به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پروژه دوم

بهینه سازی توزیع شده

دکتر کبریایی

نام: شیرین

نام خانوادگی: جمشیدی

شماره دانشجویی : ۸۱۰۱۹۹۵۷۰

نیمسال اول ۰۳-۱۴۰۲

بخش ۱ : Opinion Dynamics in Social Networks with Stubborn Agents

در این مسئله، هدف کمینه کردن کردن تابع هزینه‌ی هر عامل که بصورت زیر تعریف میشود میباشد:

$$J_i(x_i, x_{\partial_i}) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\partial_i}(x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2}K_i(x_i - x_i(0))^2,$$

این مسئله یک مسئله‌ی اجماع بوده و بهترین استراتژی هر عامل برای کمینه کردن تابع هزینه‌ی خود، این است که:

$$x_i(t+1) = \frac{1}{d_i + K_i}\sum_{j\in\partial_i} x_j(t) + \frac{K_i}{d_i + K_i}x_i(0),$$

که پارامتر K_i، میزان دگم بودن هر عامل و d_i درجه‌ی هر عامل میباشد. همانطور که مشهود است، اگر هیچ عامل دگمی نداشته باشیم، مسئله به مسئله‌ی اجماع عادی بدل میشود و نظر تمام عامل‌ها به یک نظر همگرا خواهد شد. در صورتی که با وجود عوامل دگم، انتظار نداریم نظر عامل‌ها به یک نظر همگرا شود و میتوان صرفا انتظار یک تعادل(equilibrium) را داشته باشیم.

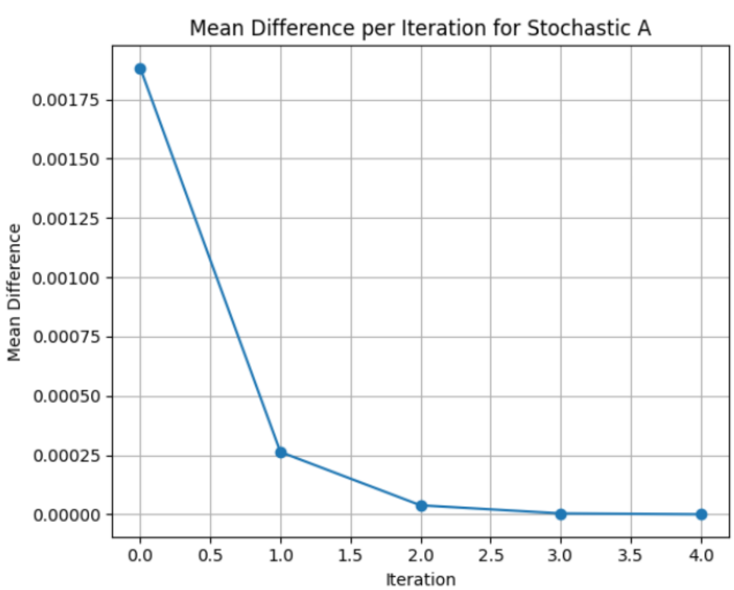
در همه‌ی بخش‌ها صورت مسئله در صورت وجود هیچ عامل دگم، یک عامل دگم و بیش از یک عامل دگم بررسی خواهد شد.

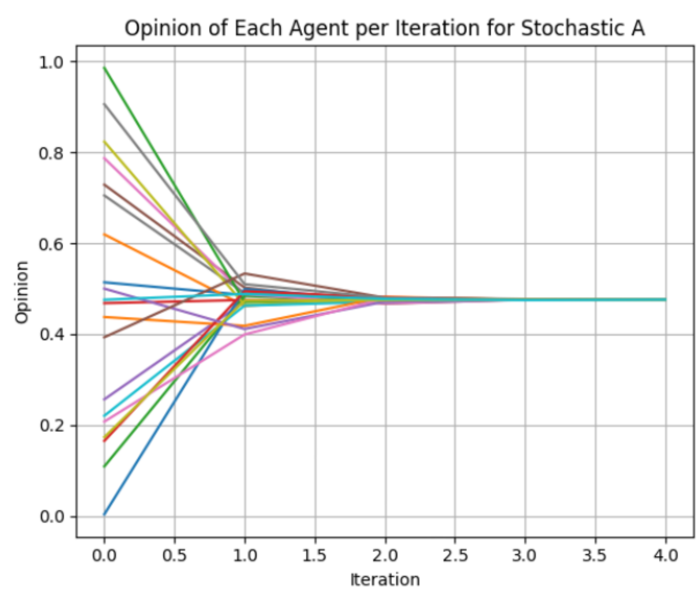
تمام شرایط اولیه بصورت رندوم به مدل داده شده است. نظرهای اولیه هر عامل، ماتریس adjacency و... . تمام نمودارها برای ۲۰ عامل ترسیم شده است.

بخش ۲ : Stochastic Adjacency Matrix

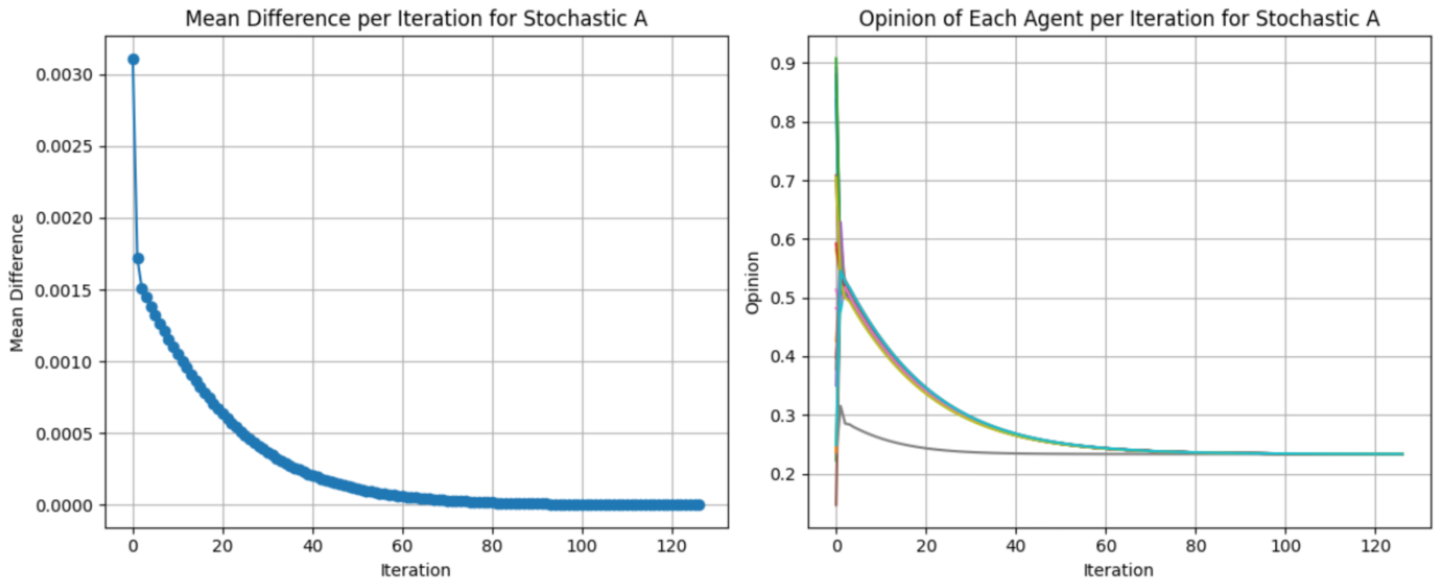
در این بخش، پس از آنکه ماتریس d که درجه‌ی هر عامل i میباشد را تشکیل دادیم با استفاده از میزان نزدیکی نظر هر عامل همسایه به نظر عامل i محاسبه شده است. شرط این قسمت این است که مجموع تمام درایه‌های هر سطر، ۱ باشد.

نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:

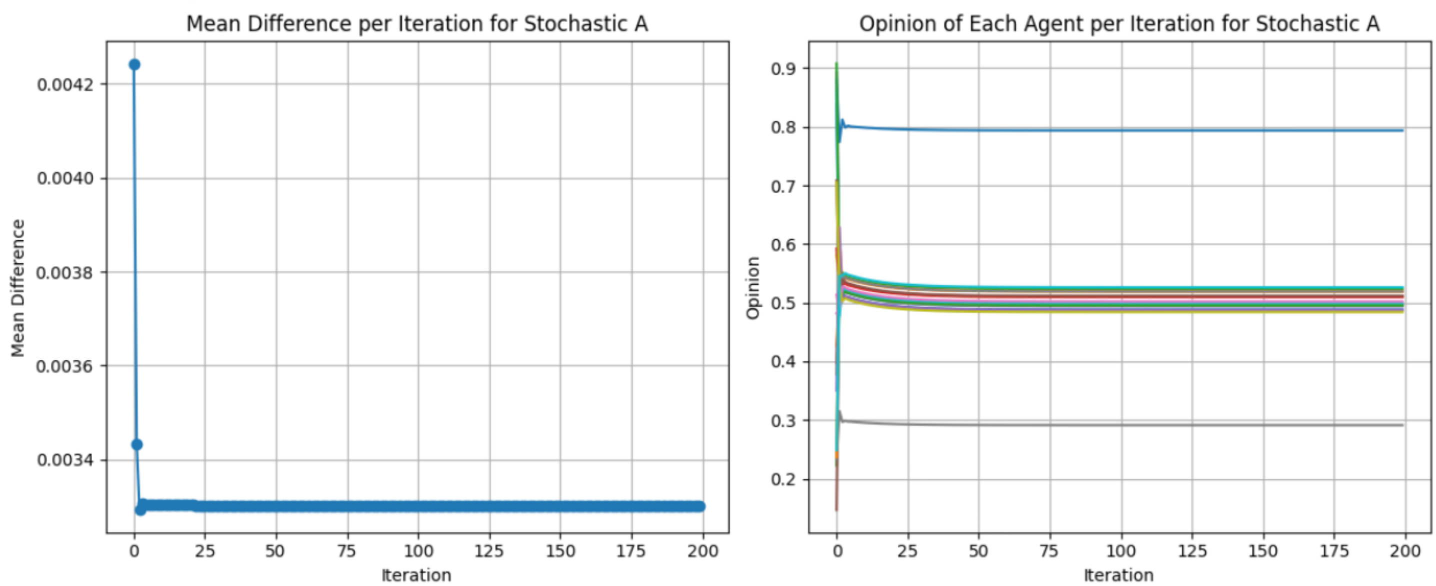




نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:



نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:

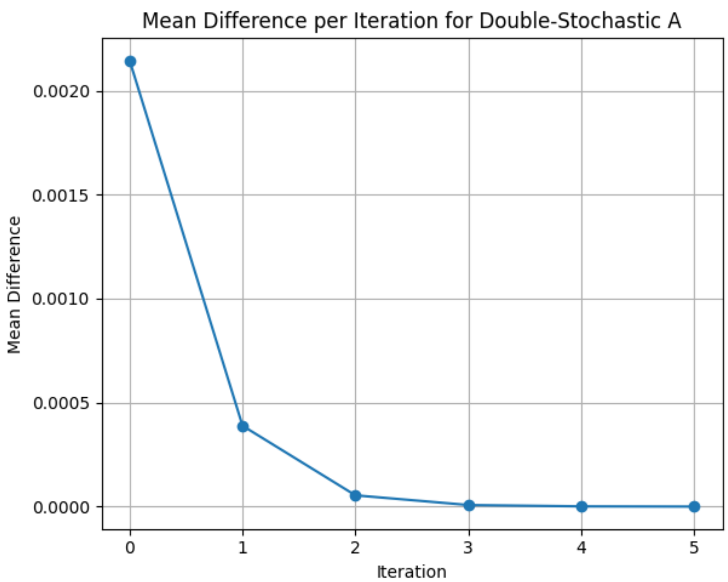


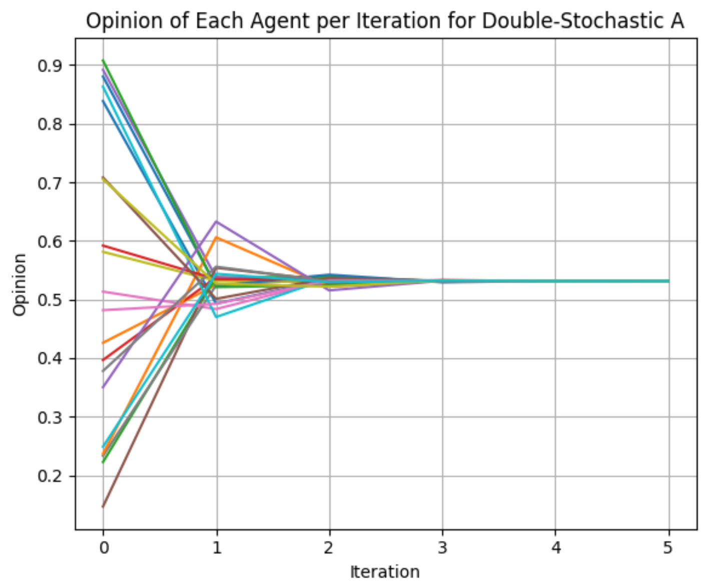
همانطور که انتظار داشتیم، وقتی هیچ عامل دگمی نداریم، پس از تعداد iterationهای بسیار کمی، تمام عامل‌ها به یک نظر همگرا شدند. در صورتی که یک عامل دگم داریم که بسیار سخت نظر خود را تغییر میدهد، تمام عامل‌ها به نظر آن عامل دگم همگرا شده و تعداد iterationهای بسیار بیشتری نسبت به حالت قبل نیاز است. و در صورتی که بیش از یک عامل دگم داریم، صرفا به یک تعادل میرسیم که دو عامل دگم تقریبا نظر خود را تغییر نداده و سایر عوامل با فاصله‌ای نزدیک به هم قرار دارند.

بخش ۳: Double Stochastic Adjacency Matrix

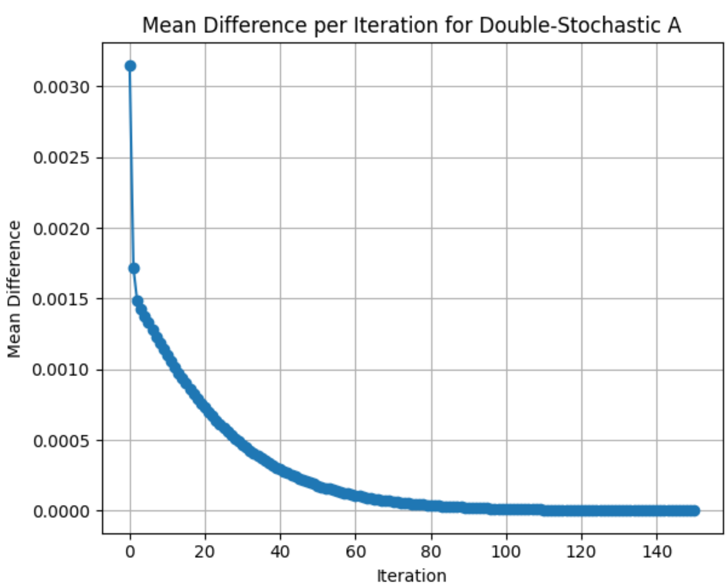
در این بخش علاوه بر اینکه مجموع درایه‌های هر سطر ماتریس adjacency باید برابر با یک باشد، این شرط رو ستون‌های ماتریس نیز باید برقرار باشد. اما نتایج در این بخش با بخش قبل تفاوت چندانی نمیکند و گویا در مسئله‌ی ما این شرط باعث همگرایی سریع‌تر و بهتر نخواهد شد.

