شیرین جمشیدی
۸۱۰۱۹۹۵۷۰
محیا شهشهانی
۸۱۰۱۹۹۵۹۸

کنترل مدرن

فاز اول

استاد: دکتر کبریایی
تاریخ تحویل: دی/۱۴۰۲

۱.۱. معادلات حالت سیستم:

$$x_1 = x \;,\; x_2 = \dot{x} \;,\; x_3 = \alpha \;,\; x_4 = \dot{\alpha}$$

$$\left(\frac{J_b}{r^2} + m\right)\dot{x}_2 + (m r^2 + J_b)\frac{1}{r}\dot{x}_4 - m x_1 x_4^2 = m g \sin(x_3)$$

$$(m x_1^2 + J_b + J_\omega)\dot{x}_4 + (2 m x_2 x_1 + b l^2) x_4 + k l^2 x_3 + (m r^2 + J_b)\frac{1}{r}\dot{x}_2 - m g x_1 \cos(x_3) = u_{(t)}\, l \cos(x_3)$$

با جدا کردن متغیرها و جاگذاری مقادیر، معادلات حالت را به صورت زیر به دست آوردیم:

x1dot = x2

x2dot =

(717783117723854571368055812551386071040000*x1^3*x4^2 +
704145238487101334512062752112909735690240*sin(x3)*x1^2 +
372963298116504719080243402345774317568000*x1*x4^2 +
401958545925358602575323053686784000000000*x2*x1*x4 -
197160666776388394563195957833367552000000*cos(x3)*x1 +
178722679401256667552472342944808960000000*x4 + 178722679401256653711585116535351562 5*x3 +
365876995452291129417718777012046055342008*sin(x3) -
364740162043380954188719067234304000000000*u*cos(x3))/(5*(200979272962679279983055627514388099
89120*x1^2 + 104317175079762220921816482898160265950 29))

