בס"ד שירה טייטלבאום 322207341

<u>הסקה אוטומטית ושימושיה - תרגיל 1</u>

שאלה 2

2. בשיעור הראשון יצרנו את הנוסחאות הבאות:

$$\varphi_{foo} = ((\neg a \land \neg b \land h) \lor (\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f))))$$
$$\varphi_{goo} = ((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))$$
$$\varphi = \varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}$$

. אייטין של צייטין לפי האלגוריתם של צייטין בצורת לב לשלילהיי) $\neg \varphi$ את את רשמו (א)

- (ב) צרו קובץ cnf שמייצג את הנוסחה שרשמתם.
- goo-1 foo ו-minisat אומר על הפונקציות על הקובץ הזה. התוצאה אמורה להיות minisat מה אומר על הקובץ הזה. התוצאה אמורה להיות מהשיעור הראשון:
- וד) נביט באלגוריתם של צייטין (מובא להלו). הוכיחו כי A ספיקה אם ורק אם B ספיקה. עשינו זאת באופן חלקי נביעה, אך השארנו הרבה מקרים ללא הוכחה, בטענה שהם דומים. כתבו הוכחה שכוללת את כל המקרים.

א. לפי אלגוריתם צייטין אנו צריכים להגדיר לכל תת נוסחה σ של σ של σ משתנה חדש p_c ואז נכתוב את p_c בצורת $p_{\neg \varphi} \wedge \Lambda_{c \in sub(\neg \varphi)} E(c)$ באופן הבא: $e^{-\varphi}$

:ראשית נמצא את כל תתי הנוסחאות של φ (לפי הגדרת תתי נוסחאות שראינו בהרצאה) את כל תתי הנוסחאות של $sub(\neg\varphi)=sub(\varphi)\cup\{\neg\varphi\}$

$$sub(\varphi) = sub(\varphi_{foo} \leftrightarrow \varphi_{goo}) = sub(\varphi_{foo}) \cup sub(\varphi_{goo}) \cup \{\varphi\}$$

:sub $(arphi_{foo})$ נמצא את

$$sub(\varphi_{foo}) = sub(((\neg a \land \neg b \land h) \lor (\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f)))))$$

$$= sub((\neg a \land \neg b \land h)) \cup sub((\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f)))))$$

$$\cup \{((\neg a \land \neg b \land h) \lor (\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f))))\}$$

$$sub((\neg a \land \neg b \land h)) = sub(\neg a) \cup sub(\neg b \land h) \cup \{(\neg a \land \neg b \land h)\}$$

$$sub(\neg a) = sub(a) \cup \{\neg a\} = \{a\} \cup \{\neg a\}$$

$$sub(\neg b \land h) = sub(\neg b) \cup sub(h) \cup \{\neg b \land h\} = sub(b) \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \land h\}$$

$$= \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \land h\}$$

```
sub\left(\left(\neg(\neg a \land \neg b) \land \left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right)\right)
                                                     = sub(\neg(\neg a \land \neg b)) \cup sub(((\neg a \land g) \lor (a \land f)))
                                                     \cup \left\{ \left( \neg (\neg a \land \neg b) \land \left( (\neg a \land g) \lor (a \land f) \right) \right) \right\}
                  sub(\neg(\neg a \land \neg b)) = sub((\neg a \land \neg b)) \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}\
                                              = sub(\neg a) \cup sub(\neg b) \cup \{(\neg a \land \neg b)\} \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}
                                              = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{(\neg a \land \neg b)\} \cup \{\neg(\neg a \land \neg b)\}
  sub\left(\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right) = sub\left((\neg a \land g)\right) \cup sub\left((a \land f)\right) \cup \left\{\left((\neg a \land g) \lor (a \land f)\right)\right\}
                              = sub(\neg a) \cup sub(g) \cup \{(\neg a \land g)\} \cup sub(a) \cup sub(f) \cup \{(a \land f)\}
                              \cup \{((\neg a \land g) \lor (a \land f))\}
                              = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \land g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \{((\neg a \land g) \lor (a \land f))\}
                                                                                                           סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):
sub(\varphi_{foo}) = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \land h\} \cup \{(\neg a \land \neg b \land h)\} \cup \{(\neg a \land \neg b)\}
                          \cup \{\neg (\neg a \land \neg b)\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \land g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \{((\neg a \land g) \lor (a \land f))\}
                          \cup \left\{ \left( \neg (\neg a \land \neg b) \land \left( (\neg a \land g) \lor (a \land f) \right) \right) \right\}
                          \cup \left\{ \left( (\neg a \land \neg b \land h) \lor \left( \neg (\neg a \land \neg b) \land \left( (\neg a \land g) \lor (a \land f) \right) \right) \right) \right\}
                                                                                                                                          :sub(\varphi_{aoo}) כעת נמצא את
                          sub(\varphi_{qoo}) = sub(((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))))
                                                     = sub((a \wedge f)) \cup sub((\neg a \wedge ((b \wedge g) \vee (\neg b \wedge h)))
                                                     \cup \{((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))\}\}
                       sub((a \land f)) = sub(a) \cup sub(f) \cup \{(a \land f)\} = \{a\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\}
     sub((\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))
                                 = sub(\neg a) \cup sub\left(\left((b \land g) \lor (\neg b \land h)\right)\right) \cup \left\{(\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))\right\}
                                 = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup sub((b \land g)) \cup sub((\neg b \land h)) \cup \{((b \land g) \lor (\neg b \land h))\}
                                 \cup \{ (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)) \}
                                 = \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{g\} \cup \{(b \land g)\} \cup \{\neg b\} \cup \{b\} \cup \{h\} \cup \{(\neg b \land h)\}
                                 \cup \{ ((b \land g) \lor (\neg b \land h)) \} \cup \{ (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)) \}
```

