

استاد: دکتر یغمایی
تاریخ تحویل: ۱۴۰۱/۱۰/۱۶

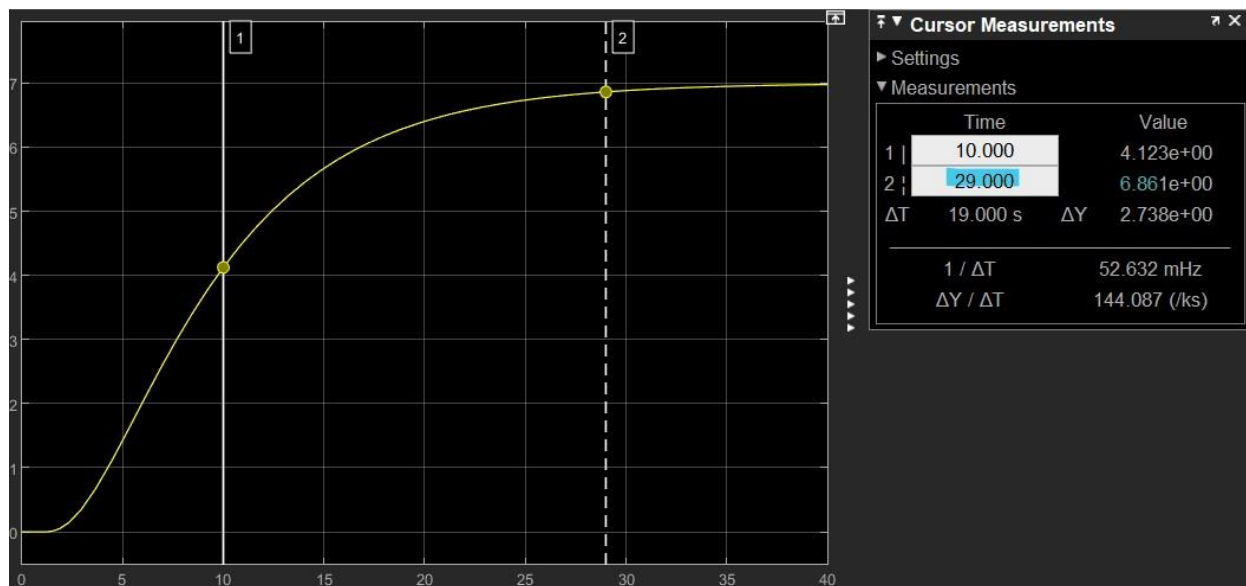
سیستم‌های کنترل خطی

پروژه‌ی جایگزین

شیرین جمشیدی
۸۱۰۱۹۹۵۷۰



۱.

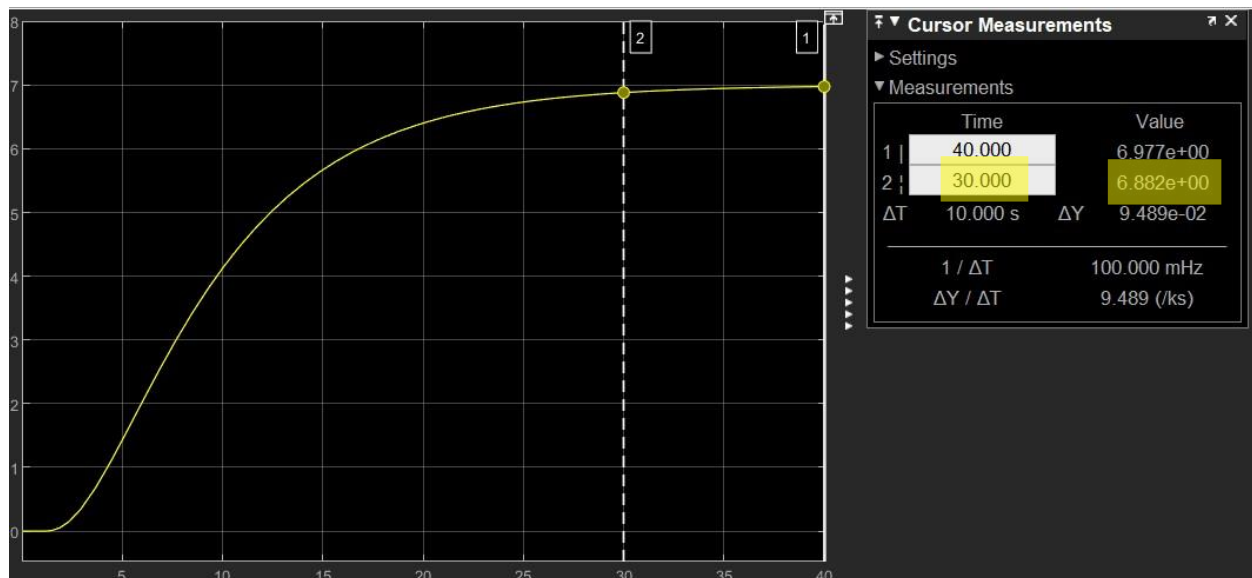


از شکل میبینیم که مقدار ماندگارمان ۷ و زمان نشستمان (ts) ۲۹ ثانیه میباشد. G_a از محاسبات زیر بدست می‌آید.

$$G_{a(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \approx \frac{k}{1+Ts} \Rightarrow R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{k}{(1+Ts)s} \rightarrow C(t) = C_{ss} (1 - e^{-t/T})$$

$$C_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s C(s) = k \rightarrow \boxed{C_{ss} = k} \rightarrow \boxed{k = 7}$$

$$98\% \text{ بهایر} : t_s = 4T \quad ; \quad \frac{98}{100} \times 7 = 6.86 \text{ بهایر} \quad t_s = 29s \Rightarrow \boxed{T = 7.25(s)} \Rightarrow \boxed{G_{a(s)} = \frac{7}{1+7.25s}}$$



$$G_{ss} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow C_{ss} = [k=7]$$

$$\text{معادله مشخصه: } s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \rightarrow \Delta = \sqrt{4\zeta^2 \omega_n^2 - 4\omega_n^2} = \sqrt{4\zeta^2 - 4} \omega_n$$

$$\text{با فرض میرایی کم: } \zeta = 1 \Rightarrow C_{ch} = C_{ss} (1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)) \rightarrow$$

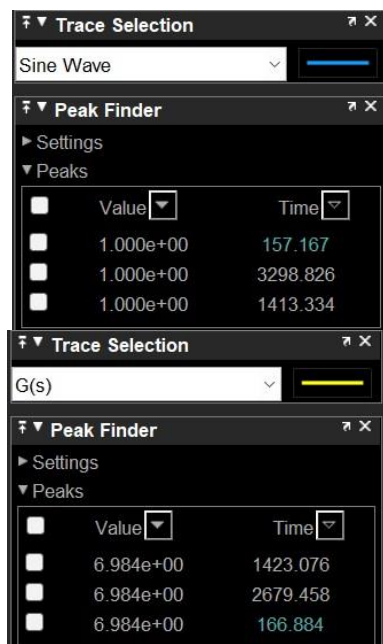
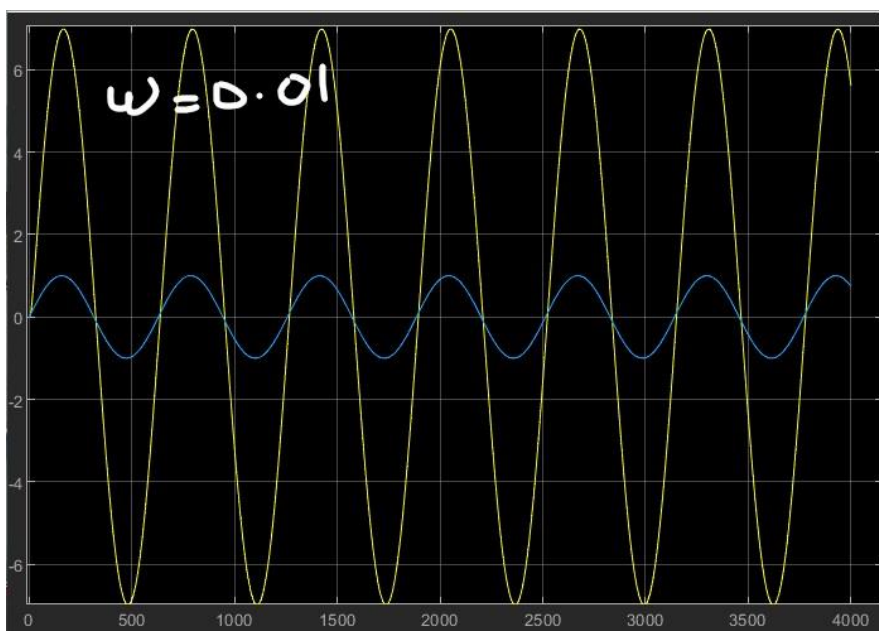
این نقطه دفراده را از نمودار پاسخ پله انتخاب می‌کنیم.
در معادله رو بررو، مقادیر t و C_{ch} را جایگزین می‌کنیم و
پس از محاسبه ω_n را به دست می‌آوریم. (از بهر ترسیم $C_{ss}=7$)

$$t=30 \text{ s} \rightarrow 6.882 = 7 (1 - e^{-\omega_n 30} (1 + 30\omega_n))$$

$$\omega_n \approx 0.2 \Rightarrow G(s) = \frac{0.28}{s^2 + 0.4s + 0.04}$$

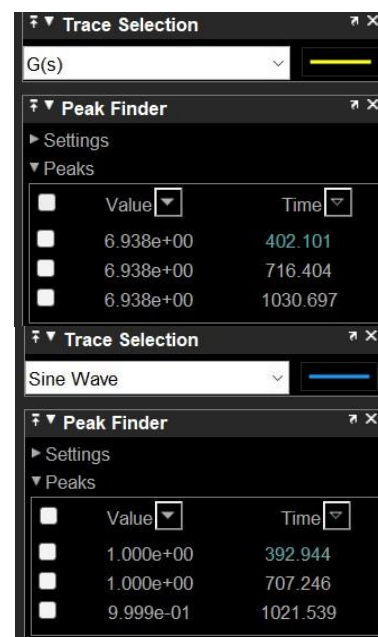
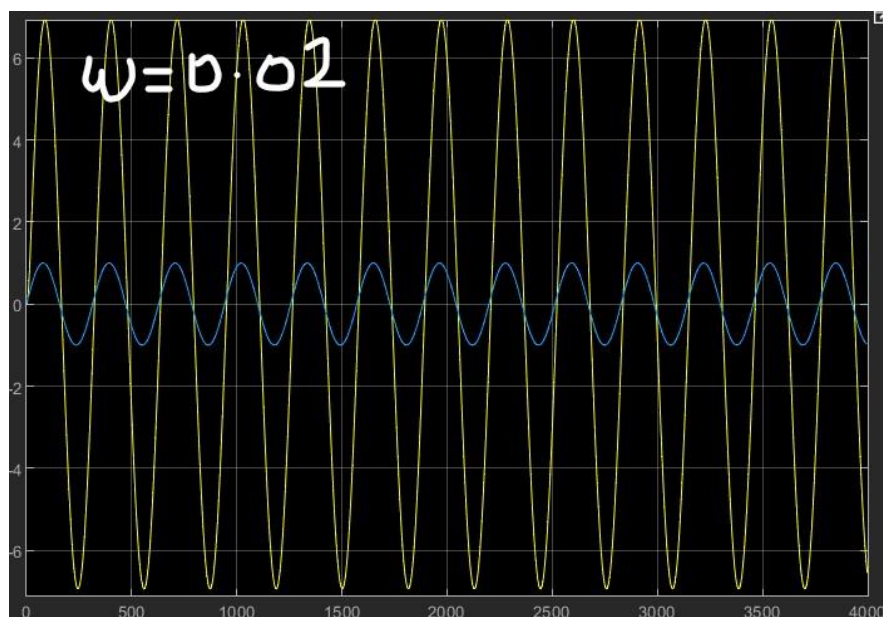
۳. الف)