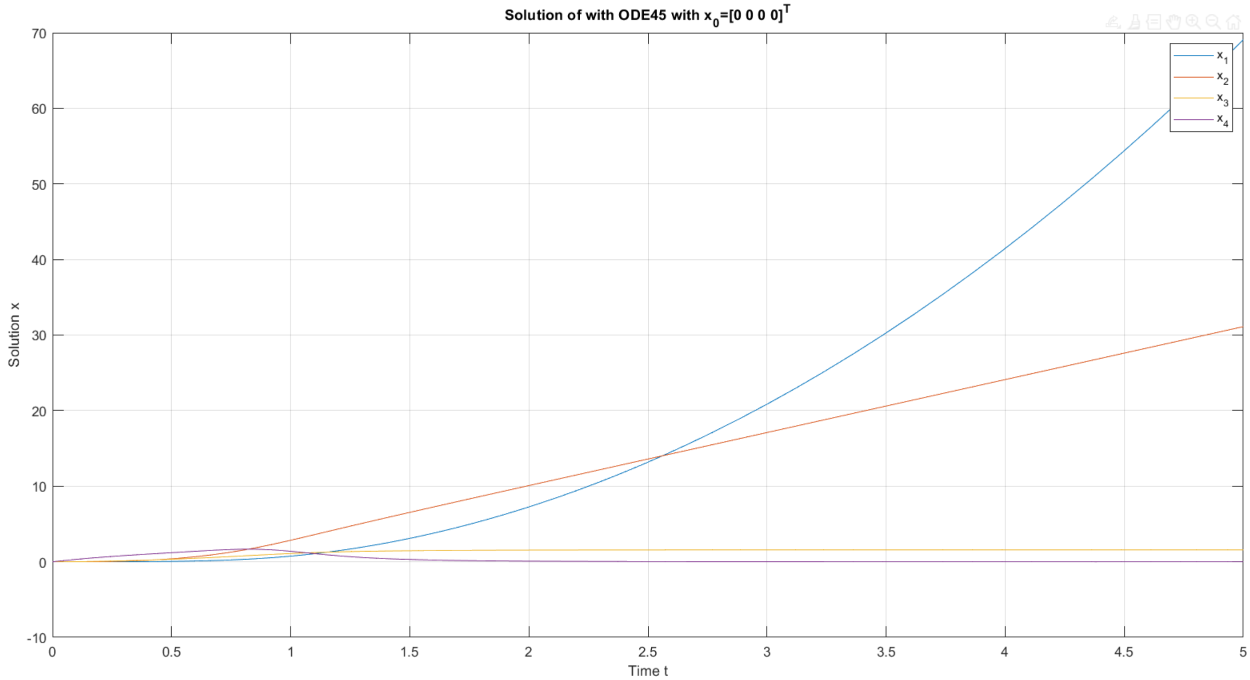
x3dot = x4

x4dot =

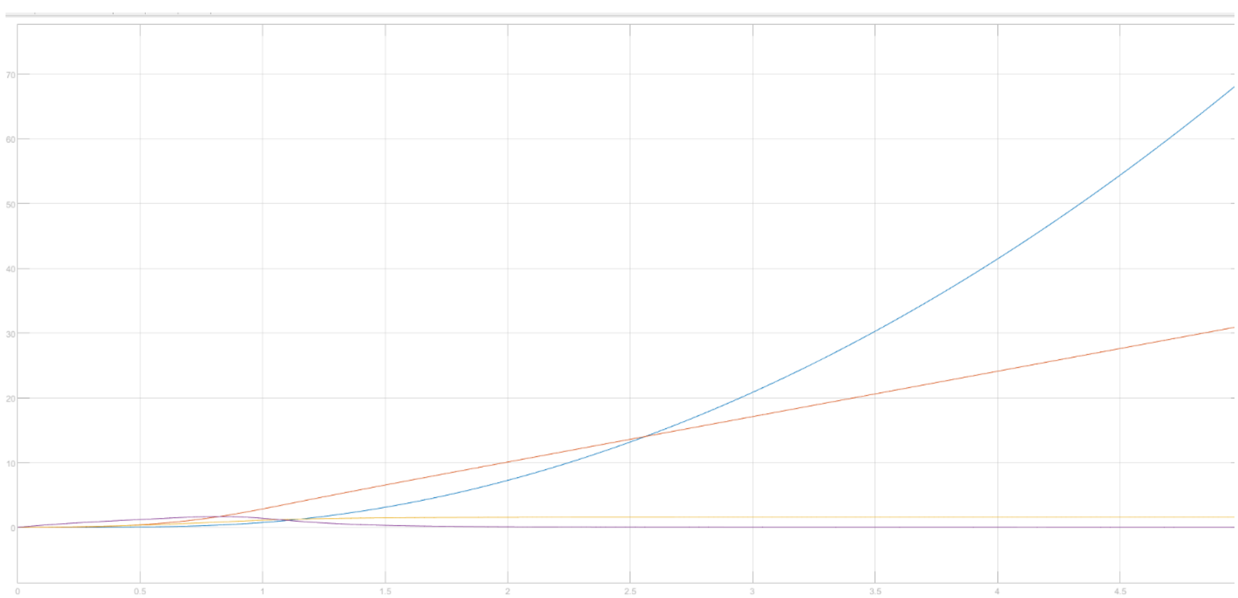
-(1152921504606846976*(7750860691170910250 0*x3 + 7750860691170910850252 8*x4 +
171009618598120730906 25*sin(x3) + 174321731496555281250 0*x1*x4^2 -
1581808304320594051072 00*u*cos(x3) - 855048092990603563892736*x1*cos(x3) +
174321731496555262771200*x1*x2*x4))/(5*(20097927296267927998305562751438809989120*x1^2 +
10431717507976222092181648289816026595029))

.۲.۱

خروجی کد حل معادلات بالا:



خروجی متغیرهای حالت سیمولینک:



همانطور که میبینیم، خروجی کد با خروجی سیستم کاملا تطابق دارد و معادلات بدست آمده در بخش قبل صحیح میباشد.

