אוריה יהודאי 211544150

שירה טייטלבאום 322207341

בס"ד

הסקה אוטומטית ושימושיה – תרגיל 1

שאלה 2

2. בשיעור הראשון יצרנו את הנוסחאות הבאות:

$$\varphi_{foo} = ((\neg a \wedge \neg b \wedge h) \vee (\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))))$$

$$\varphi_{goo} = ((a \wedge f) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h)))$$

$$\varphi = \varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}$$

(א) רשמו את $\neg\varphi$ (שימו לב לשלילה!) בצורת cnf לפי האלגוריתם של צייטין.

(ב) צרו קובץ cnf שמייצג את הנוסחה שרשמתם.

(ג) הריצו את $minisat$ על הקובץ הזה. התוצאה אמורה להיות $unsat$. מה זה אומר על הפונקציות foo ו-goo מהשיעור הראשון?

(ד) נביט באלגוריתם של צייטין (מובא להלן). הוכיחו כי A ספיקה אם ורק אם B ספיקה. עשינו זאת באופן חלקי בכיתה, אך השארנו הרבה מקרים ללא הוכחה, בטענה שהם דומים. כתבו הוכחה שכוללת את כל המקרים.

א. לפי אלגוריתם צייטין אנו צריכים להגדיר לכל תת נוסחה c של $\neg\varphi$ משתנה חדש p_c, ואז נכתוב את $\neg\varphi$ בצורת cnf באופן הבא: $p_{\neg\varphi} \wedge \bigwedge_{c\in sub(\neg\varphi)} E(c)$.

ראשית נמצא את כל תתי הנוסחאות של $\neg\varphi$ (לפי הגדרת תתי נוסחאות שראינו בהרצאה):

$$sub(\neg\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$$

$$sub(\varphi) = sub(\varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}) = sub(\varphi_{foo}) \cup sub(\varphi_{goo}) \cup \{\varphi\}$$

נמצא את $sub(\varphi_{foo})$:

$$sub(\varphi_{foo}) = sub(((\neg a \wedge \neg b \wedge h) \vee (\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f)))))$$
$$= sub((\neg a \wedge \neg b \wedge h)) \cup sub\Big(\big(\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))\big)\Big)$$
$$\cup \Big\{\Big((\neg a \wedge \neg b \wedge h) \vee \big(\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))\big)\Big)\Big\}$$

$$sub((\neg a \wedge \neg b \wedge h)) = sub(\neg a) \cup sub(\neg b \wedge h) \cup \{(\neg a \wedge \neg b \wedge h)\}$$

$$sub(\neg a) = sub(a) \cup \{\neg a\} = \{a\} \cup \{\neg a\}$$
$$sub(\neg b \wedge h) = sub(\neg b) \cup sub(h) \cup \{\neg b \wedge h\} = sub(b) \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \wedge h\}$$
$$= \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \wedge h\}$$

$$sub\left(\left(\neg(\neg a \land \neg b) \land \left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)\right)$$
$$= sub\left(\neg(\neg a \land \neg b)\right) \cup sub\left(\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)$$
$$\cup \left\{\left(\neg(\neg a \land \neg b) \land \left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)\right\}$$

$$sub\left(\neg(\neg a \land \neg b)\right) = sub\left((\neg a \land \neg b)\right) \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}$$
$$= sub(\neg a) \cup sub(\neg b) \cup \{(\neg a \land \neg b)\} \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}$$
$$= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{(\neg a \land \neg b)\} \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}$$

$$sub\left(\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right) = sub\left((\neg a \land g)\right) \cup sub\left((a \land f)\right) \cup \left\{\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right\}$$
$$= sub(\neg a) \cup sub(g) \cup \{(\neg a \land g)\} \cup sub(a) \cup sub(f) \cup \{(a \land f)\}$$
$$\cup \left\{\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right\}$$
$$= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \land g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \left\{\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right\}$$

סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):

$$sub\left(\varphi_{foo}\right) = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \land h\} \cup \{(\neg a \land \neg b \land h)\} \cup \{(\neg a \land \neg b)\}$$
$$\cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \land g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \left\{\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right\}$$
$$\cup \left\{\left(\neg(\neg a \land \neg b) \land \left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)\right\}$$
$$\cup \left\{\left((\neg a \land \neg b \land h) \lor \left(\neg(\neg a \land \neg b) \land \left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)\right)\right\}$$