$$w=0.01$$



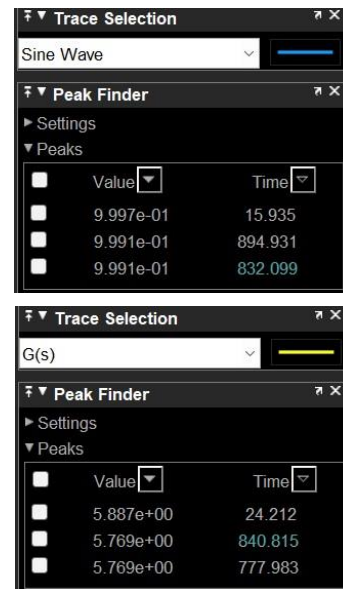
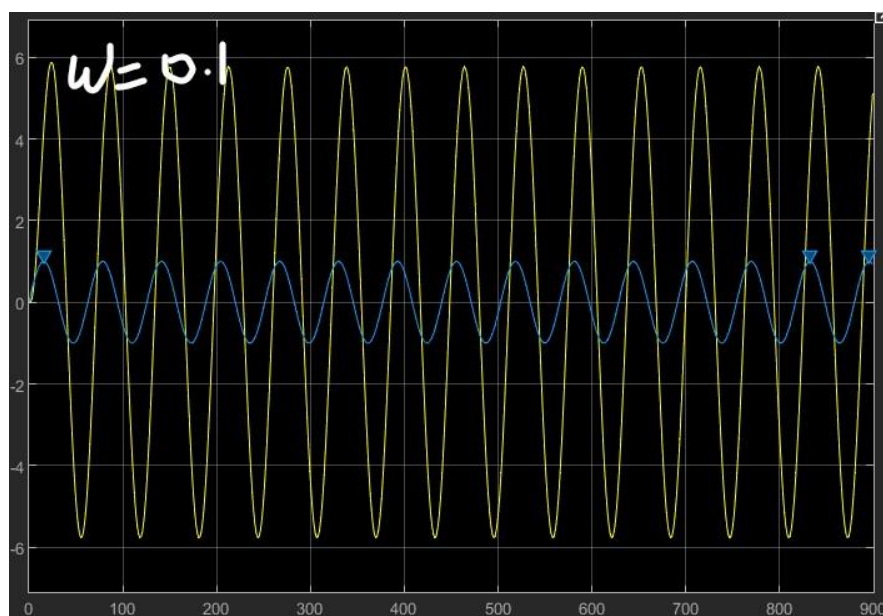
بهره برای این مقدار، ۶.۹۸۴ و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -۹.۷۱۷ ثانیه میباشد. $(-166.884+157.167)$

$w=0.02$



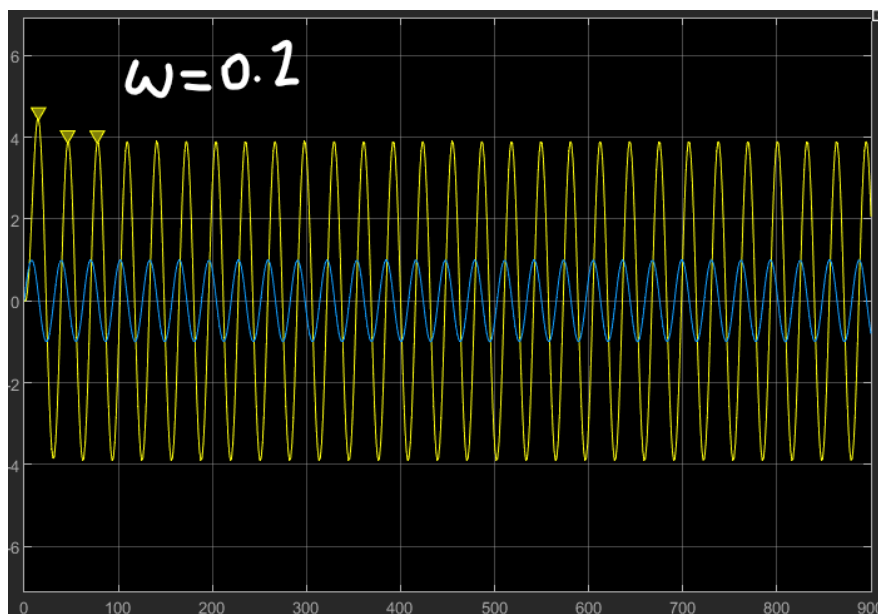
بهره برای این مقدار، ۶.۹۳۸ و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -۹.۱۵۷ ثانیه میباشد.

$w=0.1$



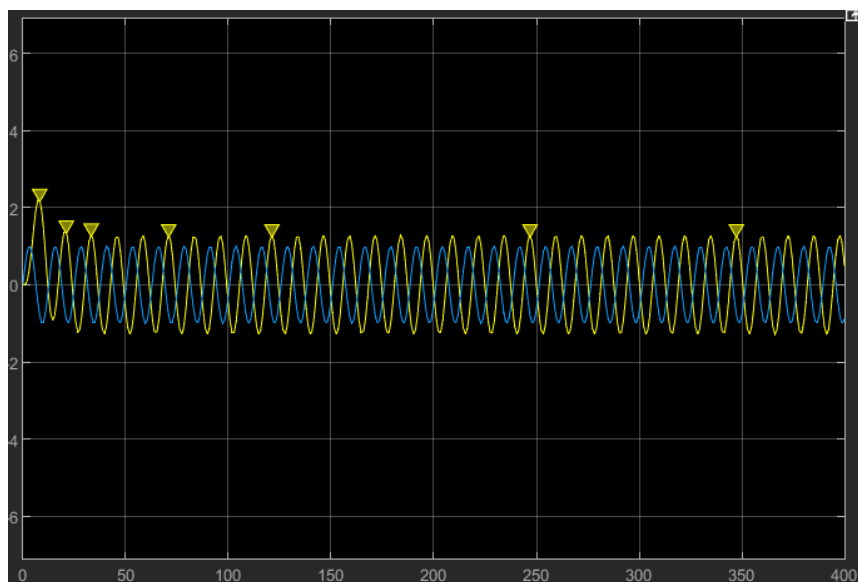
بهره برای این مقدار، ۵.۷۷ ($5.769/0.9997$) و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -۸.۷۱۶ ثانیه میباشد.

$w=0.2$



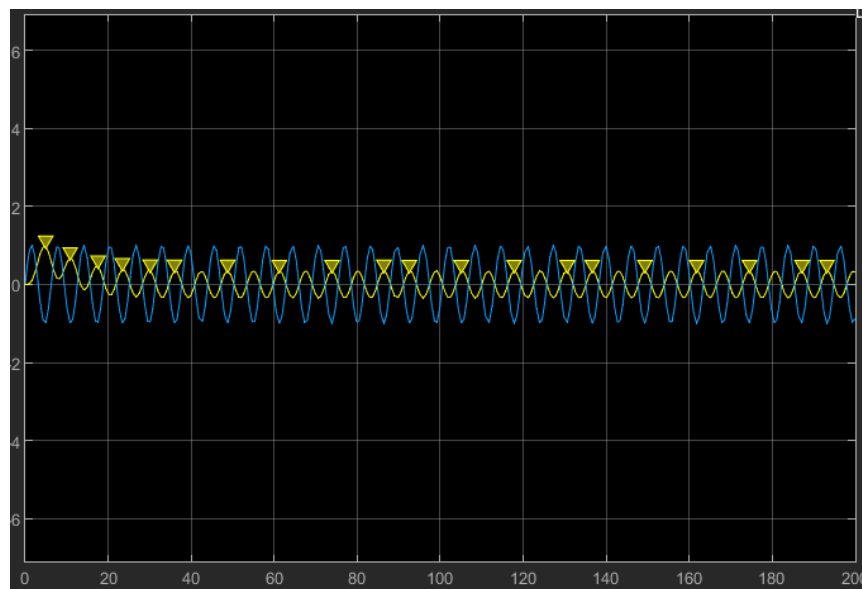
بهره برای این مقدار، ۳.۹۱۹ و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، ۷.۶۱۸- ثانیه میباشد.

$w=0.5$



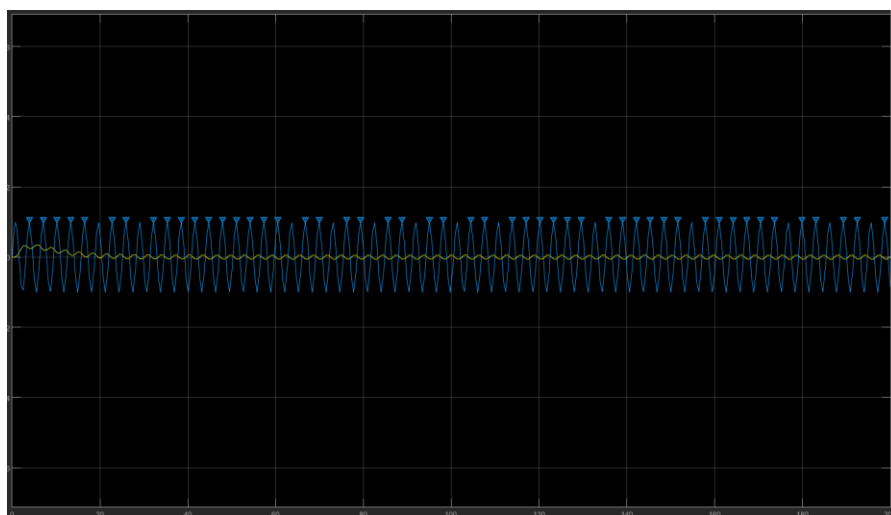
بهره برای این مقدار، ۱.۲۸۷ و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، ۴.۵۹۱- ثانیه میباشد.

$w=1$



بهره برای این مقدار، 0.34 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -3.385 ثانیه می باشد.

$w=2$



بهره برای این مقدار، 0.06 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -1.597 ثانیه می باشد.

