是 L^∞ 范数。

17

(1)

证明. 由 $f(x)$ 的非负单增性，一方面

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n)+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k)-f(x))\,\mathrm{d}x \le f(n)$$

另一方面

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k+1)-f(x))\,\mathrm{d}x \ge 0$$

□

(2)

证明. 由 $f(x)$ 的非负单减性，一方面

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x &= f(1)+\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k+1)-f(x))\,\mathrm{d}x \le f(1)\end{aligned}$$

另一方面

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}(f(k)-f(x))\,\mathrm{d}x \ge 0$$

此时，记

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_{1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

则

$$a_{n+1}-a_n = f(n+1)-\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le 0$$

于是 $\{a_n\}$ 单减且有下界 0，因此极限存在。结合保号性，知极限 α 满足

$$0 \le \alpha \le f(1)$$

□

18

证明. 如果

$$\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

则 $g(x)$ 恒为 0，原不等式显然成立。

下设 $g(x)$ 不恒为 0，注意到

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(f^2(x)-\lambda f(x)g(x)+\lambda^2 g^2(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \lambda^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

这是一个关于 λ 的二次函数，判别式非正，即

$$\begin{aligned}
&\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \le 0 \\
&\Longrightarrow \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}$$

不难看出，等号成立当且仅当 $g(x)=0$ 或 $f(x)=\lambda g(x)$ □

19

证明. 由积分第一中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

应用微积分基本定理，我们有

$$|f(a)| = \left|f(\xi)+\int_\xi^a f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\xi^a f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

□

20

证明. 由**第三章综合习题 6.14(3)** 知

$$x-\frac{x^3}{6} < \sin x < x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\ \forall\, x\in(0,1)$$

于是放缩可得

$$0.944 < \frac{17}{18} = \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\mathrm{d}x = \frac{1703}{1800} < 0.947$$

□

21

证明. 由 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^{k} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^{k}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^{k}|f'(\xi_k)|\left(\frac{k-x}{n}\right)\mathrm{d}x \\ &\le \frac{M}{n}\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{M}{2n}\end{aligned}$$

□

22

证明. 由 $f(x)>0$ 知，$g(x)=\sqrt{2f(x)}>0$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微，且

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)}}=\left(\frac{(f'(x))^2}{2f(x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此，我们只需证 $g'(x)<1$。

由条件

$$|f'(x)-f'(y)|\le|x-y|$$

知 $f(x)$ 连续可导，进而 $g(x)$ 连续可导。

假设结论不成立，则存在 x_0 使得 $|g'(x_0)|\ge1$，不妨设 $g'(x_0)\ge1$。取 $y<x_0$，则

$$x_0-y\ge g(x_0)g'(x_0)-g(y)g'(y)\ge g(x_0)-g(y)g'(y)$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}(x_0-x)^2=\int_x^{x_0}(x_0-y)\,\mathrm{d}y\ge\int_x^{x_0}(g(x_0)-g(y)g'(y))\,\mathrm{d}y=g(x_0)(x_0-x)-\frac{1}{2}g^2(x_0)+\frac{1}{2}g^2(x)$$

整理得

$$g^2(x)\le(g(x_0)+x-x_0)^2$$

结合 $g(x)>0$ 知

$$g(x)\le|g(x_0)+x-x_0|$$

由 $g(x_0)>0$，可取 $x=x_0-g(x_0)<x_0$，则

$$g\left(x_0-g(x_0)\right)=0$$

矛盾！ □

注 70. 本题极其困难，需要很硬的分析功底，建议选择性跳过。另有一种应用微积分基本定理和二次函数的判别式的解法，但思路很不自然。

Chapter 6

常微分方程初步

6.1 一阶微分方程

1

(1)

注意到 $y = 0$ 是一个特解。
$y \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow &\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
\Longrightarrow &\ln|y| = \arctan x + C \\
\Longrightarrow &y = C_1 e^{\arctan x},\ C_1 \neq 0
\end{aligned}$$

综上，方程的解为

$$y = Ce^{\arctan x}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&y' = e^{x-y} \\
\Longrightarrow &e^y\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow &e^y = e^x + C \\
\Longrightarrow &y = \ln(e^x + C)
\end{aligned}$$

(3)

注意到 $y = 0, 1$ 是两个特解。

$y \neq 0,1$ 时

$$\begin{aligned}
& xy' + y = y^2 \\
\Longrightarrow & \frac{1}{y(y-1)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow & \ln\left|1-\frac{1}{y}\right| = \ln|x| + C \\
\Longrightarrow & \left|1-\frac{1}{y}\right| = C|x|, C_1 > 0
\end{aligned}$$

综上，方程的解有

$$y = \frac{1}{1-Cx} \qquad y = 0$$

(4)

由题，$y \neq 0$，于是

$$\begin{aligned}
& yy' = \frac{1-2x}{y} \\
\Longrightarrow & y^2\,\mathrm{d}y = (1-2x)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow & \frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + C \\
\Longrightarrow & y = \sqrt[3]{3x-3x^2+C}
\end{aligned}$$

2

(1)

令 $z = \frac{y}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z$$

于是 $z \neq -1,2$ 时

$$\begin{aligned}
& y' = \frac{y^2}{x^2} - 2 \\
\Longrightarrow & x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = z^2 - 2 \\
\Longrightarrow & \frac{1}{(z+1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\Longrightarrow & \frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = \ln|x| + C \\
\Longrightarrow & \left|\frac{y-2x}{y+x}\right| = C_1|x|^3,\ C_1 > 0 \\
\Longrightarrow & \frac{y-2x}{y+x} = Cx^3,\ C \neq 0
\end{aligned}$$

另一方面，不难验证 $z = -1,2$ 是方程的特解。

综上，方程的解有

$$y = \frac{3x}{1-Cx^3} - x \qquad y = 2x$$

(2)

令 $z=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z$$

于是

$$\begin{aligned}
&y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\\
\Longrightarrow &x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=z+\frac{1}{z}\\
\Longrightarrow &z\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow &\frac{1}{2}z^2=\ln|x|+C\\
\Longrightarrow &y^2=2x^2\ln|x|+Cx^2
\end{aligned}$$

(3)

由题，$y\neq 0$。令 $z=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z$$

注意到 $z=0$ 不是解，而 $z=1$ 和 $z=2$ 为特解。于是 $z\neq 0,1,2$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}\\
\Longrightarrow &x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=\frac{2z^2-z}{z^2-z+1}\\
\Longrightarrow &x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{-z^3+3z^2-2z}{z^2-z+1}\\
\Longrightarrow &-\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{z^2-z+1}{z(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{2z}-\frac{1}{z-1}+\frac{3}{2(z-2)}\right)\mathrm{d}z\\
\Longrightarrow &-\ln|x|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z(z-2)^3}{(z-1)^2}\right|+C\\
\Longrightarrow &\frac{1}{x^2}=C\frac{z(z-2)^3}{(z-1)^2},\ C\neq 0\\
\Longrightarrow &(y-x)^2=Cy(y-2x)^3,\ C\neq 0
\end{aligned}$$

综上，方程的解有

$$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3\qquad y=2x$$

(4)

注意到 $y=0$ 是方程的特解。

若 $y\neq 0$，令 $z=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z$$

于是

$$
\begin{aligned}
&(x^2+3y^2)\,\mathrm{d}x-2xy\,\mathrm{d}y=0\\
\Longrightarrow & x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=\frac{1+3z^2}{2z}\\
\Longrightarrow & \frac{2z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow & \ln(z^2+1)=\ln|x|+C\\
\Longrightarrow & y^2=Cx^3-x^2,\ C\neq 0
\end{aligned}
$$

3

对于方程组

$$
\begin{cases}
a_1x+b_1y+c_1=0\\
a_2x+b_2y+c_2=0
\end{cases}
$$

若它有非零解 (x_0,y_0)，则令 $u=x-x_0, v=y-y_0$，带入原方程得

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)
$$

这是一个齐次方程。

若它只有零解，则 $c_1=c_2=0$，此时自然变为齐次方程。

若它无解，则

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0
$$

此时可不妨设 $a_2\neq 0$，则令 $z=a_2x+b_2y$，此时

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2f\left(\frac{a_1z+a_2c_1}{a_2z+a_2c_2}\right)
$$

