第3周参考解答

1.2.15 (4) 先证明 $\sqrt[n]{n}\to 1\ (n\to+\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ (由stolz显然)

$\forall n\geqslant 2,\ \sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[n]{n^2-n+2}\leqslant(\sqrt[n]{n})^2 \xrightarrow{夹逼} \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}=1$

(5) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a}{n}=0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ \forall a\in R^+$

故由 $\sqrt[n]{\cos^2 1}\leqslant\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}\leqslant\sqrt[n]{n}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cdots+\cos^2 n}=1$

16. 记 $M=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$，则 $\sqrt[n]{M^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\cdot\sqrt[n]{M^n}$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}=M=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$.

17. (1) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1$，又 $a_n>0$，即知 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，从而收敛

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3^{n+1}+1}>0$，又 $a_n<\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}<\frac{1}{2}$，即知

$\{a_n\}$ 单调递增且有上界，从而收敛。

18. (3) 由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})\geqslant\sqrt{a}$，知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\frac{a-a_n^2}{a_n}\leqslant 0,\ n\in N^+$

故 $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ 单调递减有下界，从而可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\geqslant\sqrt{a}>0$

故 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

(5) 易知 $a_{n+1}=\sin a_n$ 且用归纳法不难得到 $0<a_n\leqslant 1$

故 $a_{n+1}=\sin a_n\leqslant a_n$，进而可设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x=\lim\limits_{n\to\infty}\sin a_n=\sin x\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

19. 由 $(a_n-b_n)+a\leqslant a_n\leqslant a,\ a\leqslant b_n\leqslant(b_n-a_n)+a$

结合夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

21. 由题设知 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$，从而 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减且有下界0，进而收敛

故 $a_n=\frac{a_n}{b_n}\cdot b_n$ 也是收敛的.

1.2.17 (3) $|a_{n+p}-a_n| = |\alpha_{n+p}q^{n+p}+\cdots+\alpha_{n+1}q^{n+1}| \leq M(|q|^{n+p}+\cdots+|q|^{n+1})$

$= \dfrac{|q|^{n+1}(1-|q|^p)}{1-|q|} \longrightarrow 0\ (n\to+\infty, \forall p\in N)$ 从而 $\{a_n\}$ 为柯西列，进而收敛.

(4) $|a_{n+p}-a_n| = \left|\dfrac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}+\cdots+\dfrac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right| \leq \dfrac{1}{(n+p)(n+p+1)}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$= \sum\limits_{i=1}^{p}\left[\dfrac{1}{(n+i)}-\dfrac{1}{(n+i+1)}\right] = \dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+p+1} \longrightarrow 0\ (n\to+\infty, \forall p\in N)$ 从而 $\{a_n\}$ 收敛

20. Pf: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ 知 $\exists N_0\in N^+, \forall n\geq N_0$, 有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \dfrac{l+1}{2} \triangleq s > 1$

故 $a_{N_0} > s\,a_{N_0+1} > \cdots > s^{n-N_0}a_n\ (\forall n>N_0) \Rightarrow 0 < a_n < \dfrac{1}{s^{n-N_0}}a_{N_0}$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$.

23. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \infty$ 知 $\forall M>0, \exists N_0\in N^+, \forall n>N_0$, 有 $|a_n| > \dfrac{M}{b}$

故 $|a_nb_n| > b\cdot\dfrac{M}{b} = M, \forall n>N_0$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n = \infty$.

24: $\cancel{\sqrt[n]{n!}=}\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n!}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(n+1)!-\ln n!}{(n+1)-n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, 故 $\{\sqrt[n]{n!}\}$

为无界序列且趋于 $+\infty$；注意到 $\forall M>0$, $(4M+1)\sin\dfrac{(4M+1)\pi}{2} > M$,

$(2M)\sin\dfrac{2M\pi}{2} \equiv 0$, 从而 $\{n\sin\dfrac{n\pi}{2}\}$ 为无界序列，也不趋于 ∞.

Rmk: Stirling 公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$

25. 用数学归纳法证明 $a_n \geq \sqrt{n}, \forall n\in N^+$

① 当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$ 显然成立

② 假设 $n=k$ 时结论成立，即 $a_k \geq \sqrt{k} \geq 1$，则 $n=k+1$ 时

$a_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{a_k} \geq \sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}$ 结论也成立！

综上知 $a_n \geq \sqrt{n}$，令 $n\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$.