כעת נמצא את $sub\left(\varphi_{goo}\right)$:

$$sub\left(\varphi_{goo}\right) = sub(((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))))$$
$$= sub\left((a \land f)\right) \cup sub((\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))))$$
$$\cup \{((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))))\}$$

$$sub((a \land f)) = sub(a) \cup sub(f) \cup \{(a \land f)\} = \{a\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\}$$

$$sub((\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))$$
$$= sub(\neg a) \cup sub\left(\left((b \land g) \lor (\neg b \land h)\right)\right) \cup \{(\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))\}$$
$$= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup sub\left((b \land g)\right) \cup sub\left((\neg b \land h)\right) \cup \left\{\left((b \land g) \lor (\neg b \land h)\right)\right\}$$
$$\cup \{(\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))\}$$
$$= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{g\} \cup \{(b \land g)\} \cup \{\neg b\} \cup \{b\} \cup \{h\} \cup \{(\neg b \land h)\}$$
$$\cup \left\{\left((b \land g) \lor (\neg b \land h)\right)\right\} \cup \{(\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))\}$$

סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):

$$\begin{aligned} sub(\varphi_{goo}) = &\{a\} \cup \{f\} \cup \{(a \wedge f)\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{g\} \cup \{(b \wedge g)\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{(\neg b \wedge h)\} \\ &\cup \{((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\} \cup \{(\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\} \\ &\cup \{((a \wedge f) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h)))\} \end{aligned}$$

נציב את תתי הנוסחאות שמצאנו בנוסחה הראשית ונקבל (לאחר מחיקת כפילויות):

$$\begin{aligned} sub(\neg\varphi) &= sub(\varphi_{foo}) \cup sub(\varphi_{goo}) \cup \{\varphi\} \cup \{\neg\varphi\} \\ &= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \wedge h\} \cup \{(\neg a \wedge \neg b \wedge h)\} \cup \{(\neg a \wedge \neg b)\} \\ &\cup \{\neg(\neg a \wedge \neg b)\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \wedge g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \wedge f)\} \cup \{((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))\} \\ &\cup \{(\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f)))\} \\ &\cup \{((\neg a \wedge \neg b \wedge h) \vee (\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))))\} \cup\cup \{(b \wedge g)\} \\ &\cup \{((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\} \cup \{(\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\} \\ &\cup \{((a \wedge f) \vee (\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h)))\} \cup \{\varphi\} \cup \{\neg\varphi\} \end{aligned}$$

נסמן כל אחת מתתי הנוסחאות של $\neg\varphi$:

$$C_1 = \{(\neg a \wedge \neg b \wedge h)\}$$

$$C_2 = \{(\neg(\neg a \wedge \neg b) \wedge ((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f)))\}$$

$$C_3 = \{(\neg a \wedge \neg b)\}$$

$$C_4 = \{\neg(\neg a \wedge \neg b)\}$$

$$C_5 = \{((\neg a \wedge g) \vee (a \wedge f))\}$$

$$C_6 = \{(\neg a \wedge g)\}$$

$$C_7 = \{(a \wedge f)\}$$

$$C_8 = \{(\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\}$$

$$C_9 = \{((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h))\}$$

$$C_{10} = \{(b \wedge g)\}$$

$$C_{11} = \{\neg b \wedge h\}$$

כמו כן, נגדיר לכל תת נוסחה c של $\neg\varphi$ משתנה חדש p_c.
כאמור, הנוסחה שנכתוב היא: $p_{\neg\varphi} \wedge \bigwedge_{c \in sub(\neg\varphi)} E(c)$. לכן כעת נמצא לכל תת נוסחה c של $\neg\varphi$ את $E(c)$.

$$E(a) = CNF(p_a \leftrightarrow a) = (\neg p_a \vee a) \wedge (\neg a \vee p_a)$$
$$E(b) = CNF(p_b \leftrightarrow b) = (\neg p_b \vee b) \wedge (\neg b \vee p_b)$$
$$E(f) = CNF\left(p_f \leftrightarrow f\right) = (\neg p_f \vee f) \wedge (\neg f \vee p_f)$$
$$E(g) = CNF\left(p_g \leftrightarrow g\right) = (\neg p_g \vee g) \wedge (\neg g \vee p_g)$$
$$E(h) = CNF(p_h \leftrightarrow h) = (\neg p_h \vee h) \wedge (\neg h \vee p_h)$$
$$E(\neg a) = CNF(p_{\neg a} \leftrightarrow \neg p_{\neg a}) = (\neg p_{\neg a} \vee \neg p_a) \wedge (p_a \vee p_{\neg a})$$
$$E(\neg b) = CNF(p_{\neg b} \leftrightarrow \neg p_b) = (\neg p_{\neg b} \vee \neg p_b) \wedge (p_b \vee p_{\neg b})$$