סה"כ קיבלנו (לאחר מחיקת כפילויות):

$$sub(\varphi_{goo}) = \{a\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{g\} \cup \{(b \land g)\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{(\neg b \land h)\} \cup \{((b \land g) \lor (\neg b \land h))\} \cup \{((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))\} \cup \{((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))\}\}$$

נציב את תתי הנוסחאות שמצאנו בנוסחה הראשית ונקבל (לאחר מחיקת כפילויות):

$$sub(\neg \varphi) = sub(\varphi_{foo}) \cup sub(\varphi_{goo}) \cup \{\varphi\} \cup \{\neg \varphi\}$$

$$= \{a\} \cup \{\neg a\} \cup \{b\} \cup \{\neg b\} \cup \{h\} \cup \{\neg b \land h\} \cup \{(\neg a \land \neg b \land h)\} \cup \{(\neg a \land \neg b)\}$$

$$\cup \{\neg (\neg a \land \neg b)\} \cup \{g\} \cup \{(\neg a \land g)\} \cup \{f\} \cup \{(a \land f)\} \cup \{((\neg a \land g) \lor (a \land f))\}$$

$$\cup \{((\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f)))\}$$

$$\cup \{((\neg a \land \neg b \land h) \lor (\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f)))\} \cup \{(b \land g)\}$$

$$\cup \{((b \land g) \lor (\neg b \land h))\} \cup \{(\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h))\} \cup \{((a \land f) \lor (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)))\} \cup \{\varphi\} \cup \{\neg \varphi\}$$

 $: \neg \varphi$ נסמן כל אחת מתתי הנוסחאות של

$$C_{1} = \{ (\neg a \land \neg b \land h) \}$$

$$C_{2} = \{ (\neg (\neg a \land \neg b) \land ((\neg a \land g) \lor (a \land f))) \}$$

$$C_{3} = \{ (\neg a \land \neg b) \}$$

$$C_{4} = \{ \neg (\neg a \land \neg b) \}$$

$$C_{5} = \{ ((\neg a \land g) \lor (a \land f)) \}$$

$$C_{6} = \{ (\neg a \land g) \}$$

$$C_{7} = \{ (a \land f) \}$$

$$C_{8} = \{ (\neg a \land ((b \land g) \lor (\neg b \land h)) \}$$

$$C_{9} = \{ ((b \land g) \lor (\neg b \land h)) \}$$

$$C_{10} = \{ (b \land g) \}$$

$$C_{11} = \{ \neg b \land h \}$$

. p_c משתנה חדש $\neg \varphi$ של c

E(c) את $\neg \varphi$ את נוסחה שנכתוב היא: $p_{\neg \varphi} \land \bigwedge_{c \in sub(\neg \varphi)} E(c)$. לכן כעת נמצא לכל תת נוסחה שנכתוב היא:

$$E(a) = CNF(p_{\alpha} \leftrightarrow a) = (\neg p_{\alpha} \lor a) \land (\neg a \lor p_{\alpha})$$

$$E(b) = CNF(p_{b} \leftrightarrow b) = (\neg p_{b} \lor b) \land (\neg b \lor p_{b})$$

$$E(f) = CNF(p_{b} \leftrightarrow b) = (\neg p_{b} \lor b) \land (\neg b \lor p_{b})$$

$$E(f) = CNF(p_{b} \leftrightarrow b) = (\neg p_{b} \lor b) \land (\neg b \lor p_{b})$$

$$E(g) = CNF(p_{g} \leftrightarrow g) = (\neg p_{g} \lor g) \land (\neg g \lor p_{g})$$

$$E(h) = CNF(p_{h} \leftrightarrow h) = (\neg p_{h} \lor h) \land (\neg h \lor p_{h})$$

$$E(\neg a) = CNF(p_{h} \leftrightarrow h) = (\neg p_{h} \lor h) \land (\neg h \lor p_{h})$$

$$E(\neg b) = CNF(p_{h} \leftrightarrow \neg p_{h}) = (\neg p_{h} \lor \neg p_{h}) \land (p_{b} \lor p_{h})$$

$$E(-b) = CNF(p_{h} \leftrightarrow \neg p_{h}) = (\neg p_{h} \lor \neg p_{h}) \land (p_{b} \lor p_{h})$$

$$E(C_{11} = \neg b \land h) = CNF(p_{c_{11}} \leftrightarrow (p_{-b} \land p_{h})) = (\neg p_{c_{11}} \lor p_{-b}) \land (\neg p_{c_{11}} \lor p_{h}) \land (\neg p_{-b} \lor \neg p_{h} \lor p_{c_{12}})$$

$$E(C_{3} = \neg a \land \neg b) = CNF(p_{c_{3}} \leftrightarrow (p_{-a} \land p_{-b})) = (\neg p_{c_{3}} \lor p_{-a}) \land (\neg p_{c_{3}} \lor p_{-b}) \land (\neg p_{-a} \lor \neg p_{-b} \lor p_{c_{3}})$$