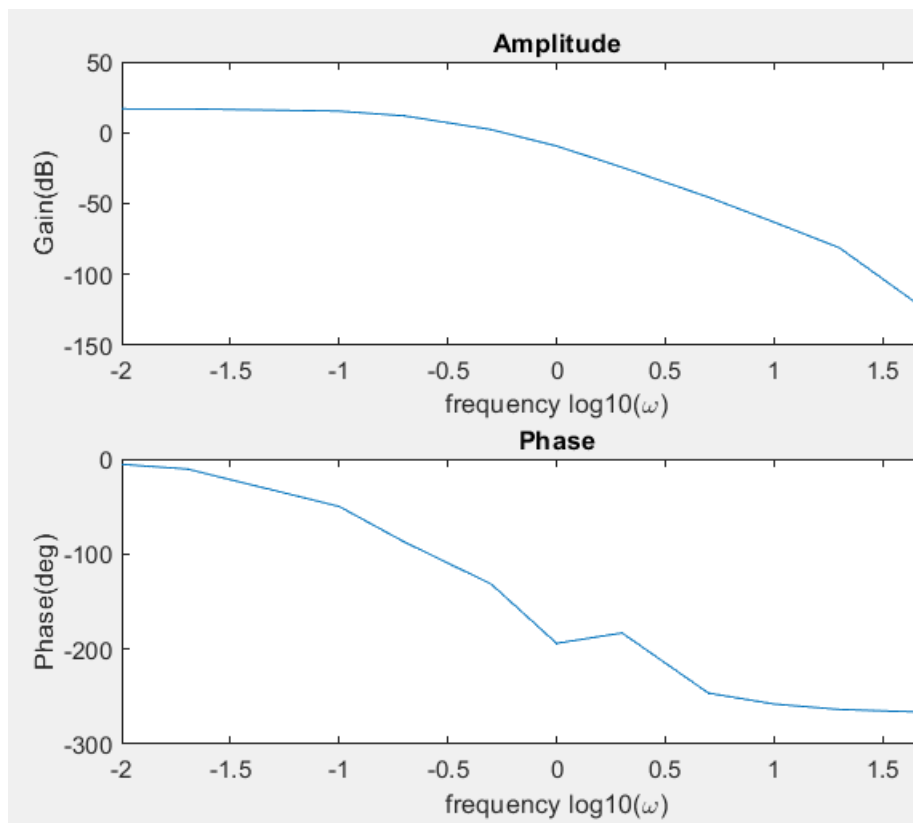
$w=5$: بهره برای این مقدار، 0.0053 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -0.86 ثانیه می باشد.

$w=10$: بهره برای این مقدار، 0.0007 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -0.45 ثانیه می باشد.

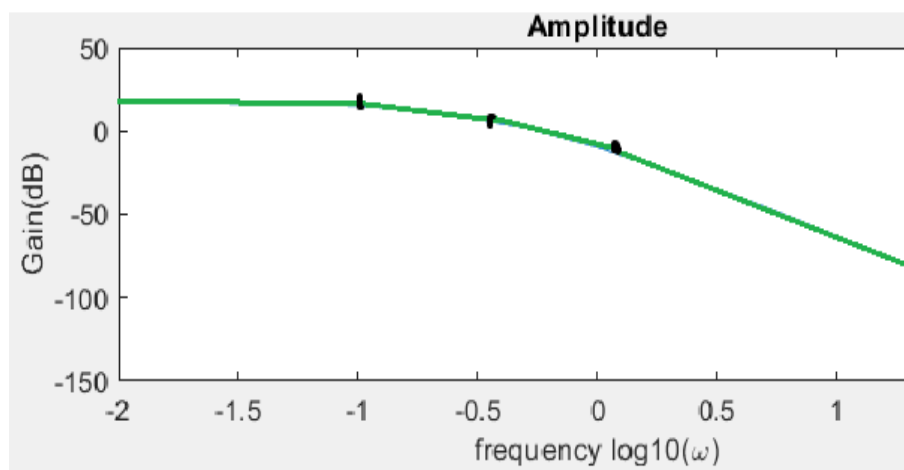
$w=20$: بهره برای این مقدار، 0.000087 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -0.23 ثانیه می باشد.

$w=50$: بهره برای این مقدار، 0.0000056 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -0.093 ثانیه می باشد.

$w=100$: بهره برای این مقدار، 0.0000007 و اختلاف زمانی خروجی به ورودی، -0.0465 ثانیه می باشد.

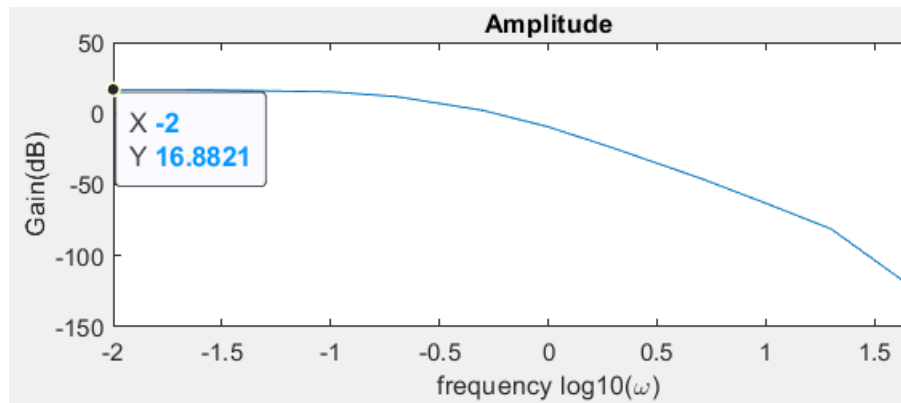


ب) چنانچه مجانب‌های نمودار بهره را بکشیم، میتوانیم تعداد و نوع نقاط شکست را بدست آوریم.



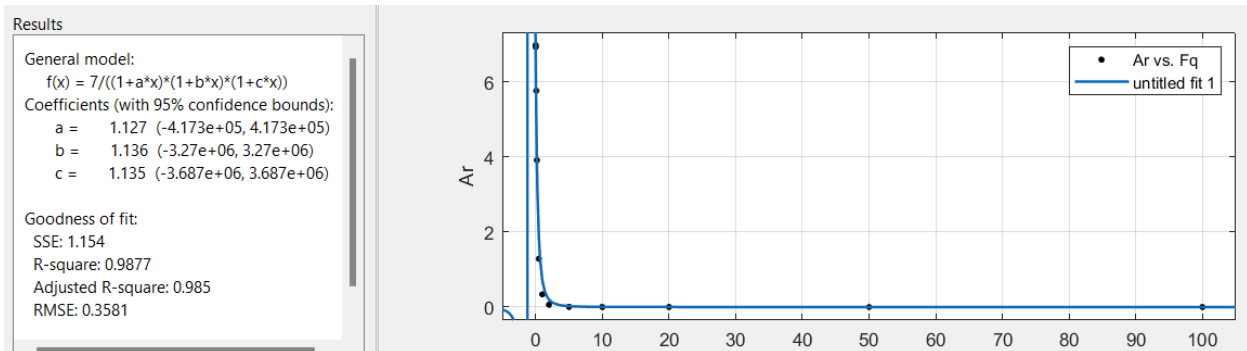
همانطور که از نمودار مشخص است، ما حداقل ۳ نقطه‌ی شکست داریم که ۳ تای آن، از نوع قطب اند. (چراکه شیب را منفی‌تر کرده‌اند).

همچنین برای k داریم:

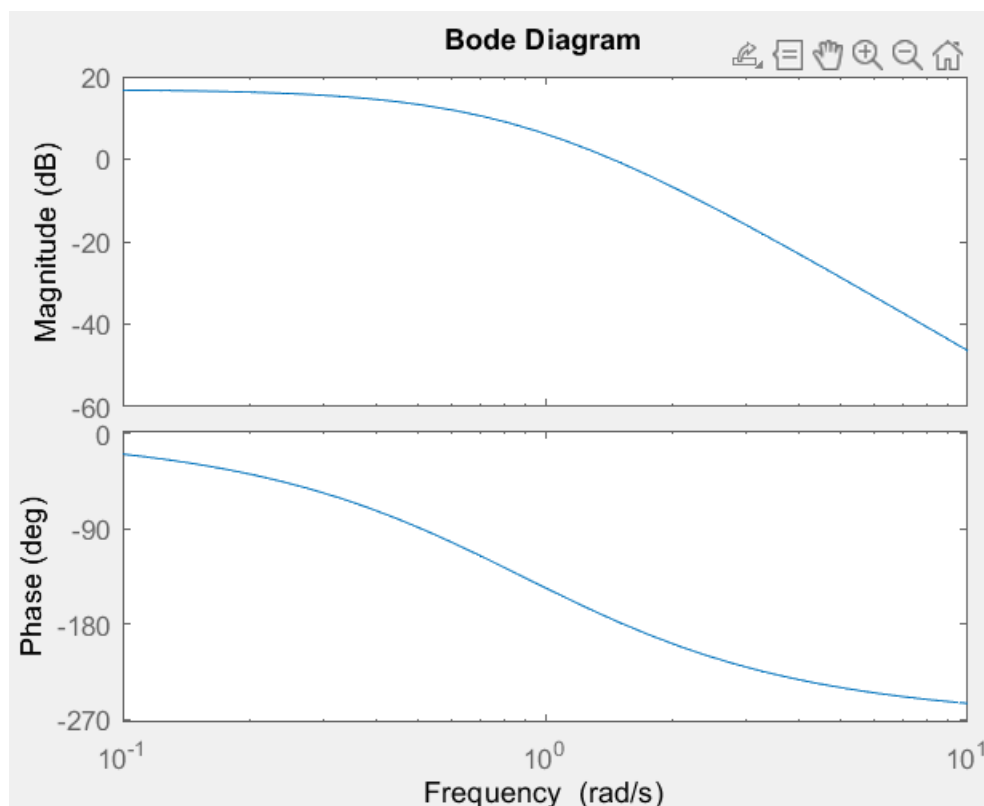


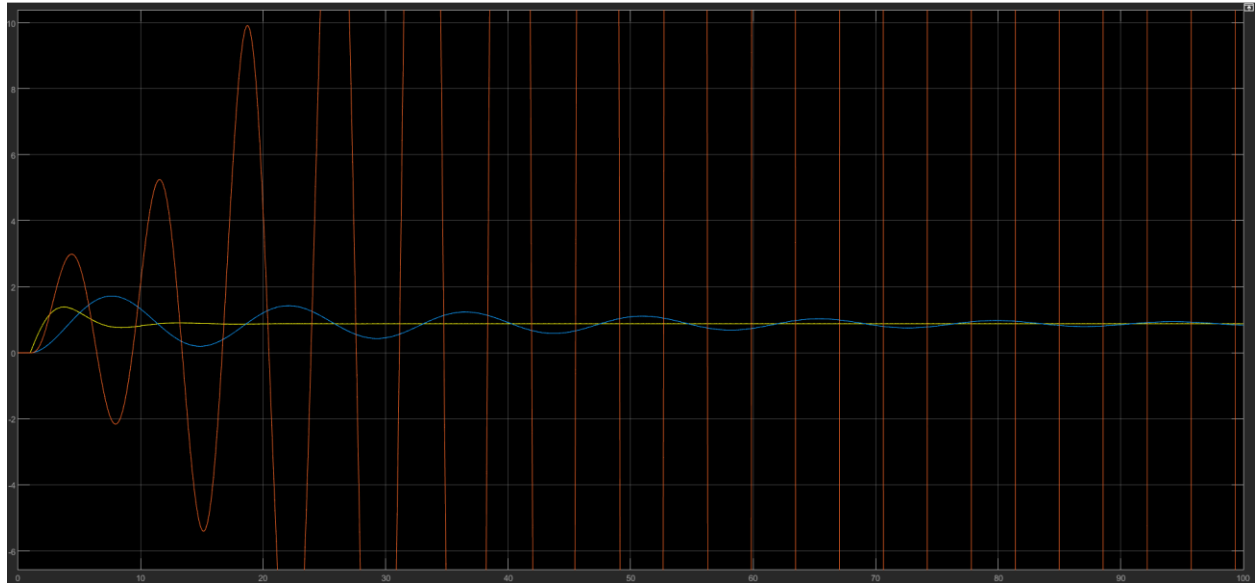
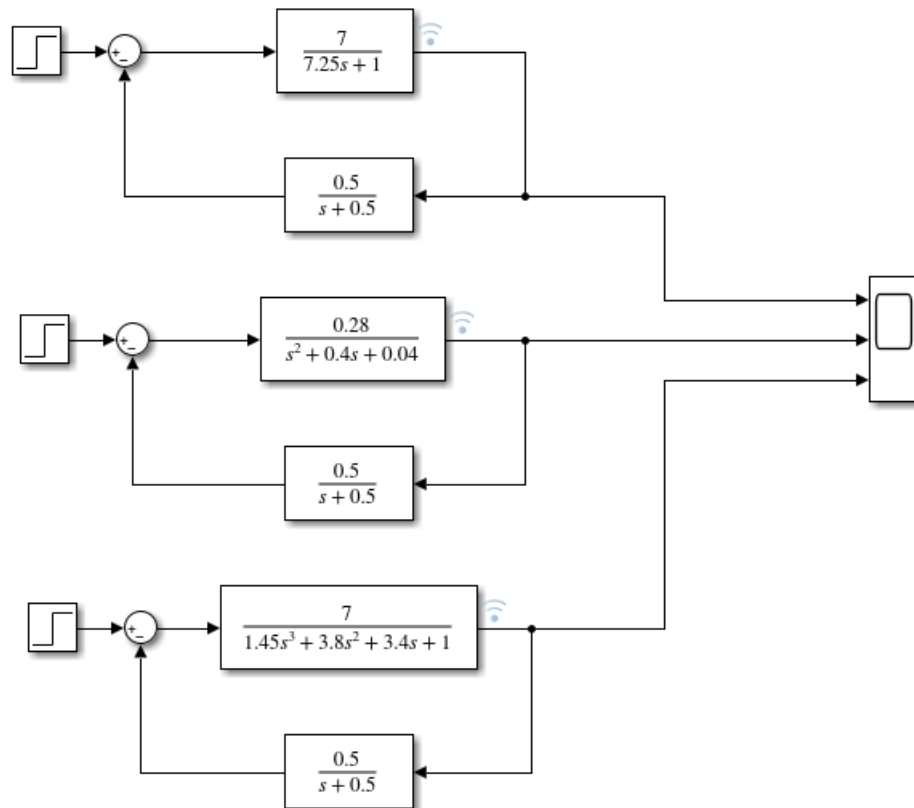
$$\log_{10}|G(s)| = \log_{10} k \longrightarrow 20 \log k = 16.9 \longrightarrow k = 10^{0.845} \approx 7$$

با استفاده از cftool، به مقادیر قطب‌های مدنظر میرسیم:



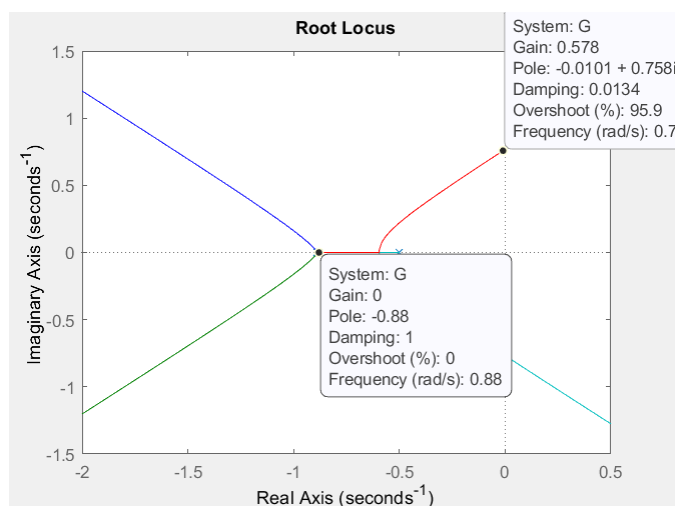
با جاگذاری مقادیر داده شده، با تقریب خوبی به تابع تبدیل مدنظر میرسیم.



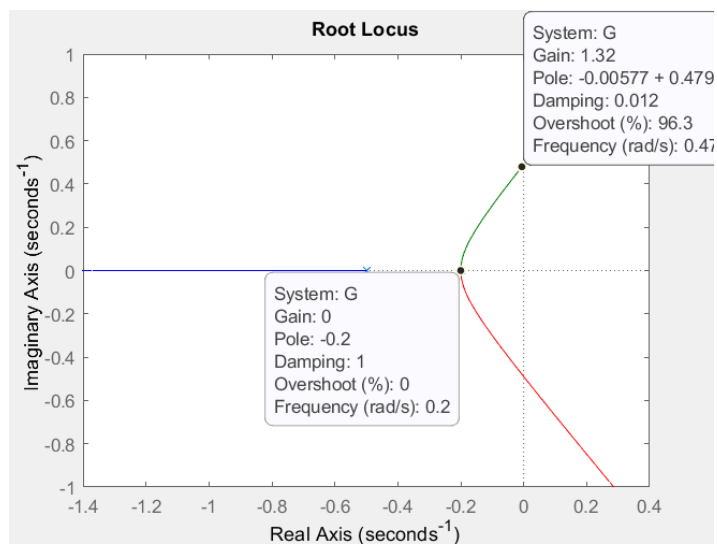


نمودار زرد مربوط به G_a ، نمودار آبی مربوط به G_b و نمودار قرمز مربوط به G_c میباشد. همانطور که میبینیم، G_a بسیار سریع به حالت پایدار خود رسیده است و نمودار G_b ، پس از چندین نوسان نیز تقریباً به پایداری رسیده است اما نمودار G_c ، بعلت مسیر فیدبک ناپایدار شده و با افزایش فرکانس، از نقطه تعادل فاصله بیشتری میگیرد.

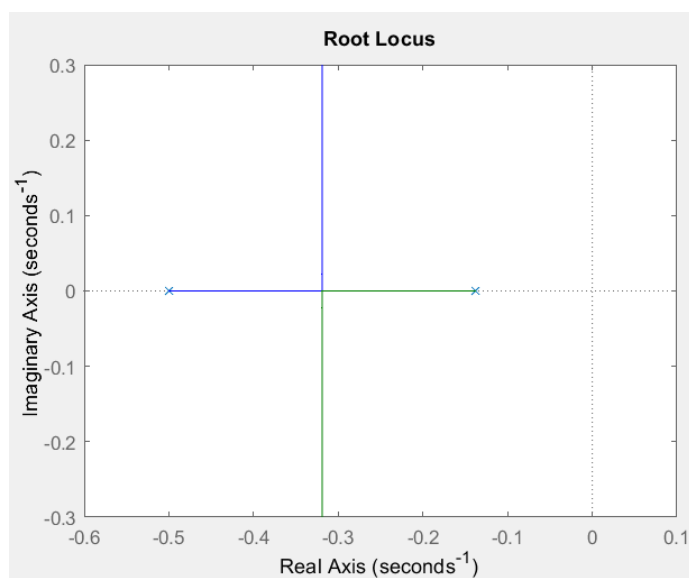
Gc: بازه بهره برای پایداری سیستم، $(0, 0.578)$ میباشد.



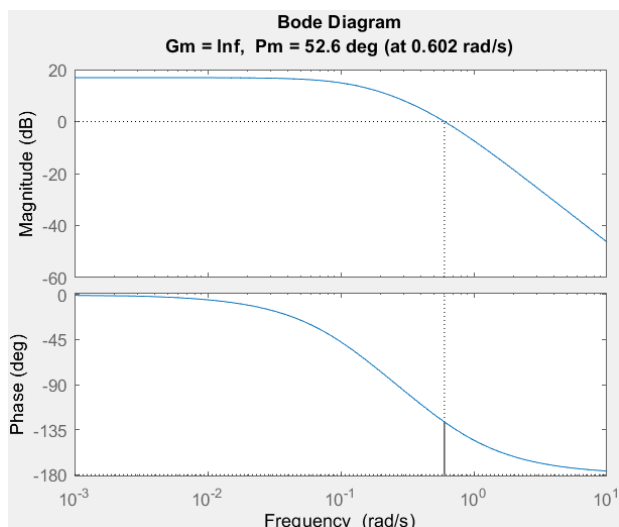
Gb: بازه بهره برای پایداری سیستم، $(0, 1.32)$ میباشد.



Ga: به ازای هر مقداری از بهره پایدار است.



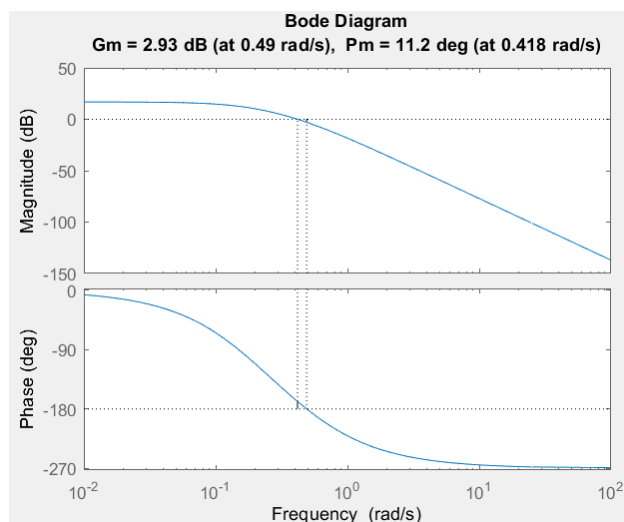
:Ga



حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، 52.6 درجه می‌باشد و این سیستم حاشیه‌ی بهره‌ی ∞ دارد ($G_m = \infty$) و به ازای هر مقدار از بهره، پایدار می‌ماند. (در قسمت ۵ هم به همین نتیجه رسیدیم).