$$E(C_{11} = \neg b \wedge h) = CNF\left(p_{c_{11}} \leftrightarrow (p_{\neg b} \wedge p_h)\right) = (\neg p_{c_{11}} \vee p_{\neg b}) \wedge (\neg p_{c_{11}} \vee p_h) \wedge (\neg p_{\neg b} \vee \neg p_h \vee p_{c_{11}})$$

$$E(C_3 = \neg a \wedge \neg b) = CNF\left(p_{c_3} \leftrightarrow (p_{\neg a} \wedge p_{\neg b})\right) = (\neg p_{c_3} \vee p_{\neg a}) \wedge (\neg p_{c_3} \vee p_{\neg b}) \wedge (\neg p_{\neg a} \vee \neg p_{\neg b} \vee p_{c_3})$$

$$E(C_6 = \neg a \wedge g) = CNF\left(p_{c_6} \leftrightarrow \left(p_{\neg a} \wedge p_g\right)\right) = (\neg p_{C_6} \vee p_{\neg a}) \wedge (\neg p_{c_6} \vee p_g) \wedge (\neg p_{\neg a} \vee \neg p_g \vee p_{c_6})$$

$$E(C_7 = a \wedge f) = CNF\left(p_{c_7} \leftrightarrow \left(p_a \wedge p_f\right)\right) = (\neg p_{c_7} \vee p_a) \wedge (\neg p_{c_7} \vee p_f) \wedge (\neg p_a \vee \neg p_f \vee p_{c_7})$$

$$E(C_{10} = b \wedge g) = CNF\left(p_{c_{10}} \leftrightarrow \left(p_b \wedge p_g\right)\right) = (\neg p_{c_{10}} \vee p_b) \wedge (\neg p_{c_{10}} \vee p_g) \wedge (\neg p_b \vee \neg p_g \vee p_{c_{10}})$$

$$E(C_1 = C_3 \wedge h) = CNF\left(p_{c_1} \leftrightarrow \left(p_{c_3} \wedge p_h\right)\right) = (\neg p_{c_1} \vee p_{c_3}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee p_h) \wedge (\neg p_{c_3} \vee \neg p_h \vee p_{c_1})$$

$$E(C_4 = \neg C_3) = CNF\left(p_{c_4} \leftrightarrow \neg p_{c_3}\right) = (\neg p_{c_4} \vee \neg p_{c_3}) \wedge (p_{c_3} \vee p_{c_4})$$

$$E(C_5 = C_6 \vee C_7) = CNF\left(p_{c_5} \leftrightarrow \left(p_{c_6} \vee p_{c_7}\right)\right) = (\neg p_{c_5} \vee p_{c_6} \vee p_{c_7}) \wedge (\neg p_{c_6} \vee p_{c_5}) \wedge (\neg p_{c_7} \vee p_{c_5})$$

$$E(C_9 = C_{10} \vee C_{11}) = CNF\left(p_{c_9} \leftrightarrow \left(p_{c_{10}} \vee p_{c_{11}}\right)\right) = \left(\neg p_{c_9} \vee p_{c_{10}} \vee p_{c_{11}}\right) \wedge \left(\neg p_{c_{10}} \vee p_{c_9}\right) \wedge \left(\neg p_{C_{11}} \vee p_{c_9}\right)$$

$$E(C_8 = \neg a \wedge C_9) = CNF\left(p_{c_8} \leftrightarrow \left(p_{\neg a} \wedge p_{c_9}\right)\right) = (\neg p_{c_8} \vee p_{\neg a}) \wedge (\neg p_{c_8} \vee p_{c_9}) \wedge (\neg p_{\neg a} \vee \neg p_{c_9} \vee p_{c_8})$$

$$E(C_2 = C_4 \wedge C_5) = CNF\left(p_{c_2} \leftrightarrow \left(p_{c_4} \wedge p_{c_5}\right)\right) = (\neg p_{c_2} \vee p_{c_4}) \wedge (\neg p_{c_2} \vee p_{c_5}) \wedge (\neg p_{c_4} \vee \neg p_{c_5} \vee p_{c_2})$$