这是一个可分离变量方程。

(1)

此时，方程组有非零解 $(x_0,y_0)=(-2,-1)$，利用上述方法解得

$$
\arctan\frac{y+1}{x+2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{(y+1)^2}{(x+2)^2}\right)=\ln|x+2|+C
$$

(2)

此时方程无解，利用上述方法解得

$$
5x+10y+7=Ce^{5y-10x}
$$

4

(1)

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2\\
\Longrightarrow &y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2\\
\Longrightarrow &y=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}\left(\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
\Longrightarrow &y=(x^2+1)(x+C)
\end{aligned}
$$

(2)

直接积分得

$$y=3x-\ln x+C$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&y'=\frac{y}{x+y^3}\\
\Longrightarrow &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{x}{y}=y^2\\
\Longrightarrow &x=e^{\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(\int y^2e^{-\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right)\\
\Longrightarrow &x=\frac{1}{2}y^3+C|y|
\end{aligned}
$$

(4)

注意到 $y=0$ 是一个特解。
$y\neq 0$ 时，令 $z=\frac{1}{y}$，则

$$
\begin{aligned}
&y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x\\
\Longrightarrow &z'-\frac{z}{x}=-\ln x\\
\Longrightarrow &z=e^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(-\int\ln x\,e^{-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\
\Longrightarrow &z=x\left(-\frac{\ln^2 x}{2}+C\right)\\
\Longrightarrow &y=-\frac{2}{x(\ln^2 x+C)}
\end{aligned}
$$

(5)

注意到 $y=0$ 是一个特解。
$y\neq 0$ 时，令 $z=\frac{1}{y}$，则

$$
\begin{aligned}
&y' = y\tan x + y^2\cos x\\
\Longrightarrow & z' + z\tan x = -\cos x\\
\Longrightarrow & z = e^{-\int \tan x\,\mathrm{d}x}\left(-\int \cos x\, e^{\int \tan x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)\\
\Longrightarrow & z = |\cos x|\left(-\frac{x\cos x}{|\cos x|} + C\right)\\
\Longrightarrow & y = \frac{1}{C|\cos x| - x\cos x}
\end{aligned}
$$

(6)

注意到 $y=0$ 是一个特解。
$y\neq 0$ 时，令 $z=\frac{1}{y}$，则

$$
\begin{aligned}
&y - y'\cos x = y^2(1-\sin x)\cos x\\
\Longrightarrow & z' + \frac{z}{\cos x} = 1-\sin x\\
\Longrightarrow & z = e^{-\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x}\left(\int (1-\sin x)e^{\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)\\
\Longrightarrow & z = \frac{|\cos x|}{1+\sin x}\left(\frac{\sin x\cos x}{|\cos x|} + C\right) = \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x} + \frac{C|\cos x|}{1+\sin x}\\
\Longrightarrow & y = \frac{1+\sin x}{\sin x\cos x + C|\cos x|}
\end{aligned}
$$

5

(1)

令 $z=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z$$

于是

$$
\begin{aligned}
&y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\\
\Longrightarrow & x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = z\ln z\\
\Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}z}{z\ln z - z} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow & \ln(\ln z - 1) = \ln|x| + C\\
\Longrightarrow & \ln z = Cx + 1,\ C\neq 0\\
\Longrightarrow & y = xe^{Cx+1},\ C\neq 0
\end{aligned}
$$

带入初值 $y(1)=1$ 得 $C=-1$，于是初值问题的解为

$$y = xe^{1-x}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x} \\
\Longrightarrow & y = e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) \\
\Longrightarrow & y = \frac{1}{x}\left(\int \sin x\,\mathrm{d}x + C\right) \\
\Longrightarrow & y = \frac{-\cos x + C}{x}
\end{aligned}$$

带入初值 $y(\pi)=1$ 得 $C=\pi-1$，于是初值问题的解为

$$y = \frac{-\cos x + \pi - 1}{x}$$

6

(1)

令 $t=\sqrt{x^2+y}$，则

$$t^2 = x^2 + y \Longrightarrow 2t\,\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y \Longrightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - 2x$$

不难得到 $t \neq 0$，于是

$$\begin{aligned}
& y' + x = \sqrt{x^2+y} \\
\Longrightarrow & 2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - x = t \\
\Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{t}
\end{aligned}$$

再令 $z=\frac{t}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y}}{x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z$$

注意到 $z \neq 0$，且不难验证 $z = -\frac{1}{2}$ 和 $z = 1$ 是两特解。$z \neq -\frac{1}{2}, 1$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{t} \\
\Longrightarrow & x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{z} \\
\Longrightarrow & x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2 + z - 2z^2}{2z} \\
\Longrightarrow & -\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2z}{2z^2 - z - 1}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z \\
\Longrightarrow & -\ln|x| + C = \frac{2}{3}\ln|2z+1| + \frac{2}{3}\ln|z-1| \\
\Longrightarrow & Cx^{-3} = C(2z+1)^2(z-1)^2,\ C \neq 0 \\
\Longrightarrow & Cx = (2\sqrt{x^2+y} + x)^2(\sqrt{x^2+y} - x)^2,\ C \neq 0
\end{aligned}$$

综上，方程的解为

$$Cx = (2\sqrt{x^2+y} + x)^2(\sqrt{x^2+y} - x)^2$$

(2)

令 $z = y - x$，

$$\begin{aligned}
& y' = \cos(x-y) \\
\Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 1 = \cos z \\
\Longrightarrow & -\frac{\mathrm{d}z}{2\sin^2\frac{z}{2}} = \mathrm{d}x \\
\Longrightarrow & \frac{1}{\tan\frac{z}{2}} = x + C \\
\Longrightarrow & z = 2\arctan\frac{1}{x+C} \\
\Longrightarrow & y = x - 2\arctan(x+C)
\end{aligned}$$

(3)

注意到 $y = 0$ 是通解。$y \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
& y' - e^{x-y} + e^x = 0 \\
\Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x(e^{-y} - 1) \\
\Longrightarrow & \frac{e^y}{1-e^y}\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow & -\ln|1-e^y| = e^x + C \\
\Longrightarrow & e^y = Ce^{-e^x} + 1,\ C \neq 0 \\
\Longrightarrow & y = \ln(Ce^{-e^x} + 1),\ C \neq 0
\end{aligned}$$

综上

$$y = \ln(Ce^{-e^x} + 1)$$

(4)

令 $z = -\cos y$，则 $\mathrm{d}z = \sin y\,\mathrm{d}y$，于是

$$\begin{aligned}
& y' \sin y + x\cos y + x = 0 \\
\Longrightarrow & z' - xz = -x \\
\Longrightarrow & z = e^{\int x\,\mathrm{d}x}\left(\int -xe^{\int -x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) \\
\Longrightarrow & z = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2} + C\right) \\
\Longrightarrow & -\cos y = 1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2} \\
\Longrightarrow & y = \pi - \arccos(1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2})
\end{aligned}$$

7

证明. 由于 Bernoulli 方程可以化为一阶线性方程，所以这里只需用常数变易法导出一阶线性方程的通解表达式。

考虑方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

若 $q(x) = 0$，直接移项积分，容易得到

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

对于 $q(x) \neq 0$ 的情形，设方程的通解为

$$y = C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

带回原方程得

$$C'(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + C(x)p(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x) \Longrightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

因此

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \Longrightarrow y = e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

□

8

设切点为 (u, v)，则切线方程为

$$y = v + y'|_{x=u}(x - u)$$

它过点 $(0,2v)$，代入得到

$$2v = v - uy'|_{x=u} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{v}{u} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}u}{u} = 0 \Longrightarrow uv = C$$

代入 $(u,v)=(2,3)$，知它们满足 $uv=6$，因此曲线的表达式为

$$xy = 6$$

9

由 $f(x)$ 连续知 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导，进而 $f(x)$ 可导。两边求导得

$$f'(x) = f(x) \Longrightarrow f(x) = Ce^x$$

带回原式得

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0) \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$$