$$E(C_{6} = \neg a \land g) = CNF(p_{c_{6}} \leftrightarrow (p_{-a} \land p_{g})) = (\neg p_{c_{7}} \lor p_{a}) \land (\neg p_{c_{7}} \lor p_{g}) \land (\neg p_{-a} \lor \neg p_{-b} \lor p_{c_{7}})$$

$$E(C_{7} = a \land f) = CNF(p_{c_{1}} \leftrightarrow (p_{a} \land p_{g})) = (\neg p_{c_{7}} \lor p_{a}) \land (\neg p_{c_{7}} \lor p_{g}) \land (\neg p_{-a} \lor \neg p_{f} \lor p_{c_{7}})$$

$$E(C_{11} = b \land g) = CNF(p_{c_{1}} \leftrightarrow (p_{b} \land p_{g})) = (\neg p_{c_{7}} \lor p_{a}) \land (\neg p_{c_{7}} \lor p_{f}) \land (\neg p_{a} \lor \neg p_{f} \lor p_{c_{7}})$$

$$E(C_{11} = b \land g) = CNF(p_{c_{1}} \leftrightarrow (p_{b} \land p_{g})) = (\neg p_{c_{1}} \lor p_{a}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor p_{h}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor \neg p_{h} \lor p_{c_{1}})$$

$$E(C_{11} = C_{3} \land h) = CNF(p_{c_{3}} \leftrightarrow (p_{c_{3}} \land p_{h})) = (\neg p_{c_{1}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{h}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor \neg p_{h} \lor p_{c_{1}})$$

$$E(C_{11} = C_{3} \land h) = CNF(p_{c_{3}} \leftrightarrow (p_{c_{3}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{c_{1}}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor p_{h}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor \neg p_{h} \lor p_{c_{1}})$$

$$E(C_{11} = C_{3} \land h) = CNF(p_{c_{3}} \leftrightarrow (p_{c_{3}} \lor p_{c_{3}}) \Rightarrow (p_{c_{1}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{c_{2}}) \land (\neg p_{c_{1}} \lor \neg p_{h} \lor \neg p_{c_{1}} \lor p_{c_{1}})$$

$$E(C_{2} = C_{10} \lor C_{11}) = CNF(p_{c_{2}} \leftrightarrow (p_{c_{3}} \lor p_{c_{1}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{3}} \land (\neg p_{c_{1}} \lor \neg p_{c_{2}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{2}} \lor p_{c_{2$$

٦.

$$E(\neg \varphi) = CNF(p_{\neg \varphi} \leftrightarrow \neg p_{\varphi}) = (\neg p_{\neg \varphi} \lor \neg p_{\varphi}) \land (p_{\varphi} \lor p_{\neg \varphi})$$

יהיא: אנוריתם של צייטיין היא: $-\varphi$ בצורת לפי האלגוריתם של צייטיין היא

$$p_{\neg \varphi} \land \bigwedge_{c \in sub(\neg \varphi)} E(c)$$

החלק הזה של C עבור כל תת פסוקית בין כל ה-AND אין שרשור של AND אין החלק הוא ארשור של $\Lambda_{c\in sub(\neg\varphi)}E(c)$ הוא שרשור של החלקים בירוק. הראנו לעיל (לא כתבנו שוב את החישובים הסופיים, מאחר והם כתובים בעמוד הקודם) – כל החלקים שמסומנים בירוק.

ראשית נמספר את המשתנים של הנוסחה:

$$\begin{split} p_{c_1} &\Rightarrow 1, p_{c_2} \Rightarrow 2, p_{c_3} \Rightarrow 3, p_{c_4} \Rightarrow 4, p_{c_5} \Rightarrow 5, p_{c_6} \Rightarrow 6, p_{c_7} \Rightarrow 7, p_{c_8} \Rightarrow 8, p_{c_9} \Rightarrow 9, p_{c_{10}} \Rightarrow 10, \\ p_{c_{11}} &\Rightarrow 11, a \Rightarrow 12, b \Rightarrow 13, f \Rightarrow 14, g \Rightarrow 15, h \Rightarrow 16, p_a \Rightarrow 17, p_b \Rightarrow 18, p_f \Rightarrow 19, p_g \\ &\Rightarrow 20, p_h \Rightarrow 21, p_{\neg a} \Rightarrow 22, p_{\neg b} \Rightarrow 23, p_{\varphi_{goo}} \Rightarrow 24, p_{\varphi_{foo}} \Rightarrow 25, p_{\varphi} \Rightarrow 26, p_{\neg \varphi} \Rightarrow 27 \end{split}$$

(בראה כך: cnf עם סיומת DIMACS נראה כך:

2b.cnf

p cnf 27 59

270

-17120

-12 17 0

-22 -17 0

17220

-18 13 0

-13 18 0

-23 -18 0

18 23 0

-19 14 0

-14 19 0

-20 15 0

-15 20 0

-21 16 0

-16 21 0

-130

-1 21 0

-3 -21 1 0

-240

-250

-4-520

- -3220
- -3230
- -22 -23 3 0
- -4-30
- 340
- -5670
- -650
- -750
- *-6220*
- -6200
- -22 -20 6 0
- -7170
- -7190
- -17-1970
- -8220
- -890
- -22 -980
- -910110
- -1090
- -1190
- -10 18 0
- -10 20 0
- -18 -20 10 0
- -11 23 0
- -11 21 0
- -23 -21 11 0
- -25120
- -1 25 0
- *-2250*
- -24780
- -7240
- -8240
- -26 -25 24 0
- -26 25 -24 0
- 26 -25 -24 0
- 26 25 24 0
- -27 -26 0
- 26 27 0

ړ.

