אוריה יהודאי 211544150

שירה טייטלבאום 322207341

הסקה אוטומטית ושימושיה – תרגיל 2

שאלה 1, סעיף ג'

בסעיפים א' ו-ב' מימשנו שני פותרני SAT – אחד נאיבי, ואחד מבוסס DPLL. בסעיף ג' הרצנו את שני הפותרנים האלו על שני הקבצים: verification.cnf, verification2.cnf. ב-verification.cnf הפותרן של DPLL מחזיר תשובה תוך רגע, ואילו לפותרן הנאיבי לוקח יותר זמן, וב-verification2.cnf הפותרן הנאיבי לא מסיים לרוץ בעוד הפותרן של DPLL מחזיר תשובה מהירה. לסיכום, הפותרן המבוסס DPLL מהיר יותר.

שאלה 2

2. הוכיחו / הפריכו לגבי $DPLL$ (רמז: הוכחות יש לעשות באינדוקציה על אורך הגזירה ב-$DPLL$, כאשר הבסיס נוגע לקונפיגורציה ההתחלתית, והצעד מחלק למקרים לפי הכלל האחרון בו נעשה שימוש בגזירה. בשביל הפרכות יש להציג קונפיגורציה קונקרטית שאינה מקיימת את הכתוב.).

(א) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אין משתנה שמופיע פעמיים ב-M.

(ב) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אם (M,F,D) גזירה מ-$([\,],F,\emptyset)$ בתחשיב $DPLL$ אז אין משתנה שמופיע פעמיים ב-M.

(ג) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אין משתנה שמופיע ב-M אך לא ב-F.

(ד) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אם (M,F,D) גזירה מ-$([\,],F,\emptyset)$ בתחשיב $DPLL$ אז אין משתנה שמופיע ב-M אך לא ב-F.

(ה) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אין משתנה שמופיע ב-F אך לא ב-M.

(ו) לכל קונפיגורציה (M,F,D), אם (M,F,D) גזירה מ-$([\,],F,\emptyset)$ בתחשיב $DPLL$ אז אין משתנה שמופיע ב-F אך לא ב-M.

א. הפרכה:

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.

$$F = \{x_1 \vee x_2\}$$
$$M = \{x_1, \overline{x_1}, x_2\}$$
$$D = \{x_1, \overline{x_1}, x_2\}$$

ניתן לראות שהמשתנה x_1 מופיע פעמיים ב-M. הסיבה שזה יכול להיות היא כי בטענה לא כתוב שמדובר בתחשיב *DPLL*, כמו כן לא כתוב שזו קונפיגורציה שנוצרה מקונפיגורציה התחלתית כלשהי, וכשהגדרנו קונפיגורציות באופן כללי בהרצאה – לא הנחנו שום דבר לגבי M.

ב. הוכחה:

נוכיח את הטענה באמצעות אינדוקציה על אורך הגזירה ב-*DPLL*.

<u>בסיס:</u>

נסתכל על הקונפיגורציה ההתחלתית: $([\,], F, \emptyset)$, ניתן לראות ש-M ריקה, ולכן בפרט אין משתנה שמופיע פעמיים ב-M.

<u>הנחה:</u>

עבור קונפיגורציה (M, F, D) נניח שהטענה מתקיימת.

<u>צעד:</u>
נוכיח את הטענה באמצעות חלוקה למקרים לפי הכלל האחרון בו נעשה שימוש בגזירה. כלומר, שגם לאחר הפעלת כלל הגזירה נקבל שבצעד הבא אין משתנה שמופיע פעמיים ב-M.

