باسمه تعالی

سیستم‌های کنترل خطی

امتحان پایان‌ترم

پاسخ خلاصه

استفاده از یادداشت‌های کلاس و منابع که در صفحه‌ی درس بارگذاری شده‌اند، بلامانع است. البته واضح است که همفکری و مشارکت در پاسخ‌دهی به امتحان ممنوع است!

۱. چند جمله‌ای

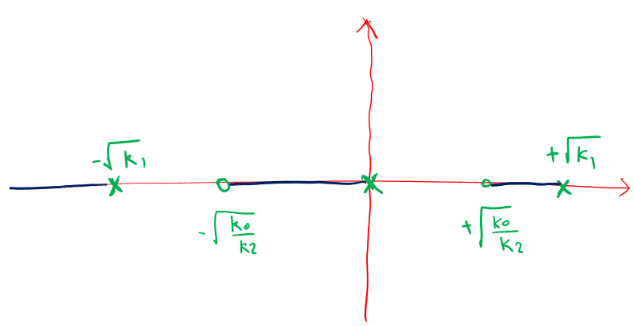
$$s^3 + k_2 s^2 - k_1 s - k_0 = 0$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید k_0، k_1 و k_2 همگی مثبت‌اند و همواره $k_0 < k_1 k_2$ برقرار است. با استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها نشان دهید که تمامی ریشه‌های این چندجمله‌ای حقیقی هستند.

با نوشتن معادله به صورت

$$1 + \frac{k_2 s^2 - k_0}{s^3 - k_1 s} = 1 + k_2 \frac{s^2 - k_0/k_2}{s^3 - k_1 s} \triangleq 1 + KG(s) = 0$$

$G(s)$ دارای ۲ صفر در نقاط $\pm\sqrt{k_0/k_2}$ و ۳ قطب در نقاط مبدا و $\pm\sqrt{k_1}$ هست. با توجه به $k_0 < k_1 k_2$ نتیجه می‌شود که همواره دو صفر $G(s)$ بین قطب‌های $G(s)$ قرار دارند. با توجه به قواعد رسم مکان ریشه، ریشه‌های $1 + KG(s) = 0$ همواره روی محور حقیقی قرار دارد.



۲. سیستم شکل ۱ را در نظر بگیرید. در این سیستم

$$G(s)=\frac{1}{s^2}$$

است. ساده‌ترین کنترل کننده پیش‌فازی طراحی کنید که قطب‌های حلقه بسته را در نقاط

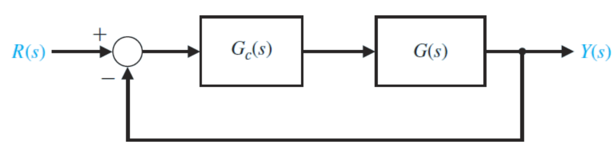
$$s=-a\pm jb$$

قرار دهد که

a = رقم یکان شماره دانشجویی شما + ۱

b = برابر رقم دهگان شماره دانشجویی شما

در صورتی که این امر امکان‌پذیر نیست دلیل آن را توضیح دهید.



شکل ۱: بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی حلقه بسته با فیدبک واحد.

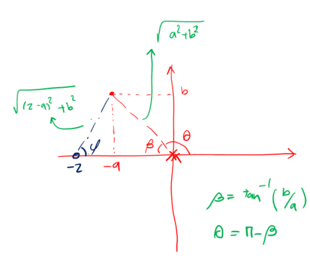
کنترل کننده PD به عنوان ساده‌ترین کنترل کننده پیش‌فاز

$$G_c(s)=K_c(s+z)$$

اگر $b=0$ باشد، آن‌گاه

$$K_c=2a,\qquad z=a/2$$

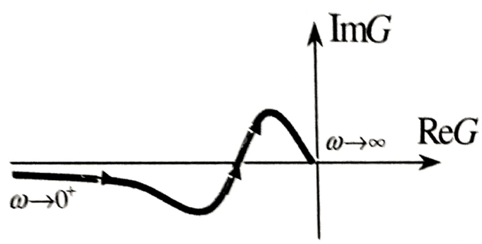
اگر $b>0$ آن‌گاه میزان نقص زاویه $\phi=\pi-\tan^{-1}(b/a)$ و محل صفر مورد نظر $z=a+b/\tan(\phi)$ و از شرط اندازه $K_c=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{(z-a)^2+b^2}}$



۳. در صورتی که شماره دانشجویی شما زوج است مورد (آ) و در صورتی که فرد است مورد (ب) را پاسخ دهید. در هر کدام از موارد پارامترهای خواسته شده را به نحوی تعیین نمایید که دیاگرام نایکوئیست داده شده حاصل شود. سیستم‌ها را کمینه فاز در نظر بگیرید.

