هر کدام از دستگاه معادلات زیر را با استفاده از قاعده کرامر حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ -y + z = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & +1 & 3 \\ 0 & -1 & +1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & +1 & 3 \\ 2 & -1 & +1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = A_1}{6} \rightarrow x_1 = \frac{10}{6}$$

$$\det A = -2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{+1-2=-1} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} +1 & 3 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}}_{1+3}$$

$$\det A = +2 + 4 = 6$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = A_2}{6} \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{6}$$

$$\det A_1 = -2 \times \begin{vmatrix} +1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} +1 & 3 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}$$

$$\det A_1 = -2 \times (\underbrace{-1-6}_{-7}) - 1 \times (\underbrace{1+3}_{4}) = \boxed{10}$$

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = A_3}{6} \Rightarrow x_3 = \frac{8}{6}$$

$$\det A_2 = -2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A_2 = -2 \times (\overset{-1}{\cancel{-2+1}}) + 1 \times (0 - 6) = \boxed{-3}$$

$$\det A_3 = -2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A_3 = -2 \times (\overset{-3}{\cancel{+1-4}}) + 1 \times (2) = 8$$

ت)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 3y - 2z = 6 \\ 3z - 2x = -1 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (9) - 2 \times (+4) = \boxed{21}$$

$$x_1 = \frac{A_1}{\det A} = \frac{95}{21}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det A_1 = 7 \times \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{9} + 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{18-2 = 16} = \boxed{95}$$

$$63 + 32 = 95$$

$$x_2 = \frac{A_2}{\det A} = \frac{91}{21}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det A_2 = 3 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{18+3 = 21} - 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}_{-14} = \boxed{91}$$

$$63 + 28$$

$$x_3 = \frac{A_3}{\det A} = \frac{55}{21}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A_3 = 3 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}_{-12-21 = -32} = \boxed{55}$$

$$-9 \qquad +64$$

ب)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{۱ برابر سطر ۳ به سطر اول و چهارم اضافه میکنم}} \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow -1 \times \left(1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{-4-2} + 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{2-6} \right) =$$

$$-1 \times (-8 - 4) = \boxed{+12}$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad x_4 = \frac{\det A_4}{\det A}$$

$$x_1 = \frac{-20}{+12}$$ و

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ستون ۳ جمع با ستون چهارم

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۳ برابر ستون ۳ جمع با ستون ۱

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-\det \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 7 \times \underbrace{(-1-2)}_{-3} - 1 \underbrace{(-1-6)}_{-7} + 3 \underbrace{(1-3)}_{-2}$$

$$= -21 + 7 - 6 = \boxed{-20}$$

ب) تمرین ۱_ حل دستگاه معادلات کرامر،

ب)
$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 6x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 4 \times (4+3) - 6\underbrace{(-2-9)}_{-11} + 3\underbrace{(1-6)}_{-5}$$

$$\det A = 28 + 66 - 15 = \underline{79}$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{12}{79}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-27}{79}$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-2}{79}$$

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (4+3) - \overset{-5}{(\cancel{1-6})} = \underline{12}$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{12+3} - 1 \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}_{-4-18 \,=\, -22} \Rightarrow \underline{-27}$$

$$\boxed{15+22} \to 27$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\det} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \underline{-2}$$

$6-18 = -12$, $-6-8$, $+14$, $+2$, $-\det$

ادامه ی سؤال ب)

ادامه‌ی سوال صفحه‌ی ۶ _ سوال ۷

نشان دهید:

$$\det\begin{bmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & x+d \end{bmatrix} = a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4$$

$$x \times \underbrace{\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ b & c & x+d \end{vmatrix}}_{A_1} - a \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}}_{A_2}$$

$$x \det A_1 - a \det A_2 \Rightarrow$$

$$x \cdot \left(x \cdot (x^2 + dx + c) + b\right) - a \cdot \left(-1 \right)$$

$$x\left(x^3 + dx^2 + cx + b\right) + a =$$

$$x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a \Rightarrow a + bx + cx^2 + dx^3 + x^4$$