הרצנו את minisat על הקובץ 2b.cnf והתוצאה אכן יצאה unsat, כפי שניתן לראות בצילום המסך הבא:

```
shirataitel@ubuntu:~/Desktop/hasaka/1$ minisat 2b.cnf
WARNING: for repeatability, setting FPU to use double precision
   Number of variables:
Number of clauses:
     arse time:
    Eliminated clauses:
      implification time:
 olved by simplification
                                                      (0 /sec)
(-nan % random) (0 /sec)
(169 /sec)
 onflicts
 ecisions
 ropagations
 onflict literals
                                                       (-nan % deleted)
 emory used
PU time
                                 11.00 MB
                                 0.023686 s
 NSATISFIABLE
```

מאחר ו-arphi – לא ספיקה, אז נובע ש-arphi תקפה (לפי משפט שלמדנו בהרצאה), כלומר arphi תמיד ספיקה לכל השמה ומחזירה au .

הנוסחה φ היא מהצורה: goo הן שקולות (כי האם , $e=\varphi_{foo}\leftrightarrow\varphi_{goo}$, נובע ש-goo הן שקולות (כי האם , $\varphi=\varphi_{foo}\leftrightarrow\varphi_{goo}$), כלומר לכל קלט שתיהן יחזירו את אותו הפלט.

ד. צ"ל: A ספיקה אם ורק אם B ספיקה (לפי האלגוריתם של צייטין).

הוכחה:

נוכיח את הטענה באמצעות גרירה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון:</u>

נניחB ספיקה, ונוכיחB ספיקה.

נוכיח באינדוקציה מבנית עלc את הטענה $V(p_c)=V(c)$. הוכחה:

בסיס האינדוקציה

- אז גם $V \models B$ אז אז גם $V \models B$ ומכיוון ש- $p_C \lor C) \land (\neg C \lor p_C) : B$ אז גם $V \models B$ אז גם $C \lor D$ הוא משתנה אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב- $C \lor D$ הוא משתנה האלו. נחלק למקרים:
 - . $V(p_c)=true$ מכיוון ש-V(c)=true א. אם אם V(c)=true מספקת את מספקת את מספקת את אם
 - . $V(p_c)=false$ ב. אם V(c)=false, נובע ש-V(c)=falseב. אם מספקת את הפסוקית ש-

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

- אז גם $V \models B$ אז אז גם $(\neg p_C \lor true) \land (false \lor p_C) : B$ אז גם $V \models B$ אז גם $(2 \lor true) \land (false \lor p_C) : B$ אז גם $V(c) = V(p_C)$ את הפסוקיות האלו. לפי הפסוקית $(false \lor p_C)$, נובע ש- $(false \lor p_C)$ כדרוש.
- אז גם $V \vDash B$ אז אז גם $(\neg p_C \lor false) \land (true \lor p_C) : B$ אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב- $(3 \lor V(c) = V(p_c))$, ולכן $(3 \lor V(c) = V(p_c))$, ולכן $(3 \lor V(c) = V(p_c))$, נובע ש- $(3 \lor V(c) = V(p_c))$, נובע ש- $(3 \lor V(p_c) = false)$

צעד האינדוקציה

- אז גם $V \models B$ אז או ש- $p_C \lor \neg p_D) \land (p_D \lor p_C)$ אז גם $V \models B$ אז גם $C \lor \neg D$ הוא $C \lor \neg D$ הוא מופיעה ב- $C \lor \neg D$ אז גם $C \lor \neg D$ הוא מספקת את האלו. נחלק למקרים:
- -א א לפי הגדרת האינדוקציה מתקיים ש , V(D)=false א. אם א לפי הגדרת א לפי הגדרת מתקיים ש א לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש א לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש $V(p_c)=true$. א מספקת את הפסוקית ($V(p_c)=true$) . א מספקת את הפסוקית ($V(p_c)=true$)
- -ם. אם V(c)=false אז לפי הגדרת מתקיים ש- מתקיים ש- ער , ער או לפי הגדרת מתקיים ש- ער האינדוקציה מתקיים ש- $V(p_c)=false$. ער מספקת את הפסוקית $V(p_c)=false$, נובע ש- $V(p_c)=false$. ער מספקת את הפסוקית את הפסוקית (קר אין מספקת את הפסוקית).

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

- אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב- $(\neg p_C \lor p_{C_1}) \land (\neg p_C \lor p_{C_2}) \land (\neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2} \lor p_C)$ ומכיוון ש- $(\neg p_C \lor p_{C_1}) \land (\neg p_C \lor p_{C_2}) \land (\neg p_C \lor p_C)$, ומכיוון ש- $(\neg p_C \lor p_{C_1}) \land (\neg p_C \lor p_C)$ אז גם $(\neg p_C \lor p_C) \land (\neg p_C \lor p_C)$, ומכיוון ש- $(\neg p_C \lor p_C) \land (\neg p_C \lor p_C)$
- א. אם $V(C_1)=true$, אם מתקיים ש- $V(C_2)=true$ מתקיים ש- $V(C_1)=true$, אז לפי הנחת האינדוקציה $V(C_1)=true$, מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$, אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$, אז לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(p_{C_1})$ אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(p_{C_1})$ מכיוון ש-
- ב. אם $V(C_2)=false$ או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=false$ או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=false$ ב. אם אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$ מספקת את הפסוקית ($\neg p_C \lor p_{C_1}$), נובע ש- $V(p_c)=false$