10

由题，$x(t)$ 满足方程

$$x' = -kx \Longrightarrow x = Ce^{-kt}$$

带入 $x(0)=a$，得到

$$x(t) = ae^{-kt}$$

11

(1)

由题

$$v' = -kv \Longrightarrow v = Ce^{-kt}$$

代入 $(0,\frac{25}{9})$ 和 $(20,\frac{5}{3})$，解得

$$v = \frac{25}{9}e^{-\frac{1}{20}\ln(\frac{5}{3})t} = \frac{25}{9}\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{t}{20}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2-\frac{t}{20}}$$

最后令 $t=120$，则 $v=\frac{81}{625}m/s$。

(2)

由 (1) 知

$$x = \int_0^{60} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{392}{9\ln\frac{5}{3}}m$$

12

(1)

令 $z=y'$，注意到 $z=0$ 时 $y=C$ 是方程的解。$z\neq 0$ 时

$$
\begin{aligned}
& xy''=y' \\
\Longrightarrow & xz'=z \\
\Longrightarrow & \frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\Longrightarrow & \ln|z|=\ln|x|+C \\
\Longrightarrow & y'=z=C|x| \\
\Longrightarrow & y=\frac{1}{2}C_1|x|x+C_2
\end{aligned}
$$

综上方程的通解为

$$
y=C_1|x|x+C_2
$$

(2)

令 $z=y'$，则

$$
\begin{aligned}
& y''=\frac{y'}{x}+x \\
\Longrightarrow & z'-\frac{z}{x}=x \\
\Longrightarrow & z=e^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int xe^{-\int\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x+C\right) \\
\Longrightarrow & z=|x|(|x|+C) \\
\Longrightarrow & y'=x^2+C|x| \\
\Longrightarrow & y=\frac{1}{3}x^3+\frac{C_1}{2}|x|x+C_2
\end{aligned}
$$

(3)

取 $z=y'$，则

$$
\begin{aligned}
& y''=y'+x \\
\Longrightarrow & z'=z+x \\
\Longrightarrow & z=e^{\int\mathrm{d}x}\left(\int xe^{-\int\mathrm{d}x}+C\right) \\
\Longrightarrow & z=e^x\left(-e^{-x}(x+1)+C\right) \\
\Longrightarrow & y'=-(x+1)+Ce^x \\
\Longrightarrow & y=-\frac{1}{2}x^2-x+C_1e^x+C_2
\end{aligned}
$$

(4)

令 $z=e^y$，则 $z'=y'e^y$，进而 $z''=y''e^y+(y')^2e^y$，于是

$$
\begin{aligned}
&y''+(y')^2=2e^{-y}\\
\Longrightarrow & z''=2\\
\Longrightarrow & z'=2x+C\\
\Longrightarrow & z=x^2+C_1x+C_2\\
\Longrightarrow & y=\ln(x^2+C_1x+C_2)
\end{aligned}
$$

13

(1)

令 $z=\frac{y'}{x}$，则 $y''=z+xz'$，于是

$$
\begin{aligned}
&y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'}\\
\Longrightarrow & z+xz'=z+\frac{x}{z}\\
\Longrightarrow & z\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\\
\Longrightarrow & z^2=2x+C_1\\
\Longrightarrow & (y')^2=2x^3+C_1x^2
\end{aligned}
$$

取 $x=1$ 得 $C_1=-2$。

因此对 $t=\sqrt{x-1}$，有 $\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$

$$y'=\sqrt{2}x\sqrt{x-1}\Longrightarrow y=\sqrt{2}\int x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int t^2(t^2+1)\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{2}}{5}t^5+\frac{2\sqrt{2}}{3}t^3+C_2$$

再取 $x=1$，此时 $t=0$，于是 $C_2=1$，从而

$$y=\frac{2\sqrt{2}}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+1$$

(2)

由题 $y\neq 0$。令 $z=y'$，则

$$y''=z'=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{y^3} \\
\Longrightarrow &z\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}y}{y^3} \\
\Longrightarrow &z^2 = \frac{1}{y^2} + C_1 \\
\Longrightarrow &(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1
\end{aligned}
$$

取 $x=1$，得到 $C_1=-1$。

于是

$$
\begin{aligned}
&y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \\
\Longrightarrow &\pm\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{d}x \\
\Longrightarrow &\pm\sqrt{1-y^2} = x + C_2 \\
\Longrightarrow &y^2 + (x+C_2)^2 = 1
\end{aligned}
$$

取 $x=1$，得到 $C_2=-1$，于是方程的解为

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

6.2 二阶线性微分方程

1

取 $x_0=1$，则

(1)

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}e^{-2\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{x}\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x}$$

因此通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1\frac{\sin x}{x} - C_2\frac{\cos x}{x}$$

(2)

直接计算可得

$$y_2(x) = \cot x\int\frac{1}{\cot^2 x}\,\mathrm{d}x = \cot x\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x = \cot x\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x = 1 - x\cot x$$

因此通解为

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = \cot xy = C_1\cot x + C_2(1 - x\cot x)$$

(3)

取 $x_0=0$，则

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=x\int\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1$$

因此通解为

$$y_2=xy=C_1x+C_2\left(\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-1\right)$$

2

(1)

注意到 $y_1(x)=x$ 是一个特解，取 $x_0=1$，则有

$$y_2(x)=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=x\int\mathrm{d}x=x^2$$

因此通解为

$$y=C_1x^2+C_2x$$

(2)

注意到 $y_1(x)=e^x$ 是一个特解，取 $x_0=1$，则有

$$y_2(x)=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{\int_{x_0}^{x}(1+\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=e^x\int e^{-2x}e^{x+\ln|x|-1}\,\mathrm{d}x=e^{x+1}\int xe^{-x-1}\,\mathrm{d}x=-x-1$$

因此通解为

$$y=C_1e^x-C_2(x+1)$$

3

该方程对应的齐次方程为

$$y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=0$$

注意到 $y=C$ 是该方程的解。

令 $z=y'$，$z\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}
&y''+\frac{2x}{1+x^2}y'=0\\
\Longrightarrow&z'+\frac{2x}{1+x^2}z=0\\
\Longrightarrow&\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
\Longrightarrow&\ln|z|=-\ln(1+x^2)+C\\
\Longrightarrow&z=\frac{C}{1+x^2},\ C\neq 0
\end{aligned}$$

因此，该齐次方程的解满足

$$y' = \frac{C}{1+x^2} \Longrightarrow y = C_1 \arctan x + C_2$$

通解可以表示为

$$y = C_1 \arctan x + C_2 + x^2$$

带入初值条件，得到特解

$$y = 4 \arctan x + x^2 + \pi - 1$$

4

(1)

特征方程

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

的解为 $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$，于是通解为

$$y = C_1 e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1+\sqrt{2})x}$$

(2)

特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

的解为 $\lambda = -1 \pm i$，于是通解为

$$y = C_1 e^{(1-i)x} + C_2 e^{(1+i)x} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

(3)

特征方程

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

的解为 $\lambda = -3, 2$，于是通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

5

(1)

根据形式，设特解为

$$y = a \sin \frac{x}{2}$$

代入方程解得 $a = \frac{8}{3}$，于是

$$y = \frac{8}{3} \sin \frac{x}{2}$$

(2)

根据形式，设特解为

$$y=(ax^2+bx+c)e^{2x}$$

代入方程解得 $(a,b,c)=(0,1,3)$，于是

$$y=(x+3)e^{2x}$$

6

证明. 设

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=0,\ \forall\, x$$

则 $f^{(k)}(x)=0,\ \forall\, 0\leq k\leq n$。

由 $f(x)$ 的解析性

$$a_k=\frac{1}{n!}f^{(k)}(0)=0$$

这说明 $\{1,x,\cdots,x^n\}$ 线性无关。

另一方面，对于 $(a_1,a_2,a_3)=(1,-1,-1)\neq(0,0,0)$，我们有

$$a_1+a_2\cos^2 x+a_3\sin^2 x=0,\ \forall\, x$$

这说明 $\{1,\cos^2 x,\sin^2 x\}$ 线性相关。 □

7

证明. 不妨设

$$y_1(x)=\lambda y_2(x),\ \forall\, x\Longrightarrow y_1'(x)=\lambda y_2'(x),\ \forall\, x$$