1. כלל *Decide*:
לפי תחשיב *DPLL* הכלל נראה כך:
$$\frac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D \cup \{\ell\})}$$
כאשר $var(\ell)$ מופיע ב-F, אך לא מופיע ב-M.
לפי הנחת האינדוקציה ב-M אין איבר שמופיע פעמיים. כמו כן $var(\ell)$ לא מופיע ב-M לפי הגדרת הכלל, ולכן לאחר הוספת ℓ ל-M באמצעות כלל *Decide*, אין איבר שמופיע ב-$M :: \ell$ פעמיים, ולכן הטענה מתקיימת.
2. כלל *Fail*:
לפי תחשיב *DPLL* הכלל נראה כך:
$$\frac{(M, F, D)}{Fail}$$
כאשר $D = \emptyset$, ויש פסוקית C ב-F כך ש-$v_M \vDash \neg C$.
עבור (M, F, D) הטענה מתקיימת לפי הנחת האינדוקציה, ולפי כלל *Fail* אנו מגיעים לקונפיגורציה *Fail* שעבורה הטענה מתקיימת באופן ריק.
3. כלל *BT*:
לפי תחשיב *DPLL* הכלל נראה כך:
$$\frac{(M :: \ell :: N, F, D)}{\left(M :: \bar{\ell}, F, D \backslash \{\ell\}\right)}$$
כאשר $\ell \in D$, $v_{M::\ell::N} \vDash \neg C$ ו-$N \cap D = \emptyset$.
לפי הנחת האינדוקציה ב-$M :: \ell :: N$ אין איבר שמופיע פעמיים, בפרט ב-M אין איבר שמופיע פעמיים, וגם $var(\ell)$ לא מופיע ב-M.
לכן לאחר הוספת $\bar{\ell}$ ל-M עדיין אין איבר שמופיע ב-$M :: \bar{\ell}$ פעמיים, ולכן הטענה מתקיימת.
4. כלל *UP*:
לפי תחשיב *DPLL* הכלל נראה כך:
$$\frac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D)}$$
כאשר יש C כך ש-$C \vee \ell$ היא פסוקית ב-F, $var(\ell)$ לא מופיע ב-M, ו-$v_M \vDash \neg C$.
לפי הנחת האינדוקציה ב-M אין איבר שמופיע פעמיים. כמו כן $var(\ell)$ לא מופיע ב-M לפי הגדרת הכלל, ולכן לאחר הוספת ℓ ל-M באמצעות כלל *UP*, אין איבר שמופיע ב-$M :: \ell$ פעמיים, ולכן הטענה מתקיימת.

סה"כ הוכחנו את הטענה.

ג. הפרכה:
נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.
$$F = \{x_1 \vee x_2\}$$
$$M = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$D = \{x_1, x_2, x_3\}$$

ניתן לראות שהמשתנה x_3 מופיע ב-M, אך לא ב-F. הסיבה שזה יכול להיות היא כי בטענה לא כתוב שמדובר בתחשיב $DPLL$, כמו כן לא כתוב שזו קונפיגורציה שנוצרה מקונפיגורציה התחלתית כלשהי, וכשהגדרנו קונפיגורציות באופן כללי בהרצאה – לא הנחנו שום דבר לגבי M.

ד. הוכחה:

נוכיח את הטענה באמצעות אינדוקציה על אורך הגזירה ב-$DPLL$.

<u>בסיס:</u>

נסתכל על הקונפיגורציה ההתחלתית: $([], F, \emptyset)$, ניתן לראות ש-M ריקה, ולכן בפרט אין משתנה שמופיע ב-M אך לא ב-F.

<u>הנחה:</u>

עבור קונפיגורציה (M, F, D) נניח שהטענה מתקיימת.

<u>צעד:</u>

נוכיח את הטענה באמצעות חלוקה למקרים לפי הכלל האחרון בו נעשה שימוש בגזירה. כלומר, שגם לאחר הפעלת כלל הגזירה נקבל שבצעד הבא אין משתנה שמופיע ב-M אך לא ב-F.

1. כלל $Decide$:

לפי תחשיב $DPLL$ הכלל נראה כך:

$$\frac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D \cup \{\ell\})}$$

כאשר $var(\ell)$ מופיע ב-F, אך לא מופיע ב-M.

לפי הנחת האינדוקציה אין איבר שמופיע ב-M אך לא ב-F. כמו כן $var(\ell)$ מופיע ב-F לפי הגדרת הכלל, ולכן לאחר הוספת ℓ ל-M באמצעות כלל $Decide$, אין איבר שמופיע ב-$M :: \ell$ אך לא ב-F, ולכן הטענה מתקיימת.

2. כלל $Fail$:

לפי תחשיב $DPLL$ הכלל נראה כך:

$$\frac{(M, F, D)}{Fail}$$

כאשר $D = \emptyset$, ויש פסוקית C ב-F כך ש-$v_M \vDash \neg C$.

עבור (M, F, D) הטענה מתקיימת לפי הנחת האינדוקציה, ולפי כלל $Fail$ אנו מגיעים לקונפיגורציה $Fail$ שעבורה הטענה מתקיימת באופן ריק.