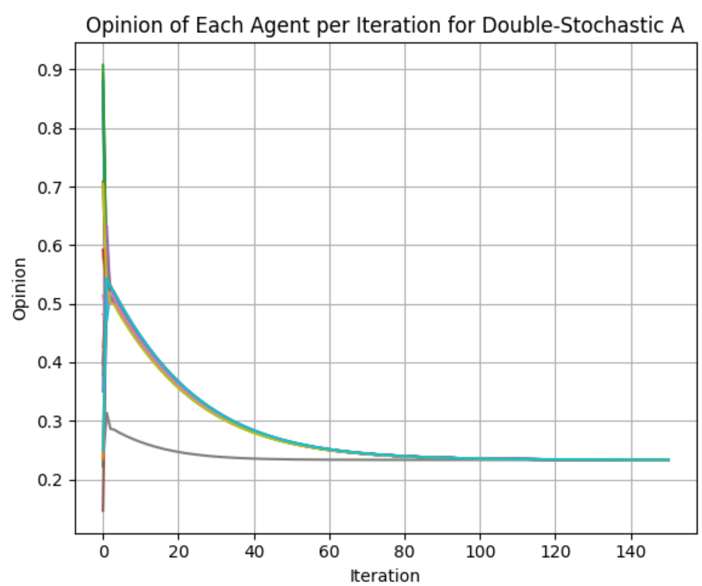
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:



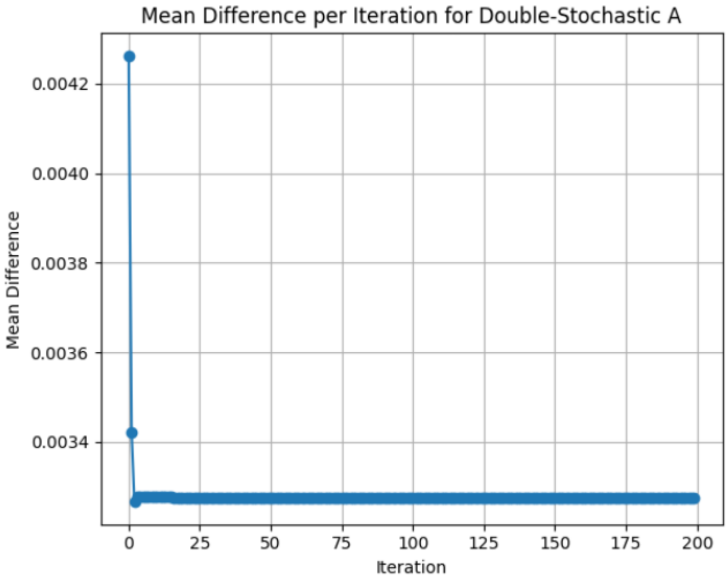


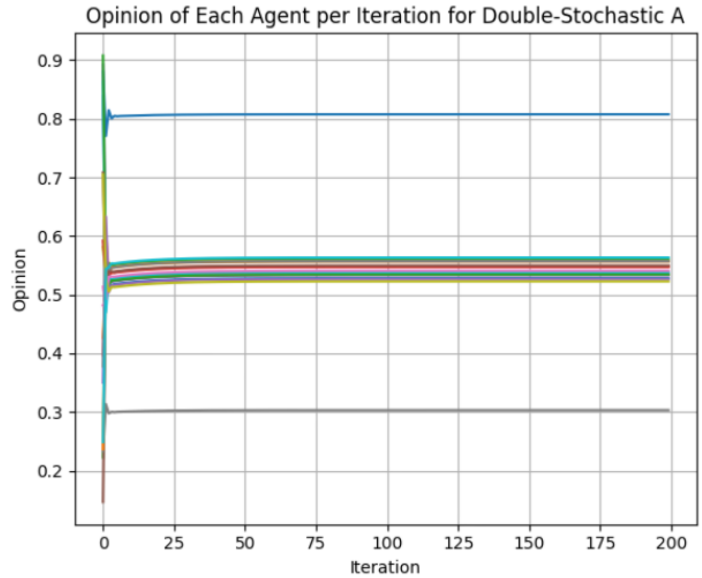
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:





نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:

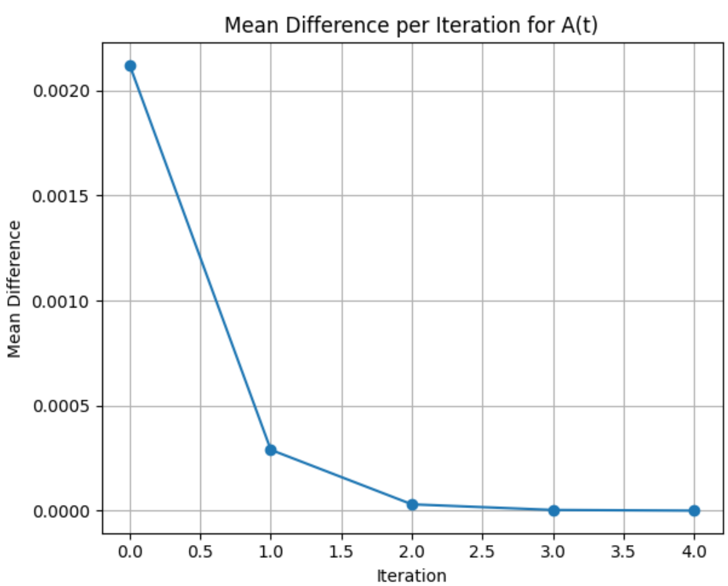


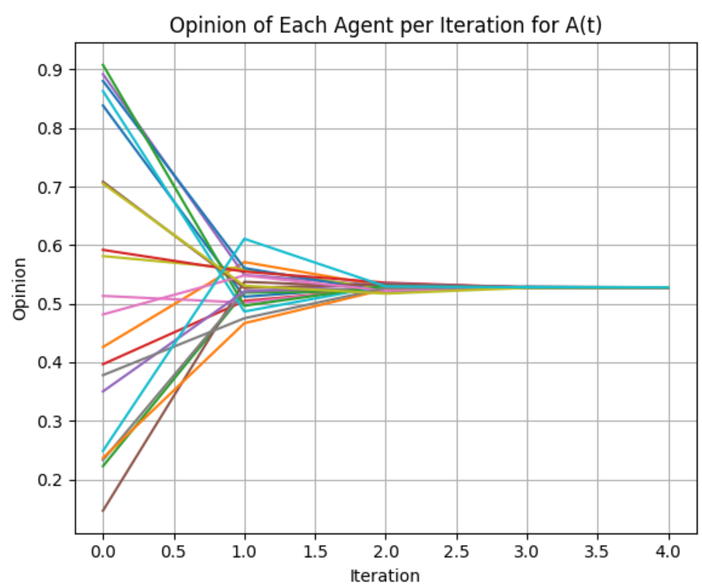


بخش ۴: Adjacency Matrix Changing with Time

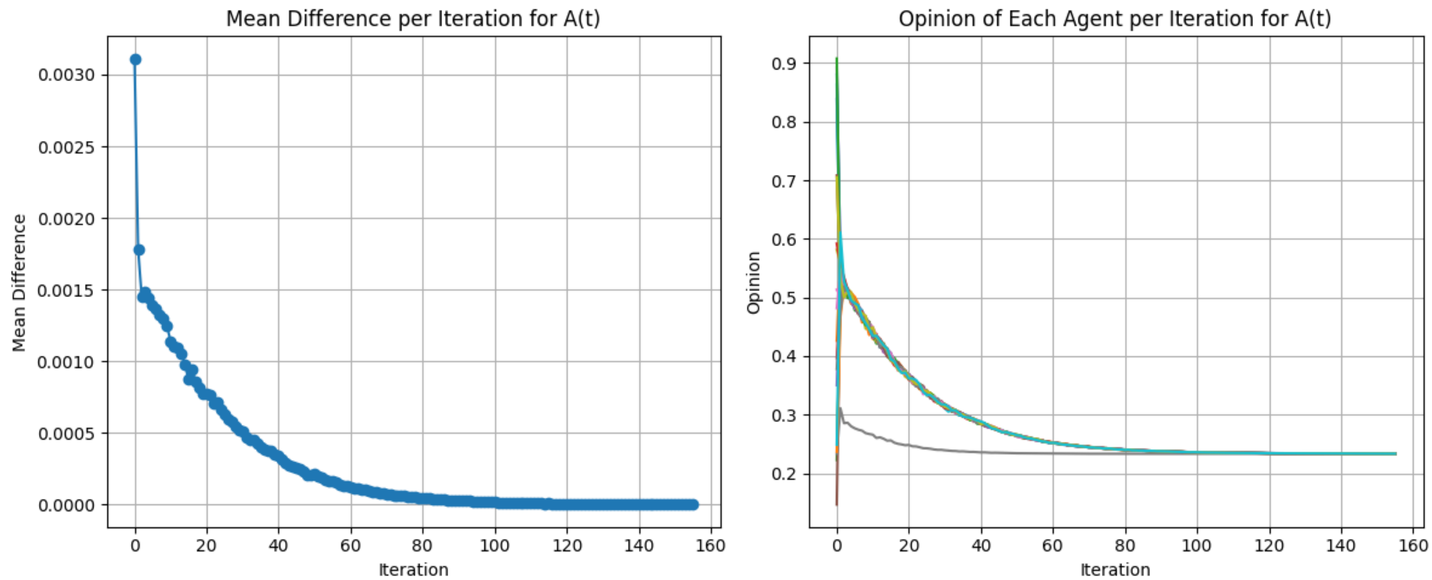
در این بخش ماتریس adjacency با زمان تغییر کرده و طبعا همسایه‌های هر عامل در هر iteration تغییر خواهد کرد.

نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:

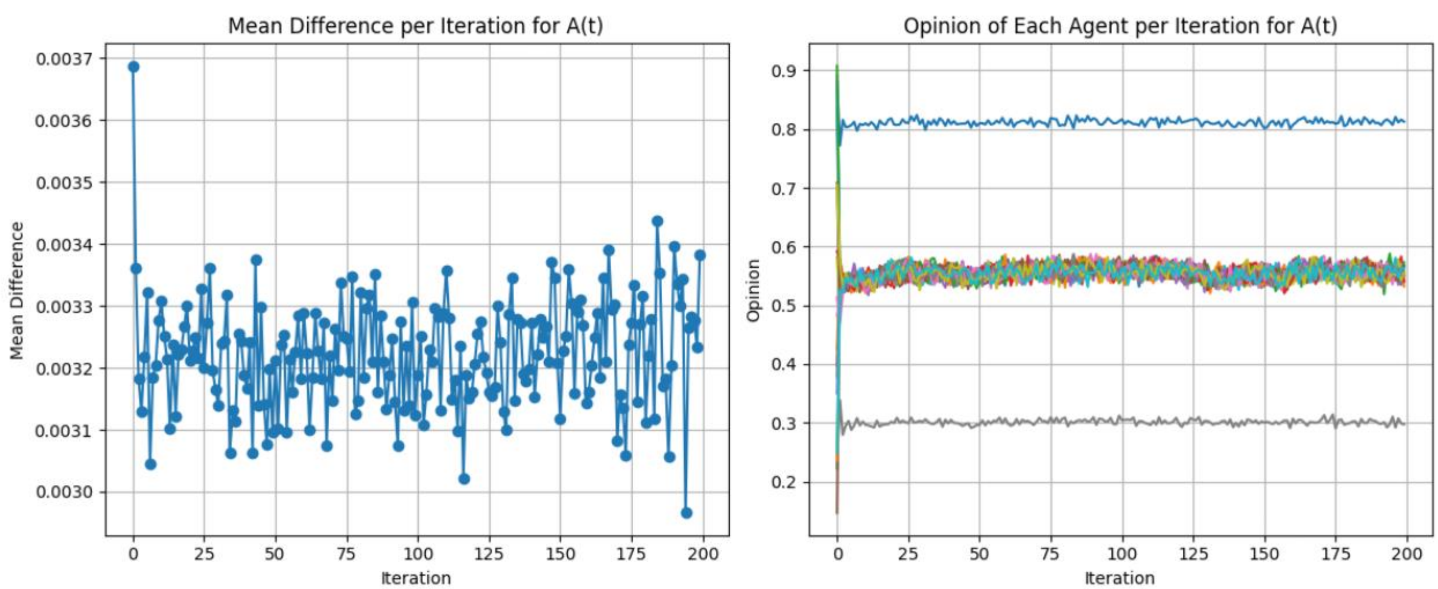




نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:



نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:



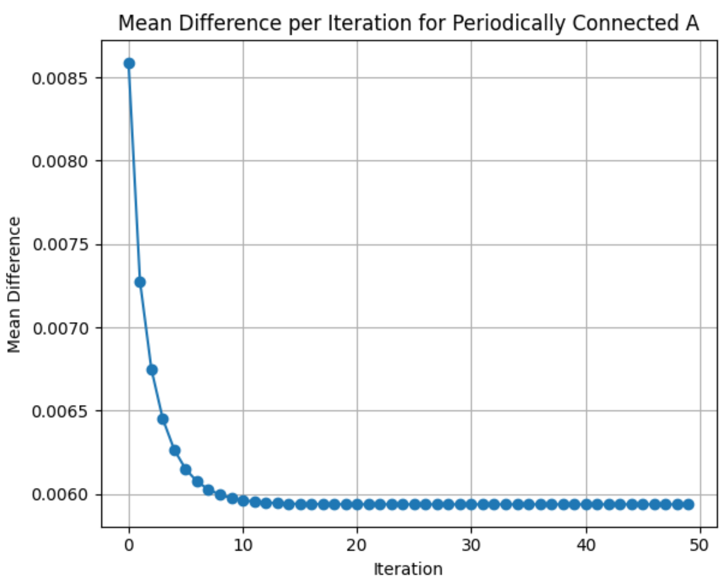
میبینیم که در نموداری که هیچ عامل دگمی نداریم، روند همگرایی و تعداد iterationهای لازم برای رسیدن به همگرایی، تقریبا مشابه قبل میباشد. علت امر این است که در این مسئله بعلت اینکه تمام عامل‌ها غیر دگم هستند، پس از یک تبادل نظر، بسیار نظراتشان به هم گراییده شده و تغییر همسایه‌ها در هر iteration نتوانسته تاثیر چندانی روی همگرایی عوامل بگذارد. اما اثر متغیر با زمان بودن ماتریس A، بسیار خودش را در صورتی که عوامل دگم داشته باشیم نشان میدهد. چراکه هرچقدر هم که عوامل غیر دگم همگرا شوند، با تغییر همسایه‌هایشان، در iteration بعدی ممکن است با عامل دگم مواجه شوند و مجبورند با ضریبی به عامل دگم نیز همگرا شوند که این اتفاق خود را بصورت نوسان‌هایی در نمودار عقیده نشان میدهد اما باز هم پس از

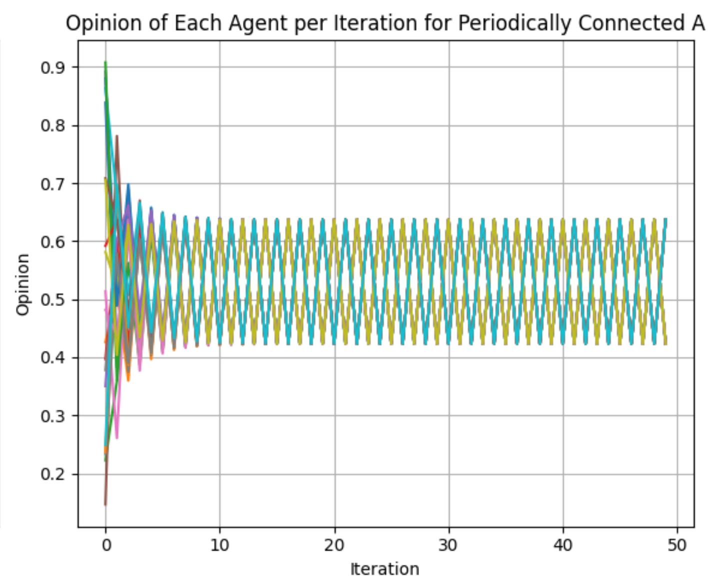
iterationهای بیشتر، نمودارمان وقتی تنها یک عامل دگم داریم، به نمودار بخش‌های قبل مشابه شده است. و در نموداری که دو عامل دگم داریم، نوسان‌ها همچنان وجود دارند و به یک ناحیه‌ی تعادل رسیدیم که عقیده هر عامل در یک محدوده کوچک نوسان میکند.

بخش ۵: Periodically Connected Adjacency Matrix

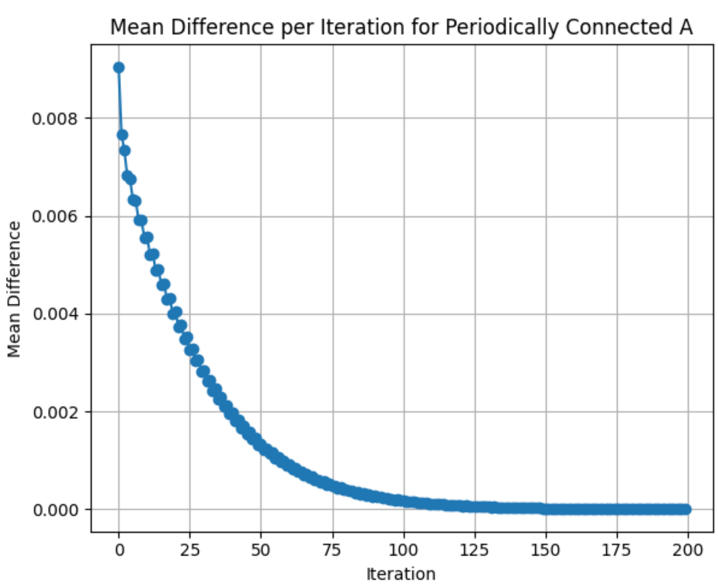
در این بخش ماتریس adjacency بصورت پریودیک میباشد.