$\det A_1 =$

$$x \begin{vmatrix} x & -1 \\ c & x+d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}$$

b $\quad$ $+1$

$\det A_2 =$

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}$$

$+1$

$$-1 \times 1 \Rightarrow -1$$

۳- دترمینان هر یک از ماتریس‌ها زیر را بیابید:

الف)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \det B = 3+1 = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 3 - 2 = \underline{1}$$

$$\det A \cdot \det B = \underline{4}$$

ب)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \cdot \det B = 7 \times 5 = \underline{35}$$

$$\det B = \cancel{2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}$$

$-1-6$

$$\underline{\det B = +7}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$$

پ)
$$M = \begin{bmatrix} A & X & Y \\ 0 & B & 0 \\ 0 & Z & C \end{bmatrix}$$ (A, B, C ماتریس‌ها مربع هستند)

$$\det = A \begin{vmatrix} B & 0 \\ Z & C \end{vmatrix} - 0 \cancel{\begin{vmatrix} X & Y \\ Z & 0 \end{vmatrix}} - 0 \cancel{\begin{vmatrix} X & Y \\ B & 0 \end{vmatrix}} \Rightarrow \det = A \begin{vmatrix} B & 0 \\ Z & C \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det(M) = A \cdot \det B \cdot \det C}$$

د - نشان دهید

$$\det\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\to (bc-ab-ac+a^2)(c-b) =$$

$$(a^2-a(b+c)+bc)(c-b) =$$

$$[a^2c - a^2b - a\underbrace{(c-b)(b+c)}_{c^2-b^2} + bc^2 - b^2c$$

$$ca^2 - ba^2 - ac^2 + ab^2 + bc^2 - b^2c$$

$$\det\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{bmatrix} = 1\begin{vmatrix}b&b^2\\c&c^2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}a&a^2\\c&c^2\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}a&a^2\\b&b^2\end{vmatrix} =$$

$$ac^2 - ca^2$$

$$bc^2 - cb^2 - ac^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 = \det M$$

ه - نشان دهید

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx) = \det\begin{bmatrix}1&x&x^2&x^3\\a&1&x&x^2\\p&b&1&x\\q&r&c&1\end{bmatrix}$$

۲- ماتریس الحاقی هریک از ماتریس‌های زیر را بیابید:

الف) $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$

$\alpha_{۱۱} = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{زوج}} ۸-۹ = -۱$

$\alpha_{۱۲} = \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{فرد}} -۸-۳ = -۱۱$

$\alpha_{۱۳} = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{زوج}]{} -۳-۱ = -۴$

$A^{-1} = \dfrac{adj A}{det A}$

$\alpha_{۲۱} = \begin{vmatrix} \cancel{۱} & \cancel{۲} \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{فرد}]{} \cancel{۲۴-۲ = ۲۲ \to -۲۲}$ $۸ - \cancel{۶} \to +۲ \to -۲$

$adj A = \begin{vmatrix} -۱ & -۲ & ۱ \\ ۱۱ & ۲۲ & -۱۱ \\ -۴ & ۴ & +۴ \end{vmatrix}$

$\alpha_{۲۲} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{زوج}]{} ۲۴-۲ = ۲۲$

$det A =$ ۸-۶

$\alpha_{۲۳} = \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{فرد}]{} -۳-۱ = -۴ \to +۴$

$۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} + ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix}$

$+ ۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \Rightarrow -۱ \times ۳ + ۲ + ۱ = ۰$

$\alpha_{۳۱} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{زوج}} ۳-۲ = ۱$

$\alpha_{۳۲} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{فرد}} ۹+۲ = +۱۱ \to -۱۱$

$det A = ۳ \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۸ \end{vmatrix} - ۱ \begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & ۸ \end{vmatrix}$

$-۳ \qquad -۸-۳ \quad +۱۱$

$\alpha_{۳۳} = \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \quad ۳+۱ = ۴ \to +۴$

$+ ۲ \begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} =$

$-۳-۱ = -۴ \times ۲ = -۸$

$\Downarrow$

$C = \begin{vmatrix} -۱ & -۱۱ & -۴ \\ -۲ & ۲۲ & ۴ \\ ۱ & -۱۱ & +۴ \end{vmatrix} \xrightarrow{C^t} \begin{vmatrix} -۱ & -۲ & ۱ \\ -۱۱ & ۲۲ & -۱۱ \\ -۴ & ۴ & +۴ \end{vmatrix}$