3. כלל BT:

לפי תחשיב $DPLL$ הכלל נראה כך:

$$\frac{(M :: \ell :: N, F, D)}{\left(M :: \overline{\ell}, F, D \backslash \{\ell\}\right)}$$

כאשר $\ell \in D$, $v_{M::\ell::N} \vDash \neg C$ ו-$N \cap D = \emptyset$.

לפי הנחת האינדוקציה אין איבר שמופיע ב-$M :: \ell :: N$ אך לא מופיע ב-F, בפרט אין איבר שמופיע ב-M אך לא מופיע ב-F. מכאן נובע ש-$var(\ell)$ ב-F, ומכיוון ש-$var(\ell) = var(\overline{\ell})$ מתקיים ש-$var(\overline{\ell})$ ב-F, לכן לאחר הוספת $\overline{\ell}$ ל-M עדיין אין איבר שמופיע ב-$M :: \overline{\ell}$ אך לא מופיע ב-F, ולכן הטענה מתקיימת.

4. כלל UP:

לפי תחשיב $DPLL$ הכלל נראה כך:

$$\frac{(M, F, D)}{(M :: \ell, F, D)}$$

כאשר יש C כך ש-$C \vee \ell$ היא פסוקית ב-F, $var(\ell)$ לא מופיע ב-M, ו-$v_M \vDash \neg C$.

לפי הנחת האינדוקציה אין איבר שמופיע ב-M אך לא ב-F. כמו כן $var(\ell)$ מופיע ב-F לפי הגדרת הכלל, ולכן לאחר הוספת ℓ ל-M באמצעות כלל UP, אין איבר שמופיע ב-$M :: \ell$ אך לא ב-F, ולכן הטענה מתקיימת.

סה"כ הוכחנו את הטענה.

ה. הפרכה:

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.

$$F = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$$
$$M = \{x_1, x_2\}$$
$$D = \{x_1, x_2\}$$

ניתן לראות שהמשתנה x_3 מופיע ב-F , אך לא ב-M.

ו. הפרכה:

נפריך את הטענה באמצעות דוגמא נגדית.

נתבונן בקונפיגורציה הבאה:

$$F = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$$
$$M = \{x_1\}$$
$$D = \{x_1\}$$

קונפיגורציה זו גזירה מהקונפיגורציה ההתחלתית $([], F, \emptyset)$ באמצעות כלל הגזירה *decide* בתחשיב *DPLL*.

ניתן לראות שהמשתנה x_3 מופיע ב-F , אך לא ב-M, ובכך הפרכנו את הטענה.

שאלה 3

3. הוכיחו/הפריכו לגבי FOL (רמז: כדי להראות שנוסחה היא ספיקה, יש להציג מבנה שמספק אותה):

(א) הנוסחה $x = y \wedge f(x) \neq z$ ספיקה.

(ב) הנוסחה $x = y \wedge f(x) \neq z \wedge z = f(y)$ ספיקה.

(ג) תהי φ נוסחה, s, t שמות עצם ו-z משתנה שלא מופיע ב-φ, s, t. אם $\varphi \wedge s = t$ ספיקה, אז גם $\varphi \wedge z = t \wedge z = s$ ספיקה.

(ד) לכל נוסחאות φ ו-ψ מתקיים ש-$\varphi \to \psi$ תקפה אם ורק אם $\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה.

א. <u>הוכחה:</u>

נוכיח שהנוסחה $x = y \wedge f(x) \neq z$ ספיקה על ידי שנראה מבנה V שמספק אותה. נגדיר מבנה באופן הבא:

$$F_\Sigma = \{f\}, a_\Sigma(f) = 1$$
$$D_V = \{0,1\}$$
$$I_V(x) = I_v(y) = 0$$
$$I_V(z) = 1 \ : \ \forall\, z \neq x, y$$

כמו כן, נגדיר: $I_v(f)$ היא פונקציית הזהות.

כעת, מכיוון שמתקיים $I_v(x) = I_v(y)$, נובע ש-$x = y$.

כמו כן:

$$I_V\big(f(x)\big) = I_V(f)(I_V(x)) = I_V(f)(0) = 0 \neq I_V(z) = 1$$

ולכן נובע ש-$f(x) \neq z$.

סה"כ הראנו מבנה שמספק את הנוסחה: $x = y \wedge f(x) \neq z$, ובכך הוכחנו את הטענה.