۲. با استفاده از تابع Jacobian حول مبدا ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = u = 0$)، ماتریس A و B را بدست می‌آوریم.

$$A \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.378 & 0 & 7 & 0.03428 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 18.9 & 0 & -0.38 & -1.71 \end{bmatrix}, B \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -0.07 \\ 0 \\ 3.496 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلات حالت خطی سازی شده به صورت زیر می باشد:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} x_2 \\ -0.378x_1 + 7x_3 + 0.034\, x_4 - 0.07\mathrm{u} \\ x_4 \\ 18.9x_1 - 0.38\, \mathrm{x}_3 - 1.71\, \mathrm{x}_4 + 3.496\, \mathrm{u} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

۳. با استفاده از ماتریس A، مقادیر ویژه به این شکل بدست خواهند آمد:

$$\lambda_1 \approx -3.84536$$

$$\lambda_2 \approx -0.42876 + 3.36693\, i$$

$$\lambda_3 \approx -0.42876 - 3.36693\, i$$

$$\lambda_4 \approx 2.98961$$

برای بررسی پایداری از روی مقادیر ویژه به علامت مقادیر حقیقی هر مقدار ویژه نگاه کنیم. در این مسئله ما یک مقدار ویژه با مقدار حقیقی مثبت و سه مقدار ویژه با مقدار حقیقی منفی داریم. پس سیستم خطی‌سازی شده، بعلت حضور λ_4 ناپایدار حول مبدا میباشد.

۴. با احتساب ماتریس کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری، به شکل زیر:

```
C = [B A*B (A^2)*B (A^3)*B];
O = [c; c*A; c*(A^2); c*(A^3)];
```

رنک سطری ماتریس کنترل‌پذیری C و رنک ستونی ماتریس رویت‌پذیری O را کامل بدست می‌آوریم. بنابراین سیستم، رویت‌پذیر و کنترل‌پذیر میباشد. چون سیستم مدنظر هم رویت‌پذیر و هم کنترل‌پذیر میباشد، طبق قضیه، سیستم مینیمال نیز میباشد.

۵. با استفاده از روش فرم جردن، ماتریس J و سپس ماتریس انتقال حالت را محاسبه میکنیم:

$$e^{Jt} \approx \begin{bmatrix} e^{t(-0.43-3.37i)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(-0.43+3.37i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3.84t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2.99t} \end{bmatrix}, e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$$

.۶

$$G = c \times (sI - A)^{-1} \times B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0.378 & s & -7 & -0.03428 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -18.9 & 0 & 0.38 & \mathrm{s}+1.71 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0.07 \\ 0 \\ 3.496 \end{bmatrix}$$

البته استفاده از روش مستقیم، صفر و قطب‌های متناظر را حذف نمیکند و از دستور *ss* استفاده میکنیم و خواهیم داشت:

```
G_s =

  From input to output...
               -0.06993 s^2 + 9.938e-16 s + 24.5
   1:  -------------------------------------------------
       s^4 + 1.713 s^3 + 0.7577 s^2 + 7.105e-15 s - 132.4

                     3.496 s^2 - 2.747e-16
   2:  -------------------------------------------------
       s^4 + 1.713 s^3 + 0.7577 s^2 + 7.105e-15 s - 132.4

Continuous-time transfer function.
```

که با حذف اعداد کوچکتر از 10^{-4} در صورت، خواهیم داشت:

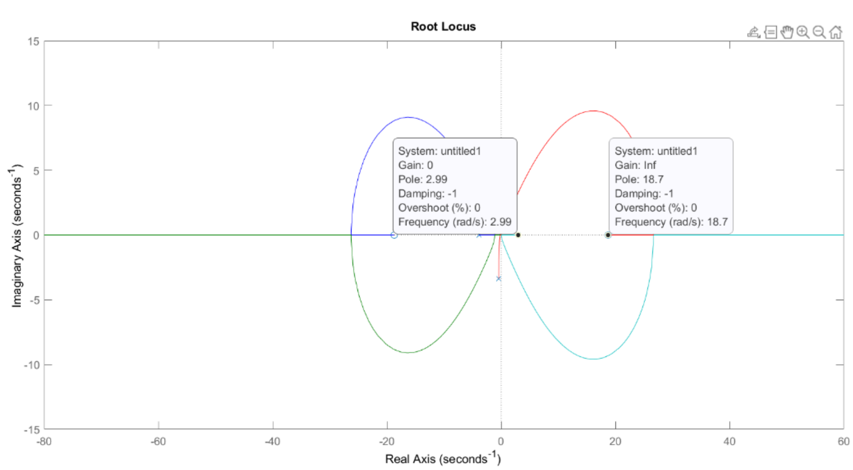
$$G_1 = \frac{-0.06993s^2 + 24.5}{s^4 + 1.713s^3 + 0.7577s^2 + 7.105 \times 10^{-15}s - 132.4}$$

$$G_2 = \frac{3.496s^2}{s^4 + 1.713s^3 + 0.7577s^2 + 7.105 \times 10^{-15}s - 132.4}$$

که اولین تابع تبدیل متعلق به موقعیت توپ و دومی متعلق به زاویه می‌باشد.