$-۱۱ + ۱۱ = ۰$

A^{-1} ندارد

۲- ماتریس الحاقی (ب)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \cancel{|\ \ |} =$$

$$1 - 3 \times |-1+2| = \boxed{-2}$$

$$\operatorname{adj}A \Rightarrow C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} \rightsquigarrow C^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{زوج}} 1$ ، $C_{12} = \underset{\text{فرد}}{} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pm 0$ ، $C_{13} = \underset{\text{زوج}}{} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$C_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{فرد}} 1 \to -1$ ، $C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ، $C_{23} = \text{فرد} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \to +1$

$C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{زوج}} -2$ ، $C_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{فرد}}{=} \boxed{+6}$ ، $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & +1 \\ -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = C \rightsquigarrow A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}A}{\det A} = \frac{C^{-1}}{-2}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{3}{2} & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

۳- به ازای چه مقادیری از c ماتریس ها کدام زیر معکوس پذیرند:

الف)

$$\begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطر دوم + سطر سوم}} A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0$$

$$\det A_1 = +1\begin{vmatrix} c & -c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} c & -c \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = c(\cancel{-c}+2c) \Rightarrow c^2$$

به ازای $c \neq 0$ ماتریس A_1 معکوس پذیر است.

ب)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(-1) برابر ستون ۳ با ستون اول جمع}} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & c & 3 \\ 0 & 2 & c \\ 1 & c & 4 \end{bmatrix}$$

(-1) برابر سطر اول جمع با سطر سوم

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & c & 3 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = 1 \times \begin{vmatrix} c & 3 \\ 2 & c \end{vmatrix}$$

$$c^2 - 6 \neq 0 \Rightarrow c \neq \pm\sqrt{6}$$

به ازای $c \neq \pm\sqrt{6}$ A_2 معکوس پذیر است.

ج)

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

۱ برابر ستون اول جمع با ستون ۳ $\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ c & 1 & c \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}$

$$\det A_3 = 1\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & c \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} \Rightarrow 1\times(\cancel{c-c}) - c(c^2-1) \neq 0$$

$$-c^3 + c \neq 0 \qquad c - c^3 \neq 0 \rightarrow c(1-c^2) \neq 0$$

$$c(1-c)(1+c) \neq 0$$

به ازای $c \neq -1$ و 0 و $+1$، A_3 معکوس پذیر است.

۴) فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{bmatrix}$ ، $\det A = 3$ مطلوب است:

الف) $\det(3B^{-1})$ ، $B=\begin{bmatrix} 4u & 2a & -p \\ 4v & 2b & -q \\ 4w & 2c & -r \end{bmatrix}$

$$\det B = -1\times 2\times 4 \begin{bmatrix} u & a & p \\ v & b & q \\ w & c & r \end{bmatrix} \to \det B = -8 \det \begin{bmatrix} u & a & p \\ v & b & q \\ w & c & r \end{bmatrix}$$

$$-1 \to +8 \to -1 \to -8$$

$$-8\det \begin{bmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & w \end{bmatrix}$$

$$-8 \det A^{t} = \det B$$

$$B^{-1} = \frac{\operatorname{adj} B}{\det B}$$

ب) $C=\begin{bmatrix} 2p & -a+u & 3u \\ 2q & -b+v & 3v \\ 2r & -c+w & 3w \end{bmatrix}$ ، $\det(2C^{-1})$

$$\det C = 2\times 3 \det \begin{bmatrix} p & u-a & u \\ q & v-b & v \\ r & w-c & w \end{bmatrix}$$

ستون سوم + ستون دوم

$$2\times 3 \det \begin{bmatrix} p & -a & u \\ q & -b & v \\ r & -c & w \end{bmatrix}$$

$$-6\det \begin{bmatrix} p & a & u \\ q & b & v \\ r & c & w \end{bmatrix} = \det C$$

$$-6 \det A^{t} = \det C$$