$$E\left(\varphi_{foo} = C_1 \vee C_2\right) = CNF\left(p_{\varphi_{foo}} \leftrightarrow \left(p_{c_1} \vee p_{c_2}\right)\right)$$
$$= \left(\neg p_{\varphi_{foo}} \vee p_{c_1} \vee p_{c_2}\right) \wedge \left(\neg p_{c_1} \vee p_{\varphi_{foo}}\right) \wedge \left(\neg p_{c_2} \vee p_{\varphi_{foo}}\right)$$

$$E\left(\varphi_{goo} = C_7 \vee C_8\right) = CNF\left(p_{\varphi_{goo}} \leftrightarrow \left(p_{c_7} \vee p_{c_8}\right)\right)$$
$$= \left(\neg p_{\varphi_{goo}} \vee p_{c_7} \vee p_{c_8}\right) \wedge \left(\neg p_{c_7} \vee p_{\varphi_{goo}}\right) \wedge \left(\neg p_{c_8} \vee p_{\varphi_{goo}}\right)$$

$$E\left(\varphi = \varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}\right) = CNF\left(p_\varphi \leftrightarrow \left(p_{\varphi_{foo}} \leftrightarrow p_{\varphi_{goo}}\right)\right)$$
$$= (\neg p_\varphi \vee \neg p_{\varphi_{foo}} \vee p_{\varphi_{goo}}) \wedge (\neg p_\varphi \vee p_{\varphi_{foo}} \vee \neg p_{\varphi_{goo}}) \wedge (p_\varphi \vee \neg p_{\varphi_{foo}} \vee \neg p_{\varphi_{goo}}) \wedge (p_\varphi \vee p_{\varphi_{foo}} \vee p_{\varphi_{goo}})$$

$$E(\neg\varphi) = CNF\left(p_{\neg\varphi} \leftrightarrow \neg p_{\varphi}\right) = \left(\neg p_{\neg\varphi} \vee \neg p_{\varphi}\right) \wedge \left(p_{\varphi} \vee p_{\neg\varphi}\right)$$

סה"כ נקבל שהנוסחה של $\neg\varphi$ בצורת *CNF* לפי האלגוריתם של צייטיין היא:

$$p_{\neg\varphi} \wedge \bigwedge_{c \in sub(\neg\varphi)} E(c)$$

כאשר החלק של $\bigwedge_{c \in sub(\neg\varphi)} E(c)$ הוא שרשור של AND בין כל ה-E(C) עבור כל תת פסוקית C של $\neg\varphi$, ואת החלק הזה הראנו לעיל (לא כתבנו שוב את החישובים הסופיים, מאחר והם כתובים בעמוד הקודם) – כל החלקים שמסומנים בירוק.

ב. ראשית נמספר את המשתנים של הנוסחה:

$$p_{c_1} \Rightarrow 1, p_{c_2} \Rightarrow 2, p_{c_3} \Rightarrow 3, p_{c_4} \Rightarrow 4, p_{c_5} \Rightarrow 5, p_{c_6} \Rightarrow 6, p_{c_7} \Rightarrow 7, p_{c_8} \Rightarrow 8, p_{c_9} \Rightarrow 9, p_{c_{10}} \Rightarrow 10,$$
$$p_{c_{11}} \Rightarrow 11, a \Rightarrow 12, b \Rightarrow 13, f \Rightarrow 14, g \Rightarrow 15, h \Rightarrow 16, p_a \Rightarrow 17, p_b \Rightarrow 18, p_f \Rightarrow 19, p_g$$
$$\Rightarrow 20, p_h \Rightarrow 21, p_{\neg a} \Rightarrow 22, p_{\neg b} \Rightarrow 23, p_{\varphi_{goo}} \Rightarrow 24, p_{\varphi_{foo}} \Rightarrow 25, p_{\varphi} \Rightarrow 26, p_{\neg\varphi} \Rightarrow 27$$

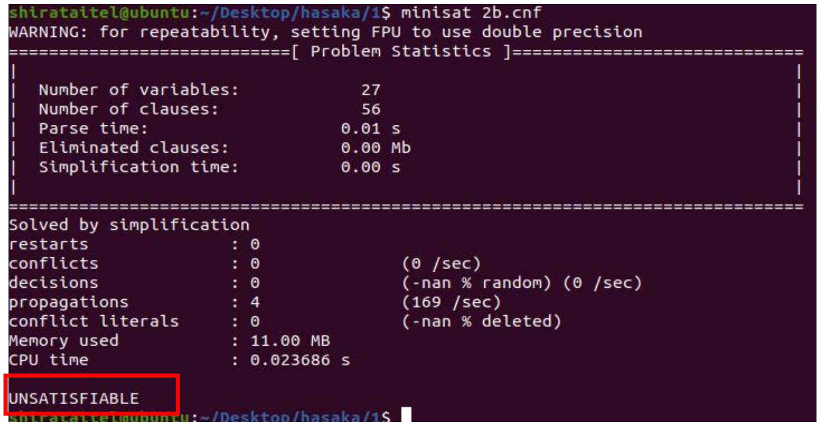
כעת הקובץ בפורמט *DIMACS* עם סיומת *cnf* נראה כך:

2b.cnf

```
p cnf 27 59
27 0
-17 12 0
-12 17 0
-22 -17 0
17 22 0
-18 13 0
-13 18 0
-23 -18 0
18 23 0
-19 14 0
-14 19 0
-20 15 0
-15 20 0
-21 16 0
-16 21 0
-1 3 0
-1 21 0
-3 -21 1 0
-2 4 0
-2 5 0
-4 -5 2 0
```

-3 22 0
-3 23 0
-22 -23 3 0
-4 -3 0
3 4 0
-5 6 7 0
-6 5 0
-7 5 0
-6 22 0
-6 20 0
-22 -20 6 0
-7 17 0
-7 19 0
-17 -19 7 0
-8 22 0
-8 9 0
-22 -9 8 0
-9 10 11 0
-10 9 0
-11 9 0
-10 18 0
-10 20 0
-18 -20 10 0
-11 23 0
-11 21 0
-23 -21 11 0
-25 1 2 0
-1 25 0
-2 25 0
-24 7 8 0
-7 24 0
-8 24 0
-26 -25 24 0
-26 25 -24 0
26 -25 -24 0
26 25 24 0
-27 -26 0
26 27 0

ג. הרצנו את minisat על הקובץ 2b.cnf והתוצאה אכן יצאה unsat, כפי שניתן לראות בצילום המסך הבא:



מאחר ו-$\neg\varphi$ לא ספיקה, אז נובע ש-φ תקפה (לפי משפט שלמדנו בהרצאה), כלומר φ תמיד ספיקה לכל השמה ומחזירה *true*.

הנוסחה φ היא מהצורה: $\varphi = \varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}$, לכן מכיוון שהיא תמיד מחזירה *true*, נובע ש-*foo* ו-*goo* הן שקולות (כי האם ורק אם מתקיים), כלומר לכל קלט שתיהן יחזירו את אותו הפלט.

ד. צ"ל: A ספיקה אם ורק אם B ספיקה (לפי האלגוריתם של צייטין).

הוכחה:

נוכיח את הטענה באמצעות גרירה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון:</u>

נניח B ספיקה, ונוכיח A ספיקה.

תהי V השמה שמספקת את B, כלומר $V \vDash B$. נוכיח את הטענה שלכל תת נוסחה c של A, מתקיים: $V(p_c) = V(c)$, ובכך נוכיח ש-A ספיקה. הסבר: B היא מהצורה הבאה: $p_A \wedge \bigwedge_{c \in sub(A)} E(c)$, ולכן אם V מספקת את B, בפרט מתקיים $V(p_A) = true$, ואז לפי הטענה $V(p_c) = V(c)$ - נקבל ש-$V(p_A) = V(A)$, ולכן $V(A) = true$, כלומר $V \vDash A$ כדרוש.

נוכיח באינדוקציה מבנית על c את הטענה $V(p_c) = V(c)$. הוכחה:

בסיס האינדוקציה

1) C הוא משתנה – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(\neg p_C \vee C) \wedge (\neg C \vee p_C)$, ומכיוון ש-$V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית $(\neg C \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית $(\neg p_C \vee C)$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

2) C הוא $true$ – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(false \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee true)$, ומכיוון ש-$V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. לפי הפסוקית $(false \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$, ולכן $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

3) C הוא $false$ – אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(true \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee false)$, ומכיוון ש-$V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. לפי הפסוקית $(\neg p_C \vee false)$, נובע ש-$V(p_c) = false$, ולכן $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

צעד האינדוקציה

1) C הוא $\neg D$ - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(p_D \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee \neg p_D)$, ומכיוון ש-$V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(D) = false$, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(D) = V(p_D)$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית $(p_D \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(D) = true$, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(D) = V(p_D)$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית $(\neg p_C \vee \neg p_D)$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