ב. <u>הפרכה:</u>

נב"ש שהנוסחה $x = y \wedge f(x) \neq z \wedge z = f(y)$ ספיקה.

לכן קיים מבנה V שמספק אותה ונראה כך:

1) $I_V(x) = I_V(y)$

2) $I_V\big(f(x)\big) = I_V(f)(I_V(x)) \neq I_V(z)$

3) $I_V(z) = I_V(f)(I_V(y)) = I_V\big(f(y)\big)$

לפי נוסחה 3 מתקיים $I_V(z) = I_V\big(f(y)\big)$.

לפי נוסחאות 1+2 מתקיים: $I_V(f)\big(I_V(x)\big) = I_V(f)(I_V(y)) \neq I_V(z)$, כלומר $I_V\big(f(y)\big) \neq I_V(z)$, בסתירה לנוסחה 3.

מכאן שההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן הנוסחה לא ספיקה.

ג. <u>הוכחה:</u>

נניח ש-$\varphi \wedge s = t$ ספיקה, ונוכיח $\varphi \wedge z = t \wedge z = s$ ספיקה.

מכיוון ש- $\varphi \wedge s = t$ ספיקה, נובע שקיים מבנה V שמספק אותה, כך ש-$I_V(s) = I_V(t)$.

לפי הנתון בשאלה z משתנה שלא מופיע ב-φ, s, t .

נגדיר מבנה V' באופן הבא:

V' יהיה זהה ל-V, פרט לכך שנוסיף ל-V' את: $I_{V'}(z) = I_V(t) = I_V(s)$.

מכיוון ש- V' זהה ל-V ו-z לא מופיע ב-φ, אז מתקיים ש-V' מספק את φ.

כמו כן, V' זהה ל-V, ו-z לא מופיע ב-s, t, ולכן מתקיים: $I_V(t) = I_{V'}(t), I_V(s) = I_{V'}(s)$.

ולכן לפי הגדרת V' נובע $I_{V'}(z) = I_{V'}(t)$ וגם $I_{V'}(z) = I_{V'}(s)$. כלומר, מתקיים ש-V' מספק את $z = t \wedge z = s$.

סה"כ הוכחנו ש-$s = z \wedge t = z \wedge \varphi$ ספיקה.

ד. <u>הוכחה:</u>
נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית שמתקיימת הטענה הבאה לכל φ, ψ:
$\varphi \rightarrow \psi$ תקפה אם ורק אם $\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה.

כיוון ראשון:
נניח ש-$\varphi \rightarrow \psi$ תקפה, ונוכיח ש- $\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה.
מכיוון ש-$\varphi \rightarrow \psi$ תקפה נובע שכל מבנה V מספק אותה, כלומר $V \vDash \varphi \rightarrow \psi$.
נב"ש ש- $\varphi \wedge \neg\psi$ ספיקה, כלומר קיים מבנה V' כך ש- $V' \vDash \varphi \wedge \neg\psi$. לכן מתקיים: $V' \vDash \varphi, V' \vDash \neg\psi$.
נובע מכך ש- $V' \nvDash \psi$.
כאמור, $\varphi \rightarrow \psi$ תקפה, ולכן בפרט $V' \vDash \varphi \rightarrow \psi$, ראינו ש-$V' \vDash \varphi$, ולכן מתקבל ש-$V' \vDash \psi$, בסתירה לכך ש- $V' \nvDash \psi$.
סה"כ ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן $\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה.

כיוון שני:
נניח ש- $\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה, ונוכיח ש-$\varphi \rightarrow \psi$ תקפה.
מכיוון ש-$\varphi \wedge \neg\psi$ אינה ספיקה, נובע שלכל מבנה V מתקיים ש-$V \nvDash \varphi \wedge \neg\psi$.
לכן מתקיים ש-$V \vDash \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ ובאופן שקול: $V \vDash \neg\varphi \vee \psi$. כמו כן ידוע כי מתקיים ש-$\varphi \rightarrow \psi = \neg\varphi \vee \psi$ לפי חוקי לוגיקה.
לכן נקבל $V \vDash \varphi \rightarrow \psi$, ומכיוון שהוכחנו שכל מבנה V כללי מספק את הנוסחה $\varphi \rightarrow \psi$, אז היא תקפה.

סה"כ הוכחנו גרירה דו כיוונית, ולכן הטענה מתקיימת.