(آ) مقدار λ و بازه‌ای از z برحسب p_1 و p_2 که نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر به صورت شکل ۲ در بیاید.

$$G(s) = \frac{s+\frac{1}{z}}{s^{\lambda}(s+\frac{1}{p_1})(s+\frac{1}{p_2})}$$



شکل ۲: نمودار سوال ۳ قسمت (آ)

$\lambda = 2$ از روی شکل و $z > p_1 + p_2$ به دلیل

$$\angle G(j\omega) = -2\pi - \tan^{-1}(p_1\omega) - \tan^{-1}(p_2\omega) + \tan^{-1}(z\omega)$$

معادله $\angle G(j\omega) = -\pi$ با توجه به شکل باید برای یک ω محدود جواب داشته باشد، پس

$$\tan^{-1}(p_1\omega) + \tan^{-1}(p_2\omega) = -\pi + \tan^{-1}(z\omega)$$

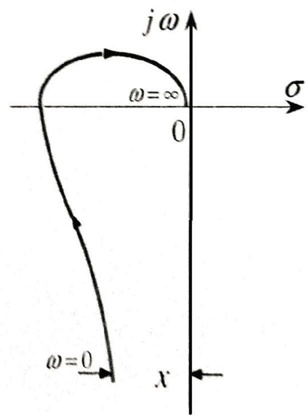
با $\tan$ گرفتن از طرفین

$$\frac{p_1\omega + p_2\omega}{1-p_1p_2\omega^2} = z\omega, \qquad \omega^2 = \frac{z-p_1-p_2}{zp_1p_2}$$

با توجه به کمینه فاز بودن، $zp_1p_2 > 0$ برقرار است پس معادله فوق جواب دارد اگر $z > p_1 + p_2$ باشد.

(ب) مقدار λ و مقدار x (در شکل ۳) بر حسب p_1 و p_2 که نمودار نایکوئیست تابع تبدیل زیر به صورت شکل ۳ در بیاید.

$$G(s) = \frac{1}{s^{\lambda}(s+p_1)(s+p_2)}$$



شکل ۳: نمودار سوال ۳ قسمت (ب)

$\lambda = 1$ از روی شکل و

$$x = -\frac{p_1+p_2}{p_1^2 p_2^2}$$

چون

$$x = \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}(G(j\omega))$$

و

$$G(j\omega) = \frac{-j(p_1-j\omega)(p_2-j\omega)}{\omega(p_1^2-\omega^2)(p_2^2-\omega^2)} = \frac{-(p_1+p_2)\omega}{\omega(p_1^2-\omega^2)(p_2^2-\omega^2)} + j...$$

۴. سیستم شکل ۱ را در نظر بگیرید.

نمودار نیکولز $G_c(j\omega)G(j\omega)$ در شکل ۴ رسم شده است. بر اساس این نمودار به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) حد فاز چه مقدار است؟