则

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=\lambda y_2(x)y_2'(x)-\lambda y_2(x)y_2'(x)=0$$

□

8

证明. 注意到

$$0=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)=\begin{cases}a_1(x-1)^2, & 0\leq x\leq 1\\ a_2(x-1)^2, & 1<x\leq 2\end{cases}\Longrightarrow a_1=a_2=0$$

故 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关。

另一方面，由

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad y_2'(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ 2(x-1), & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

知

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0 - 0 = 0$$

□

9

(1)

特征方程

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

有三重根 $\lambda = -1$，于是

$$x = (C_1 t^2 + C_2 t + C_3)e^{-t}$$

(2)

特征方程

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

的解为 $\lambda = 2, \pm i$，于是

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{it} + C_3 e^{-it} = C_1 e^{2t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t$$

(3)

特征方程

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 + 18 = 0$$

的解为

$$\lambda_1 = \sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{4 + 3\sqrt{2}}}$$
$$\lambda_2 = -\sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{4 + 3\sqrt{2}}}$$
$$\lambda_3 = \sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{i}{\sqrt{4 + 3\sqrt{2}}}$$
$$\lambda_4 = -\sqrt{2 + \frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{i}{\sqrt{4 + 3\sqrt{2}}}$$

于是

$$
\begin{aligned}
x = & C_1 e^{\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}}t} \cos \frac{t}{\sqrt{4+3\sqrt{2}}} + C_2 e^{\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}}t} \sin \frac{t}{\sqrt{4+3\sqrt{2}}} \\
& + C_3 e^{-\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}}t} \cos \frac{t}{\sqrt{4+3\sqrt{2}}} + C_4 e^{-\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}}t} \sin \frac{t}{\sqrt{4+3\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

(4)

特征方程

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

有重根 $\lambda = \pm i$，重数均为 2。于是

$$x = (C_1 x + C_2)e^{it} + (C_3 x + C_4)e^{-it} = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x$$

Chapter 7

无穷级数

7.1 数项级数

1

(1)

证明.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

□

(2)

证明.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)=-\sqrt{2}+1$$

□

(3)

证明.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+1)+\ln(2n+1)-\ln(2n-1))=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2$$

□

(4)

证明.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1$$

□

2

(1)

由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$$

知级数发散。

(2)

由

$$\frac{1}{n\sqrt{n-1}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\ n\to\infty$$

知级数收敛。

(3)

由

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}\sqrt{2n+1}}\sim\frac{1}{2n},\ n\to\infty$$

知级数发散。

(4)

注意到 $n\to\infty$ 时 $\sin n$ 极限不存在，知级数发散。

(5)

由 Cauchy 判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n\sin\frac{\pi}{3^n}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{3^n}}=\frac{2}{3}<1$$

知级数收敛。

(6)

由

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n},\ n\to\infty$$

知级数发散。

(7)

由

$$\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}<\frac{1}{2^n},\ \forall n$$

知级数收敛。

(8)

由

$$\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n} < \frac{1}{n^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \ge 2$$

知级数收敛。

(9)

由

$$\arctan\frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n},\ n\to\infty$$

知级数发散。

(10)

由

$$\frac{1000^n}{n!} \le \frac{1000^{1000}}{1000!}\frac{1000^{n-1000}}{n(n-1)\cdots 1001} < C\left(\frac{1000}{1001}\right)^n,\ \forall n \ge 1001$$

知级数收敛。

注 71. 不管前面多大，1000 项后都要被等比级数比下去。

(11)

由

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+n} \le \frac{1}{2^n},\ \forall n$$

知级数收敛。

(12)

由

$$0 < \frac{3+(-1)^n}{2^n} \le \frac{1}{2^{n-2}},\ \forall n$$

知级数收敛。

(13)

不难验证，当 n 充分大时

$$\ln n < n^{\frac{1}{8}}$$

此时由

$$\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} < \frac{n^{\frac{1}{8}}}{n^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$$

知级数收敛。

注 72. 用到 ln 比任何单增的幂函数增长慢的特性。

(14)

令 $t=\ln x$，再令 $s=\ln t$，则由积分判别法，该级数与积分

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^k}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^k t}=\int_{\ln\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^k}$$

同敛散。

因此，$k>1$ 时级数收敛，$k\le 1$ 时级数发散。

注 73. 除了这种先射箭后画靶的题目，*Cauchy* 积分判别法很少用到，即使能用往往也更复杂。

(15)

由 Cauchy 判别法，极限

$$\ln\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{2}}<1$$

于是级数收敛。

(16)

$a\ge 1$ 时，由

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\ge\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}>0$$

知级数发散。

$a<1$ 时，由

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n<a^n,\ \forall\, n$$

知级数收敛。

3

由

$$0<a_n\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ \forall\, n$$

知级数收敛。

4

证明. 设

$$S_n=\sum_{k=1}^n a_n\qquad T_n=\sum_{k=1}^n(a_k+a_{k+1})$$

则

$$T_n=2S_n+a_{n+1}-a_1=S_{n+1}+S_n-a_1$$

即 T_n 极限存在，级数收敛。

逆命题不成立。事实上，取 $a_n=(-1)^n$，则 $T_n=0$，但 S_n 发散。

若 $a_n>0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})<+\infty \Longrightarrow a_n+a_{n+1}\to 0 \Longrightarrow a_n\to 0$$

此时

$$S_n=\frac{1}{2}(T_n-a_{n+1}+a_1)\to\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})+\frac{1}{2}a_1$$

收敛 □

5

(1)

正确。

不妨设 $a>0$。对 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时

$$na_n>a-\varepsilon=\frac{a}{2}\Longrightarrow a_n>0$$

因此可不妨设 a_n 恒正。

此时，由比较判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$$

(2)

不一定。

考虑交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

由 Leibniz 判别法知它收敛，但 $n\to\infty$ 时，na_n 极限不存在。

(3)

注意到

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k(a_k-a_{k+1})-(ka_k-(k+1)a_{k+1})\right)=na_n+\sum_{k=1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})$$

于是 S_n 极限存在，对应级数收敛。

6

证明. 由正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

知，n 充分大时 $a_n < 1$，此时 $a_n^2 < a_n$。

由比较判别法，知正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

反之结论不成立，可取 $a_n = \frac{1}{n}$，此时

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

□

7

由题

$$0 < a_n < a_{n-1} + b_{n-1} < \cdots < a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + S_{n-1}$$

由 $\{S_n\}$ 收敛知 $\{S_n\}$ 有界，于是 $\{a_n\}$ 有界，必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$，设其极限为 a。即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，当 $k > N_1$ 时

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对上述 $\varepsilon > 0$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 > 0$，当 $n > N_2$ 时

$$0 \leq \sum_{m=n}^{\infty} b_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

注意到，存在 N_3，当 $k > N_3$ 时，$n_k > N_2$。于是，当 $n > n_k > N_2$ 时，存在 $k > N_3$，使得 $n_k \leq n < n_{k+1}$。这里只考虑 $n \neq n_k$ 的情形，否则显然有 $|a_n - a| < \varepsilon$。放缩可以得到

$$a - \varepsilon < a_{n_{k+1}} - \sum_{m=N_2+1}^{\infty} b_m < a_{n_{k+1}} - \sum_{m=n}^{n_{k+1}-1} b_m < a_n < a_{n_k} + \sum_{m=n_k}^{n-1} b_m < a_{n_k} + \sum_{m=N_2+1}^{\infty} b_m < a + \varepsilon$$

即 $a_n \to a$。

注 74. 本题看着简单做着难，总体思路是取一个子列给 $\{a_n\}$ 进行分割，这样每个 a_n 都有一个上界和一个下界的控制。

8

证明. 根据

$$\begin{aligned}|a_nb_n| &\le a_n^2+b_n^2\\ (a_n+b_n)^2 &\le 2a_n^2+2b_n^2\\ \frac{|a_n|}{n} &\le a_n^2+\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

由比较判别法，知这些级数都收敛。 □

9

(1)

$$0<\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{2n}\frac{1}{m^p}<\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^p}=0$$