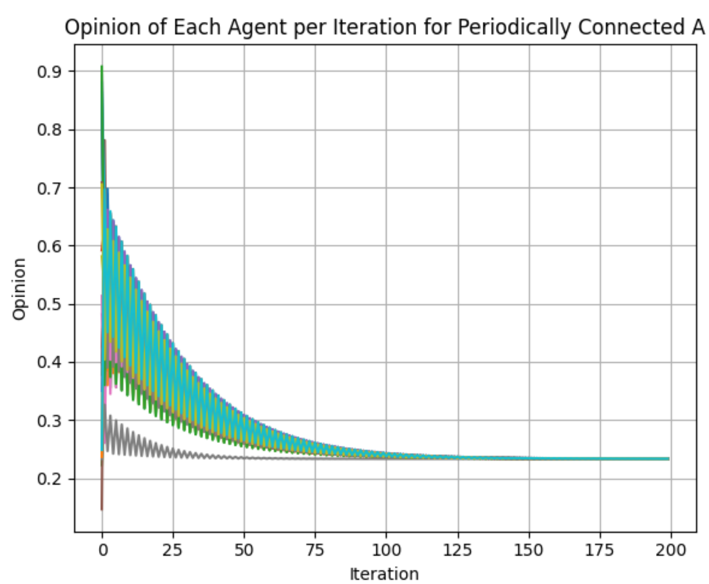
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:



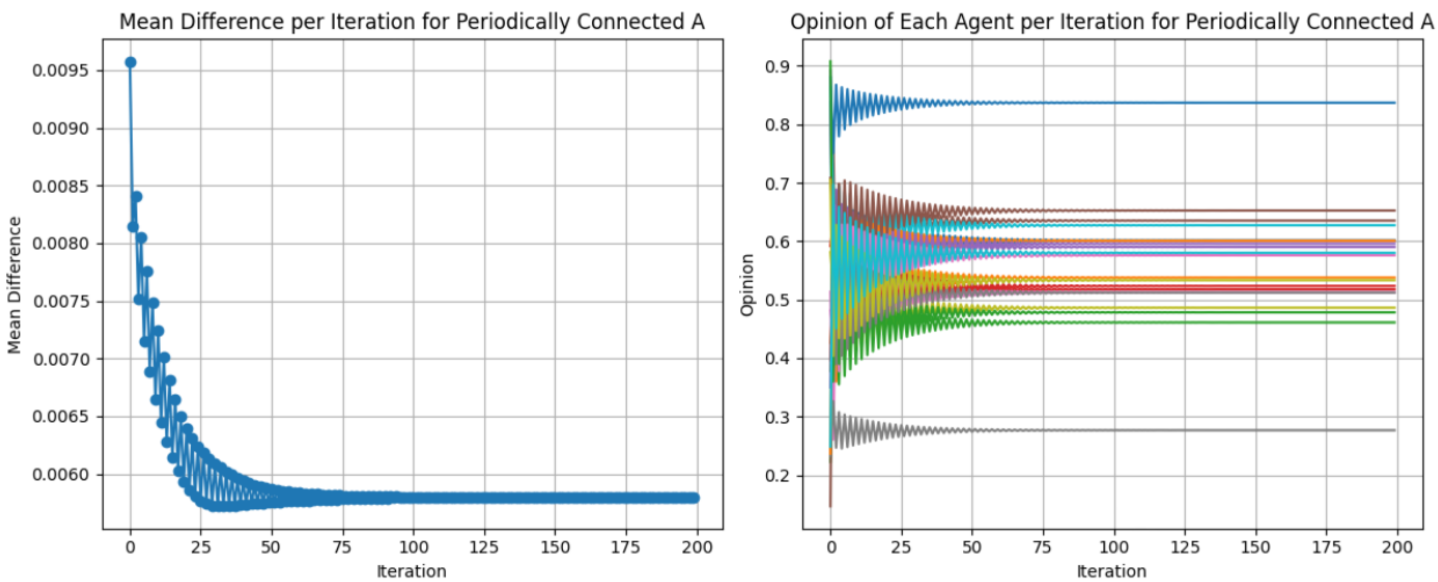


نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:





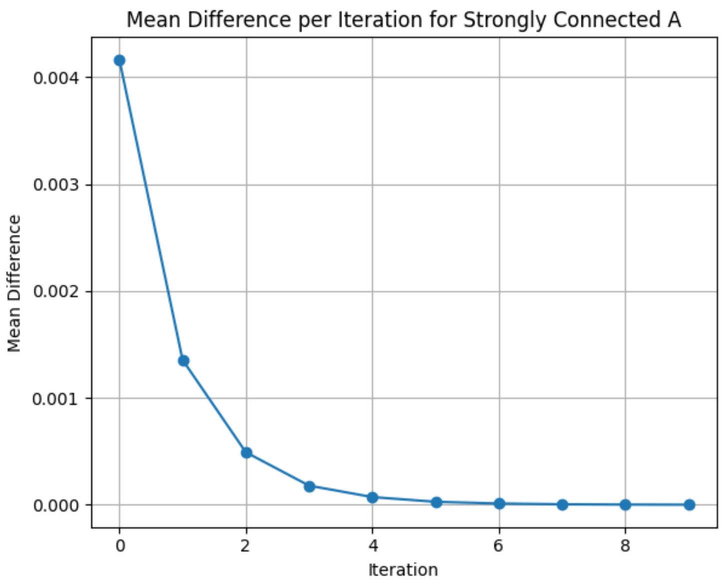
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:

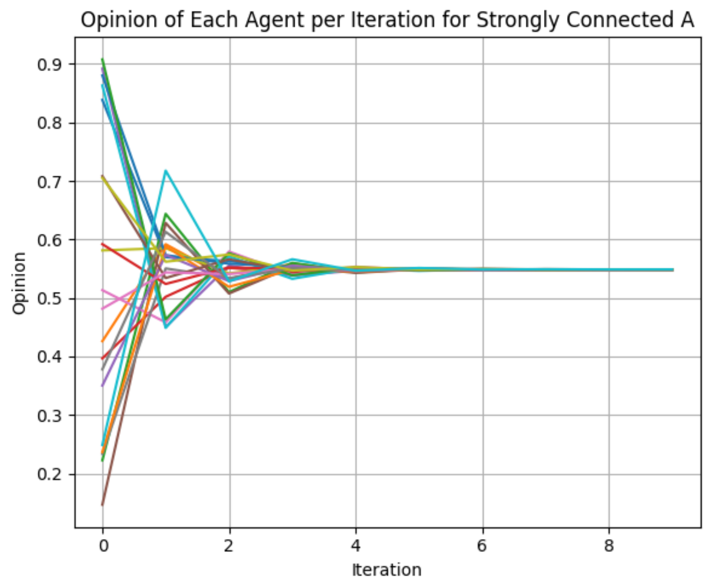


نمودارها این قسمت، تنها در صورتی که یک عامل دگم داریم که نظرش را به سختی تغییر میدهد همگرا شده است و در دو نمودار دیگر یک ناحیه‌ی همگرایی داریم. در دو نمودار دیگر چون تبادل عوامل با یکدیگر دائم در حال تغییر است، به همگرایی نرسیده و هر عامل صرفا به یک تعادل خواهد رسید. تحلیل این بخش بسیار مشابه با قسمت قبل میباشد. اما چون در قسمت قبل تمام درایه‌های ماتریس adjacency، بزرگتر از یک بودند، صرفا وزن همسایه‌های یک عامل تغییر میکرد و در نمودار اول، به همگرایی سریع میرسیدیم. در این قسمت اما در نمودار اول بعلت پریودیک بودن ماتریس A، بین دو نظر دائم جابجا شده و به یک نظر همگرا نخواهند شد. البته ممکن است در صورت مقدار اولیه‌ی متفاوت همگرا شوند و همچنین اگر چند عامل کمی سخت‌تر نظرشان را تغییر دهند، همگرا خواهیم شد. همانطور که در نمودار ۲.