با استفاده از دستور **bandwidth** نیز می‌توانیم پهنای باند سیستم را بدست آوریم که برابر با 0.1287 می‌باشد.

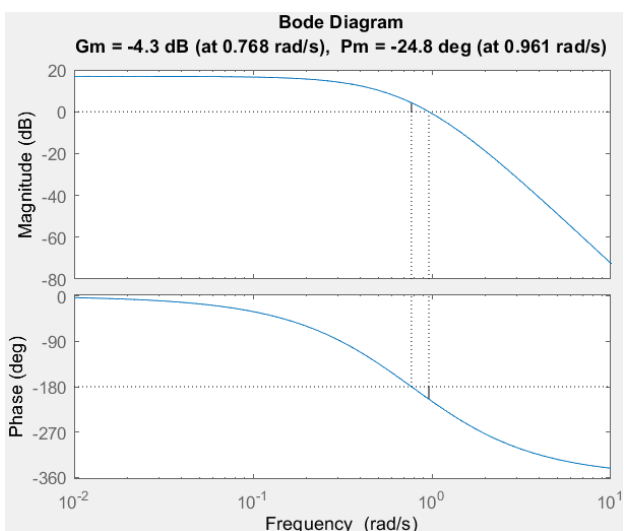
:Gb



حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، 11.2 درجه می‌باشد و حاشیه‌ی بهره‌ی 2.93 دسیبل دارد.

با استفاده از دستور **bandwidth** نیز می‌توانیم پهنای باند سیستم را بدست آوریم که برابر با 0.122 می‌باشد.

:Gc



حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، -24.8 درجه می‌باشد و حاشیه‌ی بهره‌ی -4.3 دسیبل دارد.

با استفاده از دستور **bandwidth** نیز می‌توانیم پهنای باند سیستم را بدست آوریم که برابر با 0.3143 می‌باشد.

$$G_P(s) = k_c (s+z_1) \frac{s+z_2}{s}$$

$$G_A(s) = \frac{1 \times 0.5}{(1+7.25s)(s+0.5)} \quad \begin{cases} e_{ss} = 0 \\ M_p \leq 0.05 \\ t_p \leq 8 \end{cases} \rightarrow G_A(s) = \frac{4.8}{(s+0.14)(s+0.5)}$$

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi\right) \leq 0.05 \rightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geq 0.95 \rightarrow \boxed{\zeta \geq 0.69} \rightarrow \cos^{-1}(0.69) = 46.37^\circ = \theta$$

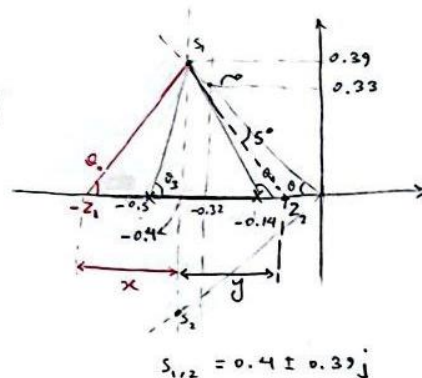
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \leq 8 \rightarrow \omega_d \geq 0.39$$

$$\angle G_{A(s)} = -\theta_1 - \theta_2 \rightarrow = -\left(180 - \tan^{-1}\left(\frac{0.39}{0.4-0.14}\right)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.39}{2.1}\right)$$

$$= -180 - (19.31)^\circ \rightarrow \text{نقطه زبر}$$

$$x = \frac{0.39}{\tan(19.31)} \approx 1.11 \xrightarrow{+0.4} \boxed{Z_1 = -1.51}$$

$$y = \frac{0.39}{\tan(5+46.37)} \approx 0.33 \xrightarrow{+0.4} \boxed{Z_2 = 0.07}$$



$$\text{شرط اندازه} : |G_P(s) G_A(s)| = 1 \rightarrow \left| \frac{k_c \cdot 4.8 (1.91 + 0.39j)(0.47 + 0.39j)}{(0.4 + 0.39j)(0.54 + 0.39j)(0.9 + 0.39j)} \right| = 1$$

$$\boxed{k_c \approx 0.64}$$

$$\Rightarrow G_P(s) = 0.64 (s+1.51) \frac{s+0.07}{s}$$

که البته با این مقدار از بهره به پاسخ مطلوبمان نرسیده و اورشوت زیادی خواهیم داشت. با تست کردن چند مقدار دیگر بهره، خواهیم دید که بهره‌ی ۰.۳۴، خواسته‌ی مساله را ارضا میکند.

k=0.64:

struct with fields:

```
RiseTime: 0.4749
TransientTime: 31.8825
SettlingTime: 17.0211
SettlingMin: 0.9235
SettlingMax: 1.2615
Overshoot: 26.1525
Undershoot: 0
Peak: 1.2615
PeakTime: 2.1941
```

sse =

0.0017

K=0.34:

struct with fields:

```
RiseTime: 2.1253
TransientTime: 35.9997
SettlingTime: 29.5225
SettlingMin: 0.9157
SettlingMax: 1.0246
Overshoot: 2.4638
Undershoot: 0
Peak: 1.0246
PeakTime: 4.2276
```

sse =

0.0044

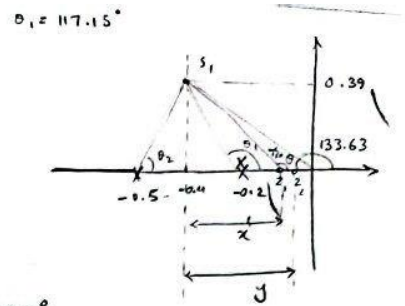
$$G_P(s) = k_c (s+z_1) \frac{s+z_2}{s}$$

$$G_b(s) = \frac{0.28 \times 0.5}{(s^2 + 0.4s + 0.04)(s+0.5)} \rightarrow 0.14$$

$$\theta = 46.37^\circ, \omega_d = 0.39$$

$$\angle G(s_1) = -2\theta_1 - \theta_2 = -2(180 - \tan^{-1}(\frac{0.39}{0.2})) - \tan^{-1}(\frac{0.39}{0.1})$$

$$= -360 + 50^\circ = 50^\circ = 180 - 130^\circ \rightarrow \text{نقص زاویه: } 130^\circ$$



$$x = \frac{0.39}{\tan(50)} = 0.32 \rightarrow z_1 = 0.08$$

$$y = \frac{0.39}{\tan(51.37)} = 0.31 \rightarrow z_2 = 0.09$$

در مسیر را برای هم در همان 0.09 می نوازیم
(تفاوت خیلی ناچیز در دقت تقریبی می بینیم)
این حد از دقت بی معناست.

$$\text{شرط انزال: } |G_b(s_1) G_P(s_1)| = 1 \rightarrow \left| \frac{k_c \cdot 0.14 (-0.31 + 0.39j)(-0.31 + 0.39j)}{(-0.4 + 0.39j)(0.1 + 0.39j)(-0.2 + 0.39j)(-0.2 + 0.39j)} \right| = 1$$

$$\rightarrow k_c = 1.24$$

که البته با این مقدار از بهره به پاسخ مطلوبمان نرسیده و t_p زیادی خواهیم داشت. با تست کردن چند مقدار دیگر بهره، خواهیم دید که بهره‌ی ۲.۲۴، خواسته‌ی مساله را ارضا میکند.

$$k=1.24:$$

struct with fields:

```
RiseTime: 40.4019
TransientTime: 82.7536
SettlingTime: 82.7536
SettlingMin: 0.9008
SettlingMax: 0.9982
Overshoot: 0
Undershoot: 0
Peak: 0.9982
PeakTime: 145.3405
```

sse =

0.0041

$$K=2.24:$$

struct with fields:

```
RiseTime: 2.0276
TransientTime: 56.3233
SettlingTime: 56.3233
SettlingMin: 0.7842
SettlingMax: 1.0048
Overshoot: 0.4839
Undershoot: 0
Peak: 1.0048
PeakTime: 3.5338
```

sse =

0.0032

طراحی برای Gb در حوزه فرکانس:

$$BW = \omega_n \sqrt{1 - 2\eta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\eta^2)^2}} \quad \textcircled{I} \quad ; \quad t_s = \frac{4}{2\omega_n} \leq 8 \quad \textcircled{X} \quad \omega_n \geq 0.72 \quad \textcircled{II}$$

$$\gamma = 100\% \quad ; \quad Mp = \exp\left(\frac{-\eta\gamma}{\sqrt{1-\eta^2}}\right) \leq 0.05 \quad \eta \geq 0.69 \quad \textcircled{K} \Rightarrow \boxed{\gamma > 69^\circ}$$

$$\frac{0.28}{s^2 + 0.4s + 0.04}$$

$$\textcircled{*}, \textcircled{II}, \textcircled{I} \Rightarrow \boxed{BW = 0.74} \quad ; \quad G_{c(s)} = k \frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \quad \leadsto k=1, \text{ فرض} \rightarrow G_{c(s)} = k G_{c(s)} = G_m$$

$$\hat{\omega}_g = 0.6 \hat{B}\hat{\omega} = 0.44 \quad ; \quad \varphi_m = \hat{\gamma} - (180 + \angle G(j\hat{\omega}_g)) + 5 \simeq 50^\circ$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} \simeq 0.13 \quad , \quad \beta \simeq 7.5 \quad ; \quad \frac{1}{T_2} = \frac{\hat{\omega}_g}{10} \rightarrow T_2 \simeq 22.73$$

$$T_1 = \frac{\beta}{\hat{\omega}_g |G_c(j\hat{\omega}_g)|} = \frac{7.5}{0.44 \times \left| \frac{0.28}{-0.44^2 + 0.4 \times 0.44j + 0.04} \right|} \simeq 14.22 = T_1$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{c(s)} = k \frac{22.73s + 1}{170s + 1} \frac{14.22s + 1}{1.88s + 1}}$$

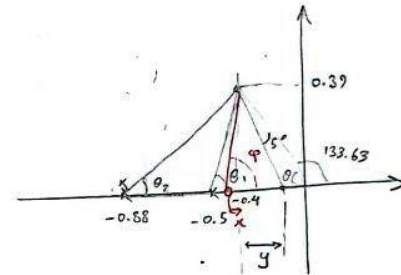
$$G_p(s) = k_c (s+z_1) \frac{s+z_2}{s}$$

$$G_c(s) = \frac{3.5}{(s+0.88)^3 (s+0.5)} ; w_d \gg 0.39 , \theta = 46.37^\circ$$

$$\angle G_c(s) = -\phi_1 - 3\phi_2 = -\tan^{-1}\left(\frac{0.39}{0.1}\right) - 3 \times \tan^{-1}\left(\frac{0.39}{0.1}\right)$$

$$= -266^\circ = -180 - 86^\circ$$

مقدار زاویه: $86^\circ = \varphi$



$$x = \frac{0.39}{\tan(86^\circ)} = 0.03 \rightarrow \boxed{z_1 = 0.43}$$

$$y = \frac{0.39}{\tan(51.37^\circ)} = 0.31 \rightarrow \boxed{z_2 = 0.09}$$

$$\rightarrow k_c = \left| \frac{(0.48 + 0.39j)^3 (0.1 + 0.39j) (-0.4 + 0.39j)}{3.5 (0.03 + 0.39j) (-0.31 + 0.39j)} \right|$$

$$\rightarrow \boxed{k_c = 0.7}$$

که البته با این مقدار از بهره به پاسخ مطلوبمان نرسیده و اورشوت زیادی خواهیم داشت. با تست کردن چند مقدار دیگر بهره، خواهیم دید که بهره‌ی ۰.۴، خواسته‌ی مساله را ارضا میکند.