2) C הוא $C_1 \wedge C_2$ - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(\neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2} \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1})$, ומכיוון ש- $V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(C_1) = true, V(C_2) = true$, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V\left(p_{C_1}\right), V(C_2) = V\left(p_{C_2}\right)$. מכיוון ש-$V$ מספקת את הפסוקית $(\neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2} \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(C_1) = false$ או $V(C_2) = false$ או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $V(C_1) = false$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V\left(p_{C_1}\right)$. מכיוון ש-$V$ מספקת את הפסוקית: $(\neg p_C \vee p_{C_1})$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

3) C הוא $C_1 \vee C_2$ - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(\neg p_{C_2} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2})$, ומכיוון ש- $V \vDash B$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(C_1) = true$ או $V(C_2) = true$ או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $V(C_1) = true$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V\left(p_{C_1}\right)$. מכיוון ש-$V$ מספקת את הפסוקית: $(\neg p_{C_1} \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(C_1) = false, V(C_2) = false$, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V\left(p_{C_1}\right), V(C_2) = V\left(p_{C_2}\right)$. מכיוון ש-$V$ מספקת את הפסוקית $(\neg p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

4) C הוא $C_1 \rightarrow C_2$ - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: $(\neg p_{C_2} \vee p_C) \wedge (p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2})$, ומכיוון ש-$B \vDash V$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – נחלק למקרים:

- $(C_2) = true$, ו-$V(C_1) = true$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(\neg p_{C_2} \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.
- $V(C_2) = true$, ו-$V(C_1) = false$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(\neg p_{C_2} \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.
- $V(C_2) = false$, ו-$V(C_1) = false$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(p_{C_1} \vee p_C)$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – אז לפי הגדרת C מתקיים ש- $V(C_1) = true, V(C_2) = false$, לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית $(\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

5) C הוא $C_1 \leftrightarrow C_2$ - אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B:
$(p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (p_C \vee \neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2})$ ומכיוון ש-$B \vDash V$ אז גם V מספקת את הפסוקיות האלו. נחלק למקרים:

א. אם $V(c) = true$ – נחלק למקרים:

- $(C_2) = true$, ו-$V(C_1) = true$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(p_C \vee \neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = true$.
- $V(C_2) = false$, ו-$V(C_1) = false$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = true$.

ב. אם $V(c) = false$ – נחלק למקרים:

- $(C_2) = false$, ו-$V(C_1) = true$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = false$.
- $V(C_2) = true$, ו-$V(C_1) = false$ - אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = V(p_{C_2})$. מכיוון ש-V מספקת את הפסוקית: $(\neg p_C \vee p_{C_1} \vee \neg p_{C_2})$, נובע ש-$V(p_c) = false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

סה"כ הוכחנו שלכל תת נוסחה c של A, מתקיים: $V(p_c) = V(c)$, ולכן A ספיקה לפי ההסבר לעיל.

<u>כיוון שני:</u>
נניח A ספיקה, ונוכיח B ספיקה.
תהי V השמה שמספקת את A, כלומר $V \models A$. נוכיח ש-B ספיקה על ידי שנגדיר השמה חדשה V' ונוכיח שהיא מספקת את B. נגדיר את V' באופן הבא, V' מקבלת קלט כלשהו a ומחזירה את הפלט לפי שני המקרים הבאים:

1. אם a משתנה ב-A אז: $V'(a) = V(a)$
2. אם a הוא קלט מהצורה p_C עבור תת נוסחה C כלשהי ב-A, אז: $V'(a) = V(C)$

כאמור צריך להוכיח: $V' \models B$

הוכחה:

B היא מהצורה הבאה:

$$p_A \wedge \bigwedge_{C \in sub(A)} E(C)$$

נוכיח ש-$V' \models B$ בשני שלבים:

1. נראה ש-$V'(p_A) = true$
2. נראה ש-$V'(E(C)) = true$ לכל $C \in sub(A)$

שלב ראשון

מכיוון ש-p_A הוא קלט מהצורה שתואמת למקרה השני בהגדרת V', אזי מתקיים: $V'(p_A) = V(A)$. כמו כן, לפי ההנחה A ספיקה לפי V , ולכן מתקיים $V(A) = true$, ולכן $V'(p_A) = true$ כדרוש.