.۷

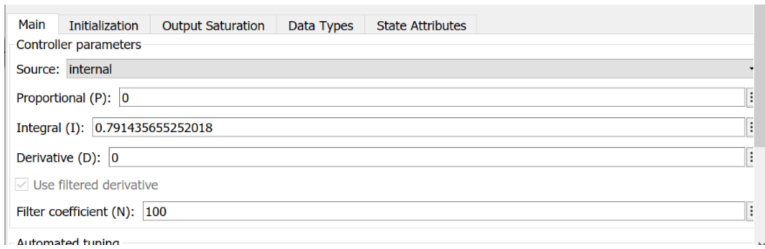
همانطور که در قسمت سوم دیدیم، سیستم ما قطب ناپایدار در سمت راست محور دارد. با رسم مکان ریشه تابع تبدیل نیز این موضوع به خوبی قابل مشاهده است. پس با PID قادر به پایداری سیستم تحت هیچ شرایطی نیستیم.



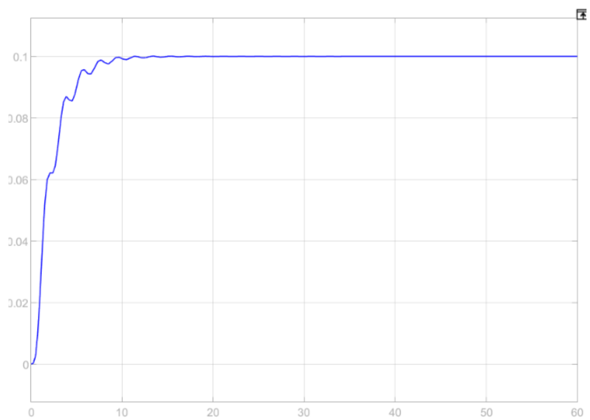
۸. با حذف قطب ناپایدار، تابع تبدیل مربوط به موقعیت گوی به صورت زیر خواهد بود:

$$G_1 = \frac{-0.06993s^2 + 24.5}{s^3 + 4.702s^2 + 14.82s + 44.29}$$

ضرایب *PID* طراحی شده به صورت زیر می باشد:

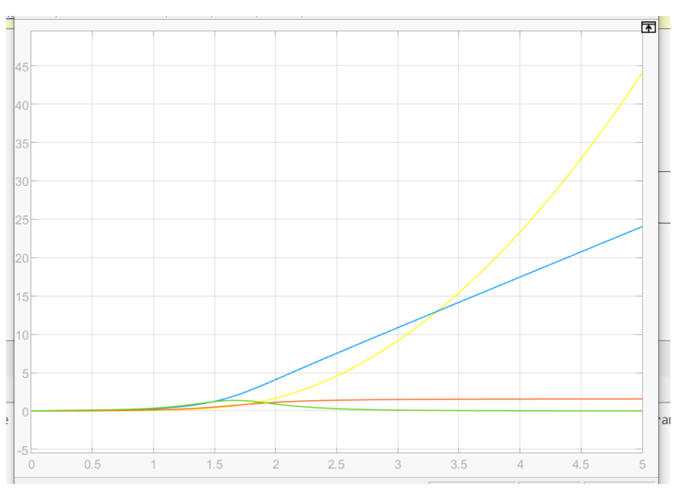


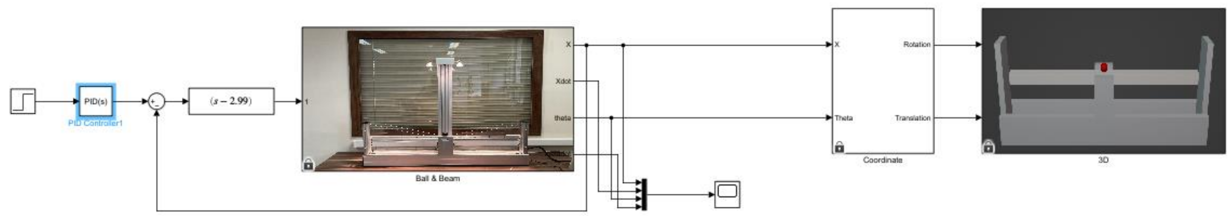
خروجی موقعیت گوی به ورودی پاسخ پله با دامنه ۰.۱، توسط این کنترلر پایدار بوده و به شکل زیر است:



برای سیستم غیرخطی،با *PID* و حذف قطب، پاسخ متغیرهای حالت به ازای ورودی پله با دامنه ۰.۱، پاسخ همچنان ناپایدار و به صورت زیر است:

علت این است که در متلب، حذف قطب به صورت دقیق اتفاق نمی افتد و با ضرب کردن صفرِ متناظر، دقیقا روی قطب صفر نداریم.



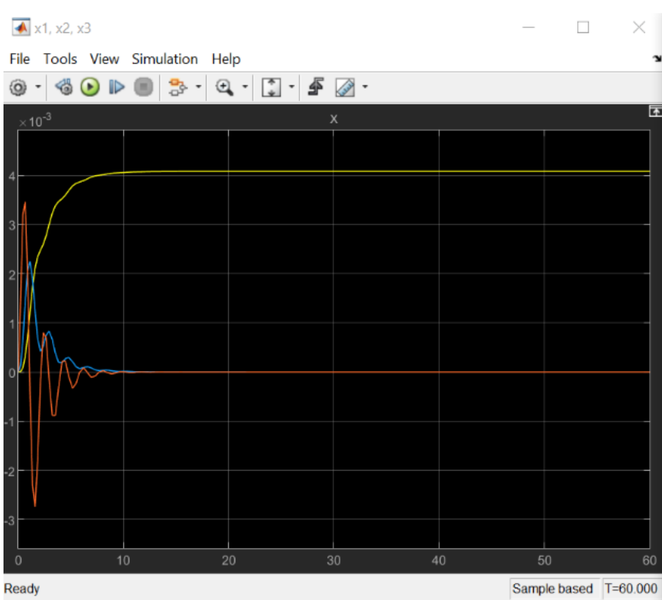


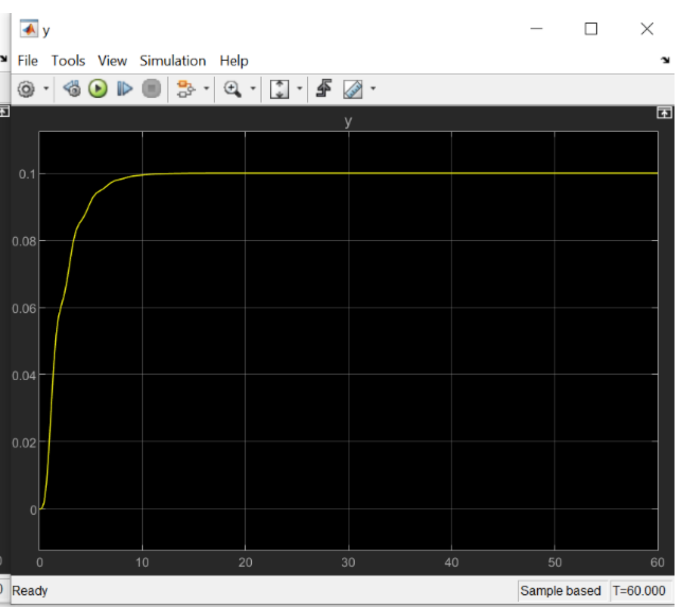
سیستم جبران شده خطی، تابع تبدیلی به شکل زیر دارد، با به دست آوردن تحقق کنترل کننده برای این سیستم، خواهیم داشت:

$$G_1 = \frac{-0.06993s^2 + 24.5}{s^3 + 4.702s^2 + 14.82s + 44.29}$$

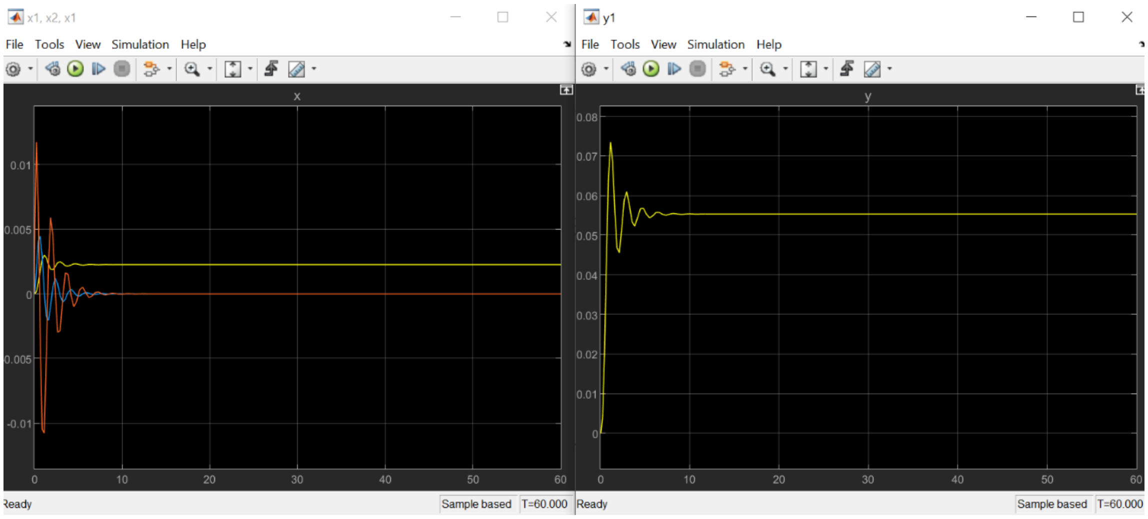
$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -44.29 & -14.82 & -4.702 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 24.5 & -0.06993 & 0 \end{bmatrix}$$

با قرار دادن *PID* برای این تحقق پاسخ متغیرهای حالت به شکل زیر است:

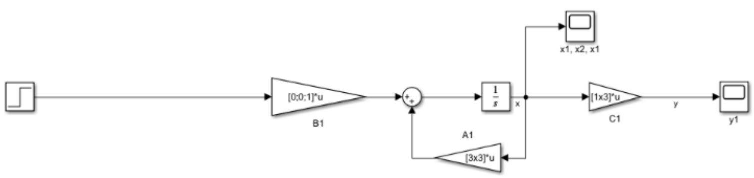


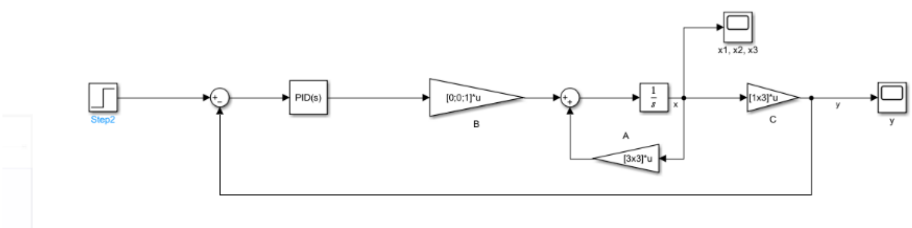


بدون *PID* به شکل زیر بود:



میبینیم که در سیستم جبران شده، متغیرهای حالت نیز به پایداری رسیده اند.





ماتریس کنترل پذیری را برای این سیستم تشکیل میدهیم:

رنک این ماتریس، برابر ۳ بوده، ماتریس معکوس پذیر است در نتیجه سیستم ما همواره کنترل پذیر است. از معادلات و همچنین مکان ریشه، میدانیم که $b(s)$ و $a(s)$ نسبت به هم اول هستند. در این صورت تحقق ما رویت پذیر هم میباشد.

```
Controllability_Compensated =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 1.0 & -4.702 \\ 1.0 & -4.702 & 7.2888039999999989504431141540408 \end{pmatrix}$$

```
ans = 3
```