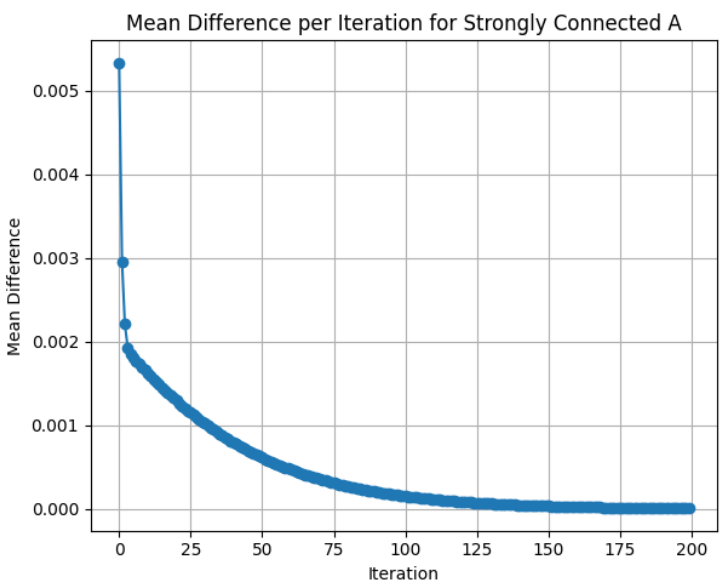
بخش ۶ : Strongly Connected Adjacency Matrix

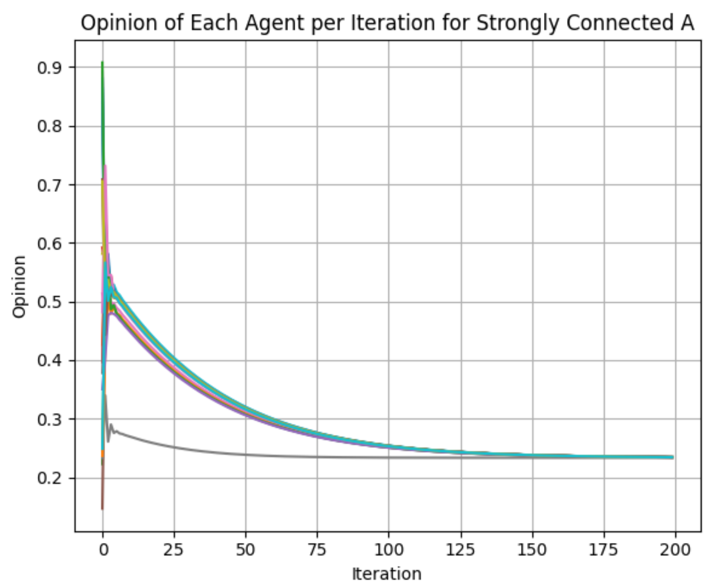
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:



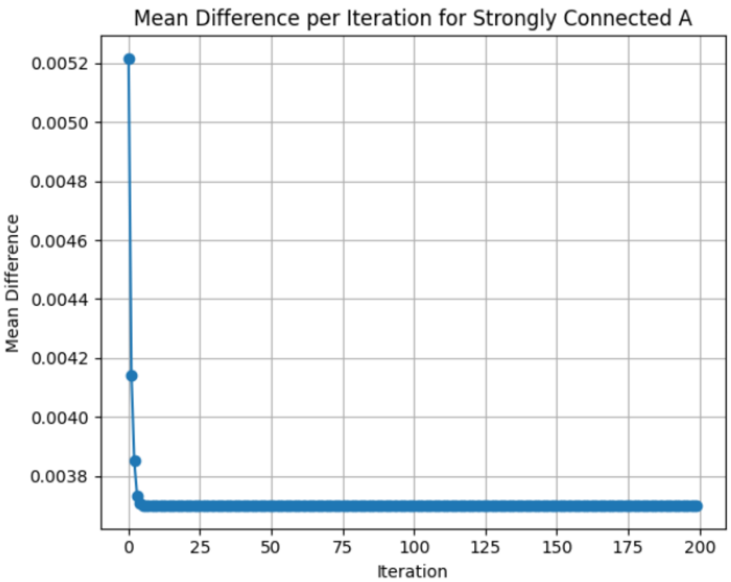


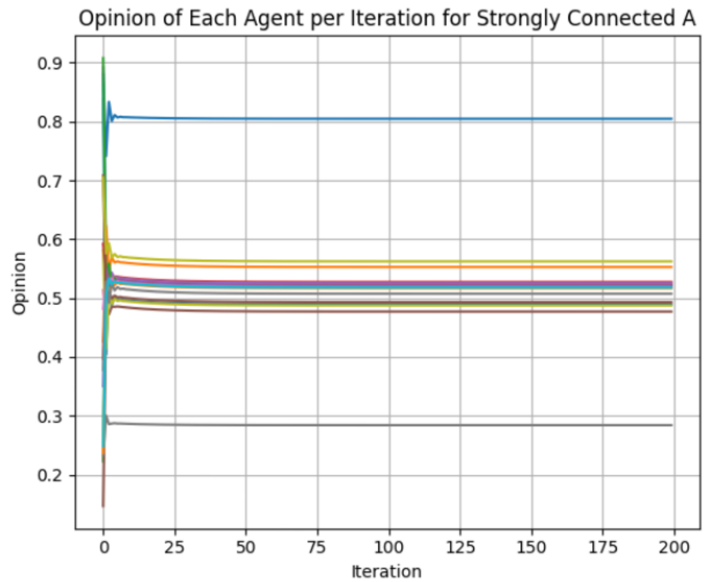
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:





نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:



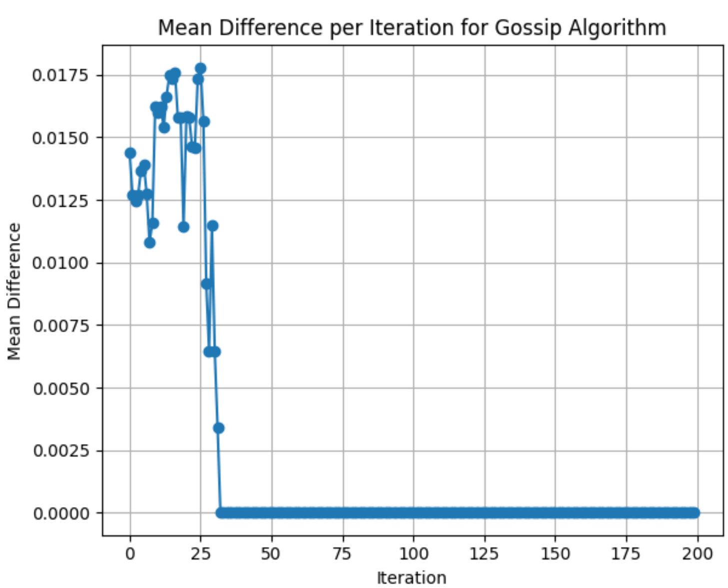


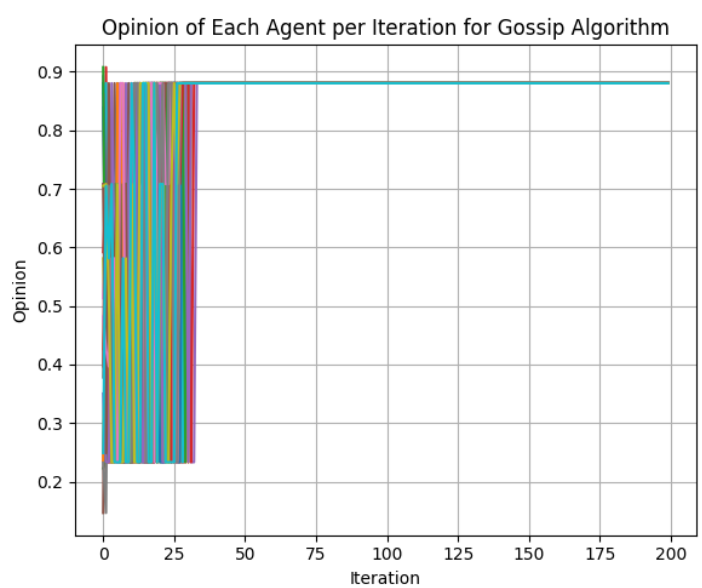
همانطور که انتظار داشتیم، در حالت اول و دوم همگرا شده و در حالت سوم، دو عامل دگم روی نظر خود بوده و سایر عوامل به ناحیه همگرایی رسیده‌اند.