$k=0.7$:

$K=0.4$:

struct with fields:

```
RiseTime: 0.7972
TransientTime: 39.3793
SettlingTime: 39.3793
SettlingMin: 0.4946
SettlingMax: 1.5714
Overshoot: 57.1359
Undershoot: 0
Peak: 1.5714
PeakTime: 2.2662
```

sse =

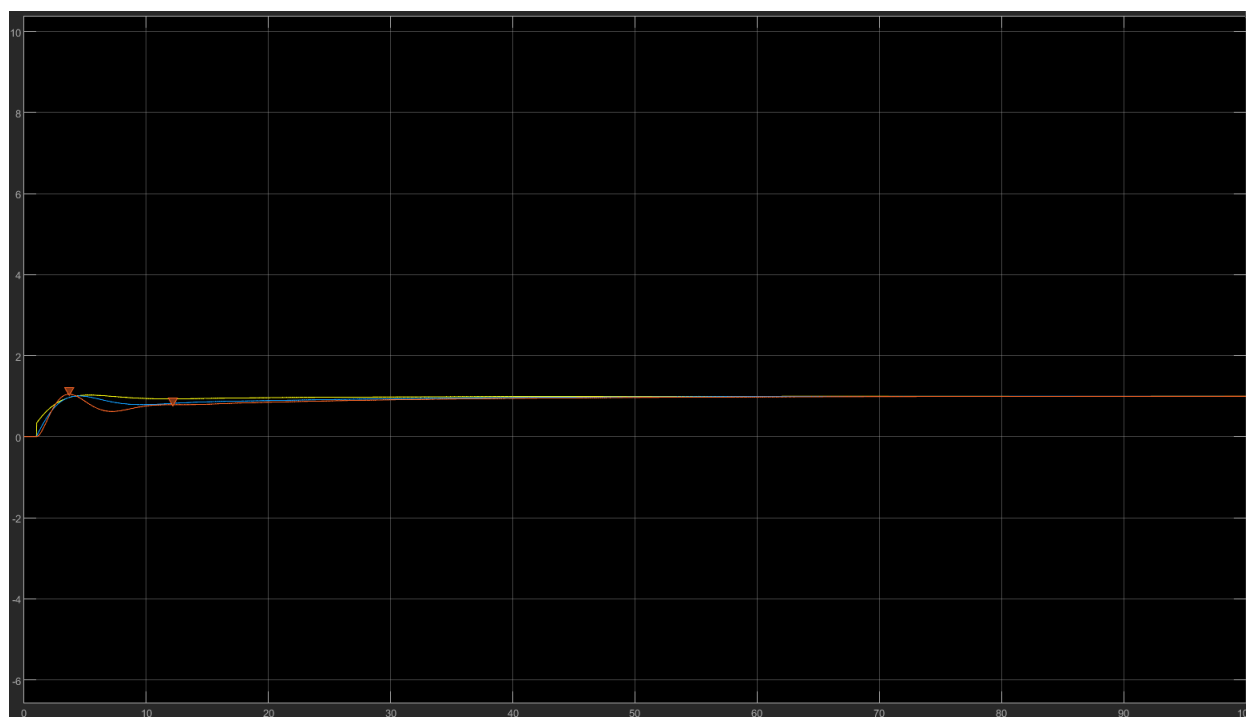
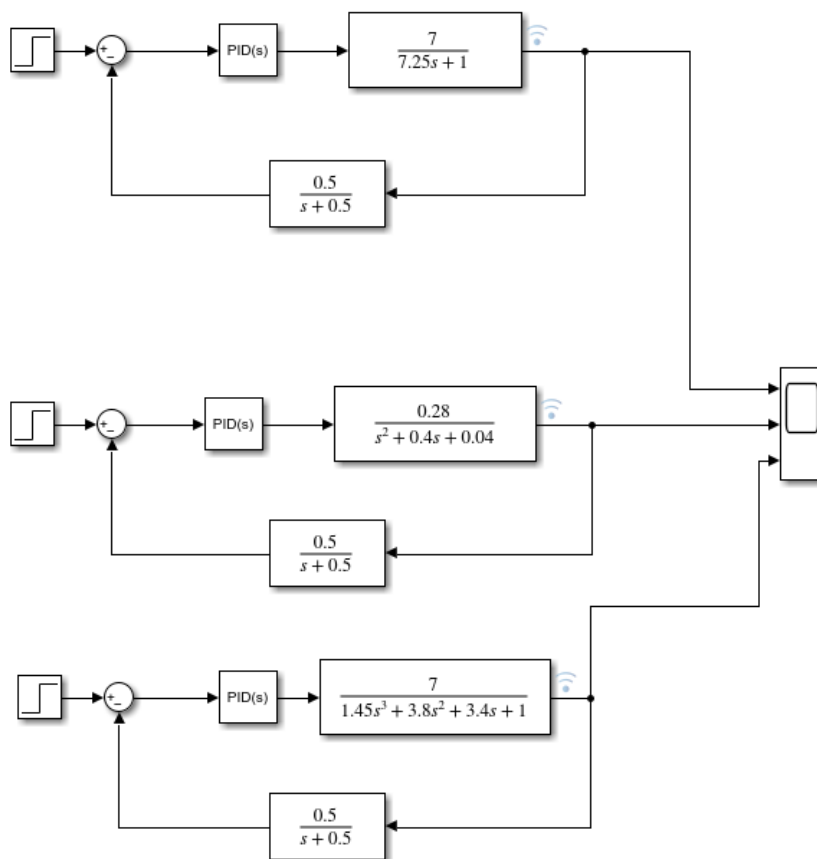
0.0047

struct with fields:

```
RiseTime: 1.4622
TransientTime: 56.5755
SettlingTime: 56.5755
SettlingMin: 0.6274
SettlingMax: 1.0428
Overshoot: 4.2798
Undershoot: 0
Peak: 1.0428
PeakTime: 2.7079
```

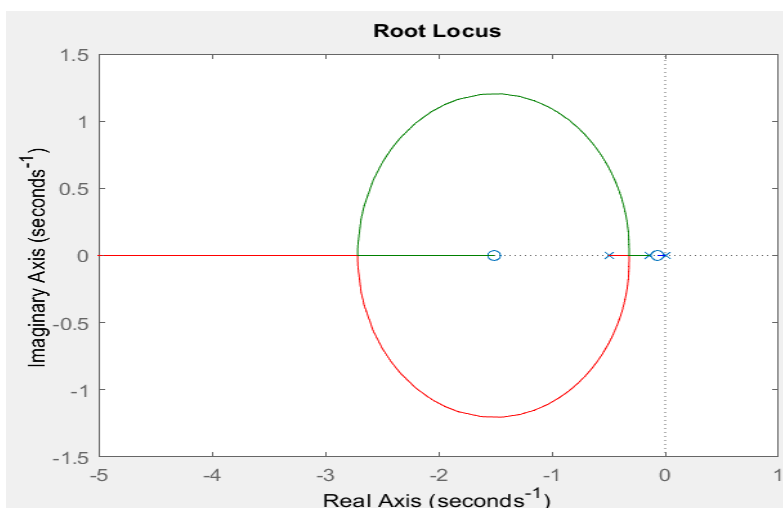
sse =

0.0025

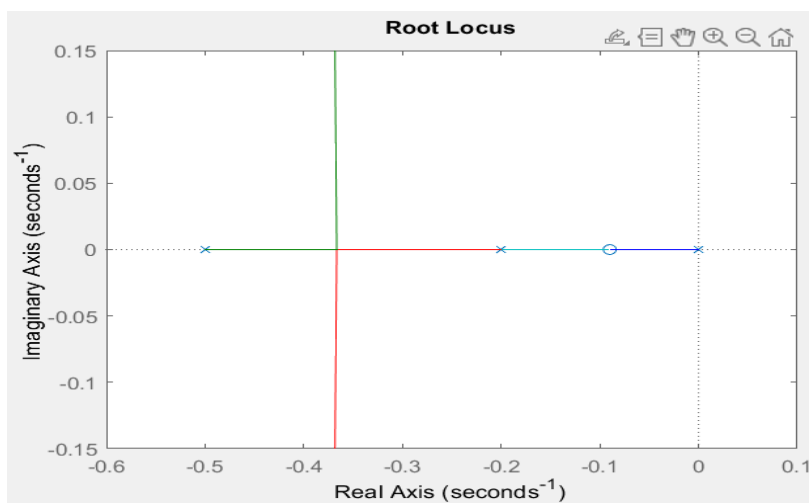


میبینیم که به چه زیبایی تمام سیستم‌ها پایدار شده و با اورشوت و t_p کم و خطای ماندگار صفر، به تمام خواسته‌های مسئله رسیدیم.

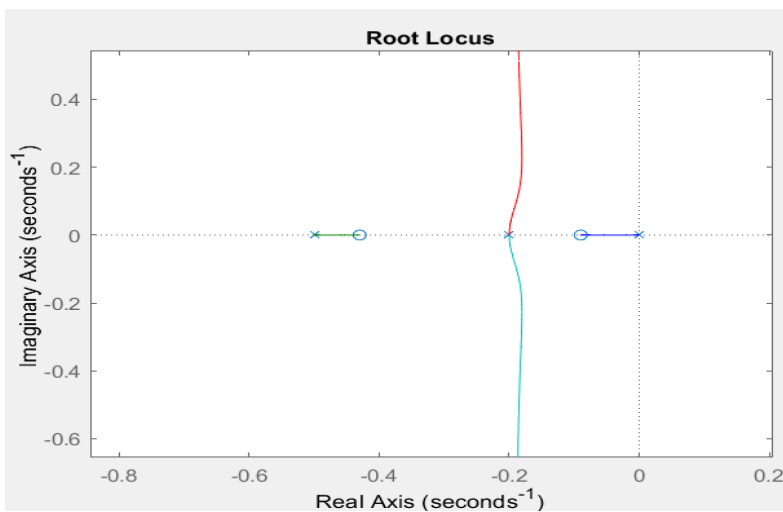
Ga: به ازای هر مقداری از بهره پایدار است.