故极限为 0。

(2)

$$0<\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{2n}\frac{1}{p^m}<\lim_{n\to\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^m}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n(p-1)}=0$$

故极限为 0。

注 75. 这两问都在用“收敛级数余项趋于 0”。

10

证明. 由题，a_n 非负单减，从而极限存在。

注意到 a_n 的极限不为 0，否则由 Leibniz 判别法，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

收敛，与题设矛盾！

设 $a_n\to a>0$，则由 a_n 单减知 $a_n>a$。结合

$$\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n<\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$$

由比较判别法知正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n<+\infty$$

□

11

证明. 由 Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

结合

$$a_{n+1}<a_n\Longrightarrow a_n<a_k,\ \forall\, n>k\Longrightarrow\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_k<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

由 Leibniz 判别法知级数收敛。 □

12

证明. 注意到

$$|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|$$

由比较判别法知该级数绝对收敛。 □

13

(1)

由

$$\left|(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right|\sim\left(\frac{2}{3}\right)^n,\ n\to\infty$$

知该级数绝对收敛。

(2)

由

$$\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right|\sim\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n\to\infty$$

知该级数绝对收敛。

(3)

由

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}},\ n\to\infty$$

知该级数不绝对收敛。

另一方面，$n>100$ 时，$\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 单调递减趋于 0。因此由 Leibniz 判别法，该级数条件收敛。

(4)

由
$$\left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n},\ n\to\infty$$
知该级数不绝对收敛。

另一方面，$\sin\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0。因此由 Leibniz 判别法，该级数条件收敛。

(5)

由 $n\geq 3$ 时
$$\left|(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right| > \frac{1}{n}$$
知该级数不绝对收敛。

另一方面，$n>27>e^e$ 时
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln n}{n}=\frac{n\ln(n+1)-(n+1)\ln n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\ln n\right)<0$$
并由 Stolz 定理知
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$
于是根据 Leibniz 法则知该级数条件收敛。

(6)

由比较判别法知，$p>1$ 时该级数绝对收敛，$p\leq 1$ 时该级数不绝对收敛。

由 Leibniz 判别法知，$p>0$ 时该级数条件收敛，$p\leq 0$ 时 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 极限不为 0，该级数发散。

综上，该级数在 $p>1$ 时绝对收敛，$0<p\leq 1$ 时条件收敛，$p\leq 0$ 时发散。

(7)

由
$$\left|(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right| \sim \frac{1}{n},\ n\to\infty$$
知该级数不绝对收敛。

另一方面，$e^{\frac{1}{n}}-1$ 单调递减趋于 0。因此由 Leibniz 判别法，该级数条件收敛。

(8)

由
$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right| \sim \frac{1}{2n^2},\ n\to\infty$$
知该级数绝对收敛。

(9)

由

$$\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)\right|\sim\frac{p^2}{2n^2},\ n\to\infty$$

知该级数绝对收敛。

(10)

由

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p\sim\frac{1}{2n^{2p}},\ n\to\infty$$

类似 (6) 知，该级数在 $p>\frac{1}{2}$ 时绝对收敛，$0<p\le\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$p\le 0$ 时发散。

14

证明. 由条件收敛知 $S_n^{\pm}\to+\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+-S_n^-}{S_n^-}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_n^-}=1$$

□

15

证明. 不妨设

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n},\ n\in\mathbb{N}_+$$

否则去掉前面有限项，结论不变。

于是

$$|a_n|<\frac{|a_{n-1}|}{b_{n-1}}b_n<\frac{b_n}{|a_{n-1}|}b_{n-2}<\cdots<\frac{|a_1|}{b_1}b_n$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\frac{|a_1|}{b_1}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n<+\infty$$

即 $\{a_n\}$ 对应的级数绝对收敛。 □

16

(1)

$x=k\pi$ 时该级数平凡地收敛于 0。

$x\ne k\pi$ 时，$\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0，部分和

$$\sum_{n=1}^{N}\sin nx=\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{N}\left(\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{(2N+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

有界。于是由 Dirichlet 判别法，知该级数收敛。

(2)

由周期性知

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\cos\frac{n\pi}{4}\right| = \left|\sum_{n=1}^{r}\cos\frac{n\pi}{4}\right| \le \sum_{n=1}^{r}\left|\cos\frac{n\pi}{4}\right| \le 7$$

其中 $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。

由 Dirichlet 判别法，结合 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减趋于 0，知该级数收敛。

(3)

同理 (1) 知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

收敛。

进一步，单增数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

由 Abel 判别法知该级数收敛。

注 76. *这种 Dirichlet 接 Abel 的题考试常考。*

(4)

注意到 $\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 单调递减趋于 0，由 Leibniz 判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$$

收敛。

进一步，单增数列

$$\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} < 1$$

由 Abel 判别法知该级数收敛。

7.2 函数项级数

1

证明. 不妨设

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \rightrightarrows 0,\ x \in I$$

否则设极限分别为 $f(x), g(x)$，则对 $f_n(x)-f(x), g_n(x)-g(x)$ 同理分析即可。

此时，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 > 0$，当 $n_1 > N_1$ 时，对 $\forall x \in I$，都有

$$\left|\sum_{n=n_1}^{\infty} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同时，对这个 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 > 0$，当 $n_2 > N_2$ 时，对 $\forall x \in I$，都有

$$\left|\sum_{n=n_1}^{\infty} g_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时

$$\left|\sum_{n=n_1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x))\right| \leq \left|\sum_{n=n_1}^{\infty} f_n(x)\right| + \left|\sum_{n=n_1}^{\infty} g_n(x)\right| < \varepsilon$$

即

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} (f_n(x) + g_n(x)) \rightrightarrows 0,\ x \in I$$

$\square$

2

(1)

$x \leq 0$ 时 $ne^{-nx} > n$，由比较判别法知级数发散。

$x > 0$ 时，对于充分大的 n，恒有 $e^{nx} > x^3n^3$，此时

$$ne^{-nx} < \frac{1}{x^3n^2}$$

由比较判别法知级数收敛。

综上，该函数项级数的收敛域为 $(0, +\infty)$

(2)

$|x| > 1$ 时，$\frac{x^{n^2}}{n}$ 不收敛于 0，级数发散。

$|x| < 1$ 时

$$\left|\frac{x^{n^2}}{n}\right| \leq x^{n^2} \leq x^n$$

由比较判别法知级数收敛。

$x = 1$，该级数为调和级数，发散。

$x = -1$，$(-1)^{n^2} = (-1)^n$，由 Leibniz 判别法知级数收敛。

综上，该级数的收敛域为 $[-1, 1)$。

(3)

$x<0$ 时

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1 \Longrightarrow \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \nrightarrow 0$$

从而级数发散。

$x=0$ 时，由 Leibniz 判别法知级数收敛。

$x>0$ 时

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right| \leq \left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n,\ \left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$$

由比较判别法知级数收敛。

综上，该级数的收敛域为 $[0,+\infty)$。

(4)

注意到

$$\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \pi\left(\frac{1}{2x}\right)^n,\ n\to\infty$$

于是由比较判别法，该级数的收敛域为 $[-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty]$。

(5)

注意到

$$\frac{(x-3)^n}{n-3^n} \sim \left(\frac{x}{3}-1\right)^n,\ n\to\infty$$

于是由比较判别法，该级数的收敛域为 $(0,6)$。

(6)

由 Stirling 公式（**7.4 节内容**）

$$n!\left(\frac{x}{n}\right)^n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{x}{e}\right)^n,\ n\to\infty$$

于是由比较判别法，该级数的收敛域为 $(-e,e)$。

(7)

$x<0$ 时

$$e^{nx}\to+\infty,\ n\to\infty \Longrightarrow \frac{\cos nx}{e^{nx}} \nrightarrow 0$$

从而级数发散。

$x=0$ 时，$\frac{\cos nx}{e^{nx}}=1$，故级数发散。

$x>0$ 时

$$\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leq \frac{1}{e^{nx}}$$

由比较判别法知级数收敛。

综上，该级数的收敛域为 $(0,+\infty)$。

(8)

由题，$x \neq \pm 1$。

$|x| < 1$ 时

$$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \le \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