بخش ۷: Gossip Algorithm

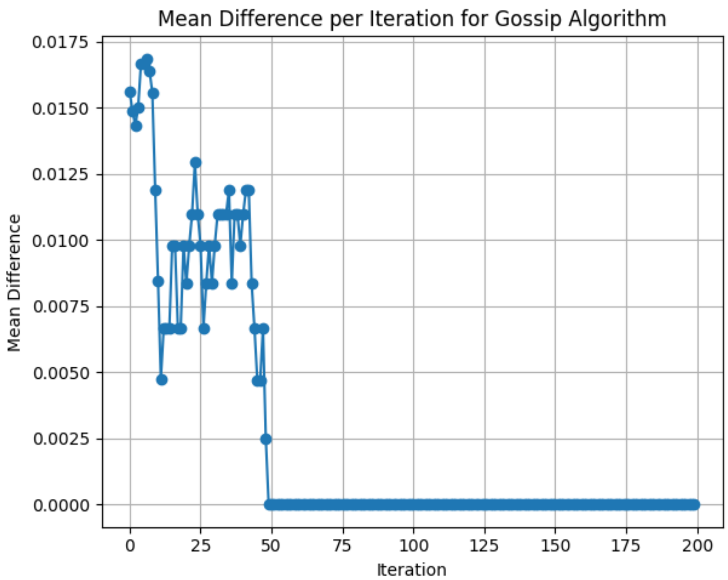
در این قسمت از الگوریتم gossip استفاده میکنیم که به این نحو میباشد که هر عامل در هر iteration، بصورت رندوم همسایه‌ای انتخاب میکند که با آن تبادل نظر کند.

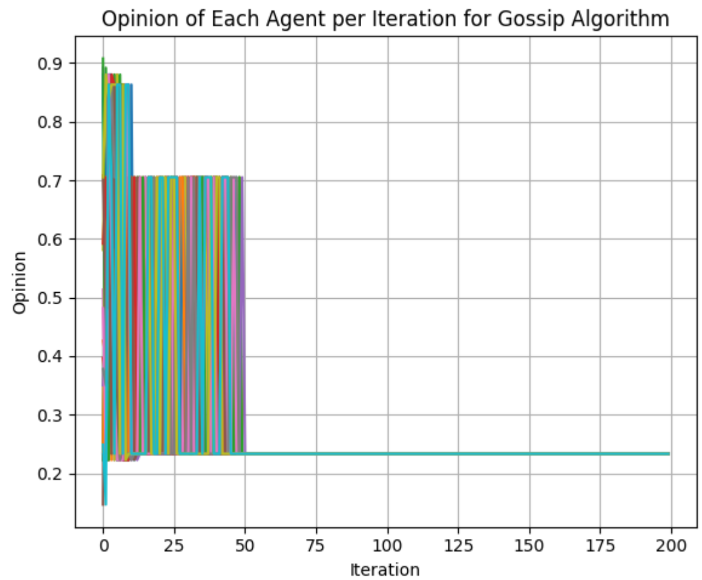
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:



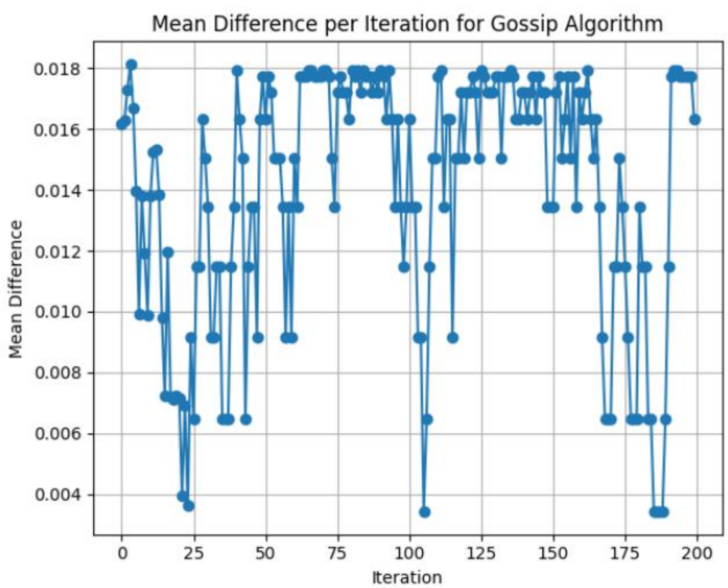


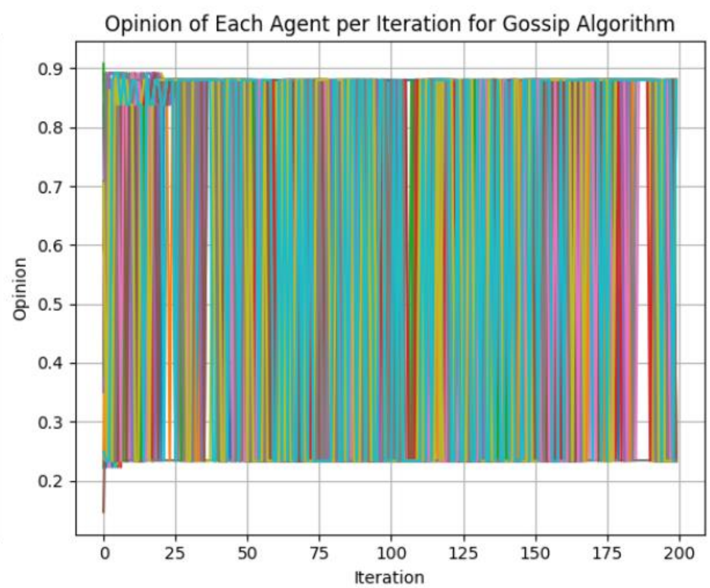
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:





نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:



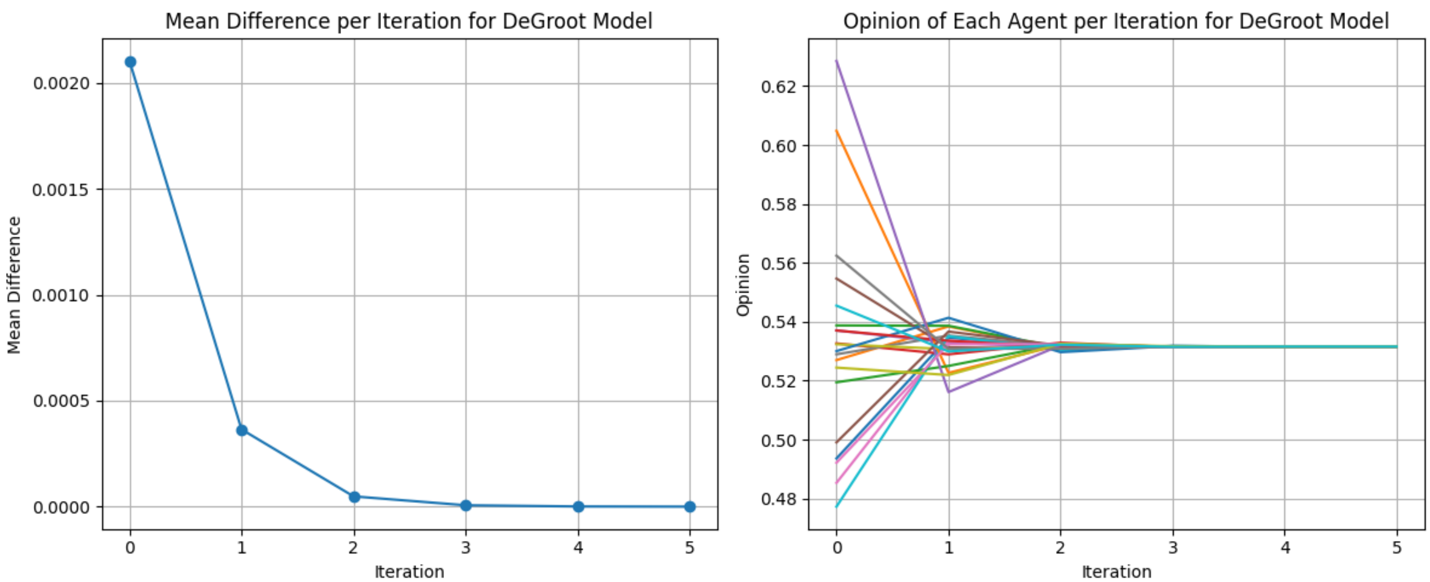


در حالت اول و دوم همانطور که انتظار داشتیم به همگرایی میرسیم. نوسانات بسیار زیاد قبل از همگرایی، بعلت ماهیت الگوریتم گاسیپ میباشد که هر عامل بصورت رندوم با یک عامل دیگر تبادل نظر میکند و در چند iteration اول لزوما نظرات به هم نزدیک‌تر نمیشوند. (خصوصا در حالت اول که تمام عوامل غیردگم هستند و بسیار زود نظر خود را عوض میکنند.) و اما در حالت سوم هرگز به همگرایی و تعادل نخواهیم رسید چراکه دو عامل دگم داریم که هربار سایر عوامل با انها تبادل نظر میکنند، نظرشان را به نظر انها تغییر میدهند و باعث میشود نظرات به حالت سینوسی‌شکل بین این دو نظر عامل دگم در نوسان باشند.