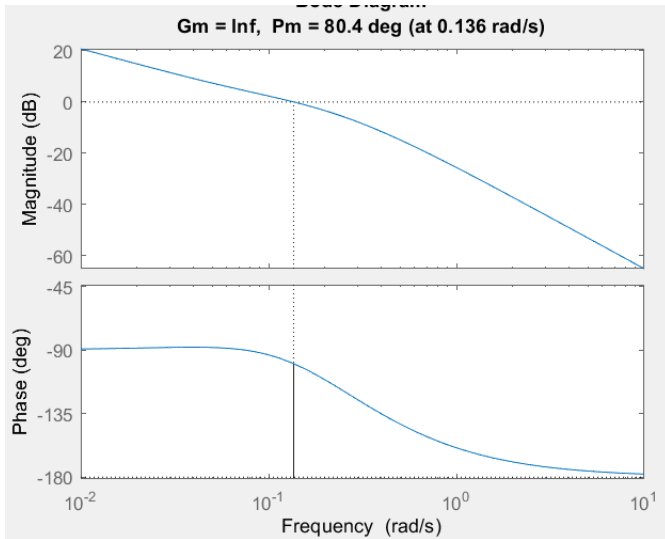
Gb: به ازای هر مقداری از بهره پایدار است.



Gc: به ازای هر مقداری از بهره پایدار است.

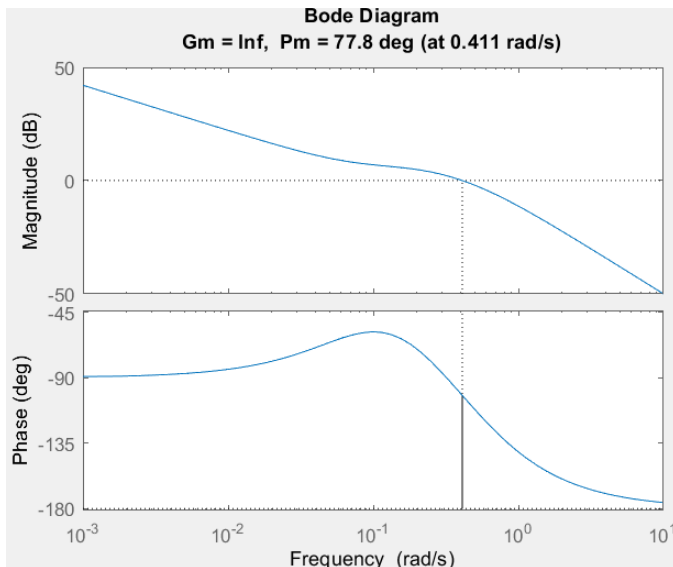


:Gc



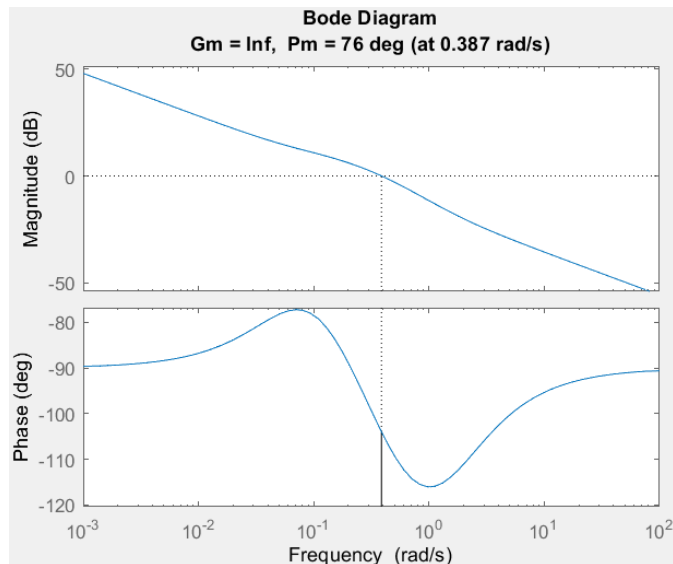
حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، ۸۰.۴ درجه می‌باشد و این سیستم حاشیه‌ی بهره‌ی ∞ دارد ($G_m = \infty$) و به ازای هر مقدار از بهره، پایدار می‌ماند. (در قسمت ۵ هم به همین نتیجه رسیدیم).

:Gb



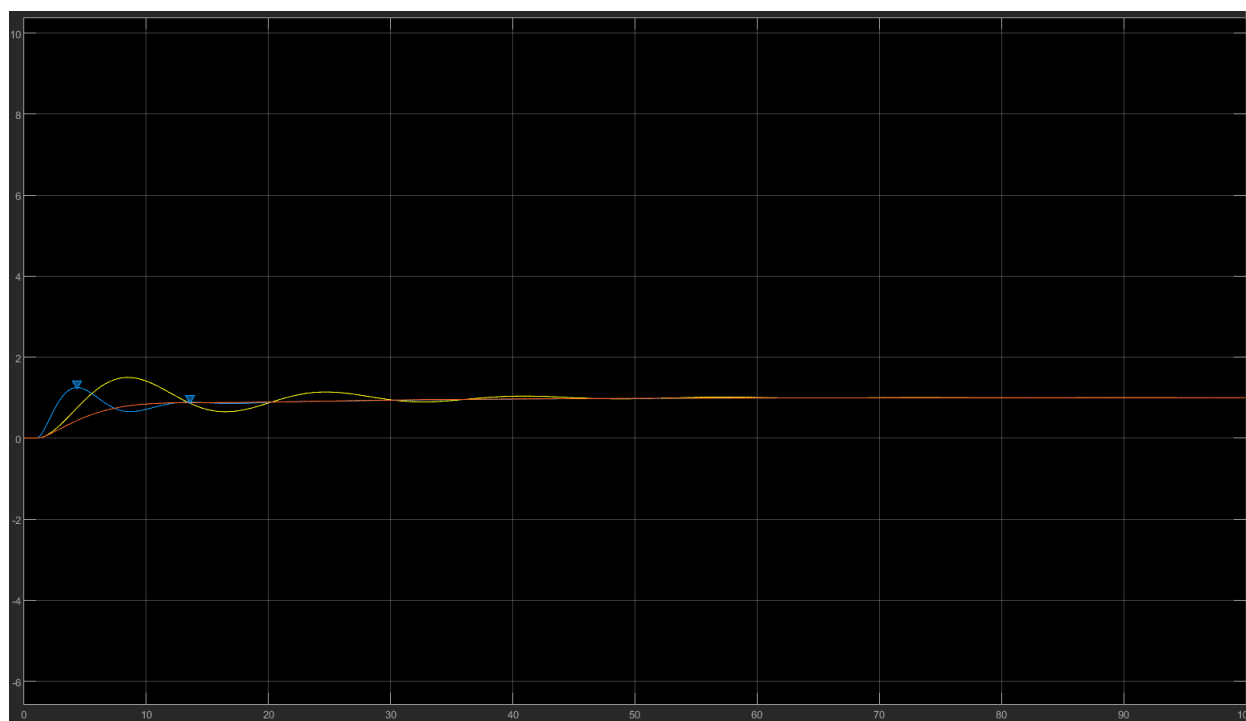
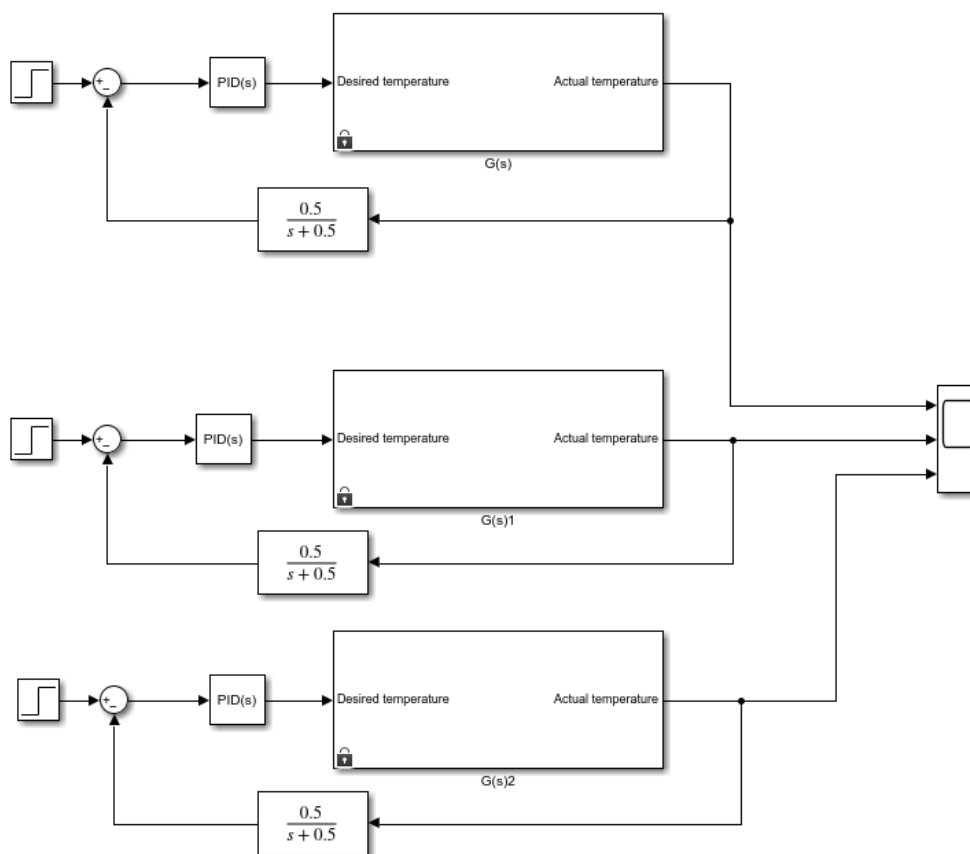
حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، ۷۷.۸ درجه می‌باشد و این سیستم حاشیه‌ی بهره‌ی ∞ دارد ($G_m = \infty$) و به ازای هر مقدار از بهره، پایدار می‌ماند. (در قسمت ۵ هم به همین نتیجه رسیدیم).