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

- אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב-B: (3 א $C_1 \lor p_{C_1} \lor p_{C_2} \lor p_{C_2} \lor P_{C_2} \lor P_{C_2}$), ומכיוון ש- $C_1 \lor C_2 \lor P_{C_2} \lor P_{C_2}$, ומכיוון ש- $C_1 \lor C_2 \lor P_{C_2} \lor P_{C_2}$ אז גם $V \vDash B$
- או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=true$ או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=true$ או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=true$ או שניהם. נניח בלי $V(C_1)=V(p_{C_1})=V(p_{C_1})$ אוי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1)=true$. מספקת את הפסוקית ($\neg p_{C_1} \lor p_{C_2}$), נובע ש- $V(p_c)=true$
- ב. אם $V(C_1)=false$, אז לפי הנחת מתקיים ש- $V(C_1)=false$, אם לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1)=false$, אז לפי הנחת האינדוקציה ע- $V(C_1)=V(p_{C_1})$, אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$, אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(p_{C_1})$, אז לפי הגדרת מתקיים ש- $V(p_{C_1})$, אז לפי הנחת האינדוקציה ע- $V(p_{C_1})$, אז לפי הנחת האינדוקציה ע- $V(p_{C_1})$, און אינדוקציה ע- $V(p_{C_1})$, און לפי הנחת האינדוקציה ע- $V(p_{C_1})$ און לפי הנחת האינדות האינדות

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

- -ש ומכיוון ש- $(\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor p_{C_2}) \land (p_{C_1} \lor p_C) \land (\neg p_{C_2} \lor p_C)$ אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב- $(A \lor p_C) \land (p_{C_1} \lor p_C) \land (p_{C_2} \lor p_C)$ אז גם $(A \lor p_C) \land (p_C) \land ($
 - א. אם V(c) = true בחלק למקרים:
- Vעט. $V(C_2)=V(p_{C_2})$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1)=true$. מכיוון ש- $V(C_1)=true$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$
- -ש מכיוון ש. $V(\mathcal{C}_2)=V(p_{\mathcal{C}_2})$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש. $V(\mathcal{C}_1)=false$. מכיוון ש. $V(\mathcal{C}_2)=true$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$
- מכיוון ש. $V(C_1)=V(p_{C_1})$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש. $V(C_1)=false$. $V(C_1)=false$. $V(C_2)=false$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$
- ב. אם $V(C_1)=true, V(C_2)=false$ מתקיים ש- $V(C_1)=true, V(C_2)=false$ ב. אם אינדוקציה לפי הגדרת מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$ מתקיים ש- $V(C_1)=V(p_{C_1})$, או לפי הנחת האינדוקציה $V(C_1)=V(p_{C_1})$, או לפי הנחת האינדוקציה $V(C_1)=V(p_{C_1})$, או לפי הנחת האינדוקציה $V(p_c)=false$ נובע ש- $V(p_c)=false$

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

:*B*-אזי הנוסחה הבאה מופיעה ב - $\mathcal{C}_1 \leftrightarrow \mathcal{C}_2$ הוא \mathcal{C} (5

אז גם $V \vDash B$ - אז ומכיוון ש $(\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor p_{C_2}) \land (\neg p_C \lor p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}) \land (p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}) \land (p_C \lor p_{C_1} \lor p_{C_2})$ אז גם $V \vDash B$ - אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$) אז גם ($\neg p_C \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2} \lor \neg p_{C_2}$)

- :נחלק למקרים V(c)=true א.
- $V(C_1) = V(p_{C_1}), V(C_2) = -$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש $V(C_1) = true$, $V(C_1) = true$. $V(p_c) = true$. $V(p_c) = true$, $V(p_c) = true$. $V(p_c) = true$. $V(p_c) = true$. $V(p_c) = true$
- $V(C_1)=Vig(p_{C_1}ig), V(C_2)=V(p_{C_1}ig), V(C_2)=V(p_{C_1}ig)$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(C_1)=false$ $V(C_1)=false$ $V(p_c)=true$. $V(p_c)=true$ מכיוון ש- $V(p_c)=true$ מספקת את הפסוקית . $V(p_c)=true$
 - ב. אם V(c) = false ב.
- $V(\mathcal{C}_1)=V(p_{\mathcal{C}_1}), V(\mathcal{C}_2)=V(p_{\mathcal{C}_1}), V(\mathcal{C}_2)=V(p_{\mathcal{C}_1})$. אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(\mathcal{C}_1)=true$. $V(p_{\mathcal{C}_1})=false$. $V(p_{\mathcal{C}_2})=false$. $V(p_{\mathcal{C}_2})=false$
- $V(\mathcal{C}_1)=Vig(p_{\mathcal{C}_1}ig), V(\mathcal{C}_2)=-$ אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(\mathcal{C}_1)=false$. אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(\mathcal{C}_1)=false$. אזי לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש- $V(\mathcal{C}_1)=false$. אזי לפי הנחת הפסוקית: $V(\mathcal{C}_1)=false$. אזי לפי הנחת הפסוקית: $V(\mathcal{C}_1)=false$. אזי לפי הנחת הפסוקית: $V(\mathcal{C}_1)=false$.

סה"כ קיבלנו $V(c) = V(p_c)$ כדרוש.

. סה"כ הוכחנו שלכל תת נוסחה c של c, מתקיים: $V(p_c)=V(c)$, ולכן A ספיקה לפי ההסבר לעיל.