由比较判别法知级数收敛。

$|x| > 1$ 时，$\frac{x^n}{1-x^n}$ 在 $n \to \infty$ 时的极限为 -1，故级数发散。

综上，该级数的收敛域为 $(-1,1)$。

3

证明. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$，当 $n > N$ 时

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}^+$$

由 Cauchy 准则，该函数项级数一致收敛。

另一方面，若 $a_n > |u_n(x)|,\ \forall x$，则 $a_n > \frac{1}{n}$，但此时

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

故无法用 Weierstrass 判别法判定一致收敛性。 □

4

(1)

注意到

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法，知该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛。

(2)

注意到

$$\left|\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}\right| \le \frac{1}{2^n}$$

由 Weierstrass 判别法，知该级数在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛。

(3)

由

$$\beta_n = \left|\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^{n-1}x^m\right| = \left|\frac{x^n}{1+x}\right| \Longrightarrow \sup_{x\in(-1,1)} \beta_n \ge \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

知该级数在 $(-1,1)$ 不一致收敛。

注 77. 这个级数不一致收敛是因为边界出问题。尝试用 *Weierstrass* 的时候，也会发现边界控制不住。

(4)

令 $f_n(x) = x^2e^{-nx}$，则

$$f_n'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2e^{-nx} = x(2-nx)e^{-nx} \Longrightarrow f_n(x) \le f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{e^2n^2}$$

结合 $f_n(x) \ge 0$ 知

$$|f_n(x)| \le \frac{4}{e^2n^2}$$

由 Weierstrass 判别法，该函数项级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。

(5)

注意到

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{n偶} \\ 1, & \text{n奇} \end{cases}$$

关于 x 一致有界，且 $\frac{1}{x+n}$ 关于 n 单调递减趋于 0。于是由 Dirichlet 判别法，该函数项级数在 $[1,+\infty)$ 一致收敛。

(6)

由

$$\beta_n = \left|\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right| \Longrightarrow \sup_{x\in(-1,1)}\beta_n \ge \left|\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{n}\right| \nrightarrow 0$$

知该级数在 $(1,+\infty)$ 不一致收敛。

注 78. 当我们把实数 x 换成一般复数 z，这就是大名鼎鼎的 ***Riemann Zeta* 函数**，*Riemann* 猜想就是对它的零点位置的一个猜想。通过复分析中**全纯开拓**的技巧，可以将 $\zeta(z)$ 延拓到 $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ 上的全纯函数（复变量的可导函数）。$z=1$ 是它的**极点**，$\zeta(z)$ 会在 1 处趋于无穷。从以上事实可以看出 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 不一致收敛，但内闭一致收敛。

(7)

注意到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| &\le \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cos kx\right|\\ &= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right|\\ &= \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\\ &\le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\end{aligned}$$

且 $\frac{1}{n}$ 关于 n 单调递减趋于 0。于是由 Dirichlet 判别法，该函数项级数在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致收敛。

(8)

令 $f_n(x)=\frac{x^2}{(ne^n)^x}$，则

$$f_n'(x)=\frac{2x-x^2\ln(ne^n)}{(ne^n)^x}=\frac{x(2-x(n+\ln n))}{(ne^n)^x}\Longrightarrow f_n(x)\le f_n\left(\frac{2}{n+\ln n}\right)=\frac{4}{(n+\ln n)^2(ne^n)^{\frac{2}{n+\ln n}}}$$

结合 $f_n(x)\ge 0$ 知

$$|f_n(x)|\le\frac{4}{(n+\ln n)^2(ne^n)^{\frac{2}{n+\ln n}}}\le\frac{4}{(n+\ln n)^2}\le\frac{4}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法，该函数项级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。

5

证明. 注意到 e^{-nx} 关于 x 单调递减且

$$|e^{-nx}|\le 1,\ \forall n$$

结合

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛，由 Abel 判别法，知该函数项级数在 $[0,+\infty)$ 一致收敛。 □

6

证明. 对 $\forall\delta>0$，当 $x\ge 1+\delta$ 时

$$\left|\frac{1}{n^x}\right|\le\frac{1}{n^{1+\delta}}$$

由 Weierstrass 判别法知 $\zeta(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 一致收敛。因此 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内闭一致收敛，进而连续。

归纳可知

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

不难验证，对充分大的 n，有

$$\left|\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k)}\right| = \left|\frac{\ln^k n}{n^x}\right| < \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

于是逐项求导后的级数在 $(1, +\infty)$ 内闭一致收敛，故存在且连续。 □

7

证明. 不难发现该函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上收敛。注意到

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

于是由 Weierstrass 判别法，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$$

同理，$f'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微，且

$$f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$$

□

8

证明. 注意到

$$\left|\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(2x+1)^2}\right| \leq \left|\frac{x^n}{(2x+1)^n}\right| < \frac{1}{2^n}$$

由 Weierstrass 判别法知该函数项级数在 $\mathbb{R}$ 一致收敛。因此 $f(x)$ 连续，进而

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(2x+1)^n} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(2x+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{4}$$

□

9

由 2(1) 知，当 n 充分大时

$$|ne^{-nx}| < \frac{1}{x^3n^2} \le \frac{1}{(\ln^3 2)n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知该函数项级数在 $[\ln 2, +\infty)$ 一致收敛，进而

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}$$

10

证明. 解这个一阶齐次线性方程，得到

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

归纳可知 $f_n(x)$ 非负，进而函数列 $\{f_n(x)\}$ 单增，

另一方面，对于 $g(x) = \frac{1}{1-x}$，有 $f_1(x) \le g(x)$。假设 $f_n(x) \le \frac{1}{1-x}$，则

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t} \le e^{\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t} = e^{-\ln(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

由归纳假设，知

$$f_n(x) \le \frac{1}{1-x},\ \forall n$$

因此 $f_n(x)$ 关于 n 单增有上界，从而逐点极限存在。

设 $f_n(x) \to f(x)$，则 $f_n'(x) \to f'(x)$。在等式

$$f_{n+1}'(x) = f_n(x)f_{n+1}(x)$$

两边取极限，得到

$$f'(x) = f^2(x) \Longrightarrow f(x) = -\frac{1}{x+C}$$

带入初值 $f(0) = 1$，得到 $C = -1$，即 $f_n(x) \to g(x)$。 □

注 79. 上界函数 $g(x)$ 的选取是先验的，即如果极限函数存在，那么两边取极限，解出来一定是这个 $g(x)$。思考的先后顺序和写步骤的先后顺序完全可以不同。

11

(1)

证明. 由单调递减性，对 $\forall x \in (a,b)$，$\exists N_x > 0$，当 $n > N_x$ 时

$$0 \le u_n(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

由连续性，对这个 $\varepsilon > 0$ 和 N_x，$\exists \delta_x > 0$，使得

$$u_n(y) < u_n(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall y \in (x-\delta_x, x+\delta_x) \cap [a,b]$$

由有限覆盖定理

$$[a,b] \subset \bigcup_{x\in[a,b]} (x-\delta_x, x+\delta_x) \Longrightarrow [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i-\delta_{x_i}, x+\delta_{x_i}),\ \exists\{x_1,\cdots,x_m\} \subset [a,b] \tag{7.1}$$

我们取

$$N = \max\{N_{x_1},\cdots,N_{x_m}\}$$

则 $n>N$ 时，对 $\forall x\in[a,b]$，$\exists 1\le i\le m$，使得 $x\in(x_i-\delta_{x_i}, x_i+\delta_{x_i})$。因此

$$|u_n(x)| < |u_n(x_i)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

注意到这个 N 只与 ε 有关，而与 x 无关，从而

$$u_n(x) \rightrightarrows 0$$

□

(2)

证明. $\Longleftarrow$:

由一致收敛函数的性质，该方向的证明是平凡的。

$\Longrightarrow$:

此时，$S(x)-S_n(x)$ 非负单减且连续。由 (1) 的结论知

$$S(x)-S_n(x) \rightrightarrows 0 \Longrightarrow S(x)-S_n(x) \rightrightarrows 0$$

