باسمه تعالی

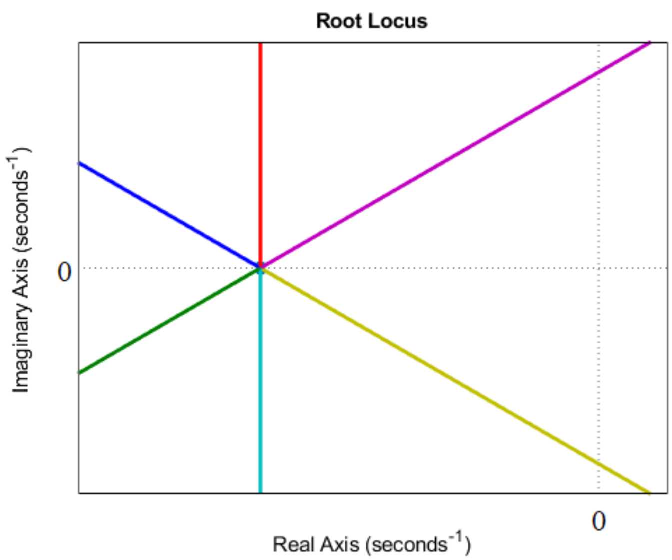
سیستم‌های کنترل خطی

آزمونک ۲

نام نام‌خانوادگی: **شماره دانشجویی:**

زمان پاسخ‌گویی: ۳۰ دقیقه

مکان هندسی ریشه‌های عبارت $1 + kG(s) = 0$ برای ($k \geq 0$) در شکل ۱ نمایش داده شده است. می‌دانیم به ازای $k = 1$ این عبارت دو ریشه روی محور موهومی دارد. تابع تبدیل اکیدا سره $G(s)$ در مسیر مستقیم یک حلقه کنترلی با فیدبک واحد منفی قرار گرفته است.



شکل ۱: مکان هندسی ریشه‌ها

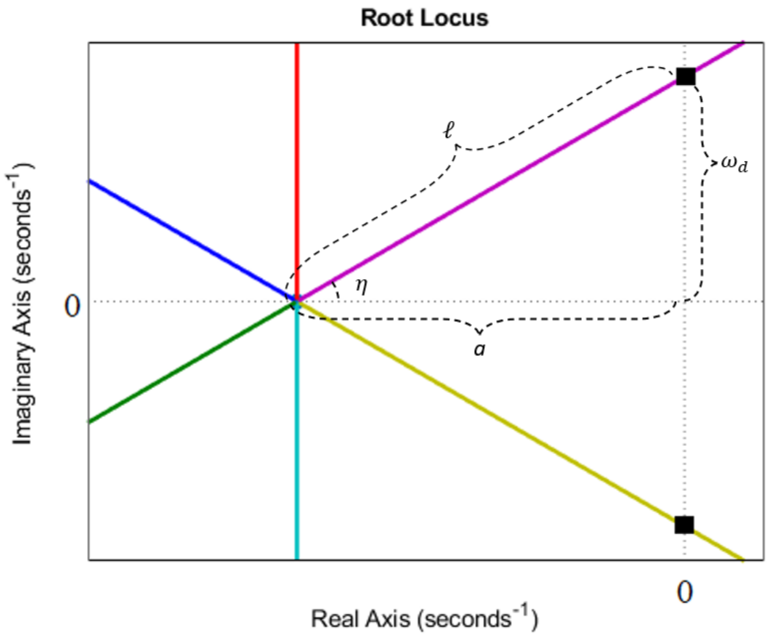
۱. تابع تبدیل $G(s)$ را بیابید.

با توجه به این‌که ۶ مجانب دارد، تفاوت درجه صورت و مخرج ۶ صفر است. از آن‌جایی که صفر متناهی ندارد، تابع تبدیل $G(s)$ دارای ۶ قطب است. هم‌چنین چون شاخه‌های مکان ریشه از ابتدا بر مجانب‌ها منطبق است (و قطب دیگیری غیر از محل برخورد مجانب‌ها دیده نمی‌شود)، تابع تبدیل به صورت

$$G(s) = \frac{1}{(s+a)^6}$$

است. نقطه‌ی $-a$ محل ۶ قطب تابع تبدیل $G(s)$ و محل برخورد مجانب‌هاست. با توجه به این‌که گفته شده برای $k = 1$ دو قطب روی محور موهومی دارد(شکل زیر را ملاحظه بفرمایید)، شرط اندازه در نقاط مشخص شده بررسی می‌کنیم:

$$|G(s)| = \frac{1}{k}\bigg|_{k=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad l^6 = 1 \quad \Rightarrow \quad l = 1$$



شکل ۲: مکان هندسی ریشه‌ها

از طرفی با توجه به این‌که ۶ مجانب دارد، زاویه مجانب‌ها از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{(2n+1)\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$$

بنابراین با توجه به شکل فوق:

$$\cos\eta = \frac{a}{l} \quad \Rightarrow \quad a = l\cos\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{3}}{2})^6}$$

۲. فرکانس نوسانات نامیرای پاسخ پله سیستم حلقه بسته چه میزان است؟

با توجه به شکل و صورت سوال، دو قطب سیستم حلقه بسته روی محور موهومی و ۴ قطب سمت چپ محور موهومی قرار دارند. در پاسخ پله، اثر ۴ قطب سمت چپ پس از گذشت زمان ناچیز می‌شود و نوسانات نامیرا صرفا به دلیل قطب‌های روی محور موهومی رخ می‌دهد. فرکانس این نوسانات برابر ω_d است که در شکل مشخص شده است.

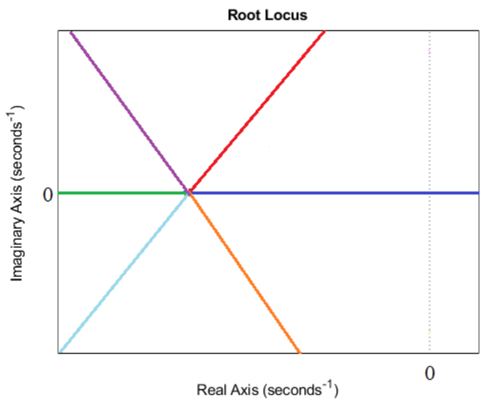
$$\sin\eta = \frac{\omega_d}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = l\sin\eta = \frac{1}{2}$$

۳. اگر $kG(s)$ در مسیر مستقیم یک حلقه کنترلی با فیدبک واحد مثبت قرار گرفته باشد، بازه‌ی مقادیر k که این سیستم حلقه بسته پایدار است را (در صورت وجود) بیابید.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت:

$$T(s) = \frac{kG(s)}{1-kG(s)}$$

قطب‌های سیستم حلقه بسته ریشه‌های $1-kG(s)=0$ هستند که با تعریف $\bar{k}=-k$ آن را می‌توان به صورت $1+\bar{k}G(s)=0$ نوشت. با رسم مکان ریشه برای این معادله برای $\bar{k}$های منفی داریم:



شکل ۳: مکان هندسی ریشه‌های $\bar{k}$های منفی

با توجه به این شکل برای $|\bar{k}| < \frac{1}{G(s)|_{s=0}} = a^6 = \frac{27}{64}$ یا برای $-\frac{27}{64} < \bar{k} < 0$ پایدار است. همچنین با توجه به شکل ۱ سیستم حلقه بسته برای $0 < \bar{k} < 1$ پایدار است. بنابراین سیستم حلقه بسته با فیدبک مثبت برای $-\frac{27}{64} < \bar{k} < 1$ یا $-1 < k < \frac{27}{64}$ پایدار است.