<u>כיוון שני:</u>

Bנניח A ספיקה, ונוכיח B ספיקה.

תהי V השמה שמספקת את A, כלומר A בוכיח ש-B ספיקה על ידי שנגדיר השמה חדשה V' ונוכיח שהיא מספקת את V האים: B. נגדיר את V' באופן הבא, V' מקבלת קלט כלשהו A ומחזירה את הפלט לפי שני המקרים הבאים:

- V'(a) = V(a) אז: A-משתנה ב משתנה ב.1
- $V'(a)=V(\mathcal{C})$ אז: \mathcal{A} אז: \mathcal{C} עבור תת נוסחה \mathcal{C} כלשהי ב- \mathcal{A} , אז: \mathcal{C}

 $V' \vDash B$:כאמור צריך להוכיח

הוכחה:

היא מהצורה הבאה: B

$$p_A \wedge \bigwedge_{C \in sub(A)} E(C)$$

:בשני שלבים $V' \models B$ נוכיח ש

- $V'(p_A) = true$ -נראה ש.1
- $C \in sub(A)$ לכל V'(E(C)) = true .2

שלב ראשון

A מכיוון ש- p_A הוא קלט מהצורה שתואמת למקרה השני בהגדרת V', אזי מתקיים: $V'(p_A)=V(A)$. כמו כן, לפי ההנחה $V'(p_A)=true$ ספיקה לפי $V'(p_A)=true$, ולכן מתקיים $V'(p_A)=true$, ולכן מתקיים

שלב שני

:תהי $\mathcal{C} \in sub(A)$, נחלק למקרים

:הוא משתנה – אז מתקיים \mathcal{C} (1

$$E(C) = (\neg p_C \lor C) \land (\neg C \lor p_C)$$

נחלק למקרים:

- $V'(p_c)=V(C)=V(C)$ א. אם פיוון ש-C הוא משתנה שמופיע ב-C, אז עבי הגדרת און ש-C לפי הגדרת ע-C הוא משתנה שמופיע ב-C, אז עבי הגדרת און ש-C במקרה הזה במקרה הזה E(C) במקרה הזה בייע לכן מתקיים בייע בייע און און און און בייע מהפסוקיות בייע מחתפקת.
- $V'(p_c)=V(C)=V(C)$ ב. V'(C)=V(C)=V(C) לפי הגדרת (כמו כן, כמו כן, ב-V(C)=false ב. הוא משתנה שמופיע ב-V(C)=V(C)=V(C) במקרה ב- $V'(C)=V'(p_c)=false$ במקרים לפי הגדרת ($V'(C)=V'(p_c)=false$ במקרים במקרת.

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:אז מתקיים *c* (2

$$E(C) = (\neg p_C \lor true) \land (false \lor p_C)$$

כמו כן, $V'(p_c)=true$ בנוסף, $V'(p_c)=V(C)$ לפי הגדרת לפי הגדרת $V'(p_c)=V(C)$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב-E(C) במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים true כדרוש.

:הוא *false א*ז מתקיים *C* (3

$$E(C) = (\neg p_C \lor false) \land (true \lor p_C)$$

כמו כן, $V'(p_c)=false$ בנוסף, $V'(p_c)=V(C)$ לפי הגדרת $V'(p_c)=V(C)$, לכן כל אחת כון גנוסף, $V'(p_c)=V(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:הוא $C - \neg D$ הוא C

$$E(C) = (\neg p_C \lor \neg p_D) \land (p_D \lor p_C)$$

נחלק למקרים:

- א. אז $V'(p_c)=V(C), V'(p_D)=V(D)$, כמו כן V(D)=false לפי הגדרת לפי הגדרת אוע. אז $V'(p_c)=V(C)$, לכן מתקיים אוע. כמו כן $V'(p_c)=true$, לכן כל אחת מהפסוקיות ב- $V'(p_c)=true$, אוע.
- ב. $V'(p_c)=V(C), V'(p_D)=V(D)$ לפי הגדרת V'(D)=true לפי הגדרת און לכן מתקיים $V'(p_c)=V(C), V'(p_D)=V(D)$ לכן כל אחת מהפסוקיות ב- $V'(p_c)=false, V'(p_D)=true$ לכן כל אחת מהפסוקיות ב- $V'(p_c)=false, V'(p_D)=true$

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:הוא $C_1 \wedge C_2$ אז מתקיים C (5

$$E(C) = (\neg p_C \lor p_{C_1}) \land (\neg p_C \lor p_{C_2}) \land (\neg p_{C_1} \lor \neg p_{C_2} \lor p_C)$$

נחלק למקרים:

- $V(C_1)=true, V(C_2)=true$ א. $V(C_1)=true, V(C_2)=true$ א. $V'(C_1)=true, V'(C_2)=true, V'(p_{c_1})=V(C_1), V'(p_{c_2})=V(C_2)$ לפי הגדרת $V'(p_{c_1})=V(C_1), V'(p_{c_2})=V(C_2)$ במקרה לכן מתקיים E(C)-במקרות ב-E(C)-במקרות מהפסוקיות ב-E(C)-במקרת.
- $V(C_1)=$ ב. או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $V(C_1)=false$ ב. או שניהם ער $V(C_1)=false$ או שניהם ער $V'(p_c)=false$ או שניהם ער $V'(p_c)=false$ או ער $V'(p_c)=V(C)$ או שניהם ער $V'(p_c)=V(C)$ או שניהם ב $V'(p_c)=V(C)$ במקרה הזה מסתפקת. ב $V'(p_c)=V(C)$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:אז מתקיים – $C_1 \vee C_2$ הוא C (6

$$E(\mathcal{C}) = (\neg p_{\mathcal{C}} \lor p_{\mathcal{C}_1} \lor p_{\mathcal{C}_2}) \land (\neg p_{\mathcal{C}_1} \lor p_{\mathcal{C}}) \land (\neg p_{\mathcal{C}_2} \lor p_{\mathcal{C}})$$