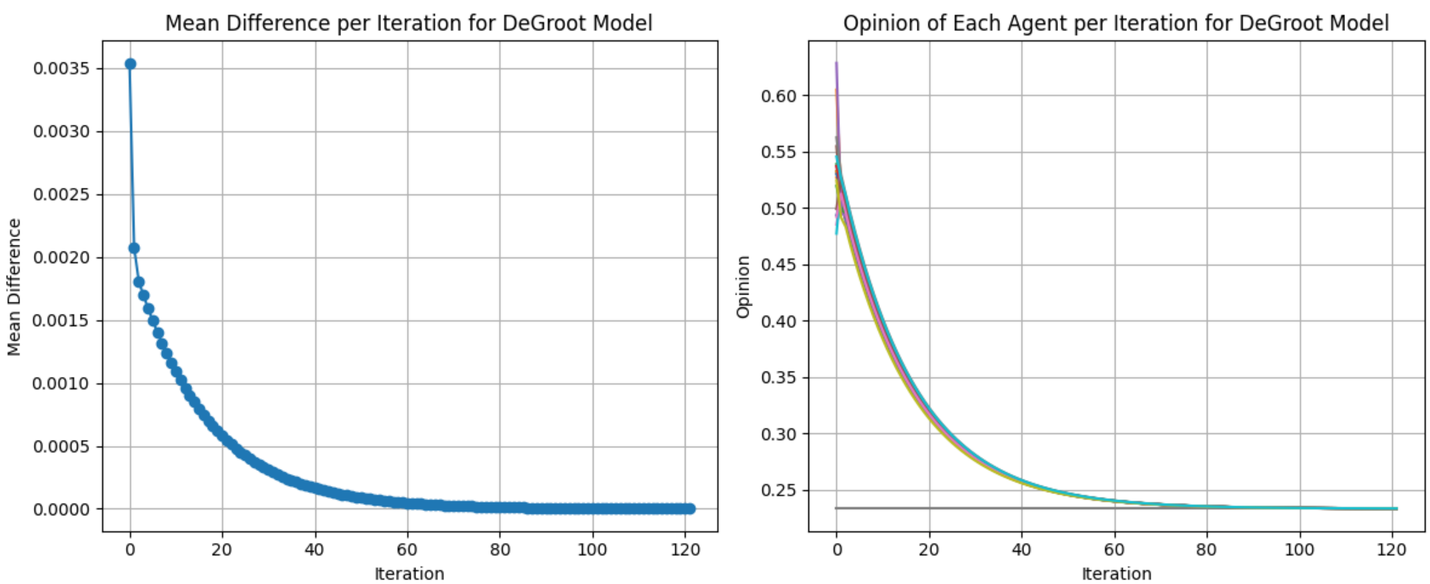
بخش ۸ : DeGroot Model

در این قسمت با استفاده از الگوریتم DeGroot که به این شکل میباشد که در هر iteration، هر عامل، نظر فعلی خود را با استفاده از میانگین عوامل همسایه اپدیت میکند، نتایج زیر بدست آمدند.

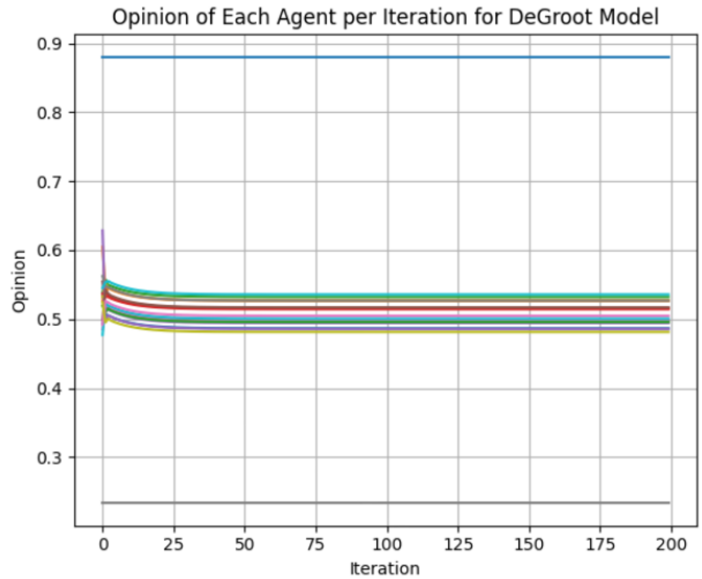
نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که هیچ عامل دگمی نداریم:

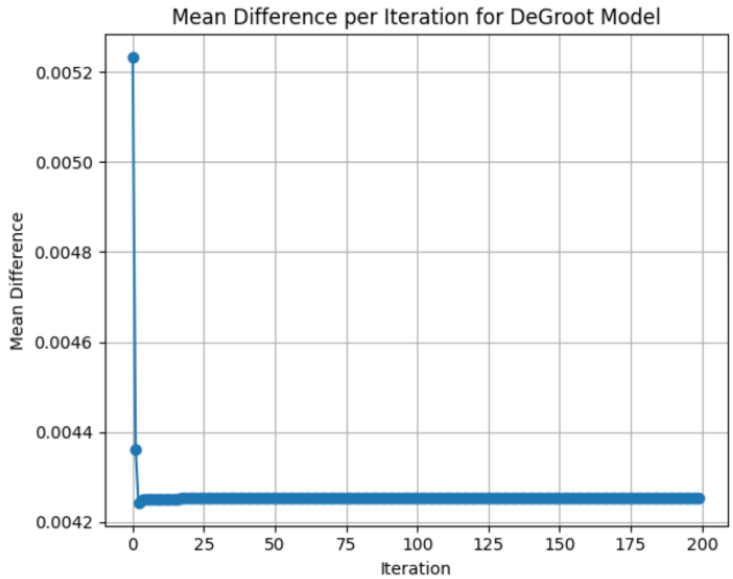


نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که فقط یک عامل دگم داریم:



نمودار همگرایی و نظر هر عامل در صورتی که دو عامل دگم داریم:





بخش ۹ : نتیجه‌گیری

در تمام بخش‌ها دیدیم که در صورتی که فقط یک عامل دگم داشته باشیم، همگرا خواهیم شد و وقتی که هیچ عامل دگمی نداشتیم، در صورت همگرایی، در تعداد iterationهای بسیار کمتری همگرا شدیم. همچنین در یکسری از الگوریتم‌ها، حالتی که هیچ عامل دگمی نداشتیم، صرفا به یک تعادل میرسیدیم و این نشان میدهد علیرغم همگرایی سریع در صورت همگرایی، ممکن است گاهی نظرات، صرفا در یک محدوده‌ی تعادلی نوسان کنند. چراکه نظرات عوامل در این شرایط بسیار راحت عوض میشود و ممکن است دو نظر از دو گروه عوامل، دائما با هم عوض شوند و همگرا نشوند. در این شرایط احتمالا وجود تاخیر در تبادل اطلاعات بتواند مشکل را حل کند. همچنین دیدیم که در صورتی که دو عامل دگم با دو نظر متفاوت داشته باشیم، هرگز به همگرایی نمیرسیم و در بهترین حالت به نظرات به تعادل خواهند رسید و نظر عوامل غیر دگم به یکدیگر نزدیک میشوند اما بعلت حضور عوامل دگم، نظرات سایر عوامل هم همگرا نخواهند شد.