□

7.3 幂级数和 Taylor 展式

1

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|} = 1 \Longrightarrow R = 1$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} \Longrightarrow R = 4$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}x^{2n+2}}{2^n x^{2n}} = 2x^2 < 1 \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a^n+b^n}\right|}=\frac{1}{\max\{a,b\}}\Longrightarrow R=\max\{a,b\}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!(x-2)^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-2)^2}{2n(2n+1)}=0<1\Longrightarrow R=+\infty$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right|}=3\Longrightarrow R=\frac{1}{3}$$

(7)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln n|}=1\Longrightarrow R=1$$

(8)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^nx^{(n+1)^2}}{2^{n+1}x^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{2}<1\Longrightarrow |x|\le 1\Longrightarrow R=1$$

2

证明. 任取 $r\in(-R,R)$，由 $f(x)$ 的收敛性，都有

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^r x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$$

结合 $f(x)$ 在 $x=R$ 处收敛，知函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

在 $x=R$ 处左连续。

因此

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to R^-}\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{r\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

利用上面的结论，取

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \forall\, x \in (-1,1)$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2$$

□

3

(1)

不难得到 $R=1$，即收敛区域为 $(-1,1)$。

另一方面

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Longrightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow f(x) = f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}x = \arctan x$$

(2)

不难得到 $R=1$，即收敛区域为 $(-1,1)$。

另一方面

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(3)

不难得到 $R=1$，即收敛区域为 $(-1,1)$。

另一方面

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\right)' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

(4)

不难得到 $R=1$，即收敛区域为 $(-1,1)$。

另一方面，注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

于是

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &\Longrightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Longrightarrow f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \\
&\Longrightarrow f'(x) = -\ln(1-x) \Longrightarrow f(x) = (1-x)\ln(1-x)+x \\
&\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} = \frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1
\end{aligned}$$

(5)

同理 **第 1 题的 (5)**，$R=+\infty$，即收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。
另一方面，注意到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}\Longrightarrow f'(x)=1+x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!!}\Longrightarrow f'(x)=1+xf(x)$$

该方程的通解为

$$f(x)=e^{\int x\,\mathrm{d}x}\left(\int e^{-\int x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

带入 $f(0)=0$，则

$$\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{1}{2}x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Longrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

注 80. 最后结果是一个非初等函数。e^{-x^2} 在实轴上的积分称为 ***Gauss* 积分**或**概率积分**，它对应着著名的**正态分布**。概率论中常常记

$$\varphi(x)=e^{-x^2}\qquad \varPhi(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}\,dt$$

函数 $\varPhi(x)$ 只在 $x=0$ 和 $+\infty$ 处可以求出精确值。我们将在 *B2* 中学到至少三种不同的计算 *Gauss* 积分的方法。

4

(1)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)2^{n+1}}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}=\left.\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Longrightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\Longrightarrow f(x)=-\ln|1-x|$$
$$g(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Longrightarrow g'(x)=\sum_{n=3}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x^2}{1-x}\Longrightarrow g(x)=-\frac{1}{2}x^2-x-\ln|1-x|$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\ln 2=-\frac{3}{4}\ln 2+\frac{5}{8}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n)}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}+\left(\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n\right)\bigg|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{4}{27}=\frac{22}{27}$$

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}}{3n+1}=-f(-1)$$

其中

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\Longrightarrow f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)$$

$$\Longrightarrow f(x)=-\frac{1}{3}\ln(1-x)+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=5e$$

5

(1)

由于

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 &\Longrightarrow f(1) = -3 \\ f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 &\Longrightarrow f'(1) = 4 \\ f''(x) = 6x - 4 &\Longrightarrow f''(1) = 2 \\ f'''(x) = 6 &\Longrightarrow f'''(1) = 6 \\ f^{(n)}(x) = 0 &\Longrightarrow f^{(n)}(1) = 0 \end{aligned}$$

其中 $n \geq 4$，因此

$$f(x) = -3 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$。

(2)

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{a^n} e^{\frac{x}{a}} \Longrightarrow f^{(n)}(a) = \frac{e}{a^n} \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n! a^n}(x-a)^n$$

收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$。

(3)

$$f(x) = \ln x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},\ n \geq 1 \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

收敛区域为 $(0, 2)$。

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \\ \Longrightarrow f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} \\ \Longrightarrow f^{(n)}(-4) &= \frac{(-1)^n n!}{(-3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(-2)^{n+1}} \\ \Longrightarrow f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n \end{aligned}$$

收敛区域为 $(-6, -2)$。

(5)

$$
\begin{aligned}
&f(x)=\ln(1+x-2x)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)\\
\Longrightarrow &f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(1+2x)^n}+\frac{(-1)^{2n-1}(n-1)!}{(1-x)^n}=-\frac{(-2)^n(n-1)!}{(1+2x)^n}-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}\ \forall n\geq 1\\
\Longrightarrow &f^{(n)}(0)=-(-2)^n(n-1)!-(n-1)!=-((-2)^n+1)(n-1)!\ \forall n\geq 1\\
\Longrightarrow &f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+1}{n}x^n
\end{aligned}
$$

收敛区域为 $(-1,1)$。

(6)

$$
f(x)=\cos x\Longrightarrow f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Longrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n
$$

收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

6

(1)

$$
\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2n)^{2n}
$$

另一方面，由

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2x)^{2n+2}}{(2n+2)!(2x)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2}{(n+1)(2n+1)}<1\Longrightarrow x\in\mathbb{R}
$$

知收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

(2)

$$
\arcsin x=\int_0^x(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}
$$

另一方面，由

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!(2n)!!x^{2n+3}}{(2n+2)!!(2n-1)!!x^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)x^2}{2n+2}<1\Longrightarrow |x|<1
$$

再对边界讨论，知收敛区域为 $[-1,1]$。

(3)

注意到定义域为 $(-1,1)$，于是

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2}{n+1}<1\Longrightarrow|x|<1$$

知收敛区域为 $(-1,1)$。

(4)

注意到定义域为 $(-1,+\infty)$，于是

$$(1+x)\ln(1+x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n-1}x^n=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}x^{n+1}$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|}1\Longrightarrow x\in(\,-1,1)$$

再对边界讨论，知收敛区域为 $[-1,1]$。

(5)

$$\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{4n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)}x^{4n+1}$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(4n+1)x^{4n+5}}{(2n+2)!(4n+5)x^{4n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)x^4}{(4n+5)(2n+2)(2n+1)}<1\Longrightarrow x\in\mathbb{R}$$

知收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

(6)

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!(2n+1)x^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)x^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)x^2}{(2n+3)^2(2n+2)}<1\Longrightarrow x\in\mathbb{R}$$

知收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

(7)

$$\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

另一方面，由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!(2n+1)x^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)x^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} < 1 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$$

知收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$。

7

首先注意到 $x = 0$ 时 $y = 0$。

两边求微分，得到

$$\mathrm{d}y + \lambda\cos y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \Longrightarrow y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+\lambda\cos y} \Longrightarrow y'|_{x=0} = y'|_{y=0} = \frac{1}{1+\lambda}$$

进一步

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\sin y}{(1+\lambda\cos y)^2}\,\mathrm{d}y \Longrightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin y}{(1+\lambda\cos y)^3} \Longrightarrow y|_{x=0} = y|_{y=0} = 0$$

最后

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{\cos y(1+\lambda\cos y) + 3\lambda\sin^2 y}{(1+\lambda\cos y)^4}\,\mathrm{d}y \Longrightarrow y''' = \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos y + \lambda(\cos^2 y + 3\sin^2 y)}{(1+\lambda\cos y)^5}$$
$$\Longrightarrow y'''|_{x=0} = y'''|_{y=0} = \frac{1}{(1+\lambda)^4}$$

综上

$$y = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{1}{6(1+\lambda)^4}x^3 + o(x^3)$$

7.4 级数的应用

1

(1)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}$$

2

设解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

带入原方程，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Longrightarrow&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Longrightarrow&(n+1)(n+2)a_{n+2}-na_n+a_n=0\Longrightarrow a_{n+2}=\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}a_n,\ n\geq 0\end{aligned}$$

递推可得

$$\begin{cases}a_{2n+1}=a_{2n-1}=\cdots=a_3=0\\ a_{2n}=\dfrac{2n-3}{2n(2n-1)}a_{2n-2}=\dfrac{2n-3}{2n(2n-1)}\dfrac{2n-5}{(2n-2)(2n-3)}a_{2n-4}=\cdots=-\dfrac{x^{2n}}{n!2^n(2n-1)}a_0\end{cases}$$