נחלק למקרים:

- $V(C_1)=$ או שניהם. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $V(C_1)=true$ א. א. א. אי $V(C_1)=true$ או שניהם על או שניהם על או שניהם או על או או על או על
- $V(C_1)=false$, אז $V(C_2)=false$ ב. $V(C_1)=false$, אז $V(C_2)=false$, און $V'(p_c)=V(C)$, $V'(p_{C_1})=V(C_1)$, און $V'(p_{C_2})=V(C_2)$ לפי הגדרת $V'(p_{C_2})=V(C_2)$, און ב- $V'(p_{C_1})=false$, און ב- $V'(p_{C_2})=false$, און ב-V'(

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:הוא $C_1 \rightarrow C_2$ אז מתקיים C (7

$$E(C) = (\neg p_C \lor \neg p_{C_1} \lor p_{C_2}) \land (p_{C_1} \lor p_C) \land (\neg p_{C_2} \lor p_C)$$

נחלק למקרים:

- א. V(C) = true מקרים:
- לכן מתקיים $V'(p_c)=V(C), V'\left(p_{C_2}\right)=V(C_2)$ אז $V(C_1)=true, V(C_2)=true$ $V(C_1)=true, V'(p_{C_2})=true$. לכן כל אחת מהפסוקיות בE(C) במקרה הזה מסתפקת.
- לכן מתקיים $V'(p_c)=V(C), V'\left(p_{C_2}\right)=V(C_2)$ אז $V(C_1)=false, V(C_2)=true$ $V(C_1)=false, V(C_2)=true$. לכן מתקיים E(C) במקרה הזה מסתפקת. $V'(p_c)=true, V'\left(p_{C_2}\right)=true$
- לכן מתקיים $V'(p_c)=V(\mathcal{C}), V'\left(p_{\mathcal{C}_1}\right)=V(\mathcal{C}_1)$ אז $V(\mathcal{C}_1)=false$, לכן מתקיים $V'(p_c)=V(\mathcal{C}_1)$ לכן מתקיים $V'(p_c)=false$ $V'(p_c)=false$ $V'(p_c)=false$
- $V(C_1)=true, V(C_2)=false$ ב. V(C)=false אז $V(C_1)=true, V(C_2)=false$ ב. $V'(C_1)=V(C_1), V'(p_{C_1})=V(C_1), V'(p_{C_2})=V(C_2)$ לפי הגדרת $V'(p_{C_1})=V(C_1), V'(p_{C_2})=V(C_2)$ לכן מתקיים $V'(p_{C_1})=true, V'(p_{C_2})=false$ במקרה הזה מסתפקת.

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

:הוא $C_1 \leftrightarrow C_2$ הוא C (8

$$\begin{split} E(\mathcal{C}) &= (\neg p_{\mathcal{C}} \vee \neg p_{\mathcal{C}_1} \vee p_{\mathcal{C}_2}) \wedge (\neg p_{\mathcal{C}} \vee p_{\mathcal{C}_1} \vee \neg p_{\mathcal{C}_2}) \wedge (p_{\mathcal{C}} \vee \neg p_{\mathcal{C}_1} \vee \neg p_{\mathcal{C}_2}) \wedge (p_{\mathcal{C}} \vee p_{\mathcal{C}_1} \vee p_{\mathcal{C}_2}) \\ &: \text{Endfg dag-right} \end{split}$$

- א. V(C) = true בחלק למקרים:
- לפי $V'(p_c)=V(C), V'(p_{C_1})=V(C_1), V'(p_{C_2})=V(C_2)$ אז $V(C_1)=true, V(C_2)=true$ - אז $V(C_1)=true, V'(p_{C_1})=true, V'(p_{C_2})=true$ הגדרת' $V(p_c)=true, V'(p_{C_1})=true, V'(p_{C_2})=true$ במקרה הזה מסתפקת.

- לפי $V'(p_c)=V(C), V'\left(p_{C_1}\right)=V(C_1), V'\left(p_{C_2}\right)=V(C_2)$ אז $V(C_1)=false, V(C_2)=false$ - $V'(p_c)=true, V'\left(p_{C_1}\right)=false$ $V'(p_{C_2})=false$ $V'(p_{C_2})=false$ $V'(p_{C_2})=false$ במקרה הזה מסתפקת.
 - ב. V(C) = false ב.
- לפי $V'(p_c)=V(C), V'\big(p_{C_1}\big)=V(C_1), V'\big(p_{C_2}\big)=V(C_2)$ אז $V(C_1)=true, V(C_2)=false$ $V'(p_c)=false$ קלכן כל אחת מהפסוקיות $V'(p_c)=false, V'(p_{C_1})=true, V'\big(p_{C_2}\big)=false$ במקרה הזה מסתפקת.
- לפי $V'(p_c)=V(C), V'\left(p_{C_1}\right)=V(C_1), V'\left(p_{C_2}\right)=V(C_2)$ אז $V(C_1)=false, V(C_2)=true$ פי $V'(p_c)=false, V'\left(p_{C_1}\right)=false$, $V'\left(p_{C_2}\right)=true$ הגדרת לכן מתקיים $V'(p_c)=false$, $V'\left(p_{C_2}\right)=true$ ב- $V'(p_c)=false$.

