1

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = \frac{d^2r}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} + r$$

الف)

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} (s^3 + 3s^2 + 6s + 4)\, Y(s) = (s^2 + 2s + 1)\, R(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)(s^2+2s+4)} = \frac{s+1}{s^2+2s+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3}$$

ب)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \beta_0$$

$$C + Dr = y \Rightarrow y = x_1 + \beta_0 r \Rightarrow x_1 = y - \beta_0 r \quad ①$$

$$A\dot{x} + Br = x \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 r \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 r$$

$$\Rightarrow x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{r} - \beta_1 r \quad ② \quad \Rightarrow x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{r} - \beta_1 \dot{r} - \beta_2 r \quad ③$$

$$Ax + Br = \dot{x} \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2$$

$$Ax + Br = \dot{x} \Rightarrow \dot{x}_3 = -4x_1 - 6x_2 - 3x_3 + \beta_3 r$$

$$\xrightarrow{③,②,①} \dddot{y} + 3\ddot{y} + 6\dot{y} + 4y = \beta_0 \dddot{r} + (\beta_1 + 3\beta_0)\ddot{r}$$

$$+ (\beta_2 + 3\beta_1 + 6\beta_0)\dot{r} + (\beta_3 + 3\beta_2 + 6\beta_1 + 4\beta_0)\, r$$

$$\Rightarrow \left.\left.\left.\begin{array}{l} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 + 3\beta_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_1 = 1 \atop \beta_2 + 3\beta_1 + 6\beta_0 = 2 \right\} \Rightarrow \beta_2 = -1 \atop \beta_3 + 3\beta_2 + 6\beta_1 + 4\beta_0 = 1 \right\} \Rightarrow \beta_3 = -2$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

۴- الف

$x_1 = x \Longrightarrow \dot{x}_1 = x_۲$

$x_۲ = \dot{x} \Longrightarrow \dot{x}_۲ = \ddot{x} = \sin(x_1) - ۲x_1 - ۳x_۲$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_۲} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x_1} & \frac{\partial f_۲}{\partial x_۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ \cos x_1 - ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

در نقطه ی تعادل : $= -۱$

$|_۰$

نقطه تعادل : $\left.\begin{matrix} x_1 = ۰ \\ x_۲ = ۰ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \bar{x} = x - ۰ = x$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix} \bar{x}$$

نقطه حول π : $x_1 = \pi$, $x_۲ = ۰$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ \cos x_1 - ۲ & -۳ \end{bmatrix} \Longrightarrow \bar{x} = x - \pi \Longrightarrow \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۳ & -۳ \end{bmatrix} \bar{x}$$

$|_\pi = -۳$

۴- ب

نقاط تعادل : $\left.\begin{matrix} \dot{x} = ۰ \\ \dot{y} = ۰ \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} x(x+y-۱) = ۰ \\ x^۲ - y - ۱ = ۰ \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \longrightarrow y = -۱ \\ \text{یا} \\ x = ۱ - y \longrightarrow ۱ + y^۲ - ۲y - y - ۱ = ۰ \longrightarrow y^۲ = ۳y \longrightarrow \begin{cases} y = ۰ \to x = ۱ \\ y = ۳ \to x = -۲ \end{cases} \end{cases}$

نقاط تعادل : $|^{۱}_{۰} - |^{-۲}_{۳} - |^{۰}_{-۱}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_۲}{\partial x} & \frac{\partial f_۲}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x + y - ۱ & x \\ ۲x & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{به ازای}} \begin{cases} |^{۱}_{۰} \to A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{matrix} \bar{x} = x - ۱ \\ \bar{y} = y \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ |^{-۲}_{۳} \to A = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{matrix} \bar{x} = x + ۲ \\ \bar{y} = y - ۳ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ |^{۰}_{-۱} \to A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \to \begin{matrix} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y + ۱ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \end{cases}$$