于是解为

$$y=C_1x+C_2\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!2^n(2n-1)}\right)$$

3

设

$$y=\sum_{n=0}^{5}a_nx^n+o(x^5)$$

由初值条件知

$$a_0=1\qquad a_1=0$$

即

$$y=1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5)\Longrightarrow y''=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+o(x^3)$$

则由

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

带入原方程，比较前 4 项系数得到

$$\begin{cases}2a_2=0\\ 6a_3+a_0=0\\ 12a_4+a_1=0\\ 20a_5+a_2-\dfrac{1}{6}a_0=0\end{cases}$$

解得

$$a_2 = 0 \qquad a_3 = -\frac{1}{6} \qquad a_4 = 0 \qquad a_5 = \frac{1}{120}$$

综上，幂级数解为

$$y = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$$

4

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n} = e$$

5

(1)

由**第 6 题**知

$$\frac{1}{\ln(n!)} \sim \frac{1}{\ln n^n} = \frac{1}{n\ln n},\ n \to \infty$$

由比较判别法知该级数发散。

(2)

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{e^n}{n^{n+p}} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^p} = \sqrt{2\pi}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$$

由比较判别法，$p > \frac{3}{2}$ 时级数收敛，$p \leq \frac{3}{2}$ 时级数发散。

6

证明. 由 Stirling 公式

$$\ln(n!) \sim \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - 1 = \ln n^n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi - n \sim \ln n^n,\ n \to \infty$$

□

7.5 第 7 章综合习题

1

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\&=\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+2}\right)=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^N}{N+2}\right)=1$$

3

证明. $\Longrightarrow$:

由收敛性知

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\ln a_n-\ln a_1$$

于是 $\{a_n\}$ 单调有上界，从而收敛。因此 $\{a_n\}$ 有界。

$\Longleftarrow$:

由 $\{a_n\}$ 的单调性，知 $\{a_n\}$ 收敛于 a，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}=\frac{a}{a_1}-1<+\infty$$

这说明该正项级数收敛。 □

4

证明. $\alpha\geq 1$ 时，注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

其中 $\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}$ 非负单减，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}<+\infty$$

由 Abel 判别法，该级数收敛。

$0<\alpha<1$ 时，由 $\{a_n\}$ 单增知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{a_n}}^{\frac{1}{a_{n+1}}}\frac{1}{a_n^{\alpha-1}}\,\mathrm{d}x\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{a_n}}^{\frac{1}{a_{n+1}}}x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^{\alpha}}\right)<+\infty$$

综上，该级数收敛。 □

注 81. $\alpha\in(0,1)$ 的情形更困难，凑出一个积分的方法很难想到，值得多思考思考。

5

证明. 由题

$$\begin{aligned}&a_{n+1}\le a_n-b_n\varphi(a_n)+a_nc_n<a_n+a_nc_n\\ \Longrightarrow&\frac{a_{n+1}}{a_n}<c_n+1\\ \Longrightarrow&\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)<\sum_{n=1}^{N-1}c_n\le\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C<+\infty\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\ge\sum_{n=1}^{N-1}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln a_n-\ln a_1\Longrightarrow 0<a_n<a_1e^C=M$$

进一步，我们得到一个收敛的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n\le a_1e^C\sum_{n=1}^{\infty}c_n=a_1Ce^C<+\infty$$

故 $a_nc_n\to 0$。

根据**习题 7.1.7**，$\{a_n\}$ 极限存在，设为 $a\ge 0$。

假设 $a>0$，则存在 N，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\frac{a}{2}$。此时

$$a_{n+1}\le a_n-b_n\varphi(a_n)+a_nc_n<a_n-b_n\varphi\left(\frac{a}{2}\right)+a_nc_n$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{N}b_n+\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{N}b_n+\frac{1}{\varphi\left(\frac{a}{2}\right)}\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}+a_nc_n)\\&\le\frac{1}{\varphi\left(\frac{a}{2}\right)}\left(a_{N+1}-a+\sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n\right)+\sum_{n=1}^{N}b_n<\frac{1}{\varphi\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\frac{a}{2}+a_1Ce^C\right)+\sum_{n=1}^{N}b_n<+\infty\end{aligned}$$

矛盾！ □

注 82. 带有 $\varphi(a_n)$ 的那项太过奇怪，为了方便，可以先把它直接丢掉试试。最后需要求具体的极限值时，只剩 $\{b_n\}$ 对应级数发散的一条没用到，所以想到取凑求和。

6

证明. 由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \Longrightarrow \frac{n}{a_1+\cdots+a_n} \leq \frac{4}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1+\cdots+a_n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)^2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k}\right) \\
&\leq 4\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{k}{n(n+1)^2 a_k} \\
&\leq 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a_k}\left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}\right) \\
&\leq 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a_k}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

取 $M=4$ 即可。 □

注 83. 如果对 *Cauchy* 不等式熟悉，看到这个形式可以直接想到。最开始尝试每项都配系数 1，发现做不出来。由于 $\{a_n\}$ 单增，且倒数对应的级数收敛。由 p 级数的敛散性，a_n 至少是 n 量级的。所以一个直接的想法是给 a_n 配上 n。本题最后一步放缩可以更精确，事实上，M 的取值范围是 $[2,+\infty)$，但本题没必要这么精确。

7

证明. 假设收敛，则由**第 6 题**结论，存在 $M>0$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1}-a_1} < M\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}-a_n} < +\infty$$

但是

$$\frac{n}{a_{n+1}-a_1} \geq \frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)-a_1}$$

其中

$$\frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)-a_1} \sim \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\ n\to\infty$$

由比较判别法，正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1}-a_1}$$

发散。矛盾！ □

注 84. 如果没用第 *6* 题提示，确实很难想到。

8

(1)

证明. 由题，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时

$$\sum_{k=n}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon$$

因此 $n>N$ 时，对上述 $\varepsilon>0$，有

$$|a_n-a_{n+p}|\leq\sum_{k=n}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}|\leq\sum_{k=n}^{\infty}|a_n-a_{n+1}|<\varepsilon,\ \forall p\in\mathbb{N}_+$$

由 Cauchy 准则知 $\{a_n\}$ 收敛。 □

(2)

取 $a_n=\frac{1}{n}$ 即可。

9

证明. 我们归纳证明 $f_n(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}}$。

$n=1$ 时结论成立。假设结论对 $n-1$ 成立，则

$$f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}=x^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

由归纳假设知，结论成立。

进一步

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-x|=\sup_{x\in[0,1]}\left|x^{1-\frac{1}{2^n}}-x\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|x\left(1-x^{-\frac{1}{2^n}}\right)\right|\leq\frac{1}{2^n-1}\to 0$$

这是因为

$$\begin{aligned}g(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}}-x\Longrightarrow g'(x)&=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^{-\frac{1}{2^n}}-1\\ \Longrightarrow|g(x)|\leq g\left(\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\right)&=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n}\frac{1}{2^n-1}\leq\frac{1}{2^n-1}\end{aligned}$$

综上，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 x。 □

注 85. 动手算一算前几项就大概知道答案长什么样了。

10

与**习题 7.2.10** 相同。

11

证明. 由题，$f_0(x)$ 连续，从而有界。设 $|f_0(x)| \le M$，于是

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow |f_1(x)| = \left|\int_0^x f_0(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^x |f_0(x)|\,\mathrm{d}x \le Mx \\
&\Longrightarrow |f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^x Mx\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{2}x^2 \\
&\Longrightarrow \cdots \\
&\Longrightarrow |f_n(x)| = \left|\int_0^x f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^x \frac{M}{(n-1)!}x^{n-1}\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{n!}x^n
\end{aligned}$$

因此

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - 0| \le \sup_{x\in[0,a]} \int_0^x \frac{M}{(n-1)!}x^{n-1}\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{n!}x^n = \frac{Ma^n}{n!} \to 0$$

说明 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0。 □

12

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right) + \cdots \\
&= 1.4142\cdots
\end{aligned}$$