שלב שני

תהי $C \in sub(A)$, נחלק למקרים:

1) C הוא משתנה – אז מתקיים:

$$E(C) = (\neg p_C \vee C) \wedge (\neg C \vee p_C)$$

נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – מכיוון ש-C הוא משתנה שמופיע ב-A, אז $V'(C) = V(C)$ לפי הגדרת V', כמו כן, $V'(p_c) = V(C)$ גם לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(C) = V'(p_c) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ – מכיוון ש-C הוא משתנה שמופיע ב-A, אז $V'(C) = V(C)$ לפי הגדרת V', כמו כן, $V'(p_c) = V(C)$ גם לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(C) = V'(p_c) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

2) C הוא $true$ – אז מתקיים:

$$E(C) = (\neg p_C \vee true) \wedge (false \vee p_C)$$

כמו כן, $V(C) = true$. בנוסף, $V'(p_c) = V(C)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

3) C הוא $false$ – אז מתקיים:

$$E(C) = (\neg p_C \vee false) \wedge (true \vee p_C)$$

כמו כן, $V(C) = false$. בנוסף, $V'(p_c) = V(C)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

4) C הוא $\neg D$ – אז מתקיים:

$$E(C) = (\neg p_C \vee \neg p_D) \wedge (p_D \vee p_C)$$

נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – אז $V(D) = false$, כמו כן $V'(p_c) = V(C), V'(p_D) = V(D)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_D) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ – אז $V(D) = true$, כמו כן $V'(p_c) = V(C), V'(p_D) = V(D)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_D) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

5) C הוא $C_1 \wedge C_2$ – אז מתקיים:

$$E(C) = (\neg p_C \vee p_{C_1}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2} \vee p_C)$$

נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – אז $V(C_1) = true, V(C_2) = true$,
כמו כן $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V',
לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_1}) = true, V'(p_{C_2}) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ – אז $V(C_1) = false$ או $V(C_2) = false$ או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$V(C_1) = false$. אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_{C_1}) = false$ לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

6) C הוא $C_1 \vee C_2$ – אז מתקיים:
$$E(C) = (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C)$$
נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – אז $V(C_1) = true$ או $V(C_2) = true$ או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$V(C_1) = true$. אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_1}) = true$ לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ – אז $V(C_1) = false, V(C_2) = false$,
כמו כן $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V',
לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_{C_1}) = false, V'(p_{C_2}) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

7) C הוא $C_1 \rightarrow C_2$ – אז מתקיים:
$$E(C) = (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (p_{C_1} \vee p_C) \wedge (\neg p_{C_2} \vee p_C)$$
נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – נחלק למקרים:

- $V(C_1) = true, V(C_2) = true$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_2}) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.
- $V(C_1) = false, V(C_2) = true$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_2}) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.
- $V(C_1) = false, V(C_2) = false$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_1}) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ - אז $V(C_1) = true, V(C_2) = false$,
כמו כן $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V',
לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_{C_1}) = true, V'(p_{C_2}) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

8) C הוא $C_1 \leftrightarrow C_2$ – אז מתקיים:
$$E(C) = (\neg p_C \vee \neg p_{C_1} \vee p_{C_2}) \wedge (\neg p_C \vee p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (p_C \vee \neg p_{C_1} \vee \neg p_{C_2}) \wedge (p_C \vee p_{C_1} \vee p_{C_2})$$
נחלק למקרים:

א. $V(C) = true$ – נחלק למקרים:

- $V(C_1) = true, V(C_2) = true$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרת V', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_1}) = true, V'(p_{C_2}) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

- $V(C_1) = false, V(C_2) = false$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרתV', לכן מתקיים $V'(p_c) = true, V'(p_{C_1}) = false\ , V'(p_{C_2}) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

ב. $V(C) = false$ – נחלק למקרים:

- $V(C_1) = true, V(C_2) = false$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרתV', לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_{C_1}) = true, V'(p_{C_2}) = false$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.
- $V(C_1) = false, V(C_2) = true$ - אז $V'(p_c) = V(C), V'(p_{C_1}) = V(C_1), V'(p_{C_2}) = V(C_2)$ לפי הגדרתV', לכן מתקיים $V'(p_c) = false, V'(p_{C_1}) = false\ , V'(p_{C_2}) = true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-$E(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים $V'(E(C)) = true$ כדרוש.

סה"כ הוכחנו ש-$V'(E(C)) = true$ לכל $C \in sub(A)$, לכן קיבלנו ש--$V' \vDash B$, כלומר B ספיקה כדרוש.

לסיכום, הוכחנו שאם A ספיקה אז B ספיקה ולהפך, ובכך הוכחנו את הטענה.

