2022-2023 期末考试

一、简单计算题

(1) 设 $p>0$ 为常数，求:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

(2) 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^{1+1/n}\sqrt{1+x^n}\ \mathrm{d}x$$

(3) 由曲线 $y=\sin(x)\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴及直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的图形, 在绕 x 轴旋转一周后所得的旋转体的体积是多少?

(4) 求:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$$

二、积分计算题

(1) 求:

$$\int\frac{3\cos(x)+4\sin(x)}{2\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$$

(1) 求:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x\quad(a>0)$$

三、求证:

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x>0$$

四、设连续函数 $f(x)$ 满足下式，求 $f(x)$.

$$f(x)=x^2-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

五、设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负. 证明: 存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

六、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积. 证明: $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也黎曼可积.

七、设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 f(x)x^n\ \mathrm{d}x$$