:Ga



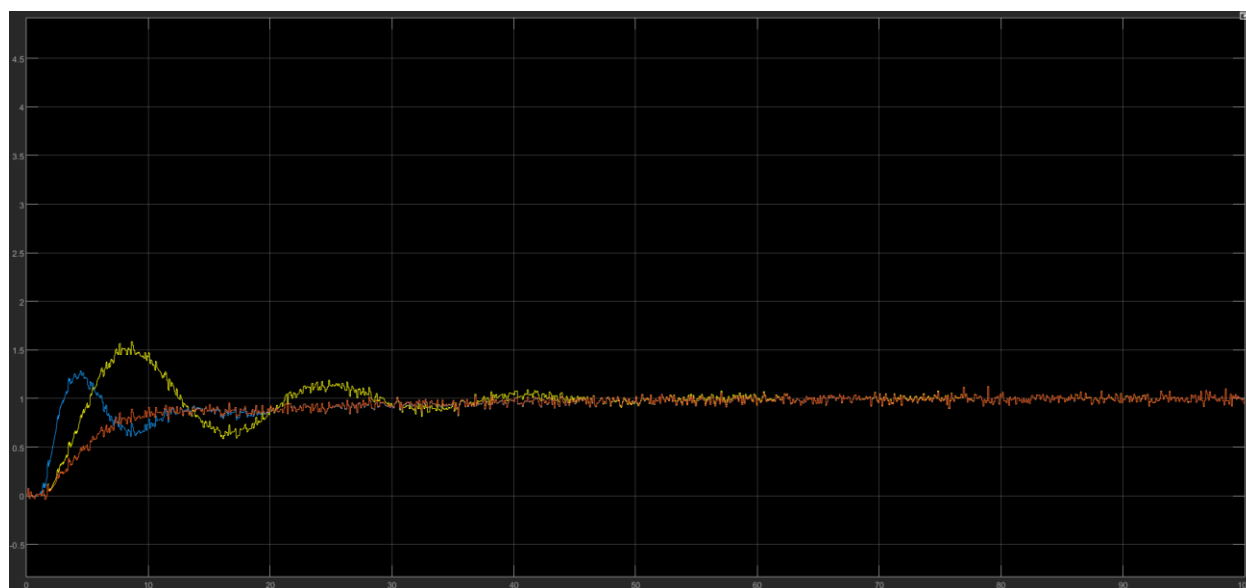
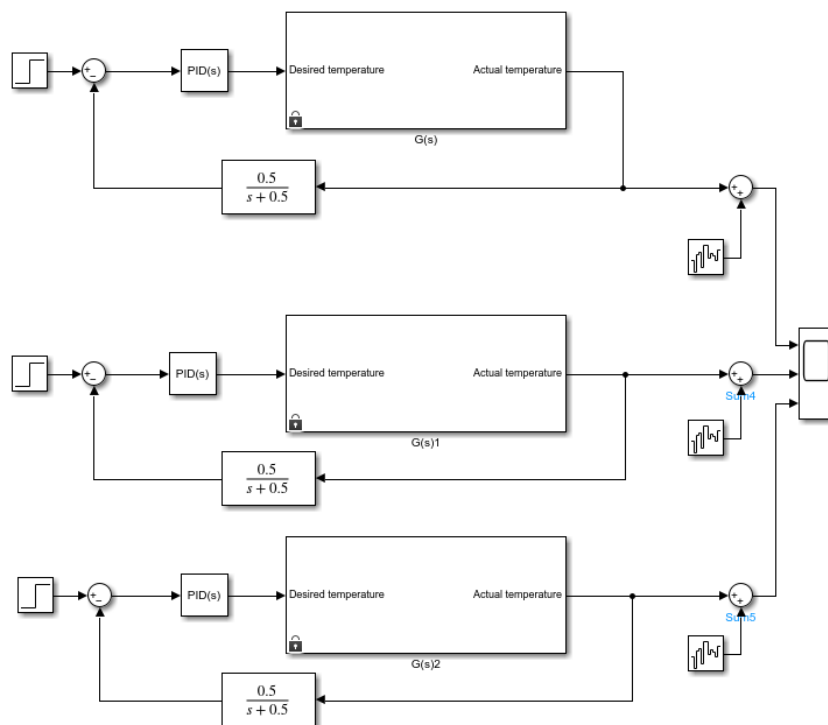
حاشیه‌ی فاز برای این سیستم، ۷۶ درجه می‌باشد و این سیستم حاشیه‌ی بهره‌ی ∞ دارد ($G_m = \infty$) و به ازای هر مقدار از بهره، پایدار می‌ماند. (در قسمت ۵ هم به همین نتیجه رسیدیم).

هیچکدام از سیستم‌ها، پهنای باند ندارند. چراکه یا به -۱۸۰ می‌رسند یا در بینهایت به -۱۸۰ می‌رسند و پهنای باند برایشان تعریف نمی‌شود.

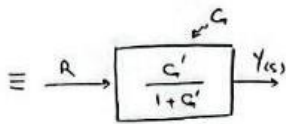
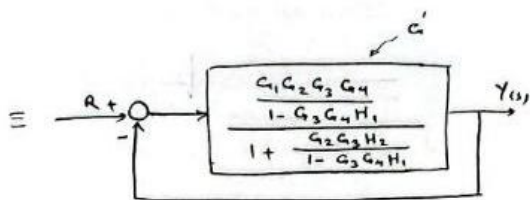
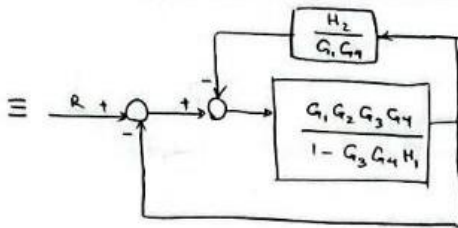
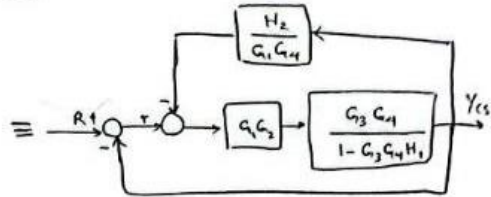
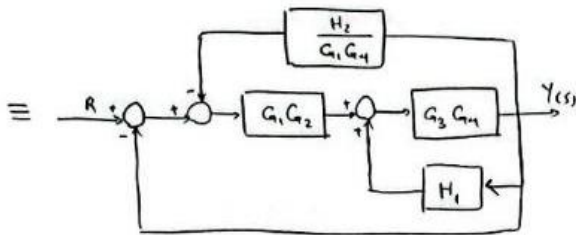
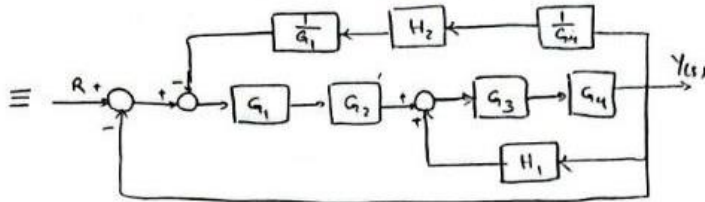
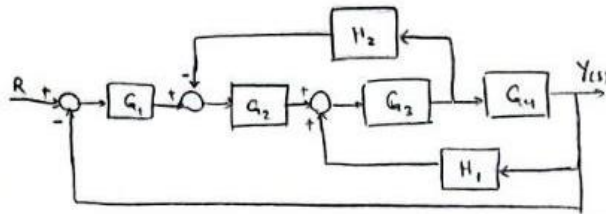


همانطور که از شکل نیز میبینیم، نمودار آبی رنگ (مربوط به G_b)، از دو سیستم دیگر، تخمین بهتری میباشد. چراکه در عین t_p کم، اورشوت معقولی دارد. (حدود ۲۴٪) (نمودار قرمز رنگ (مربوط به G_c) اورشوت ندارد اما t_p ش حدود ۷۰ ثانیه میباشد).

خروجی هر سیستم با حضور نویز سفید جمع پذیر:

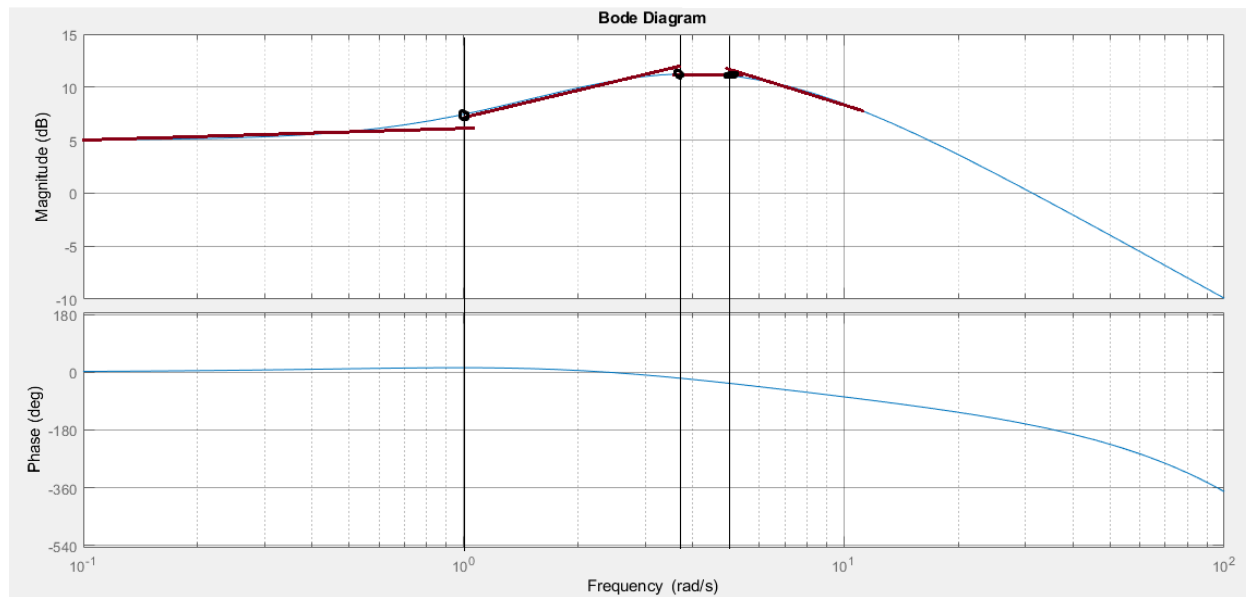


قابلیت کنترل کننده ها در حذف اغتشاشات، یکسان است.



$$G' = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2} \quad \leadsto \quad G = \frac{\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2}}{1 + \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2}}$$

$$\leadsto \quad G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 - G_3 G_4 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$



از آنجایی که شیب نمودار اندازه در فرکانس‌های پایین ۰ باشد، میتوان فهمید که قطبی در مبدا ندارد. همچنین نمودار زاویه کمی بالا آمده و شیب مثبت کمی دارد و میفهمیم که یک صفر در حدود ۱ داریم. سپس دو بار شیب نمودار منفی‌تر شده که میتوان نتیجه گرفت دو قطب در حدود ۳.۵ و ۵ داریم. و در آخر چون نمودار فاز به زاویه‌ای همگرا نمیشود، متوجه میشویم که یک تاخیر (e^{-Ts}) در سیستم ضرب شده؛ که شیب نمودار فاز در فرکانس‌های بزرگ، اندازه‌ی T را بهمان میدهد.

همچنین برای بهره داریم:

$$\log_{10}|G(s)| = \log_{10} k \longrightarrow 20 \log k = 5 \longrightarrow k = 10^{0.25} \approx 1.78$$

$$G(s) = \frac{1.78(s+1)}{(\frac{s}{3.5}+1)(\frac{s}{5}+1)} e^{-0.05s}$$

اگر تابع بدست آمده را در متلب بکشیم میبینیم که با تقریب بسیار خوبی به جواب میرسیم.