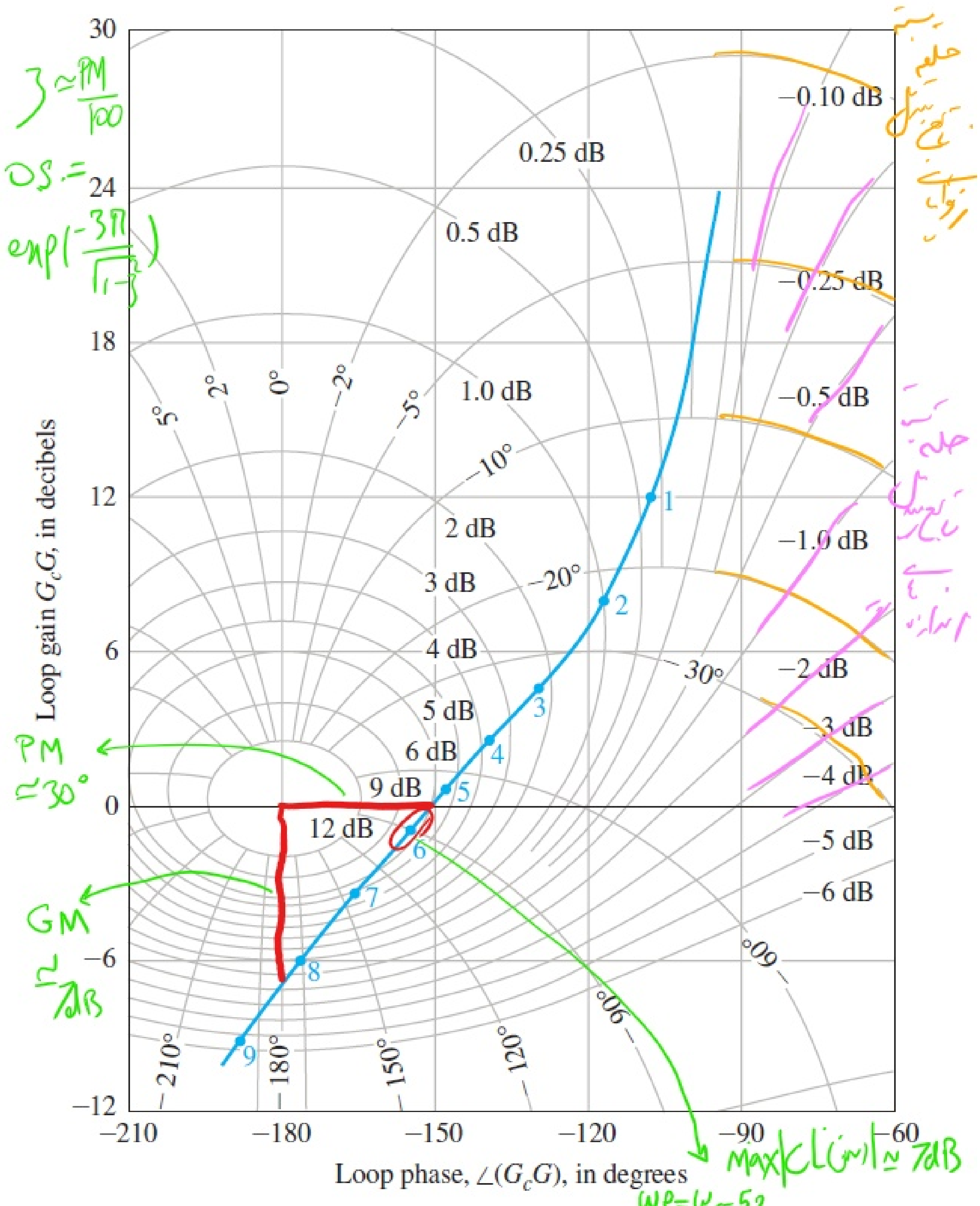
(ب) حد بهره به چه میزان است؟ (تقریبی و برحسب dB)

(ج) میزان حداکثر فراجهش پاسخ پله سیستم حلقه بسته چقدر است؟ (تقریبی)

(د) اگر فرکانس نقاط مشخص شده در شکل به صورت جدول زیر باشد، فرکانس تشدید و پیک پاسخ فرکانسی سیستم حلقه بسته را به صورت تقریبی مشخص کنید.

شماره نقطه	1	2	3	4	5	6	7	8	9
فرکانس ω	1.0	2.0	2.6	3.4	4.2	5.2	6.0	7.0	8.0

(ه) نقطه‌ای که شماره آن برابر با رقم یکان شماره دانشجویی شماست را در نظر بگیرید. اگر رقم یکان شماره دانشجویی شما 0 است، نقطه شماره 3 را در نظر بگیرید. در فرکانس مرتبط با این نقطه(بر اساس جدول بالا)، زاویه و اندازه پاسخ فرکانسی سیستم حلقه بسته را (به صورت تقریبی) مشخص کنید.



شکل ۴: بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی حلقه بسته با فیدبک واحد.