סה"כ מתקיים V'(E(C)) = true כדרוש.

. ספיקה ספיקה B' ספיקה B' ספיקה C' לכן קיבלנו ש-C' לכל V'(E(C)) = true ספיקה כדרוש.

. לסיכום, הוכחנו שאם A ספיקה אז B ספיקה ולהפך, ובכך הוכחנו את הטענה

שאלה 3

3. הוכיתו/הפריכו:

(א) קיימת נוסחת CNF שבה בכל פסוקית יש לפחות שני ליטרלים, אך היא אינה ספיקה.

(ב) קיימת נוסחת CNF בצורת שבה בכל פסוקית שבה בכל פסוקית שני ליטרלים, אך היא אינה ספיקה.

(ג) לכל נוסחה F מתקיים: F תקפה אם ורק אם לכל מתקיים:

א. הוכחה:

נראה שקיימת נוסחת CNF שבכל פסוקית שלה יש לפחות 2 ליטרלים, והיא אינה ספיקה. להלן הנוסחה:

$$(x \lor y) \land (\overline{x} \lor \overline{y}) \land (\overline{x} \lor y) \land (x \lor \overline{y})$$

נוכיח שהיא אינה ספיקה על ידי כך שנעבור על כל האפשרויות להשמות:

$$x = T, y = T \tag{1}$$

בהשמה זו הפסוקית ($\overline{x} \lor \overline{y}$) לא מסופקת כי:

$$(\overline{x} \vee \overline{y}) = (F \vee F) = F$$

ולכן כל הנוסחה לא מסופקת.

$$x = T, y = F \tag{2}$$

:בהשמה זו הפסוקית ($\overline{x} \vee y$) לא מסופקת כי

$$(\overline{x} \lor y) = (F \lor F) = F$$

$$x = F, y = T \tag{3}$$

בהשמה זו הפסוקית ($x \vee \overline{y}$) לא מסופקת כי:

$$(x \vee \overline{y}) = (F \vee F) = F$$

$$x = F, y = F \tag{4}$$

בהשמה זו הפסוקית ($x \lor y$) לא מסופקת כי:

$$(x \lor y) = (F \lor F) = F$$

כלומר, עברנו על כל ההשמות האפשריות, ובכל אחת מהן יש פסוקית שלא מסופקת, וכתוצאה מכך כל הנוסחה לא מסופקת, ולכן הראנו שהנוסחה לא ספיקה.

ב. הפרכה:

נוכיח שלא קיימת נוסחת CNF בצורת HORN שבה בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים והיא לא ספיקה, כלומר נוכיח שאם בנוסחת F, נסמנה ב-F, בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז F ספיקה.

 $\mathit{.false}$ תהי v השמה מציבה לכל משתנה את הערך, כלומר ההשמה מציבה לכל משתנה את הערך, תהי v

Fנוכיח ש- $v \models F$, כלומר ההשמה מספקת את כל הפסוקיות ב

:
$$v \models c$$
-נראה ש- F , נראה ש- c

לפי הנתון בטענה שלכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים, ידוע שב-c גם יש לפחות 2 ליטרלים, ומהנתון ש-c היא נוסחת c לפי הגדרת ע שכל פסוקית יש לכל היותר ליטרל אחד חיובי, ובפרט ב-c. לכן קיים משתנה c כך שהשלילה שלו \overline{x} מופיעה ב-c. לפי הגדרת ע מספקת יש לכל היותר ליטרל אחד חיובי, ובפרט ב-c. לכן קיים משתנה c ולכן c ולכן

סה"כ הראנו שאם בנוסחת *HORN* בכל פסוקית יש לפחות 2 ליטרלים אז היא ספיקה, ובכך הפרכנו את הטענה.

ג. הוכחה:

נוכיח באמצעות גרירה דו כיוונית.

. אינה ספיקה את הטענה הבאה: $F \leftrightarrow \neg F$ תקפה את הטענה הטענה הבאה.

כיוון ראשון: $F \leftarrow \neg F$ תקפה כיוון ראשון: (1

 $v(\neg(\neg F)) = false$ נניח בשלילה ש-F לכן v לכן קיימת השמה ע כך ש-F לכן נניח בשלילה ש-ק

:כלומר

$$v(\neg(\neg F)) = v(F) = false$$

בעצם קיבלנו שקיימת השמה u שלא מספקת את u,אך לפי ההנחה u תקפה, ולפי ההגדרה – נוסחה היא ספיקה אם כל השמה מספקת אותה, ולכן הגענו לסתירה. כלומר ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן uר אינה ספיקה כנדרש.

כיוון שני: $F \longrightarrow$ תקפה קינה ספיקה

v(F) = false: F לא תקפה. כלומר קיימת השמה V שלא מספקת את F- נניח בשלילה ש

לכן $v(\neg F) = true$, וקיבלנו שקיימת השמהv שמספקת את F—, אך הנחנו שF— אינה ספיקה, כלומר לא קיימת השמה שמספקת אותה, ולכן קיבלנו סתירה. כלומר, ההנחה שלנו בשלילה לא נכונה, ולכן F תקפה כנדרש.