<u>שאלה 3</u>

3. הוכיחו/הפריכו:

(א) קיימת נוסחת CNF שבה בכל פסוקית יש לפחות שני ליטרלים, אך היא אינה ספיקה.
(ב) קיימת נוסחת CNF בצורת $Horn$ שבה בכל פסוקית יש לפחות שני ליטרלים, אך היא אינה ספיקה.
(ג) לכל נוסחה F מתקיים: F תקפה אם ורק אם $\neg F$ אינה ספיקה.

א. הוכחה:

נראה שקיימת נוסחת CNF שבכל פסוקית שלה יש לפחות 2 ליטרלים, והיא אינה ספיקה.
להלן הנוסחה:

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$$

נוכיח שהיא אינה ספיקה על ידי כך שנעבור על כל האפשרויות להשמות:

1) $x = T, y = T$

בהשמה זו הפסוקית $(\bar{x} \vee \bar{y})$ לא מסופקת כי:

$$(\bar{x} \vee \bar{y}) = (F \vee F) = F$$

ולכן כל הנוסחה לא מסופקת.

2) $x = T, y = F$

בהשמה זו הפסוקית $(\bar{x} \vee y)$ לא מסופקת כי:

$$(\bar{x} \vee y) = (F \vee F) = F$$

3) $x = F, y = T$

בהשמה זו הפסוקית $(x \vee \bar{y})$ לא מסופקת כי:

$$(x \vee \bar{y}) = (F \vee F) = F$$

4) $x = F, y = F$

בהשמה זו הפסוקית $(x \vee y)$ לא מסופקת כי:

$$(x \vee y) = (F \vee F) = F$$

כלומר, עברנו על כל ההשמות האפשריות, ובכל אחת מהן יש פסוקית שלא מסופקת, וכתוצאה מכך כל הנוסחה לא מסופקת, ולכן הראנו שהנוסחה לא ספיקה.

ב. הפרכה:

נוכיח שלא קיימת נוסחת *CNF* בצורת *HORN* שבה בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים והיא לא ספיקה, כלומר נוכיח שאם בנוסחת *HORN*, נסמנה ב-*F*, בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז *F* ספיקה.

תהי v השמה כך שלכל משתנה p, $v(p) = false$, כלומר ההשמה מציבה לכל משתנה את הערך *false*.
נוכיח ש-$v \vDash F$, כלומר ההשמה v מספקת את כל הפסוקיות ב-*F*.
תהי c פסוקית ב-*F*, נראה ש-$v \vDash c$:
לפי הנתון בטענה שלכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים, ידוע שב-c גם יש לפחות 2 ליטרלים, ומהנתון ש-*F* היא נוסחת *HORN*, ידוע שכל פסוקית יש לכל היותר ליטרל אחד חיובי, ובפרט ב-c. לכן קיים משתנה x כך שהשלילה שלו - $\bar{x}$ מופיעה ב-c. לפי הגדרת v מתקיים: $v(x) = false$, ולכן $v(\bar{x}) = true$, ולכן $v \vDash c$, כלומר v מספקת את c, ולכן $v \vDash F$, כלומר ההשמה v מספקת את כל הפסוקיות ב-*F*.
סה"כ הראנו שאם בנוסחת *HORN* בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז היא ספיקה, ובכך הפרכנו את הטענה.

ג. הוכחה:

נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית.

תהי נוסחה F, נוכיח את הטענה הבאה: F תקפה $\leftrightarrow$ $\neg F$ אינה ספיקה.

1) כיוון ראשון: F תקפה $\longleftarrow$ $\neg F$ אינה ספיקה

נניח בשלילה ש-$\neg F$ ספיקה. כלומר קיימת השמה v כך ש- $v(\neg F) = true$, לכן $v(\neg(\neg F)) = false$

כלומר:

$$v(\neg(\neg F)) = v(F) = false$$

בעצם קיבלנו שקיימת השמה v שלא מספקת את F, אך לפי ההנחה F תקפה, ולפי ההגדרה – נוסחה היא ספיקה אם כל השמה מספקת אותה, ולכן הגענו לסתירה. כלומר ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן $\neg F$ אינה ספיקה כנדרש.

2) כיוון שני: F תקפה $\longrightarrow$ $\neg F$ אינה ספיקה

נניח בשלילה ש-F לא תקפה. כלומר קיימת השמה v שלא מספקת את F : $v(F) = false$,

לכן $v(\neg F) = true$, וקיבלנו שקיימת השמה v שמספקת את $\neg F$, אך הנחנו ש-$\neg F$ אינה ספיקה, כלומר לא קיימת השמה שמספקת אותה, ולכן קיבלנו סתירה. כלומר, ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן F תקפה כנדרש.